數學辭典

數學辭典

國民政府內政部註冊 二十三年九月二十八日執照警字第三四八〇號

民國十四年十一月印刷
民國十四年十一月發行
民國二十四年一月增訂四版

數學辭典（全一冊）

◎ 普及本 定價銀二元五角
（外埠另加郵匯費）

原編校者 金華倪德基
諸暨酈祿琦
松江雷　琛
增訂者 長沙陳潤泉
橫縣盧　鑫

發行者 中華書局有限公司
代表人陸費逵

印刷者 上海靜安寺路 中華書局印刷所

總發行所 上海棋盤街中華書局

分發行所 各埠中華書局

（四〇七二）（地）

數學辭典

編纂大意

一. 我國關於數學之書,除二三部稍涉高深者外,其餘幾盡爲中學校教科書.而譯名之奇離不符,所在多是.欲求一備辭典之體,爲各科之宗,譯名又精確,便於中西對照,足爲中學校教員專門學校學生及中學生之參考檢查者,則不可得.同人爰編是書,以補斯憾.

一. 本書材料以日本長澤龜之助著數學辭書爲根據,惟原書取材簡略,不敷應用.爰參考下列各書,盡力增益.茲將參考各書,列舉於下:

(一)英文類:

C.Smith.—Elementary Algebra, Treatise on Algebra.

Wentworth.—Elements of Algebra, Higher Algebra.

Hall and Knight.—Elementary Algebra, Higher Algebra.

Burnside and Panton.—Theory of Equations.

Cajori.—Modern Theory of Equations.

Wentworth.—Plane and Solid Geometry.

Hall and Stevens.—School Geometry.

Richardson and Ramsey.—Modern Plane Geometry.

Godfrey and Siddon.—Modern Geometry.

Smith and Gale.—Elements of Analytic Geometry.

Puckle.—Conic Sections.

Snyder and Sisam.—Analytic Geometry of Space.

Hobson.—A treatise on Plane Trigonometry.

Todhunter.—Plane Trigonometry.

Wentworth.—Plane and Spherical Trigonometry.

(二)日文類:

長澤龜之助數學辭書,算術辭典,代數辭典,幾何學辭典,續幾何學辭典,三角法辭典.

(三)中文類:

共和國教科書算術, 民國新教科書算術, 漢譯查理斯密初等代數學, 漢譯溫德華士初等代數學, 大代數

學講義，漢譯溫德華士幾何學，幾何學講義，近世幾何學，非歐幾里得幾何學，中外度量衡比較表.

一．本書所述，詳於初等之部，而高等之部，除重要者已述及外，其較輕者暫付闕如．辭書之部共約三十萬言，插圖三百餘幅.

一．本書辭典之後有附錄六：附錄一與二爲數學之諸法則及定理、公式、表等，舉凡各科之法則及定理、公式、表等，搜羅幾盡，較之他書之東鱗西爪缺而不全者，便利良多，而閱者按圖索驥，不必斤斤運算，時間之經濟，腦力之節省，洵爲數學書中之寶鑑；附錄三爲數學家事略，因我國尙無數學史出版；爰譯 Fink:—Brief History of Mathematics 之人名錄，述及三百餘人，并搜集本國數學家百餘人，以備讀數學者之考查；附錄

四爲英漢名詞對照表;附錄五爲數學用字略;附錄六爲數學用符號.

一. 本書爲總論,各科例題均不列入.以後如續編算術辭典,代數學辭典,幾何學辭典,三角法辭典則當盡行搜集也.

一. 學海無涯,難登彼岸,數學精微,尤易漏誤,本書遺漏謬誤之處,或所不免,讀者諸君,指而教之,所企望也.

數學辭典

總目錄

辭書之部

附錄之部

辭書之部目次

一畫

二畫

三畫

四畫

五 畫

六 畫

七畫

八　畫

九　畫

十畫

十一畫

十 二 畫

十三畫

十四畫

數學辭典

辭書之部

辭典

一畫

一

【一】One 或 Unity.〔算〕數之單位也.凡其他諸數皆可由此數用加法而得之.阿刺伯以 1 記之，羅馬以 I 記之，希臘以 α′ 記之.

【一位】Units' place.〔算〕亦稱個位，即記數時自右第一位也.

【一次式】Expression of the first degree 或 Linear expression.〔代〕代數式之最高次項爲一次者，例如 $x+3$，$a+x+y$ 是也.

【一次項】Term of the first degree.〔代〕項之祇含一文字因數者.例如 $2x$ 及 $35y$ 是也.

【一位數】Units.〔算〕十以下諸數之謂也.

【一乘冪】First power.〔算〕〔代〕一乘冪爲對於二乘冪，三乘冪等而言.某數或式之一乘冪，即本數或式之謂.例如 3 之一乘冪爲 3^1，即 3 之本身；$ax+b$ 之一乘冪，即爲 $ax+b$.

【一般解答】General solution.〔代〕〔微〕亦稱普通解答.代數問題之一般解答，即用一般之數作答數之公式之謂.例如於「父年 30 歲，子年 10 歲，問幾年之後，父年爲子年之二倍」之問題，命父年爲 a 歲，子年爲 b 歲，求幾年後父年爲子年之 m 倍，因得 $a+x=m(b+x)$，即 $x=\frac{a-mb}{m-1}$，是爲一般之解答.如本例 a 爲 30，b 爲 10，m 爲 2，代入之得 $x=\frac{30-2\times10}{2-1}=10$，即十年之後，父年二倍於子年也.於解微分方程式，其結果若含有與方程階數同數之積分常數，則稱之爲一般解答.參閱微分方程式條.

【一項式】Monomial 或 Monomial expression.〔代〕亦稱獨項式或單項式，即代數式之祇有一項者.例如 a 及 $5x^2y$ 是也.

【一次函數】Function of the first degree 或 Linear function.〔數〕函數內自變數之最高乘冪爲一次者.例如 $y=ax+b$，y 爲 x 之一次函數；又如 $z=ax+by+c$，z 爲 x，y 之一次函數.

【一般積分】General integral.〔微〕與一般解答同.

【一價函數】One-valued function 或 Single-valued function.〔數〕於 $y=f(x)$，對於自變數 x 之一值，函數 y 若祇有一值與之相應，則 y 爲一價函數；若有二值與之相應，則爲二價函數；若有數値與之相應，則爲多價函數．例如於 $y=3x^2+4$，與 x 以一值，y 亦祇有一値與之相應，故 y 爲一價函數；而於 $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$，對於 $a,-a$ 間 x 之各値，y 爲二價函數．

【一邊歧點】〔幾〕歧點之第二種，詳歧點條．

【一之三乘根】Cube roots of unity.〔代〕卽一之立方根，見該條．

【一之立方根】Cube roots of unity.〔代〕二項三次方程式 $x^3-1=0$ 之三根，謂之一之立方根或三乘根．因 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$，$x-1=0$ 或 $x^2+x+1=0$．故 $x=1$，$\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，或 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$，而 i 表 $\sqrt{-1}$．是卽一之立方根，後二者爲複虛根．此三根有種種性質：(1)一複虛根之平方等於他複虛根．此實行平方卽可知之．又可證之如次：——若 ω 爲 $x^3-1=0$ 之根，則 $\omega^3=1$，平方之則得 $\omega^6=1$ 或 $(\omega^2)^3=1$，故 ω^2 適合 $x^3-1=0$ 而爲其一根．故一之立方根常以 $1,\omega,\omega^2$ 表之．(2)因 ω 爲 $x^2+x+1=0$ 之根，故 $\omega^2+\omega+1=0$．卽一之立方根之和爲零．此又可證之如次：——因方程式之根之和，等於其次項之係數而變其號者．今 x^2 之係數爲零，故 $1,\omega,\omega^2$ 之和爲零．(3)因 $1\cdot\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1$，故一之立方根之積爲 1．此又可證之如次：——因方程式之根之積，等於其末項而變其號者．今末項爲 -1，故 $1,\omega,\omega^2$ 之積爲1．(4)ω之任何整乘冪，可以 $1,\omega$ 或 ω^2 代之．因若 n 爲 3 之倍數，命爲 $3m$，則 $\omega^n=\omega^{3m}=1$．若 n 不爲 3 之倍數，則必爲 $3m+1$ 或 $3m+2$ 之形式．若 $n=3m+1$，則 $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}\cdot\omega=\omega$．若 $n=3m+2$，則 $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}\cdot\omega^2=\omega^2$．例如 $\omega^6=(\omega^3)^2=1$，$\omega^7=\omega^6\cdot\omega=\omega$，$\omega^8=\omega^6\cdot\omega^2=\omega^2$．(5)任何數 a 之三個立方根，可以 $1,\omega,\omega^2$ 乘其實根而得之．卽 $\sqrt[3]{a}$，$\omega\sqrt[3]{a}$，$\omega^2\sqrt[3]{a}$ 是也．例如27之實根 3 外，其他二複虛根爲 $\dfrac{-3+i3\sqrt{3}}{2}$ 與 $\dfrac{-3-i3\sqrt{3}}{2}$．

【一之 n 乘根】N^{th} roots of unity.〔代〕二項方程式 $x^n-1=0$ 之 n 個根謂之一之 n 乘根．其性質如次：(1)若 n 爲奇數，則有一實根，卽 1 是也，其他諸根皆爲複虛數．因以大於 1 之數代 x，則方程式 $x^n-1=0$ 之左邊爲正數；又以小於 1 之數代 x，則左邊爲負數．故除 1 以外任何正數任何負數皆不適合 $x^n-1=0$．同樣，若 n 爲偶數，則 $+1$ 與 -1 爲 $x^n-1=0$ 之實根，其他諸根皆爲複虛數．(2)若 n 爲奇數，則諸複虛根之代數和爲 -1．因普通方程式諸根

之總和,爲第二項之係數而反其號者.今 $x^n-1=0$ 之第二項之係數爲 0,且祇有一實根1,故其諸複虛根之代數和爲-1.

同理,若n爲偶數,則諸複虛根之和爲零. (3)若n爲奇數,則諸複虛根之連乘積等於$+1$. 因普通方程式諸根之乘積,等於其不含x之項而反其號者,此時卽$+1$是也;而實根爲$+1$,故諸複虛根之連乘積亦爲$+1$. 同樣,若n爲偶數,諸複虛根之連乘積亦爲$+1$. 同理可證明由諸根取相異二根之和,相異三根之和,....,相異r(但$r<n$)根之和亦各爲零.

(4)方程式 $x^n-1=0$ 無等根. 因 $f(x)=x^n-1$, $f'(x)=nx^{n-1}$;而$f(x)$, $f'(x)$ 無含x之公因數,故無等根. (5)若α爲 $x^n-1=0$ 之複虛根,則α^m亦爲一根,m爲任意整數. 因$\alpha^n=1$,故$(\alpha^n)^m=1$,或$(\alpha^m)^n=1$,卽α^m爲$x^n-1=0$之根. (6)若m與n互爲素數,則方程式 $x^m-1=0$ 與 $x^n-1=0$ 不能有除1以外之公根. 若設α爲$x^m-1=0$與$x^n-1=0$之公根,則$\alpha^m=1$, $\alpha^n=1$,而$\alpha^{mb}=1$,$\alpha^{na}=1$,其中a,b爲適合$mb-na=\pm1$之關係之數(可化$\frac{m}{n}$爲連分數而求之).故$\alpha^{mb-na}=1$,卽$\alpha^{\pm1}=1$或$\alpha=1$. 卽1爲二方程式惟一之公根. (7)若h爲m與n之最高公因數,則$x^h-1=0$之根爲$x^m-1=0$與$x^n-1=0$之公根.命$m=hm'$,$n=hn'$,則m'與n'互爲素數.故可求得整數a,b,使$m'b-n'a=\pm1$. 故$mb-na=\pm h$. 故若α爲公根,則$\alpha^m=1$,$\alpha^n=1$,$\alpha^{mb-na}=1$或$\alpha^{\pm h}=1$.此卽表α爲$x^h-1=0$之根. (8)若α爲$x^n-1=0$之複虛根,n爲素數,則諸根爲1,α,α^2,....,α^{n-1}. 由(5)知1,α,α^2,....,α^{n-1}皆爲此方程式之根.且此諸根皆不相同;因若設$\alpha^p=\alpha^q$,則$\alpha^{p-q}=1$. 然由(6),因n與p-q互爲素數,故$x^n-1=0$與$x^{p-q}-1=0$不能有公根.故方程式$\alpha^{p-q}=1$不能成立,而諸根皆含於級數1,α,α^2,....,α^{n-1}內. (9)若n爲由因數p,q,r,....而成之非素數,則方程式$x^p-1=0$,$x^q-1=0$,$x^r-1=0$,....之根皆爲$x^n-1=0$之根. 若α爲$x^p-1=0$之根,則$\alpha^p=1$,而$(\alpha^p)^{qr\cdots}=1$,或$\alpha^n=1$,卽α爲$x^n-1=0$之根. (10)若n爲由因數p,q,r,....而成之非素數,則方程式$x^n-1=0$之根爲乘積$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{p-1})(1+\beta+\cdots+\beta^{q-1})(1+\gamma+\cdots+\gamma^{r-1})\cdots$之n項,但α爲$x^p-1=0$之根,β爲$x^q-1=0$之根,γ爲$x^r-1=0$之根,....積之任意項,例如$\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$,爲$x^n-1=0$之根,因$\alpha^{an}=1$,$\beta^{bn}=1$,$\gamma^{cn}=1$,....,故得$(\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots)^n=1$也.又積中無二項相等者;若命$\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$等於他項$\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}\cdots$,則$\alpha^{a'-a}=\beta^{b'-b}=\gamma^{c'-c}\cdots$此方程式之第一邊爲$x^p-1=0$之根,第二邊爲$x^{qr\cdots}-1=0$之根.因p與$qr\cdots$互爲素數.故由(6),此二方程式不能有公根;而$\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots$不能等於$\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}\cdots$. (11)若$n=p^aq^br^c\cdots$,而p,q,r,....爲

n之素因數，則 $x^n-1=0$ 之根爲形如 $\alpha\beta\gamma\cdots$ 之 n 乘積，而 α 爲 $x^{p^a}-1=0$ 之根，β 爲 $x^{q^b}-1=0$ 之根，γ 爲 $x^{r^c}-1=0$ 之根，……此不過爲 (10) 之擴張者，其理全同．由上所述，知一之 n 乘根之決定可化 n 爲素數或素數之乘冪而決定之．

【一之固有根】Primitive roots of unity.〔代〕方程式 $x^n-1=0$ 之根，不爲相似低次方程式之根者，謂之該方程式之固有根，或一之固有根．例如於 $x^6-1=0$，知 $x^2-1=0$ 與 $x^3-1=0$ 之根爲 $x^6-1=0$ 之根，即 ±1 與 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ 是也．解 $x^2-x+1=0$，求得其他二根爲 $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$，是即 $x^6-1=0$ 之固有根也．一之固有根有次述之性質：(1) n之各次數常有一之固有根．(2)若 α 爲一之固有 n 乘根，則 α^r 亦爲一之固有n乘根，但 r 須與 n 互爲素數．由是，若知一之固有 n 乘根之一，則可求得其他諸一之固有 n 乘根．

【一元方程式】Equation with one unknown number.〔代〕方程式之祇含一未知數者．如 $x-5=7$ 爲一元一次方程式，$ax^2+bx+c=0$ 爲一元二次方程式，$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 爲一元 n 次方程式．

【一次方程式】Equation of the first degree，或 Simple equation，或 Linear equation.〔代〕方程式內未知數之最高乘冪爲一者之謂也．例如 $ax+b=0$ 爲一元一次方程式，其解法爲 $x=-\frac{b}{a}$．又如 $ax+by+c=0$ 爲二元一次方程式，其解法不定．　一次方程式又稱直線方程式，因其圖爲一直線故也．

【一乘拋物線】〔幾〕即方程式爲 $y^2=ax$ 之普通拋物線．亦稱平方拋物線．因我國從前之算書中，稱諸乘方之乘數，均用方指數減一之數，而上之方程式之左端爲 y 之平方，故有此名．又如稱立方拋物線爲二乘拋物線，亦同此例．

【一等連分數】〔代〕連分數因其符號之均爲正或均爲負而稱爲一等連分數或二等連分數．

【一自變數函數】Function of one independent variable.〔數〕函數之祇含一自變數者．例如 $y=ax^2+bx+c$，y 爲一自變數 x 之函數．

【一直角三面角】Rectangular trihedral angle.〔幾〕三面角之有一直角二面角者，謂之一直角三面角．

【一次不定方程式】Indeterminate equation of the first degree.〔代〕不定方程式之爲一次者之謂也．　一次不定方程式之未知數限於正整數時，其解答之數爲有限．　凡含二未知數之一次不定方程式皆可化爲 $ax\pm by=\pm c$ 之形式，然 $ax+by=-c$ 無正整數之解答，而 $ax-by=-c$ 與 $by-ax=c$ 同，故僅研究方程式 $ax\pm by=c$ 即可．且可假定 a,b,c 無公因數，a 與 b 互爲素數．因若 a,b 有公因數 m，而 c 不能以 m 整除之，即 $ax\pm by$ 可以 m 整除之，而 c

不能以 m 整除之，故方程式 $ax \pm by = c$ 不能有正整數之根；若 a, b, c 有公因數，則可用除法以去之. I.求方程式 $ax - by = c$ 之普通解法. 將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數，而命 $\frac{p}{q}$ 爲適在 $\frac{a}{b}$ 前之近數，則 $aq - bp = \pm 1$. 所與之方程式可書之爲 $ax - by = \pm c(aq - bp)$；$\therefore a(x \mp cq) = b(y \mp cp)$. 因 a 與 b 無公因數，故 $x \mp cq$ 必可以 b 整除之；命其商爲整數 t，則 $\frac{x \mp cq}{b} = \frac{y \mp cp}{a} = t$，卽 $x = bt \pm cq$，$y = at \pm cp$. (i)當 $aq - bp = 1$，則 $x = bt + cq$，$y = at + cp$；由是與 t 以任何正整數，或數值小於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中之小者之負整數，可得正整數之解法，故其解法無限. (ii)若 $ap - bq = -1$，則 $x = bt - cq$，$y = at - cp$；由是與 t 以大於 $\frac{cq}{b}$，$\frac{cp}{a}$ 二量中之大者之正整數，可得正整數之解法，故其解法無限. (iii)若 a 或 b 爲 1，則分數 $\frac{a}{b}$ 不能化成分子爲 1 之連分數，而上法不能用.然此時解法可由視察得之. 如 $b = 1$，則方程式變爲 $y = ax - c$，其解法可與 x 以大於 $\frac{c}{a}$ 之正整數而得之，故其解法無限. II.求 $ax + by = c$ 之普通解法.其解法與 I 相似. (i)若 $aq - bp = 1$，則 $x = cq - bt$，$y = at - cp$；由是其正整數之解法可與 x 以大於 $\frac{cp}{a}$ 而小於 $\frac{cq}{b}$ 之正整數而得之，故其解法有限. (ii)若 $aq - bp = -1$，則 $x = bt - cq$，$y = cp - at$；由是其正整數之解法可與 x 以大於 $\frac{cq}{b}$ 而小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整數而得之，故其解法有限. (iii)若 a 或 b 爲 1，則與 I 之(i)同. 〔例〕求 $29x - 42y = 5$ 之正整數之解法. 化 $\frac{42}{29}$ 爲連分數，$\frac{42}{29}$ 之前之近數爲 $\frac{13}{9}$；故得 $29 \times 13 - 42 \times 9 = -1$. $\therefore 29 \times 65 - 42 \times 45 = -5$，與所與方程式相合，則得 $29(x + 65) = 42(y + 45)$；$\therefore \frac{x+65}{42} = \frac{y+45}{29} =$ 整數 t. 故普通解法爲 $x = 42t - 65$，$y = 29t - 45$.

【一次有向量函數】Linear vector function.〔數〕二有向量和之函數等於此二有向量之函數之和時，則此有向量之連續有向函數，謂之一次有向量函數. 卽命 ρ_1，ρ_2 爲二有向量，若 $f(\rho_1 + \rho_2) = f(\rho_1) + f(\rho_2)$，則函數 f 謂之一次有向量函數.

【一次聯立方程式】Simultaneous equations of the first degree.〔代〕卽聯立方程式之爲一次方程式者，見聯立方程式條.

【一次一階微分方程式】Differential equation of the first degree and of the first order.〔微〕微分方程式之次數階數均爲一者之謂. 與一階一次微

分方程式同，見該條。

【一次高階微分方程式】Differential equation of the first degree and of the higher order.〔微〕微分方程式之次數為一，階數高於一者之謂。與高階一次微分方程式同，見該條。

【一階一次微分方程式】Differential equation of the first order and of the first degree.〔微〕微分方程式之階數為一，其次數亦為一者，謂之一階一次微分方程式。此類方程式大概可使變為 $Mdx+Ndy=0$ 之形，而 M 與 N 為 x 與 y 之函數。又此類方程式可區分為四種模範形態：

(1)變數可分離者。將如上述之微分方程式之各項列為 $f(x)dx+F(y)dy=0$ 之形，而 $f(x)$ 僅為x之函數，$F(y)$ 僅為y之函數時，此方法稱曰變數分離法，其解答可直接由積分法得之。例如積分 $f(x)dx+F(y)dy=0$，得一般解答 $\int f(x)dx+\int F(y)dy=c$，c為任意常數。至實際上之變數分離，可分為三步：第一步，整理函數。若方程式含有微分係數，則以自變數之微分徧乘各項。第二步，集合含同一微分之諸項為一單項。若所成之方程為 $XYdx+X'Y'dy=0$ 之形，其 X, X' 為僅x之函數，Y, Y' 為僅y之函數，則可由以 $X'Y$ 徧除各項使其變數分離。第三步，分別積分其每部。例題，解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$。解：第一步，$(1+x^2)xydy=(1+y^2)dx$，第二步，$(1+y^2)dx-x(1+x^2)ydy=0$，$\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{ydy}{1+y^2}=0$。第三步，$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=C$，$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=C$，$\log x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{1}{2}\log(1+y^2)=C$，$\log(1+x^2)(1+y^2)=2\log x-2C$。以 $\log c$ 代 $-2C$，得 $\log(1+x^2)(1+y^2)=\log x^2+\log c$，$\log(1+x^2)(1+y^2)=\log cx^2$，$(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$。

(2)同次方程式。微分方程式 $Mdx+Ndy=0$，當M與N為相同次數之x與y之同次函數時，稱曰同次微分方程式。此種方程式可令 $y=vx$，然後再行變數分離以解之。例題，解方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$。解：$y^2dx+(x^2-xy)dy=0$，令 $y=vx$，則 $dy=vdx+xdv$，代入上式，得 $v^2x^2dx+(x^2-vx^2)(vdx+xdv)=0$，$x^2vdx+x^3(1-v)dv=0$，$\frac{dx}{x}+\frac{(1-v)dv}{v}=0$，$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{v}-\int dv=C$，$\log x+\log v-v=C$，$\log vx=C+v$，$vx=e^{c+v}=e^c\cdot e^v$，$vx=ce^v$，但 $v=\frac{y}{x}$，故 $y=ce^{\frac{y}{x}}$。

(3)單系方程式。微分方程式之因變數 y 與其徵係數或微分為一次時，稱曰單系微分方程式。一階單系微分方程式為次之形，$\frac{dy}{dx}+Py=Q$；P，Q 為僅 x 之函數或常數，其解答為 $y=e^{-\int Pdx}(\int Qe^{\int Pdx}dx+C)$。

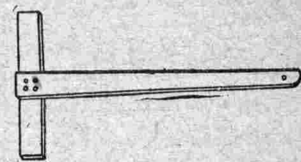
(4)柏努利方程式,非單系方程式有時能以適宜之變形方法化為單系方程式之形如$\frac{dy}{dx}+py=Qy^n$,其P,Q均單為x之函數或常數,此範式稱曰柏努利方程式.柏氏方程可由代y^{-n+1}以Z化為單系方程.解:若$n\neq1$,則$y^{1-n}=(1-n)e^{(n-1)\int Pdx}(\int Qe^{-\int(-1)Pdx}dx+C)$.若$n=1$,則$\log y=\int(Q-P)dx+C$.

【一階高次微分方程式】Differential equation of the first order and of the higher degree.〔微〕微分方程式之階數為一,次數高於一者之謂.與高次一階微分方程式同,見該條.

二畫

丁

【丁字板】Tee-square〔幾〕畫圖器,以扁薄二木條製之.形如丁字,故名.與三



角板並用以畫平行線及垂線,其形如圖.

七

【七】Seven〔算〕數名.阿剌伯以7記之,羅馬以VII記之,希臘以ζ'記之.

【七角形】Heptagon.〔幾〕即七邊形.

【七面體】Heptahedron.〔幾〕即七平面所包圍之立體也.

【七進法】Septenary scale.〔代〕即以七為記數底之記數法也.此記數法用數字1, 2, 3, 4, 5, 6及0即足,而於七進法中,2453即表$2\times7^3+4\times7^2+5\times7+3$之意.

【七點圓】Seven-point circle.〔幾〕即布洛喀圓,見該條.

【七邊形】Heptagon.〔幾〕即七直線所包圍之平面形.亦稱七角形.

九

【九】Nine.〔算〕為基數之一.阿剌伯以

9 記之，羅馬以 IX 記之，希臘以 θ' 記之.

【九九】〔算〕自一至九每二數相乘謂之九九。

【九章】〔數〕算法之名，又算書之名.見九章算術條。

【九數】〔數〕即九章算法。

【九歸】〔數〕珠算中法數在九以內者之除法也.運算時所用之口訣,謂之九歸訣.

【九九表】Multiplication table.〔算〕即乘法表,見該條。

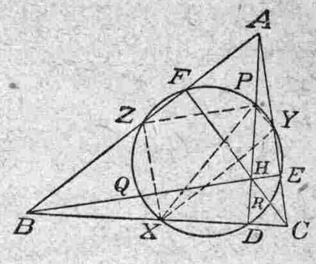
【九去法】Rule for casting out the nines.〔算〕即去九法,見該條。

【九角形】Enneagon 或 Nonagon.〔幾〕即九邊形。

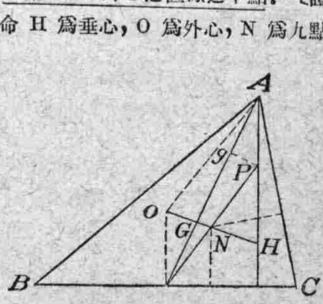
【九面體】Enneahedron.〔幾〕即九平面所包圍之立體也。

【九進法】Nonary scale.〔代〕即以九爲記數底之記數法也.此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 及 0 即足,而於九進法中,3652 即表 $3\times 9^3+6\times 9^2+5\times 9+2$ 之意.

【九點圓】Nine-point circle.〔幾〕三角形 ABC 三邊之中點 X,Y,Z, 三垂足 D,E,F, 及由垂心 H 至各角頂之直線 HA,HB,HC 之中點 P,Q,R 在同一圓周上.此圓謂之九點圓，因其過九點故名.而此定理爲邦斯界 (Poncelet) 所發明，故謂之邦斯界定理.〔證〕聯 XY, XZ, XP, YP, ZP. 由 △ABH, 因 AZ=ZB, AP=PH, ∴ZP∥BH. 又由 △ABC, 因 BZ=ZA, BX=XC, ∴



ZX∥AC. 然延長 BH, 與 AC 成直角，故 ∠XZP 爲直角.同樣 ∠XYP 亦爲直角.故 X,Z,P,Y 在同一圓周上；即 P 在經過 X, Y, Z 之圓周上，而 XP 爲此圓之直徑.同樣可證明 Q, R 亦在此圓周上.又因 PDX 爲直角，故以 XP 爲直徑之圓通過D.同樣可證明 E, F 在此圓周上.故 X,Y,Z,D,E,F,P,Q, R 在同一圓周上.茲述九點之重要性質如次：(1)九點圓爲垂足三角形之外接圓.此已含於上定理中，因九點圓過三垂足 D,E,F 故也.(2)九點圓心爲聯結垂心外心之直線之中點.〔證〕命 H 爲垂心，O 爲外心，N 爲九點圓



心.作 XD 之中垂線，則此中垂線平

分 HO. 同樣作 EY 之中垂線,則此線亦平分 HO. 即此等垂線交於 HO 之中點. 而因 XD 與 EY 爲九點圓之弦,故弦之中垂線之交點爲九點圓心,故九點圓心 N 爲 HO 之中點. (3)九點圓心,垂心,外心,重心在同一直線上.

〔證〕由 (2)知九點圓心,垂心,外心在同一直線上. 聯 AX,作 Pg 平行於 HO,交 AX 於 g. 命 AX 交 HO 於 G. 則由 $\triangle AGH$,因 $AP=PH, PG \parallel HG$,$\therefore Ag=gG$. 又由 $\triangle XPG$,因 $PN=NX$, $NG \parallel Pg$, $\therefore gG=GX$. $\therefore AG=\frac{2}{3}AX$. 故 G 爲 $\triangle ABC$ 之重心.即重心 G 與 O, N, H 爲共線點. (4)九點圓之半徑爲外接圓之半徑之半.

〔證〕因 N 爲 HO 之中點, P 爲 HA 之中點,故 $NP=\frac{1}{2}OA$. 即九點圓之半徑等於外接圓之半徑之半也. (5)九點圓與內切圓傍切圓相切. 此即費兒巴黑定理,見該條.

【九邊形】Enneagon 或 Nonagon.〔幾〕即九直線所包圍之平面形也.

【九驗法】Rule for casting out the nines.〔算〕即去九法,見該條.

【九十面體】Enneacontahedron.〔幾〕即九十平面所包圍之立體也.

【九章算術】〔數〕我國最古算法,亦稱九數,昔黃帝使隸首作算數即此.今所傳者凡九篇. 一曰方田,以御田疇界域.詳簡單幾何圖形之計算,以圓周率爲 3.二曰粟米,以御交質變易. 詳百分法之算. 三曰衰分,以御貴賤廩稅. 四曰少廣,以御積冪方圓. 五曰商功,以御工程積實. 詳立方體,角錐,圓錐,圓柱等體之積.六曰均輸,以御遠近勞費. 七曰盈不足,以御隱雜互見. 八曰方程,以御錯糅正負. 用正負之則,以計算聯立方程. 九曰勾股,以御高深廣遠.用畢達哥拉斯定理以量地.

二

【二】Two〔算〕數名. 爲一加一之結果. 阿剌伯以 2 記之,羅馬以 II 記之,希臘以 β′ 記之.

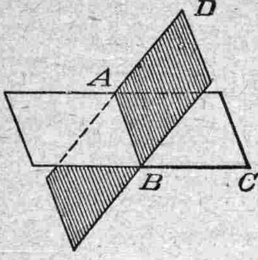
【二次式】Quadratic expression.〔代〕代數式之含某文字之二乘冪或二以上文字之二次元者. 例如 $5x^2-2x+3$, $xy+y+4$, $xy-xz-z+1$ 皆是也.

【二次根】Second root.〔算〕〔代〕與平方根同.

【二次項】Term of the second degree.〔代〕項之含某文字之二乘冪或二文字之二次元者.如 $3x^2$, $7xy$ 是也.

【二面角】Dihedral angle.〔幾〕二相交平面間之角,謂之二面角.二平面AC,BD 爲二面角之面,其交線 AB 爲二面角之稜.二面角常以其稜或二面與稜表之,即以 AB 或 C-AB-D 表之.二面角又可視爲其一面由他面之位置,以稜爲軸迴轉之所生者,而二面角之大小,不關於面之大,而依此迴轉之量之多少.二平面相交,生二組相等之二面角,謂之對稜二

面角。於二面角之稜之任意一點，作稜之垂線於各面，此二垂線間之角爲一定，而謂之二面角之平面角，二面角卽用此角以測度之。



【二重根】Double roots.〔代〕若方程式有二根相等，則此根謂之二重根。例如方程式 $x^3-3x^2+4=0$ 可寫爲 $(x+1)(x-2)^2=0$。故此方程式有二根爲 2，而 2 爲二重根。

【二乘比】Duplicate ratio.〔算〕〔代〕比 $2^2:5^2$ 謂之比 $2:5$ 之二乘比，而比 $a^2:b^2$ 謂之比 $a:b$ 之二乘比。

【二乘根】Second root.〔算〕〔代〕與平方根同。

【二乘冪】Second power.〔算〕〔代〕與平方同。

【二項式】Binomial 或 Binomial expression.〔代〕卽由二項而成之式。例如 $x+a$，$2x^3+5y$ 是也。

【二距斜】〔幾〕日本算書中稱正多角形內間一角之對角線爲二距斜或二面斜。如此之對角線截正多角形之一部爲二等邊三角形。

【二進法】Binary scale.〔算〕〔代〕於記數時滿 2 卽進位之法，謂之二進法，卽以二爲記數底之記數法也。二進法用 0 及 1 二數字卽足。例如於二進法所寫之 1101，卽 $1\times2^3+1\times2^2+1$ 之意也。

【二十面體】Icosahedron.〔幾〕卽二十平面所包圍之立體也。

【二次曲面】Quadric 或 Quadric surface.〔幾〕x，y，z 之二次方程式之軌跡，謂之二次曲面。任何二次曲面之方程式經適當之坐標之變換，可化成下列諸種如下：

球　$x^2+y^2+z^2=a^2$.

扁橢圓體　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a=b>c)$.

長橢圓體　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b=c)$.

虛橢圓體　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

單翼雙曲線體　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

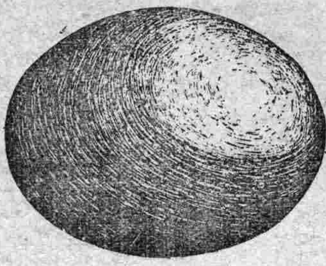
雙翼雙曲線體　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

橢圓的抛物線體　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nz$.

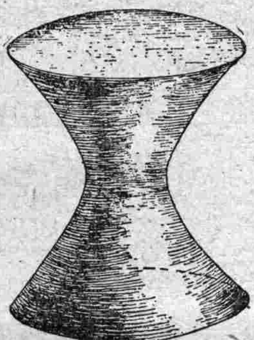
雙曲線的抛物線體　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz$.

實二次錐面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

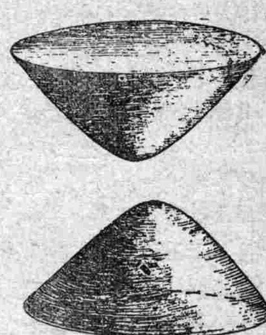
虛二次錐面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$.



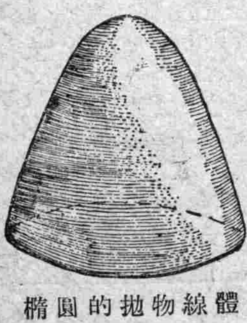
楕 圓 體



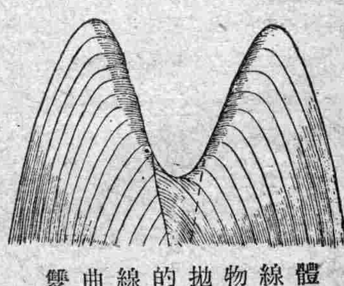
單翼雙曲線體



雙翼雙曲線體



楕圓的拋物線體



雙曲線的拋物線體

橢圓的柱面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

雙曲線的柱面　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

拋物線的柱面　$y^2=2px$.

虛柱面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

【二次曲線】Curve of the second degree.〔幾〕x,y 之二次方程式之軌跡，謂之二次曲線．因此等曲線可以一平面截一圓錐面而得之，故亦稱圓錐曲線，詳該條．

【二次函數】Quadratic function.〔數〕即函數內自變數之最高乘羃爲二者．例如 $y=ax^2+bx+c$，y 爲 x 之二次函數．

【二重積分】Double integral.〔積〕見偏積分法條及疊次積分法條．

【二重關係】〔三〕見三角函數條．

【二項曲線】Binomial curve.〔幾〕凡能用橫線 x 之二項函數的某乘羃表縱線 y 之曲線，稱曰二項曲線．例如方程式 $y=x^m(a+bx^n)^p$ 之曲線是．

【二項係數】Binomial coefficients.〔代〕二項係數者，依二項式之定理將 $(x+1)^n$ 展開時，x 之各乘羃之係數之謂，

即 $1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$,

$\cdots\cdots, \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, \cdots$ 是也．

當 n 爲正整數時，此等係數等於 ${}_nC_1$, ${}_nC_2, {}_nC_3, \cdots, {}_nC_r, \cdots$，但 ${}_nC_r$ 爲由 n 物每次取 r 物之組合之數．二項係數之性質如次：(1)因 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_rx^r+\cdots+C_nx^n\cdots$(I)．$\therefore$ $C_0=C_n=1$，$C_1=C_{n-1}=n$，$C_2=C_{n-2}=\frac{n(n-1)}{2!}, \cdots$，$C_r=C_{n-r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$, $\cdots$．即由二項展開式兩端等距離之項之係數相等．(2)於(I)內命 $x=1$，則得 $2^n=C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n$．即 $(1+x)^n$ 之展開式諸係數之和爲 2^n．(3)於(I)內命 $x=-1$．則得

$$(1-1)^n=C_0-C_1+C_2-C_3+\cdots\cdots,$$

$$\therefore C_0+C_2+C_4+\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots.$$

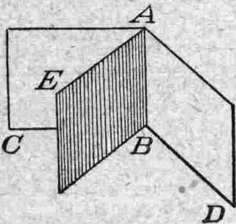
故 $(1+x)^n$ 之展開式內諸奇數項之係數之和等於諸偶數項之係數之和．(4)因 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$ 及 $(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots+C_0x^n$．於此二級數之積，其 x^n 之係數爲 $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2$，而 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中 x^n 之係數爲 $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$．即諸二項係數之平方和等於 $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$．

【二項級數】Binomial series.〔代〕依二項式定理將 $(x+a)^n$ 展開之，其所得之級數謂之二項級數，即

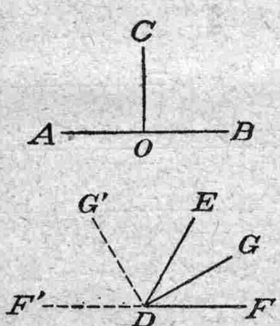
$$x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3x^{n-3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^rx^{n-r}+\cdots\cdots\cdots.$$

若 n 爲分數或負數，則此級數爲無窮級數.

【二等分面】Bisector.〔幾〕分一幾何量爲二等分之平面，謂之此量之二等分面，或平分面.普通多指二面角之二等分面.如圖，若二面角 C—AB—E 及二面角 D—AB—E 相等，則BE爲二面角 C—AB—D 之二等分面．而二等分面內各點由二面角之二面之距離均等.



【二等分線】Bisector.〔幾〕分一幾何量爲二等分之直線，謂之此量之二等分線或平分線.如圖，若直線 AO,BO 相等，則 CO 爲 AB 之二等分線，而 O 謂之二等分點．又如角 EDG, FDG 相等，則DG爲角EDF之二等分線．普通所謂二等分線多指角之二等分線．而角之二等分線又稱爲內二等分線，其外角之二等分線稱爲外二等分線．內二等分線與外二等分線互相垂直．如圖，DG 爲內二等分線，DG′ 爲外二等分線，因 $\angle EDG=\frac{1}{2}\angle EDF$, $\angle EDG'=\frac{1}{2}\angle EDF'$, $\therefore \angle EDG+\angle EDG'=\frac{1}{2}(\angle EDF+\angle EDF')$，即 $\angle GDG'=\frac{1}{2}\angle FDF'=\frac{1}{2}(2\text{rt.}\angle s)=\text{rt.}\angle$. $\therefore DG\perp DG'$．二等分線上各點與角之二邊之距離均等，故二等分線爲與角之二邊等距離點之軌跡.



【二等分點】Point of bisection.〔幾〕見二等分線條.

【二價函數】Two-valued function.〔數〕函數之對於自變數之一值，有二值與之相應者.見一價函數條.

【二十四面體】Tetrahexahedron.〔幾〕二十四個平面所包圍之立體也.

【二元方程式】Equation with two unknown numbers.〔代〕即方程式之含二未知數者．如 $2x+5y+1=0$ 爲二元一次方程式，$x^2+3xy-2y+4=0$ 爲二元二次方程式.

【二次不盡根】Quadratic surd或Surd of the second order.〔代〕根指數爲 2 之不盡根謂之二次不盡根.例如$\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$是也.二次不盡根又稱平方不盡根.

【二次方程式】Quadratic或Quadratic equation 或 Equation of the second degree.〔代〕方程式之含未知數之二乘冪或二次元之項者，謂之二次方程式.例

如 $3x^2-5x+6=0$，$x^2-xy+y^2=0$，$xy+x-2y-7=0$ 皆爲二次方程式.

I. 普通一元二次方程式爲 $ax^2+bx+c=0$. 用配方法可求得其二根.命以 α β 表之，

則
$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$
$$\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

由是 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 故二根之和等於 $-\frac{b}{a}$，而二根之積等於 $\frac{c}{a}$. 例如於方程式 $5x^2-2x+3=0$，其二根之和爲 $\frac{2}{5}$，其積爲 $\frac{3}{5}$. 〔根之討論〕 b^2-4ac 謂之方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式；其根之性質，可以此式判別之.

(1)若 $b^2-4ac>0$，則二根爲不等之實數. 例如於 $x^2-5x-10=0$，$b^2-4ac=65$，故二根爲不等之實數. (2)若 $b^2-4ac=0$，則二根爲相等實數. 例如於 $x^2-12x+36=0$，$b^2-4ac=0$，故知其二根爲相等實數. (3)若 $b^2-4ac<0$，則二根爲共軛複虛數. 例如於 $x^2-3x+5=0$，$b^2-4ac=-11$，故知其二根爲共軛複虛數. (4)若 b^2-4ac 爲正有理數之平方，則二根爲有理實數. 例如於 $x^2-3x+4=0$，$b^2-4ac=25=5^2$，故知其二根爲有理實數. (5)若 b^2-4ac 不爲正有理數之平方，則二根爲共軛無理實數. 例如於 $x^2+7x+9=0$，$b^2-4ac=13$，故知其二根爲共軛無理實數. (6)若 $a=c$，則二根互爲倒數. 例如於 $3x^2-5x+3=0$，其二根互爲倒數. (7)若 $b=0$，則二根之絕對值相等，而號相反. 例如於 $2x^2+7=0$，其二根之絕對值相等而號相反. (8)若 $c=0$，則一根爲零，他根爲 $-\frac{b}{a}$. 例如於 $3x^2+5x=0$ 其一根爲 0，他根爲 $-\frac{5}{3}$.

(9)若 $b=0, c=0$，則二根皆爲零. 例如 $5x^2=0$ 是也. 又若 a 爲零，則方程式由二次變爲一次. 然若 a 逐漸減小，則二根之值如何，茲進考之. (10)若 $a=0$，則一根爲 $-\frac{c}{b}$，而他根爲無窮大. 即此時 $\alpha=-\frac{b}{0}+\frac{\sqrt{b^2}}{0}=\frac{-b+b}{0}$

$=\frac{0}{0}$，而爲不定形.

$$然\ \alpha=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$
$$=\frac{\{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}\}\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}{2a\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}\}}=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}.$$

故若 $a=0$，則 $\alpha=-\frac{c}{b}$. 又 $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}$

$=\frac{-2b}{0}=\infty$. 例如於 $0\cdot x^2+3x+2=0$，一根爲 $-\frac{2}{3}$，而他根爲 ∞. (11)若 $a=0$，$b=0$，則二根俱爲無窮大. 因 α

$$=\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}=\frac{2c}{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

及 $\beta=\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

$=\frac{2c}{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}$.故若$a=0$, $b=0$，則 $\alpha=\infty,\beta=\infty$. 例如於 $0\cdot x^2+0\cdot x+3=0$，二根俱爲無窮大.

II. 普通二元二次方程式爲

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\cdots$(i)，玆求其左邊可分解爲二個一次因數之條件. 視 (i) 爲 x 之二次方程式，卽

$ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c=0$.

解之，得 $x=$

$$\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

或 $ax+hy+g$

$=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)}$.

故欲 (i) 之左邊可分解爲二個形如 $px+qy+r$ 之二個一次因數，則根號內之式必須爲一完全平方；故 $(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$. 移項，且展開之，以 a 除之，則得

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0\cdots$(ii)，

是爲所求之條件. (ii)之左邊謂之(i)之判別式，此式於解析幾何學中甚爲重要. 若(ii)成立時，則(i)之左邊可分解爲二一次因數，而表二直線；若 (ii) 不成立，則 (i) 表一二次曲線.

【二乘拋物線】〔幾〕卽立方拋物線. 詳一乘拋物線條.

【二等連分數】〔代〕見一等連分數條.

【二項方程式】Binomial equation.

〔代〕方程式$x^n-a=0$，謂之二項方程式，其中 a 或實數或虛數，n 爲任意正整數. 二項方程式可化成簡單之形式. 何則，命 a' 爲 a 之 n 乘根，且命 $a'y=x$，則 $ay^n=a$，由是$ay^n-a=0$，卽$y^n-1=0$. 故二項方程式之研究，可自形如 $x^n-1=0$ 者始. 而此方程式之根之性質詳一之 n 乘根條. $x^n-1=0$ 之諸根可由公式 $x=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$ 以求之，但 k 爲零或正整數. n 爲奇數，則諸根可於公式次第命 $k=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$而得之. 又若 n 爲偶數，則命 $k=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ 而得之. 如斯所得 x 之諸値互相異；且與 k 以他値，則 x 所得之値與前例同，因此 n 値依週期而循環故也. 〔例1〕求 $x^3-1=0$ 之根. 命 $n=3$，而命 $k=1$，則 $x=1$；命 $k=2$，則 $x=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$；然 $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{-3}}{2}$，故 $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. 故三根爲 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$.

〔例2〕求$x^4-1=0$之根. 今$n=4$，命$k=0$，則 $x=+1$；命 $k=1$，則 $x=\pm\sqrt{-1}$；命 $k=2$，則 $x=-1$. 故此方程式之四根爲$+1,-1,+\sqrt{-1},-\sqrt{-1}$.

若求 $x^n-a=0$ 之根，則以 $x^n-1=0$

之諸根乘 a 之 n 乘根卽可.

【二項式定理】 Binomial theorem.

〔代〕二項式定理卽

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}a^rx^{n-r}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之謂也. 但 n 爲正數或負數,整數或分數.兹分別證明之.

I. n 爲正整數. 因 $(x+a)^n$ 爲各等於 $x+a$ 之 n 個因數之積, 其展開式中之各項爲 n 次元, 而爲由 n 因數各取一文字之 n 文字相乘之積. 故含 a^rx^{n-r} 之各項爲由 n 因數中之任何 r 個取 a, 由其餘 $n-r$ 個取 x 而得之者. 故含 a^rx^{n-r} 之項之數必等於由 n 物取 r 物之組合之數, 卽 a^rx^{n-r} 之係數爲 ${}_nC_r$. 依次與 r 以 0, 1, 2, 3…., n 諸值,則得諸項之係數. 故得

$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1\,ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\cdots+{}_nC_ra^rx^{n-r}+\cdots+a^n$, 因 ${}_nC_0$ 與 ${}_nC_n$ 各等於 1 故也.

n 爲正整數時, 又可用歸納法證明之如次: 假定其指數爲 n 時爲合理,以 $x+a$ 乘之, 得

$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+(1+{}_nC_1)ax^n+({}_nC_1+{}_nC_2)a^2x^{n-1}+\cdots+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^rx^{n-r+1}+\cdots\cdots+a^{n+1}$.

而 $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$, ${}_nC_1+{}_nC_2$

$$=n+\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{(n+1)n}{2!}={}_{n+1}C_2,$$

而普通 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$.

故 $(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+{}_{n+1}C_1ax^n+{}_{n+1}C_2a^2x^{n-1}+\cdots+{}_{n+1}C_ra^rx^{n-r+1}+\cdots\cdots+a^{n+1}$.

由是若此定理對n之任意値時爲眞,則於 $n+1$ 亦眞.然 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$, $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$,卽 $n=2$, 3 時此定理爲眞,故 $n=4$ 時亦眞; $n=4$ 時此定理既眞, 則 $n=5$ 時亦眞. 逐次如是,故此定理普通皆眞.

〔最大係數〕因普通項之係數爲 ${}_nC_r$. 而當 n 爲偶數, ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ 爲最大, 卽第 $\frac{n}{2}+1$ 項之係數爲最大. 又當 n 爲奇數, 則 ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}$ 與 ${}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ 相等而爲最大, 卽第 $\frac{n+1}{2}$ 與 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數爲最大 (參看組合條).

〔最大項〕因 $(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$, 故祇須求 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 內之最大項卽可. 而其展開式中之第 $r+1$ 項等於第 r 項以 $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$ 或 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 乘之.而 $\frac{n+1}{r}-1$ 因 r 之增大而減小, 故必 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1$. 第 $r+1$ 項始大於第 r 項. 然欲 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1$, 則必 $\frac{n+1}{r}>\frac{x}{a}+1$, 或 $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}>r$. 若

$\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ 爲整數p，則 $p=r$，而第 $p+1$ 項等於第 p 項，而此二項大於其餘各項。若 $\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ 不爲整數，而命其整數部分爲 q，則第 $q+1$ 項爲最大。

II. 次證明當 n 爲正分指數時，二項式定理亦成立。下述爲歐拉 (Euler) 之證法。命

$$f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots(1)$$

$$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots(2)$$

$$f(m+n)=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots,$$

將 (1), (2) 之右邊相乘，而依 x 之昇冪列之，則不論 m, n 爲何數，其積之形常爲

$$1+(m+n)x+\left\{\frac{m(m-1)}{2!}+\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{2!}\right\}x^2+\cdots\cdots.$$

然若 m 與 n 爲正整數時，則 $f(m)=(1+x)^m$, $f(n)=(1+x)^n$，而 $f(m)\times f(n)=(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n}=f(m+n)\cdots\cdots(A)$

而(A)不論 m, n 之值爲何，皆能合理。同樣 $f(m)f(n)f(p)\cdots$ 至 k 因數 $=f(m+n+p+\cdots$ 至k項$)$。命 $m=n=p=\cdots\cdots=\dfrac{h}{k}$，而 h, k 爲正整數，則得

$\left\{f\left(\dfrac{h}{k}\right)\right\}^k=f(h)$；然 h 爲正整數，故得 $f(h)=(1+x)^h$；　$\therefore(1+x)^h=\left\{f\left(\dfrac{h}{k}\right)\right\}^k$；$\therefore(1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\dfrac{h}{k}\right)$；

$$\therefore(1+x)^{\frac{h}{k}}=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{2!}x^2+\cdots\cdots.$$

於是已證明二項式定理於正分指數能成立。

III. 玆證當 n 爲負數時二項式定理亦成立。於(A)內以 $-n$(n 爲正數) 代 m，則得

$f(n)\times f(-n)=f(-n+n)=f(0)=1$.

$\therefore\dfrac{1}{f(n)}=f(-n)$，即 $\dfrac{1}{(1+x)^n}=f(-n)$.

故 $(1+x)^{-n}=f(-n)=1+(-n)x+\dfrac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots.$

於是已證明 n 爲負數，二項式定理亦成立。由是，不論二項式之指數爲正數或負數，整數或分數(即有理數)，無不合於二項式定理。而二項式定理

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

完全成立矣。若 n 不爲正整數，則此級

數為無窮級數，故 x 必取之使右邊之級數為收斂級數始可．例如

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots,$$

祇當 x 之值可使右邊之級數為收斂時為眞.即須 x 小於 1 始可．若命 x 等於 1，則得 $0=1+2+3+4+\cdots\cdots$，而為大誤矣.

二項定理甚為重要，高等數學中常用之．即初等數學中亦可應用之．例如求 126 之立方根至小數五位.因

$$126=125\left(1+\frac{1}{125}\right)=5^3\left(1+\frac{1}{5^3}\right),$$

$$\text{故}\sqrt[3]{126}=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots\cdots$$

$$=5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.0000128}{81}-\cdots\cdots$$

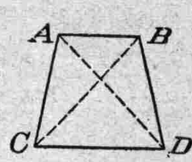
$$=5+.013333\cdots-.000035\cdots+\cdots\cdots$$

$$=5.01329 \text{ 至五位小數．}$$

【二項展開式】Binomial expansion．〔代〕即用二項式定理將 $(x+a)^n$ 展開所得之式也.與二項級數同.

【二項微分式】Binomial differential expression．〔積〕見有理化積分法條.

【二等邊梯形】Isosceles trapezoid．〔幾〕又稱等腰梯形或等脚梯形．即梯形之二腰相等者.

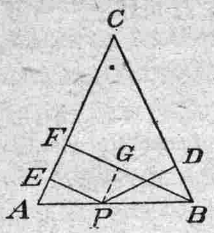


二等邊梯形各底之兩端之角相等，而對角互為補角．即 $\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$．而 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$．又二等邊梯形之二對角線相等.即 $AD=BC$.

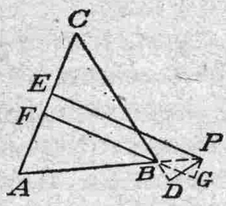
【二直角三面角】Bi-rectangular trihedral angle．〔幾〕即三面角之有二直角二面角者.

【二等邊三角形】Isosceles triangle．〔幾〕三角形之二邊相等者，謂之二等邊三角形或等腰三角形或等脚三角形，而他邊謂之底，對底之角謂之頂角．若三角形之二邊相等，其對角亦等，而此之逆定理亦成立．　二等邊三角形之頂角之二等分線，為底之垂直二等分線，而此之逆定理亦成立．　引二等邊三角形之中線為底之垂直二等分線，又為頂角之二等分線．於二等邊三角形 ABC 之底 AB（或其延線）上取一點 P，由 P 至二腰 AC，BC 所作二垂線 PD，PE 之和（或差）為常數，而等於在腰上之高 BF．〔證〕作 $PG\perp BF$，則 EPGF 為矩形；　$\therefore GF=PE$．又因直角三角形

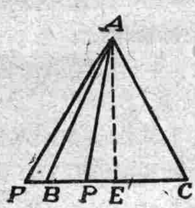
PGB，BDP 相等，∴ GB＝PD；∴ PD＋PE（或 PD～PE）＝BF．



又於二等邊三角形ABC之底 BC 或其延線上取一點 P，則 $AP^2 \sim AB^2 = BP \cdot CP$．



〔證〕作 AE ⊥BC，則 $AP^2 = AE^2 + PE^2$，$AB^2 = AE^2 + BE^2$；∴ $AP^2 \sim AB^2 = PE^2 \sim BE^2 = (PE \sim BE)(PE + BE) = BP \cdot CP$．



【二次不定方程式】Indeterminate equation of the second degree.〔代〕不定方程式之爲二次者之謂也．方程式 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 之正整數之解法可化爲形如 $x^2 \pm Ny^2 = \pm a$ 之方程式之解法，而 N 與 a 爲正整數．然方程式 $x^2+Ny^2=-a$ 無實根，而 $x^2+Ny^2=a$ 有有限數之根，可用試驗得之；故僅須注意 $x^2-Ny^2=\pm a$ 卽可．茲先求 $x^2-Ny^2=\pm 1$ 之正整數之解答．化 $\sqrt{N}$ 爲連分數，而命 $\frac{p}{q}$，$\frac{p'}{q'}$，$\frac{p''}{q''}$ 爲相連之近數，假定 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 爲與 $\frac{p''}{q''}$ 相當之完全商，則 $r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2$．然求 $\sqrt{N}$ 之連分數時，每次所得連分之各商中，可得 $r_n=1$；∴ $p'q-pq'=p'^2-Nq'^2$，$\frac{p'}{q'}$ 爲任何循環期之末第二近數．而 $p'q-pq'=\pm 1$，又原方程爲 $x^2-Ny^2=\pm 1$，故 $x=p'$，$y=q'$ 爲一組解答。例如求 $x^2-13y^2=\pm 1$ 之正整數解答．因 $\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots\cdots$，第一循環期內末第二近數爲 $\frac{18}{5}$；故 $x=18$，$y=5$ 爲 $x^2-13y^2=-1$ 之一解答．又第二循環期內末第二近數爲 $\frac{649}{180}$；故 $x=649$，$y=180$ 爲 $x^2-13y^2=+1$ 之一解答．

次求 $x^2-Ny^2=\pm a$ 之正整數之解答．因 $p'^2-Nq'^2=-r_n(pq'-p'q)=\pm r_n$．故若 a 爲當化 $\sqrt{N}$ 爲連分數內任何完全商之分母，而 $\frac{p'}{q'}$ 爲與此完全商相當之近數，則 $x=p'$，$y=q'$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=\pm a$ 之一之解答．例如求 $x^2-7y^2=2$ 之正整數之解答．因 $\sqrt{7}=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots\cdots$，而第二完全商之分母爲 2，

其相當之近數爲$\frac{3}{1}$；故 $x=3, y=1$ 爲所求之解答.

若 N 爲完全平方，則可如次例以解之.〔例〕余有趙，錢，孫三友，皆新婚. 一日各攜其妻見予. 三夫人爲周氏，吳氏，陳氏. 然余已忘各友之妻. 惟彼等告我，彼等曾至市購豕，其每口之值之元數各與其所買之豕數同；又趙某較吳氏多購 23 口，錢某較周氏多購 11 口，又每人較其妻多費 63 元. 試決定各人之妻. 令 x 爲任一人所買之豕數，則其所費爲x^2元，同樣其妻所費之洋爲 y^2 元. $\therefore x^2-y^2=63$. 即 $(x+y)(x-y)=63\times1$，或 21×3，或 9×7. $\therefore x+y=63$ 或 21 或 9，$x-y=1$ 或 3 或 7. $\therefore x=32, 12, 8$；$y=31, 9, 1$. 即三友所購之豕數爲 32, 12, 8；三婦人所購之豕數爲 31, 9, 1. 然因趙某較吳氏多購 23 口，故知趙某購 32 口，吳氏購 9 口；又錢某較周氏多購 11 口，故知錢某購 12 口，周氏購 1 口. 由是孫某購 8 口，陳氏購 31 口. 故知陳氏爲趙某之妻，吳氏爲錢某之妻，周氏爲孫某之妻.

【二次聯立方程式】 Simultaneous equations of the second degree.〔代〕即聯立方程式之爲二次方程式者.

【二面角之平面角】 Plane angle of dihedral angle.〔幾〕見二面角條.

【二線所包之矩形】 Rectangle contained by two lines.〔幾〕即以二直線爲鄰邊所作之矩形之謂也.

【二直角球面三角形】 Birectangular spherical triangle.〔幾〕球面三角形之有二直角者之謂也.

【二等邊球面三角形】 Isosceles spherical triangle.〔幾〕即球面三角形之有二邊相等者.

人

【人壽保險】 Life assurance 或 Life insurance.〔算〕亦稱生命保險. 凡人恐一旦死亡而家族無以贍養，乃預定年限及所保之總額，納費於保險公司. 若未滿年限而人已死，則公司照所保之總額付給之，若已滿年限，則照所保之總額，加利息以還之.

八

【八】 Eight.〔算〕爲基數之一，阿剌伯以 8 記之，羅馬以 VIII 記之，希臘以 η′ 記之.

【八線】 Trigonometrical functions.〔三〕即三角函數.

【八角形】 Octagon.〔幾〕即八邊形.

【八面體】 Octahedron.〔幾〕即八平面所包圍之立體也.

【八進法】 Octenary scale.〔代〕即以八爲記數底之記數法也. 此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 及 0 即足，而於八進法中，4167 即表 $4\times8^3+1\times8^2+6\times8+7$ 之意.

【八線學】 Trigonometry.〔數〕即三角法

【八邊形】 Octagon.〔幾〕即八直線所包

圍之平面形.亦稱八角形.

【八分空間】Octant.〔幾〕互相垂直三平面,分空間爲八部分,其各部分謂之八分空間.

刁

【刁藩廷解法】Diophantine solution〔代〕不定方程式之解法爲不定,然若於其解答上加以限制,則可使其解法爲一定.最普通之例爲屬於解答 x,y 之值俱爲整數,特別之例爲須正整數者.如是之解法,謂之刁藩廷之解法. 例如取方程式 $3x+2y=5$,且 x,y 之解答須爲正整數.則此方程式惟有一解答,即 $x=1$, $y=1$. 因變方程式之形式,得 $2y=5-3x$. 與 x 以大於 1 之整數值,y 不能爲正,又 $x=0$,則 $y=\frac{5}{2}$,此非整數,由是 $x=1$, $y=1$ 爲所求之惟一解答.

十

【十】Ten.〔算〕數名,爲九加一之結果.阿剌伯以 10 記之,羅馬以 X 記之,希臘以 ι′ 記之.

【十位】Tens' place.〔算〕即記數時自右第二位也.

【十字比】Cross-ratio.〔幾〕與非調和比同,見該條.

【十位數】Tens.〔代〕即在十位之數也.

【十角形】Decagon.〔幾〕即十邊形.

【十面體】Decahedron.〔幾〕即十平面所包圍之立體也.

【十進法】Denary scale.或 Decimal system.〔算〕〔代〕十進法者,以一,二,三,四,五,六,七,八,九爲基數,九加一謂之十,自十次第十倍之,與以新名稱,曰百,千,萬,....之法也. 此命數法及記數法現今世界各國多用之.

【十進算】Decimal arithmetic.〔算〕即用十進法之算術也.

【十邊形】Decagon.〔幾〕即十直線所包圍之平面形也.

【十一去法】Rule for casting out the elevens.〔算〕即去十一法.

【十一角形】Hendecagon 或 Undecagon.〔幾〕即十一邊形.

【十一進法】Undenary scale.〔算〕〔代〕即以十一爲記數底之法也.在此數記法中,須另以符號以表十,普通以t表之.例如於十一進法中之 72t35,即表 $7\times(11)^4+2\times(11)^3+10\times(11)^2+3\times11+5$ 之意.

【十一邊形】Hendecagon或Undecagon.〔幾〕即十一直線所包圍之平面形也.

【十一驗法】Rule for casting out the elevens.〔算〕即去十一法.

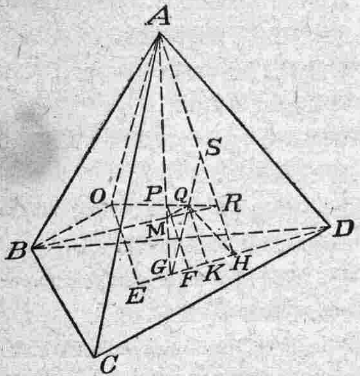
【十二角形】Dodecagon.〔幾〕即十二邊形.

【十二面體】Dodecahedron.〔幾〕即十二平面所包圍之立體也.

【十二進法】Duodenary scale 或 Duodecimal method.〔算〕〔代〕即以十二爲記數底之記數法也.此記法中以 t 表

10,e 表 11. 例如 67t3e2 即表 $6\times(12)^5+7\times(12)^4+10\times(12)^3+3\times(12)^2+11\times(12)+2$ 之意.

【十二點球】Twelve points sphere. 〔幾〕由相對稜互相垂直之四面體之各頂



至對邊作垂線，其交點由各頂之距離之三分之一之點，與各面之垂心及重心(共十二點)同在一球面上.此球謂之十二點球.〔證〕設 ABCD 爲相對稜互相垂直之四面體，過各稜之中點之球心爲 P，外接球之心爲 O，垂心爲 R.由 O,P,R 至 BCD 面作垂線 OE,PF,RH，則 E,F,H 各爲 $\triangle BCD$ 之外心，九點圓心，垂心.又 AP 之延線交 BCD 面於 G，則 G 爲 $\triangle ABC$ 之重心.而 E,G,F,H 四點在同一直線上(見九點圓條).且 $AP=3PG$. $\therefore FH=3GH$，又 $EF=FH$，由是 $2GF=EG$.今命 K 爲 GH 之中點,則 $GF=FK$. 次作 $KQ\parallel AH$，交 PR 於Q,GQ 之延線交 AH 於 S，則 $GS=QS$.然 $\angle AHG=\text{rt.}\angle$，故 $QS=QH$.又因 O,P,Q 在同一直線上,$PQ:OP=FK:EF=1:3$. $\therefore \triangle APO\sim\triangle GPQ$，而 $AO\parallel GQS$，由是 $AS:SR=OQ:QR=EK:KH=2:1$.故 $SR=\frac{1}{3}AR$.

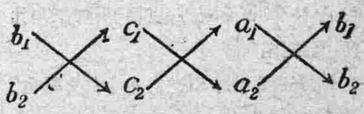
又作 $QM\parallel OB$，交 BR 於 M.則 $QM=\frac{1}{3}OB=\frac{1}{3}OA=QS$，而 $MR=\frac{1}{3}BR$.由是以 Q 爲心，QB 爲半徑作球，G, H, M, S 皆在其球面上.其他 CR, DR 上由 R 之距離爲其長之三分之一之點皆在此球面上.同樣可證各面之垂心，重心與 Q 之距離等於 QS.故此十二點在同一球面上.

【十二邊形】Dodecagon.〔幾〕即十二直線所包圍之平面形也.

【十五角形】Pentedecagon 或 Quindecagon.〔幾〕即十五邊形.

【十五邊形】Pentedecagon 或 Quindecagon.〔幾〕即十五直線所包圍之平面形也.

【十字乘法】Cross multiplication.〔代〕方程式 $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ 可用下法以求得以係數表 $x:y:z$ 之比.即如圖將 x, y, z 之係數,自 y 之係數始,依次書之,且將 y 之係數再



書之，將諸係數依矢所示乘之，自上向

下者爲正,自下向上者爲負.則得 $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2-c_2a_1$, $a_1b_2-a_2b_1$,此三式與 x,y,z 成比例,即

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

此法謂之十字乘法.

【十進分數】Decimal fraction.〔算〕即以十之乘冪爲分母之分數,例如 $\frac{23}{10}$, $\frac{47}{100}$, $\frac{51}{1000}$ 等是.但普通均記爲小數,上之各例即爲 2.3, .47, .051.參閱小數條.

【十八等邊體】〔幾〕於正四面體各邊之三等分點,作直線相聯,則分體之各面爲小正三角形三,正六邊形一.依小三角形與六邊形相連之邊,截去體之四銳角,則成爲有正六邊形之面四與正三角形之面四之八面體.因其各邊均相等,而邊數爲十八,故稱十八等邊體.

三畫

丈

【丈】〔算〕度名.十尺爲丈.

三

【三】Three.〔算〕爲基數之一.阿剌伯以3記之,羅馬以 III 記之,希臘以 γ′ 記之.

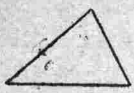
【三次式】Cubic expression.〔代〕含某文字之三乘冪或二以上文字之三次元之式,謂之三次式.例如 $5x^3+4x^2-2x+8$, $4x^2y-7xy+3y+1$, $xyz-x-y^2+2$ 皆爲三次式.而普通三次式爲 ax^3+bx^2+cx+d.

【三次項】Term of the third degree.〔代〕項之含某文字之三乘冪或二以上文字之三次元者之謂.例如 $5x^3$, $2xy^2$, $7xyz$ 是也.

【三角比】Trigonometrical ratio.〔三〕與三角函數同,見該條.

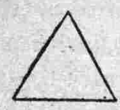
【三角形】Triangle 或 Trigon.〔幾〕三角形者,三線所包圍之面之一部也.因有三邊三角故名.三角形分爲平面三角形與球面三角形二種:平面三角形者,三直線所包圍之一部平面也;球面三角形者,三大圓弧所包圍之一部球面也,其詳見球面三角形條.而平面三角形常略稱爲三角形.平面三角形可分類之如次:(1)斜三角形 (Scalene triangle),即三邊不相等之三角形. (2)二等邊三角

形 (Isosceles triangle),即二邊相等之三角形. (3)等邊三角形 (Equilateral triangle), 即三邊皆相等之三角形. (4) 直角三角形(Right-angled triangle),即三角形之有一角爲直角者. (5) 斜角三角形 (Oblique-angled trian-

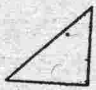


斜三角形

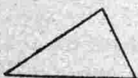
二等邊三角形



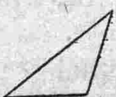
等邊三角形



直角三角形

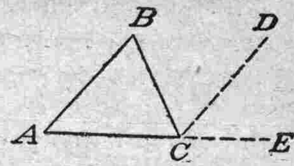


銳角三角形

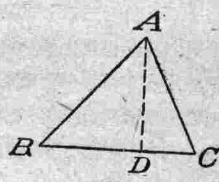


鈍角三角形

gle), 即任何角皆不爲直角之三角形. 而斜角三角形, 又分銳角三角形與鈍角三角形二種. (6) 銳角三角形(Acute-angled triangle), 即其諸角皆爲銳角之三角形. (7) 鈍角三角形 (Obtuse-angled triangle), 即有一角爲鈍角之三角形. (8) 等角三角形 (Equiangular triangle),即三角相等之三角形, 實即等邊三角形也. 任何三角形三角之和等於二直角. 〔證〕於三角形 ABC, 作 CD 平行於 AB, 延長 AC 至 E. 則 $\angle ECD+\angle DCB+\angle BCA=2rt\angle s$. 而 $\angle A=\angle ECD$, $\angle B=\angle BCD$. 以 $\angle A$,



$\angle B$ 代其等角 ECD 及 BCD, 則 $\angle A+\angle B+\angle BCA=2rt\angle s$. 又三角形兩邊之和大於他邊,而其差小於他邊.〔證〕於 △ABC 內, 設 AC 爲最長之邊.因直線爲二點間最短之線. $\therefore AB+BC>AC$. 兩邊各減 BC, 則得 $AB>AC-BC$, 即 $AC-BC<AB$. 玆述求三角形面積之法如次: (i) 因三角形爲同底同高之矩形之半, 故由△ABC之頂點 A 至對邊作垂線 AD, 則 △ABC



之面積爲$\frac{1}{2}BC\cdot AD$. 命底爲a, 高爲h, 面積爲 S, 則 $S=\frac{1}{2}ah$. 是爲知三角形之底及高而求其面積之公式. (ii) 因 $h=AD=AC\sin C=b\sin C$, 故 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$. 是爲知三角形之二邊及其夾角而求其面積之公式. (iii)設已知三邊爲 a,b,c, 命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,則 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 此公式爲亞歷山大里亞之希洛 (Hero of Alexandria) 所求得者.〔證1〕因 $b^2=a^2+c^2$

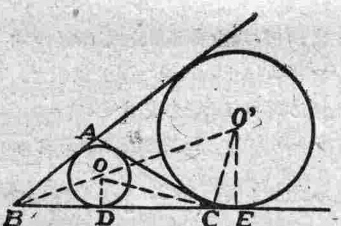
$-2a\cdot BD$，∴$BD=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$．故 $h^2=AD^2=c^2-BD^2=(c-BD)(c+BD)$

$=\dfrac{b^2-(a-c)^2}{2a}\cdot\dfrac{(a+c)^2-b^2}{2a}$

$=\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2}$

$=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$。∴$S=\dfrac{1}{2}ah=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．〔證2〕由三角法之公式 $\sin\dfrac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$，$\cos\dfrac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$．

∴$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=ab\sin\dfrac{1}{2}C\cos\dfrac{1}{2}C=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．〔證3〕命內切圓之半徑 $OD=r$，對 B 角之傍切圓之半徑 $O'E=r'$，則 $S=sr$…………(1)．又因 $\triangle ODC$ 與 $\triangle CEO'$ 相似，故 $OD:$



$CD=CE:O'E$，即 $r:s-c=s-a:r'$．又 $OD:BD=O'E:BE$，即 $r:s-b=r':s$．故由二比例式得 $r^2:(s-b)(s-c)=(s-a):s$，∴$r^2s^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$．代入(1)式則得 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．

表三角形面積之公式甚多，茲略示數式於次：(1)sr。(2)$\dfrac{abc}{4R}$，R 爲外半徑。(3)$\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$．(4)$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$．(5)$2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$．(6)$\sqrt{rr_1r_2r_3}$，而 r_1，r_2，r_3 爲傍切圓之半徑．(7)$\sqrt{\frac{1}{2}Rp_1p_2p_3}$，而 p_1，p_2，p_3 爲各高．(8)$r_2r_3\tan\dfrac{1}{2}A$．(9)$rr_1\cot\dfrac{A}{2}$．

(10) $rr_1\dfrac{r_2-r_3}{b-c}$．(11) $\dfrac{s^2}{\sum\cot\frac{1}{2}A}$．

(12)$r^2\cot\dfrac{1}{2}A\cot\dfrac{1}{2}B\cot\dfrac{1}{2}C$．

(13) $r^2\cot\dfrac{1}{2}A+2Rr\sin A$．(14) $r_1r_2\sqrt{\dfrac{4R-(r_1+r_2)}{r_1+r_2}}$．(15)$\dfrac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma-m_1)(\sigma-m_2)(\sigma-m_3)}$，而 m_1，m_2，m_3 爲三中線之長，$\sigma=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)$．(16)$\left\{f\cos\dfrac{1}{2}(B-C)+g\cos\dfrac{1}{2}(C-A)+h\cos\dfrac{1}{2}(A-B)\right\}\div2\left(f^{-1}\cos\dfrac{1}{2}A+g^{-1}\cos\dfrac{1}{2}B+h^{-1}\cos\dfrac{1}{2}C\right)$而 f,g,h 爲內二等分線之長．

【三角法】Trigonometry．〔數〕亦稱三角術，三角學或八線學．爲數學之一分科，論三角函數之性質，關係及三角形之解法與應用者也．三角法大別爲平面，球面，解析三種：平面三角法 (Plane trigonometry) 者，論三角函數之性質

及關係，應用之以說明三角形之邊與角間之關係，而由是以論三角形之解法，及高與距離之測法．球面三角法 (Spherical trigonometry) 者，論球面三角形之邊與角間之關係者也． 解析三角法 (Analytical trigonometry) 者，論普通之角之三角函數之性質及關係者也．

【三角板】Triangle 或 Set square.〔數〕畫圖器，以薄木板或硬橡皮所製之三角形，其一角必爲直角，他二角爲 45° 或 60° 與 30°．

【三角表】Trigonometrical tables.〔三〕載三角函數之值及其對數之表也．三角表分二種，即三角函數眞數表與三角函數對數表是也．前者載三角函數之值，後者載三角函數之表對數．

〔三角表之造法〕 兹述計算 0° 與 90° 之間每隔 $10''$ 諸角之三角函數眞數之法：命 θ 爲 $10''$ 之弧度，即 $\theta=\dfrac{10\pi}{180\times60\times60}=\dfrac{\pi}{64800}=\dfrac{3.141592653589793\cdots}{64800}=.000048481368110\cdots$，而 $\dfrac{1}{6}\theta^3=.00000000000021\cdots$，故 θ 與 $\theta-\dfrac{1}{6}\theta^3$ 有 12 位小數相同．然若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\theta>\sin\theta>\theta-\dfrac{1}{6}\theta^3$；故 $\sin10''=.000048481368\cdots$ 至 12 位小數，故 $\cos10''=\sqrt{1-\sin^2 10''}=.9999999988248\cdots\cdots$ 至13位小數．而公式 $\sin(n+1)A+\sin(n-1)A=2\sin nA\cdot\cos A$ 可用以求 $10''$ 之倍數之正弦． 命 $A=10''$，$2\cos 10''=2-k$ 則 $k=.0000000023504\cdots$，而上公式可寫爲

$\sin(n+1)A-\sin nA=\sin nA-\sin(n-1)A-k\sin nA$． 令 $n=1$，則可算得 $\sin20''$；令 $n=2$，則可得 $\sin30''$；由是類推． 因 $k=.0000000023504\cdots$，故當計算 $k\sin nA$，僅用其首數位即可．用上法算至 45° 諸角之正弦，則此象限內其餘諸角之正弦可用公式

$\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=2\cos45^\circ\sin A=\sqrt{2}\cdot\sin A$ 以求之． 若已算至 60° 諸角之正弦，則此象限內其餘諸角之正弦可用公式

$\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=2\cos60^\circ\sin A=\sin A$ 以求之．若已知諸角之正弦，則其餘弦亦可知之；因任何角之餘弦等於其餘角之正弦故也． 45° 以下正切之表，可用公式 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 以得之，45° 以上者可用公式 $\tan(45^\circ+A)=2\tan2A+\tan(45^\circ-A)$ 以求之． 餘切之表可由正切之表用 $\cot A=\tan(90^\circ-A)$ 得之． 正割之表可用公式 $\sec A=\tan A+\tan\left(45^\circ-\dfrac{1}{2}A\right)$ 以得之．餘割之表，可用公式 $\operatorname{cosec} A=\sec(90^\circ-A)$ 以得之．

三角函數之眞數表已造成，則三角函數之對數表可用尋常之對數表以造之．惟表中之對數，常加以 10，使免用負對數，而如是之對數謂之表對數．如 $\sin A$ 之

表對數以 $L\sin A$ 記之，即 $10+\log\sin A$ 之意也．

〔三角表之用法〕 若所與之角或三角函數爲表中所有者，則所求之函數或角可直由表檢得之．茲示當所與之角或函數爲表中所無者，而求其函數或角之法．(1)求與角之正弦． 例如求 $\sin 44°35'25''$．普通之三角函數表祇載每隔 $10'$ 之函數，是以必須以分之小數表秒．而 $25''=\frac{25}{60}=.4$分，故所與之角爲 $44°35'.4$．故所求之正弦在 $\sin 44°30'$ 與 $\sin 44°40'$ 之間．檢五位之三角函數表得 $\sin 44°40'-\sin 44°30'=.70298-.70091=.00207$．命x爲所求之正弦大於 $\sin 44°30'$ 之值．假定正弦之增加與角之增加成正比例，則得比例式 $10':5'.4=.00207:x$，由是得 $x=\frac{5.4\times .00207}{10}=.00112$，而所求之值爲 $.70091+.00112=.70203$． (2) 已知正弦，求對應之角．例如求其正弦爲 $.69709$ 之角，檢表得 $\sin 44°20'-\sin 44°10'=.69883-.69675=.00208$．已知之正弦大於 $44°10'$ 者爲 $.69709-.69675=.00034$．而所求之角在由表檢得之二角之間，設x爲其大於 $44°10'$ 之分數，則得比例式 $.00208:.00034=10':x$，由是得 $x=\frac{.00034\times 10}{.00208}=1'.63$，而所求之角爲 $44°10'+1'.63=44°11'.63$ 或 $44°11'37''.8$． (3) 求與角之餘弦．例如求 $\cos 44°35'.4$．檢表得 $\cos 44°30'-\cos 44°40'=.71325-.71121=.00204$．因在第一象限內，餘弦因角之增加而減小．故所求之餘弦小於 $44°30'$ 之餘弦，令x爲其小於 $44°30'$ 之餘弦之數，則得比例式 $10':5'.4=.00204:x$，由是 $x=\frac{5.4\times .00204}{10}=.00110$，而所求之餘弦爲 $.71325-.00110=.71215$． (4)已知餘弦求對應之角． 例如求其餘弦爲 $.71698$ 之角．檢表得 $\cos 44°10'-\cos 44°20'=.71732-.71529=.00203$，而所得之餘弦小於 $44°10'$ 者爲 $.71732-.71698=.00034$． 因餘弦之增減與角之增減相反，令x爲所求之角大於 $44°10'$ 之分數，則得比例式 $.00203:.00034=10':x$，由是 $x=\frac{.00034\times 10}{.00203}=1'.674$，而所求之角爲 $44°10'+1'.674=44°11'.674=44°11'4''$． 其他關於正切，餘切，正割，餘割之例，與上所述者同．惟須注意者，即於第一象限，正切及正割與角俱增，而餘切餘割則與角之增減相反．故正切，正割可與正弦同法推論之，而餘切，餘割可與餘弦同法推論之． 三角函數對數表之用法與尋常之對數表之用法同．

【三角柱】Triangular prism. 〔幾〕柱體之底爲三角形者之謂，亦稱三稜柱或三稜體．

【三角術】Trigonometry. 〔數〕即三角法，見該條．

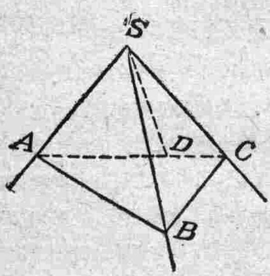
【三角數】Triangular number. 〔代〕見

多角數條.

【三角錐】Triangular pyramid.〔幾〕角錐之底爲三角形者，謂之三角錐或三稜錐.因其有四個三角形之面，故亦稱四面體.

【三角學】Trigonometry.〔數〕即三角法，見該條.

【三面角】Trihedral angle.〔幾〕三平面所包圍之立體角，謂之三面角.三平面相交之點，謂之三面角之頂，諸平面爲其面，諸面之交線爲其稜，其兩稜所成之角爲其面角.三面角之有一直角二面角者，謂之一直角三面角，有二直角二面角者，謂之二直角三面角，有三直角二面角者，謂之三直角三面角.　三面角之任意兩面角之和，大於其第三面角.〔證〕於三



面角 S-ABC 設面角 ASC 爲面角中之最大者.　作 SD 使 ∠ASD 等於 ∠ASB.過 SD 內任一點 D，作 ADC 直線.　取 SB 等於 SD.聯 AB，BC.依作圖 $\triangle$ASD，ASB 全相等.故 AD=AB.於 △ABC，AB+BC>AC.　兩邊各減去相等之 AB及AD，則得 BC>DC.故於 $\triangle$BSC，及 DSC，∠BSC>∠DSC，加相等之角 ASB 及 ASD，則得 ∠ASB+∠BSC>∠ASC.

【三重根】Triple root.〔代〕方程式若有三根相等，則此根謂之三重根.例如於方程式 $x^4-2x^3+2x-1=0$，即 $(x+1)(x-1)^3=0$ 有三根爲 $+1$，故 $+1$ 爲三重根.

【三乘比】Triplicate ratio.〔算〕〔代〕比 $2^3:3^3$ 謂之比 $2:3$ 之三乘比；比 $a^3:b^3$ 謂之比 $a:b$ 之三乘比.

【三乘根】Cubic root.〔算〕〔代〕與立方根同.

【三乘冪】Third power.〔算〕〔代〕即某數自乘三次之謂，例如 2 之三乘冪爲 2^3，a 之三乘冪爲 a^3.三乘冪又稱立方.

【三等數】〔算〕古時萬以上之進位法，有上中下三等之不同.詳命數法條附註.

【三項式】Trinomial 或 Trinomial expression.〔代〕由三項而成之式也.二次三項式之普通式爲 ax^2+bx+c。〔三項式之值之變化〕若三項式 ax^2+bx+c 內 x 之值變，則其式之值亦因之而變.但 x 與以 $+\infty$ 及 $-\infty$ 間之任意實數值，ax^2+bx+c 不能取任意之值.若與 x 以實數值，ax^2+bx+c 所可取之值可求之如次.　與 x 以某實數值，而欲三項式 ax^2+bx+c 等於 λ 之必要且充足之條件，爲方程式 $ax^2+bx+c=\lambda$ 之根爲實數是也.　而此條件爲 $b^2-4a(c-\lambda)\geqslant0$，即 $b^2-4ac+4a\lambda\geqslant0$ ....(1).　I.若 b^2-4ac 爲正，與 x 之

適當之値，可使 ax^2+bx+c 得與 a 同號之任意量，及與 a 異號而絕對值不大於$\frac{b^2-4ac}{4a}$之任意量．II.若b^2-4ac爲負，則條件(1)惟 $4a\lambda$ 爲正，且不小於$4ac-b^2$時，方可適合．故若 b^2-4ac 爲負，ax^2+bx+c 恆與 a 同號，而其絕對值不能小於$\frac{4ac-b^2}{4a}$．　III.若b^2-4ac爲零，$a\lambda$ 爲正，恆可適合條件(1)．　由上觀之，當 b^2-4ac 爲負或零，即方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛根或等根時，於三項式 ax^2+bx+c，與 x 以任何實數值，其符號可一定不易；又當 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲不相等之實數，該式之符號可變化．　茲又示別證如次．若方程式有實根 α，β，則 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$．若 x 大於 α 亦大於 β 之實數值，或小於 α 亦小於 β 之實數值，則 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲正，然若 x 爲 α 與 β 之間之任意實數值，則 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲負．故對於 x 之實數值，除方程式 $ax^2+bx+c=0$之二根間之x之値外，三項式 ax^2+bx+c 恆與 a 同號．又對於 x 之種種之值，三項式 ax^2+bx+c，若 b^2-4ac 爲正，其符號變，若 b^2-4ac 爲負，其符號不變，可證之如次：因 $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$．I.若 b^2-4ac 爲正，當 $x=-\frac{b}{2a}$，括弧〔　〕內之全式爲負．又當 x 極大，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 可大於$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，故括弧〔　〕內之全式可爲正．由是，若 b^2-4ac 爲正，三項式 ax^2+bx+c，與 x 以適當之實數值，其符號可得變化．　II.若 b^2-4ac 爲負或零．此時對於 x 之任意實數值，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 爲正，而$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$亦爲正或爲零．故括弧〔　〕內全式恆爲正．故當b^2-4ac爲負或零，三項式ax^2+bx+c 恆與 a 同號．　由前所述，於 x 之二次式與 x 以實數值，若其符號變則此二次式等於零所得之方程式之二根爲實數．例如於三項式$a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)$，命諸量皆爲實數，且令$\alpha>\beta>\gamma$．當 $x=\alpha$，該式爲正；當 $x=\beta$，該式爲負．由是該方程式之符號變，故對於 a，b，c，α，β，γ諸實數值，方程式 $a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 之根爲實數．〔例1〕求證 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$ 對於 x 之諸實數值皆爲正．取此四因數之第一第四相乘，又取第二第三相乘，則得 $(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82=\{(x^2-7x)+9\}^2+1$．故對於x之任何實數值皆爲正．
〔例2〕求證與 x 以適當之實數值，$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$可取任意之實數值．

命$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=\lambda$，則得$(4-12\lambda)x^2+(36-8\lambda)x+9-\lambda=0$. 欲使x爲實數之必要且充足條件爲$(36-8\lambda)^2-4(4-12\lambda)(9-\lambda)\geqq 0$，卽$\lambda^2-8\lambda+72\geqq 0$，卽$(\lambda-4)^2+56\geqq 0$. 此乃對於λ之諸數値皆眞之關係也. 故不論如何之λ之實數值，其對應之x之實數值常可求得之. 〔例3〕求證與x以任何實數值，$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$不能大於7. 又不能小於$\frac{1}{7}$.

命$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=\lambda$，則$(1-\lambda)x^2-3(1+\lambda)x+4(1-\lambda)=0$. 而x爲實數之必要且充足之條件爲$9(1+\lambda)^2-16(1-\lambda)^2\geqq 0$，卽$-7\lambda^2+50\lambda-7\geqq 0$，卽$-(\lambda-7)(7\lambda-1)\geqq 0$. 由是$\lambda-7$與$7\lambda-1$必異號始可. 故λ必在7與$\frac{1}{7}$之間，而本題已證明矣.

【三率法】Rule of three.〔算〕例如於比例$3:5=18:30$，$3\times 30=5\times 18$；普通於比例$a:b=c:d$，$a\times d=b\times c$，故$d=\frac{b\times c}{a}$或$c=\frac{a\times d}{b}$. 由是比例之一外率等於兩內率之積以他外率除之. 故比例四率之中，知其三率，則可求得其餘一率. 故解比例問題之法有稱爲三率法或三數算.

【三等分】Trisect.〔幾〕分一幾何量爲三相等部分之謂也.

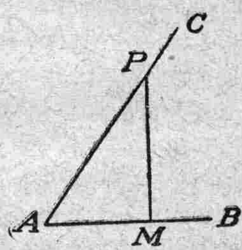
【三進法】Ternary scale.〔代〕以三爲記數底之記數法也. 此記數用數字1,2及0卽足. 例如於三進法22012卽表$2\times 3^4+2\times 3^3+1\times 3+2$之意也.

【三稜體】〔幾〕卽三角柱. 數理精蘊上編卷二幾何原本謂之三稜體. (該書稜作棱)

【三次曲線】Cubic curve.〔幾〕x,y之三次方程式之軌跡，謂之三次曲線. 如戴奧克里斯(Diocles)之蔓葉線(Cossoid)，笛卡兒之蝶線(Felium)，阿內濟(Agnesi)之箕舌線(Witch)，立方拋物線(Cubical parabola)，半立方拋物線(Semicubical parabola)等，皆爲三次曲線. 參閱曲線條.

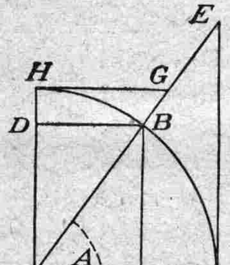
【三次函數】Cubic function.〔數〕函數內自變數之最高乘冪爲三者. 例如$y=ax^3+bx^2+cx+d$，y爲x之三次函數.

【三角函數】Trigonometrical functions.〔三〕命BAC卽A爲任意之角. 於



其一邊上，取任意一點P，引他邊之垂線PM. 則比$\frac{PM}{AP}$，卽$\frac{垂線}{斜邊}$，謂之A角之正弦，以sinA表之. 比$\frac{AM}{AP}$卽$\frac{底邊}{斜邊}$，謂之A角之餘弦，以cosA表之. 比$\frac{PM}{AM}$卽$\frac{垂線}{底邊}$，謂之A角之正切，以tanA表

之．比$\frac{AM}{PM}$即$\frac{底邊}{垂線}$，謂之A角之餘切，以cotA表之．比$\frac{AP}{AM}$即$\frac{斜邊}{底邊}$，謂之A角之正割，以secA表之．比$\frac{AP}{PM}$即$\frac{斜邊}{垂線}$，謂之A角之餘割，以cosecA表之．由1減去A角之餘弦，即$1-\cos A$，謂之A角之正矢，以versA表之．由1減去A角之正弦，即$1-\sin A$，謂之A角之餘矢，以coversA表之．而此角之正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割，正矢，餘矢，八者謂之角之三角函數，亦稱三角比，或圓函數或八線．八者之中，後二者用之甚少．三角函數，往昔又有如次定之者．命BOC爲任意之角A．則BC謂之A之正弦，BD(=OC)謂之A之餘弦，EF謂之A之正切，GH謂之A之餘切，OE謂之A之正割，OG謂之A之餘割，CF謂之A之正矢，DH謂之A之餘矢．此種定義阿剌伯數學家阿爾巴塔尼(Al-Battani)始用之．用此定義，則三角函數之值，不僅與角之大小有關，即與圓之半徑亦有關．而現今所用之定義，以比爲三角函數，則與半徑無關，是其利也．由現今之定義$\sin A=\frac{PM}{AP}=\cos APM$，即一角之正弦等於其餘角之餘弦．同樣一角之正切等於其餘角之餘切，一角之正割等於其餘角之餘割．由定義得



$$\sin A=\frac{PM}{AP},\cos A=\frac{AM}{AP},\ \tan A=\frac{PM}{AM},$$

$$\cot A=\frac{AM}{PM},\sec A=\frac{AP}{AM},\operatorname{cosec} A=\frac{AP}{PM},$$

因sinA及tanA之分子相同，而sinA之分母大於tanA之分母．故sinA小於tanA．而tanA小於secA．又cosA小於cotA．而cotA小於cosecA．是爲〔大小關係〕，即 $\sin A<\tan A<\sec A$，$\cos A<\cot A<\operatorname{cosec} A$．

$$又\ \sin A\cdot\operatorname{cosec} A=\frac{PM}{AP}\cdot\frac{AP}{PM}=1 \qquad (1)$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{AM}{AP}\cdot\frac{AP}{AM}=1 \qquad (2)$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{PM}{AM}\cdot\frac{AM}{PM}=1 \qquad (3)$$

是爲〔二重關係〕．

$$\left.\begin{aligned}又\ \tan A&=\frac{PM}{AM}=\frac{PM}{AP}\div\frac{AM}{AP}=\frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A&=\frac{AM}{PM}=\frac{AM}{AP}\div\frac{PM}{AP}=\frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}(4)$$

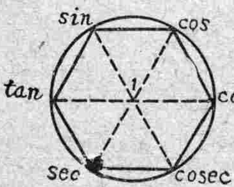
是爲〔三重關係〕．

$$\left.\begin{aligned}又\ \sin^2A+\cos^2A&=\frac{PM^2}{AP^2}+\frac{AM^2}{AP^2}\\ &=\frac{AP^2}{AP^2}=1\end{aligned}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}1+\tan^2 A&=1+\frac{PM^2}{AM^2}=\frac{AP^2}{AM^2}\\&=\sec^2 A\\1+\cot^2 A&=1+\frac{AM^2}{PM^2}=\frac{AP^2}{PM^2}\\&=\operatorname{cosec}^2 A\end{aligned}\right\}(5)$$

是爲〔平方關係〕.此三式實表同一關係,惟以不同之形式表之而已.

由上之六種函數間之四個獨立關係,可以一函數表其他五函數.例如以 $\sin A$ 表其他五種函數.　命 $\sin=x$,則 $\cos A=\sqrt{1-x^2}$, $\tan A=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\cot A=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{x}$. 又上述之諸關係,可以次圖記憶之.此圖稱爲三角比之六角形.即將三角函數 sin, cos, tan, cot, sec, cosec 順次水平並列書於六角形之角頂,其中心書以 1.　(1) 於左右兩側往下則値

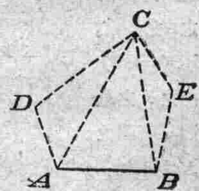


增大,而可表大小關係.　(2) 各對角線之兩端二者之積,等於中心之數,即 1 是也.故可表二重關係.　(3) 連續三角頂之三函數,其一端者等於中間者以他端者除之,而可表三重關係.　(4) 同水平線上相隣二數之平方和,等其下之中間之數之平方,即表平方關係.

又三角函數不僅限於銳角,任意之角皆可適用之.惟須注意者,第一象限內之角,其正弦,正切,正割皆爲正;第二象限內之角,其正弦爲正,正切,正割爲負;第三象限內之角,其正弦,正割爲負,正切爲正;第四象限內之角,其正弦,正切爲負,正割爲正.而餘弦,餘切,餘割之正負,各與正割,正切,正弦之正負同.

【三角級數】Trigonometrical series.〔三〕見級數條.

【三角測量】Triangulation.〔三〕由基線 AB 起,其長已精密量得,一點 C 之位置,可觀察三角形 ABC 在 A 與 B 之角而定之.由是,由三角法之公式可算得邊 AC 與 BC 之長.而此二邊可作爲新基線,同樣用角度以定他點之位置,如 D,E.三角形 ADC, BEC 之邊又可作爲基線以定其他諸點,



逐次如是,可成一組相連三角形,其頂點僅由角度以決定之.如此於欲測之地面上定一連諸點之法,謂之三角測量.

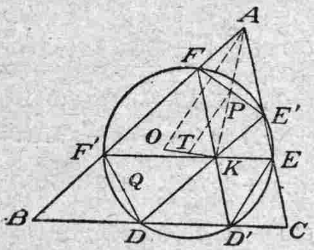
【三重積分】Triple integral.〔積〕見偏積分法條及疊次積分法條.

【三重關係】〔三〕見三角函數條.

【三乘比圓】Triplicate ratio circle.〔幾〕過類似重心 K,與三邊平行引

$F'E$, $D'F$, $E'D$三直線，則D, D', E, E', F, F'六點在同一圓周上．此圓謂之三乘比圓或六點圓或第一勒滿圓．

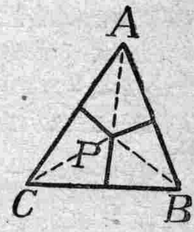
〔證〕因 $AFKE'$ 爲平行四邊形，AK必



二等分 FE'，故 FE' 爲 BC 或 EF' 之逆平行線．故 E, E', F, F' 爲共圓點．同様 DF' 爲 AC 之逆平行線．故 $\angle BF'D=\angle C$，故$\angle E'DF'=\angle E'EF'$．故 D 在同圓之上．同様 D' 亦在其上．三乘比圓之重要性質如次：(1) 命 O 爲外心，T 爲三乘比圓之心，則 T 爲 KO 之中點．〔證〕命 AK 交 FE' 於 P，T 爲 KO 之中點，聯 AO，PT．則 $PT \parallel AO$．而因 $AO \perp FE'$，故 PT 爲 FE' 之垂直二等分線．同様聯 DF' 之中點 Q 及 T，則 QT 亦爲 DF' 之垂直二等分線．故過 D, D', E, E', F, F' 之圓之中心必在 PT，QT 上，即 T 爲其圓心．(2) $DD':EE':FF'=a^3:b^3:c^3$．〔證〕由相似三角形得 $DD':D'K=a:b$，$CE:D'C=a:b$．$KE:EE'=a:b$．然$CE=D'K$，$KE=D'C$．由是此三比相乘得 $DD':EE'=a^3:b^3$．同様可證其餘．此圓之所以名爲三乘比圓者，即以此也．(3)$D'E=E'F=F'D$．〔證〕EF'，DD'爲平行弦，$\therefore D'E=FD$．同様 $=E'F$．

【三線坐標】Trilinear coördinates.

〔幾〕三線坐標者，即以三定直線爲參考線，而一點之位置，以其由此三定直線之距離以定之．例如取任意三直線成三角形ABC，從任一點P至三邊BC，CA，AB之垂直距離，設各爲α, β, γ則α, β, γ爲關於三角形ABC之P點之三線坐標，而 ABC 名曰準三角形．



α, β, γ之符號，以與從準三角形之各角頂向對邊所作之垂線同方向者爲正，如P與 A 在 BC 之同側，則 α 爲正，反之爲負，餘仿此；故 P 點在準三角形內，其三線坐標悉爲正．設準三角形之各邊 BC，CA，AB 各以 a, b, c 表之，其面積以S表之，則 $a\alpha+b\beta+c\gamma=2S$．此爲$\alpha, \beta, \gamma$ 間恆可成立之一般關係．又將上式改寫爲$\frac{a\alpha}{2S}+\frac{b\beta}{2S}+\frac{c\gamma}{2S}=1$，且設

$\frac{a\alpha}{2S}=x$，$\frac{b\beta}{2S}=y$，$\frac{c\gamma}{2S}=z$，則$x+y+z=1$．此 x, y, z 與α, β, γ 成常數比，故 x, y, z 亦可用爲任一點之坐標，是謂之面積坐標，因 x, y, z 各表 $\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 與 $\triangle ABC$ 之比也．

【三元方程式】Equation with three unknown numbers.〔代〕即方程式之合

三未知數者．如 $3x+2y+5z-1=0$ 是也．

【三次不盡根】Cubic surd 或 Surd of the third order.〔代〕根指數為 3 之不盡根，謂之三次不盡根或立方不盡根，例如 $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{x}$ 是也．

【三次方程式】Cubic 或 Cubic equation 或 Equation of the third degree. 〔代〕卽含未知數之三乘冪或三次元之項之方程式，如 $2x^3+4x^2-5x+3=0$，$x^2y+5xy-2y+3=0$ 是也．

普通一元三次方程式為 $x^3+Px^2+Qx+R=0$，令 $x=y-\frac{1}{3}P$，則可移去其第二項而得形如 $y^3+qy+r=0$ 之方程式．由欲解三次方程式，解方程式 $x^3+qx+r=0$ 卽可．而其解法可與 $x^3-3abx-a^3-b^3=0$ 以得之；而此方程式可書為 $(x-a-b)(x-\omega a-\omega^2b)(x-\omega^2a-\omega b)=0$，故其根為 $a+b$，$\omega a+\omega^2b$，$\omega^2a+\omega b$，而 a,b 可由 $q=-3ab$，$r=-a^3-b^3$ 得之．卽

$$a^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots(\text{i})$$

$$b^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots(\text{ii})$$

例如解 $x^3-15x=126$．今 $q=-15$，$r=-126$．$\therefore a=5, b=1$．故 $x=5+1=6$，$x=5\cdot\omega+1\cdot\omega^2=-3+2\sqrt{-3}$，或 $x=5\cdot\omega^2+1\cdot\omega=-3-2\sqrt{-3}$．

〔根之討論〕(1)若 $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 為正．此時 a^3,b^3 皆為實數，命 a,b 表其算術的立方根．則三根 $a+b$，$\omega a+\omega^2b$，$\omega^2a+\omega b$，其第一為實數，他二根為虛數 $-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$，$-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{-3}$．

(2) 若 $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 為零．此時 $a^3=b^3$，卽 $a=b$，而三根為 $2a, a(\omega+\omega^2)$，$a(\omega+\omega^2)$．卽 $2a$，$-a$，$-a$ 是也．(3) 若 $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$ 為負．此時 a^3 及 b^3 形如 $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$．今命其立方根為 $m+in$，$m-in$，則三根為 $m+in+m-in$，$(m+in)\omega+(m-in)\omega^2$，$(m+in)\omega^2+(m-in)\omega$，卽 $2m, -m-n\sqrt{3}$，$-m+n\sqrt{3}$．由是三根皆為實數．而普通無求虛數之立方根精密之值之法．故三根俱為不等之實數者，前法殆不能解．而此時稱為不可化之例(Irreducible case)．例如 $x^3-15x-4=0$．代入(i)，則得 $a=\sqrt[3]{2\pm\sqrt{\frac{3375}{27}}+4}=\sqrt[3]{2\pm11\sqrt{-1}}$．

由視察 $(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm11\sqrt{-1}$．$\therefore a=2+\sqrt{-1}$，$b=2-\sqrt{-1}$．由是 $x=4$．以 $x-4$ 除所與之方程式，解所得之方程式 $x^2+4x+1=0$，得 $x=-2\pm\sqrt{-3}$．然用三角函數，則雖困難之解，亦可得之．卽於 (3) 得 $x=(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}+(\alpha-i\beta)^{\frac{1}{3}}$，命 $\alpha=r\cos\theta$，$\beta=r\sin\theta$，則 $r^2=\alpha^2+\beta^2$，$\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$．而 $(\alpha+i\beta)^{\frac{1}{3}}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{3}}$．

由抹甫耳定理 (De Moivre theorem), 其三值爲

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

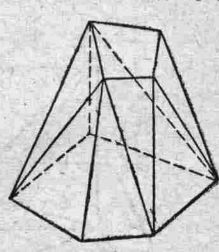
$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right).$$

但 $r^{\frac{1}{3}}$ 爲 r 之算術的立方根, θ 爲由 $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ 求得之最小正角. 又$(\alpha-i\beta)^{\frac{1}{3}}$ 之值可於上之結果變 i 之號而得之; 故所求之三根如次: $2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$, $2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}$, $2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}$.

本條之始之解法爲卡爾丹 (Cardan) 之解法而稍加變更者. 十一世紀中葉, 阿剌伯人 Alkhayyami 所著之代數學中; 已揭三次方程式而以幾何學之作圖法以解之. 然普通之解法, 未有論及. 十三世紀之始, 意大利 Pisa 人 Leonardo, 將代數學之研究, 由阿剌伯傳入意大利, 爾後意大利研究斯學者甚久. 1494 年 Lucus Paciolus 著一書, 其中用阿剌伯人之法, 分三次方程式之類. 且謂以當時代數學之發達, 其解法似爲不能. 同時氏謂發明三次方程式之解法, 數學家常注意之. 方程式 $x^3+mx=n$ 之解法, Scipio 成功之, 然於 1505 年傳其門人 Florido 之外. 世無知之者. 1530 年, Tartaglia 得三次方程式 $x^3+px^2=q$ 之解法. Florido 聞之, 遂將其方程式 $x^3+mx=n$ 之解法公布之. Tartaglia 聞而疑之, 1535 年, 與 Florido 大爭論, 同時 Tartaglia 亦得方程式 $x^3+mx=n$ 之解法. 其解法之要點, 即假定 x 爲二根數之差之式, 即 $\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$, 實即世所謂卡爾丹之法也. 1539年, 卡爾丹就學於 Tartaglia, 而氏不肯, 後屢懇求, Tartaglia 亦漸傳之, 且約決不他漏. 然卡爾丹卒背約, 1545 年載於其所著之書中. 蓋Tartaglia 固自欲公刋之, 1556 年, 始刋其所著之書, 然未至三次方程式, 而氏已死. 故迪經年代, Tartaglia 之功遂湮沒, 後人視爲卡爾丹之發明, 而以其名稱之.

【三角方程式】 Trigonometrical equation. 〔三〕即未知數含三角函數之方程式, 如 $\cos\theta+\tan\theta=0$, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 是也.

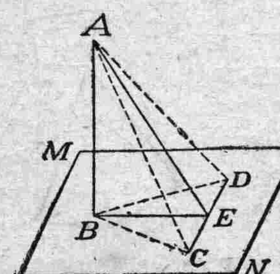
【三角傍面臺】 Prismatoid. 〔幾〕三角傍面臺亦稱類似角柱體, 即一多面體以在二平行面上之二多角形爲其底, 以諸三角形爲其側面, 諸三角形皆與一底有一公共邊, 與他底有一公共頂者也. 命 B_1, B_2 爲其上下二底之面積, M 爲其中央截面之面積, H 爲其高, 則其體積



$$V=\frac{1}{6}H(B_1+B_2+4M).$$

由三角傍面臺體積之公式可求得初等幾何學內諸立體之體積．(1)設二底B_1，B_2相等，則成一角柱，而其公式爲$V=H\times B$．(2)設B_1爲零，則成一角錐，而其公式爲$V=\frac{1}{3}H\times B$．(3)於角臺設e_1，e_2爲二底B_1，B_2之相當邊，則$\frac{1}{2}(e_1+e_2)$爲中央截面之相當邊．故$\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{M}}=\frac{e_1}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}$，$\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{M}}=\frac{e_2}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}$．相加則得$\frac{\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}}{\sqrt{M}}=2$，$\therefore 2\sqrt{M}=\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}$．平方之則得$4M=B_1+B_2+2\sqrt{B_1B_2}$．以此値代入三角傍面臺之體積之公式內，則得$V=\frac{1}{3}H(B_1+B_2+\sqrt{B_1B_2})$，是卽求角臺之體積之公式也．

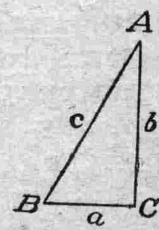
【三垂線定理】Theorem of three perpendiculars．〔幾〕設由平面上一垂線之足作一直線與其平面內一直線成直角．則由其交點至垂線內任意一點所作之線，必垂直於此平面內之線．此定理與



其逆定理謂之三垂線定理．〔證〕設AB爲平面MN之垂線，BE爲由B至此平面內一直線CD之垂線，EA爲由A至AB之任意直線．取EC及ED相等．聯AC，AD，BC，BD．因BC=BD，∴AC=AD．故AE⊥CD．其逆定理之證法，與此相似．

【三角形之解法】Solution of triangles．〔三〕凡三角形皆有六元素，卽三邊三角是也．三角形之解法者，卽由知諸元素中之三者而求餘三者之法也．惟已知之三元素，不能爲三角，因僅知三角，不能決定其各邊之長，僅能求得其相互之比，而合此條件之三角形爲無數也．三角形之解法分二種，玆分述之如次：

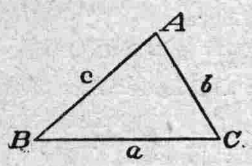
I．直角三角形之解法．因直角三角形已知其一角爲直角，故知他二元素（惟不能爲二角）即可解之．(1)知斜邊c及一銳角（如A），則由$B=90^\circ-A$得B，由$a=c\sin A$得a，$b=c\sin B$得b．(2)知斜邊c及他一邊（如a）．則由$\sin A=\frac{a}{c}$得A，由$B=90^\circ-A$得B，由$b=c\cos A$得b．



(3)知一邊及一銳角（如a，A）．則由$B=90^\circ-A$得B，由$b=a\cot A$，$c=a\operatorname{cosec}A$得b及c．(4)知二邊a，b則由$\tan A=\frac{a}{b}$得A，由$B=90^\circ-A$

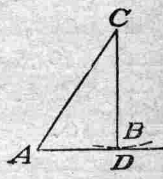
得 B，由 $c=a\operatorname{cosec}A$ 得 c.

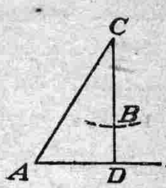
II. 斜角三角形之解法. (1) 知三邊 a,b,c. 則由 $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$, 得 A 及 B，由 $C=180^\circ-A-B$ 得C. (2) 知二邊及其夾角（如b,c,A). 則由 $\frac{B+C}{2}$

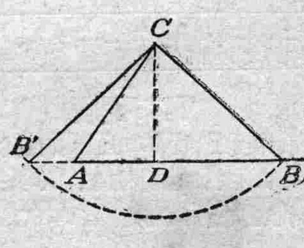


$=90^\circ-\frac{A}{2}$ 得 $\frac{B+C}{2}$，由 $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ 得 $\frac{B-C}{2}$，相加得 B，相減得 C；由 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$ 得a. (3) 知一邊及二角 (如a,B,C). 則由 $A=180^\circ-B-C$ 得 A；由 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ 得 b 及 c. (4)知二邊及一角(如 a,b,A). 則由 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ 得B；由 $C=180^\circ-A-B$ 得 C；由 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ 得 c. 然由sinB 求 B,B 可有二值，一大於 90°，一小於 90°. 若 $A \nless 90^\circ$，則 B 大於 90°之值不適用，因 A+B 必須小於 180° 也. 故 B 須小於 A，而 b 須小於 a. 若 $A<90^\circ$，則 B 之二值適用與否，須依下列條件而定之. (i)若 $b\sin A>a$，則$\sin B>1$，是爲不能解. (ii)若$b\sin A=a$，則 $\sin B=1$，故 $B=90^\circ$，而得一直角三角形. (iii)若 $b\sin A<a$，則 $\sin B<1$，而 B 有二值. 此時又可分爲三種：(α)若 $a>b$，則 $A>B$，故 B 不能爲鈍角，故大於 90° 之值不能適用而僅有一解法. (β)若 $a=b$，則 $A=B$，故B僅有一值. (γ)若$a<b$，則 $A<B$，而 B 爲銳角爲鈍角皆可，故 B 有二值，是謂之兩意之例.

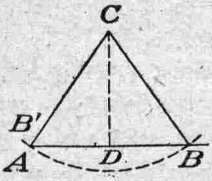
上所述可以圖說明之如次：命 ∠CAD 爲 A，而 $A<90^\circ$，命 AC 爲 b. 自 C 至 AD 作垂線 CD，則 $CD=b\sin A$. 以 C 爲心，a 爲半徑作圓. (i)若 $b\sin A>a$，則圓不與 AD 相交，故三角形不能成立. (ii)若 $b\sin A=a$，則圓切 AD 於 D，故所成之三角形爲直角三角形. (iii)若 $b\sin A<a$，則圓交

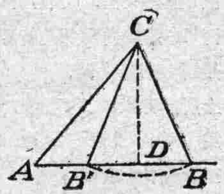






AD 於 B,B′ 二點. (α)若 a>b, 則 B,B′ 在 A 之兩側而成 ABC,AB′C 兩三角形. 然△AB′C 之角 CAB′ 不等於 A, 而等於 180°−A, 故不適用. 故適用者惟△ABC 而已. (β)若a=b, 則B′與 A重合, 而成一等腰三角形 ABC. (γ)若 a<b, 則 B,B′ 在 A之同一側,而成 ABC, AB′C, 兩三角形, 二者俱適合.





上所述之三角形之解法, 其已知件皆爲邊及角. 今舉數例其已知件不爲邊及角者. (1) 已知三角形由其各角頂至對邊之垂線.命此等垂線爲 p_1,p_2,p_3, 則 $ap_1=bp_2=cp_3=2$倍三角形之面積.因 $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, 故 $\cos\frac{1}{2}A=$

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)\times\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)}{\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}}}$$

由此可決定A; 又$p_2=c\sin A$,由是可決定 c. 同樣可以得其餘部分. (2)已知三角形之周圍及其諸角. 因 $s=R(\sin A+\sin B+\sin C)$, 故可得 R 之値,而諸邊爲 $2R\sin A$, $2R\sin B$, $2R\sin C$, 或

$$a=\frac{2s\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}$$, b,c 之値與此相似.

【三角形幾何學】 Geometry of triangle.〔數〕即最近幾何學,見該條.

【三直角三面角】 Tri-rectangular trihedralangle. 〔幾〕即三面角之有三直角者之謂也.

【三等邊三角形】 Equilateral triangle. 〔幾〕即等邊三角形,見該條.

【三角比之六角形】Ratio-hexagon. 〔三〕見三角函數條.

【三直角球面三角形】Tri-rectangular spherical triangle.〔幾〕球面三角形之有三直角者之謂也. 其面積爲全球面八分之一.

上

【上底】 Upper base. 〔幾〕平面幾何學內之梯形, 立體幾何學內之角柱,圓柱,角臺, 圓臺等皆有二底, 其在上者曰上底,在下者曰下底.

下

【下底】 Lower base. 〔幾〕見上底條.

凡

【凡得蒙定理】Vandermonde's theorem.〔代〕凡得蒙定理如次: 若 n 爲任意正整數, a 與 b 爲任意之量,則

$$(a+b)_n=a_n+na_{n-1}b_1+\frac{n(n-1)}{2!}a_{n-2}b_2+\cdots\cdots+\frac{n!}{r!(n-r)!}a_{n-r}b_r+\cdots\cdots+b_n,$$

但$a_n=a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-n+1)$. 今假定 n 爲某特別值爲眞,左邊以 $a+b-n$ 乘之,則爲 $(a+b)_{n+1}$, 右邊之級數之各項亦以 $a+b-n$ 乘之,惟此乘數可變爲種種之形式,即如次:

第一項以$\{(a-n)+b\}$乘之,

第二項以$\{(a-n+1)+(b-1)\}$乘之,

第三項以$\{(a-n+2)+(b-2)\}$乘之,

逐次如是,而

第r項以$\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$乘之.

故$(a+b)_{n+1}=a_n\{(a-n)+b\}$
$+{}_nC_1\cdot a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}$
$+{}_nC_2\,a_{n-2}b_2\{(a-n+2)+(b-2)\}$
$+\cdots\cdots+{}_nC_{r-1}\cdot a_{n-r-1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$
$+{}_nC_r\cdot a_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}$
$+\cdots\cdots+b_n\{a+(b-n)\}$.

但$a_n\{(a-n)+b\}=a_{n+1}+a_nb_1$,

${}_nC_1a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}={}_nC_1(a_nb_1+a_{n-1}b_2)$,

${}_nC_{r-1}\,a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$
$={}_nC_{r-1}(a_{n-r+2}b_{r-1}+a_{n-r+1}b_r)$,

${}_nC_r\cdot a_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}$
$={}_nC_r(a_{n-r+1}b_r+a_{n-r}b_{r+1})$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

$b_n\{a+(b-n)\}=a_1b_n+b_{n+1}$.

故$(a+b)_{n+1}=a_{n+1}+(1+{}_nC_1)a_nb_1+\cdots$
$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a_{n+1-r}b_r+\cdots+b_{n+1}$
$=a_{n+1}+{}_{n+1}C_1a_nb_1+\cdots\cdots\cdots+{}_{n+1}C_ra_{n+1-r}b_r+\cdots+b_{n+1}$,

因 ${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$ 故也. 由是,此定理若對於 n 之任何正整數值爲眞,則對於 $n+1$ 亦爲眞.然 $n=1$ 時,此定理明知其爲眞,故 $n=2$ 亦必爲眞.順次 n 爲 3,4,5,6……亦無不眞矣。〔此證明係揆力 Cayley 所發見〕.

勺

【勺】〔算〕量名.升之百分之一爲勺.

千

【千】Thousand.〔算〕數名.爲百之十倍.阿剌伯以 1000 記之,羅馬以 M 記之,希臘以͵α記之.

【千位】Thouands' place.〔算〕即記數時,自右第四位也.

【千位數】Thousands.〔算〕即在千位之數.

大

【大小】Magnitude.(數)此語原用以指一物所占有之空間之部分,即長廣厚是也,今擴張之以指線,面,角,…任何數.

【大於】Greater than.〔數〕即某數大於他數之謂也.而此意以符號>表之.例如 7 大於 3, 以 $7>3$ 表之.

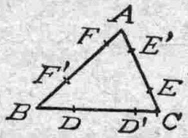
【大圓】Great circle.〔幾〕球與通過其

中心之平面相交之圓之謂也．凡大圓皆相等．球之大圓平分此球．又二大圓互相平分．

【大小關係】〔三〕見三角函數條．

【大衞斯定理】Davis' theorem．〔幾〕大衞斯定理如次：——於三角形之各邊或其延線上各有一對之點，而各對與他各對爲共圓點，則此六點又爲共圓點．

〔證〕於三角形 ABC，命 D, D' 在邊 BC 上；E, E' 在邊 CA 上；F, F' 在邊 AB 上；且 D, D', E, E'；D, D', F, F'；及 E, E', F, F'；任何組皆爲共圓點．求證此六點爲共圓點．



因 E, E', F, F'，爲共圓點，故 $AE \cdot AE' = AF \cdot AF'$ 故 A 在二圓 $DD'EE'$ 及 $DD'FF'$ 之根軸上．然因此二圓有公共弦 DD'，以是 A 不可不在 DD' 上，由是二圓 $DD'EE'$，及 $DD'FF'$ 爲相異之假設，生如此不合理之結果．故二圓相合，即 D, D', E, E', F, F'，之點爲共圓．

子

【子數】〔算〕見百分法條．

【子午線】Meridian．〔算〕於地球表面上想像通過某地點及南北極之圓周，此圓周謂之某地之子午線．

【子母法】Percentage．〔算〕即百分法，見該條．

【子午剖面】Meridian section．〔幾〕見旋轉曲面條．

寸

【寸】〔算〕度名．十分爲寸，十寸爲尺．

小

【小於】Less than．〔數〕即某數小於他數之謂也．而以符號 $<$ 表之．例如 $4<9$，即 4 小於 9 之意也．

【小時】Hour．〔算〕一日之二十四分之一日一小時，一小時爲六十分．

【小圓】Small circle．〔幾〕在球面上所畫任意之圓之謂也，其平面不過球心．

【小數】Decimal 或 Decimal fraction．〔算〕以 10 或 10 之乘羃爲分母之分數，而以便利之方法記載之之謂也．所謂便利之方法者，即如 $\frac{2}{10}$，$\frac{3}{10}$ 以 0.2，0.3 記之，又如 $\frac{27}{100}$，$\frac{369}{1000}$ 各以 0.27，0.369 記之．其第一之零表整數之第一位，而該點謂小數點．點後數字之數，等於分母內零之數．若分子之數字少於分母之零之數．則於小數點之後，以零補之．即如 $\frac{7}{100}=0.07$，$\frac{21}{10000}=0.0021$ 是也．代表整數之第一位之零，有時不寫之，而僅點一小數點者，如 .13 與 0.13 同；然普通以不省去者爲多．又有以逗點(,)代小數點者，如 0,35 與 0.35 同．而如 2.38 表整數 2 與小數 0.38 之和，32.106 表整數 32 與小數 0.106 之和．普通整數及小數

之命位如次:

…萬千百十一. 分釐毫絲忽微纖沙塵…

而分謂之小數第一位, 釐謂之小數第二位,毫謂之小數第三位,如是類推.

【小數點】Decimal point 或 Sign of decimal. 〔算〕見小數條.

【小行列式】Minor determinant. 〔代〕將行列式除去其同數之行與列, 則得一行列式, 此行列式稱爲原行列式之小行列式. 例如 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}$ 爲 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 之小行列式;以 A_1,B_1,C_1 表之,

則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$.

【小定列式】〔代〕即小行列式.

【小定準數】〔代〕即小行列式.

【小補助圓】Minor auxiliary circle. 〔幾〕見補助圓條.

已

【已知件】Datum. 〔數〕於數學中,已知件云者, 指諸已知數及命題之已知部分而言也. 即於問題中,已知件云者,爲已知之部分,而由此以決定所求之部分.於幾何學之證明,已知件爲定義,公理, 前已證明之定理; 又於作圖題, 已知件爲點,直線,角,圓,平面,立體等.

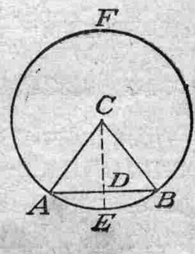
【已知項】Absolute term. 〔代〕含已知數項 (即不含未知數之項) 謂之已知項. 例如於 ax^2+bx+c 式,第三項 c 爲已知項,方程式之各項可視爲皆含未知數, 已知項可視爲 x^0 之係數,而方程式之已知項爲諸根之變其號之積. 故已知項爲零之方程式,其一根或數根爲零.

【已知數】Known number. 〔代〕問題或方程式內之已知數者, 已與其值或假定已與其值之數也.

【已約分數】Fraction in its lowest terms. 〔算〕〔代〕亦稱最簡分數,即分數之分子分母所有之公約數已悉約去者之謂也. 例如 $\frac{3}{7}$, $\frac{a}{bx}$ 爲已約分數.反之, $\frac{9}{15}$, $\frac{bx}{ax^2}$ 則不爲已約分數,而約去其分子, 分母之公約數得 $\frac{3}{5}$, $\frac{b}{ax}$ 即爲已約分數.

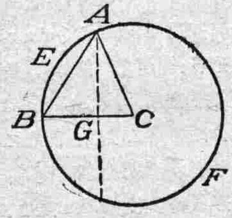
弓

【弓形】Segment (of a circle). 〔幾〕弓形者,圓面之一部分,以弦與其所跨之弧爲界者也.例如 AEB, AFB 是也.一弦分圓面爲二弓形, 而此二弓形謂之共軛弓形.若爲界之弧爲優弧,則謂優共軛弓形或優弓形,如AFB是也.若爲界之弧爲劣弧, 則謂之劣共軛弓形或劣弓形,如AEB是也, 求弓形之面積之法, 先求與其弓形同弧之扇形之面積, 次求以弓形之弦爲底, 以



圓心為頂之三角形之面積．優弓形則取此二者之和，劣弓形則取此二者之差．如上圖，命弧AB之長為l，弦AB之長為k，弓形之高ED為h，圓之半徑為r，則扇形AEBC$=\frac{1}{2}lr$，$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$ $=\frac{1}{2}k(r-h)$，∴ 弓形AEB之面積$=\frac{1}{2}lr-\frac{1}{2}k(r-h)=\frac{1}{2}(lr-kr-kh)$．然$ED\cdot DF=AD^2$，即$h(2r-h)=\frac{1}{4}k^2$，∴$r=\frac{\frac{1}{4}k^2+h^2}{2h}$．以此r之值代入前式而化之，則弓形AEB之面積為$\frac{\frac{1}{4}k^2(l-k)+h^2(l+k)}{4h}$．

又弓形之面積，等於圓之半徑與由其弧減去其弧之二倍之弧之弦之半之積之半．因扇形AEBC之面積$=\frac{1}{2}lr$，又$\triangle ABC$之面積$=\frac{1}{2}r\cdot AG$，故弓形AEB之面積$=\frac{1}{2}r(l-AG)$．



又弓形之面積之近似值可取為$\frac{2}{3}hk$．

【弓形角】 Angle at the segment.

〔幾〕弓形內自弧上一點至弦之兩端引二直線，其二直線間之角，謂之弓形角．弓形角之大與頂點之位置無關，而與弓形之大小有關．優弓形內之弓形角為銳角，劣弓形內之弓形角為鈍角，半圓內之弓形角為直角．

四　畫

不

【不合理】Absurdity. 〔數〕一命題違背已知之眞理時，謂之背理或不合理.此不合理爲用於反證論法 (Reductio ad absurdum) 中.此證法先假定一命題爲眞，逐次推理，得反背已知之眞理之結果，由是知前所假定之命題爲不眞.例如於『二直線有二公共點，則此二直線全相合而成一直線』之命題.假定有二公共點之二直線不全相合.則此二直線包圍一空間，而反背『二直線不能包圍一空間』之公理.故有二公共點之二直線全相合.此證法數學中常用之，而尤以幾何學中用之爲多.

【不名數】Abstract number. 〔算〕數之不附以單位之名者，謂之不名數.例如 4,7,15 是也.然若 3 人 5 犬則不爲不名數而爲名數矣.

【不完數】Imperfect number. 〔算〕爲對於完數而言，即其諸約數中除本數外，其和不等於本數之數也. 其和大於本數者曰贏數，小者曰輸數. 如 20 之諸約數爲 1,2,4,5,10，其和大於 20，故 20 贏數；又 9 之約數爲 1，3，其和小於 9，故 9 爲輸數.

【不定式】Indeterminate expression. 〔代〕即不定形，見該條.

【不定形】Indeterminate form. 〔代〕一式或函數，其中所含之文字與之特別之值時，有爲不定之形者，謂之不定形.標準不定形爲$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\times\infty$，0^0，∞^0，1^∞. 例如 $\frac{x^2-x}{x^3-x}$，若 $x=0$，則爲$\frac{0}{0}$之形；若 $x=1$，亦爲$\frac{0}{0}$之形；若 $x=\infty$，則爲$\frac{\infty}{\infty}$.不定形之值雖實不一定，用代數學中通常之法則，不能求得其值，然可求得其極限值. 如$\frac{x^2-x}{x^3-x}=\frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$，當 x 與 0 或 1 稍差時，分子分母可以 $x(x-1)$ 除之，而$\frac{x^2-x}{x^3-x}=\frac{1}{x+1}$.故 x 近於 0 或 1 時，其極限值爲 1 或$\frac{1}{2}$. 又當 $x=\infty$，此分數之極限值爲 0. 又於 x^x，當 $x=0$，則爲 0^0 之形，而令 $\mu=x^x$，則 $\log\mu=x\log x$，而 $x\log x$ 或 $\log\mu$ 之極限值爲 0，故 μ 或 x^x 之極限值爲 1.

【不等式】Inequality. 〔代〕不等之二式而以符號>或<連結之者之謂也. 次所述諸命題中，諸文字皆設爲正實數. 若$a>b$，則 (1)$b<a$；(2)$-a<-b$；(3)$a+c>b+c$；(4)$a-c>b-c$；(5)$ac>bc$；(6)$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；(7)$a^m>b^m$；(8)$a^{-m}<b^{-m}$. 若$a_1>b_1$，$a_2>b_2$，$a_3>b_3$，……，$a_n>b_n$，則
(9) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，(10)$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2$

$b_3 \cdots b_n$. 凡以上諸式皆甚明顯. 次二不等式甚重要,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} > (a_1a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}};$$

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m}{n} > \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^m,$$

惟 m 須爲眞分數;其證明見平均數條.

【不等號】Sign of inequality. 〔代〕示二數或量不相等之符號,即$>$,$<$或$\neq$是也. 而$>$示符號之左大於右;$<$則反之,即示符號之左小於右;而$\neq$僅示符號之左右不相等而已.又有用不等符號$\ngtr$,$\nless$者,而$\ngtr$表其左不大於右;$\nless$表其左不小於右.

【不盡根】Surd. 〔代〕於算術上之開方法,不能精密求得其根,而僅能得其近似值者,謂之不盡根.如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ 是也.代數式 $\sqrt{a}$, 雖或非爲不盡根,而亦恆稱之爲不盡根.不盡根有時謂之無理數,不盡根之次數以根號表之,如 $\sqrt{a}$ 爲二次不盡根, $\sqrt[3]{x}$ 爲三次不盡根, $\sqrt[n]{y}$ 爲 n 次不盡根. 而二次不盡根又謂之平方不盡根,三次不盡根謂之立方不盡根.

【不適數】〔算〕二數之差不能被第三數除盡者,此二數對於第三數稱爲不適數. 例如$\frac{11-6}{3}=1\frac{2}{3}$.故11與 6 爲對於 3 之不適數.

【不同類項】Unlike terms 或 Dissimilar terms. 〔代〕二項內所含之文字或其乘冪相異者,謂之不同類項或異類項. 例如 $2ab^2$ 與 $5abc$ 爲不同類項, $3x^2yz$ 與 $3xyz$ 爲不同類項.

【不定係數】Indeterminate coefficient.〔代〕因恆等方程式內所含任意一量或數量,對於諸值皆爲眞,若如斯之方程式之諸項,悉移於一邊,則其任意量之各乘冪之係數謂之不定係數.此等係數,實皆爲零,是謂之不定係數之原理.茲述之如次: (1)於僅含一不定量而第二邊爲零之恆等方程式, 其不定量之各乘冪之係數各等於零. 或於僅含一不定量之恆等方程式之二邊, 其不定量之同乘冪之係數皆相等. (2)於含二以上不定量而第二邊爲零之恆等方程式, 此等不定量之各乘冪及其積之各係數各等於零. 或於含二以上不定量之恆等方程式之兩邊, 此等不定量之各乘冪及其積之係數各相等.此等原理於解析法中應用甚廣.今示用以展開一式爲級數及求一級數之和之例. 〔例1〕展開$\frac{1}{1+x}$ 爲 x 之昇冪之級數. 假定$\frac{1}{1+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots$,

而A,B,C,D,…爲欲決定之使此方程式爲恆等方程式者.去分母,則得

$$1=A+(A+B)x+(B+C)x^2+(C+D)x^3+\cdots\cdots$$

兩邊之同乘冪之係數相等,得

$1=A, A+B=0, B+C=0, C+D$

$=0, \cdots\cdots\cdots,$

故 $A=1, B=-1, C=1, D=-1, \cdots$.

故 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots$.

〔例2〕 求級數 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$ 之和.

假定 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=$

$$A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\cdots.$$

以 $n+1$ 代 n，則得 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(n+1)(n+2)=$

$$A+B(n+1)+C(n+1)^2+D(n+1)^3+E(n+1)^4+\cdots\cdots.$$

相減則得 $(n+1)(n+2)=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1)+E(4n^3+6n^2+4n+1)+\cdots\cdots$.

因此式爲恆等式，故E及以後之係數皆爲零.而 $3D=1, 3D+2C=3, D+C+B=2$. 故 $D=\frac{1}{3}, C=1, B=\frac{2}{3}$. 故所求之和 $=A+\frac{2}{3}n+n^2+\frac{1}{3}n^3$. 命 $n=1$，則 $2=A+2$，或 $A=0$. 故 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{2}{3}n+n^2+\frac{1}{3}n^3$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

【不定級數】 Indeterminate series.
〔代〕與中性級數同.

【不定問題】 Indeterminate problem.
〔算〕〔代〕〔幾〕能得無數解答之問題之謂也. 算術中例如知三以上同種物之價格及其平均價，而求其混合之各分數時，此類問題恆起所與之條件少於未知數即所求之數之例. 此時所與之條件所作方程式之數，少於未知數之數.由是此等方程式爲不定，而問題亦不定.又於幾何學中知三角之底及高求作本形，或知三角形之三角求作本形之問題，三角形爲不確定.

【不定積分】 Indefinite integral.〔積〕見積分法條.

【不能問題】 Impossible problem.
〔數〕不能問題者，普通得於題意爲不能之結果及其解法爲不能者之謂也. 例如於算術或代數學之問題，由所與之數，算得人數爲分數或負數者爲不能問題，因題辭含不能之關係也. 又如任意角之三等分，題意雖非不能，然於初等幾何學之範圍內其解法爲不能.

【不連續量】 Discontinuous quantity.
〔算〕量之不能增減小於一單位者，謂之不連續量.換言之，若所用之單位爲自然獨立者，謂之不連續量.如馬以匹計，匹匹分離，此即不連續量也.

【不盡小數】 Interminate decimal.
〔算〕小數之無限連續者之謂也. 如循環小數即爲不盡小數之一，又如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 化爲小數則得 1.4142...., 1.7320...., 2.23....; 之不盡小數. 又不可通約數如圓周率 π 之值(3.14159....)，納白爾對數底 e 之值 (2.71828....)，常用對數之對數率 μ 之值(.43429....)皆爲不盡小數.

【不可化之例】 Irreducible case.〔代〕見三次方程式條.

【不可通約量】 Incommensurable

magnitudes.〔幾〕見可通約量條.

【不可通約數】Incommensurable numbers.〔代〕見可通約數條.

【不完漸屈線】Imperfect evolute.〔幾〕即不完縮閉線.

【不完縮閉線】Imperfect evolute.〔幾〕一名不完漸屈線.於一曲線上之各點作切線及斜線,令斜線與切線成已知之角,則切於此諸斜線之曲線,謂之不完縮閉線.

【不完雙曲線】Imperfect hyperbola.〔幾〕有二無限長之枝而僅有一漸近線之曲線,名曰不完雙曲線.其一般方程式爲 $ax^3-bx^2-cx+xy^2+cy-d=0$.

【不定方程式】Indeterminate equation.〔代〕僅有一方程式,而其中含有多個未知數,或未知數之數多於方程式之數,而其未知數之値,不能一定,而有無數之解答.此等方程式,謂之不定方程式.不定方程式,若其未知數之値,加以限制(例如限於正整數),則其未知數之値爲有限制.詳一次不定方程式及二次不定方程式條.

【不定係數法】Method of indeterminate coefficients.〔代〕見不定係數條,及插入法條.

【不定積分法】Indefinite integration.〔積〕見積分法條.

【不連續函數】Discontinuous function.〔數〕凡函數當其自變數變至某値時,不隨之連續變或不爲實數者,則此函數就某値言,謂之不連續函數,而某値稱曰不連續點.不連續函數亦曰分離函數,對連續函數而言.參閱連續性條及連續函數條.

【不平行四邊形】Trapezium.〔幾〕四邊形之任何二邊皆不平行者之謂也.

【不同類不盡根】Unlike surds.或 Dissimilar surds.〔代〕見同類不盡根條.

【不完全方程式】Incomplete equation.〔代〕方程式之缺少其最高次項以下之某次數之項者之謂也.例如三次方程式 $2x^3+4x+1=0$,缺少 x^2 之項,而爲不完全方程式.不完全方程式,可附以零係數,使成完全方程式之形式.如上之不完全方程式,可書之爲 $2x^3+0\,x^2+4x+1=0$,而成完全方程式之形式.

【不相交同軸圓】Non-intersecting co-axal circles.〔幾〕見同軸圓條.

【不等邊三角形】Scalene triangle.〔幾〕三角形之任何二邊皆不相等者之謂也.亦稱斜三角形.

【不同初位循環節】Dissimilar repetend.〔算〕見循環小數條.

中

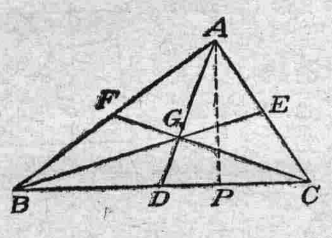
【中心】Centre.〔幾〕中心多指圓或球者而言.圓之中心者,由圓內一點至圓周引諸直線皆相等之點也.球之中心者,由球內一點至球面引諸直線皆相等之點也.又正多角形之內切圓之中心謂之中心.其他如平行四邊形之二對角線之交點,亦有稱爲中心者,因過此點於形內所引

各直線皆平分於此點故也．又橢圓之長軸與短軸之交點，謂之橢圓之中心；雙曲線之橫軸與其共軛軸之交點，謂之雙曲線之中心；因過此點之弦皆被平分故也．

【中率】Mean．〔算〕〔代〕比例中項，一稱比例中率．見比例中項條．

【中項】Mean〔代〕中項者，在任意二項之中間，而服從一定數學的規則者之謂，如比例中項，等差中項．等比中項，調和中項是也．見各條．

【中線】Median．〔幾〕由三角形之一角頂，至對邊之中點所作之直線，謂之三角形之中線，故三角形有三中線，而此三中線交於一點，謂之三角形之重心．如圖AD，BE，CF，為△ABC之中線而其交



點G為重心．三角形兩邊之平方和，等於他邊之中線之平方與他邊之半之平方和之二倍．即 $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$．〔證〕作 AP 垂直於 BC，則 $AB^2=AD^2+BD^2+2BD\cdot DP$，$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\cdot DP$。因 $BD=DC$，故相加得 $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$。

又聯梯形之兩腰之中點之直線，謂之梯形之中線．梯形之中線與二底平行，且等於二底之和之半．

【中點】Middle point 或 Mid-point．〔幾〕某有限直線之中央之點之謂也．

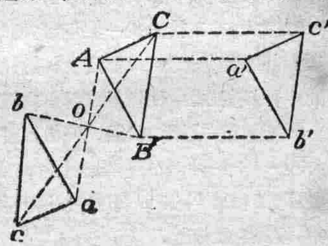
【中心角】Angle at the centre．〔幾〕即圓心角，見該條．

【中心軸】〔幾〕軸之通過中心者．如橢圓之長軸短軸，雙曲線之橫軸縱軸等是．

【中心線】Centre-line．〔幾〕即聯心線，見該條．

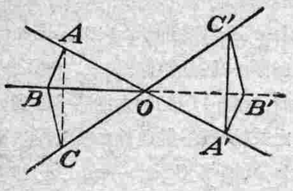
【中垂線】Perpendicular bisector．〔幾〕即垂直二等分線．

【中心對稱】Central symmetry．〔幾〕(1)於一平面上之中心對稱．A，a 為在過 O 點之直線上二點．而在其反對側由 O 等距離處，則此二點謂之對 O 為對稱。若 A 沿任意線運動，而 a 沿對應線運動，則此二線謂之對於 O 為對稱．而 O 謂之對稱中心．若將 Oa 於其平面內O點迴轉二直角，則 a 可與 A 合．由是中心對



稱之二線或圖形，離平面之中心而迴轉之，可使之疊置．中心對稱，對應直線平行，然為反對之向．又對應直線可以平行且同向者置換之．此理可由上圖之三角形 ABC，abc，a′b′c′ 之關係之明瞭之。(2) 於空間之中心對稱．取三角錐 O－ABC 將其稜通過 O 而延長之，使 OA′＝

OA，OB′=OB，OC′=OC，則三角錐



O－A′B′C′ 與三角錐 O－ABC 對稱。然此二三角錐，除極特別者外，不能疊置。對於任意之多角錐亦與此同樣。中心對稱，又謂之點對稱。

【中立級數】Neutral series.〔代〕與中性級數同，見該條。

【中央截面】Mid-section.〔幾〕於三角傍面臺與二底平行，且與二底等距離處之平面所作之截面也。

【中性級數】Neutral series.〔代〕級數之始 n 項之和，若 n 無限增大，此和不無限增大，亦不接近於一定極限，則此級數，既非收斂級數，又非發散級數，即所謂中性級數也。中性級數亦稱中立級數，或動搖級數，或週期級數。例如級數 $1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$，若項數 n 爲奇數，則其和爲 1，若 n 爲偶數，則其和爲零，故爲中性級數。

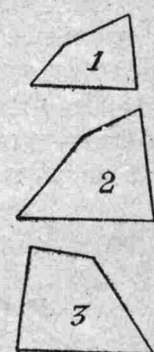
【中點三角形】Mid-point triangle.〔幾〕聯結三角形三邊之中點所成之三角形也。

互

【互素數】Numbers prime to each other.〔算〕二數無 1 以外之公約數者，謂之互素數。例如 4 與 5，7 與 8 是也。各爲素數之二數爲互素數，而互素數不必各爲素數，如 9 與 10 皆非素數，而爲互素數。

【互等角多邊形】Mutual equiangular polygons.〔幾〕二多邊形之角，依同次序彼此各相等者，謂之互等角多邊形。

【互等邊多邊形】Mutual equilateral polygons.〔幾〕二多邊形之邊依同次序彼此各相等者，謂之互等邊多邊形。互等角多邊形可不互等邊，如 1 與 2 是也；互等邊多邊形（除三角形外），亦可不互等角，如 2 與 3 是也。若二多邊形爲互等角且互等邊，則此二形必等，因可使之重合故也。



五

【五】Five.〔算〕爲基數之一。阿剌伯以 5 記之，羅馬以 V 記之，希臘以 ϵ′ 記之。

【五角形】Pentagon.〔幾〕即五邊形。

【五角數】Pentagonal number.〔代〕見多角數條。

【五面體】Pentahedron.〔幾〕即五平面所包圍之立體也。

【五基法】〔算〕〔代〕即加減乘除開方之五種運算法也。

【五進法】Quinary scale.〔代〕即以五爲記數底之記數法也。此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 及 0 卽足。而於五進法中，3401 卽表 $3\times5^3+4\times5^2+1$ 之意。

【五邊形】Pentagon.〔幾〕卽五直線所包圍之平面形也.亦稱五角形。

【五次方程式】Quintic 或 Quintic equation 或 Equation of the fifth degree.〔代〕卽含未知數之五乘冪之方程式也.五次方程式之普通解法，誘起若干數學家之討論，以爲二次，三次，四次方程式皆有普通解法，遂謂五次方程式亦有解法.然終失敗，蘭格倫日(Lagrange)謂五次及高次方程式之代數的解法爲不可能，然不能證明之；後魯飛泥(Ruffini)亦謂其不可能，然其推理不甚精密；殆至阿柏爾(Abel)始完全證明其代數的解法爲不可能。

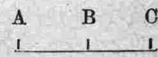
【五角十二面體】Pentagonal dodecahedron.〔幾〕十二個五角形之面所包圍之立體之謂也。

今

【今有術】〔算〕古稱三率法爲今有術，又名異乘同除.隋書律曆志:「齊同以通之，今有以貫之.」實卽今之比例問題之解法也.參閱三率法條。

內

【內分】To divide internally.〔幾〕爲對於外分而言，卽於某有限直線上取一點，則該直線謂之內分於此點，而此點謂之內分點.例如於直線 AC 上取一點 B，則 AC 內分於 B。



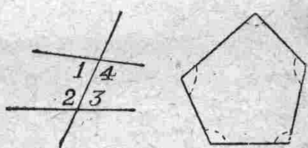
【內切】(一)To touch internally.〔幾〕一圓在他圓內而互相切之謂也。

(二)To be inscribed.〔幾〕一圓切於一多邊形之各邊時，謂之內切.又若一球切於多面體之各面時，亦謂之內切。

【內心】(一)In-centre.〔幾〕多指三角形而言，卽三角形之三內角之二等分線之交點，卽內切圓之心也.又正多角形之各角之二等分線同交於一點，謂之內心。

(二) Inner centre.〔幾〕此爲指相似內心，卽二相似多邊形或二圓之二相似中心之中，其在二形之中間者之謂也.見相似中心條。

【內角】Interior angle.〔幾〕如圖，一直線與他二直線相交.角 1,2,3,4 謂之內角.又多邊形之各角謂之內角。



【內折】〔算〕卽內耗，見該條。

【內耗】〔算〕凡百分率由母數除子數而得者，謂之內耗或內折；由餘數(卽母數減子數)除子數而得者，謂之外耗或外折。例如糙米 10 石舂成白米 8 石，則所耗量 $=2$ 石；故內耗 $=\dfrac{2}{10}=.2$，卽 2 成；外耗 $=\dfrac{2}{8}=.25$，卽 2 成 5 分。

【內接】To be inscribed.〔幾〕若多邊形之各角頂在一圓周或他多邊形之邊上，則前多邊形謂之內接於圓或後多邊形．又多面體之各角頂在一球面上，則此多面體謂之內接於球.(內切,內接,尋常多同義用之).

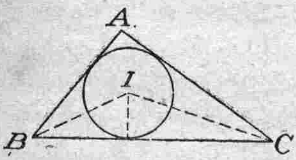
【內率】Mean.〔算〕〔代〕卽內項.

【內項】Mean.〔算〕〔代〕於比例內,其第二項與第三項,謂之內項或內率.例如於a:b=c:d,b 及 c 爲內項.

【內分點】〔幾〕見內分條.

【內切球】Inscribed sphere 或 Insphere.〔幾〕卽球之切於多面體之各面者之謂也.

【內切圓】Inscribed circle或In-circle.〔幾〕卽圓之切於多邊形之各邊者之謂也.多就三角形而言．卽以三角形 ABC

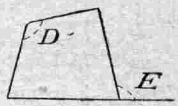


之三角之內二等分線之交點 I (卽內心)爲心,由 I 至一邊之垂線爲半徑所作之圓也.

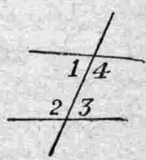
【內半徑】In-radius.〔幾〕卽內切圓之半徑也.

【內接形】Inscribed figure.〔幾〕卽內接多邊形.

【內對角】Interior opposite angle.〔幾〕指三角形之一外角之不相鄰之內角而言．例如A,B 爲C之內對角．而∠A+∠B=∠C．又於四邊形，D稱爲E之內對角.



【內錯角】Alternate interior angles.〔幾〕如圖,一直線截二直線時，1 與 3, 2 與 4 謂之內錯角．一直線截二平行線，則內錯角相等,而其逆定理亦爲眞.



【內擺線】Hypocycloid.〔幾〕卽內旋輪線,見該條.

【內公切面】Internal common tangent plane.〔幾〕同切於二球之切面,而球在切面之異側，則此切面謂之二球之內公切面.

【內公切線】Internal common tangent.〔幾〕同切於二圓之切線,而圓在其異側者之謂也.詳公切線條.

【內接角柱】Inscribed prism.〔幾〕角柱之頂點在球或多面體之面上者之謂.

【內接角錐】Inscribed pyramid.〔幾〕角錐之頂點在球或多面體之面上者之謂.

【內旋輪線】Hypocycloid.〔幾〕一動圓內切於一定圓周而迴轉時，則動圓周上一定點之軌迹,卽爲內旋輪線.命 a 爲定

圓半徑，b 爲動圓半徑，則其方程式爲 $x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta$, $y=(a-b)\sin\theta-b\sin\frac{a-b}{b}\theta$. 若 $a=2b$，則內旋輪線爲直線；又若 $a=4b$，則爲四歧點內旋輪線（圖見曲線條），方程式爲 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，或 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$.

【內餘擺線】〔幾〕即內餘旋輪線.

【內點擺線】〔幾〕即內點旋輪線. 詳半徑旋輪線條.

【內二等分線】Internal bisector.〔幾〕某角之二等分線，謂之內二等分線，爲對於外二等分線而言也.詳二等分線條.

【內接三角形】Inscribed triangle.或 Intriangle.〔幾〕見內接多邊形條.

【內接四邊形】Inscribed quadrilateral 或 Inscriptible quadrilateral.〔幾〕見內接多邊形條.

【內接正方形】Inscribed square.或 Insquare.〔幾〕見內接多邊形條.

【內接多面體】Inscribed polyhedron.〔幾〕多面體之各頂點，在他多面體之面上或球面上者之謂也.

【內接多邊形】Inscribed polygon 或 In-polygon.〔幾〕多邊形之各頂點在一圓周上或他多邊形上者，謂之內接多邊形，而內接多邊形因其邊數爲三，四，…而稱之爲內接三角形，內接四邊形，…….

【內餘旋輪線】〔幾〕圓內之餘旋輪線也. 一動圓內切於一定圓周而旋轉時，則動圓半徑上或半徑延線上之一定點之軌迹，成爲一種特殊形式之餘旋輪線，稱曰內餘旋輪線. 故內餘旋輪線猶有內點旋輪線與外點旋輪線兩種. 命 a 爲定圓半徑，b 爲動圓半徑，d 爲動圓心至定點之距離，則內餘旋輪線之方程式爲 $x=(a-b)\cos\theta+d\cos\frac{a-b}{b}\theta$, $y=(a-b)\sin\theta-d\sin\frac{a-b}{b}\theta$. 參閱半徑旋輪線及外餘旋輪線條.

【內點旋輪線】〔幾〕見半徑旋輪線條.

公

【公升】Litre.〔算〕自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱竔（立突）爲公升. 而竍，竡，竏各稱爲公斗，公石，公秉；竕，竓，竰各稱爲公合，公勺，公撮.詳立突條.

【公尺】Metre.〔算〕即米突. 自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱米突爲公尺（粎）.而籵，粉，粴各稱公寸，公分，公釐；粌，粨，粁，各稱公丈，公引，公里.詳米突條.

【公斤】Kilogramme.〔算〕自我國加入萬國度量衡同盟會後，稱瓩爲公斤. 而兝，兣，兞，兙，兛，兡各稱爲公兩，公錢，公分，公釐，公毫，公絲.詳克條.

【公比】Common ratio.〔代〕等比級數之某項與其前項之比恆相等，而此相等之比，謂之公比，普通以 r 表之.例如於 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\cdots, \frac{1}{2}:1=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}:\frac{1}{4}=\cdots\cdots=\frac{1}{2}$，而$\frac{1}{2}$爲公比。

【公式】Formula.〔代〕普通定則之代數的表示卽爲公式；反之，公式以通常之語述之，卽爲定則.例如二數之和爲 s，其差爲 d，求二數之公式爲$\frac{1}{2}(s+d)$，$\frac{1}{2}(s-d)$.若以通常之語述之，卽「所求之二數爲所與之和與差之和之半；及其和及差之差之半」.是卽定則也.

【公里】Kilometre.〔算〕一〇〇〇公尺爲一公里，合舊制三一二五部尺，一·七三六〇部里，合市用制二市里，合英制〇·六二一四哩.

【公弦】Common chord.〔幾〕聯相交二圓之交點之直線之謂也.公弦爲聯心線所垂直二等分.

【公法】Postulate.〔幾〕卽幾何學中作圖之必可能者之謂也.公法有種種；然普通爲次三條：(1)由一點至他點可引一直線.(2)一有限直線可任意延長之.(3)以任意點爲中心，任意長之直線爲半徑可畫一圓.

【公差】Common difference.〔代〕等差級數相鄰二項之差恆等，而此相等之差，謂之公差.普通以 d 表之.例如於等差級數1,4,7,10,……，$4-1=7-4=10-7=\cdots\cdots=3$，而 3 爲公差.

【公根】Common root.〔代〕二方程式有一根相同者，則此根稱爲二方程式之公根.二二次方程式$ax^2+bx+c=0$，$a'x^2+b'x+c'=0$有公根之條件爲$(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$，而此公根必等於$\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$或$\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$.〔證〕命 α 爲公根，則得 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$，$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$；故用十字乘法得$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$.消去 α 得$(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$.

又 $\alpha=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$.

【公畝】Are.〔算〕卽一平方公丈(一〇〇平方公尺)之地積，合舊制〇·一六二八部畝，合市用制〇·一五市畝，合英制〇·〇二四七英畝.

【公理】Axiom.〔數〕公理爲推理之基本，用他命題不能說明之，惟吾人由經驗而認爲眞者也.公理有普通公理與幾何公理二種，見各條.

【公頃】Hectoare.〔算〕一〇〇公畝(卽一〇〇〇〇平方公尺)爲一公頃.

【公項】General term.〔代〕公項者，級數之普通之項之謂也，故亦稱普通項.例如於級數 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots$，其第 n 項卽公項爲 $n(n+1)$.又如二項展開式卽$(x+a)^n$之展開式之公項爲$\frac{n!}{n!(n-r)!}a^rx^{n-r}$.

【公算】Probability 或 Chance.〔代〕卽適遇，見該條.

【公鐓】Metric ton.〔算〕一〇〇〇公斤之重爲一公鐓，合舊制庫平一六七五斤，合市用制二〇〇〇市斤，合英制〇·九八

四二噸。

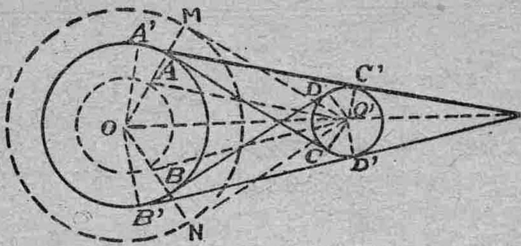
【公分子】Common numerator.〔算〕〔代〕二以上分數之分子相同者之謂也。分子相異之分數，可化爲有公分子之分數，即取各分子之最小公倍數爲公分子，以各分子除之，而以其商乘相當之分母即可。例如化 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{7}$ 爲有公分子之分數，因分子 2,3,5 之最小公倍數爲 30，而 $30\div2=15$，$30\div3=10$，$30\div5=6$；故 $\frac{2}{3}=\frac{30}{3\times15}=\frac{30}{45}$，$\frac{3}{5}=\frac{30}{5\times10}=\frac{30}{50}$，$\frac{5}{7}=\frac{30}{7\times6}=\frac{30}{42}$，即 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{7}$ 與有公分子 30 之分數 $\frac{30}{45}$，$\frac{30}{50}$，$\frac{30}{42}$ 等值。30 可以 2,3,5 之任何公倍數代之。而公分子爲各分子之最小公倍數者，謂之最小公分子，如上之 30 即爲最小公分子也。用此法可定諸分數之值之大小，蓋分子相同，分母愈小者，其值愈大，分母愈大者，其值愈小。例如上之三分數中，$\frac{5}{7}$ 最大，$\frac{2}{3}$ 次之，$\frac{3}{5}$ 最小。

【公分母】Common denominator.〔算〕〔代〕二以上分數之分母相同者之謂也。分母相異之分數，可化爲有公分母之分數，即取各分母之最小公倍數爲公分母，以各分母除之，而以其商乘相當之分子即可。例如化 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，爲有公分母之分數，因分母 3,4,5 之最小公倍數爲 60，而 $60\div3=20$，$60\div4=15$，$60\div5=12$；故 $\frac{2}{3}=\frac{2\times20}{60}=\frac{40}{60}$，$\frac{3}{4}=\frac{3\times15}{60}=\frac{45}{60}$，$\frac{1}{5}=\frac{1\times12}{60}=\frac{12}{60}$，即 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$ 與有公分母 60 之分數 $\frac{40}{60}$，$\frac{45}{60}$，$\frac{12}{60}$ 等值。60 可以 3,4,5 之任何公倍數代之。而公分母爲各分母之最小公倍數者，謂之最小公分母，如上之 60 即爲最小公分母也。

【公切面】Common tangent plane.〔幾〕即二球之公共之切面也。公切面有內公切面與外公切面之分。若二球在面之異側，則此公切面謂之內公切面；若在同側，則爲外公切面。

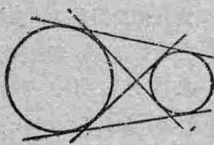
【公切線】Common tangent.〔幾〕即二圓之公共切線也。公切線有內公切線與外公切線之分。二圓在切線之異側，則此公切線，謂之內公切線；若在同側，則爲外公切線或直接公切線。普通內公切線與外公切線皆各有二，而內公切線之交點在二圓心之間，外公切線之交點在二圓心之外，而二交點皆在聯心線上。

作公切線之法如次：如圖，命 O,O' 爲二圓之心，r,r' 爲其半徑。以 O 爲心，$r+r'$ 爲半徑作圓。由 O' 作此圓之切線 $O'M$，$O'N$，聯 OM,ON，交 O 圓於 A 及 B。作 $O'C\parallel OA$，及 $O'D\parallel OB$。作 AC,BD，即爲二與圓之內公切線。若以 $r\sim r'$ 爲半徑作圓，與前同樣，則可作二外公切線

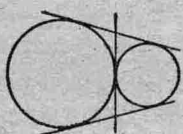


$A'C'$, $B'D'$.

(i)若二圓互在外，卽 $OO'>r+r'$，此時可作二內公切線與二外公切線，而共有四公切線。(ii)若二圓互外切，卽 $OO'=r+r'$，此時可作一內公切線與二外公切線，而共有三公切線。

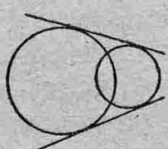


I



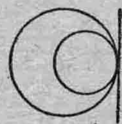
ii

(iii)若二圓相交，卽 $OO'<r+r'$，此時祗有二外公切線。

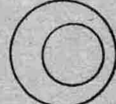


iii

(iv)若二圓內切，卽 $OO'=r\sim r'$，此時祗有一外公切線。(v)若二圓之一全在他圓之內，卽 $OO'<r\sim r'$，此時旣無內公切線又無外公切線。上述諸關係，可以次表明之。



iV



V

二圓之位置	內公切線之數	外公切線之數	公切線之總數
互在外	2	2	4
外切	1	2	3
相交	0	2	2
內切	0	1	1
一圓在他圓內	0	0	0

【公尺制】Metric system.〔算〕卽米突制，見該條。

【公生數】Common factor.〔算〕〔代〕卽公因數。

【公因數】Common factor.〔算〕〔代〕二或二以上之數或式之公因數者，卽可除盡此等數或式之數或式之謂也。例如3爲9,12,15之公因數；而 $a-b$ 爲 a^2-b^2，$(a-b)^2$，a^3-a^2b 之公因數。二二次式

$ax^2+bxy+cy^2$ 與 $a'x^2+b'xy+c'y^2$ 有一公因數之條件爲 $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$.公因數亦稱公生數,公度數或公約數.

【公度數】Common measure.〔算〕〔代〕卽公約數.

【公約數】Common measure.〔算〕〔代〕與公因數同.

【公倍數】Common multiple.〔算〕〔代〕二或二以上之數或式之公倍數者,卽數之可以此等數整除之者之謂也. 例如 60, 120, 180 皆爲 2,3,4,5 之公倍數;又 ab^2, a^2b^2, a^3b^5 皆爲 a, b^2 之公倍數; a^2-b^2, $a^3+a^2b-ab^2-b^3$ 皆爲 $a+b$, $a-b$ 之公倍數.

【公割線】Common secant.〔幾〕卽過相交二圓之二交點之直線也.

六

【六】Six.〔算〕爲基數之一,阿剌伯以 6 記之,羅馬以 VI 記之,希臘以 ϛ′ 記之.

【六角形】Hexagon.〔幾〕卽六邊形.

【六面體】Hexahedron 或 Hexaedron.〔幾〕卽六平面所圍之立體也.

【六進法】Senary scale.〔代〕卽以 6 爲記數底之記數法也.此記數法用數字 1, 2, 3, 4, 5, 及 0 卽可. 而於六進法中, 3154 卽表 $3\times6^3+1\times6^2+5\times6+4$ 之意.

【六點圓】Six-point circle.〔幾〕卽三乘比圓,見該條.

【六邊形】Hexagon.〔幾〕卽六直線所包圍之平面形也.亦稱六角形.

【六十分法】Sexagesimal method.〔算〕〔幾〕〔三〕亦稱英國法.卽以度,分,秒測角之法也. 直角之九十等分之一謂之一度,度之六十等分之一謂之一分,分之六十等分之一謂之一秒,卽

1直角=90度=5400分=324000秒,

1度= 60分= 3600秒,

1分= 60秒,

而度,分,秒以記號「°」「′」「″」表之,例如 $52°16'47''$ 卽表 52度16分47秒也.

分

【分】(一)〔算〕長度名.尺之百分之一曰分.

(二)〔算〕重量名.兩之百分之一曰分.

(三)〔算〕地積名.畝之十分之一曰分.

(四)〔算〕小數名.單位之十分之一曰分.

(五) Minute.〔算〕一小時或一度之六十分之一曰分.而一分等於六十秒.

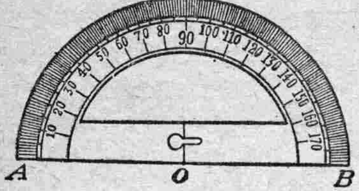
【分子】Numerator〔算〕〔代〕見分數條.

【分母】Denominator.〔算〕〔代〕見分數條.

【分數】Fraction.〔算〕〔代〕表示除法之式,可於被除數之下作一橫線,而以除數書之,則其商謂之分數;被除數謂之分子;除數謂之分母. 例如以 b 除 a,可以 $\frac{a}{b}$ 表之,而 $\frac{a}{b}$ 爲分數,a 爲分子,b 爲分母.

【分點】Point of division.〔幾〕卽分一直線或圓周爲數部分之點也.

【分度規】Protrator.〔幾〕分度規爲如圖所示之半圓形,其周圍有度劃者.用以



量圓弧所含之度數或作某角.量圓弧之度數之法以 O 與弧之中心相當,置弧之一端於直線 OA 上.由A至聯弧之他端及 O 之直線之度數,可測得之. 又作角之法,即以 O 置於頂點,先計其角之度數,次作 OA,由 A 計前所與之度數,可作得其角.分度器不限於如上圖之半圓形,全圓形者有之,三角形者亦有之.其所分之度劃愈精,則用之愈便.

【分指數】Fractional index.〔代〕即分數指數,見該條.

【分線器】Divider.〔幾〕分線器爲由鋼鐵之兩脚而成之器械,(圖見兩脚規條)用以移距離或等分直線或圓弧者也.然有其一脚之螺旋處,可代入鉛筆或鋼嘴筆,而此時之分線器爲兩脚規矣.

【分數式】Fractional expression.〔代〕即含分數之代數式.例如$\frac{2}{x-3}ax+\frac{c}{x-b}$是也.又如$\frac{x^2}{a+2}+\frac{x}{b+5}$概稱爲分數式,然對於 x 則不爲分數式,即爲 x 之整式.

【分節法】Process of pointing off.〔算〕數之大者,可以分節記之,即自右端起分每三位爲一節也.例如三百六十七億四千九百零五萬二千六百十四則記之如次: 36,739,052,614.

【分釐法】Percentage.〔算〕即百分法,因百分之十曰分,百分之一曰釐,故名,詳百分法條.

【分釐率】Percent.〔算〕即百分率,見該條.

【分比之理】Dividendo.〔代〕亦稱除比之理.若 a,b,c,d成比例,即$a:b=c:d$.則 $a\sim b:b=c\sim d:d$,是即爲分比之理.因$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$故$\frac{a}{b}\sim 1=\frac{c}{d}\sim 1$,即$\frac{a\sim b}{b}=\frac{b\sim d}{d}$,或$a\sim b:b=c\sim d:d$.

【分項分數】Partial fraction.〔代〕即部分分數,見該條.

【分項微分】Fartial differential.〔微〕即偏微分,見該條.

【分數係數】Fractional coefficient.〔代〕係數之爲分數者之謂也.例如$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}$爲有分數係數之式.

【分數指數】Fractional index.〔代〕亦稱分指數.即指數之爲分數者之謂.例如 $a^{\frac{1}{2}}$, $ab^{-\frac{1}{2}}$ 爲有分數指數之式.

【分數級數】Fractional series.〔代〕若干整數能排列成一種級數時,則其各項之倒數稱曰此級數之分數級數.例如$a(a+d)+(a+d)(a+2d)+(a+2d)(a+3d)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)(a+nd)$

為一級數,而$\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+$
$\frac{1}{(a+2d)(a+3d)}+\cdots\cdots\cdots+$
$\frac{1}{(a+\overline{n-1}d)(a+nd)}$即為其分數級數.

此分數級數首二項之和為$\frac{(a+2d)+a}{a(a+d)(a+2d)}$
$=\frac{2(a+d)}{a(a+d)(a+2d)}=\frac{2}{a(a+2d)}$,

首三項之和為$\frac{2(a+3d)+a}{a(a+2d)(a+3d)}=$
$\frac{3(a+2d)}{a(a+2d)(a+3d)}=\frac{3}{a(a+3d)}$,同樣首

項至n項之和為$\frac{n}{a(a+nd)}$,故命n項之

和為S_n,得$S_n=\frac{n}{a(a+nd)}$.

【分數單位】Fractional unit.〔算〕例如$\frac{3}{7}$表1之七等分之三倍,即$\frac{1}{7}$為$\frac{3}{7}$之測度而稱為分數單位,普通1之幾等分為分數單位,用以測度某分數.

【分離函數】Detached coefficients.〔數〕即不連續函數,見該條.

【分數方程式】Fractional equation.〔代〕分母內有未知數之方程式之謂.例如$\frac{2}{x-3}+\frac{3x}{x-5}=2$,$\frac{x^2-5x}{x^2+2}+\frac{1}{x-4}+2=0$是也.

【分離係數法】Method of detached coefficients.〔代〕當含一文字之二代數式之乘法或除法,僅書其係數而乘除之,待畢後,插入該文字之各乘冪,可大省運算之手續,此法謂之分離係數法.惟用此法,須將二式依昇冪或降冪列之,而某乘冪之缺乏者,須以零係數補充之.例如以$3x^2+4x-2$乘$2x^3-4x^2-5$.於被乘數內以零係數代含x之項,而

$$\begin{array}{r}
2-4+0-5\\
3+4-2\\
\hline
6-12+0-15\\
8-16+0-20\\
-4+8-0+10\\
\hline
6-4-20-7-20+10
\end{array}$$

積中x之最高乘冪明為x^5,且其後者為降冪,故所求之積為

$6x^5-4x^4-20x^3-7x^2-20x+10$.

又如以$2x^2-5$除$6x^4+2x^3-19x^2-5x+10$.

$$\begin{array}{r}
2+0-5)\,6+2-19-5+10\,(3+1-2\\
6+0-15\\
\hline
2-4-5\\
2+0-5\\
\hline
-4-0+10\\
-4-0+10\\
\hline
\end{array}$$

商中之最高乘冪明為x^2.故所求之商為$3x^2+x-2$.

分離係數法又可用於含二文字之二齊次式之乘法.例如以$2x^2-y^2$乘$3x^4+2x^3y+4xy^3+2y^4$.於被乘數內以零係數表含x^2y^2之項,乘數內以零係數表xy之項.而於積內明知x為降冪,y為昇冪,故所求之積為

$$\begin{array}{r}
3+2+0+4+2\\
2+0-1\\
\hline
6+4+0+8+4\\
-3-2-0-4-2\\
\hline
6+4-3+6+4-4-2
\end{array}$$

$6x^6+4x^5y-3x^4y^2+6x^3y^3+4x^2y^4-4xy^5-2y^6$.

【分項微分係數】Partial differential

coefficient.〔微〕即偏微分係數，見該條.

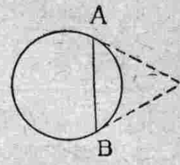
【分角之三角函數】Trigonometrical function of submultiple angle.〔三〕即一已知角之幾分之一之三角函數而以已知角之三角函數表之者之謂也．普通所論者爲半角及三分之一角之三角函數．於二倍角之三角函數之公式$\cos 2A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$內，變A爲$\frac{1}{2}A$，則得$\cos A=1-2\sin^2\frac{1}{2}A=2\cos^2\frac{1}{2}A-1$，故$\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}$，$\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)}$；故$\tan\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$．是爲半角之三角函數之重要公式．

又於三倍角之三角函數之公式內改A爲$\frac{1}{3}A$，則得$\sin A=3\sin\frac{A}{3}-4\sin^3\frac{A}{3}$，及$\cos A=4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}$；故以A之三角函數表$\frac{1}{3}A$之三角函數，須以一三次方程式決定之．即當$\sin A$爲已知，得$\sin\frac{1}{3}A$之三值；$\cos A$爲已知，得$\cos\frac{1}{3}A$之三值．

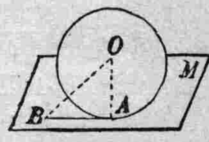
切

【切角】Angle of contact.〔幾〕亦稱觸角，即兩切線在切點所成之角也．

【切弦】Chord of contact.〔幾〕由圓或橢圓，或雙曲線，或拋物線外一點，引其二切線，聯其二切點之直線謂之切弦．如圖中之AB直線，即爲圓之切弦．



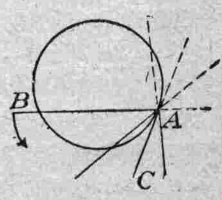
【切面】Tangent plane.〔幾〕球之切面者，過球面上一點 A，作一平面，與球交於一圓，將此平面對A點迴轉，使圓漸小，及其圓至無窮小之極限，則此平面謂之切面，而 A 謂之切點．在球之半徑之端之垂直平面爲切面．又圓錐或圓柱之切面爲一平面之含其一基線而不截其側面者．



【切球】Tangent spheres.〔幾〕若二球面僅有一公共點，則此二球謂之切球．

【切圓】Tangent circles.〔幾〕二圓僅有一公共點，則此二圓謂之切圓．

【切線】Tangent.〔幾〕圓之切線者，即一直線任何延長之，與圓只有一公共點者之謂也．又或圓之割線AB，以A爲樞而迴轉之，當B點與A點接近，至極限時，AB之位置爲AC，則AC稱爲在A點



圓之切線，而 A 點謂之切點．於圓之半徑端之垂線爲圓之切線．於圓周上一點僅可作一切線；過圓外一點可作二切線；過圓內一點，不能作切線．過切點之直徑平分平行於切線之諸弦．與球，圓錐，圓柱僅有一公共點之直線謂之切線．又與橢圓，雙曲線，拋物線，及任何曲線僅有一公共點之直線，亦謂之切線．

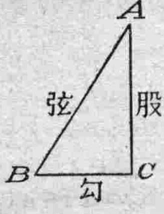
【切錐】Tangent cone.〔幾〕自球外一點向球面作切線，則此等切線之軌跡爲圓錐，是名曰切錐．

【切點】Point of contact 或 Point of tangency.〔幾〕見切線及切面條．

【切基線】Element of contact.〔幾〕圓柱或圓錐與切面相交之基線，謂之切基線．

勾

【勾】〔幾〕於直角三角形，直角傍之短邊謂之勾，長邊謂之股，斜邊謂之弦．例如於直角三角形 ABC，直角 C 傍二邊中之較短者，即 CB，屈折如勾，故謂之勾；較長者，即 AC，直立如股，故謂之股；而斜邊 AB 如張於弓之弦，故謂之弦．故直角三角形有稱爲勾股形者．



【勾股形】Right-angled triangle.〔幾〕即直角三角形，見該條及勾條．

升

【升】〔算〕量名，十合爲升．

反

【反比】Inverse ratio 或 Reciprocal ratio.〔算〕〔代〕比 a:b 之反比爲 b:a．對於反比，稱通常之比爲正比．

【反形】Inverse figure.〔幾〕即倒形，見該條．

【反商】Reciprocal.〔算〕〔代〕即倒數．

【反演】Inversion.〔幾〕即反形法．

【反數】Reciprocal.〔算〕〔代〕即倒數．

【反變】To vary inversely.〔代〕某數因他數而反變者．即前數因後數之反數而變之謂．例如 a 因 b 反變，即 $a:\frac{1}{b}$ 爲常數，即 ab＝m(常數)之謂也．

【反比例】Inverse proportion.〔算〕〔代〕一量因他量之反數而變，則前量之任意二值與後量之相當二值成反比例．例如前量爲某工程工人之數，後量爲作完此工程之日數，即工人12人10日作完之工程，8工人幾日能成之．此時人數之比 12:8 等於日數之比 10:x 之反比即 x:10，即 12:8＝x:10；或人數之比之反比 8:12 等於日數之比 10:x，即 8:12＝10:x，不論如何，x＝15，即 15 日．各種成反比例之量，見正比例條．

【反形法】Inversion.〔幾〕即求反形之法也．

【反函數】Inverse function.〔數〕即逆函數,見該條.

【反定理】Contradictory of a theorem.〔數〕反定理者,若原定理爲眞,則此必爲僞,若原定理爲僞,則此必爲眞. 如原定理爲『設A爲B,則C爲D』,則其反定理爲『若A爲B,則C不爲D』.

【反適遇】Inverse probability.〔代〕設有某事,可由種種原因而成,今於事後欲決定此事由諸原因中之何一原因而成. 其決定此一原因之適遇謂之反適遇. 例如由二囊之任一囊內取1黑玉,但知第一囊內有2黑玉,7白玉,第二囊內有5黑玉,4白玉,求由第一囊取黑玉之適遇.設於二囊中各取出N個玉,則由第一囊內出黑玉之數,平均當有$\frac{2}{9}N$個,由第二囊內出黑玉之數,平均當有$\frac{5}{9}N$個. 由是由二囊內取出黑玉之個數爲$\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N$,而其中由第一囊取出黑玉之個數爲$\frac{2}{9}N$. 故出自第一囊之適遇爲$\frac{2}{9}N\div\left(\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N\right)=\frac{2}{7}$.

【反圓函數】Inverse circular function.〔三〕同反三角函數.

【反冪級數】〔代〕即反數冪級數.

【反轉之理】Invertendo.〔代〕若$a:b=c:d$,則$b:a=d:c$,此謂之反轉之理. 因$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,故$1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$,即$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$或$b:a=d:c$.

【反三角函數】Inverse trigonometrical function.〔三〕即逆三角函數,見該條.

【反商方程式】Reciprocal equation.〔代〕即倒數方程式,見該條.

【反算術級數】〔代〕級數之第三項以下之各項恆等於前二項之和者,稱曰反算術級數.例如$1+2+3+5+8+13+21+34+\cdots\cdots$是.命$a_n$爲此種級數之第n項,$a_{n-1}$爲第$(n-1)$項,$a_2$爲第二項,則求n項之和之公式爲$2a_n+a_{n-1}-a_2$. 由此公式得上例8項之和爲$2\times34+21-2=87$.

【反數置換法】Reciprocal substitution.〔積〕見有理化積分法條.

【反數冪級數】〔代〕與倒乘冪級數同,見該條.

【反雙曲線函數】Inverse hyperbolic function.〔三〕即逆雙曲線函數,見該條.

太

【太陰曆】Lunar calendar.〔算〕即陰曆,見該條.

【太陽日】Solar day.〔算〕太陽兩次經過某地之子午圈所需之時間,謂之太陽日.因地球之軌道爲橢圓,且其橢圓之平面傾斜於赤道之平面,故太陽日長短不等,以之計時,甚覺不便,乃取一年中之太陽日相加平均之,而名之爲平太陽日(Mean solar day),即爲尋常之日.

【太陽歷】Solar calendar.〔算〕卽陽歷.

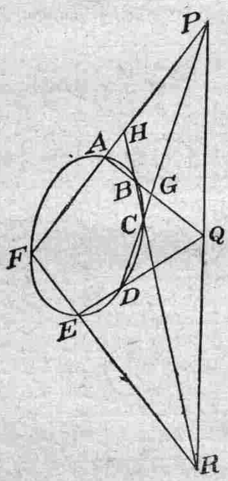
尺

【尺】〔算〕我國度名. 十分爲寸，十寸爲尺.參看度量衡表.

巴

【巴斯噶線】Pascal's line.〔幾〕見巴斯噶定理條.

【巴斯噶定理】Pascal's theorem.〔幾〕巴斯噶之定理如次: 內接於圓錐曲線之六邊形，其三雙對邊相交之三點爲共線點.〔證〕設 ABCDEF 爲內接於圓錐曲線之六邊形;FA 與 DC 交於 P; AB 與 ED 交於 Q;BC 與 FE 交於 R. 又 AB, DC 交於G; FA, CB 交於 H. 則 P(ABCQ)=(ABGQ)=D(ABCE). 然過圓錐曲線上四定點，而以圓錐線上他任意一點爲頂點之束線爲等十字比，∴D(ABCE)=F(ABCE)，∴P(ABCQ)=F(ABCE)=(HBCR)=P(ABCR)，故此始終對應之二組束線爲等十字比，且三射線爲公共，故第四射線亦爲公共，卽 PQ,PR 爲同一直線. PQR 謂之巴斯噶線. 而六邊形之頂點，若取相異之次序，連以直線，則可得他巴斯噶線. 將六文字 ABCDEF之次序變換之，而連其同雙之文字，可得 120 個六邊形，因設六文字之一爲不動，則其餘諸文字之排列之種類爲120故也.然 120 之中，有一半之次序與餘一半恰相反，而生同一之巴斯噶線.故巴斯噶線之總數爲 60. 又六頂點有 15 聯線; 15直線交於105點;然其中有60點與六頂點重合 (卽每點合於一頂點)，故15聯線除原六頂點外交於45點.故上之定理，述之如次，較爲完全:——圓錐曲線上六點之十五聯線，交於四十五點，而每三點在一直線上，如是之直線有六十.



【巴斯噶三角形】Pascal's triangle.〔代〕巴斯噶三角形爲表二項式各展開式之係數之圖表.表中各數，等於同行上層相隣之數加同列左邊相隣之數，而最左行及最上列之各數均爲 1，斜行各數卽表二項式各展開式之係數.例如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，此展開式爲三項，各項

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.......
1	2	3	4	5	6	7	8	9............	
1	3	6	10	15	21	28	36................		
1	4	10	20	35	56	84......................			
1	5	15	35	70	126.........................				
1	6	21	56	126..............................					
1	7	28	84.....................................						
1	8	36..							
1	9..								
1..									

之係數爲 1，2，1；$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，此展開式爲四項，各項之係數爲 1,3,3,1。

幻

【幻方】Magic square.〔算〕幻方爲將一正方分成若干相等小正方，形如棋盤；於各正方內置以一連由 1 至一邊之孔數之

4	9	2
3	5	7
8	1	6

平方之連續之數，使同行同列及二對角線內之數之和爲常數，如圖所列者是也。此幻方爲最初九個整數之排法，縱加，橫加，對角加皆等於15。又此排法不僅限於最初之 9 個整數，對於若干數有種種排法。玆將最初16個整數至最初100個整數之排法各圖列於次。(本條三十六個整數排法至八十一個整數排法，見明程大位算法統宗；百個整數排法，見李儼中國數學源流考略)。

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

此圖爲最初十六個整數之排法，縱加，橫加，對角加皆等於34。

16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

此圖爲最初二十五個整數之排法，縱加，橫加，對角加皆等於65。

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

此圖爲最初三十六個整數之排法，縱加，橫加，對角加皆等於 111。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

此圖爲最初四十九個整數之排法，縱加，橫加，對角加皆等於 175。

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

此圖爲最初六十四個整數之排法,縱加,橫加,對角加皆等於 260.

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

此圖爲最初八十一個整數之排法,縱加,橫加,對角加皆等於 369.

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

此圖爲最初百個整數之排法,縱加,橫加,對角加皆等於 505.

引

【引】〔算〕(一)量名,十丈爲引.
(二) 二百斤爲引.

【引弧線】Tractrix.〔幾〕曲線之切線至 x 軸之長常爲一定者,名曰引弧線,或稱等切曲線,與懸鏈線之展開線相當.設切線之定長爲 a,以長爲 a 之線,一端繫一重物,而置之於 y 軸上,且令他一端依 x 軸由原點向右或向左移動,則重物之重心在第一或第二象限之平面上被引曳而行之時,其軌跡卽引弧線.其方程式爲 $y=a\log(a+\sqrt{a^2-y^2})-a\log y-\sqrt{a^2-y^2}$.

【引長線】Production或Prolongation.〔幾〕卽延線,見該條.

心

【心】Centre 或 Center.〔幾〕與中心同，見該條.

【心算】Mental arithmetic.〔算〕同諳算，見該條.

【心臟線】Cardioid.〔幾〕外旋輪線之動圓直徑與其定圓直徑相等時，則動圓周上一定點之軌迹，卽爲心臟線，或稱等圓旋輪線. 其方程式爲 $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$，或 $\rho=a(1-\cos\theta)$，式中a爲兩圓之直徑.(圖見曲線條)

文

【文字係數】Literal coefficient.〔代〕某項之係數爲文字者，謂之文字係數.例如 ax 之 a，ax^2+bx+c 之 a,b,c，皆爲文字係數，惟 c 視爲 x^0 之係數.

【文字方程式】Literal equation.〔代〕卽方程式之係數以文字表之者，例如 $ax+by=0$，$ax^2+bx+c=0$ 是也.

斗

【斗】〔算〕量名，十升爲斗.

斤

【斤】Catty.〔算〕重量名，十六兩爲一斤.

方

【方】Power.〔算〕〔代〕乘羃又稱爲方，如平方，立方，四次方，……是也.

【方向】Direction.〔幾〕卽直線或曲線之向之謂.

【方根】Root.〔算〕〔代〕卽根.

【方陣】Magic square.〔數〕卽幻方.

【方程】Equation.〔代〕卽方程式，見該條.

【方積】Puissance 或 Power.〔幾〕過一點引圓之割線交圓周於二點，二交點由該點之距離所包之矩形，卽由等於該點所引之切線上之正方形，謂之方積.

【方位角】Azimuth.〔三〕卽磁針所指之方向與羅盤北線所成之角也. 由此角可定方向，如某點之方位角爲 $90°$，則知其方向爲正東；$225°$，則在西南.

【方格紙】Squared paper.〔數〕卽劃成小方塊之紙也，作圖時用之.故亦稱作圖紙.

【方程式】Equation.〔代〕方程式者，表二數或式之相等，而以符號聯結之者也.而兩方之式謂之邊或節，左方之式謂之左邊或左節，右邊之式謂之右邊或右節.方程式有恆方程式(Identical equation)及規約方程式二種：恆方程式亦稱恆等式(Identity)，其中所含之文字不論與以何值，仍不失其相等，換言之，表示其一邊爲由他邊誘得之者之謂，例如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，$(a+b+c)\times(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$ 是也.
規約方程式普通卽稱爲方程式，卽其中所含之文字，僅於某一定值時，始能相等之式之謂.方程式內已知之數或假設爲已知之數謂之已知數，所求之數謂之未

知數.解方程式時須用下述諸理：(1)方程式之兩邊各加等數仍相等；(2)方程式之兩邊各減等數仍相等；(3)方程式之兩邊各以等數乘之仍相等；(4)方程式之兩邊各以等數除之仍相等.

由代數式而成之方程式謂之代數方程式，因其未知數之個數而有一元，二元，三元……之分，因其未知數之次數而有一次，二次，三次之分.例如

一元
- 一次：$ax+b=0$,
- 二次：$ax^2+bx+c=0$,
- 三次：$ax^3+bx^2+cx+d=0$,
- ……………………

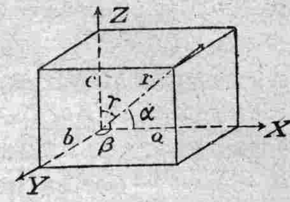
二元
- 一次：$ax+by+c=0$,
- 二次：$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$,
- ……………………

三元
- 一次：$ax+by+cz+d=0$,
- 二次：$ax^2+by^2+cz^2+lxy+d=0$,
- ……………………

【方維術】Quaternion.〔數〕即四元術，見該條.

【方向常數】Direction constant.〔幾〕與角係數同，見該條.

【方向餘弦】Direction cosines.〔幾〕令 l 爲空中任意直線，而 l′ 爲過原點且與 l 同方向之直線.若 α,β,γ 爲 l′ 與坐標軸所成之角，亦即爲 l 與坐標軸所成之角.此諸角之餘弦，謂之 l 之方向餘弦，常以 λ,μ,ν 表之.命 $P\equiv(a,b,c)$ 爲在 l′ 上，由原點之正方向之任意一點，且



令 $OP=r$，則 $\lambda=\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\mu=\cos\beta=\dfrac{b}{r}$，$\nu=\cos\gamma=\dfrac{c}{r}$.然 r 爲諸稜 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$ 之直角平行六面體之對角線，故 $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

$$\therefore\ \lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\mu=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\nu=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

故 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$，即一直線之方向餘弦之平方和等於 1.又見垂直方程式條.

【方程式論】Theory of equations.〔數〕方程式論者，數學之一分科，論普通方程式之根與係數之關係，三次，四次方程式之普通解法，求高次方程式之根之近似值，論高次方程式之種種性質，關係者也.

【方向方程式】Direction equation.〔幾〕見角係數條.

【方程式之節】Member of an equation.〔代〕見方程式條.

【方程式之邊】Sides of an equation.〔代〕見方程式條.

【方程式之一致】Consistency of a system of equations.〔代〕一組方程式有公共之解答，卽爲方程式之一致。例如一組方程式爲 $a_1x+b_1=0$，$a_2x+b_2=0$，欲此二者一致之必要且充足條件爲 $a_1b_2-a_2b_1=0$………(1)。又求欲使一組方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$；爲一致之必要且充足之條件，先用十字乘法，由第一，第二兩方程式求得 x，y 之值，代入第三方程式，化之則得 $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0$………(2)。是爲欲三個一次方程式一致之必要且充足條件。若有一組三個以上之方程式時，每加一方程式有一條件，故若有 n 個方程式時，其一致須有 n－2 個獨立之條件。例如三方程式 $3x+2y=5$，$2x-3y=1$，$x+y=2$ 一致否，於條件(2)，$3\{(-3)(-2)-1\times(-1)\}+2\{(-1)\times1-(-2)\times2\}+(-5)\{2\times1-1\times(-3)\}=21+6-25=2\neq0$；故三方程式無公共之解答，卽不一致。又如欲 $3x+2y=5$，$2x-3y=1$，$(1+c)x+(1-c)y=1$ 三方程式一致，求 c 之值。將諸係數代入 (2)，化之則得

$$c=-\frac{11}{10}.$$

又(1)與(2)可各用下之行列式表之：

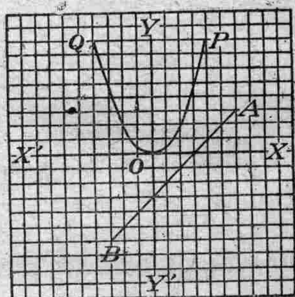
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0\cdots\cdots(1);\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0\cdots\cdots(2).$$

【方程式之圖形】Graph of an equation.〔代〕命 f(x) 爲 x 之函數，而其值以 y 表之，若與 x 之一列之數值，則得 y 之相應之一列之值。若以此等値各爲横坐標與縱坐標，而作得連續諸點，則得一直線或曲線。此直線或曲線謂之函數 f(x) 或方程式 f(x)=0 之圖形。凡一次方程式之圖形皆爲直線，例如作 $y=x-3$ 之圖形。

當 $x=\cdots6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,\cdots,$

$y=\cdots3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,\cdots,$

聯此諸點則得直線 AB。



又如作 $y=\frac{1}{2}x^2$ 之圖形。

當 $x=\cdots4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,\cdots\cdots$

$y=\cdots8,4.5,2,.5,0,-.5,-2,-4.5,-8,\cdots$

聯此諸點，則得上圖之曲線 POQ，卽拋物線也。

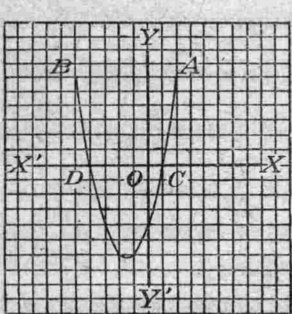
【方程式之圖解】Graphical solution of an equation.〔代〕方程式之圖形可用以解方程式，而此種解法，謂之方程式之圖解，茲示數例於次。

〔例1〕解二次方程式 $x^2+3x-4=0$。

命 $y=x^2+3x-4$，則

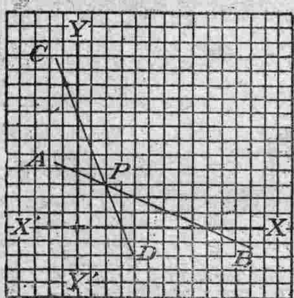
$$x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{25+4y})$$。

由此式可得 x，y 之若干相應之值，而作得其圖形爲拋物線 ACDB，其交 x 軸之



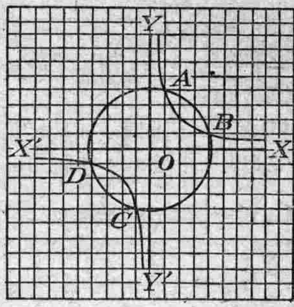
點爲 C 與 D，而其橫坐標各爲 $x=1$ 或 -4，即所求之根爲 1 與 -4。

〔例2〕解一次聯立方程式 $3x+7y=27$，$5x+2y=16$，所與二方程式之圖形各爲



直線 AB，CD，其交點 P 之坐標爲 $x=2$，$y=3$，是即爲所求之根。

〔例3〕解二次聯立方程式 $x^2+y^2=17$，與 $xy=4$，此二方程式之圖形各爲如圖之圓及雙曲線，其交點A,B,C,D 之坐標，



各爲 $x=1$，$y=4$；$x=4$，$y=1$；$x=-1$，$y=-4$；$x=-4$，$y=-1$；是即爲所求之根。

【方程式之圖示法】Graphical representation of an equation.〔代〕即以圖形表方程式之法也。其法見方程式之圖形條。

【方程式之誘求式】Derivative of an equation.〔代〕見誘求式條。

日

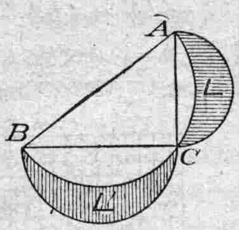
【日利】Daily interest.〔算〕見利息條。

月

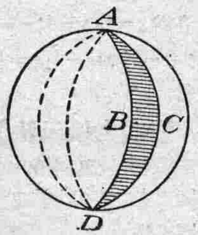
【月利】Monthly interest.〔算〕見利息條。

【月形】Lune.〔幾〕(一) 二圓弧間所夾之平面謂之月形。有稱爲希波革拉第 (Hippocrates) 之月形者。即如圖於直角

三角形ABC之三邊上，各作半圓，L與L′即為月形，其面積之和等於直角三角形ABC之面積．因由圖，L+L′+半圓AB=△ABC+半圓AC+半圓BC；然半圓 $AB=\frac{1}{4}\pi AB^2$，半圓AC+半圓BC $=\frac{1}{4}\pi AC^2+\frac{1}{4}\pi BC^2=\frac{1}{4}\pi AB^2$，



由是得 L+L′=△ABC．(二)即球面上二大半圓周間所夾之部分之謂，如圖之ABDC是也．



【月形角】Angle of a lune 或 Lunar angle．〔幾〕月形之二弧間之角，謂之月形角，如上圖之 BAC 角是也．而其角等於在其二弧之交點所引之二切線間之角．

比

【比】Ratio．〔算〕〔代〕〔幾〕〔比之定義1〕某數以同類他數除之，而以$\frac{a}{b}$或 a/b 或 a:b 表之者，謂之比．故(比之值)=a÷b，a=(比之值)×b，b=a÷(比之值)．

〔比之定義2〕某量 a 與其同類他量 b 之比，即 a 為可以之乘 b 而得之數之謂．而此比以$\frac{a}{b}$記之．同類二量 a,b 之比，若以第一量為單位，則第二量等於測度之數．因若已知比時，例如比為$\frac{3}{5}$，則第一量為以$\frac{3}{5}$乘第二量之積，然以$\frac{3}{5}$乘第一量，即為取其$\frac{3}{5}$．由是第一量為第二量之$\frac{3}{5}$．故若以第二量為單位，則$\frac{3}{5}$為測度第一量之數．若二量 a 與 b 可以同一單位 m 測度之，則 a 與 b 之比為第一量之測度 α 以第二量之測度 β 除之而得之．因由 $a=m\alpha$，$b=m\beta$ 二關係，得 $a=b\frac{\alpha}{\beta}$，故$\frac{\alpha}{\beta}$，為 a 與 b 之比．由是誘得任意二數 α 與 β 之比為以 β 除 α 之商．算術中所論關於分數之法則，亦可適用於比，即普通之分數$\frac{\alpha}{\beta}$．例如此比以同數乘其兩項，其值不變，又二比之積為取各相當之積而得之，等等是也．

〔比之定義3〕(1)一量與同類他量之比，為第一量與第二量關於量之關係，但此關係比較二量之幾倍互相等而定之．a 與 b 之比，以 a:b 表之，此 a 謂之前項，b 謂之後項．例如一斤與十兩之比，為定5(一斤)=8(十兩)之謂．(2)一量對於同類他量之比，為關於第一量與第二量之倍量之關係之謂．a 之倍量對於 b 之

關係，若 a 之各倍量與 b 之各倍量依其大之遞昇次序而列之，且無限連續，若知 a 之諸倍量如何插於 b 之諸倍量之間，則爲定．例如正方形之對角線爲 a，邊爲 b，則此等量之倍量之交插之法如次：

a　2a　3a　4a　5a
b　2b　3b　4b　5b　6b　7b
6a　7a　8a　9a
8b　9b　10b　11b　12b　13b
10a
14b　15b ……………………………
100a
141b　142b ……………………………

所與諸倍量如斯之交插法，對於二量 a 與b爲一定，而若 c 與 b 之差無論若何小，a 與 c 之諸倍量之交插之法，異於 a 與 b 之諸倍量之交插之法．因命 b 與 c 之差爲d，無論 d 如何小，常可求得 m，使 md>a，如是 mb 與 mc 之差大於 a．故 mb 與 mc 不能在 a 之同倍二量之間．故 a 與 b 之諸倍量之交插之法不能同於 a 與 c 之諸倍量之交插之法．卽對於其初之小倍量或可相同，後至對於大倍量必致相異．

〔比之相等〕有二比，取此二前項之任意之等倍量，又取其二後項之任意等倍量，若因其一前項之倍量大於，或等於，或小於其後項之倍量，他前項之倍量大於，或等於，或小於其後項之倍量，則此二比謂之相等．但一比之二量與他比之二量同類亦可，異類亦可．換言之，有二比 a:b 及 p:q，m 與 n 爲任意之整數，因 mp 大於，或等於，或小於 nq，ma 大於，或等於，或小於nb，則比a:b謂之等於比p:q．又由上之定義，可直得次之結果．m 爲任意整數，n 爲 ma 在 nb 與(n+1)b 之間或等於 nb 所決定之整數．因 ma 在 nb 與 (n+1)b 之間，或等於 nb，mp 在 nq 與 (n+1)q 之間或等於 nq，則比 a:b 等於比 p:q．由是上之定義又可述之如次：二比 a:b，p:q，若 a 之諸倍量與 b 之諸倍量之交插之法，與 p 之諸倍量與 q 之諸倍量之交插之法相同，則謂之相等．

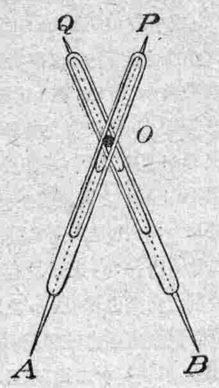
〔比之不等〕有二比，取此二前項之任意等倍量，又取其二後項之任意等倍量，若第一比前項之倍量，大於或等於其後項之倍量，而第二比前項之倍量不大於或可小於其後項之倍量，則第一比謂之大於第二比，換言之，二整數 m，n 之值，若 ma 大於 nb，mp 不大於 nq，或 ma 等於 nb，mp 小於 nq，則比 a:b 謂之大於比 p:q．

【比例】Proportion．〔算〕〔代〕二比相等而以符號＝或::聯結之者之謂．例如 3:5＝12:20 或 3:5::12:20；或 a:b＝c:d 或 a:b::c:d．a 與 d 謂之比例之外項或外率，b 與 c 謂之內項或內率．比例有正，反，單，複之分，見各條．

【比號】Sign of ratio．〔算〕〔代〕卽二數之比之符號：，而於前項之右記此符號，記後項於其右．又記爲分數之形時，則用橫線．

【比例規】Proportional compasses．〔幾〕畫圖器，以金屬製之，其形如圖，其各脚上皆刻有度劃，此規爲用以增大或

減小已知線分爲已知比．即移動點O，使$\frac{OP}{OA}$等於已知之比，使AB等於已知之線分，則PQ爲



AB以$\frac{OP}{OA}$之比而增大或減小．

【比例量】Proportional quantities 或 Proportionals.〔算〕〔代〕成比例之量之謂．

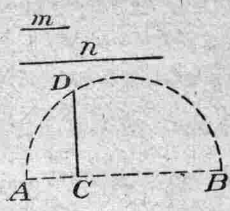
【比例號】Sign of proportion.〔算〕〔代〕即於比例中表二比相等之號 :: 之謂，讀爲若或如．

【比例數】Proportional numbers 或 Proportionals.〔算〕〔代〕成比例之數之謂．

【比例中率】Mean proportional.〔算〕〔代〕〔幾〕與比例中項同，見該條．

【比例中項】Mean proportional.〔算〕〔代〕〔幾〕比例之二中項相等時，謂之比例中項．例如於 $3:6=6:12$，或 $a:b=b:c$，6爲3與12之比例中項，b爲a與c之比例中項．而由 $a:b=b:c$ 得 $b^2=ac$，$\therefore b=\pm\sqrt{ac}$．故比例中項之平方等於兩外項之積，由是比例中項等於兩外項之積之平方根．

於幾何中求兩已知直線之比例中項之法如次．設m與n爲兩已知直線．於AB直線上取 $AC=m$，$CB=n$，

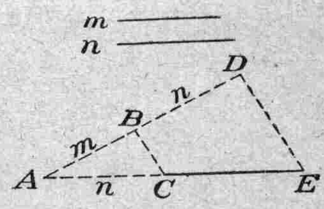


以AB爲直徑作半圓，於C作垂線CD交圓周於D．則CD爲所求之比例中項，因 $AC:CD=CD:CB$，即 $m:CD=CD:n$ 也．

【比例配分】Proportional parts.〔算〕與配分法同，見該條．

【比例第三項】Third proportional.〔算〕〔代〕〔幾〕三量成連比例時，其第三量謂之他二量之比例第三項．例如於 $4:6=6:9$ 或 $a:b=b:c$，9爲4與6之比例第三項，c爲a與b之比例第三項．

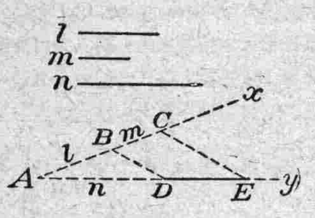
於幾何中求兩已知直線之比例第三項之法如次：設m與n爲兩已知直線．任作一角A，取 $AB=m$，$AC=n$．延長AB



至D，使 $BD=AC$．作BC．過D作 $DE \parallel BC$，交AC之延線於E．則CE爲m與n之比例第三項．因 $AB:BD=AC:CE$，即 $m:n=n:CE$ 故也．

【比例第四項】Fourth proportional. 〔算〕〔代〕〔幾〕四量成比例時，其第四量謂之他三量之比例第四項.例如於 3:7=6:14 或 a:b=c:d, 14 爲 3,7,6 之比例第四項，d 爲 a,b,c 之比例第四項.

於幾何中求三已知直線之比例第四項之法如次：設 l, m, n 爲三已知直線.任作



Ax, Ay 成一角 A，於 Ax 取 $AB=l$，$BC=m$；又於 Ay 取 $AD=n$，作 BD；過 C 作 $CE \parallel BD$ 交 Ay 於 E. 則 DE 爲 l, m, n 之比例第四項.因 AB:BC=AD:DE，即 $l:m=n$:DE 也.

【比較消去法】Elimination by comparison.〔代〕由含二以上未知數之一組方程式之一，其未知數以他未知數之項表之，又由他方程式，其同一未知數，以他數之項表之，此二者以等號聯之，而消去一未知數之謂也.例如由 $7x-2y=60$, $3x+5y=55$ 求得 $y=\frac{7x-60}{2}$，$y=\frac{55-3x}{5}$，相等之得 $\frac{7x-60}{2}=\frac{55-3x}{5}$，即用比較消去法消去一未知數 y 也.

【比例部之理論】Theory of proportional parts.〔三〕$\log(n+d)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mu\left(\frac{d}{n}-\frac{d^2}{2n^2}+\frac{d^3}{3n^3}-\cdots\right)$，而 $\mu=.43429448$.設 n 爲由五數字而成之整數，故 n 不小於 10000，又設 d 不大於1.則 $\frac{\mu d^2}{2n^2}$ 小於 $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{10000}\right)^2$，故更小於 .000000003；而 $\frac{\mu^3}{3n^3}$ 小於此之萬分之一，餘做此.故最少至七位小數爲 $\log(n+d)-\log n=\frac{\mu d}{n}$.即對數之變化，約略與對應之數之變化成比例.是謂之比例部之理論，對數表及三角函數對數表，即以此理論而構成.

水

【水平】Horizon.〔三〕見水平面及水平線條.

【水險】Marine insurance.〔算〕見保險條.

【水平角】Horizontal angle.〔三〕角之兩邊在水平面上者之謂.

【水平面】Horizontal plane.〔三〕垂直於垂直線之平面之謂.

【水平線】Horizontal line.〔三〕即在水平面上之直線之謂.

火

【火險】Fire insurance.〔算〕見保險條.

牛

【牛頓公式】Newton's formula.〔代〕設 $x^2-px+q=0$ 之二根爲 α,β，且以 S_n 表 α^n 與 β^n 之和即 $S_n=\alpha^n+\beta^n$，則 $S_n=pS_{n-1}-qS_{n-2}$。是卽牛頓公式.例如因 $S_1=p$, $S_2=p^2-2q$,故 $S_3=pS_{3-1}-qS_{3-2}=pS_2-qS_1=p(p^2-2q)-qp=p^3-3pq$. 玆舉一實例以明此公式之用：$x^2-5x+6=0$ 之二根爲 3, 2, 而 $S_1=3+2=5$, $S_2=3^2+2^2=13$, $S_3=3^3+2^3=35$.應用公式得相同之結果,卽 $S_1=p=5$, $S_2=p^2-2q=5^2-2\times6=13$, $S_3=p^3-3pq=5^3-3\times5\times6=35$.

五　畫

主

【主元】〔代〕二項法 $(a+b)^n$ 之第一項文字如 a，謂之主元,第二項文字如 b，謂之陪元.

【主值】Principal value.〔三〕有三角函數之值而求相當之角，則其角可有若干之值.故一數之逆三角函數可有若干之值.絕對值最小之角，謂之該逆三角函數之主值.例 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 之主值爲 30^0, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之主值爲 45^0, $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 之主值爲 -60^0.

【主軸】Principal axis.〔幾〕有心圓錐曲線之主軸爲通過其焦點之軸.拋物線之主軸爲通過其焦點之直徑.又圓之主軸卽通過其中心之直線，因圓之諸焦點會合於中心故也.

【主項】Principal term.〔代〕行列式中與主對角線相當之元之積如 $a_1\,b_2\,c_3\cdots\cdots m_n$，稱爲行列式之主項.參閱行列式條.

【主圓】Principal circle.〔幾〕某圓在一平面之正射影得橢圓，其圓有謂之主圓者.

【主線】Principal line.〔幾〕計算地面積時,常就地形作對角線,截成三角形或四邊形.但每因地形太曲折,致有不能截入或不應截入之地.故再從地之各角頂向對角線上作垂線，求其不能截入或不應

截入之地之面積，以與三角形或四邊形相加減。此加減之結果，卽爲所求之面積.其所作之對角線，稱曰主線或鏈線；所作之垂線，稱曰枝距。

【主平面】Principal plane.〔幾〕某平面截球或圓錐時，含球心或圓錐之軸直交於其截面之平面之謂.

【主法線】Principal normal.〔幾〕見空間曲線條.

【主對角線】Principal diagonal.〔代〕詳行列式條.

【主傍心三角形】Principal ex-central triangle.〔幾〕聯結三角形之三傍心所成之三角形之謂.

代

【代入法】Substitution.〔代〕與置換法同,見該條.

【代數式】Algebraical expression.〔代〕代數式者,以運算之符號聯結文字及數字者之謂,卽一數之代數的表示也。例如 $5x^2+7y$ 爲表 x 所表之數之平方之 5 倍及 y 所表之數之 7 倍之和。不含根號之代數式，或根號內不含文字之代數式,謂之有理式,例如 $a+bx$；根號內含有文字之項之代數式,謂之無理式,例如 $\sqrt{x}+x\sqrt{y}+c$；文字不含於分母內之有理式,謂之整式,例如 $ax+by+c$；文字含於分母內之有理式,謂之分數式,例如 $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+c$；僅由一項而成之式爲一項式,例如 a, $5ax$；由多項而成之式爲多項式,例如 $ax+b$, x^3+5x^2-2x+4. 今將代數式之分類圖解之如次.

代數式
有理式　無理式
整式　分數式
一項式　多項式

【代數和】Algebraical sum.〔代〕代數和者，正數或負數以符號＋聯結之者之謂,例如 $3+(-2)$,$(-5)+(-3)+(+2)$ 是也.同樣 a, b, c,…… 爲正負任意數時，$a+b+c+$……爲一代數和,故代數和無必增加之意味.

【代數差】Algebraical difference.〔代〕a 及 b 之代數差者 $a-b$ 之謂也.故 $a>b$ 其代數差爲正；$a<b$，其代數差爲負.反之 a 及 b 之算術差云者，a, b 爲正而由大數減小數之餘數之謂也.例如 2 與 5 之代數差爲 $2-5$ 卽 -3，而其算術差爲 $5-2$ 卽 3.

【代數學】Algebra.〔數〕代數學爲數學之一分科，而用記號以研究數之關係及性質者也.數槪以羅馬字母 a,b,c,……表之,其所施之運算則以符號表之,符號及羅馬字母稱爲代數記號.代數學內之運算爲加,減,乘,除,及昇高常數指數之羃取常數指數之根.代數學又含研究以通常六運算表已知數及未知數之關係諸方程式之性質.如是之方程式,謂之代數方程式.代數學之最古之書,爲帶奧蕃塔斯(Diophantus)之代數學,乃西歷350年時之作也.此書多集關於整數之性質

之問題，而尤以平方數，立方數之性質爲多。代數學由印度傳於阿剌伯，十三世紀之始，由阿剌伯傳入意大利。Ferreas, Cardan, Tartaglia, 及其他諸意大利之學者，發明新法甚多，其中最緊要者，三次方程式之解法是也。其後德人 Stifel，於十六世紀之中葉，發見精巧之記法，進步不鮮。次於此發見，經 Robert Recorde, Vieta, Albert Girard, Harriot 及其他諸數學家之研究，而成現今之代數學。1637 年自法人笛卡兒應用代數的解析於幾何學的研究之大著出版，數學之研究開一新生面，於完成純正代數學之進步，貢獻不鮮。其後代數學雖無大改變，然於學科之應用，非常推廣。級數理論之成功，以 Bernouillis, 牛頓, De Moivre, Simpson 等之力爲多。近時於代數學之功績家爲 Taylor, M' Laurin, Clairaut, 歐拉, Legendre, Arbogast, Gauss, Bourdon, 等。代數學之英語 Algebra 爲起源於阿剌伯語之 Al jebre al mokabala，譯成英語 Restoration & Reduction 之意。此名之根源爲二次方程式無疑，蓋二次方程式爲阿剌伯代數學中之最高深部分也。今詳解其意義使二次方程式含未知數之邊爲完全平方，是爲 Restoration。取其平方根，是爲 Reduction，然此名亦適當於現今之代數學，因算術爲記號之算法即變爲代數學，是爲 Reduction，又擴張其記號之結果，是爲 Restoration(De Morgan's Double Algebra)。牛頓稱代數學爲 Universal Arismetic, Hamilton 稱之爲 The Science of Pure Time, De Morgan 稱之爲 The Calculus of Succession, 我國昔稱爲四元，日本昔稱爲點竄。

【代數曲線】 Algebraic curve，〔幾〕代數曲線者，其變數爲有限項之代數方程式之軌跡也。對於超越曲線而名。又見曲線條。

【代數函數】 Algebraical function. 〔代〕代數函數者，函數與自變數之關係，以代數學之六普通運算即加，減，乘，除，常數指數之冪及根表之之函數也。例如 ax^2+bx+c, $\frac{x}{x+3}$, $\sqrt{5x^2+1}$ 皆爲代數函數。代數函數一名常函數，與超越函數對待。

【代入消去法】 Elimination by substitution. 〔代〕由含二以上之未知數之一組方程式之一，求得其一未知數爲他未知數之項，以之代入他方程式求不含其一未知數之方程式，是謂之代入消去法。例如於 $2x-3y=17$, $7x-4y=25$, 由第一方程式 $y=\frac{1}{3}(2x-17)$, 代入第二方程式得 $7x-\frac{4}{3}(2x-17)=25$, 即以代入消去法消去 y 也。

【代數的解法】 Algebraical solution. 〔代〕問題之代數的解法者，由問題之已知件，作方程式解之，而求其解答之法之謂也。

充

【充足條件】Sufficient condition.〔幾〕見必要條件條.

凸

【凸角】Convex angle 或 Salient angle.〔幾〕小於二直角之角之謂,對於凹角而言也.

【凸面】Convex surface.〔幾〕凸面者,如球面之面,其任何部分皆凸出者之謂也.

【凸折線】Convex broken line.〔幾〕凸折線者,由折線之任何一部直線觀之,全體皆在其一側而不跨兩側者之謂,如

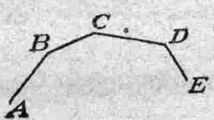


圖 ABCDE 爲一凸折線.

【凸多面角】Convex polyhedral angle.〔幾〕不過多面角之頂點之任意截面爲凸多邊形者,則此多面角謂之凸多面角.

【凸多面體】Convex polyhedron.〔幾〕多面體以任何平面截之,其截口必爲凸多邊形者之謂也.

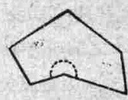
【凸多邊形】Convex polygon.〔幾〕無一凹角之多邊形,謂之凸多邊形.

【凸球面多邊形】Convex spherical polygon.〔幾〕無一凹角之球面多邊形之謂也.

凹

【凹角】Reflex angle 或 Re-entrant angle 或 Re-entrating.〔幾〕凹角者,大於二直角而小於四直角之角之謂也.

【凹多邊形】Re-entrant polygon.〔幾〕凹多邊形者,有一以上之凹角之多邊形之謂也.凸多邊形由其任一邊觀之,全形皆在其邊之一方,而凹多邊形由其凹角之一邊觀之,全形跨於其邊之兩方.



加

【加】To add.〔算〕加甲數於乙數者,將乙數所含之單位,順次一一計入於甲數,而求其最後之數也.

【加式】Addition formula.〔三〕見表和角之三角函數之公式.

【加法】Addition.〔算〕〔代〕合若干數使成一數之法,謂之加法,加法之法數謂之加數.實數謂之被加數.加加數於被加數所得之數,謂之和或總數.例如 $2+3=5$, 3 爲加數, 2 爲被加數, 5 爲和.小數之加法,書小數點於同一行,如整數加之卽可;分數之加法,化分數爲同分母而直加其分子卽可.但代數數之加法,順次置符號 + 於其前而連記之.例如 $a+b+c+\cdots\cdots$.

【加號】Sign of addition.〔算〕示加一數於他數之符號+之謂也,普通記此符號於二數間以示之.例如 $4+3$ 爲示 4

與 3 相加，而讀爲"4 加 3"。書帶分數時，則整數與分數間之加號可略去之；例如 $5+\frac{3}{4}$ 書爲 $5\frac{3}{4}$。

【加數】〔算〕見加法條。

【加分點】〔幾〕即內分點．詳內分條。

【加比之理】Addendo.〔代〕〔幾〕以若干相等比之前項之和爲前項，後項之和爲後項之比，等於原各比，是謂之加比之理。

即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$

$=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$ 也。

【加減消去法】Elimination by addition or subtraction.〔代〕加減消去法者，由二以上之一組方程式，使其一未知數之係數相等，而用加法或減法消去其一未知數之謂也．例如於

$3x+5y+2z=19\cdots\cdots(1)$,

$2x+3y-z=5\cdots\cdots(2)$,

$5x+7y-3z=10\cdots\cdots(3)$.

將(2)以 2 乘之，而與(1)相加，則得

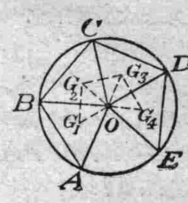
$7x+11y=29\cdots\cdots(4)$.

將(2)以 3 乘之，而減去(3)，則得

$x+2y=5\cdots\cdots(5)$.

即(4)，(5)爲由(1)，(2)，(3)一組方程式用加減消去法而消去 z 者也。

【加爾廷定理】Guldin's theorem.〔幾〕任意正多邊形，以在其平面上而不與之相截之直線爲軸而迴轉之，則所生之體之體積等於其面積以重心所畫之圓周乘之。〔證〕命 ABCDE…… 爲正 n 邊形，XY爲在其平面上而不與之相截之直線，聯結頂點 A，B，C，D，E，…於重心即中心 O，所得之三角形之重心，順次命爲 G_1，G_2，G_3，……，G_n．由此諸點作 XY 之垂線各爲 g_1，g_2，……，g_n．由 O 作 XY 之垂線命爲 g．ABCDE…以 XY 爲軸而迴轉所生之體之體積，等於三角形 OAB，OBC，…… 依同迴轉所生之體之體積之和．即體積 ABCDE……$=\triangle OAB\times g_1+\triangle OBC\times g_2+\cdots\cdots$．然 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，…… 爲相等之二等邊三角形，故 $OG_1=OG_2=OG_3=\cdots\cdots$，及



$\angle G_1OB=\frac{1}{2}\angle BOA=\angle BOG_2$，故

$\angle G_1OG_2=\angle AOB$，同樣 $\angle G_2OG_3$，$\angle G_3OG_4$，… 皆等於 $\angle AOB$，故 $G_1G_2G_3$……又爲正 n 邊形．故體積 ABCDE……$=\triangle OAB\times(g_1+g_2+\cdots\cdots+g_n)=\triangle OAB\times ng=(\triangle OAB\times n)g=$ ABCDE……$\times g$．此定理不限於正多邊形，對於任意之平面形亦爲眞，又對於以平面曲線代平面形時所生之面積，本定理亦成立，而謂之加爾廷定理。

半

【半徑】Radius.〔幾〕半徑者，由圓或球之中心至圓周或球面之直線之謂也．半徑即徑之半，故圓或球之半徑皆等長。

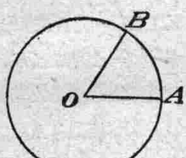
【半球】Hemisphere 或 Semisphere.〔幾〕球爲通過其中心之平面所分之一部分之謂,而半球爲全球之半.

【半圓】Hemicircle 或 Semicircle.〔幾〕圓爲徑所分之一部之謂,故半圓爲全圓之半.半圓內之角爲直角.

【半長徑】Semi-major axis.〔幾〕即橢圓長徑之半之謂.如橢圓之中心爲原點,則半長徑等於X軸之截部,常以 a 表之.

【半長軸】Semi-major axis.〔幾〕即半長徑.

【半徑度】Radian.〔三〕亦稱本位弧,爲弧度法內之單位角,即於以O爲心之圓內,取AB弧之長等於圓之半徑,則



AOB 角謂之半徑度.1 半徑度$=\frac{360^\circ}{2\pi}=57^\circ17'45''$.

【半短徑】Semi-minor axis.〔幾〕即橢圓短徑之半之謂.如橢圓之中心爲原點,則半短徑等於Y軸之截部,常以 b 表之.

【半短軸】Semi-minor axis.〔幾〕即半短徑.

【半貫徑】Semi-transverse axis.〔幾〕即半貫軸.

【半貫軸】Semi-transverse axis.〔幾〕即雙曲線貫軸之半之謂.如雙曲線之中心爲原點,則半貫軸等於X軸之截部,常以 a 表之.

【半圓周】Semi-circumference.〔幾〕圓周被其徑二分之一部之謂,故半圓周爲全圓周之半.

【半屬徑】Semi-conjugate axis.〔幾〕即半共軛軸.

【半屬軸】Semi-conjugate axis.〔幾〕即半共軛軸.

【半共軛軸】Semi-conjugate axis.〔幾〕即雙曲線共軛軸之半之謂.如雙曲線之中心爲原點,則半共軛軸等於 Y 軸之截部(虛數),常以 b 表之.

【半徑擺線】〔幾〕即半徑旋輪線,見該條.

【半收歛級數】Semi-convergent series.〔代〕見絕對的收歛級數條.

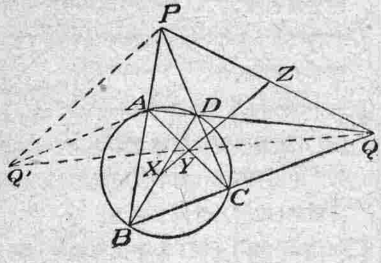
【半徑旋輪線】〔幾〕普通旋輪線之母點,不在母圓之周上而在母圓之內即在母圓之半徑上者,名內點旋輪線,在母圓之外即在母圓半徑之延線上者,名外點旋輪線,而總稱之曰半徑旋輪線,或曰餘旋輪線.

【半立方拋物線】Semicubical parabola.〔幾〕方程式 $y^2=ax^3$ 之曲線,名半立方拋物線.(圖見曲線條).由半立方拋物線之原點至一點 (x', y') 之曲線之長爲 $S=\frac{8a}{27}\left\{\left(1+\frac{9x'}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$.

卡

【卡耳定理】Carr's theorem.〔幾〕卡耳定理如次:ABCD 爲圓之內接四邊形,

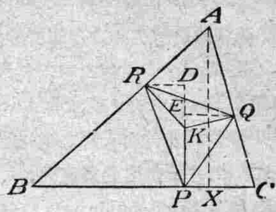
而 BA，CD 之交點爲 P；AD，BC 之交點爲 Q；若 X，Y，Z 各爲 BD，AC，PQ 之中點，則 AC:BD=2YZ:PQ=PQ:2XZ．〔證〕聯結 QY，延長至 Q′，使 YQ′=QY．如是則 QC，AQ′ 相等且



平行．故 ∠Q′AP=(∠Q′AB 之補角)=(∠ABC 之補角)=∠ADC=∠PDQ．又於相似三角形 PAC，PDB，AC:DB=PA:PD；於相似三角形 QCA，QDB，AC:DB=QC:QD；由是 PD:QD=PA:QC=PA:AQ′．故三角形 PDQ，PAQ′ 相似，∴AC:BD=PA:PD=PQ′:PQ=2YZ:PQ．同樣 BD:AC=2XZ:PQ，故 AC:BD=2YZ:PQ=PQ:2XZ．

【卡他郎定理】 Catalan's theorem.

〔幾〕卡他郎定理如次：由三角形內一點，至各邊作垂線，而其垂線上之正方形和爲極小，則此點爲聯結垂線之趾所成之三角形之重心，又此點爲原三角形之類似重心．〔證〕命 K 爲如題言之點，設 KP，KQ，KR 各爲邊 BC，CA，AB 之垂線．又命由任意點 K′ 至此各邊之垂線爲 K′P′，K′Q′，K′R′，則由假設 $\Sigma(KP^2)<\Sigma(K'P'^2)$，故 $\Sigma(KP^2)$



$<\Sigma(K'P^2)$．故 K 爲至 △PQR 之各角頂之距離上正方形之和爲極小之點，由是 K 爲三點 P，Q，R 關於相等乘數之平均距離之中心，即 K 爲 △PQR 之重心．次命 RD，QE 爲由 △PQR 之 D 所引之中線之垂線，則 RD=QE，而 ∠KRD=∠RKD 之餘角 =∠RBP 之餘角 =∠BAX(AX 爲 BC 之垂線)．同樣 ∠KQE=∠CAX．由是 △KRD 與 △BAX 相似；△KQE 與 △CAX 相似，故 KR: AB=RD: AX=QE: AX=KQ: AC．同樣此值等於 KP:BC．由是 K 爲 △ABC 之類似重心．

【卡爾丹方法】 Cardan's method.〔代〕

三次方程式 $y^3+qy+r=0$ 之三根如次：

$$y_1=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}},\quad y_2=$$

$$\omega_1\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}+\omega_2\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}},$$

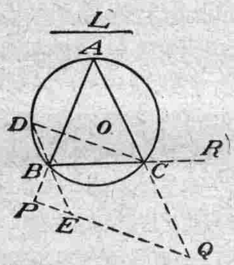
$$y_3=\omega_2\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}+$$

$$\omega_1\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}.$$

但 $\omega_1=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$，$\omega_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

此種解三次方程式之方法，謂之卡爾丹方法.參閱三次方程式條.

【卡斯鐵龍問題】Castillon's problem.〔幾〕卡斯鐵龍問題爲求作三邊各過三與點而內接於與圓之三角形.欲解此問題須先解次之問題：求作底邊平行於與直線，他二邊各過二與點而內接於與圓之三角形.〔例〕設 ABC 爲內接於圓 O 所求之三角形，設 BC 平行於直線 L；AB，AC 各過與點 P，Q.由 C 引弦 CD 平行於 PQ.聯結 DB，命其與 PQ 之交點爲 E.因 BC∥L，DC∥PQ，故



∠DCB 爲一定，因是弦 DB 爲一定.次因 ∠BAC=∠BDC=∠DEP.故 A，B，E，Q 在同一圓周上，因是 PE·PQ=PB·PA，而爲一定.故 E 點爲一定.由是分 PQ 於 E，使 PE·PQ 等於由 P 至 O 圓所引之切線上之正方形.過 E 引一割線 EBD，使 BD 等於前所求得之長.求 BEQ 之外接圓與 O 圓之交點 A，聯 AQ，命與 O 圓之交點爲 C，則 ABC 爲所求之三角形.

由是卡斯鐵龍問題可解之如次：設 P，Q，R 爲三與點，又 ABC 爲所求之三角形.由 C 引弦 CD 平行於 PQ.DB 之延線與 PQ 之交點爲 E，則如前題所述，E 爲定點.由是先作三角形 BCD，其一邊 DC 平行於 PQ，他二邊各過定點 E，R，而內接於 O 圓.命 PB 之延線與圓周之交點爲 A，則 ABC 爲所求之三角形.

去

【去九法】Rule for casting out the nines.〔算〕若數之各數字之和爲 9 之倍數，則其數亦爲 9 之倍數，而若數字之和不爲 9 之倍數，則其數亦不爲 9 之倍數.例如

$$\begin{aligned}6273&=6000+200+70+3\\&=6(999+1)+2(99+1)+7(9+1)+3\\&=6\times999+6+2\times99+2+7\times9+7\\&\quad+3\\&=9\text{之倍數}+6+2+7+3.\end{aligned}$$

此式可分爲兩部，前部爲 9 之倍數，後部爲各數字之和，故若後部亦爲 9 之倍數，則全體爲 9 之倍數.例如以 9 除 24573，其餘數爲 2+4+5+7+3 以 9 除之之餘數，即 3 是也.數字之和以 9 除之，而求其餘數，任何 9 或二，三數字合成之 9 可一見而省去之.例如以 9 除 2691475 而求其餘數，省去 9 及 1，2，6 及 5，4，惟餘一數字 7.同樣於 452876，省去 5，4 及 2，7，惟由 8+6 之和去 9，其餘數爲 5.

應用上述之理，以驗加，減，乘，除之運算之結果為正與否，即所謂去九法也．其法將數之各數字相加，滿 9 即去之，取其餘數，謂之去九數．今示其法如次：

I. 以去九法驗加法．

	去九數		
81346	4		
27632	2	加得15	6去九數
38507	5		
67549	4		
215034			6去九數

即將各數之去九數相加，再求其去九數，若與和之去九數不同，則知運算有誤．

II. 以去九法驗減法．

	去九數		
176543	8	減得 5	5 去九數
85764	3		
90869			5 去九數

即由被減數之去九數減減數之去九數，若所得之數與差之去九數不同，則知運算有誤．

又51786531	0	減得1	1
23456780	8		
28329751			1

此時被減數之去九數，小於減數之去九數，故被減數之去九數須加以 9．

III. 以去九法驗乘法．

1326	3	相乘得 21	3
457	7		
605982			3

即將乘數被乘數之去九數相乘，再求其去九數，若與積之去九數不同，則知運算有誤．

IV, 以去九法驗除法．

		8 { 2		128
2	11	4	256)32906	2
		3		138

即將除數商數之去九數相乘，加以餘數之去九數，再求去九數，若與被除數之去九數不同，則知運算有誤．

用去九法以驗加，減，乘，除之運算之正否，若誤差為 9 之倍數時，則此法失其效力．例如於加法，其正當之和應為 215034，而誤為 210534 或 214134 時，則去九法無效．

【去九數】〔算〕見去九法條．

【去十一法】 Rule for casting out the elevens.〔算〕若數之各奇位數字之和與各偶位數字之和相等或其差為 11 之倍數者，則其數為 11 之倍數．例如

$$\begin{aligned}34628 &= 30000+4000+600+20+8\\ &= 3(11\times909+1)+4(11\times91-1)\\ &\quad+6(11\times9+1)+2(11-1)+8\\ &= 11\text{之倍數}+3-4+6-2+8\\ &= 11\text{之倍數}+3+6+8-4-2.\end{aligned}$$

此式可分為兩部，前部為 11 之倍數，後部為各奇位數和與偶位數和之較．故若後部為 0 或 11 之倍數，則全體為 11 之倍數．應用此理以驗加，減，乘，除之運算之正否，即為去十一法．其法先自奇位數和減偶位數和，若不能減，則加 11 於奇位數和而減之，其較滿 11 則去之，所餘之數謂之去十一數．其驗算之法皆與去九法同，茲僅示驗乘法之例於下．

1326 ………….6 }
457 ………….6 } 36 ………… 3

605982 ……………………… 3

若誤差爲 11 之倍數時，則去十一法失其驗算之效力.

【去十一數】〔算〕見去十一法條.

古

【古錢形線】〔幾〕即四歧點內旋輪線，見內旋輪線條.

可

【可盡形】Commensurable magnitudes.〔幾〕二線或二形相比時，若同有一公度者，爲可盡形. 與可通約量同，參閱該條.

【可通約根】Commensurable root.〔代〕可通約根者，方程式之根爲可通約數者之謂也.方程式之係數皆爲有理數，則其可通約根易求得之. 方程式之係數悉爲整數，且第一項之係數爲 1 者不能有分數根. 因若$\frac{a}{b}$爲 $f(x)=0$ 之一根，且$\frac{a}{b}$爲已約分數，則

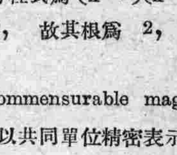
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+p_n=0.$$

以 b^{n-1} 乘此各項且移項，則得

$$-\frac{a^n}{b}=p_1a^{n-1}+\cdots\cdots+p_nb^{n-1}.$$

今 a^n 不能以 b 除盡，故左邊爲分數，而右邊各項皆爲整數，是爲背理.故 $\frac{a}{b}$ 不能爲此方程式之根. 任意方程式可變化之使第一項之係數爲 1，而他項之係數悉爲整數者. 故求任意方程式之可通約根可變爲求一方程式之整數根.設 a 爲 $f(x)=0$ 之整數根，則 $x-a$ 爲 $f(x)$ 之一因數，故 a 爲於 $f(x)$ 內不含 x 項之因數. 若將 p_n 之諸因數一一代入 $f(x)$，而其式爲 o 者，則此因數即爲所求之根.〔例〕求 $x^4-27x^2+42x+8=0$ 之可通約根. 若有可通約根，必爲 8 之因數.故本題驗 $\pm8,\pm4,\pm2,\pm1$ 爲所與方程式之根與否即可.而驗知 4 與 2 爲其根. 既知其二根即可得與方程式之其他之根.因原方程式爲 $(x-2)(x-4)(x^2+6x+1)=0$， 故其根爲 2, 4, $-3\pm2\sqrt{2}$.

【可通約量】Commensurable magnitudes.〔幾〕可以共同單位精密表示之諸量，謂之可通約量；又不可以共同單位精密表示之諸量，謂之不可通約量.今舉一例以示不可通約量之存在.命 ABCD 爲正方形，則 ABC 爲直角二等邊三角形，而直角二等邊三角形之一邊 AB 與斜邊 AC 爲不可通約量. AC 必大於 AB 而小於 AB+BC 即 AB 之二倍. 故由 AC 取 AE 等於 AB 或 BC，則餘剩 EC 小於 AB 或 BC. 過 E 引 EF 垂直於 AC，交 BC 於 F，聯



AF，如是於二直角三角形 ABF，AEF，邊 AB 等於邊 AE，斜邊 AF 爲公共，故 BF=EF. 又於直角三角形 EFC; ECF 及 EFC 二銳角之和爲直角，而 ∠ECF 爲直角之半，故 ∠EFC 亦爲直角之半. 由是 △EFC 爲二等邊，∴EC=EF=BF. 又由 FC 取 FG 等於 EC，而得第二餘剩 GC. 此方法與由正方形之對角線 FC 截取其一邊 EC 者同，故此方法決無底止. 由是正方形之邊與對角線爲不可通約量.

【可通約數】Commensurable numbers.〔代〕可以共同單位精密表示之數，謂之可通約數，又不可以共同單位精密表示之數，謂之不可通約數. 例如$2\frac{3}{5}$及$3\frac{4}{7}$爲可通約數，因此第一數等於$\frac{91}{35}$，而第二數等於$\frac{125}{35}$，而此二數可以共同分數單位$\frac{1}{35}$精密表示之. 然如$\sqrt{2}$與 1 爲不可通約數. 卽正方形之一邊以 1 表之，則對角線爲$\sqrt{2}$，而此爲不可通約數. 何則，若正方形之對角線及一邊可以共同單之數表示之，命對角線及邊含最大共同單位 m 回及 n 回. 然 m 與 n 不能俱爲偶數，其故因 m 與 n 俱爲偶數時，則對角線及邊可以前單位之二倍之單位測度之，然前單位爲可測度對角線及邊之最大共同單位，故 m 與 n 不能俱爲偶數. 然對角線上之正方形含 m^2 平方單位，邊上之正方形含 n^2 平方單位，而已知對角線上之正方形爲邊上之正方形之二倍，∴$m^2=2n^2$，由是 m^2 爲偶數，而 m^2 爲偶數之平方. 命 $m=2p$. 然 $2n^2=m^2=4p^2$. 故 $n^2=2p^2$，由是 n 亦爲偶數. 然前已知 m 與 n 不能俱爲偶數，故正方形之對角線及邊無共同單位足以表示其同一單位之數. 故正方形之對角線及邊之測度爲不可通約數.

四

【四】Four.〔算〕數名，爲三加一之結果. 阿剌伯以 4 記之，羅馬以 IV 記之，希臘以 δ′ 記之.

【四元】Algebra.〔數〕我國昔時稱代數學爲四元.

【四則】Four rules 或 Four fundamental rules.〔算〕〔代〕加法，減法，乘法，除法之總稱也.

【四元術】Quaternion.〔數〕亦名四象學，又稱方維術，日本譯爲四元法，爲十九世紀蘇格蘭數學家哈密爾敦(Hamilton)所發明之一種新理，其法與解析幾何略似，惟解析幾何僅論數量之大小，四元術則並論數量行動方向之性質，卽四元術於長闊厚三元之外，另立方向之一元，合爲四元. 四元術之理最爲新奇，能兼平面及立體解析幾何之用，一切直線，平面，立體，平圓，立圓及圓錐曲線等之應用問題，皆能以此術解之，且用此術以推各種曲線曲面曲體，其便利有甚於用微積分術者，此西人之所以謂其中含有哲學性質也.

【四分圓】Quadrant.〔幾〕〔三〕圓內互相垂直二徑所分之一部之謂也．三角法中稱爲象限．

【四角形】Quadrangle 或 Tetragon.〔幾〕同四邊形，見該條．

【四角柱】Quadrangular prism.〔幾〕底面爲四角形之柱體之謂也．

【四角數】Square number.〔代〕見多角數條．

【四角錐】Quadrangular pyramid.〔幾〕底面爲四角形之錐體之謂也．

【四面角】Tetrahedral angle.〔幾〕見多面角條．

【四面體】Tetrahedron.〔幾〕多面體之有四面者之謂也．因其爲一以三角形爲底之錐體，故亦稱三角錐．

【四重根】Quadruple root.〔代〕見重根條．

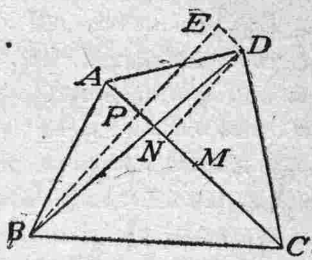
【四乘根】Fourth root.〔算〕〔代〕一數爲他數之四乘冪，則後數爲前數之四乘根，例如 $81=3^4$，故 3 爲 81 之四乘根，以 $\sqrt[4]{81}$ 表之．又 $\sqrt[4]{a}$ 爲 a 之四乘根．

【四乘冪】Fourth power.〔算〕〔代〕卽某數自乘四次之謂也．例如 $256=4^4$，256 爲 4 之四乘冪，又 a^4 爲 a 之四乘冪．

【四進法】Quarternary scale.〔算〕以四爲記數之底而進位之命數記數法之謂也．此時用數字 1, 2, 3 及 0 卽足．而於四進法 20132 卽 $2\times4^3+1\times4^2+3\times4+2$ 之意．

【四象學】Quaternion.〔數〕卽四元術，見該條．

【四邊形】Quadrilateral 或 Tetragram.〔幾〕四邊形者，四直線所包圍之平面形之謂也．於任意四邊形 ABCD，命 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$，則其面積 $S=\frac{1}{4}\sqrt{X\cdot Y}$，



但 $X=2mn+a^2-b^2+c^2-d^2$, $Y=2mn-a^2+b^2-c^2+d^2$．〔證〕命 M 爲 AC 之中點，$BP\perp AC$, $DE\perp BP$, $DN\perp AC$，則 $a^2-b^2=-2m\cdot MP$, $c^2-d^2=2m\cdot MN$,

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2m(-NP)=-2mED$,

$\therefore X=2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=2m(n-ED)$, $Y=2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=2m(n+ED)$,

$\therefore X\cdot Y=4m^2(n^2-ED^2)=4m^2BE^2$,

$\therefore \sqrt{X\cdot Y}=2m\cdot BE=4ABCD=4S$.

若 ABCD 爲內接四邊形時，則由托勒密(Ptolemy)定理，$mn=ac+bd$．$\therefore 2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=(a+c)^2-(b-d)^2=(a+c+b-d)(a+c-b+d)$, $2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=(b+d)^2-(a-c)^2$

$=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$. 命 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 則 $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. 又若四邊形可內接及外切於圓, 則 $a+c=b+d$, $\therefore s=a+c=b+d$, $\therefore S=\sqrt{abcd}$.

【四次曲線】Quartic curve.〔幾〕x,y 之四次方程式之軌跡謂之四次曲線. 如心臟線 (Cardioid), 泥科美德 (Nicomedes)之蚌線(Conchoid), 柏努利 (Bernoulli) 之雙紐線 (Lemniscate) 皆爲四次曲線. 歐拉分四次曲線爲一百四十六類,共五千餘種.

【四步法則】Four-step rule.〔微〕即求 $y=f(x)$ 之關於 x 之微分係數之普通法則:【第一步】於函數內代 x 以 $x+\Delta x$, 同時與函數以新值 $y+\Delta y$, 即將原函數變爲 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ 之形.【第二步】從新值減去函數之已知值以求函數之增量 Δy, 即 $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x)$.【第三步】以自變數之增量 Δx 除函數之增量 Δy, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.【第四步】當自變數變化而接近於極限零時, 求兩增量之商之極限值, 是即所要之微分係數, 常書如次之形式: $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

玆舉例說明之如次:(1)微分 $y=3x^2+5$.

【第一步】$y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2+5=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5$.【第二步】

$$\begin{array}{rl} y+\Delta y= & 3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2+5 \\ y\quad= & 3x^2\qquad\qquad\qquad\qquad+5 \\ \hline \Delta y= & \quad 6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{array}.$$

【第三步】$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x$.【第四步】$\frac{dy}{dx}=6x$. 此結果式亦可寫如下之形式: $\frac{d}{dx}(3x^2+5)=6x$. (2)微分 $y=\frac{c}{x^2}$.

【第一步】$y+\Delta y=\frac{c}{(x+\Delta x)^2}$.【第二步】

$$\begin{array}{rl} y+\Delta y= & \frac{c}{(x+\Delta x)^2} \\ y\quad= & \frac{c}{x^2} \\ \hline \Delta y= & \frac{c}{(x+\Delta x)^2}-\frac{c}{x^2} \end{array}$$

$$=\frac{-c\cdot\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

【第三步】$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-c\cdot\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$.

【第四步】$\frac{dy}{dx}=-c\frac{2x}{x^2(x)^2}=-\frac{2c}{x^3}$.

此結果式亦可寫如下之形式: $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right)=-\frac{2c}{x^3}$.

【四十八面體】Hexoctahedron. 或 Hexoctaedron.〔幾〕四十八個平面所圍成之立體之謂也.

【四次方程式】Quartic 或 Biquadratic equation.〔代〕即含未知數之四乘冪或四次元之方程式, 而普通指一元四次方程式而言, 即 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 是也. 四次方程式之解法,須由

三次方程式之解法得之，其解法有種種，有歐拉之解法，有斐剌里(Ferrari 1522-1562, Cardan 之學生）之解法，有笛卡兒之解法，等等.其中以斐剌里者爲最簡便，茲述之如次：

命原方程式爲 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$；於方程式之兩邊各加 $(ax+b)^2$，其 a,b 之值爲恰能使左邊爲完全平方者，由是則得 $x^4+px^3+(q+a^2)x^2+(r+2ab)x+s+b^2=(ax+b)^2$.

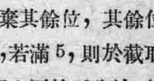
命方程式之左邊爲 $\left(x^2+\frac{p}{2}x+k\right)^2$；比較其係數，則得 $\frac{p^2}{4}+2k=q+a^2$, $pk=r+2ab$, $k^2=s+b^2$. 由此三方程式消 a 及 b，則得 $4(k^2-s)\left(2k+\frac{p^2}{4}-q\right)-(pk-r)^2=0$，即 $8k^3-4qk^2+2(pr-4s)k-p^2s+4qs-r^2=0$ 是爲 k 之三次方程式，由此三次方程式常可求得 k 之一實根，而 a, b 之值亦可決定之.又因 $\left(x^2+\frac{p}{2}x+k\right)^2=(ax+b)^2$，故 $x^2+\frac{p}{2}x+k\pm(ax+b)=0$，而 x 之值可由 $x^2+\left(\frac{p}{2}+a\right)x+(k+b)=0$, $x^2+\left(\frac{p}{2}-a\right)x+(k-b)=0$ 二二次方程式求得之.〔例〕解方程式 $x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0$. 兩邊各加以 $(ax+b)^2$，令 $x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5x)+b^2-3=(x^2-x+k)^2$；比較其係數，得 $a^2=2k+6$, $ab=-k-5$, $b^2=k^2+3$；∴$(2k+6)(k^2+3)=(k+5)^2$；故 $2k^3+5k^2-4k-7=0$. 此方程式之一根爲 -1；∴$a^2=4$, $b^2=4$, $ab=-4$. 由假設得 $(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2$；代入 k, a,b 之值，則得 $x^2-x-1=\pm(2x-2)$；即 $x^2-3x+1=0$，及 $x^2+x-3=0$ 二方程式；故所求之根爲 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

【四捨五入法】〔算〕演算中遇多位小數時，截取若干位，而棄其餘位，其餘位之首不滿 5 則捨棄之，若滿 5，則於截取之末位數加一.此法謂之四捨五入法.例如有數 2.71546 截取二位小數時，則作 2.72，截取三位小數時，則作 2.715.

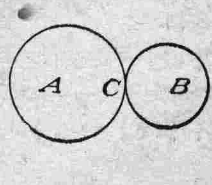
【四歧點內旋輪線】Hypocycloid of four cusps.〔幾〕見內旋輪線條.

外

【外分】To divide externally.〔幾〕於某有限直線之延線上取一點時，則此線謂之外分於此點，而此點謂之外分點，其二部分之差等於某有限直線.例如於 AB 之延線上取一點 C，AB 謂之外分於 C，而 AC,BC 之差爲 AB.



【外切】(一) To touch externally.〔幾〕二圓互在外而相切之謂.如圖，A,B 二圓外切於 C.



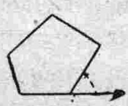
【外切】(二) To be circumscribed. 〔幾〕多邊形之各邊切於一圓,則此多邊形,謂之外切於圓.但亦有混稱爲外接者.

【外心】(一) Circum-centre. 〔幾〕多角形之外接圓之中心之謂,多指三角形者而言,即諸邊之中垂線之交點之謂也。

【外心】(二) Outer centre. 〔幾〕指相似外心,卽二相似形或二圓之二相似中心中二形同在其一側者,謂之相似外心.又見相似中心條.

【外折】〔算〕卽外耗.

【外角】Exterior angle. 〔幾〕如圖,一直線截他二直線時所生 1, 2, 3, 4 諸角,



謂之外角. 又多角形之一邊及其鄰邊之延線間之角,亦謂之外角.

【外耗】〔算〕見內耗條.

【外接】To be circumscribed. 〔幾〕一圓過一多邊形之各角頂,則此圓謂之外接於多邊形;又一多邊形之各邊過他多邊形之各角頂,則前多邊形謂之外接於後多邊形.又外切亦有稱爲外接者.

【外率】Extreme. 〔算〕〔代〕卽外項,見該條.

【外項】Extreme. 〔算〕〔代〕於比例 $a:b=c:d$, a 及 d 謂之外項或外率.

【外中比】Extreme and mean ratio. 〔幾〕分爲外中比,卽與外中分割同,見該條.

【外分點】〔幾〕見外分條.

【外切形】Circumscribed figure. 〔幾〕見外切多邊形條.

【外切錐】Circum-cone. 〔幾〕圓錐(或角錐)之曲面(或側面)及底面切於一球時,謂之外切錐.

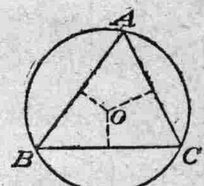
【外心率】Eccentricity. 〔幾〕卽離心率,見該條.

【外半徑】Circum-radius. 〔幾〕卽外接圓之半徑之謂也.

【外接形】Circumscribed figure. 〔幾〕見外接多邊形條.

【外接球】Circumscribed sphere. 〔幾〕過多面體之各頂點之球之謂也.

【外接圓】Circumscribed circle. 〔幾〕過多邊形之各頂點可作一圓時,此圓謂之多邊形之外接圓.多就三角形而言.作△ABC外接圓之法,先作各邊之中垂線,命其交點(卽外心)爲O,以O爲心,由O至一角頂之長(卽外半徑)爲半徑作圓,卽爲外接圓.



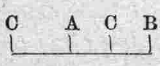
【外線分】External segment. 〔幾〕有限直線 AB 之延線上取一點 C 時, AC 及 BC 謂之其外線分.

【外錯角】Alternate-exterior angles.

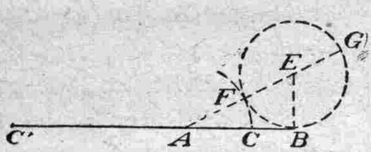
〔幾〕一直線與二直線相交(外角條之圖) 1 及 3, 2 及 4 謂之外錯角. 一直線與二平行線相交,其外錯角相等,而其逆亦爲眞.

【外擺線】Epicycloid. 〔幾〕卽外旋輪線,見該條.

【外中分割】Medial section.〔幾〕有限直線內分或外分之於一點，使一部分上之正方形等於全線及他部分所包之矩形，則謂此直線分成外中比，而此分割謂之外中分割. 如圖，內分或外分



AB 於 C，使 $\overline{AC}^2=AB\cdot BC$ 是也. 分一直線爲外中比之法如次: 設 AB 爲已知直線,求分 AB 爲外中比.於 B 作垂線



BE 使等於 AB 之半.以 E 爲心，BE 爲半徑作圓.作 AE，遇圓周於 F 及 G. 於 AB 上取 AC=AF; 又於 BA 之延線上取 AC'=AG. 則 AB 內分於 C 外分於 C',而成外中比.

〔證〕因 $AG:AB=AB:AF$.

$\therefore \overline{AB}^2=AF\cdot AG=AC(AF+FG)$

$\qquad =AC(AC+AB)=\overline{AC}^2+AB\cdot AC.$

$\therefore \overline{AB}^2-AB\cdot AC=\overline{AC}^2.$

$\therefore AB\,(AB-AC)=\overline{AC}^2.$

$\therefore AB\cdot CB=\overline{AC}^2.$

同樣可證 $AB\cdot C'B=\overline{AC'}^2$.

故 AB 內外分於 C 及 C' 而成外中比. 此分割於幾何學中甚爲重要. 昔希臘之數學家稱爲黃金分割. 畢達哥拉斯時已知作此分割.

【外公切面】External common tangent plane. 〔幾〕二球之公切面,而其二球俱在平面之同側者之謂也.

【外公切線】External common tangent. 〔幾〕二圓之公切線中,二圓俱在切線之同側者之謂也.又稱直接公切線,詳公切線條.

【外切角柱】Circumscribed prism. 〔幾〕角柱之側面及二底面切於一球者之謂也. 又角柱之諸側稜與圓柱之基線平行,其兩底爲圓柱體之底之外切形,則此角柱謂之此圓柱之外切角柱.

【外切角錐】Circumscribed pyramid. 〔幾〕角錐之側面及底面切於一球者,謂之球之外切角錐. 又角錐之底爲圓錐之底之外切形其頂點與圓錐之頂點重合者,謂之圓錐之外切角錐.

【外旋輪線】Epicycloid. 〔幾〕一動圓外切於一定圓周而迴轉時，則動圓周上一定點之軌迹,卽爲外旋輪線.命 a 爲定圓半徑，b 爲動圓半徑，則其方程式爲

$$x=(a+b)\cos\theta+b\cos\frac{a+b}{b}\theta,\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\frac{a+b}{b}\theta.$$

若 $a=b$，則外旋輪線爲心臟線.參閱心臟線條.

【外餘擺線】〔幾〕卽外餘旋輪線.

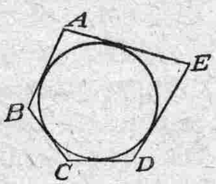
【外點擺線】〔幾〕卽外點旋輪線.詳半

徑旋輪線條.

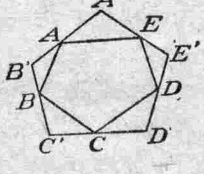
【外二等分線】External bisector. 〔幾〕某角之外二等分線者,其外角之二等分線之謂也.又見二等分線條.

【外切多面體】Circumscribed polyhedron.〔幾〕多面體之各面切於同一球者之謂也.

【外切多邊形】Circumscribed polygon,〔幾〕多邊形之各邊切於同一圓者,謂之外切多邊形,如圖ABCDE是也.外切多邊形因其邊數爲3,4,……而分外切三角形,外切四邊形,……等等.



【外接多邊形】Circumscribed polygon.〔幾〕多邊形之各邊過他多邊形之各角頂者,謂之外接多邊形.如圖A′B′C′D′E′爲ABCDE之外接形,外接多邊形因邊數爲3,4,……而分外接三角形,外接四邊形……等等.



【外餘旋輪線】〔幾〕圓外之餘旋輪線也.一動圓外切於一定圓周而旋轉時,則動圓半徑上或半徑延線上之一定點之軌跡,成爲一種特殊形式之餘旋輪線,稱曰外餘旋輪線.故外餘旋輪線猶有內點旋輪線與外點旋輪線兩種.命a爲定圓半徑,b爲動圓半徑,d爲動圓心至定點之距離,則外餘旋輪線之方程式爲 $x=(a+b)\cos\theta-d\cos\frac{a+b}{b}\theta$, $y=(a+b)\sin\theta-d\sin\frac{a+b}{b}\theta$. 參閱半徑旋輪線及內餘旋輪線條.

【外點旋輪線】〔幾〕見半徑旋輪線條.

市

【市升】〔算〕一市升即一公升(竔),合舊制部尺三〇·五一七六立方寸弱,合〇·九六五七升强.市升以上有市斗、市石,市升以下有市合、市勺等,均以十進.惟市斗之上有市斛,五市斗爲一市斛,二市斛爲一市石.

【市尺】〔算〕一公尺(粎)之三分之一爲一市尺,合舊制一·〇四一七部尺　合英制一·〇九三六呎.

【市斤】〔算〕一公斤(兛)之二分之一爲一市斤,合舊制庫平〇·八三七五斤即十三兩四錢,合英常衡制一·一〇二三磅.一市斤分爲十六市兩.

【市里】〔算〕一五〇〇市尺爲一市里,合舊制〇·八六八一部里,合標準制〇·五公里,合英制〇·三一〇七哩.

【市兩】〔算〕一市斤之十六分之一爲一市兩,合舊制庫平〇·八三七五兩,合標準制〇·三一二五公兩,合英常衡制一·一〇二三唡.

【市畝】〔算〕六〇〇〇平方市尺爲一市

畝，合舊制一·〇八五一部畝，合標準制六·六六六七公畝，合英制〇·一六四七英畝.

【市頃】〔算〕一〇〇市畝爲一市頃，合舊制一·〇八五一部頃，合標準制六·六六六七公頃，合英制一六·四七四〇英畝.

【市擔】〔算〕一〇〇市斤爲一市擔，合舊制庫平八三·七五斤，合標準制五〇公斤，合英常衡制一一〇·二三磅.

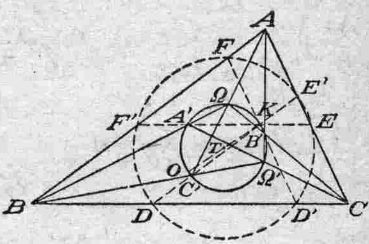
【市用制】〔算〕市用制爲民國十七年八月國民政府制定之一種度量衡制，長度以公尺三分之一爲市尺(簡作尺)，重量以公斤二分之一爲市斤(簡作斤)，容量以公升爲市升(簡作升). 一斤分爲十六兩，一千五百尺定爲一里，六千平方尺定爲一畝，其餘均以十進. 度量衡市用制一名一二三制，因其不離標準制(公制)，故非獨立制，因其近於舊制，故合乎民情.

布

【布洛喀角】Brocard angle. 〔幾〕命三角形 ABC 之布洛喀點爲 Ω，Ω'，則 ΩAB，ΩBC，ΩCA，$\Omega' AC$，$\Omega' CB$，$\Omega' BA$ 六角皆相等 (圖見布洛喀點條)，而謂之三角形 ABC 之布洛喀角，通常以 ω 表之. 用三角法之公式可證 $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$. 又 $\operatorname{cosec}^2\omega=\operatorname{cosec}^2 A+\operatorname{cosec}^2 B+\operatorname{cosec}^2 C$. 故相似三角形有同布洛喀角.

【布洛喀弧】Brocard arc. 〔幾〕命三角形 ABC 之布洛喀點爲 Ω，Ω'，則 $A\Omega B$，$B\Omega C$，$C\Omega A$，$A\Omega' B$，$B\Omega' C$，$C\Omega' A$ 六弧謂之布洛喀弧.

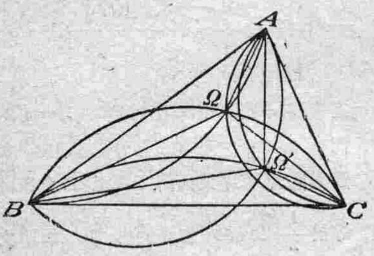
【布洛喀圓】Brocard circle. 〔幾〕以聯結三角形之外心與其類似重心之直線爲徑之圓，謂之布洛喀圓. 命三角形 ABC 之外心爲 O，類似重心爲 K，布洛喀點爲 Ω，Ω'；$B\Omega$，$C\Omega'$ 之交點爲 A'；$C\Omega$，$A\Omega'$ 之交點爲 B'；$A\Omega$，$B\Omega'$ 之交點爲 C'；則 O，K，A'，B'，C'，Ω，Ω' 七點皆在布洛喀圓周上. 〔證〕命布洛喀角爲 ω，則



$\angle A'BC=\angle A'CB=\omega$，故 $A'B=A'C$，而 A' 在 BC 之垂直二等分線上，即 OA' 爲垂直於 BC，又因由 BC 至 A' 之距離等於 $\frac{1}{2}a\tan\omega$，即等於由 BC 至 K 之距離. 故 $A'K$ 平行於 BC. 由是知 $OA'K$ 爲直角. 同理可證明 $OB'K$，$OC'K$ 亦爲直角. 故點 A'，B'，C' 皆在以 OK 爲徑之圓周上. 又因 $\angle A'\Omega C'=\angle \Omega AB+\angle \Omega BA=\omega+(B-\omega)=B=\angle A'KC'$，$\angle A'\Omega' C'=\angle \Omega' CB+\angle \Omega' BC=\omega+(B-\omega)=B=\angle A'KC'$. 故 Ω，Ω' 亦在以 OK 爲徑之圓周上. 故 O，K，A'，B'，C'，Ω，Ω' 七點皆在布洛喀圓周上. 此圓爲布洛喀所發明，布氏原稱之爲七

點圓，然今普通皆稱爲布洛喀圓．因 OK 之中點 T，又爲三乘比圓 $DD'EE'FF'$ 之中心．故三角形之布洛喀圓與三乘比圓爲同心．又布洛喀圓之半徑與三乘比圓之半徑之比等於布洛喀橢圓之離心率．又連三點 A'，B'，C' 所成之三角形 $A'B'C'$ 爲三角形 ABC 之第一布洛喀三角形．

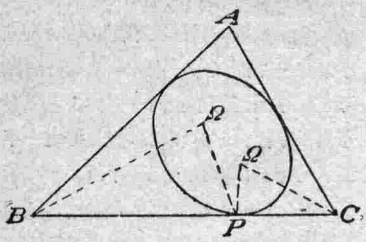
【布洛喀點】Brocard point．〔幾〕於三角形 ABC 之邊 CA，AB，BC 上畫圓弧，第一切 AB 於 A，第二切 BC 於 B，第三切 CA 於 C；此三弧交於一點 Ω，則 Ω 謂之正布洛喀點．又於邊 CA，AB，BC 上畫圓弧，此次第一切 BC 於 C，第二切



CA 於 A，第三切 AB 於 B．命此三弧之交點爲 Ω'，則 Ω' 謂之負布洛喀點．由 Ω，Ω' 至三角形 ABC 之三邊作垂線，可求得正布洛喀點 Ω 之三線坐標爲 $2R\frac{c}{b}\sin^2\omega$，$2R\frac{a}{c}\sin^2\omega$，$2R\frac{b}{a}\sin^2\omega$，負布洛喀點 Ω' 之三線坐標爲 $2R\frac{b}{c}\sin^2\omega$，$2R\frac{c}{a}\sin^2\omega$，$2R\frac{a}{b}\sin^2\omega$．又 $A\Omega\cdot B\Omega\cdot C\Omega=A\Omega'\cdot B\Omega' C\Omega'$．今求二布洛喀點間之距離如次：因 $\angle\Omega A\Omega'=\angle BAC-\angle BA\Omega-\angle CA\Omega'=A-2\omega$，故 $\Omega\Omega'^2=A\Omega^2+A\Omega'^2-2A\Omega\cdot A\Omega'\cos(A-2\omega)=4R^2\sin^2\omega\frac{1}{a^2}\{b^2+c^2-2bc\cos(A-2\omega)\}=4R^2\sin^2\omega\frac{1}{a^2}\{a^2+2bc\cos A-2bc\cos(A-2\omega)\}=4R^2\sin^2\omega\{1-\frac{4bc}{a^2}\sin\omega\cos(A-2\omega)\}=4R^2\sin^2\omega\{1-4\sin^2\omega\}$．

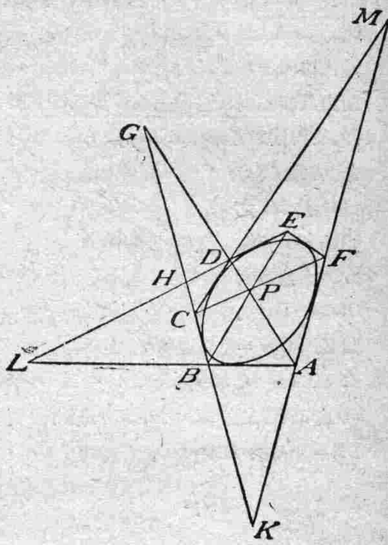
【布洛喀定理】Brocard's theorem．〔幾〕卽布洛喀圓上，其布洛喀點與勒滿平行線相關係之定理．命三角形 ABC 之外心爲 O，類似重心爲 K，以 OK 爲直徑之圓，卽布洛喀圓，與關於 BC，CA，AB 之勒滿平行線交於 A'，B'，C' 三點，則有定理如次：(1) AC'，BA'，CB' 在其圓周上交於同一之點 Ω，是爲正布洛喀點．(2) AB'，BC'，CA' 在其圓周上交於同一之點 Ω'，是爲負布洛喀點．（圖見布洛喀圓條）

【布洛喀橢圓】Brocard ellipse．〔幾〕以三角形 ABC 之二布洛喀點 Ω，Ω' 爲焦點之內切橢圓，謂之三角形之布洛喀橢圓．命布洛喀橢圓之兩半徑爲 a_1 及 b_1，則得 $b_1^2=$(由 Ω，Ω' 至 BC 上之垂線之積) $=2R\frac{c}{b}\sin^2\omega\cdot 2R\frac{b}{c}\sin^2\omega=4R^2\sin^4\omega$，又 $a_1^2=b_1^2+\frac{1}{4}\Omega\Omega'^2$



$=4R^2\sin^4\omega+R^2\sin^2(1-4\sin^2\omega)=R^2\sin^2\omega$. 故布洛喀橢圓之兩半徑之長各等於 $R\sin\omega$ 及 $2R\sin^2\omega$. 又因三角形 ΩBP, $\Omega'CP$ 相似, 故 $BP:PC=B\Omega:C\Omega'=2R\frac{c}{b}\sin\omega:2R\frac{b}{c}\sin\omega=c^2:b^2$. 由是三角形之布洛喀橢圓分三角形之任意邊於切點, 使與其鄰邊之平方成比例.

【布立安深定理】Brianchon's theorem. 〔幾〕外切於圓錐曲線之六角形, 其三雙對頂點之聯線爲共點線, 是爲布立安深之定理. 設 ABCDEF 爲外切六邊形, 二對角線 AD, BE 交於 P. BC 與 AD, ED, FA 交於 G, H, K; AB 與 ED 交於 L; AF 與 CD 交於 M. 則 (APDG)=B(APDG)=(LEDE)=(AFMK), 因一圓錐曲線之四定切線與此外任一切線之交點皆成等十字比列點故也. 故(APDG)=C(AFDG). 故射線 CF 過 P, 即 AD, BE, CF 爲共點線. 因布立安深定理與巴斯噶定理互相對應, 故布立安深定理必如次述之, 方爲完全: 一圓錐曲線六切線相交之十五點, 相交於合

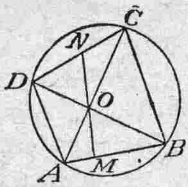


六十點(每三線過一點)之十五直線上.

【布立格茲對數】Briggs' logarithm. 〔代〕即常用對數, 見該條及對數條.

【布洛喀三角形】Brocard triangle. 〔幾〕聯結三角形之外心在其勒滿平行線上之正射影所成之三角形, 謂之第一布洛喀三角形. 此又可述之如次. 命 Ω, Ω′ 爲三角形 ABC 之布洛喀點, A′ 爲 BΩ, CΩ′ 之交點, B′ 爲 CΩ, AΩ′ 之交點, C′ 爲 AΩ, BΩ′ 之交點, 則聯 A′, B′, C′ 所成之三角形謂之第一布洛喀三角形(圖見布洛喀圓條). 聯結三角形之各角頂與其類似重心之直線與布洛喀圓相交之三點所聯成之三角形, 謂之第二布洛喀三角形.

【布拉美古他定理】Brahmegupta's theorem. 〔幾〕布拉美古他定理如次:若圓內接四邊形之二對角線互相垂直時,則由其交點引任意邊之垂線必二等分對邊.於內接四邊形 ABCD,設 $AC\perp BD$,命其交點為 O.由 O 引 AB 之垂線 OM,命 MO 之延線交 CD 於 N 點.



因 $\angle CON=\angle AOM=\angle R-\angle BOM=\angle OBM=\angle OCN$. 故 NC=NO. 同樣可證明 DN=NO.故 DN=NC.

平

【平方】Square. 〔算〕〔代〕〔幾〕一數之自乘謂之平方,例如 3 之平方為 3×3 即 3^2,5 之平方為 5×5 即 5^2,而普通 a 之平方為 a^2. 平方又稱二乘羃.又正方之平面曰平方,計面積用之,如平方尺,平方寸是也.

【平年】Common year. 或 Civil year. 〔算〕凡陽歷無閏之年,謂之平年.

【平角】Straight angle. 〔幾〕角之二邊,由其角頂,在兩反對方向引之,若恰成一直線,則此角謂之平角.平角為 180°,等於直角之二倍,而等於周角之半.

【平面】Plane 或 Plane surface. 〔幾〕於面上取任意二點以直線聯之,處處與面密合者,則此面謂之平面,平面之廣無限制.一直線在他直線上滑之,恆平行於自身而移動時,則生平面.又一直線與之成直角之軸迴轉時則生平面.(1)一直線不能定一平面.(2)一直線及其線外一點可定一平面.(3)不在同一直線上之三點可定一平面.(4)相交二直線可定一平面.(5)平行二直線可定一平面.

【平三角】Plane trigonometry. 〔數〕平面三角法之略.

【平中徑】Apothem. 〔幾〕日本算書稱邊心距為平中徑,見邊心距條.

【平分面】Bisector. 〔幾〕見二等分面條.

【平分線】Bisector. 〔幾〕見二等分線條.

【平方比】Square ratio. 〔算〕〔代〕與二乘比同,見該條.

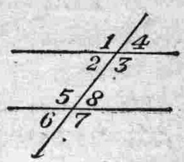
【平方根】Square root. 〔算〕〔代〕某數之平方根者,其平方等於彼某數之數之謂也.例如 $4=2^2$,故 4 之平方根為 2,9 之平方根為 3,而以 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$ 記之.普通 a 之平方根以 $\sqrt{a}$ 記之.此 $\sqrt{\ }$ 謂之根號,此處為 $\sqrt[2]{\ }$ 之略.但代數式之平方根有絕對值相等而號相反之二值,例如 $a+b$ 之平方根為 $\pm\sqrt{(a+b)}$.

【平方數】Square number. 〔代〕數之為他數之平方者,謂之平方數. 例如 1,4,9,16,….是也.(1)凡各平方數為 3m 或 3m+1. 〔證〕各根數為 3 之倍數或非 3 之倍數.即各數不外乎 3m 或 $3m\pm1$,故其平方數為 $(3m)^2=9m^2=3m$, $(3m\pm1)^2=(3m)^2\pm2(3m)+1=3m+1$. (2)凡平方數為5m 或 $5m\pm1$. 〔證〕各根數不外

乎 $5m$, $5m\pm1$, $5m\pm2$, 故其平方數爲 $(5m)^2=5m$, $(5m\pm1)^2=(5m)^2\pm2(5m)+1=5m+1$, $(5m\pm2)^2=(5m)^2\pm4(5m)+4=5m+2$. (3)平方數之末位數不能有 2, 3, 7, 8 四數.〔證〕各數爲 $10m+a$ (但 a 爲 1, 2, 3, … 9, 0 以內之數). 故 $(10m+a)^2=10m+a^2$, 而 a^2 爲 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 0 以內之數. 即其末位之數字祗有 1, 4, 5, 6, 9 或 0 而無 2, 3, 7, 8 四數字. (4)平方數之末位數字爲奇數者，則其十位之數字必爲偶數.〔證〕奇數 1, 3, 5, 7, 9 之平方爲 01, 09, 25, 49, 81, 其十位數字爲 0 或偶數.而 a 爲在 1, 3, 5, 7, 9 內之一數字,則 $(10m+a)^2=100m^2+20am+a^2$, 其20m爲偶數,以$a^2$之十位數字(即偶數)加之,仍爲偶數. (5)連續四數之積,決不能爲平方數. 〔證〕設連續四數爲 a, a+1, a+2, a+3, 則其積爲 $a(a+1)(a+2)(a+3)=(a^2+3a)(a^2+3a+2)=\{(a^2+3a+1)-1\}\{(a^2+3a+1)+1\}=(a^2+3a+1)^2-1$, 即連續之數之積,其形如 N^2-1, 而不能爲平方數. (6)各平方數可以兩平方數之差表之.〔證〕若平方數爲偶數,則 $(2n)^2=(n^2+1)^2-(n^2-1)^2$. 若平方數爲奇數,則 $(2n+1)^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, 而 $a+b=(2n+1)^2$, $a-b=1$, 則$a=2n^2+2n+1$, $b=2n^2+2n$, 由是 $(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+2n)^2$.

【平行形】〔幾〕直線形之兩兩相對之邊皆平行者，謂之平行形，如平行四邊形，正六邊形等是.

【平行線】Parallels 或 Parallel lines.〔幾〕在平面內二直線雙方任何延長之終不相遇者，謂之平行線.故平行線有同一之方向.而二直線平行，置記號 ∥ 於其間以示之.例如 AB ∥ CD 即示直線 AB 平行於直線 CD 也.又〔別定義〕二直線同方向時謂之平行.由此定義知(1)二平行線在同一平面上，(2)雙方任何延長之終不相交.又〔別定義，稍爲高深，惟不適用於初等幾何〕二直線相交於有限距離時，謂之相交，相交於無限距離時謂之平行.一直線交於二平行線時，(1)其同傍內角 2 與 5 或 3 與 8 互爲補角，(2)內錯角 2 與 8 或 3 與 5 相等，(3)同傍外角 1 與 6 或 4 與 7 互爲補角，(4)外錯角 1 與 7 或 4 與 6 相等，(5)同位角 1 與 5, 2 與 6, 3 與 7, 或 4 與 8 相等.而此等之逆亦爲眞.



【平均價】Average value.〔算〕若干同類物之價之和以其分量之和除之，謂之其混合後之平均價.例如每斤 2 角之酒2 斤，每斤 2 角 4 分之酒 5 斤，每斤 3 角之酒 3 斤，其混合後之平均價爲

$$\frac{20\times2+24\times5+30\times3}{2+5+3}=2角5分.$$

【平均數】Mean.〔代〕平均數有相加平均相乘平均二種. n 個數之和以 n 除之者，謂之此等數之相加平均；n 個數之連

乘積之 n 乘根，謂之相乘平均．卽 a_1，a_2，a_3，……，a_n，n 個數之相加平均爲 $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$，而其相乘平均爲 $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$；茲各以 A，G表之．相加平均常大於相乘平均，卽 $A>G$．〔證1〕於 n 個數 a_1，a_2，a_3，…a_n 中，以二等數 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 代二不等數 a_1，a_2，則 A 不變，而G因 $\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$ 而增大．逐次如是，將諸數中之二不等數，皆以等數換之，則 A 不變，而 G 漸增大．至諸數皆相等時，其諸數之 G 爲極大値，且 A 等於 G．故知原來之 $A>G$．〔證2〕命 a_1 爲 n 數中之最大者，而 a_2 爲最小者．謂 $a_1+a_2=G+K$，但因 G 値在 a_1，a_2 之間．$\therefore GK-a_1a_2=G(a_1+a_2-G)-a_1a_2=(a_1-G_1)(G-a_2)>0$．故以 G，K 換 a_1，a_2，則 A 不變，而 G 增大，命爲 G_1．次於 K，a_3，a_4，…，a_n 之 $n-1$ 數中之最大及最小之數，以 G_1，L 換之，則 A 仍不變，而 G 更增大，命爲 G_2．逐次如是，至最後，原來之 n 數變爲 G，G_1，G_2，…G_{n-1}，且 $G<G_1<G_2<\cdots<G_{n-1}$，而 A 不變，卽 $nA=G+G_1+G_2+\cdots+G_{n-1}>nG$．$\therefore A>G$．〔證3〕命 a_1 爲 n 數中之最大者，而 a_2 爲最小者．設 $a_1a_2=GK$，則 $a_1:G=K:a_2$，$\therefore a_1-G:G=K-a_2:a_2$，但 $G>a_2$，$\therefore a_1-G>K-a_2$，卽 $a_1+a_2>G+K$．故以 G，K 代 n 數中之 a_1，a_2，則 G不變，而 A 減小．同樣於 $n-1$ 數 K，a_3，a_4，…，a_n 中以 G，L 代其最大及最小之數，則 G 仍不變，而 A 更減小．逐次如是，則 G 不變而 A 逐漸減小，最後 G 仍不變，而 A益減小，而爲 $\frac{G+G+G+\cdots}{n}$ 卽 G 矣．由是 A 經若干次減小方等於 G，故原來 $A>G$．

n 正量之 m 乘冪之相加平均，大於其相加平均之 m 乘冪，惟須除 m 在 0 與 1 之間．卽命 a_1，a_2，a_3，…a_n 爲 n 正量，則 $\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m}{n}>\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^m$，惟 m 爲正眞分數則反是．欲證此命題，須用次之補題，卽「若 a 與 b 爲不等之正數，則 $\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$，惟 m 須不爲正眞分數」．設 m 爲不在 0 與 1 之間．細考式 $a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m$，取 a_1 與 a_2 不相等；若 a_1a_2 以二相等之數 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 換之，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 之値不變，然 $a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m$ 則減小，因 $a_1^m+a_2^m>2\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ 故也．故當諸量 a_1，a_2，a_3，…a_n 中有任二量不等時，則可減小 $a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots\cdots+a_n^m$．而 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 之値不變；故當諸量 a_1，a_2，a_3，…a_n 皆相等時，$a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m$ 之値爲最小．當此情形，各量皆等於

$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$, 而 $a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m$ 之值變爲 $n\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^m$. 故當 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ 不相等時,則

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots+a_n^m}{n} > \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^m.$$

若 m 在 0 與 1 之間,與前同樣,可證上式內之不等號須反轉之.

【平均點】Mean point.〔幾〕同平均中心,見該條.

【平面形】Plane figure.〔幾〕直線或曲線所包圍之一部分平面之謂也. 例如三角形,四邊形,爲直線所包圍之平面形,圓,橢圓爲曲線所包圍之平面形.

【平面角】Plane angle.〔幾〕在一平面上之角之謂也. 換言之在一平面上之一直線以其一端爲軸而迴轉時,畫成一平面角.

【平面圖】Plane figure 或 Plane.〔幾〕在一平面上之圖形之謂也.

【平截體】Frustum.〔幾〕即臺,見該條.

【平方根比】Subduplicate ratio.〔代〕a:b 之平方根比爲 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$.

【平方關係】〔三〕見三角函數條.

【平太陽日】Mean solar day.〔算〕太陽日由正午至次正午之時間也. 然此時間恆不相同,由是取一年中之太陽日而平均之,而名之曰平太陽日,即尋常之日也.

【平行平面】Parallel planes.〔幾〕二平面雙方任何延長之終不相遇者,謂之平行平面,此初等幾何學中之定義也.而高等之幾何學中,則謂相交於無窮遠之平面爲平行平面.

【平行坐標】Parallel coördinates.〔幾〕即普通所用之坐標法也,因其用平行直線表距離,故有是名,見坐標條.

【平行直線】Parallel straight lines.〔幾〕即平行線,見該條.

【平均中心】Mean center.〔幾〕有 A, B, C, D, ……一組之點及 a, b, c, d, ……一組整數,分 AB 爲 a+b 等分,命 AM_1 含其 b, BM_1 含其 a, 又分 CM_1 爲 a+b+c 等分,命 M_1M_2 含其 c, CM_2 含其 a+b,逐次如斯,求得 M_3, M_4, ……諸點,若所求最後之點爲 M 時,則 M 謂之 A, B, C, D, ……諸點對於 a, b, c, d, ……整數之平均中心.

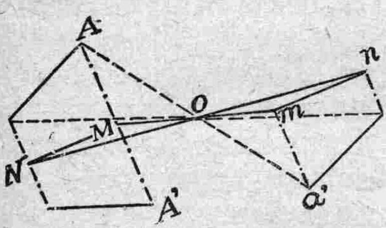
【平均定律】Law of the mean.〔微〕與平均值定理同,見該條.

【平面方向】Plane direction.〔幾〕平面方向者,平面之向之謂也.換言之,與此平面之垂線成直角之直線方向之謂也.

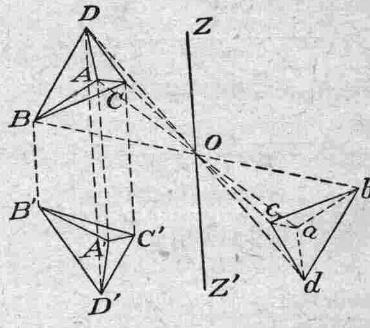
【平面曲線】Plane curve.〔幾〕曲線之各部在同一平面上者之謂,例如圓,雙曲線是也.尋常所稱之曲線,多指平面曲線而言.參閱曲線條.

【平面對稱】Plane symmetry.〔幾〕於一平面之垂線中而在其反對之側等距離

處所取之二點,謂之對於此平面對稱,而一圖形之各點與他圖形之對應點對於此平面如是對稱時, 是等圖形謂之對於此平面對稱.一立體及其幾何像,其對應線及角皆相等然無能疊置者. 又對應之平面及線其傾於對稱之平面之角不等, 且其平面可交於同一線或同一點, 如是之圖形可對置之.換言之,對於一平面對稱之立體可置為對於一點對稱, 而其逆亦眞. 何則,命 A,A′ 為於二立體對應之二點, M 點為 A,A′ 於對稱之平面之公共射影. 故 M 為 AA′ 之中點.以過對稱之平面內任意一點 O 而與之垂直之直線為



軸將 A′ 為其一點之立體迴轉二直角時, 則 M 可至 MO 之延線上 Om=OM 處之 m, 而 A′ 至於過 m 垂直於對稱之平面之線上之 a′。故 ma′, MA′ 相等且同向,而 Aa′ 通過 O, 且二等分於 O. 由是聯第一立體之各點及第二立體在新位置之對應點之直線皆通過 O, 且二等分於 O, 即二立體對於 O 為中心對稱.下圖表 A′B′C′D′ 為 ABCD 對於過 O 且垂直於 AA′ 之平面而對稱之四面體.而 abcd 為 ABCD 對於 O 點對稱之四面體. A′B′C′D′ 及 abcd 皆不能疊置於 ABCD



之上,然 A′B′C′D′ 及 abcd 之一,以垂直於 ABCD 及 A′B′C′D′ 之對稱平面之直線 ZOZ′ 為軸而迴轉二直角, 可疊置於其他之上. 換言之, ABCD 及 A′B′C′D′ 為對於一平面而對稱; A′B′C′D′ 及 abcd 為對於一軸 ZOZ′ 而對稱; abcd 及 ABCD 為對於一點 O 對稱.關於不能疊置而為對稱之立體,例如雙手,人之所熟知也. 雙手掌與掌相對, 一手如他手之像.而將一手迴轉二直角, 聯對應指頭之直線, 交於一點且二等分於此點,故為中心對稱.然雙手不疊置.

【平方不盡根】Qudratic surd. 〔代〕即二次不盡根,見該條.

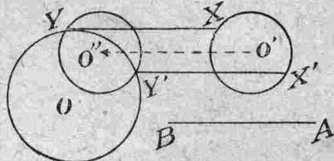
【平行六面體】Parallelopiped 或 Parallelepiped. 〔幾〕六平行四邊形所包圍成之立體之謂也.若各面為矩形,則平行六面體為直角體,若各面為正方形, 則平行六面體為立方體. 平行六面體之

相對面相等，相對之立體角亦相等．若相對面之中心作直線聯之，則諸線交於同一點．含二相對稜之平面分平行六面體為二個等積之三角柱．任意平行六面體之體積等於其底面積乘高．

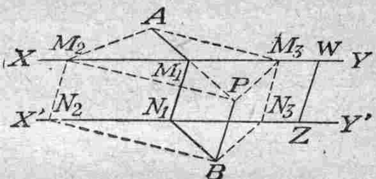
【平行四邊形】Parallelogram.〔幾〕四邊形之每二對邊相等者之謂也，故平行四邊形之對邊相等，相對角亦相等．若平行四邊形之一角為直角，他三角亦必為直角，而平行四邊形為矩形．又若平行四邊形之相鄰二邊相等，則四邊皆相等，而平行四邊形為菱形．若平行四邊形一角為直角，且其相鄰二邊相等，則平行四邊形為正方形．又平行四邊形之兩對角線互二等分，而其逆亦為眞．平行四邊之各對角線分本形為二等分．平行四邊形之面積，等於其底及高所包之矩形．二平行四邊形之底相等，則與其高成比例；高相等，則與其底成比例；底及高皆相等，則二平行四邊形等積．平行四邊形兩對角線上之正方形之和，等於其四邊上正方形之和．

【平行形角柱】Parallelogramic prism.〔幾〕角柱之底為平行四邊形者之謂，故與平行六面體同．

【平行移動法】Method of parallel translation.〔幾〕此法於作圖題中甚為重要，其法可由次二例明瞭之．(1)於二與圓周 O,O′ 間置一直線，使等於且平行於與直線 AB．若 O′ 圓沿平行於 AB 之直線移動 AB 之距離，而至 O″，則 XY 或 X′Y′ 為所求之直線．故逆此法，先畫

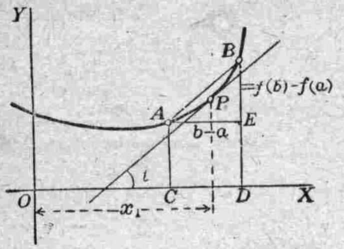


圓 O″，而由 Y 及 Y′ 可作等於且平行於 AB 之直線 YX 及 Y′X′．(2)與二平行線 XY, X′Y′ 且與夾於其間之直線 WZ，及二點 A，B，求聯結 A，B 間之最短折線，且須令其平行線間之部分 MN 平行於 WZ．MN 之任意位置之一，沿 NB 且平行於其位置，使 N 與 B 合，而命其時 M 點之位置為 P，如是則 $AM_1P<AM_2P$，或 AM_3P．故 AM_1N_1B 為所



求之最短折線．由是將此法逆之，先引 BP 與 WZ 相等且平行．聯結 A 及 P 可決定 M_1 點．

【平均値定理】Theorem of mean value.〔微〕有量 Q 而其値表之於次式：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$……(1)，或 $f(b)-f(a)-(b-a)Q=0$……(2)．設 F(x) 為由以 x 置換 b 所成之函數而位之於(2)式之左端，即 $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)Q$……(3)．從(2)式，$F(b)=0$，又



從(3)式，$F(a)=0$；於是由洛爾定理，$F'(x)$ 對於 x 在 a 與 b 之間之至少一值例如 x_1 必為零．微分 (3) 式，得 $F'(x)=f'(x)-Q$．因 $F'(x_1)=0$，故 $f'(x_1)-Q=0$，故 $Q=f'(x_1)$．將 Q 之值代入 (1) 式，得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$，$a<x_1<b$．是謂之平均值定理或平均定律．此定理再依幾何方法解釋之如次：設曲線為函數 $y=f(x)$ 之軌跡．取$OC=a$，$OD=b$，則 $f(a)=CA$，$f(b)=DB$．於是 $AE=b-a$，$EB=f(b)-f(a)$．故弦 AB 之斜率為 $\tan EAB=\dfrac{EB}{AE}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$……(4)．在曲線 A 與 B 之間至少有一點（如 P）其切線（或曲線）平行於弦AB．若P點之橫坐標為x_1，則於P點之斜率為 $\tan t=f'(x_1)=\tan EAB$……(5)．將(4)式與(5)式方程之，得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$，此即平均值定理，亦可書如次之形式：$f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1)$．設 $b=a+\Delta a$，則 $b-a=\Delta a$，且因 x_1 為位於 a 與 b 之間之數，故可寫如 $x_1=a+\theta\cdot\Delta a$，此 θ 為一正適合分數．代入上式，得平均值定理之別一形式：$f(a+\Delta a)-f(a)=\Delta a f'(a+\theta\cdot\Delta a)$，$0<\theta<1$．又將此定理之 $f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_1)$形式擴張之，得 $f(b)=f(a)+\dfrac{b-a}{\lfloor\underline{1}}f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{\lfloor\underline{2}}f''(a)+\dfrac{(b-a)^3}{\lfloor\underline{3}}f'''(a)+\cdots+\dfrac{(b-a)^{n-1}}{\lfloor\underline{n-1}}f^{(n-1)}(a)+\dfrac{(b-a)^n}{\lfloor\underline{n}}f^{(n)}(x_1)$，$a<x_1<b$，稱曰廣義的平均值定理．

【平面三角形】Plane triangle．〔幾〕三邊為直線之三角形之謂，係對於球面三角形而言，然普通皆簡稱為三角形．詳三角形條．

【平面三角法】Plane trigonometry．〔數〕平面三角法者，論三角函數之性質，關係等等，而應用於平面三角形之解法之學科也．詳見三角法條．

【平面直線形】Plane rectillinear figure．〔幾〕三以上直線所包圍之平面形之謂也．

【平面幾何學】Plane geometry．或 Planimetry．〔數〕論在一平面上之圖形之形狀，大小，位置之學科，謂之平面幾何學．

【平方倒數螺線】Lituus．〔幾〕即拐杖螺線，見該條．

【平行四邊形之餘形】Complements of a parallelogram．〔幾〕見餘形條．

必

【必要條件】Necessary condition. 〔數〕數學上常有所謂必要條件及充足條件. 欲某事成立必不可不滿足之條件爲必要條件. 又滿足某條件時,某事必能成立,此條件爲充足條件. 例如於 ab, 若 $a=0$ 則 $ab=0$, 故 $a=0$ 爲 $ab=0$ 之充足條件. 然欲 $ab=0$, 則 $b=0$ 即足,不必 $a=0$, 故此條件非爲必要條件. 又 $ab=0$ 時, 則非 $a=0$ 或 $b=0$ 不可. 故欲 $ab=0$,則 a,b 之一不可不爲零,此條件爲必要條件,而欲 $ab=0$, 則 a,b 之一爲零即足,故此爲必要且充足條件.

【必要且充足條件】Necessary and sufficient condition. 〔數〕見必要條件條.

打

【打】Dozen. 〔算〕計個數之單位, 12 個謂之一打.

未

【未知量】Unknown quantity. 〔數〕數量之值之不知者而後來可決定之者, 謂之未知量.參看未知數條.有時未知量與未知數同意義用之.

【未知數】Unknown number. 〔代〕問題或方程式之未知數者, 其值爲不知而可決定之者之謂也.若於問題,有可決定之未知數之數之與條件時, 則此問題能成立,而解答之數爲有限.若與未知數之數之聯立方程式時,則其值可求得之.若所與聯立方程式之數, 少於其中所含未知數之數,則此等方程式爲不定,而未知數消長變易,即爲變數.未知數通常以二十六字母後部之字母即 x,y,z,u,v,w 表之, 或以 $x_1,x_2,\cdots$; $y_1,y_2,\cdots$; $z_1,z_2,\cdots$; $x',x'',\cdots$; $y',y'',\cdots$; z',z'', 表之.

【未定係數】Indeterminate coefficients. 〔代〕即不定係數,見該條.

【未定乘數法】Method of undetermined multipliers. 〔代〕例如有三方程式

$$ax+by+cz=d \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a'x+b'y+c'z=d' \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$a''x+b''y+c''z=d'' \cdots\cdots\cdots (3)$$

以 λ 乘 (1), 以 μ 乘 (2) 而加於 (3), 得

$$x(\lambda a+\mu a'+a'')+y(\lambda b+\mu b'+b'')+z(\lambda c+\mu c'+c'')=(\lambda d+\mu d'+d'').$$

此對於 λ 及 μ 之不論何值皆爲眞. 取 λ 及 μ 之值,使前方程式內 y 及 x 之係數爲零. 則 $x=\dfrac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}$.

但 λ 及 μ 可由 $\lambda b+\mu b'+b''=0$ 及 $\lambda c+\mu c'+c''=0$ 而求得之.

即 $\dfrac{\lambda}{b'c''-b''c'}=\dfrac{\mu}{b''c-bc''}=\dfrac{1}{bc'-b'c}$.

故 $x=$

$$\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}$$

如是求未知數之值之法, 謂之未定乘數法或貝治阿之法.

於上 x 之值內，a，b，c 及 a'，b'，c' 及 a''，b''，c'' 依輪換次序而變之，可得 y 之值，而再依輪換次序而變之，可得 z 之值．而 x，y，z 之分母皆相同，此分母不為零，則各未知數惟有一有限值．

末

【末項】Last term．〔代〕即一級數或式或方程式之最後之項之謂也．求等差級數或等比級數之末項之法，見各該條．

本

【本金】Capital 或 Principal．〔算〕Capital 爲起始營業所投之資本，而此有將現金之外如地面，器具及其他貨物勞力算入者．又 Principal 爲貸與他人以收利息之金．

【本位弧】Radian．〔三〕即半徑度，見該條，又見弧度法條．

【本利和】Amount．〔算〕即貸金於人，若干年後本金與利息之和之謂也．

【本利合計】Amount．〔算〕即本利和．

【本初子午線】Principal meridian 或 Prime meridian 或 Standard meridian．〔算〕本初子午線爲世界諸文明國之經度起算之根本子午線，而經過英國格林維基 (Greenwich) 天文臺子午儀之中心之子午線之謂也．本初子午線之經度爲零，東經，西經各至一百八十度而止．

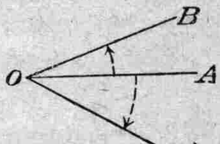
正

【正切】Tangent．〔三〕見三角函數條．

【正比】Direct ratio．〔算〕〔代〕即通常之比，爲對於反比而言．

【正矢】Versed sine．〔三〕某角之正矢者，由 1 減去該角之餘弦之謂，即 $1-\cos A=\text{vers}A$．又見三角函數條．

【正角】Positive angle．〔三〕角之動徑與時計針之方向相反旋轉所生者，謂之正角；動徑與時計針之方向相同旋轉所生者爲負角．如圖 ∠AOB 爲正角，而 ∠AOB′ 爲負角．



【正弦】Sine．〔三〕見三角函數條．

【正根】Positive root．〔代〕方程式之根爲正數者之謂．例如方程式 $x^2+3x-10=0$ 之根爲 2 與 −5，而 2 爲正根．由笛卡兒符號之法則，方程式 $f(x)=0$ 之正根之數，不能多於 $f(x)$ 內符號變化之數．

【正高】Vertical height．〔幾〕即高，係對斜高而言．

【正割】Secant．〔三〕見三角函數條．

【正量】Positive quantity．〔代〕量之前置以＋符號者之謂也．量之前無＋或－符號者，爲略去＋者而爲正量．此量與數同義．故正量與正數同．正量實爲對負量而稱之者．

【正項】Positive term．〔代〕代數式某項前置有＋符號者，則該項謂之正項．但其實非必爲正量，如於 ax^2+bx+c，其第二項爲正項，然若 b 爲正量而 x 爲負

量，則此項實為負量也．又式中之第一項前不置以＋或－號者為＋號之略，而為正項．

【正號】Positive sign．〔代〕卽用以表示正量之＋號也．

【正數】Positive number．〔代〕卽數之前置以符號＋者，見正量條．

【正變】To vary directly．〔代〕一量因他量而正變者，卽前量與後量之比為常數之謂，例如 A 因 B 而正變，卽 $A:B=$ 常數，通常以 $A\propto B$ 示之．

【正方形】Square．〔幾〕等邊等角之四邊形謂之正方形．正方形之各角為一直角卽等於 $90°$，而其對角線相等，且互相垂直二等分．正方形之一邊及對角線之比為 $1:\sqrt{2}$．一邊為線單位之正方形為面積單位．例如一邊為一尺之正方形曰一方尺，一邊為一里之正方形曰一方里．

【正比例】Direct proportion．〔算〕〔代〕一量因他量而變時，前量之任意二值與後量之對應二值謂之成正比例．例如前量為茶之斤數，而後量為其價錢，卽茶 5 斤之價為 3 元 5 角，9 斤之價幾何之謂．此時斤數之比 $5:9$，等於價之比 $35:x$，故 $5:9=35:x$，由是 $x=63$，卽 6 元 3 角也．正比例實卽比例，其所以稱為正比例者，對反比例而言也．普通認為正比例者為 (1)依重量而交易之物品之重量與其價格．(2)依容積而交易之物品之容積與其價格．(3)依長而交易之物品之長與其價格．(4)依個數而交易之物品與其價格．(5)一定時間內所費之糧食與食之之人數．(6)一定時間內所成之工作與作工之人數．(7)一定時間內所進之距離與速度．(8)工作時間與工資．(9)地價與地面之廣．(10)一定期間之貸金之利息及本金．其他可由此類推．反此，普通認為反比例者如次：(1)一定金額所買得物品之重量與其物品之單位重量之價格．(2)一定金額所買得物品之容積與其物品之單位容積之價格．(3)一定金額所買得物品之長與其物品之單位長之價格．(4)一定金額所買得物品之個數與其物品一個之價格．(5)一定糧食所要食之之時間與人數．(6)一定工作所需工作之時間與人數．(7)行一定距離所需之時間與速度．(8)得一定利息所需之時間與其單位時間之利息．(9)一定面積之矩形地面之長與廣．其他可由此類推．

【正角柱】Regular prism．〔幾〕見角柱條．

【正角臺】Regular frustum．〔幾〕平行於正角錐之底面之平面所截得之角臺之謂也．

【正角錐】Regular pyramid．〔幾〕見角錐條．

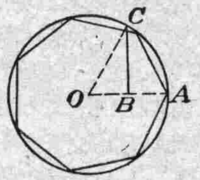
【正函數】Direct function．〔數〕卽直接之函數，對逆函數而言．如三角函數 $y=\sin x$ 為正函數，則逆三角函數 $x=\sin^{-1}y$ 為逆函數，指數函數 $y=a^x$ 為正函數，則對數函數 $x=\log_a y$ 為逆函數．

【正相似】Directly similar．〔幾〕為與逆相似區別，有稱通常之相似為正相似

者.

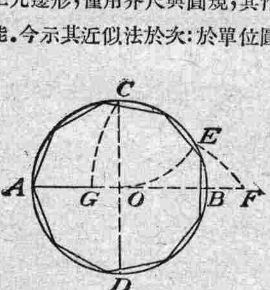
【正射影】Orthogonal projection.〔幾〕見射影條.

【正七邊形】Regular heptagon.〔幾〕等邊等角之七邊形之謂也. 圓內接正七邊形,普通幾何中無確切之作法,今示其近似法於次:作半徑 OA,而平分之於B,於 B 作垂線 BC 交圓周於 C. 則 BC 爲正七邊形之一邊.〔證〕命半徑爲 1,則 BC



$=\sqrt{OC^2-OB^2}=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\fallingdotseq .866$. 而正七邊形之一邊爲 $2\sin\frac{\pi}{7}$ $\fallingdotseq 2\sin 25°43' \fallingdotseq 2\times .4331 \fallingdotseq .8662$. 故BC近似於正七邊形之一邊.

【正九邊形】Regular enneagon.〔幾〕等邊等角之九邊形謂之正九邊形. 圓內接正九邊形,僅用界尺與圓規,其作法爲不能.今示其近似法於次:於單位圓內作

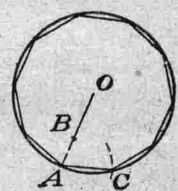


互相垂直之二直徑 AOB,COD. 以 C 爲心, CO 爲半徑畫弧,交圓周於 E. 以 D 爲心, DE 爲半徑作弧,交 AB 於 F. 又以F爲心, CF 爲半徑作弧,交 AB 於 G. 則 AG 爲所求正九邊形之一邊.〔證〕$FG=CF=DF=DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{3}$. $FO=\sqrt{DF^2-OD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$. $\therefore GO=GF-OF=\sqrt{3}-\sqrt{2}\fallingdotseq 1.732-1.4142=.3178$. $\therefore AG=AO-GO=1-.3178=.6822$.而正九邊形之一邊等於 $2\sin 20°=2\times .3420=.6840$. 故 AG 近似於正九邊形之一邊.

【正八面體】Regular octahedron.〔幾〕見正多面體條.

【正八邊形】Regular octagon.〔幾〕等邊等角之八邊形之謂也. 作圓內切正八邊形之法,作互相垂直之二直徑.分圓周爲四等分,復將四相等之弧平分之,聯相鄰之二分點,卽得正八邊形.

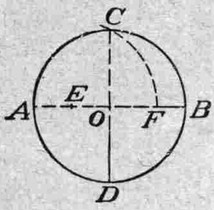
【正十邊形】Regular decagon.〔幾〕等邊等角之十邊形之謂也. 作圓內切正十邊形之法,作半徑 OA,分OA爲外中比,使OA:OB=OB:AB. 以 A 爲心, OB 爲半徑作弧,交圓周於C. 聯 AC, 則 AC 爲正十邊形之一邊.



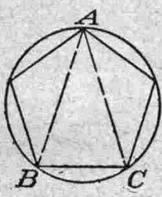
【正三角形】Regular triangle.〔幾〕卽等邊三角形,見等邊三角形條.

【正五邊形】Regular pentagon.〔幾〕等邊等角之五邊形之謂也. 圓內切正五邊形可由聯內切正十邊形之相間角頂而

得之.又可作之如次.過圓心作二互相垂



直之直徑 AOB，COD. 平分 OA 於 E. 以 E 爲心，EC 爲半徑作弧，交 OB 於 F，則 CF 爲所求之正五邊形之一邊.又以一已知線爲一邊之正五角形之法如次. 命 BC 爲已知之邊，作等腰三角形 ABC，使其底角二倍於頂角.作 $\triangle ABC$ 之外接圓. 則 BC

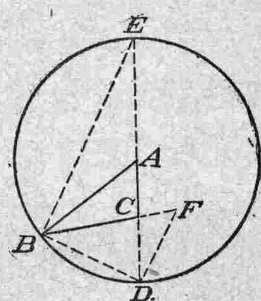


爲此圓之內切正五邊形之一邊. 正五邊形之五對角線亦成一正五邊形.

【正六面體】Regular hexahedron. 〔幾〕與立方體同，見該條又見正多面體條.

【正六邊形】Regular hexagon. 〔幾〕等邊等角之六邊形之謂也. 作圓內切正六邊形之法，於圓周上順次取等於半徑之弦即可，因正六邊形之一邊等於其外接圓之半徑故也.

【正切定則】Law of tangents. 〔三〕由正弦定則 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，故 $\frac{b-c}{b+c}=$ $\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C)}$，故 $\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$；是謂之正切定則.而 $\tan\frac{1}{2}(B+C)=\tan\frac{1}{2}(\pi-A)$ $=\cot\frac{A}{2}$，故得 $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}$ $\cot\frac{A}{2}$.上式又可用幾何學證明之.以 A

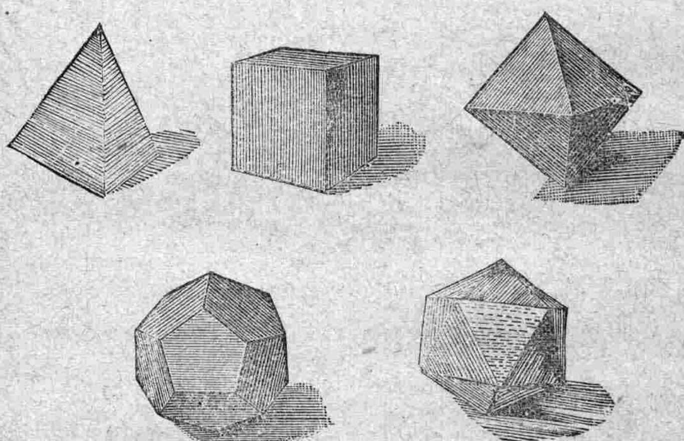


爲心，AB 爲半徑作圓割 AC 於 D 及 E；作 DF ∥ BE，則 CE＝b＋c，DC＝c－b，$\angle DEB=\frac{A}{2}$，$\angle DBF=C+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$ (C－B). 故 $\frac{b+c}{c-b}=\frac{CE}{CD}=\frac{EB}{DF}=$ $\frac{BD\cot\frac{A}{2}}{BD\tan\frac{1}{2}(C-B)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{1}{2}(C-B)}$；故得 $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$.

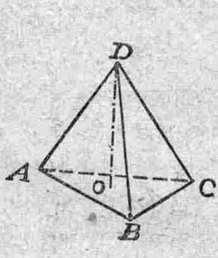
【正四面體】Regular tetrahedron. 〔幾〕見正多面體條.

【正多面體】Regular polyhedron. 〔幾〕正多面體者，多面體之諸面爲相等正多邊形，而其諸多面角亦相等者也.正多正體祇有五種.〔證〕凸多面角至少有

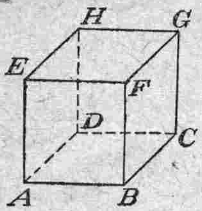
三面，而其諸面角之和必須小於 360°. 正三角形之各角爲 60°，而凸多面角可由三，四，或五正三角形而成. 六正三角形諸角之和爲 360°. 七以上正三角形之角之和大於 360°，故以正三角形爲面之正多面體祇有三種. 次正方形之各角爲 90°，而凸多面角可由三正方形而成，而四以上正方形之角之和等於或大於 360°，故以正方形爲面之正多面體祇有一種. 終正五邊形之各角爲 108°，而凸多面角可由三正五邊形而成，而四以上之正五邊形之角之和大於 360°. 故以正五邊形爲面之正多面體祇有一種. 因正六邊形之三角之和爲 360°，正七邊形之三角之和大於 360°，故無以正六邊形以上爲面之正多面體. 由是正多面體祇有五種. 而此五種正多面體謂之正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體，正二十面體，其形如圖.



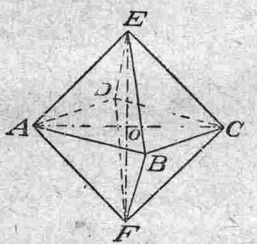
(1)求以AB爲一稜作正四面體. 以AB爲一邊作正三角形ABC，於其中心 O 作



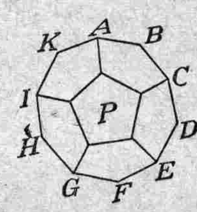
$\triangle ABC$ 之垂線. 於此垂線上取一點 D，使DA=AB，聯 D 與 $\triangle ABC$ 之各頂，則 D-ABC 爲正四面體. 因由作圖，四面爲相等之正三角形，而三面角 A,B,C,D，其諸面角相等，故相等. (2)求以 AB 爲一稜作正六面體. 以AB 爲一邊作正方形 ABCD，於其各邊上作正方形 AF， BG,CH,DE 垂直於平面 ABCD。則多面體 AG 爲正六面體即立方體。因由作圖，

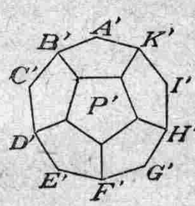


知六面皆爲相等之正方形，而諸三面角因其面角相等，故全相等。(3)求以 AB 爲一稜作正八面體，以 AB 爲一邊作正方形 ABCD，過其中心 O 作其平面之垂線，於此垂線上取 E 點及 F 點，使



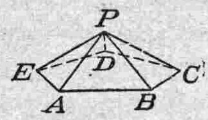
AE，AF 皆等於 AB。聯 E 及 F 於正方形 ABCD 之各頂點，則多面體 E－ABCDF 爲正八面體。因由 E 及 F 至 A，B，C，D 所引諸直線皆等於 AB，故八三角形皆爲相等之正三角形。O 爲 □ABCD 之心，故此正方形之對角線交於 O，直線 EF 及 AC 在同一平面上。故 E，C，F，A 在同一平面上。於 △AEC，△ABC，△AFC，AC 邊爲公共，其他諸邊皆相等，故此等三角形相等，而 ∠ABC 爲直角，故 ∠AEC，∠AFC 亦爲直角。故 AECF 爲等於 ABCD 之正方形。由是角錐 B－AECF 及角錐 E－ABCD，其底 AECF 及 ABCD 相等，他四面亦相等，故全相等。故四面角 B 等於四面角 E。同樣可證其他諸四面角亦相等。故此多面體爲正八面體。(4)求以 AB 爲一稜作正十二面體。以等於所與稜爲一邊作正五邊形 P，其各邊合以五相等之正五邊形之邊，於各角頂成五相等之三面角而成一皿狀之面 ABCD ....。次作等於 P 之正五邊形 P′，於其各邊合以五相等正五邊形之邊，與前同樣又成一皿狀之面 A′B′C′D′......。二皿狀之面皆由六相等正五邊形而成，故於 P 及 P′ 之各角

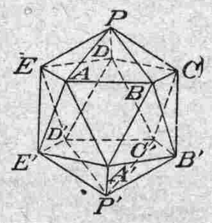




頂之三面角相等。故二面角亦相等，二皿狀之面將其邊與邊相合可成一凸多面體。因將二皿狀面，四面相對置之，頂點 A′ 及邊 A′B′ 與頂點 A 及邊 AB 相合。一皿狀面之二相鄰面角與他皿狀面之一面角相合，可成一三面角。因任意二鄰接之面，曾爲於 P 及 P′ 之角頂所成之三面角之一二面角。故三面角皆相等，而多面體爲正十二面體。(5)求以 AB 爲一稜作正二十面體。以 AB 爲一邊作

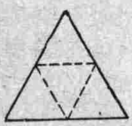
正五邊形 ABCDE，於其中心作其平面之垂線．於此垂線上取一點 P，使 PA＝AB．聯P於五邊形之各頂點．成一以 P 爲頂點之正五角錐．於稜 PA，PB，……之二面角皆相等．次於 A，B，C，D，E，皆加以等於 PAB 之三正三角形完成諸五面角，A，B，C，D，E 之周圍之二面角皆相等．作等於 P－ABCDE 之正五角錐 P′－A′B′C′D′E′，與前凸面相合，成一凸多面體，而此爲正二十面體，



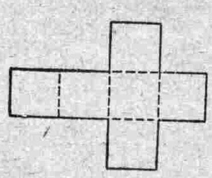


因一凸面之二鄰接面角與他凸面之三鄰接面角相合，可成一正五面角故也．

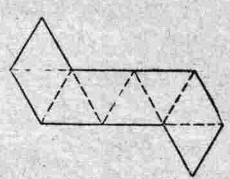
正多面體之模型可作之如次．取厚紙如圖之實線裁下，其虛線則輕割之，而沿此等虛線摺而聯之，即得五種正多面體．



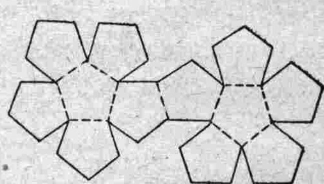
正四面體



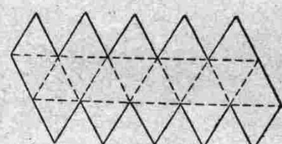
正六面體



正八面體



正十二面體



正二十面體

五種正多面體名爲柏拉頓立體 (Platon bodies) 者，實爲畢達哥拉斯一派人所專心研究，後以柏拉頓學校教授之，故名．五種正多面體中之三簡單者，即正四面體，正六面體，正八面體，結晶學中，屢用之．

【正多邊形】Regular polygon.〔幾〕

正多邊形者，等邊等角之多邊形之謂也．因其邊數爲 3，4，5，……而稱之爲正三角形，正四邊形(正方形)，正五邊形，…….

設正多邊形之邊數爲n，其一邊之長爲l，

面積爲 A，外接圓之半徑爲 R，內切圓之半徑爲 r，則 $l=2R\sin\frac{\pi}{n}=2r\tan\frac{\pi}{n}$，$A=\frac{1}{4}nl^2\cot\frac{\pi}{n}$. 用此等公式自正三角形始至正十二邊形之計算如次。

第一表　正多邊形一邊之長等於 1

邊數	外接圓之半徑	內切圓之半徑	面積
3	0.5773503	0.2886751	0.4330127
4	0.7071068	0.5000000	1.0000000
5	0.8506508	0.6881910	1.7204774
6	1.0000000	0.8660254	2.5980762
7	1.1523825	1.0382617	3.6339124
8	1.3065630	1.2071068	4.8284271
9	1.4619022	1.3737387	6.1818242
10	1.6180340	1.5388418	7.6942088
11	1.7747329	1.7028437	9.3656404
12	1.9318516	1.8660254	11.1961524

第二表　外接圓之半徑等於 1

邊數	邊之長	內切圓之半徑	面積
3	1.7320508	0.5000000	1.2990381
4	1.4142136	0.7071068	2.0000000
5	1.1755705	0.8090170	2.3776412
6	1.0000000	0.8660254	2.5980762
7	0.8677674	0.9009689	2.7364102
8	0.7653668	0.9238795	2.8284271
9	0.6840403	0.9396926	2.8925437
10	0.6180340	0.9510565	2.9389263
11	0.5634651	0.9594931	2.9735250
12	0.5176381	0.9659259	3.0000000

第三表　內切圓之半徑等於 1

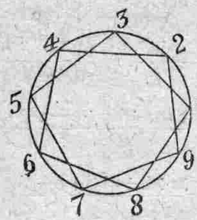
邊數	邊之長	外接圓之半徑	面積
3	3.4641016	2.0000000	5.1961524
4	2.0000000	1.4142136	4.0000000
5	1.4530851	1.2360680	3.6327128
6	1.1547005	1.1547005	3.4641016
7	0.9631491	1.1099160	3.3710222
8	0.8284271	1.0823919	3.3137084
9	0.7279405	1.0641776	3.2757315
10	0.6498394	1.0514622	3.2491970
11	0.5872521	1.0422172	3.2293913
12	0.5358934	1.0352760	3.2153904

第四表　面積等於 1 平方單位

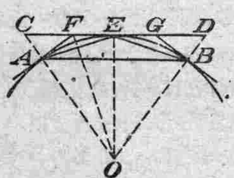
邊數	邊之長	外接圓之半徑	內切圓之半徑
3	1.5196716	0.8773827	0.4386912
4	1.0000000	0.7071068	0.5000000
5	0.7623870	0.6485251	0.5246678
6	0.6204033	0.6204033	0.5372849
7	0.5245813	0.6045183	0.5446520
8	0.4550899	0.5946034	0.5493420
9	0.4021996	0.5879764	0.5525172
11	0.3605106	0.5833184	0.5547687
11	0.3267617	0.5799148	0.5564242
12	0.2988585	0.5773503	0.5576775

若與邊之長，內切圓或外接圓之與半徑，或與面積不等於 1 時，依"相似多邊形相當線成比例，及面積與相當線之平方成比例"之原理，可用此等之表。例如作面積爲225之正七邊形。先取 225之平方根得 15，於是以此乘第四表內對 7 之各數

即可，即 $l=0.5245813\times15\doteqdot7.8687$，是爲一邊之長；又 $R=0.6045183\times15\doteqdot9.0678$，是爲外接圓之半徑；又 $r=0.5446520\times15\doteqdot8.1698$，是爲內切圓之半徑．其他諸表之用法準此．以上所述爲就正多邊形之邊不交截者而言．即邊之交截之正多邊形(即正多邊形之普通定義)除外．例如分圓周爲九等分，命其分點依次爲 1,2,3,…，8,9；聯結 1 及 3,3 及 5,5 及 7,7 及 9,9 及 2,… 得等邊等角之九邊形，即屬於普通定義之正九邊形．



與內接於圓之 n 邊正多邊形之周圍及外切於同圓之 n 邊正多邊形之周圍，計算內接及外切於同圓之 2n 邊正多邊形之周圍．命 n 邊之內接正多邊形之邊爲 AB，弧 AB 之中點 E 之切線 CD 爲與前多邊形相似之外切正多邊形之一邊．聯 AE，於 A 及 B 作切線 AF 及 BG，則 AE 爲 2n 邊之內接正多

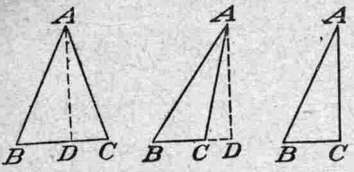


邊形之一邊．FG爲2n邊之外切正多邊形之一邊．命 n 邊之內接正多邊形之周圍爲 p，n 邊之外切正多邊形之周圍爲 P，2n 邊之內接正多邊形之周圍爲 p' 及 2n 邊之外切正多邊形之周圍爲 P'．$\frac{P}{p}=\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OE}$，而 OF 二等分 COE 角，故 $\frac{OC}{OE}=\frac{CF}{FE}$，故 $\frac{P}{p}=\frac{CF}{FE}$．故 $\frac{P+p}{2p}=\frac{CF+FE}{2FE}=\frac{CE}{FG}$．但FG 爲周圍爲 P' 之正多角形之一邊，而 CE 之含於 P 內猶 FG 之含於 P' 內，故 $\frac{CE}{FG}=\frac{P}{P'}$，

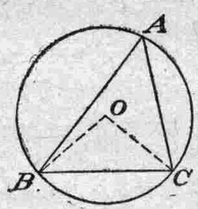
$$\therefore\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}，由是\ P'=\frac{2Pp}{P+p}\cdots(1).$$

又直角三角形 AEH 及 EFN，其銳角 EAH，FEN 相等，故爲相似，由是 $\frac{AH}{AE}=\frac{EN}{EF}$．而 p 及 p' 內含 AH 及 AE 之數相同，故 $\frac{AH}{AE}=\frac{p}{p'}$；而 p' 及 P' 內含 EN 及 EF 之數相同，故 $\frac{EN}{EF}=\frac{p'}{P'}$，故 $\frac{p}{p'}=\frac{p'}{P'}$，由是 $p'=\sqrt{p\times P'}\cdots\cdots(2)$

【正弦定則】Law of sines．〔三〕任何三角形之邊與其對角之正弦成比例．此謂之正弦定則．以式表之如次，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$．〔證〕命 ABC 爲任意三角形，由 A 至 BC 作垂線 AD，若 BCA 爲銳角(圖1)，則 $AD=AB\sin B$，$AD=AC\sin C$；故 $AB\sin B=AC\sin C$．若 C 爲鈍角(圖2)，則 $AD=AB\sin B$，$AD=AC$



$\sin ACD = AC\sin(180^\circ - C) = AC\sin C$; 故 $AB\sin B = AC\sin C$. 若 C 爲直角(圖3), 則 $AC = AB\sin B$, 即 $AC\sin C = AB\sin B$. 故無論何時,常得 $AC/\sin B = AB/\sin C$,即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 同樣可證 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. 故 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 又此各比等於 2R, 而 R 爲 △ABC 之外半徑. 〔證〕命 O 爲 △ABC 之外心, 聯 BO, CO. 則 $BC = 2R\sin\frac{BOC}{2} = 2R\sin A$, 因圓周角等於圓心角之半故也; $\therefore a = 2R\sin A$. 同樣 $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. 故 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. 正弦定則可由 $a = b\cos C + c\cos B$ 誘得之. 因 $a = b\cos C + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, 即 $a - b\cos C - c\cos B = 0$, $-a\cos C + b - c\cos A = 0$; 用十字乘法得 $\frac{a}{\cos C\cos A + \cos B}$



$= \frac{b}{\cos B\cos C + \cos A} = \frac{c}{1 - \cos^2 C}$; 故 $\frac{a}{\sin A\sin C} = \frac{b}{\sin B\sin C} = \frac{c}{\sin^2 C}$,即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

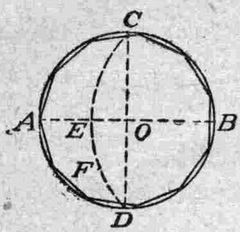
正弦定則又可由餘弦定則而誘得之. 因 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 故 $\sin^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$;

是即 $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ 等於對稱函數 $\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2b^2c^2}$;

故 $\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$; 由是即可得正弦定則.

【正二十面體】Regular icosahedron.
〔幾〕見正多面體條.

【正十一邊形】Regular undecagon.
〔幾〕等邊等角之十一邊形, 謂之正十一邊形. 圓內接正十一邊形, 僅用界尺及圓規,其作法爲不能. 茲示其近似法於次: 於單位圓內作二直交之直徑 AOB, COD. 以 B 爲心, BC 爲半徑作弧交 AB 於 E. 二等分弧 ED 於 F, 則 EF 爲所求正十一邊形之一邊. 〔證〕因 $BC = BE = BF = \sqrt{2}$. $\therefore \angle EBF = \frac{1}{2}\angle EBD$

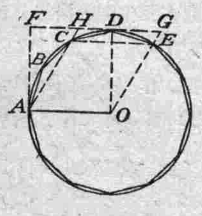


$=\frac{1}{4}\angle R=22°30'$.　$\therefore EF=2BE\sin 11°15'=2\sqrt{2}\sin 11°15' \fallingdotseq 2\times 1.4142\times .1951 \fallingdotseq .55182$.而正十一邊形之一邊等於 $2\sin 16°22'=2\times .28178=.56356$.故EF近似於正十一邊形之一邊.

【正十二面體】Regular dodecahedron.〔幾〕見正多面體條.

【正十二邊形】Regular dodecagon.〔幾〕等邊等角之十二邊形，謂之正十二邊形．二等分正六邊形之一邊所乘之弧則可得正十二邊形．

圓之內接正十二邊形之面積，等於半徑上之正方形之三倍．命 AB, BC, CD, DE 爲內接正十二邊形之鄰接之四邊，引半徑 OA, OE，則 OABCDE 爲十二邊形之三分之一．引半徑 OD,於 A 及 D 引切線 AF 及 FDG．聯結 AC, OE，引長之，交切線 FG 於 H 及 G．因 ∠AOD 爲直角，故AD 爲半徑上之正方形．AC, CE 爲內接六邊形之邊，各皆等於半徑，故 OACE 爲平行四邊形．由是 GOAH, GECH 亦爲平行四邊形．又 $\triangle BAC=\triangle DCE$．而 $\triangle DCE=\frac{1}{2}$ ▱CG，故 $\triangle BAC+\triangle DCE=$ ▱CG．兩邊各加 ▱AE，則圖形 OABCDE 等於 ▱AG．然平行四邊形 AG 等於正方形 AD．故正十二邊形之三分之一，即圖形 OABCDE，等於正方形 AD，即半徑上之正方形．由是正十二邊形之面積，等於半徑上之正方形之三倍．

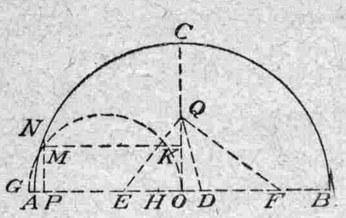


【正十七邊形】Regular polygon of 17 sides.〔幾〕等邊等角之十七邊形，謂之正十七邊形．圓內接正十七邊形，僅用界尺及兩脚規可作得之．命內接於單位圓之正十七邊形之一邊爲 a，則 $a=2\sin\frac{\pi}{17}$ 而可求得 $a^2=\frac{1}{8}\{17-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}})}\}$（見武昌高等師範數理雜誌第四期）．

茲示內接正十七邊形之作法如次：

〔第一法〕作半徑 CO 垂直於直徑 AB．於 OC, OB 上各取 Q, D 點，令 OQ 等於半徑之 $\frac{1}{2}$，OD等於半徑之 $\frac{1}{8}$．次於 OA,OB 上各取 E, F 點，令 DE=DF=DG．又於 OA 上取 G, H 點，令 EG=EQ, FH=FQ．更於 OC 上取 K 點，令 OK 爲 OQ, OH 之比例中項．過 K 點作 KM 平行於 AB，交以 OG 爲直

徑之圓周於 M. 過 M 作 MP 平行於 CO 與圓交於 N. 則 AN 弧等於與圓之十



七分之一. 〔證〕設半徑爲 1, 則 $OQ=\frac{1}{2}$, $OD=\frac{1}{8}$. $DE=DF=DQ=\sqrt{OQ^2+OD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}\sqrt{17}$. $EG=EQ=\sqrt{OQ^2+OE^2}=\sqrt{OQ^2+(DE-OD)^2}=\frac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$.

$FH=FQ=\sqrt{OQ^2+OF^2}=\sqrt{OQ^2+(OD+DF)^2}=\frac{1}{8}\sqrt{34+2\sqrt{17}}$. $OK^2=OQ\cdot OH=OQ(FH-OD-DF)=\frac{1}{16}\{\sqrt{34+2\sqrt{17}}-(\sqrt{17}+1)\}$.

$OG=OE+EG=DE-OD+EG=\frac{1}{8}\{\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(\sqrt{17}-1)\}$.

$OP+GP=OG=\frac{1}{8}\{\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(\sqrt{17}-1)\}$. $OP\cdot GP=MP^2=OK^2=\frac{1}{16}\{\sqrt{34+2\sqrt{17}}-(\sqrt{17}+1)\}$.

作以 OP, GP 爲根之方程式, 則得

$$x^2-\frac{1}{8}\{\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(\sqrt{17}-1)\}x+\frac{1}{16}\{\sqrt{34+2\sqrt{17}}-(\sqrt{17}+1)\}=0.$$

而 OP 大於 GP, 卽 OP 爲二根之大者, 故

$$OP=\frac{1}{16}\{\sqrt{34-2\sqrt{17}}+(\sqrt{17}-1)+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\}\cdots(1)$$

故 $AN^2=AP^2+PN^2=(OA-OP)^2+(ON^2-OP^2)=(1-OP)^2+(1-OP^2)=2(1-OP)$.

以(1)式 OP 之值代入之, 則

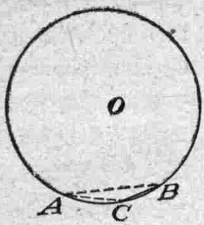
$$AN^2=\frac{1}{8}\{17-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\}.$$

故AN爲內接正十七邊形之一邊. 此作圖法爲 Lowry 之法. 此外尙有他作圖法, 見武昌高等師範數理雜誌第四期, 及林鶴一所著之初等幾何學作圖不能問題.

【正十五邊形】Regular pentedecagon. 等邊等角之十五邊形, 謂之正十五邊形. 作圓內接正十五邊形之法如次: 設 O 爲已知圓. 作 AB 等於此圓之半徑. 作 AC 等於內切正十邊形之一邊, 作 CB, 則 CB 爲所求正十五邊形之一邊. 〔證〕因弧 AB 爲圓周之 $\frac{1}{6}$, 又弧 AC 爲圓周之 $\frac{1}{10}$. 故弧 CB 爲圓周之 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ 卽 $\frac{1}{15}$, 而弦 CB 爲內接正十五

邊形之一邊.

分全圓周爲等於弧 CB 之弧,作此等弧之弦,則得所求之內接正十五邊形.又逐次二等分



CB 諸弧,可作內接正三十邊形,六十邊形,百二十邊形等等.

【正三角函數】Direct trigonometrical function. 〔三〕普通之三角函數 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, 等等謂之正三角函數,乃對於逆三角函數 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, 等而言也.

【正布洛喀點】〔幾〕見布洛喀點條.

母

【母圓】Generating circle. 〔幾〕各種旋輪線皆由動圓平面上一定點隨動圓之旋轉而成, 此旋轉之動圓無論其爲切於定直線或切於定圓之內或外,概稱曰母圓,或稱母輪.參閱旋輪線條.

【母數】〔算〕見百分法條.

【母線】Generating line 或 Generatrix 或 Generator. 〔幾〕某線依某條件運動而生面時,該線稱爲此面之母線.例如一直線恆過一曲線且平行於一直線而運動,則所生之面爲柱曲面.若此曲線爲圓,則所生之面爲圓柱.而前直線爲母線.又若半圓周以其徑爲軸而迴轉之,則所生之面爲球面,而半圓周爲母線.又母線所過之曲線, 謂之母曲線或準線.

【母點】Generating point. 〔幾〕母圓平面上一定點隨母圓之旋轉而生旋輪線,此定點無論其在母圓之周上, 或周內或周外,概稱曰母點.參閱旋輪線條.

【母曲線】Generating curve. 〔幾〕見母線條.

【母函數】Generating function. 〔代〕見循環級數條.

永

【永久年金】Perpetual annuity 或 Perpetuity. 〔算〕〔代〕年金之永久連續者,謂之永久年金.而其現價爲年金額 a 以利率 r 除之,即 $\frac{a}{r}$ 是也.

生

【生數】Factor. 〔算〕〔代〕即因數,見該條.

【生命年金】Life annuity. 〔算〕〔代〕亦稱終身年金,見該條.

【生命保險】Life assurance 或 Life insurance. 〔算〕即人壽保險.

矛

【矛盾】Inconsistent. 〔代〕若二以上方程式無共通之解答,謂之矛盾. 例如 $ax+b=0$, 及 $a'x+b'=0$, 非 $ab'-a'b=0$, 則無共通之解答,即爲矛盾也. 又欲 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $a''x+b''y+c''=0$ 不矛盾, 必須 $a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$.

立

【立方】Cube.〔算〕〔代〕某數之立方卽其三乘冪之謂也.例如 a 之立方爲 a^3.

【立突】Litre 或 Liter.〔算〕立突爲米突制中容積之基本單位.而一立突爲一立方粉之容積,合我國舊制部尺 30.5176 立方寸,0.9657 升.一立突之十倍曰竍(decalitre),百倍曰竡(hectolitre),千倍曰竏(kilolitre),又一立突之十分之一曰竕(decilitre),百分之一曰竰(Centilitre),千分之一曰竓(Millilitre),皆以十進.立突係舊譯名,自我國加入萬國度量衡同盟會後,命爲公升(竔).

【立體】Solid.〔幾〕立體者,指空間之有限一部而言.換言之,立體有長、廣及厚.空間爲無限大,以平行二平面分之,其平面與平面間之空間之部分,原爲有限,長及廣爲無限大,由是此二平面間之空間之部分亦爲無限大,而無如斯之立體,立體者,空間之有限部分之謂也.

【立方根】Cube root.〔算〕〔代〕某數之立方根,卽其立方等於某數之數之謂也.例如 $8=2^3$,故 8 之立方根爲 2,而以 $\sqrt[3]{8}=2$ 記之,普通 a 之立方根記爲 $\sqrt[3]{a}$.

【立方數】Cube number.〔代〕數之爲他數之立方者之謂也. 例如 1,8,27,64,……是也.各立方數爲 $7m$ 或 $7m\pm1$.因各根數爲 $7m$,$7m\pm1$,$7m\pm2$,或 $7m\pm3$;故其立方數爲 $(7m)^3=7m$,

$(7m\pm1)^3=(7m)^3\pm3(7m)^2+3(7m)\pm1=7m\pm1$,

$(7m\pm2)^3=7m\pm2^3=7m\pm7\pm1=7m\pm1$,

$(7m\pm3)^3=7m\pm3^3=7m\pm28\mp1=7m\mp1$,

又各立方數爲 $9m$ 或 $9m\pm1$.因各數爲 $3m$ 或 $3m\pm1$,故其立方爲 $(3m)^3=27m=9m$,

$(3m\pm1)^3=(3m)^3\pm3(3m)^2+3(3m)\pm1=9m\pm1$.

【立方體】Cube.〔幾〕六相等正方形所圍成之立體,謂之立方體,又稱正六面體.各稜爲線單位之立方體爲測體積之單位,如立方寸,立方丈是也.而任意立方體之體積(所含立方單位之數)等於其一稜(以對應之線單位測之之數)之立方.

【立體角】Solid angle.〔幾〕與多面角同,見該條.

【立方不盡根】Cubic surd.〔代〕根指數爲 3 之不盡根,謂之立方不盡根或三次不盡根,如 $\sqrt[3]{4}$,$\sqrt[3]{x}$ 是也.

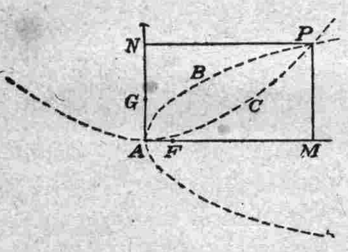
【立方拋物線】Cubical parabola.〔幾〕方程式 $y=ax^3$ 之曲線,名立方拋物線.圖見曲線條.

【立體幾何學】Solid geometry. 或 Geometry of space 或 Stereometry.〔數〕立體幾何學者,論空間之點,直線,角,曲線,平面,曲面,及其集合之圖形之學科也.若上述之曲線僅限於圓,則稱爲初等立體幾何學.

【立方倍積問題】The duplication of a cube.〔幾〕立方倍積問題爲幾何

學三大問題之一，即求有與立方體之二倍體積相等之立方體之一邊也.若以a表與立方體之一邊，x 表所求立方體之一邊,則此問題歸於方程式 $x^3=2a^3$ 之解法,而此問題可變形之如次:——於一直線之長與其二倍之長之間插入二比例中項.今於立方倍積問題,以 a 表與立方體一邊之長,於 a 及 2a 間插入二比例中項,則得 $a:x=x:y=y:2a$, 故 $x^2=ay$, $xy=2a^2$. 此二式相乘得 $x^3=2a^3$. 故所插入二比例中項中之前者卽相當於所求立方體一邊之長. 今示其用曲線之解法如次,

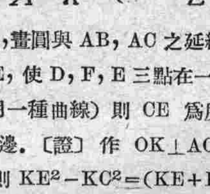
〔第一〕用二拋物線之法.作有互成直角之軸且有公共頂點之二拋物線，命其一爲 ABP，他一爲 ACP. 命公共頂點爲 A 而軸各爲 AM, AN; ∠MAN 爲直



角. 又命二拋物線之交點爲 P. 使拋物線 ABP 之頂點與焦點之距離 AF 等於與立方體之一邊之四分之一，拋物線 ACP 之頂點與焦點之距離 AG 等於其二分之一. 由 P 至拋物線 ABP 之軸 AM 作垂線 PM. 卽爲所求之長. 〔證〕由 P 至軸 AN 作垂線 PN，則 $PM^2=4AF\cdot AM$, $PN^2=4AG\cdot AN$. 然 $PM=AN$, $PN=AM$. 故 $PM^4=4^2AF^2\cdot AM^2=4^2AF^2\cdot 4AG\cdot AN=4^3AF^2\cdot AG\cdot PM$. 故 $PM^3=4^3AF^2\cdot AG=2(4AF)^3=2a^3$.

〔第二〕用拋物線與雙曲線之法. 作有等於與立方體之一邊之通徑之拋物線. 以此拋物線之軸與其頂點之切線爲漸近線，作其實軸等於與立方體之一邊之四倍之長之雙曲線. 由此二曲線之交點至拋物線之軸所作垂線之長，卽爲所求之立方體之一邊. 其證明與前同様，故省略.

〔第三〕阿基米得之法.作矩形 ABFC，使其相鄰二邊 AB 及 AC 各等於與立方體之一邊及其二倍. 以此矩形之交點



O 爲心，畫圓與 AB, AC 之延線各交於 D, 及 E, 使 D, F, E 三點在一直線上，(此時用一種曲線) 則 CE 爲所求立方體之一邊. 〔證〕作 $OK\perp AC$, $OL\perp AB$, 則 $KE^2-KC^2=(KE+KC)(KE-KC)=AE\cdot CE$. 故 $AE\cdot CE+KC^2=KE^2$. 兩邊加 OK^2, 則 $AE\cdot EC+OC^2=OE^2$. 同様 $AD\cdot BD+OB^2=OD^2$. 但 $OC=OB$, $OE=OD$. 故 $AE\cdot CE=AD\cdot BD$. 故 $AE:AD=BD:CE$.

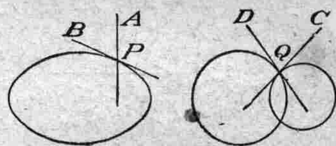
然又 AE:AD=CE:CF=BF:BD. 故 BF:BD=BD:CE=CE:CF; 卽 AB:CE=CE:BD=BD:AC. 此外尙有他法,見北京高等師範數理雜誌三卷一號.

六畫

交

【交】To intersect.〔幾〕線與線,線與面,面與面相截之謂也.例如線與線之交爲點,線與面之交亦爲點,平面與平面之交爲直線,平面與球面之交爲圓,平面與曲線之交爲曲線.

【交角】Angle of intersection.〔幾〕直線與直線,直線與曲線,或曲線與曲線相交之角之謂.但於曲線一點之方向,以占該點之切線定之,故直線與切線間之角,卽直線與在其交點曲線之切線間之角之謂,而切線與切線間之角,卽於其交點二曲線之二切線間之角之謂也.如圖直線



與橢圓之交角爲 APB, 二圓之交角爲 CQD.

【交線】Line of intersection.〔幾〕平面與平面,平面與曲面,或曲面與曲面相交之線之謂也.但平面與平面之交線爲直線,平面與曲面之交線爲曲線,曲面與曲面之交線亦爲曲線.

【交點】Point of intersection.〔幾〕直線與直線,直線與曲線,或曲線與曲線相交之點之謂也.又於立體幾何學中,線與面相交之點,亦謂之交點.

【交代式】Alternating expression.

〔代〕含若干字母之式,於其中交換任何二字母,惟變其符號之式,稱爲此等字母之交代式.例如於 (b-c)(c-a)(a-b) 式,交換 a 及 b 時,則得 (a-c)(c-b)(b-a),即 -(b-c)(c-a)(a-b),故 (b-c)(c-a)(a-b) 爲 a 及 b 之交代式.又同樣 b 及 c, c 及 a, 可得絕對值相等,符號相反之式.故 (b-c)(c-a)(a-b) 爲 a, b, c 之交代式,交代式有次之性質:(1)交代式與對稱式之積爲交代式.(2)交代式與對稱式之二商爲交代式.(3)交代式及交代式之積或商爲對稱式.(4)偶數個交代式之連乘積爲對稱式.(5)奇數個交代式之連乘積爲交代式.(6)若干字母之交代式,若此等字母中任何二者相等,則交代式爲零.(7)若干字母之交代式,若此等字母中任何二者之差能整除者,則其各差之連乘積能整除之.

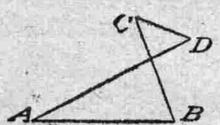
【交叉乘法】Cross multiplication.

〔代〕即十字乘法,見該條.

【交換定則】Commutative law.〔數〕見基本定則條.

【交截四邊形】Cross quadrilateral.

〔幾〕二邊交截之四邊形,謂之交截四邊形.如圖 ABCD 是也.



仰

【仰角】Angle of elevation.〔三〕垂直角之一邊在水平面上而他邊向上者,謂之仰角.

任

【任意常量】〔數〕與任意常數同.

【任意常數】Arbitrary constant.

〔數〕凡用文字所表之常數而可以適宜之定數代其值者,謂之任意常數,爲與絕對常數相對之稱.例如圓方程式 $x^2+y^2=r^2$, r 即任意常數,因其代以 0 與 ∞ 間之任意值而無不合理也.

兆

【兆】〔算〕數名,有以百萬爲兆者,即 1000000 是也,有以萬萬萬爲兆者,即 1000000000000 是也.參閱命數法條.

仝

【仝等】Identically equal 或 Congruent.〔幾〕當一形可置於他形上而適重合者,謂之仝等.二形仝等時,則其相當部分各相等,而其面積亦等.

【仝面積】Total area.〔幾〕錐體,柱體,角臺,或柱臺之側面積與其底面積之和爲仝面積.

【仝等形】Congruent figures.〔幾〕仝等形者,面積,形狀仝相等之形之謂也.

【仝等量】Congruent quantity.〔幾〕相等量之爲仝等形者之謂也.參閱等值

量條.

【全微分】Total differential. 〔微〕於 $u=f(x,y)$ 之 x 與 y 同時變化之時，其及於 u 之變化之微分，名全微分. u 之關於 x 之全微分係數爲 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$，以 dx 乘此式之兩邊，得 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$，此 du 謂之 u 之全微分，而 $\frac{\partial u}{\partial x}dx$，$\frac{\partial u}{\partial y}dy$ 謂之偏微分. 參閱全微分係數條.

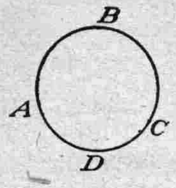
【全微分係數】Total differential coefficient. 〔微〕於 $u=f(x,y)$，設其自變數 x,y 同時變化，則 $u+\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)$，$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$，$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$. 令 Δy，Δx 同時接近於極限零，則 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$，此 $\frac{du}{dx}$ 爲別於 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 等偏微分係數，名曰 u 關於 x 之全微分係數. 同様於 $u=f(x,y,z)$，則 u 關於 x 之全微分係數爲 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$. 若 $u=f(x,y)$ 及 $u=f(x,y,z)$ 之變數 x，y，z 均爲變數 t 之函數，則 u 關於 t 之全微分係數爲 $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ 及 $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$. 茲舉一實例如次：一圓錐之高爲100吋，依每秒10吋之率而減；底之半徑爲50吋，依每秒 5 吋之率而增. 求體積變化之率. 設底之半徑爲 x，高爲 y，體積爲 u，則 $u=\frac{1}{3}\pi x^2y$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2}{3}\pi xy$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{3}\pi x^2$. 代入上式，得 $\frac{du}{dt}=\frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt}+\frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}$. 但 $x=50$，$y=100$，$\frac{dx}{dt}=5$，$\frac{dy}{dt}=-10$. 故 $\frac{du}{dt}=\frac{2}{3}\pi\cdot5000\cdot5-\frac{1}{3}\pi\cdot2500\cdot10=15.15$ 立方呎，即體積依每秒 15.15 立方呎之率增加.

共

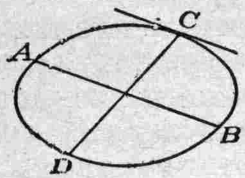
【共軛角】Coujugate angles. 〔幾〕二角合成四直角者，則此二角互爲共軛角. 見角條.

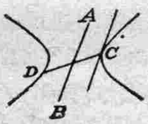
【共軛弧】Conjugate arcs. 〔幾〕圓之二弧合成一全圓周者，則此二弧互爲共軛弧. 其大者謂之優弧或優共軛弧，如圖

ABC 弧是也；其小者謂之劣弧或劣共軛弧，如圖 ADC 弧是也。



【共軛徑】Conjugate diameters.〔幾〕曲線(例如楕圓或雙曲線)之一徑 AB 平

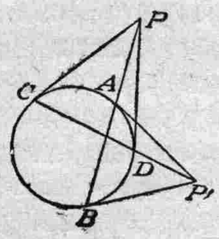




行於他徑 CD 之端 C 之切線時，AB,CD 二徑互爲共軛.

【共軛軸】Conjugate axis.〔幾〕見雙曲線條.

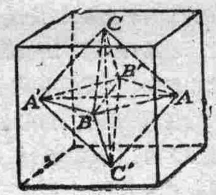
【共軛線】Conjugate lines.〔幾〕任意二直線，若各線過他線對於一曲線之極



點，則此二線謂之對於該曲線之共軛線。如圖直線 AB 過直線 CD 對於圓之極點 P′，而 CD 過 AB 之極點 P，故 AB,CD 爲共軛線.

【共軛點】Conjugate points.〔幾〕任意二點，若各點在他點之極線上，則此二點謂之共軛點.如前圖 P 點在 P′ 點之極線 CD 上，而 P′ 點在 P 點之極線 AB 上，故 P，P′ 爲共軛點.又見非調和比條.

【共軛體】Conjugate solids.〔幾〕於多面體之各面各取一點，一立體角之周圍之面上所取各點同在一平面上．以是等之點爲立體角之頂之多面體，與前之多面體其稜數相同，又前多面體之面數，與後多面體之頂點之數相同，前多面體之頂點之數，與後多面體之面數相同.此由歐拉 (Euler) 定理 $F+V=E+2$ 甚明.如斯稜數相等面數與立體角之數彼此交換之二多面體，謂之共軛.例如於立方體



各面之中心取 A，A′，B，B′，C，C′，以之爲角頂作一多面體，得正八面體，故立方體與正八面體互爲共軛．同樣正十二面體與正二十面體互爲共軛，又四面體之共軛體亦爲一四面體.

【共軸圓】Co-axal circles.〔幾〕卽同

軸圓，見該條。

【共圓點】Concyclic points.〔幾〕四以上之點在同一圓周上者之謂也．例如於九點圓，九點在同一圓周上；於布洛喀(Brocard)圓，七點在同一圓周上；於三乘比圓，餘弦圓，泰羅(Taylor)圓，塔刻(Tucker)圓，各有六點在同一圓周上．

【共線性】Collinearity.〔幾〕三以上之點在同一直線上之謂也． X, Y, Z 爲 $\triangle ABC$ 之邊 BC, CA, AB (或延線)上之點，若 X, Y, Z 爲共線，則 $\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}=-1$.

【共線點】Collinear points.〔幾〕三以上之點在同一直線上者之謂也．共線點之最普通者如次：(1)一三角形之各角之外二等分線交對邊之延長線之三點．(2)三角形二角之內二等分線，及第三角之外二等分線交對邊(或延長線)之三點．(3)於三角形之各邊(或延長線)上取一點之三點爲共線時，則於其邊上，由其邊之中點與此等點等距離所取之三點．(4)由任意一點取三角形之各頂點之三直線間之角，二內二等分線，一外二等分線與對邊之交點．(5)由三角形之外接圓周上任意一點至三邊(或延線)之垂線之足(即西摩孫線)．(6)於外接圓上三頂點之切線與三邊之交點．(7)三角之外心，重心，垂心，九點圓心．

【共點性】Concurrency.〔幾〕三以上之直線交於同一點之謂也． X, Y, Z 爲 $\triangle ABC$ 之邊 BC, CA, AB 上之點，若 AX, BY, CZ 爲共點，則 $\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{AY}=1$.又如 X, Y, Z 爲 $\triangle ABC$ 之邊 BC, CA, AB 上之點，若過 X, Y, Z 之垂線爲共點，則 $(BX^2-CX^2)(CY^2-AY^2)(AZ^2-BZ^2)=0$.

【共點線】Concurrent lines.〔幾〕三以上直線交於同一點者之謂也．其最普通者如次：(1)三角形三邊之中垂線．(2)三角形之三高．(3)三角形之三中線．(4)三角形之各角之內二等分線．或二角之外二等分線及第三角之內二等分線．(5)於三角形之各邊上三傍切圓之切點所作之垂線．(6)二傍切圓於過同角頂二邊上之切點及該角頂之對邊與內切圓之切點所作之垂線．(7)於兩兩相切之三圓之切點之切線．(8)若於三角形垂直於各邊之一組直線同點時，由其邊之中點等距離點之三垂線爲共線．(9)若由一三角形之各頂點至第二三角形之各邊所作三垂線爲共點，則由第二三角形之各頂點至第一三角形之各邊所作相對應之三垂線亦爲共點．

【共軛弓形】Conjugate segments.〔幾〕圓被弦所分成之二部分互爲共軛弓形．

【共軛平面】Conjugate planes.〔幾〕二次曲面(例如橢圓體或雙曲線體)中三平面，若每一平面平分其他二平面之一羣平行弦，則此三平面互爲共軛．橢圓體

及雙曲線體有無限組共軛平面。

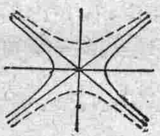
【共軛虛數】Conjugate imaginaries. 〔代〕即共軛複虛數。

【共軛三角形】Conjugate triangle. 〔幾〕ABC 爲任一三角形，關於一圓，三點 A, B, C 之對極線 B′C′, C′A′, A′B′ 所交成之三角形爲 A′B′C′，則此兩三角形，名曰共軛三角形。而其相當頂點之聯線 AA′, BB′, CC′ 必交於一點。

【共軛複虛式】Conjugate complex expressions. 〔代〕同共軛複虛數。

【共軛複虛數】Conjugate complex numbers. 〔代〕如 $a+b\sqrt{-1}$ 及 $a-b\sqrt{-1}$ 爲共軛複虛數，普通以 $a+ib$ 及 $a-ib$ 表之。兩共軛複虛數之和及積皆爲實數。

【共軛雙曲線】Conjugate hyperbolas. 〔幾〕一雙曲線之橫軸爲他雙曲線之縱軸，而其縱軸爲他雙曲線之橫軸時，此二雙曲線，謂之共軛雙曲線。如圖共軛雙曲線有共同之漸近線。



【共軛二次不盡根】Conjugate quadratic surds. 〔代〕如 $a+\sqrt{b}$ 及 $a-\sqrt{b}$ 謂之互爲共軛二次不盡根。兩共軛二次不盡根之和及積恆爲有理。

【共軛二次不盡根式】Conjugate quadratic surd expressions. 〔代〕即共軛二次不盡根。

列

【列點】Range. 〔幾〕在一直線上一羣之點而服從某條件者之謂，例如調和列點是也。

劣

【劣比】Ratio of less inequality. 〔代〕於比 $a:b$，當 $a<b$ 時謂之劣比，$a>b$ 時謂之優比，$a=b$ 謂之等比。故劣比小於 1，優比大於 1，等比等於 1。

【劣角】Minor angle. 〔幾〕見角條。

【劣弧】Minor arc. 〔幾〕圓之二弧合成全圓周時，其小者謂之劣弧。

【劣弓形】Minor segment. 〔幾〕見弓形條。

【劣共軛角】Minor conjugate angle. 〔幾〕共軛角之小者之謂，同劣角，見角條。

【劣共軛弧】Minor conjugate arc. 〔幾〕共軛弧之小者之謂，同劣弧，見共軛弧條。

【劣共軛弓形】Minor conjugate segment. 〔幾〕共軛弓形之小者之謂，同劣弓形，見弓形條。

合

【合計】Total 或 Amount 或 Aggregation. 〔數〕二以上之量或數相加之結果之謂也。亦稱總計。

【合數】Composite number. 〔算〕〔代〕即非素數，見該條。

【合變】To vary jointly.〔代〕一量因他諸量之積而正變時，則此量謂之因他諸量而合變或連變.如 $A=mBC$，而 m 爲常數，則 A 因 B 與 C 合變，而以 $A\propto BC$ 表之.例如利息因本金，期間，及利率而合變.

【合同形】Congruent figures.〔幾〕與全等形同，見該條.

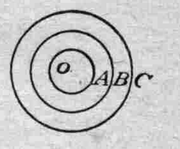
【合資算】Partnership 或 Fellowship.〔算〕數人合出資本，共同營商業，比例於其出資之額，或比例於出資之額及出資之期間，以分配利益擔負損失之算法也.合資算有單複二種：單合資算僅比例於出資之額，複合資算比例於出資之額及出資之期間，分配利益或擔負損失之法之謂也.

【合比之理】Componendo.〔代〕〔幾〕$a:b=c:d$ 時，則 $a+b:b=c+d:d$. 是謂之合比之理. 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，故 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$，即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，或 $a+b:b=c+d:d$.

同

【同一法】Rule of identity.〔幾〕若僅有一 A 與一 B，A 爲 B，則 B 爲 A，如是之推論，謂之同一法.例如於二等邊三角形頂角之二等分線惟有一，底之垂直二等分線亦惟有一，而已知頂角之二等分線爲底之垂直二等分線，則底之垂直二等分線亦爲頂角之二等分線.

【同心圓】Concentric circles.〔幾〕同心圓者，二以上之圓同中心者之謂，如圖 A, B, C 三圓之中心同爲 O.



【同名數】Like numbers.〔算〕例如 2 尺與 3 尺，5 斤與 3 斤爲同名數，然 3 圓與四角，或 5 里與 100 丈則不爲同名數.

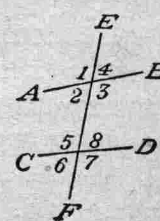
【同次式】Homogeneous expression.〔代〕式由各項爲同次者之謂，例如 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 爲一三次同次式.同次式亦稱齊次式.

【同次積】Homogeneous product.〔代〕由 n 文字每次取 r 個作種種之積，各文字可重複取任何次，是等之積謂之同次積或齊次積，其數以 ${}_nH_r$ 表之.例如由 a, b, c 三文字取二文字所作之同次積爲 a^2, b^2, c^2, ab, bc, ca，此時 ${}_nH_r={}_3H_2=6$. 而普通

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

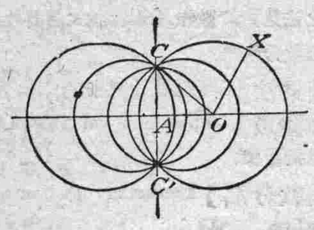
倘見重複組合條.

【同位角】Corresponding angles.〔幾〕二直線 AB, CD 被他直線 EF 所截時得八角，其中 1 與 5, 2 與 6, 3 與 7, 4 與 8 稱爲同位角.若二直線爲平行線，則其與截線所成之

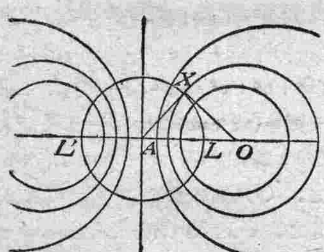


同位角相等，其逆定理亦成立.

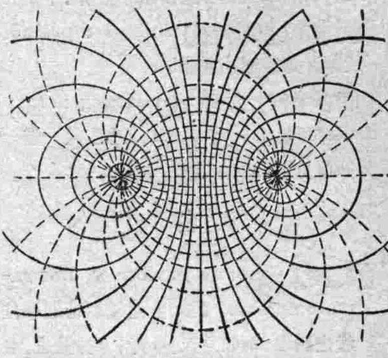
【同軸圓】Coaxial circles.〔幾〕一組有同聯心線及同根軸之圓，謂之同軸圓.若 O 及 OX 爲同軸圓之一組之可變易之中心及半徑，由同軸圓之定義 $OA^2 \sim OX^2$ 爲對於一組諸圓之常數，命之爲 δ^2. (1)若同軸圓之一組中任意二圓交於 C



及 C′ 點時，則此一組之圓皆通過 C 及 C′ 點，而此一組之圓謂之相交同軸圓.此時 $CA=\delta=C'A$，而以 δ 爲半徑之圓爲一組中之最小者. (2)若同軸圓之一組不相交時，則此一組之圓謂之不相交同軸



圓.此時 O 可漸近於 $AL=S$ 之L點，而 OX 漸減小.而 L 點爲圓之半徑無窮小之極限.根軸之他側亦有 L′ 點與 L 相當. L 及 L′ 謂之限點.相交同軸圓與不相交同軸圓一組之數無限，且無有限大之極大圓，然根軸爲一組之圓之增大之極限.考此圖知凡同軸圓之一組必有他



組與之相聯，各組之各圓與他組之各圓直交，二組之中，一組爲相交同軸圓，而他組爲不相交同軸圓，後者之限點即爲前者之公共點.

【同餘式】Congruence.〔代〕與等剩式同，見該條.

【同類項】Like terms 或 Similar terms.〔代〕二項惟數字係數相異時，謂之同類項.例如 $2a^2b^3c$ 及 $5a^2b^3c$ 爲同類項.

【同次對稱式】Homogeneous symmetrical expression.〔代〕同次且對稱之式之謂，例如 $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$ 是也.

【同解方程式】Equivalent equations.〔代〕同等值方程式.

【同類不盡根】Similar surds.〔代〕當二不盡根可化爲有相同之無理因數時，

則此二不盡根謂同類不盡根。例如 $2\sqrt{2}$ 與 $5\sqrt{2}$ 爲同類不盡根或相似不盡根。

【同末位循環節】Conterminous repetend.〔算〕見循環小數條。

【同初位循環節】Similar repetend.〔算〕見循環小數條。

【同次微分方程式】Homogeneous differential equation.〔微〕見一階一次微分方程式條。

名

【名數】Concrete number 或 Denominate number.〔算〕數之屬於特別單位者之謂也。例如 5 尺，3 斤，6 分是也。名數對於不名數而言。

向

【向】Sense.〔代〕〔幾〕向有二意義：其一不等式之向之謂，例如於不等式 $a>b$，兩邊以 -1 乘之，則謂之變不等式之向，即 $-a<-b$ 也。又一爲直線之向之謂，例如有限直線 AB，由 A 至 B 之向與由 B 至 A 之向相反。故謂直線 AB 爲由 A 至 B 之向，謂直線 BA 爲由 B 至 A 之向。而 $AB=-BA$，$AB+BA=0$。

A———— ——B

回

【回歸三角函數】Periodic trigonometrical function.〔三〕即週期三角函數，見該條。

因

【因子】Factor〔算〕〔代〕同因數，見該條。

【因數】Factor.〔算〕〔代〕當二以上諸數相乘時，此等諸數謂之其積之因數。或可除盡某數之數謂之前數之因數。例如 2,3,4,6 爲 12 之因數。求某數之諸因數之法見非素數條。分解代數式爲因數，見因數分解條。

【因果法】〔算〕見複比例條。

【因變數】Dependent variable.〔代〕見變數條。

【因數分解】Factoring 或 Factorisation.〔算〕〔代〕分解一數或式爲因數，謂之因數分解。因數分解雖無一定之法則，然如次之例爲常遇者。(1)各項有公共之因數，例如 $ax+bx+cx=x(a+b+c)$。(2)依已知之式而分解因數，即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$，$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$。(3) n 爲偶數時，a^n-b^n 可以 $a+b$ 除之。(4) n 爲奇數時，a^n+b^n 可以 $a+b$ 除之。(5)不論 n 爲奇數或偶數，a^n-b^n 常可以 $a-b$ 除之。(6) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$。(7)普通二次式 $ax^2+bx+c=$

$$a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\times$$

$$\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}.$$

(8)若$f(x)$爲x之有理函數，而$f(\alpha)=0$，則$x-\alpha$爲$f(x)$之一因數.例如x^3-2x^2+1，當$x=1$時爲0，故$x-1$爲x^3-2x^2+1之一因數，卽$x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)$. (9) p爲素數且p與N互爲素數，則P爲$N^{p-1}-1$之一因數. (10)若p爲素數，則p爲$\lfloor p-1+1$之一因數. (11)含$a+b\sqrt{-1}$之虛因數之有理式，亦必含$a-b\sqrt{-1}$之虛因數.次所述之公式爲於因數分解常用之者.卽

$$a^4+b^4=(a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2).$$

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma a^2+2\Sigma ab=(a+b+c)^2.\\&2\Sigma a^2b^2-\Sigma a^4=(a+b+c)\times\\&\qquad(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).\\&\Sigma a^3+3\Sigma bc(b+c)+6abc=\\&\qquad\qquad(a+b+c)^3.\end{aligned}\right\}$$

$$x^3+x^2\Sigma a+x\Sigma ab+abc=(x+a)(x+b)(x+c).$$

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma(b-c)=0.\\&\Sigma a(b-c)=0.\\&\Sigma(b+c)(b-c)=0.\\&\Sigma bc(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).\\&\Sigma a^2(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).\\&\Sigma a(b^2-c^2)=(b-c)(c-a)(a-b).\\&\Sigma bc(b+c)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b).\\&\Sigma a^3+\Sigma bc(b+c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).\\&\Sigma a^2(b+c)+3abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).\\&\Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc=\\&\qquad(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).\end{aligned}\right\}$$

但於上之諸式中，皆假定對於a，b，c三者.

$$\left.\begin{aligned}&(x\pm y)^2\mp 4xy=(x\mp y)^2.\\&x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2).\\&\text{而一般}\\&x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}).\\&x^n\pm y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots\mp xy^{n-2}\pm y^{n-1}).\end{aligned}\right\}$$

但n爲奇數則取上之符號，若爲偶數則取下之符號.

由三角法.當n爲奇數，x^n-1可分解爲

$$(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right),$$

而以$(x-1)\prod_{s=0}^{s=\frac{1}{2}(n-1)}\left(x^2-2x\cos\frac{2s\pi}{n}+1\right)$表之.

當n爲偶數，則

$$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{s=1}^{s=\frac{1}{2}(n-2)}\left(x^2-2x\cos\frac{2s\pi}{n}+1\right).$$

又當n爲奇數，則

$$x^n+1=(x+1)\prod_{s=0}^{s=\frac{1}{2}(n-3)}(x^2-2x\cos\frac{2s+1}{n}\pi+1).$$

當 n 爲偶數,則

$$x^n+1=\prod_{s=0}^{s=\frac{1}{2}(n-2)}(x^2-2x\cos\frac{2s+1}{n}\pi+1).$$

又由三角法 $x^{2n}-2x^n\cos\theta+1$ 可分解爲

$$(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1)$$

$$(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(x^2-2x\cos\frac{\overline{2n-1}\pi+\theta}{n}+1);$$

而以 $\prod_{s=0}^{s=n-1}(x^2-2x\cos\frac{2s\pi+\theta}{n}+1)$

表之。

【因數定理】Factor theorem.〔代〕由剩餘定理,知以 $x-\alpha$ 除 x 之有理整式 $f(x)$,其剩餘爲 $f(\alpha)$。若剩餘爲零,則所與之式可以 $x-\alpha$ 除盡.由是得次之重要定理:——若 x 之有理整式,以 α 代 x,此式爲 o,則此式含因數 $x-\alpha$. 是謂之因數定理。此定理可用以求一式之因數。例如分解 $x^3+3x^2-13x-15$ 爲因數。由試驗知當 $x=3$,此式爲零;故 $x-3$ 爲其一因數.故 $x^3+3x^2-13x-15=x^2(x-3)+6x(x-3)+5(x-3)=(x-3)(x^2+6x+5)=(x-3)(x+1)(x+5)$.

【因數除法】Division by factors.〔算〕〔代〕分解除數爲因數,依次以其各因數除被除數而求其商及餘數之方法也。例如以 21 除 819,而 $21=3\times7$,如右所示。又如以 56 除 6737,而 $56=7\times8$,如右所示。而商爲 120,及餘數 $=3+2\times7=17$。

$$\begin{array}{r|l} 3 & 819 \\ \hline 7 & 273 \\ \hline & 39\text{商} \end{array}$$

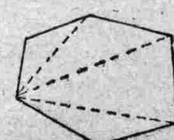
$$\begin{array}{r|ll} 7 & 6737 & \text{餘數}3. \\ \hline 8 & 962 & \text{餘數}2. \\ \hline & 120 & \text{商} \end{array}$$

地

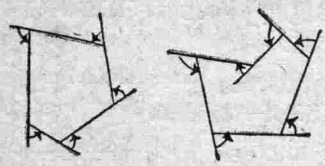
【地線】Ground line.〔數〕見畫法幾何學條.

多

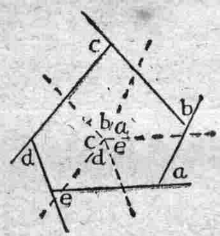
【多角形】Polygon.〔幾〕多角形者三以上直線所圍之平面之一部之謂也。而此等直線謂之多角形之邊,邊與邊之交點,謂之多角形之頂,諸邊之和謂之多角形之周圍。多角形又從其邊數或角數而分三角形(三邊形),四角形(四邊形),五角形(五邊形)等等.多角形之諸邊相等者;謂之等邊形;諸角相等者,謂之等角形;等邊等角之多角形,謂之正多角形;多角形之任一角小於二直角時,謂之凸多角形;一以上之角爲凹角時,謂之凹多角形.(1)n 邊之多角形諸內角之和等於2(n−2)直角。由多角形之一角頂至相對之 n−3 角頂引對角線分本形爲 n−2 三角形.



因各三角形之內角之和爲 2 直角.故諸三角形之內角之和等於多角形之內角之和等於 $(n-2)\times 2\angle R$ 卽 $2(n-2)\angle R$.
(2) 任意多角形依次引長諸邊，其所作諸外角之和等於 4 直角.因一內角與其



相隣之外角之和等於 $2\angle R$. 故諸內角及外角之和等於 $n\times 2\angle R$，卽 $2n\angle R$. 然諸內角之和等於 $2(n-2)\angle R$，故諸外角之和等於 $4\angle R$. 此理又可證之如次.如圖,由多角形之平面上一點引平行

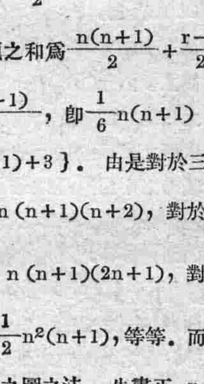


於各邊之直線，各外角等於一點之周圍所生之角,故等於 4 直角.

【多角數】Polygonal numbers.〔代〕$n+\frac{1}{2}n(n-1)d$ 式爲表首項爲 1 公差爲 d 之等差級數 n 項之和，於此式依次令 $d=0,1,2,3,$ ……時,則得二次,三次,四次,五次,……之多角數之公項.但一次之多角數假定其各項爲 1 者,卽

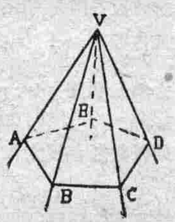
次數	第 n 項	級　　數
1	1	1,1,1,1,…………
2	n	1,2,3,4,…………
3	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1,3,6,10,………
4	n^2	1,4,9,16,………
5	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1,5,12,22,………

餘倣此. 而二次，三次,四次,五次,……之級數各謂之直線數，三角數,四角數,五角數,……. r 次之多角數卽 r 角數之第 n 項爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$，而此級數之 n 項之和爲 $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{r-2}{2}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$，卽 $\frac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)(n-1)+3\}$. 由是對於三角數，$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$，對於四角數 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，對於五角數 $S_n=\frac{1}{2}n^2(n+1)$，等等. 而普通作 r 角數之圖之法，先畫正 r 角形 ABCDE (玆假定畫正五角形，然任何正多角形其理皆同)，由其一角頂A過他



角頂 B, C, D, E 引數直線，而取 AB 之二倍，三倍，……之長以爲一邊而作以 A 爲公共角之正多角形，於此等多角形之周圍，如圖，有原多角形之距離處作黑點時，則 r 角數之第一項爲在 A 之一點，第二項爲在第一多角形 ABCDE 之各角頂諸點，第三項爲第一第二多角形之周圍諸點，如是類推，可表其他諸項.

【多面角】Polyhedral angles.〔幾〕三以上平面相交於一點時，此等平面，謂之成一多面角或立體角. 例如 V-ABCDE 是也. 而其交點V，謂之多面角之頂點. 面



與面之交線，謂之多面角之稜.而相隣二稜間之平面角，謂之多面角之面角.多面角因其包圍之平面之數而謂之三面角，四面角等等.

【多面體】Polyhedron.〔幾〕多角形之面所包圍之立體之謂也. 其包圍之多角形，謂之多面體之面. 面與面相交之直線，謂之多面體之稜. 多面角之頂，謂之多面體之頂. 聯結不同平面之二頂點之直線，謂之多面體之對角線.過不同平面三頂點之平面，謂之多面體之對角面.多面體之面爲全相等之正多角形時，謂之正多面體，詳見該條.

【多項式】Polynomial 或 Polynomial expression或Multinomial expression.〔代〕由二以上之項而成之式之謂. 因項數爲 2, 3,…… 而稱之爲二項式，三項式，……. 例如 $a+b$ 爲二項式，$2x+3y+4z$ 爲三項式；二項式，三項式，……通稱之爲多項式.

【多邊形】Polygon.〔幾〕即多角形，見該條.

【多價函數】Many-valued function.〔代〕見一價函數條.

【多元方程式】Equation with many unknown numbers.〔代〕方程式之含二以上未知數者之謂. 例如 $2x+5y-7z=0$，是也.

【多項式定理】Multinomial theorem.〔代〕展開多項式之任意乘冪之公式之謂. 求$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p$ 之展開之任意項之係數，但 p 爲正整數. 此展開式爲各等於 $a+b+c+d+\cdots\cdots$ 之 p 個因數之積，而於展開式之各項，爲由此 p 個因數各取一字母而成.故任意項 $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots$ 於最後之積內所表之數，等於 p 個字母(其中 α 個爲 a，β 個爲 b，γ個爲 c，……)之排列之數.即$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots$之係數爲$\dfrac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\lfloor\delta}$，但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots=p$.而於$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$ 之展開式含 $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots$ 之項爲$\dfrac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\lfloor\delta}a^{\alpha}(bx)^{\beta}(cx^2)^{\gamma}(dx^3)^{\delta}\cdots\cdots$，即$\dfrac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\lfloor\delta}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdots}$，但$\alpha+\beta+\gamma+$

$\delta+\cdots\cdots=p$. 是稱爲多項展開式之公項.例如於 $(a+bx+cx^2)^9$ 之展開式求 x^5 之係數.此展開式之公項爲 $\dfrac{\lfloor 9}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}x^{\beta+2\gamma}$ …………(1). 但 $\alpha+\beta+\gamma=9$. 由視察知適合 $\beta+2\gamma=5$ 之 β 與 γ 之值,然後由 $\alpha+\beta+\gamma=9$ 求得 α 之值.

命 $\gamma=2$, 則得 $\beta=1$, 而 $\alpha=6$;

命 $\gamma=1$, 則得 $\beta=3$, 而 $\alpha=5$;

命 $\gamma=0$, 則得 $\beta=5$, 而 $\alpha=4$;

所求之係數爲(1)之相當諸值之和,故所求之係數爲

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\lfloor 2}a^6bc^2+\frac{\lfloor 9}{\lfloor 5\lfloor 3}a^5b^3c+\frac{\lfloor 9}{\lfloor 4\lfloor 5}a^4b^5$$

$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5.$$

尖

【尖點】Cusp.〔幾〕卽歧點,見該條.

年

【年利】〔算〕〔代〕見利率條.

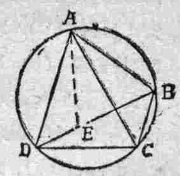
【年金】Annuity.〔算〕〔代〕年金者,每年可領取或交付之金錢之謂也.年金有確實年金 (Certain annuity) 及生命年金 (Life annuity) 二種.確實年金爲一定年限中連續者,其計算無不確實;生命年金爲其人之生存中連續者,人之生命不能預先確定其年限. (1)設利率 r, $1+r=R$, 期間爲 n 年,年金爲 S 圓, n 年間未取年金時,則於 n 年終,其本利合計 $A=\dfrac{S(R^n-1)}{r}$. (2)連續 n 年間年金 S 圓之現價 $P=\dfrac{S}{R-1}\cdot\dfrac{R^n-1}{R^n}$. (3)若年金績至無限期時,於上式 $\dfrac{R^n-1}{R^n}$ 之極限爲 1, 故其現價 $P=\dfrac{S}{r}$. (4)暫停 p 年,其後連續 q 年,年金 S 圓之現價 $P=\dfrac{S}{R^{p+q}}\cdot\dfrac{R^q-1}{R-1}$. (5)若暫停 p 年,其後永遠連續年金 S 圓之現價 $P=\dfrac{S}{R^p(R-1)}$.

式

【式】Expression.〔代〕多爲代數式之略,見代數式條.

托

【托勒密定理】Ptolemy's theorem.〔幾〕托勒密定理如次: 圓內接四邊形二對對邊所含之矩形之和等於其對角線所含之矩形.〔證〕命 ABCD 爲內接四邊形.作 AE, 使 $\angle DAE=\angle CAB$, 而交 BD 於 E.因



$\angle DAE=\angle CAB$, 及 $\angle ADE=\angle ACB$, 故 $\triangle DAE$, CAB 相似, 故 $AD:AC=DE:CB$. $\therefore AD\cdot CB=AC\cdot DE$. 又因 $\angle EAB=\angle DAC$, $\angle ABE=\angle ACD$, 故 $\triangle EAB$, DAC 相似, 故 $AB:AC=EB:DC$, 故 $AB\cdot DC=AC\cdot EB$. 故

AD·CB + AB·DC=AC·DE + AC·EB =AC(DE+EB)=AC·DB. 此定理可用以證明三角內之若干公式.如加式,減式是也. 見和角之三角函數及差角之三角函數條.

收

【收歛】Convergency. 〔代〕見級數條.

【收歛級數】Converging series或Convergent series. 〔代〕見級數條及無限級數條.

曲

【曲面】Curved surface. 〔幾〕曲面者,於其面上取任意一點,過此點之任意割面與之交於曲綫者之謂也.於幾何學中,曲面可分類之如次: (1)單曲面 (Single curved surface).此曲面爲直線運動所生之面,而其任意二位置在同一平面上者.圓錐之面,圓柱之面屬於此類.而此類之曲面可展開之爲平面.故亦稱爲可展面 (Developable surface). (2)複曲面 (Double curved surface).此曲面爲曲線所生之面之謂,例如球面,橢圓體之面是也. (3)扭曲面(Warped surface).此曲面爲直線所生,惟其二位置不在同一平面上者之謂;例如單翼雙曲線體之面是也.

【曲率】Curvature. 〔微〕曲線之形狀隨切線方向之變化與切點在曲線上所畫之部分之比率而異,此方向變化之比率,謂之曲線之曲率,常以 K 表之. 玆先就圓之曲率述之如次: 假定有一半徑爲R之圓如(圖A).設於點 P 之切線與 OX 所

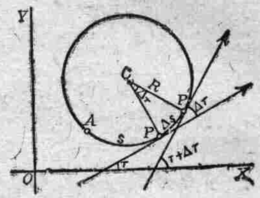


圖 A

成之角爲 τ, 於相隣之點 P' 之切線與 OX 所成之角爲 $\tau+\Delta\tau$,則 $\Delta\tau$ 等於弧 PP' 之全曲率.若點 P 隨於其切線沿曲線移動至 P',則全曲率 $\Delta\tau$ 卽切線方向或旋轉之全變化,亦卽弧方向之全變化. 設從曲線上某定點 A 至 P 之弧之長爲 S, 弧 PP' 之長爲 ΔS, 則弧每單位長方向之平均變化爲$\dfrac{\Delta\tau}{\Delta S}$.因 $\Delta S=R\cdot\Delta\tau$, 故$\dfrac{\Delta\tau}{\Delta S}=\dfrac{1}{R}$. 此比於曲線上任何位置恆相等,故爲常數.此比由定義卽圓之曲率,故得$K=\dfrac{1}{R}$.由是知圓之曲率等於其半徑之倒數. 若曲線非圓, 則其上一點之曲率如次: 假定有一任意之曲線如

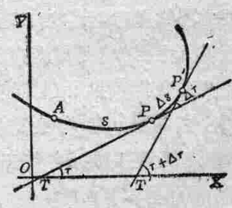


圖 B

(圖B).與上同樣,$\triangle\tau$等於弧 PP′ 之全曲率, $\frac{\triangle\tau}{\Delta S}$等於弧 PP′ 之平均曲率.設想 P′ 沿曲線接近於 P,則平均曲率$\frac{\Delta\tau}{\triangle S}$之極限值爲當 P′ 沿曲線接近於 P 時之 P 點之曲率,卽一點之曲率等於 $\lim_{\triangle S=0}\left(\frac{\triangle\tau}{\triangle S}\right)=\frac{d\tau}{dS}$ 故 $K=\frac{d\tau}{dS}$. 因角 $\triangle\tau$ 用半徑度計量,弧 ΔS 用長之單位計量,故一點之曲率之單位爲一『半徑度每單位長』.設曲線之方程式爲$y=f(x)$,則一點之曲率之公式(直角坐標)爲

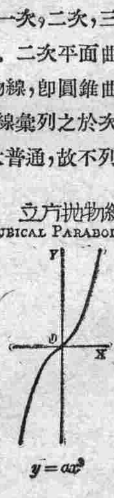
$$K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

若曲線之方程式爲 $\rho=f(\theta)$, 則一點之曲率之公式(極坐標)爲

$$K=\frac{\rho^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

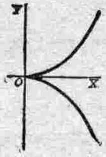
【曲線】 Curved line 或 curve.〔幾〕曲線者,方向變化不絕之線之謂,卽任何隣接三點不在同一直線上者之謂也。曲線有平面曲線 (Plane curve) 及倍率曲線 (Curve of double curvature)二種.平面曲線者, 曲線之諸點在同一平面上者之謂也.倍率曲線者,任何隣接四點不在同一平面者之謂也。屬於初等幾何之曲線爲圓。又曲線分爲代數曲線 (Algebraic curve)及超越曲線二類.代數曲線者,其點之坐標間之關係,可以代數學之普通運算卽加,減,乘, 除及常指數之冪與根表之者之謂也.超越曲線者,其點之坐標間之關係不能如是表之者之謂也。於高等數學, 線恆以其方程式定之。若線爲由依一定法則而運動之點所成, 其法則以代數學的示之者卽爲該線之方程式,而用此可以硏究線之解析的意義.若點爲不規則運動時,其點之經路爲曲線,嚴密言之,不爲數學的曲線,而爲僅彎曲之線, 故曲線卽數學的曲線及僅彎曲之線間之不同之點可以知之, 卽前者服從一定之數學的法則而生, 後者爲不規則之運動而生.於超越曲線,其方程式含變數指數之冪或根或對數, 又或含三角函數,其曲線之種類有對數曲線, 旋輪線, 螺線,懸鏈線等等.代數曲線因其方程式之次數而分一次,二次,三次等。一次曲線卽爲直線。二次平面曲線爲圓,橢圓,雙曲線.拋物線,卽圓錐曲線是也。玆將各種平面曲線彙列之於次 (圓及正則圓錐曲線,因太普通,故不列入)。

立方拋物線
CUBICAL PARABOLA



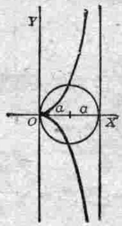
$y=ax^3$

半立方拋物線
SEMICUBICAL PARABOLA



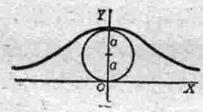
$$y^2 = ax^3$$

戴奧克里斯之蔓葉線
THE CISSOID OF DIOCLES



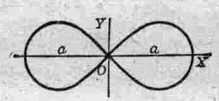
$$y^2(2a - x) = x^3.$$

阿內濟之箕舌線
THE WITCH OF AGNESI



$$x^2y = 4a^2(2a - y).$$

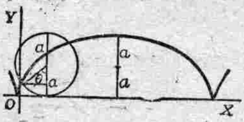
柏努利之双紐線
THE LEMNISCATE OF BERNOULLI



$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

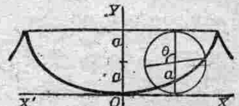
旋輪線,普通情形
CYCLOID, ORDINARY CASE



$$x = a \text{ arc vers} \frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

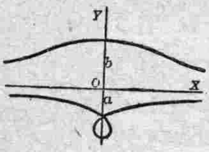
旋輪線,頂在原点
CYCLOID, VERTEX AT ORIGIN



$$x = a \text{ arc vers} \frac{y}{a} + \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

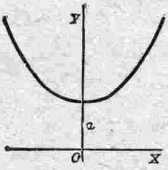
泥科美德之蚌線
THE CONCHOID OF NICOMEDES



$x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$.

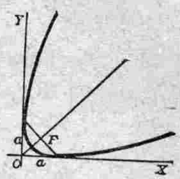
$\rho=a\csc\theta+b$

懸鏈線
CATENARY



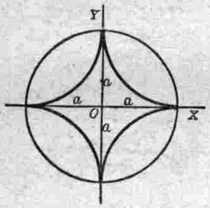
$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$.

拋物線
PARABOLA



$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

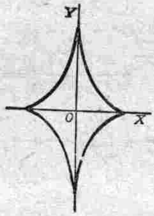
四歧点之內旋輪線
HYPOCYCLOID OF FOUR CUSPS



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

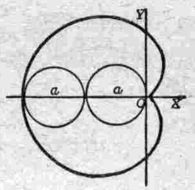
$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

橢圓之縮閉線
EVOLUTE OF ELLIPSE



$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$

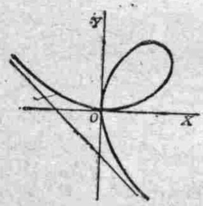
心臟線
CARDIOID



$x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$

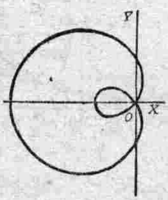
$\rho=a(1-\cos\theta)$.

笛卡兒之蝶線
FOLIUM OF DESCARTES



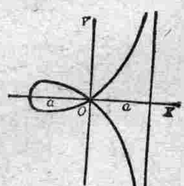
$x^3+y^3-3axy=0$.

蝸線
LIMAÇON



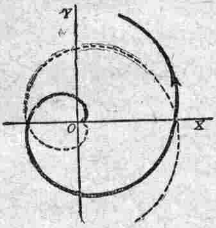
$\rho=b-a\cos\theta$.

環索線
STROPHOID



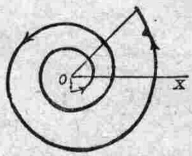
$y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$.

阿基米得之螺線
SPIRAL OF ARCHIMEDES



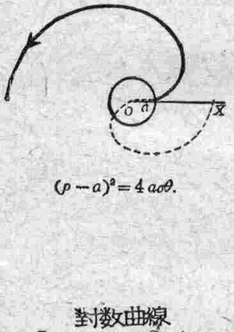
$\rho = a\theta.$

對数或等角螺線
LOGARITHMIC OR EQUIANGULAR SPIRAL



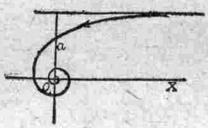
$\rho = e^{a\theta}$ or
$\log \rho = a\theta.$

拋物線螺線
PARABOLIC SPIRAL



$(\rho - a)^2 = 4a\rho\theta.$

雙曲線或倒数螺線
HYPERBOLIC OR RECIPROCAL SPIRAL

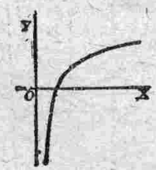


$\rho\theta = a.$

平方倒数螺線
LITUUS

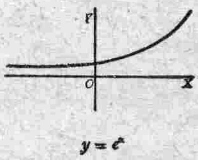
$\rho^2\theta = a^2$

對数曲線
LOGARITHMIC CURVE



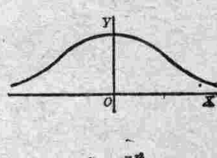
$y = \log x$

指数曲線
EXPONENTIAL CURVE



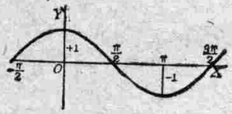
$y = e^x$

或是率曲線
PROBABILITY CURVE



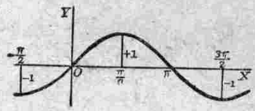
$y = e^{-x^2}$

餘弦曲線
COSINE CURVE



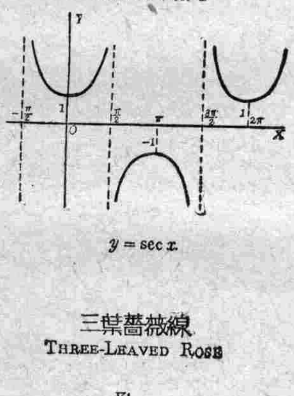
$y = \cos x$

正弦曲線
SINE CURVE



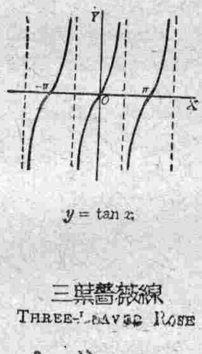
$y = \sin x$

正割曲線
SECANT CURVE



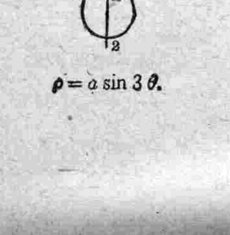
$y = \sec x$

正切曲線
TANGENT CURVE



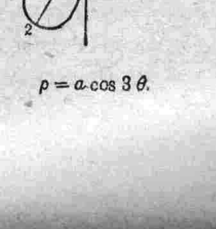
$y = \tan x$

三葉薔薇線
THREE-LEAVED ROSE



$\rho = a \sin 3\theta$

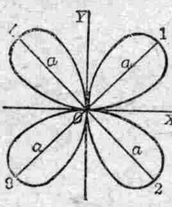
三葉薔薇線
THREE-LEAVED ROSE



$\rho = a \cos 3\theta$

四葉薔薇線

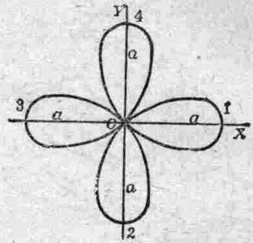
FOUR-LEAVED ROSE



$\rho = a \sin 2\theta.$

四葉薔薇線

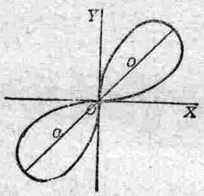
FOUR-LEAVED ROSE



$\rho = a \cos 2\theta.$

二葉薔薇双紐線

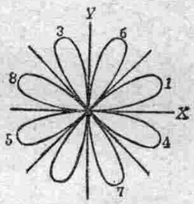
TWO-LEAVED ROSE LEMNISCATE



$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta.$

八葉薔薇線

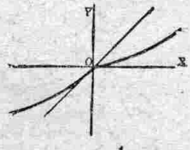
EIGHT-LEAVED ROSE



$\rho = a \sin 4\theta.$

湾点在原点之曲線

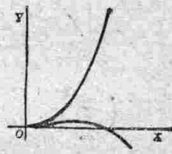
CURVE WITH SALIENT POINT AT ORIGIN



$y(1 + e^{\frac{1}{x}}) = x.$

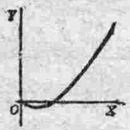
第二類歧点在原点之曲線

CURVE WITH CUSP OF SECOND KIND AT ORIGIN



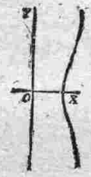
$(y - x^2)^2 = x^5$

終点在原点之曲線
CURVE WITH END POINT AT ORIGIN



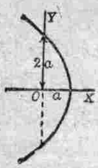
$y = x\log x$

共軛点在原点之曲線
CURVE WITH CONJUGATE POINT AT THE ORIGIN



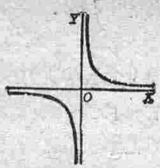
$y^2 = x^3 - x^2$.

抛物線
PARABOLA



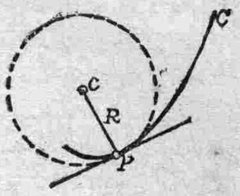
$\rho = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$.

等边双曲線
EQUILATERAL HYPERBOLA



$xy = a$

【曲率圓】Circle of curvature.〔幾〕〔微〕於曲線C上取任意一點P,過P點所作曲線之切線之斜率與曲線自己於P點之斜率相等.對於曲線之每一點,依同一方法,可各作一圓,使其曲率等於曲線自



己於該點之曲率.在曲線之凹旁,於P點作曲線之法線.於法線上截取 PC 等於P點之曲率半徑 (=R). 以 C 爲中心畫經過 P 點之圓,則此圓之曲率 K 等於$\dfrac{1}{R}$,即等於曲線自己於P點之曲率.如此所作之圓,謂之對於曲線上 P 點之曲率圓.曲率圓之中心,謂之曲率中心.曲率圓之半徑,等於曲率半徑.曲線上一點之曲率圓普通於該點橫截曲線.設曲線之方程式爲 $y=f(x)$, 其曲率中心之坐標爲(α, β),曲率圓之半徑爲 R, 則

$$\alpha = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\beta = y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0\right);$$

$$R = \pm\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

【曲線柱】Any cylinder.〔幾〕母曲線爲任意曲線之柱之謂,見柱條.

【曲線錐】Any cone.〔幾〕母曲線爲任意曲線之錐之謂,見錐條.

【曲橫線】Curvilinear abscissa.〔幾〕橫線爲曲線者之謂，例如由螺線之一點至圓柱之底作垂線時，其垂線在圓柱面上，而爲該點之縱線，由縱線之趾沿底面之圓周至原點之距離爲曲橫線.

【曲率中心】Center of curvature.〔幾〕〔微〕見曲率圓條.

【曲率半徑】Radius of curvature.〔幾〕〔微〕曲線於一點之曲率之倒數，謂之曲線於該點之曲率半徑.以 R 表曲率半徑，K 表曲率，則 $R=\frac{1}{K}$.若以曲率之公式代 K，則

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ 及

$$R=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

參閱曲率條.

有

【有向量】Vector 或 Vector quantity.〔數〕量之有大小且有方向者之謂，例如直線，速度等是也.

【有理化】Rationalization.〔代〕無理數或無理式以一因數乘之使成有理數或有理式之謂也.例如 $\sqrt[3]{4}$ 以 $\sqrt[3]{2}$ 乘之得 $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8}=2$，又 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 乘之，則得 $a-b$.而化一無理數或無理式爲有理所乘之因數，例如前例之 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，謂之 $\sqrt[3]{4}$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之有理化因數.又分數之分母爲無理數時，化爲有理，例如$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，計算其數值甚爲便利.$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 之有理化因數爲 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$，$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ 之有理化因數爲 $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$，須注意之.

【有理式】Rational expression.〔代〕不含根號之式之謂也.例如 ax，$ax^2+bxy+cy^2$，$\frac{ax+b}{cx+d}$是也.又如$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ 對於 a，b 爲有理式，而對於 x，y 爲無理式.

【有理數】Rational number.〔代〕有理數者，係對無理數而言，如 2，-5，$\frac{1}{3}$ 皆爲有理數.

【有中心形】Central figure.〔幾〕有中心之圖形之謂，例如圓，平行四邊形，球皆爲有中心形.

【有效數字】Significant figrue.〔算〕由 1 至 9 之數字，謂之有效數字，乃對於 0 而言也.又第一有效數字者，小數點之後非零之第一數之謂，例如於 0.0002537，2 爲第一有效數字.

【有限小數】Finite decimal.〔算〕有限數字所表之小數之謂也.

【有限直線】Finite straight line.〔幾〕有限長之直線之謂也.

【有限級數】Finite series.〔代〕級數之項數爲有限者，謂之有限級數.

【有理分數】Rational fraction.〔代〕不含根號之分數之謂，例如$\frac{x+1}{x^2+1}$，$\frac{x}{ax+b}$是。

【有理函數】Rational function.〔代〕僅含加，減，乘，除諸運算之函數之謂，例如ax^2+bx-c爲x之有理函數，$\frac{2x+3y}{5x-y}$爲x，y之有理函數。

【有理整式】Rational integral expression.〔代〕不含根號之整式之謂，例如ax^2+bx+c，$ax+by$是也。

【有限連分數】Terminating continued fraction.〔代〕連分數$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$之商$a_1$，$a_2$，$a_3$，……之數爲有限者，謂之有限連分數。

【有限較數法】Calculus of finite differences.〔數〕數學中介於差法與微分間之一分科也．差法僅能御代數函數中之有理整函數，而此法則能御一切代數函數、指數函數、對數函數、圓函數．微分雖能御一切函數，但其較細入無間，而此法所求之較，則有數可見，可以濟微分之窮，蓋數學中有時不能用極微之較數，而須用有限之較數也．總之此法似微分而精微不及，近差法而範圍過之．又此法亦與微分相同可使還原，而有與積分略似之還原法。

【有理化因數】Rationalizing factor.〔代〕見有理化條。

【有理方程式】Rational equation.〔代〕方程式之未知數無根號附於其上者之謂，如$ax^2+bx+c=0$，$\frac{5x}{6x+1}=2$是也。

【有理補因子】Rationalizing factor.〔代〕即有理化因數。

【有理整函數】Rational integral function.〔代〕凡函數之變數爲有理整式者．爲有理函數之一種，別於有理分數．其一般之形式爲$y=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$，但n爲正整數。

【有心圓錐曲線】Central conies.〔幾〕圓錐曲線之有中心者之謂，卽橢圓與雙曲線是也。

【有理化積分法】Integration by rationalization.〔積〕求非有理函數或分數之積分時，常以新變數代原變數，使成爲有理函數或分數之形式，然後積分之，此方法稱曰有理化積分法，或謂之變數置換法．分別述之於下：（I）微分式僅含x之分數冪者．例題，求$\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx$之結果．解：設$x=z^{12}$，則$dx=12z^{11}dz$，$x^{\frac{2}{3}}=z^8$，$x^{\frac{1}{4}}=z^3$，$x^{\frac{1}{2}}=z^6$．

$$\therefore\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\frac{z^8-z^3}{z^6}12z^{11}dz=12\int(z^{13}-z^8)dz=\frac{6}{7}z^{14}-\frac{4}{3}z^9+C$$

$$=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C.$$

(II)微分式僅含 $a+bx$ 之分數冪者．例題，求 $\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$ 之結果．

解：設 $1+x=z^2$，則 $dx=2zdz$，$(1+x)^{\frac{3}{2}}=z^3$，$(1+x)^{\frac{1}{2}}=z$．$\therefore\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$

$=\int\frac{2zdz}{z^3+z}=2\int\frac{dz}{z^2+1}=2\tan^{-1}z+C$

$=2\tan^{-1}(1+x)^{\frac{1}{2}}+C$．

(III)對應於變數之變化以變化限界者．例題，求 $\int_0^{16}\frac{x^{\frac{1}{4}}dx}{1+x^{\frac{1}{2}}}$ 之結果．解：設 $x=z^4$，則 $dx=4z^3dz$，$x^{\frac{1}{2}}=z^2$，$x^{\frac{1}{4}}=z$，又 $x=0$ 時 $z=0$，$x=16$ 時 $z=2$．$\therefore$

$\int_0^{16}\frac{x^{\frac{1}{4}}dx}{1+x^{\frac{1}{2}}}=\int_0^2\frac{z\cdot 4z^3dz}{1+z^2}=4\int_0^2\left(z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=4\int_0^2 z^2dz-4\int_0^2 dz+4\int_0^2\frac{dz}{1+z^2}=\left[\frac{4z^3}{3}-4z+4\tan^{-1}z\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}+4\tan^{-1}2$．

(IV)微分式除含 $\sqrt{a+bx+x^2}$ 外不含根式者．例題，求 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$ 之結果．解：設 $\sqrt{1+x+x^2}=z-x$，則 $x=\frac{z^2-1}{2z+1}$，

$dx=\frac{2(z^2+z+1)dz}{(2z+1)^2}$，

$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{z^2+z+1}{2z+1}$．

$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{\frac{2(z^2+z+1)dz}{(2z+1)^2}}{\frac{z^2+z+1}{2z+1}}$

$=\int\frac{2dz}{2z+1}=\log[(2z+1)c]=\log[(2x+1+2\sqrt{1+x+x^2})c]$．

(V)微分式除含 $\sqrt{a+bx-x^2}$ 外不含根式者．例題，求 $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ 之結果．

解：因 $2+x-x^2=(x+1)(2-x)$，故設 $\sqrt{(x+1)(2-x)}=(x+1)z$．解之，$x=\frac{2-z^2}{z^2+1}$，而 $dx=\frac{-6zdz}{(z^2+1)^2}$，$\sqrt{2+x-x^2}=\frac{3z}{z^2+1}$．　$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=$

$-2\int\frac{dz}{z^2+1}=-2\tan^{-1}z+C=-2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+C$．

(VI)二項微分式，如 $x^m(a+bx^n)^pdx$ 之形式之微分式，謂之二項微分式，其 a 與 b 爲任意常數，指數 m，n，p 爲有理數．若視 p 爲分數，而以 $\frac{r}{s}$ 置換之，則二項微分式可化爲 $x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ 之形，其 m，n，r，s 爲整數，且 n 爲正．二項微分式可被積分之條件有二：(A)設 $a+bx^n=z^s$，則 $(a+bx^n)^{\frac{1}{s}}=z$，$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=z^r$，$x=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$，$x^m=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$，$dx=\frac{s}{bn}z^{s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$．

$\therefore\ x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{s}{bn}z^{r+s-1}$ $\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz$. 若$\frac{m+1}{n}$爲整數或零，則此式之右邊爲有理，而二項式能由有理化積分之.

(B)設 $a+bx^n=z^sx^n$，則 $x^n=\frac{a}{z^s-b}$，$a+bx^n=z^sx^n=\frac{az^s}{z^s-b}$.於是$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\frac{r}{s}}z^r$，$x=a^{\frac{1}{n}}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}$，$x^m=a^{\frac{m}{n}}(z^s-b)^{-\frac{m}{n}}$，$dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}z^{s-1}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}dz$. $\therefore x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1)}z^{r+s-1}dz$. 若$\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$爲整數或零，則此式之右邊爲有理，而二項式能由有理化積分之. 例1. $\int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int x^3(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C$. 解: $m=3$, $n=2$, $r=-3$, $s=2$, 而$\frac{m+1}{n}=2$爲整數.合於(A)之條件.於是設 $a+bx^2=z^2$，則 $x=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$，$dx=\frac{zdz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}$，$(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}=z^3$. $\therefore\int\frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{zdz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{z^3}=\frac{1}{b^2}\int(1-az^{-2})dz=\frac{1}{b^2}(z+az^{-1})+C=\frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C$. 例2. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3}+C$. 解: $m=-4$, $n=2$, $\frac{r}{s}=-\frac{1}{2}$, 而$\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-2$爲整數,合於(B)之條件.於是設$1+x^2=z^2x^2$，則$z=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$，$x^2=\frac{1}{z^2-1}$，$1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1}$，$\sqrt{1+x^2}=\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$，$x=\frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$，$x^4=\frac{1}{(z^2-1)^2}$，$dx=-\frac{zdz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

$$\therefore\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{\frac{zdz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(z^2-1)^2}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}}=-\int(z^2-1)dz=z-\frac{z^3}{3}+C=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3}+C.$$

(VII)三角函數的微分式之變化，$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$，$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$. 但 $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{\csc\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\frac{x}{2}+1}}=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$，$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sec\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$. 若設 $\tan\frac{x}{2}=z$，

則 $\sin\frac{x}{2}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$，$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$，$x=2\tan^{-1}z$。由是 $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$，$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$，$dx=\frac{2dz}{1+z^2}$。故含 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之微分式，能由代 $\tan\frac{x}{2}=z$，或代 $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$，$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$，$dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ 變成關於z爲有理之他一微分式.

例題，證 $\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log\tan\frac{x}{2}+C$。

解：$\int\frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}=$

$$\int\frac{\left(1+\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=$$

$\int\frac{(1+z^2+2z)dz}{z(1+z^2+1-z)}=\frac{1}{2}\int(z+2+z^{-1})dz=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}+2z+\log z\right)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C$。

(VIII)倒數置換法.以 $x=\frac{1}{z}$，$dx=-\frac{dz}{z^2}$ 代入微分式中之置換法，謂之倒數置換法，或稱反數置換法.此法與以上各法不同，非使微分式有理化. 例題，求 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ 之結果. 解：以 $x=\frac{1}{z}$，$dx=-\frac{dz}{z^2}$ 代入，得 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=-\int(a^2z^2-1)^{\frac{1}{2}}zdz=-\frac{(a^2z^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$。

【有理分數之積分法】 Integration of rational fraction.〔積〕有理分數即分子分母爲整數的有理函數之分數. 若分子之次數等於或高於分母之次數，則以分母除分子，可化分數爲帶分數.例如 $\frac{x^4+3x^3}{x^2+2x+1}=x^2+x-3+\frac{5x+3}{x^2+2x+1}$。末項爲分子次數低於分母次數之分數. 整數部之諸項容易積分，所需考慮者惟分數而已.欲積分含此類分數之微分式，必須化分數爲更單純之部分分數，方能完成其目的. 玆就微分式所含分數之情形分別述之.

(I)分母之因數均爲一次而無重複者.公式：$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\log(x-a)+C$。例題，求 $\int\frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$ 之結果。解：假定 $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=$

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

…………(a)，去分母得 $2x+3=A(x-1)(x+2)+B(x+2)x+C(x-1)x=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$………(b)。由(b)得 $A+B+C=0$，$A+2B-C=2$，$-2A=3$，解之得 $A=-\frac{3}{2}$，$B=\frac{5}{3}$，

$C=-\frac{1}{6}$．化入 (a) 得 $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$ $=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$．$\therefore$

$$\int\frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}=\int\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{3}{2}\log x+\frac{5}{3}\log(x-1)-\frac{1}{6}\log(x+2)+\log c=\log\frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}.$$

若不決定常數 A，B，C，則其結果為

$$\int\frac{(2x+3)dx}{x(x-1)(x+2)}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{x-1}+\int\frac{Cdx}{x+2}=A\log x+B\log(x-1)+C\log(x+2).$$

(II)分母之因數均為一次而有重複者．

公式：$\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$．例題，求 $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ 之結果．解：假定 $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$，去分母得 $x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A$．作 x 之同類冪之係數之方程，得 $A+D=1,-3A+C-2D=0,3A+B-C+D=0,-A=1$，解之得 $A=-1$，$B=2,C=1,D=2$．於是 $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$．

$$\therefore\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\log x-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\log(x-1)+C=-\frac{x}{(x-1)^2}+\log\frac{(x-1)^2}{x}+C.$$

(III) 分母含二次因數但無重複者．公式：$\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$．例題，求 $\int\frac{4dx}{x^3+4x}$ 之結果．解：假定 $\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$，去分母得 $4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=(A+B)x^2+Cx+4A$．由此式得 $A+B=0$，$C=0$，$4A=4$，解之得 $A=1$，$B=-1$，$C=0$．於是 $\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$．

$$\therefore\int\frac{4dx}{x(x^2+4)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+4}=\log x-\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\log c=\log\frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

(IV) 分母含有重複之二次因數者．公式：

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A(p^2-4q)+(2B-Ap)(2x+p)}{2(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}}+$$

$\frac{(2B-Ap)(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n-1}}$.

例題，求$\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}$之結果.解：

假定$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$，去分母得 $x^3+x^2+2=Ax+B+(Cx+D)(x^2+2)=Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+B+2D$. 由此式得 $C=1$, $D=1$, $A+2C=0$, $B+2D=2$，解之得 $A=-2$, $B=0$, $C=1$, $D=1$. 於是$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+2}$. ∴

$$\int\frac{(x^3+x^2+2)dx}{(x^2+2)^2}=-\int\frac{2xdx}{(x^2+2)^2}+\int\frac{xdx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log(x^2+2)+C.$$

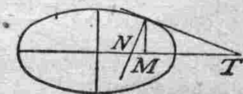
【有理函數之積分法】Integration of rational function.〔積〕與有理分數之積分法同.

次

【次】Degree.〔代〕項之次者，其中所含文字因數之數之謂，例如 ab 爲二次項，abc 爲三次項，等等.乘冪之次數以其文字之指數表之；例如 a^3 爲三次，b^5 爲五次.式之次數者，該式中最高次項之次數之謂.又有時指式中之特別文字而言者.例如 $x^2y+ax+b$ 爲三次式，而爲 x^2 之二次式，y 之一次式.又根數之次數以根指數表之.例如 $\sqrt{a}$ 即 $\sqrt[2]{a}$ 爲二次之根數，$\sqrt[3]{a}$ 爲三次之根數.方程式之次數，見方程式條.

【次元】Dimension.〔代〕〔幾〕幾何學中所謂次元與度同，見該條.於代數學中，積或項之文字因數之數謂之次元.例如 a^2b 爲三次元之項.於代數學中，一次元之項之幾何的表示爲直線之長，二次元之項之幾何的表示爲面積，三次元之項之幾何的表示爲體積，然於幾何學四次元以上尙不能實現，而於代數學四次元以上任何次元皆有之.

【次切線】Subtangent.〔幾〕曲線上一點之縱線及切線在橫軸上所夾之部分謂之次切線.



如圖 MT 爲次切線.

【次法線】Subnormal.〔幾〕曲線上一點之縱線及法線在橫軸上所夾之部分謂之次法線.如上圖，MN 爲次法線.

百

【百】Hundred.〔算〕數名，十之十倍之謂也.阿剌伯以 100 記之，羅馬以 C 記之，希臘以 ρ′ 記之.

【百位】Hundreds′ place.〔算〕記數時自右數第三位謂之百位，而在此位之數，謂之百位數.

【百分法】(一) Percentage.〔算〕亦稱子母法，折成法，成分法或分釐法，日本謂之步合算.即以甲數與乙數(普通小於甲數)比，而以小數表示之者之謂也.其甲數謂之母數，乙數謂之子數，其比之值

謂之百分率或成數.例如以8尺比6尺得.75,則8尺爲母數,6尺爲子數,而.75卽百分率也.百分率以百分之一爲單位,而以符號%記之,其名稱如次:

$$1\text{分}=\frac{10}{100}=\cdot1=10\%,$$

$$1\text{釐}=\frac{1}{100}=\cdot01=1\%,$$

$$1\text{毫}=\frac{\cdot1}{100}=\cdot001=.1\%,$$

$$1\text{絲}=\frac{\cdot01}{100}=\cdot0001=\cdot01\%.$$

百分法之最重要公式,爲(成數)=(子數)÷(母數),(母數)=(子數)÷(成數),(子數)=(母數)×(成數).百分法爲用甚廣;如算利息,計盈虧,納租稅,付酬金,無不用之.(二) Centesimal method.〔三〕亦稱法國法或百度法.卽以法度,分,秒以測角度之法也.直角之百等分之一謂之一法度,法度之百等分之一謂之一分,分之百等分之一謂之一秒.而法度,分,秒以 g,′,″,記號表之,例如 $17^{g}32'28''$ 卽表17法度32分28秒也.法國創米突法時,一切度量衡皆以十進,遂制定此法,後以算學表皆用六十分法,是以此法未通行,今僅於三角法之緒論中,略述其名稱而已.

【百分率】Percent.〔算〕見百分法條.

【百分算】Percentage.〔算〕卽百分法,詳該條.

【百位數】Hundreds.〔算〕見百位條.

米

【米】Metre 或 Meter.〔算〕卽米突.

【米突】Metre 或 Meter.〔算〕米突制中長之基本單位.合我國營造尺3.125尺.一米突之十分之一曰粉(Decimeter),百分之一曰粉(Centimeter),千分之一曰粍(Millimeter);又一米突之十倍曰籵(Decameter),百倍曰粨(Hectometer),千倍曰粁(Kilometer),皆以十進.米突係舊譯名,自我國加入萬國度量衡同盟會後,命爲公尺.

【米突制】Metric system.〔算〕以米突爲長之單位,趣爲質量單位之度量衡之謂也.其所以稱爲米突制者,因以米突爲基本單位,他單位可由此單位誘導得之故也,此制起於法國革命之際,1790年,法政府擬撰定度量衡單位之新制,且將此事照會各國,各國應此照會派遣學者會於巴黎,與法國學者共議.當時諸委員以爲撰定單位當擇一定基本,假令有何事變,此單位失時,復可算得之.爲合此目的乃擇地球子午線之四分之一爲基本,取此基本之一千萬分之一爲長之單位,而名之曰米突.1795年法政府嘉納此基本之撰定,曾由測定地球之子午線,定米突之長而採用之.然著名天文家 Mechain(1744－1805),Delambre(1749－1822)從事測定法國北部 Dunkirk 及西班牙之 Barcelona 間之子午線之弧精密之長,未幾法國數學家 Biot 及天文家 Arago 此子午線之測定延長至 Formentara 島,此等測定與1795年所定者少有差異.由子午測定之結果,製鉑

棒一當 4°C (卽其密度最大之溫度)時之長恰爲一米突，以爲原器.是爲萬國同盟度量衡長度之起源. 當時委員之一部分決定米突精密之長，他部決定與長之單位有一定不變之關係之重之單位，此研究之結果，撰定一米突之百分之一卽粉之長爲一邊之立體之純水之重爲單位，而名之曰兛，作一千兛重之鉑板以爲原器.是爲萬國同盟度量衡重量之起源.其後測定愈精，發見當時所測子午線之長稍有差誤，而知一米突小於地球子午線之四千萬分之一.然子午線之長，本難精密，且地球放散溫熱，歷時既久，必有收縮，是子午線亦隨時而變，不足爲永久之標準，反不如所定原器之長爲便. 1870 年由二十九國派出五十委員，會議於巴黎，討論萬國度量衡原器，1872 年議決仍以法國之原器爲標準，而以鉑 90% 銥 10% 之合金作一 H 形之棒，定爲當 4°C 時其棒面所刻二平行線間之長爲一米突，以爲萬國公尺. 兛之原器，亦以鉑銥合金製一砝碼代之. 其所以用鉑銥之合金者，因此合金在空氣或溼氣中其質不變，酸類不腐蝕，富於彈性剛性，且膨脹係數甚小，較其他金屬或合金爲優，經學術上精密之試驗而始採用之也. 米突制採用十進法，實爲便利，裨益於世不鮮，世界各國多用之.

【米突噸】Metric ton.〔算〕一千兛之重之謂也.亦稱法噸，或公鐓，參閱公鐓條.

自

【自乘法】Involution.〔算〕〔代〕求一數之任意乘冪之運算也. 自乘法可直接由乘法得之，然常有用公式者，二項式定理之公式用之尤多.

【自然數】Natural numbers.〔算〕〔代〕1, 2, 3, 4, 5, ……n 一列整數謂之自然數.以 $\sum n^0$, $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$, ……, $\sum n^{10}$ 各表自然數之首 n 項之零乘冪，一乘冪，二乘冪，三乘冪，……，十乘冪之和，則

$$\sum n^0 = n.$$

$$\sum n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$= (\sum n)^2.$$

$$\sum n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$
$$= \frac{\sum n^2(6\sum n-1)}{5}.$$

$$\sum n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$
$$= \frac{4(\sum n)^3-(\sum n)^2}{3}.$$

$$\sum n^6 = \frac{n(n+1)}{2}.\ \frac{(2n+1)}{3}$$
$$\frac{3n(n+1)(n^2+n-1)+1}{7}.$$

$$\sum n^7 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$\frac{n(n+1)(3n^2+3n-4)+2}{6}.$$

$$\Sigma n^8=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(2n+1)}{3}$$

$$\frac{n(n+1)(5n^4+10n^3-5n^2-10n+9)-3}{15}.$$

$$\Sigma n^9=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n^4+4n^3-3n^2-5n+6)-3}{5}.$$

$$\Sigma n^{10}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(2n+1)}{3}$$

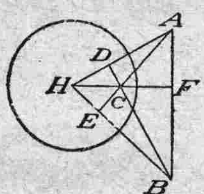
$$\times\{n(n+1)(3n^6+9n^5-n^4-17n^3+7n^2+17n-15)+5\}\div 11.$$

【自變數】Independent variable.〔代〕見變數條.

【自然級數】Natural series.〔算〕卽由自然數依次排列而成之級數。參閱自然數條.

【自然對數】Natural logarithms.〔代〕見對數條.

【自共軛三角形】Self-conjugate triangle.〔幾〕三角形之各邊爲其對頂點對於一圓之極線,謂之自共軛三角形.三角形 ABC 對於一圓爲自共軛,則其圓心必爲三角形之垂心 H,而其半徑爲 HA,HD 之比例中項.且此種三角形必爲純角三角形,而其一頂點必在圓內,他二頂點必在圓外.



行

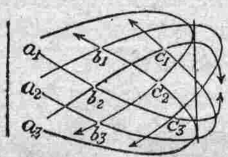
【行列式】Determinant.〔代〕將 n^2 個數列爲 n 列 n 行之正方形如次.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots & m_n \end{vmatrix}$$

同列之數用同文字,同行之數用同添數.由上正方形之各行各列各取一數相乘,而得 n 個種種之積,此各積附以適當之符號,則其代數和謂之行列式,而如上所列之正方形爲表此和者.對角線 $a_1\,b_2\,c_3\cdots\cdots m_n$ 稱爲主對角線(Principal diagonal).主對角線中之 n 個數之積恆命爲正.決定其他任意之積之符號,先將其數依文字之次序列之,而使其添數有主對角線之添數之次序,計其變列之數.若此數爲偶數時,該項之符號爲正,若爲奇數時,該項之符號爲負.例如主對角線爲 $a_1b_2c_3d_4$,求 $a_3b_2c_4d_1$ 之符號.施以三變列則 1 可置於第一,施一變列,則 3 可置於 2 與 4 之間,由是置添數爲 1234 之次序,須經四變列.故此項之符號爲正.爲簡便計,行列式常以希臘字母△表之,△之次數(Order)與其行或列之數同.下示之例爲三次之△而作其諸積且附以適當之符號者,卽

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{aligned} &=3\times6\times2-3\times8\times2 \\ &+5\times2\times4-5\times1\times2 \\ &+9\times8\times1-9\times6\times4 \end{aligned}$$

三次之Δ積附適當之符號，依次所作之

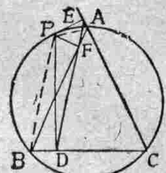


圖甚便.卽於上圖矢向上者爲正，而向下者爲負.行列式之普通性質如次：(1)將行列式之行變爲列，而列變爲行，其值不變.(2)行列式交換其任二行或二列，則其符號變，而其絕對值不變.(3)行列式有二行或二列相等，則其值爲 0.(4)行列式之任一行或任一列以某數乘之，等於某數乘行列式之全體.行列式可用以解一次聯立方程式，求消去式.解析幾何學中用之尤多.

西

【西經】West meridian.〔算〕本初子午線以東之經度，謂之東經，其西之經度，謂之西經，東西各一百八十度而止.

【西摩孫線】Simson's line.〔幾〕由 ΔABC 之外接圓周上任一點 P 至三邊 BC, CA, AB (或延線) 作垂線 PD, PE, PF，其趾 D, E, F 必在一直線上.而此直線謂之西摩孫線或P點之垂趾線.〔證〕聯DF, FE；又聯 PA, PB.因 ∠PFA, PEA 爲直角，



故 P, E, A, F 在同一圓周上.同樣 P, B, D, F 亦在同一圓周上. ∴$\angle PFE = \angle PAE = \angle PBD = 2\angle R - \angle PFD$.故 D, E, F 在同一直線上，其逆亦成立.若 D, E, F 在同一直線上，則 $\angle BPD = \angle BFD = \angle AFE = \angle APE$，∴$\angle BPA = \angle DPE = 2\angle R - \angle C$，故 A, P, B, C 在同一圓周上.卽 P 在 ΔABC 之外接圓周上.西摩孫線實非西摩孫所發明，而爲 Wallace 所發明，因西摩孫編入於其所著之書中，世人遂稱爲西摩孫線.若 PD, PE, PF 爲與三角形之諸邊作等角(依同方向測之)之斜線時，亦可證明 D, E, F 在同一直線上.又四直線相交生四三角形時，由其任意二者之外接圓周之交點至四直線引垂線，其趾亦在同一直線上.

【西薇士德分解消去法】Sylvester dialytic method of elimination.〔代〕見消去法條.

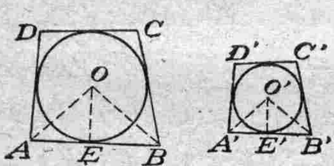
七 畫

伴

【伴數】Amicable numbers.〔代〕一數之各整除數之和，等於他數，則此二數謂之伴數．例如 220 與 284 爲伴數，因 $220=2^2\times5\times11$．故220之整除數之和爲 $(1+2+2^2)(1+5)(1+11)-220=284$．而 $284=2^2\times71$；故 284 之整除數之和爲 $(1+2+2^2)(1+71)-284=220$．

伽

【伽利略定理】Galileo's theorem.〔幾〕伽利略定理如次：圓之面積，爲其外切多邊形及與多邊形相似而其周圍等於圓周之多邊形之比例中項．〔證〕命與圓



之中心爲 O，半徑爲 r，其外切多邊形爲 ABCD，命與之相似而與圓周有等周之多邊形爲 $A'B'C'D'$．因二多邊形相似，而 ABCD 外切於圓，故 $A'B'C'D'$ 亦可外切於圓．今命其圓之中心爲 O'．命對應邊 AB，$A'B'$ 切於圓之點爲 E，E'，則 $\triangle OAB$，$\triangle O'A'B'$ 相似，而 OE，$O'E'$ 爲相似形之高，故 $AB:A'B'=OE:O'E'$．然 $AB+BC+\cdots\cdots:A'B'+B'C'+\cdots\cdots=AB:A'B'$ 故 $AB+BC+\cdots\cdots:A'B'+B'C'+\cdots\cdots=OE:O'E'$．而 $A'B'+B'C'+\cdots\cdots=2OE\pi$（假設），故得 $AB+BC+\cdots\cdots:2OE\pi=OE:O'E'$，由是 $\frac{1}{2}(AB+BC+\cdots\cdots)OE:OE^2\pi=OE^2\pi:OE\cdot O'E'\pi$，然 $OE\cdot O'E'\pi=\frac{1}{2}O'E'\cdot2OE\pi=\frac{1}{2}O'E'$（圓O之周）$=\frac{1}{2}(A'B'+B'C'+\cdots\cdots)O'E'$，即 ABCD：圓 O＝圓 O：$A'B'C'D'$．

【伽利略旋輪線】Galileo's cycloid.〔幾〕見旋輪線條．

位

【位】Place.〔算〕數字之位置也．自右第一位曰個位，第二位曰十位，第三位曰百位；千位，萬位以上，皆每十倍其數而進一位．又數字之個數亦謂之位數，例如二個數字之數曰二位數，三個數字之數曰三位數，等等；又如小數五位．

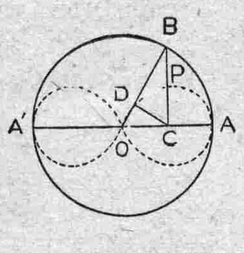
【位置】Position.〔幾〕雖同一物，左手持之與右手持之，其位置不同，故物體有位置，而位置所以示其在何處也．

【位置幾何學】Geometry of position.〔幾〕即綜合幾何學，見近世幾何學條．

佐

【佐魯氏雙紐線】Georno's lemniscate.〔幾〕取定長之直線 A A' 爲橫軸，平分之於 O，以 O 爲圓心，OA 爲半徑

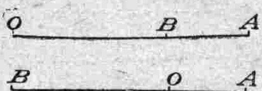
作圖．再任意作半徑OB，自B作BC垂直AA′，自C作CD垂直OB，於CB上截CP等於CD，截點P之位置隨半徑OB之位置而變，其軌迹爲一雙紐線．因此線爲佐魯氏所作，故名．



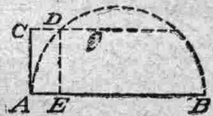
作

【作圖】Construction．〔幾〕作圖者，由已知件以作幾何學之圖形之謂也．又作數式之作圖爲求代數式之幾何的表示，可由次例以明之．(1)作 $x=a+b$ 之

圖．令 $OA=a$，於其右側之延線上取 $AB=b$，則 $OB=x=a+b$．(2)作 $x=a-b$ 之圖．令 $OA=a$，由A於其反

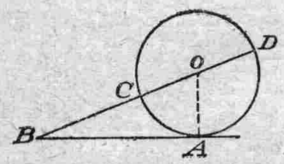


對之向，取 $AB=b$，則 OB 表 x 之值．若 $b>a$，則 x 之值爲負．此時就絕對值考之，爲無意義．然若於其位置加以思考，知 x 之負值，可由 o 與其正值之反對方向取之，即 x 之負值．可反對於正方向 OA 而取之，此方法爲笛卡兒所創，即代數學之正負相反對之符號對應於幾何學之反對之向也．今更詳言之，一次式之正值，以由一點於某方向所引之直線表示之，而其負值可以由同一點於反對方向所引之直線表示之．(3)作方程式 $x^2-ax+b^2=o$ 之根．於代數學知二次方程式 $x^2+px+q=o$ 之二根之和爲 $-p$，而二根之積爲 q．故於本題命二根爲 x_1，x_2，則 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=b^2$．由此等關係明知二根俱爲正實數．因二根之和爲 a，其積爲 b^2，故任何根爲正．故本題成爲「知二線之和爲 a，其積爲 b^2，求作此二線」．引 $AB=a$ 以 AB 爲徑作半圓，而 AC 垂直於 AB，使其長等於 b．引 CD 平行於 AB，交半圓周於 D．引 DE 垂直於 AB，交 AB 於 E，



則 AE 及 EB 爲所要之二直線．若 $b>\frac{1}{2}a$，即 $a<2b$，則 CD 不交於圓，故二根爲虛根．若 $a=2b$，則 CD 切於圓，而二根各等於 $\frac{a}{2}$．(4)作方程式 $x^2+ax+b^2=o$ 之根．此方程式可於 $x^2+ax+b^2=o$ 變 x 爲 $-x$ 而得之．故變 $x^2-ax+b^2=o$ 之根之符號即可得 $x^2+ax+b^2=o$ 之根．由是本題之二線之絕對值與前題同．(5)作方程式 $x^2-ax-b^2=o$ 之根．此時二根有反對之符號，因二根之積 $-b^2$ 爲負也．命 x_1 爲正根，x_2 爲負根之絕對值則 $x_1-x_2=a$，$x_1x_2=b^2$；由是本題成爲「知二線之差

爲a,其積爲b^2,求作此二線.」以O爲中心,$\frac{1}{2}a$ 爲半徑作圓,過此圓周之任意



點A,作切線AB=b.而連BO,且延長之,交圓周於C及D,則BC,BD,爲所要之二線. (6)作方程式 $x^2+ax-b^2=o$之根.此方程式可於 $x^2-ax-b^2=o$ 變x爲 $-x$ 而得之.故本題之二線之絕對値之作圖法,與前題同.

【作圖紙】Plotting paper.〔幾〕即方格紙.

【作圖題】Problem.〔幾〕作圖題者,求作圖之問題之謂也.初等幾何學之作圖法,有總合法及解析法.其他尙有軌跡之交法,平行移動法.詳各條.

【作圖幾何學】Constructive geometry.〔幾〕作圖幾何學者,以已知件爲關鍵,而硏究幾何學的作圖,幾何學之一分科也.決定有形的作圖爲實用作圖幾何學之目的,決定想像的作圖(即取有形的作圖之極限者)爲理論作圖幾何學.實用作圖幾何學(或僅稱實用幾何學),器械學家,建築家,測量家,工程師等多用之,用數學用器具以作圖.實用幾何學,用矩以引直線,用兩脚規以畫圓.理論作圖幾何學引直線畫圓爲公法所許者.

克

【克】Gramme 或 Gram.〔算〕即兣,米突制中之重之基本單位,合我國舊制庫平0.0268兩.十兣曰兙(decagram),百兣曰兛(hectogram),千兣曰兞(kilogram),萬兣曰兝(myriagram),千兞曰公鐓(噸).而一兣之十分之一曰兺(decigram),百分之一曰兡(centigram),千分之一曰兞(milligram),皆以十進.自我國加入萬國度量衡同盟會後,命兞爲公斤,兣爲公分.一兞合舊制庫平26.8兩,1.675斤.

【克勞孫級數】Clausen's series.〔三〕

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=2\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdots\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7}\right)^5\cdots\cdots\right\}.$$

此式可用以求圓周率,爲德人克勞孫(Clausen,1801－?)發明,故名.

【克雷洛方程式】Clairaut's equation.〔微〕見高次一階微分方程式條.

初

【初等代數學】Elementary algebra.〔數〕初等代數學者,普通論自代數學之始以至正整指數之二項式定理之分科之謂.然初等爲對於高等而言,無劃然之界限.

【初等幾何學】Elementary geometry.〔數〕見幾何學條.初等代數學,於代數學中,對於高等無劃然之界限,不過代數學之初步之部分之謂而已;初等幾何學,於幾何學中,對於高等有劃然之界限.

判

【判別式】Discriminant.〔代〕方程式之判別式爲其係數之一重函數,等於其各二根之差之平方之積,而判別式消滅即示該方程式有等根,故可用以判別方程式之根.二次方程式$a_0x^2+2a_1x+a_2=0$之判別式爲$\frac{4}{a_0^2}(a_1^2-a_0a_2)$.三次方程式$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$之判別式爲$-\frac{27}{a_0^6}(G^2+4H^3)$但$G=a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$, $H=a_0a_2-a_1^2$;故其判別式即爲$\frac{27}{a_0^4}(3a_1^2a_2^2+6a_0a_1a_2a_3-a_0^2a_3^2-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3)$.四次方程式$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$之判別式爲$\frac{256}{a_0^6}(I^3-27J^2)$,但$I=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2$, $J=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_4a_1^2-a_2^3$.又$f(x)=0$之判別式爲$f(x)=0$與$f'(x)=0$之消去式.用判別式以討論方程之根,見二次方程式,三次方程式等條.

利

【利子】Interest.〔算〕〔代〕即利息.

【利息】Interest.〔算〕〔代〕借人以銀錢,至返還時,比本金增多若干以爲酬報,此增多之數謂之利息.利息概算爲本金之幾分幾釐,但除日利在外(見利率條.)金錢借貸之利息,借貸者雙方可結契約,然關於借貸,上訴於裁判所時有一定之制裁,蓋因重利困負債者,流毒於社會也.其所謂制裁者,本金百元以下,年利至二分,本金百元以上千元以下,年利至一分五釐,本金千元以上年利至一分二釐.又法律上之利息民事爲年利五釐,商業爲年利六釐.利息又有稱爲利子.關於利息又可參看利率條.

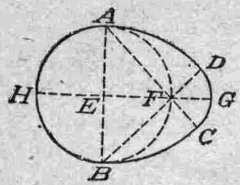
【利率】Rate of interest.〔算〕〔代〕利率者,定期內利息對於本金之百分率之謂也.利率爲本金之十分之一爲一分,百分之一爲一釐,千分之一爲一毫,……利率多以年計,而謂之年利.又利率以月計者謂之月利.又以日計者謂之日利.例如日利三分即洋百元一日之利息爲三分也.

助

【助變數】Auxiliary variable.〔代〕與補助未知數同,詳該條.

卵

【卵形】Oval.〔幾〕卵形之簡單者,如次所示.AFBH爲以E爲心之圓,弧AD,BC爲各以A,B爲心者,弧DGC爲以F爲心者.今命AFBH圓之半徑爲r,則卵形周圍之長$=\pi r\left(3-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,而其面積



$=\{\pi(3-\sqrt{2})-1\}r^2$.

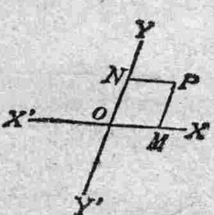
均

【均數】Mean.〔代〕卽平均數,見該條.

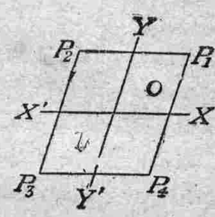
【均中比例】Alligation.〔算〕卽混合法,見該條.

坐

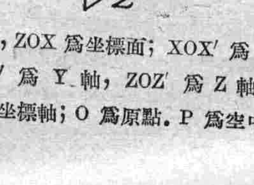
【坐標】Co-ordinates.〔幾〕平面內一點之位置,可以該點由相交之二定直線之一,而平行於他直線之距離表示之,此二距離謂之該點之坐標或縱橫線,二定直線謂之坐標軸或軸,其在水平方向者曰橫軸或X軸,其他曰縱軸或Y軸.坐標之平行於橫軸者曰橫坐標或橫線,平行於縱軸者曰縱坐標或縱線.又二軸之交點曰原點.如圖,XOX′爲橫軸,YOY′爲縱軸,O爲原點,P爲軸之平面內任意之點,作PM,PN各平行於YOY′,



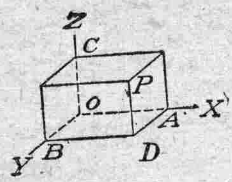
XOX′,則OM或NP爲P點之橫坐標,ON或MP爲P點之縱坐標.橫坐標恆以x表之.縱坐標以y表之.知一點之坐標爲x,y而定其點,於OX取OM=x、於OY取ON=y,過M,N作直線各平行於縱軸及橫軸,而交於P,則P爲所求之點.惟定點以如次爲便.取OM=x,過M作MP平行於Y軸,而使等於y,則P爲所求之點,坐標之向右向上量者命爲正,向左向下者爲負.故在OX與OY間之平面內之一點P_1之二坐標皆爲正;在OX′與OY間之P_2點之橫坐標爲



負,縱坐標爲正;在OX′與OY′間之P_3點之二坐標皆爲負;在OX與OY′間之P_4點之橫坐標爲正,縱坐標爲負.空中一點之位置,可以該點由三相交平面之一而平行於他二平面之交線之距離表示之.此三距離謂之該點之坐標,三平面謂之坐標面,每二坐標面之交線謂之坐標軸,而其交點曰原點.如圖XOY,



YOZ,ZOX爲坐標面;XOX′爲X軸,YOY′爲Y軸,ZOZ′爲Z軸,總稱之爲坐標軸;O爲原點.P爲空中任意

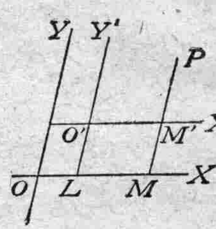


一點，過 P 作三平面各平行於三坐標面，而各交 X 軸，Y 軸，Z 軸於 A，B，C，則 OA，OB，OC 爲 P 點之坐標．常以 x，y，z 表之，而各稱爲 x 坐標，y 坐標，z 坐標．知一點之坐標爲 x，y，z 而定該點，於 X 軸取 OA=x，於 Y 軸取 OB=y，於 Z 軸取 OC=z，過 A，B，C 作平面平行於坐標面，命此三平面交於一點 P，則 P 爲所求之點．惟定點以如次爲便．於 X 軸上取 OA=x，由 A 於 Y 軸之平行線上取 AD=y，由 D 於 Z 軸之平行線上取 DP=z，則 P 爲所求之點．若 a，b，c 爲 P 點之坐標，則 $X'YZ$，$XY'Z$，XYZ'，$X'Y'Z$，$X'YZ'$，$X'Y'Z'$ 各八分空間內，在同距離處之點之坐標各爲 $(-a,b,c)$，$(a,-b,c)$，$(a,b,-c)$，$(-a,-b,c)$，$(-a,b,-c)$，$(a,-b,-c)$，$(-a,-b,-c)$．

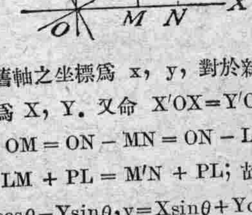
【坐標面】Co-ordinate planes．〔幾〕見坐標條．

【坐標軸】Co-ordinate axis．〔幾〕見坐標條．

【坐標之變換】Transformation of co-ordinates．〔幾〕解析幾何學中，有時將一組坐標軸變成他組坐標軸，於研究時甚覺便利，而由對於舊坐標軸點之坐標或線之方程式以求其對於新坐標軸之坐標或方程式之運算，謂之坐標之變換．平面內坐標之變換：（1）原點變而兩軸之方向不變．如圖命 OX，OY 爲舊軸，



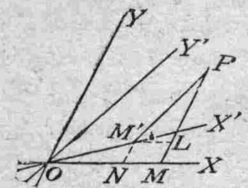
$O'X'$，$O'Y'$ 爲新軸，且命新原點 O' 對於舊軸之坐標爲 x',y'．命任意點 P 對於舊軸之坐標爲 x,y，對於新軸爲 X,Y．則 $OM=OL+O'M'$，及 $PM=MM'+M'P=LO'+M'P$；$\therefore x=X+x'$，$y=Y+y'$．此公式不論斜軸或直交軸皆爲眞．（2）原點不變而兩直交軸旋轉 θ 角．命 OX，OY 爲舊軸，OX'，OY' 爲新軸，P 點對



於舊軸之坐標爲 x，y，對於新軸之坐標爲 X，Y．又命 $X'OX=Y'OY=\theta$，則 $OM=ON-MN=ON-LM'$，$PM=LM+PL=M'N+PL$；故得 $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$，$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$．

（3）原點不變而斜交軸由一組變成他組．

命 XOY=ω, XOX′=α, XOY′=β.則



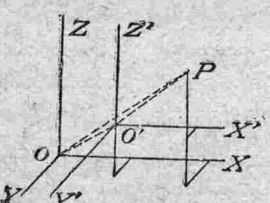
由圖 OM=ON+NM=ON+M′L=

$$\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}OM'+\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}M'P,$$

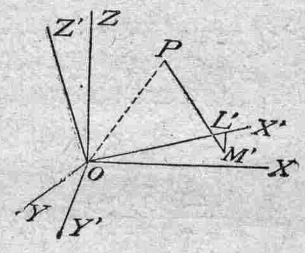
$$MP=NM'+LP=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}OM'+\frac{\sin\beta}{\sin\omega}M'P.$$

故$x\sin\omega=X\sin(\omega-\alpha)+Y\sin(\omega-\beta)$, $y\sin\omega=X\sin\alpha+Y\sin\beta$. 若由一組斜交軸,變成直交軸,惟原點與 x 軸不變,則於上式命$\alpha=0$,$\beta=90^0$,而得 $x\sin\omega=X\sin\omega-Y\cos\omega$,$y\sin\omega=Y$. (4)若原點變爲點$(x',y')$,而兩軸之方向俱變.則於(2)(3)之公式加以 x', 及 y' 即可.若 (1) 與 (2) 之變化同時並生,則 $x=x'+X\cos\theta-Y\sin\theta$, $y=y'+X\sin\theta+Y\cos\theta$.

空間內坐標之變換　(1)原點變而新坐標軸平行於舊坐標軸.命 P 點對於舊直



交軸 OX, OY, OZ 之坐標爲 x, y, z, 對於新直交軸之坐標爲 X, Y, Z, 新原點 O′ 對於舊軸之坐標爲 f, g, h. 因在各軸上 OP 之射影,等於 OO′, OP 之射影和,由是得 $x=X+f$, $y=Y+g$, $z=Z+h$. (2)原點不變而直交軸由一組變成他組. 命 P 點對於舊軸 OX, OY, OZ 之坐標爲 x, y, z, 對於新軸之坐標爲 X, Y, Z,



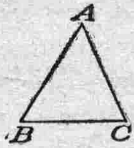
且命新軸對於舊軸之方向餘弦各爲 (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3). 因 OP 在 OX 軸上之射影爲 x, 又 OL′, L′M′, M′P 之射影之和爲 $l_1X+l_2Y+l_3Z$, 故 $x=l_1X+l_2Y+l_3Z$. 同樣 $y=m_1X+m_2Y+m_3Z$, $z=n_1X+n_2Y+n_3Z$. (3)若原點與軸俱變, 則合(1),(2)之結果即可. 即 $x=f+l_1X+l_2Y+l_3Z$, $y=g+m_1X+m_2Y+m_2Z$, $z=h+n_1X+n_2Y+n_3Z$.

夾

【夾角】Included angle 或 Contained angle. 〔幾〕二直線或弧之間所夾之角,謂之夾角. 例如知三角形之二邊及其夾角求作其形時之夾角. 又如球之二大圓

弧之夾角.前者常用之,後者用之較少.

【夾邊】Included side或Contained side 〔幾〕即邊之兩端為二角之角頂者之謂，如圖 BC 為 $\angle B$ 及 $\angle C$ 之夾邊.



完

【完數】Perfect number. 〔算〕〔代〕數之為除本數外其他整除數之和者，謂之完數.例如 6 之除本數外其他各整除數之和為 $1+2+3=6$. 其他如 28,496 皆為完數,因 $28=2^2\times7$, 故 28 之整除數之和為 $\frac{(1-2^3)(1-7^2)}{(1-2)(1-7)}-28=28$; 又 $496=2^4\times31$, 故 496 之整除數之和為 $\frac{(1-2^5)(1-31^2)}{(1-2)(1-31)}-496=496$.若 2^n-1 為素數,則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 為完數.因 2^n-1 為素數,故 $2^{n-1}(2^n-1)$ 之素因數為 2 及 2^n-1. 故 $2^{n-1}(2^n-1)$ 之整除數之和為 $\frac{(1-2^n)\{1-(2^n-1)^2\}}{(1-2)\{1-(2^n-1)\}}-2^{n-1}(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)$, 故 $2^{n-1}(2^n-1)$ 為完數.

【完全商】Complete quotient. 〔算〕〔代〕完全商對於部分商而言，商之全部之謂也. 例如以 37 除 7992,商之百位為 2, 十位為 1, 個位為 6. 即此 200,10,6 為部分商,而合之得 216 為完全商.又如以 $a-b$ 除 a^3-b^3,商之第一項為 a^2,第二項為 ab,第三項為 b^2, 而合之得 a^2+ab+b^2 為完全商.

```
37)7992(216
   74
   ──
    59
    37
   ───
   222
   222
   ───
```

【完全數】Whole number. 〔算〕數之適為單位若干倍而無零餘者，謂之完全數,與整數同. 於算術中,完全數與整數同意義用之，然於代數學中常用整數之語,而鮮用完全數之語.

【完全平方】Prefect square 或 Complete square 或 Exact square. 〔算〕〔代〕某數或式之為平方者之謂也.例如 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,……以其各為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,……之平方,故為完全平方. 而如 $a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$, $a^2+a^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 亦為完全平方.

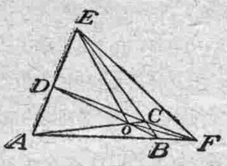
【完全立方】Perfect cube 或 Complete cube 或 Exact cube. 〔算〕〔代〕某數或式之為立方者之謂也.例如 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728,……以其各為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,……之立方,故為完全立方. 而如 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. 亦為完全立方.

【完全積分】Complete integral. 〔微〕見微分方程式條.

【完全方程式】Complete equation. 〔代〕方程式,自 x^n 至 x^0, x 之各乘冪皆完備者,謂之完全方程式.如 x^4+2x^3

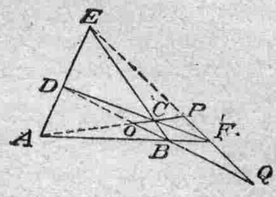
$+5x^2-7x+4=0$ 爲完全方程式.但 $x^4+5x^2-7x+4=0$ 則爲不完全方程式.

【完全四角形】Complete quadrangle 〔幾〕四點(任三點皆不爲共線點)及其六聯線謂之完全四角形. 其四點謂之四角形之頂點,其六直線謂之邊.不過同頂點之二邊謂之對邊, 對邊之三交點謂之對角點, 連對角點所成之三角形謂之完全四角形之對角三角形.如圖 A, B, C, D 爲四頂點;



AB, BC, CD, DA, AC, BD 爲六邊; AB, CD; BC, DA; AC, BD 爲對邊; E, O, F, 爲三對角點, EOF 爲對角三角形.完全四角形一雙之對邊及對角三角形之二邊成調和束線(證法見完全四邊形條).

【完全四邊形】Complete quadrilateral.〔幾〕四直線 (任三直線皆不爲共點線)及其六交點謂之完全四邊形.其四直線謂之四邊形之邊,其六點謂之頂點.不在同邊上之二頂點謂之對頂點, 聯對頂點之三直線謂之對角線. 對角線所成之三角形謂之完全四邊形之對角三角形.如圖 AB, BC, CD, DA 爲四邊;A, B,C,D,E,F 爲六頂點; A,C;B,D;E,F 爲六對頂點; AC,BD,EF 爲三對角線; OPQ 爲對角三角形.完全四邊形之一雙對頂點及對角三角形之二頂點成調和列點.〔證〕就 ΔEAF 言之, EB,AP,FD,



爲共點線, DBQ 爲截線.故 AB·FP·ED=BF·PF·DA. 又 AB·FQ·ED=−BF·QE·DA. ∴PF·QF=−PF·QE.故 E, P, F, Q 成調和列點(而於完全四角形,則 OE,OC,OF,OB 成調和束線)。同樣可證其餘.

【完全微分方程式】Exact differential equation.〔微〕微分方程式 $P\frac{dy}{dx}+Q=0$, 或 $Qdx+Pdy=0$ 中, P 與 Q 爲 x 與 y 之函數,若 $\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$ 時, 則謂之完全微分方程式.其解答爲: $\int Q dx+\int\{P-\frac{\partial}{\partial y}\int Qdx\}dy=C$,

或 $\int Pdy+\int\{Q-\frac{\partial}{\partial x}\int Pdy\}dx=C$. 若於微分方程式乘以某因數, 則成完全微分方程式時, 此因數稱爲積分因數. 例如:(1)同次微分方程式 $Qdx\pm Pdy=0$ 之積分因數爲 $\frac{1}{Qx\pm Py}$。

(2) $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}}{P}=f(x)$ 之積分因數爲 $e^{\int f(x)dx}$, $f(x)$ 單爲 x 之函數.

(3) $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\partial Q}{\partial y}}{Q}=f(y)$ 之積分因數爲 $e^{\int f(y)dy}$，$f(y)$單爲 y 之函數.

(4)$x^{\alpha}y^{\beta}(mydx+nxdy)=o$ 之積分因數爲 $x^{km-1-\alpha}y^{kn-1-\beta}$，k 爲任意常數. 此時原式爲$\dfrac{1}{k}d(x^{km}y^{kn})=o$.

又三自變數之微分方程式 $Pdx+Qdy+Rdz=o$ 爲完全微分方程式之必要且充足之條件爲$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$. 但假定偏微分係數爲有連續性. 以上所述爲一階微分方程式,至n階之完全微分方程式則如次. $f\left(\dfrac{d^ny}{dx^n},\cdots\cdots,\dfrac{dy}{dx},y\right)=X$ 之式,旣由 $f\left(\dfrac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}},\cdots\cdots,\dfrac{dy}{dx},y\right)=\int Xdx+C$ 微分得之，則前式稱爲完全微分方程式.若 P_0，P_1，……，P_n 爲 x 之函數,則 $P_0\dfrac{d^ny}{dx^n}+P_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+P_ny=o$。若欲其爲完全微分方程式,則必須有下列之條件: $P_n-P'_{n-1}+P''_{n-2}-\cdots\cdots+(-)^nP_o^{(n)}=o$,但 $P^{(n)}$ 表P之關於 x 之 n 階微分係數。

希

【希臘字母】Greek letters.〔數〕希臘字母有二十四,數學中常用之,其寫法與讀音如次.

大寫	小寫	讀音	大寫	小寫	讀音
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

【希臘數字】Greek numerals.〔算〕

α'	β'	γ'	δ'	ϵ'	ς'	ζ'	η'	θ'	ι'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\iota\alpha'$	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	o'	π'	ρ'	
11	20	30	40	50	60	70	80	90	
ρ'	σ'	τ'	υ'	ϕ'	χ'	ψ'	ω'		
100	200	460	400	500	600	700	800		
ω'	${}_1\alpha$	${}_1\beta$							
900	1000	2000							

延

【延線】Production 或 Prolongation.〔幾〕有限直線之延長部分之謂.亦稱延長線或引長線.

【延長線】Production 或 Prolongation.〔幾〕卽延線,見該條.

形

【形】Shape.〔幾〕物體有方者,有圓者,

有三角者,有橢圓者,尚有其他種種相異之形狀,此物體之形狀謂之形.

【形數】Figurate number.〔代〕即擬形數,見該條.

【形狀公理】Axiom of shape.〔幾〕幾何公理之一種,有二條:(1)圖形可不變其形狀大小得移其地位.(2)兩形相疊,若處處密合,則兩形全等.

成

【成】Tenth.〔算〕百分法中以十分之一爲成.

【成分法】Percentage.〔算〕卽百分法,詳該條.

投

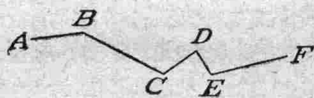
【投影】Projection.〔幾〕卽射影,見該條.

【投影幾何學】Projective geometry〔幾〕亦稱射影幾何學,卽綜合幾何學,見近世幾何學條.

折

【折扣】Discount.〔算〕〔代〕若持有期票之人,欲於定期之前,支取現款,則須於支款內扣除若干利息,是謂之折扣.折扣外所付之款謂之現價.折扣所用之利率,謂之折扣率.折扣有二,卽眞折扣與銀行折扣是也.眞折扣爲期票之現價之利息,票面金額與眞折扣之差爲眞現價.銀行折扣爲票面金額(現價眞折扣之和)之利息,故銀行折扣等於眞折扣與眞折扣之利息之和.故銀行折扣恆大於眞折扣.命 P 爲票面之金額,V 爲眞現價,D 爲眞折扣,r 爲年折扣率,n 爲年數,則 $V=\frac{P}{1+nr}$, $D=\frac{Pnr}{1+nr}$.而銀行折扣 $=Pnr$.例如欲支 6 個月後 630 元之期票,年 1 分之折扣率,求眞現價,眞折扣與銀行折扣.六月之利率爲 5 釐,故其眞現價爲 $630\div(1+.05)=600$ 元,而眞折扣爲 $600\times(.05)=30$ 元,銀行折扣爲 $630\times(.05)=31.5$ 元.

【折線】Broken line.〔幾〕折線者,種種直線端與端相接而成者之謂,如圖所示



之 ABCDEF 線爲折線.

【折扣率】Rate of discount.〔算〕〔代〕見折扣條.

【折成法】Percentage.〔算〕卽百分法,見該條.

【折面四角形】Gauche quadrangle.〔幾〕見挾四邊形條.

更

【更迭之理】Alternando.〔代〕〔幾〕四量成比例時,其第二項與第三項可交換之,是謂之更迭之理.例如 $a:b=c:d$,則 $a:c=b:d$.

束

【束線】Pencil.〔幾〕一組共點線，謂之束線，其交點謂之頂點或焦點，其各直線謂之射線或元素。束線之最特別者，爲調和束線，及等角束線，見各條。

步

【步】〔算〕我國長度名，屬營造尺庫平制，即五尺也。合公尺制之十六公寸。

【步合算】Percentage.〔算〕日本稱百分法曰步合算，詳百分法條。

求

【求積法】Mensuration.〔算〕〔幾〕求積法，爲幾何學之一分科，說明由直線及角之已知件以求線之長，面積，體積之法者也。茲列述之如次：

I. 線之長.

1.〔圓周〕若圓之半徑爲 r，圓周爲 C，則

$$C=2\pi r \cdots\cdots(1)$$

但 $\pi=3.1416$。

2.〔弧〕若 C 爲任意之長，a 爲其弧之度數，則 $C=\frac{a\pi r}{180}$ ……(2)

若弧 C 之弦爲 c，其弧之半之弦爲 c′，則

$$C=\frac{8c'-c}{3}\text{(近似數)} \cdots\cdots(3)$$

3.〔橢圓〕若兩半徑爲 a，b，周圍爲 C，

則 $C=\frac{199}{200}\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$

(近似數)……(4)

II. 面積.

1.〔平面三角形〕命A爲面積，b爲底，h爲高，則 $A=\frac{1}{2}bh$ ……(5)

又命 C 爲 a，b 二邊之夾角，則

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C \cdots\cdots(6)$$

命三邊 a，b，c 之和之半爲 s，則

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots\cdots(7)$$

2.〔矩形〕命 a，b 爲其相鄰二邊，則

$$A=a\cdot b \cdots\cdots(8)$$

3.〔正方形〕a 爲其一邊，則

$$A=a^2 \cdots\cdots(9)$$

4.〔平行四邊形〕命底爲 b，高爲 h，則

$$A=b\cdot h \cdots\cdots(10)$$

又命兩鄰邊爲 a，b 其夾角爲 C，則

$$A=ab\sin C \cdots\cdots(11)$$

5.〔菱形〕命兩對角線爲 d，d′，則

$$A=\frac{1}{2}dd' \cdots\cdots(12)$$

6.〔梯形〕命二底爲 b，b′，高爲 h，則

$$A=\frac{1}{2}(b+b')h \cdots\cdots(13)$$

7.〔任意四邊形〕命兩對角線爲 d，d′ 其夾角爲 ϕ，則

$$A=\frac{1}{2}dd'\sin\phi \cdots\cdots(14)$$

8.〔正多邊形〕命邊數爲 n，一邊之長爲 a，則 $A=n\left(\frac{a}{2}\right)^2\Big/\tan\frac{\pi}{n}$ ……(15)

又命內切圓之半徑爲 r，則

$$A=nr^2\tan\frac{\pi}{n} \cdots\cdots(16)$$

9.〔圓〕命半徑爲 r，則

$$A=\pi r^2 \cdots\cdots(17)$$

10.〔扇形〕命 n 爲其角之度數，則

$$A=\frac{n\pi r^2}{360}\cdots\cdots(18)$$

11.〔橢圓〕命兩半徑爲 a, b，則

$$A=\pi ab\cdots\cdots(19)$$

12.〔直圓柱〕命底之半徑爲 r，高爲 h，側面積爲 A，則

$$A=2\pi rh\cdots\cdots(20)$$

13.〔直圓錐〕命底之半徑爲 r，斜高爲 l，側面積爲 A，則 $A=\pi rl\cdots\cdots(21)$

14.〔正圓臺〕命兩底之半徑爲 r, r′，斜高爲 l，側面積爲 A，則

$$A=\pi(r+r')l\cdots\cdots(22)$$

15.〔球〕命球之半徑爲 r，則

$$A=4\pi r^2\cdots\cdots(23)$$

16.〔球帶〕命高爲 h，則

$$A=2\pi rh\cdots\cdots(24)$$

17.〔月形〕命 N 爲其角度之度數，則

$$A=\frac{\pi r^2N}{90}\cdots\cdots(25)$$

18.〔球面三角形〕命 E 爲球面過剩，則

$$A=\frac{\pi r^2E}{180}\cdots\cdots(26)$$

19.〔球面多邊形〕命 E 爲球面過剩，則

$$A=\frac{\pi r^2E}{180}\cdots\cdots(27)$$

但 $E=T-(n-2)180$，而 n 爲邊數，T 爲諸角之和。

III. 體積.

1.〔直角平行六面體〕命其體積爲 V，交於一頂點之三稜爲 a, b, c，則

$$V=abc\cdots\cdots(28)$$

2.〔立方體〕命其一邊爲 a，則

$$V=a^3\cdots\cdots(29)$$

3.〔平行六面體〕命底之長爲 a，廣爲 b，高爲 h，則 $V=abh\cdots\cdots(30)$

4.〔角柱〕命高爲 h，底面積爲 B，則

$$V=Bh\cdots\cdots(31)$$

5.〔角錐〕命高爲 h，底面積爲 B，則

$$V=\frac{1}{3}Bh\cdots\cdots(32)$$

6.〔角臺〕命高爲 h，兩底之面積爲 B, B′，則 $V=\frac{1}{3}h(B+B'+\sqrt{BB'})\cdots\cdots(33)$

7.〔直圓柱〕命高爲 h，底之半徑爲 r，則

$$V=\pi r^2h\cdots\cdots(34)$$

8.〔直圓錐〕命高爲 h，底之半徑爲 r，則 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h\cdots\cdots(35)$

9.〔正圓臺〕命高爲 h，兩底之半徑爲 r, r′，則 $V=\frac{1}{3}h(r^2+r'^2+rr')\pi\cdots\cdots(36)$

10.〔球〕命半徑爲 r，體積爲 V，則

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\cdots\cdots(37)$$

11.〔球分〕命其底之球帶之高爲 h，則

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2h\cdots\cdots(38)$$

12.〔球盤〕命其兩底之半徑爲 r, r′，高爲 h，則 $V=\frac{1}{2}h(\pi r^2+\pi r'^2)+\frac{1}{6}\pi h^3\cdots\cdots(39)$

13.〔球劈〕命其月形之角爲 A°，球之半徑爲 r，則

$$V=\pi r^3\times\frac{A^\circ}{270^\circ}\cdots\cdots(40)$$

14.〔三角傍面臺〕命兩底之面積爲 B, B′, 中央截面之面積爲 M, 則

$$V=\frac{1}{6}h(B+B'+4M)\cdots\cdots(41)$$

泛

【泛係數】Indeterminate coefficients.〔代〕即不定係數,見該條.

沙

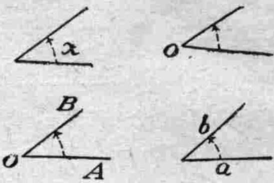
【沙】〔算〕小數名. 十塵爲沙,十沙爲纖. 沙卽 .00000001 也.

系

【系】Corollary.〔數〕系者,可由一命題直接推得之命題也.又稱推論.例如已證明「三角形之二邊相等, 則其對角亦相等」之定理,則可直接推得次系: 卽「等邊三角形亦爲等角三角形」.又如已證明由 n 文字每次取 r 之排列之數爲 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$, 則可推得 n 文字每次全取之之排列之數爲 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$.

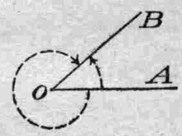
角

【角】Angle.〔幾〕由一點引二直線謂之角,其二直線謂之角之二邊,此一點謂之角頂.某直線以其一端爲樞而迴轉時,謂之畫角.角之大不關於其邊之長,而關於其一邊由他邊之位置所迴轉之量. 角之與時鐘之針相反對之方向迴轉者爲正,反之,爲負.而常以弧形之矢示之. 角有以在角內之一字母表之者, 如角 α 或 $\angle\alpha$ 或 $\overset{\frown}{\alpha}$.有以在角頂之一字表之者,如



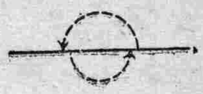
角 O,$\angle O$ 或 $\overset{\frown}{O}$,有以三字母表之者,如角 AOB,$\angle AOB$ 或 $A\hat{O}B$,但此時角頂之字母須置於中間. 又有以二邊之字母表之者,如角 (a,b).

如圖,直線 OA, OB 間之角, OB 由 OA 迴轉有右迴與左迴二種,



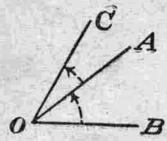
而此二角謂之互爲共軛角 (Conjugate angles),大者謂之優角(Major angle), 小者謂之劣角 (Minor angle). 一直線以其一端爲樞而迴轉再至原位置時, 所畫之角謂之周角(Circum-angle, 或 Perigon).

角之二邊在一直線上而在反對之方向時, 其角謂之平角(Straight angle).

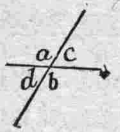


故平角爲周角之半.角之大於平角而小於周角者, 謂之凹角 (Reflex angle 或Re-

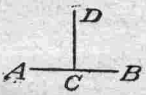
entrant angle).二角有同角頂且有一公共邊在於其間者，謂之鄰角(Adjacent angles)，如圖之∠AOB，∠AOC是也.



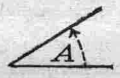
二角有同頂點，且其一角之邊爲他角之邊之延線者，則此二角謂之對頂角(Vertical angles)，如圖a與b，c與d是也.



一直線與他直線相會，其所作之隣角相等者，則其各角謂之直角(Right angle)，如圖之∠DCA，∠DCB是也.



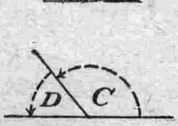
角之小於一直角者，謂之銳角(Acute angle)，如圖之A角是也.



角之大於一直角而小於一平角者，謂之鈍角(Obtuse angle)，如圖之B角是也.

二角之和等於一直角者，則此二角謂之互爲餘角(Complement)，如圖之∠A與∠B是也.

二角之和等於一平角者，則此二角謂之互爲補角(Supplement)，如圖∠C與∠D是也.



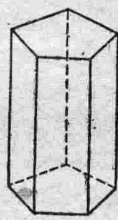
【角度】Angular measure.〔幾〕〔三〕角之大也，設度，分，秒之單位以測角度，即直角之九十等分之一曰度，一度之六十等分之一曰分，一分之六十等分之一曰秒.即

1直角＝90度＝5400分＝324000秒.

1度＝　60分＝　3600秒.

1分＝　　60秒.

【角柱】Prism.〔幾〕角柱亦稱稜柱，即相對二面(底面)爲全相等之多邊形，而其相當邊互相平行，其餘之各面(側面)爲平行四邊形之多面體之謂也.

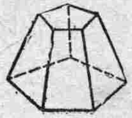


兩底面間之距離謂之高，側面與側面之交線謂之側稜.側稜垂直於底面者謂之直角柱，側稜爲底面之斜線者謂之斜角柱，直角柱之底面爲正多邊形者謂之正角柱.角柱因其底面爲三角形，四邊形，五邊形等等，而稱之爲三角柱，四角柱，五角柱等等.底面爲四邊形以上之角柱可分爲若干三角柱(各三角柱之高等於原角柱之高).(1)任意角柱之側面積等於其直截面之周圍與其側稜之積.(2)任意角柱之體積等於底面積乘高.

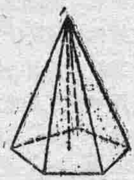
【角頂】Vertex of an angle.〔幾〕見角條.

【角臺】Frustum of a pyramid 或 Prismoid.〔幾〕角臺亦稱平截角錐，即角錐之底與平行於其底之截面所含之部分

之謂，若以一平行於正角錐之底之平面截之，則所得之角臺謂之正角臺．命角臺之二底面爲 B, B′, 高爲 h, 則其體積 $V=\frac{1}{3}h(B+B'+\sqrt{BB'})$.

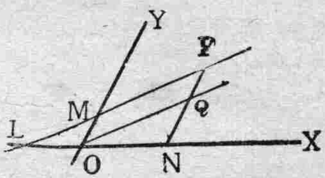


【角錐】Pyramid.〔幾〕角錐者，由一多角形(底面)及以其邊爲底而有同一頂之諸三角形而成之多面體也．此諸三角形之面，謂之角錐之側面．兩側面之交線謂之側稜．由頂至底面之垂直距離謂之高．角錐之底面爲正多邊形而高過底面之中心者，謂之正角錐，非然者謂之斜角錐．又角錐因其底面爲三角形，四邊形，五邊形等等而稱之爲三角錐，四角錐，五角錐等等．

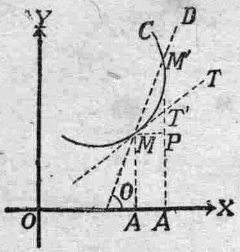


(1) 正角錐之側面積爲其底之周圍與其斜高之積之半． (2)任意角錐之體積爲底面積與高之積之三分之一．

【角係數】Angular coefficient.〔幾〕方程式或函數之軌跡與 x 軸所成正方向之角，名曰軌跡之斜率角．以軌跡上任意一點之坐標所表之斜率角之函數，名曰方程式或函數之角係數，或稱爲軌跡關於 X 軸之斜率．角係數可求之於次：(一)軌跡爲直線者：如圖 (1)，設 LMP 爲截兩軸於 L, M 之任意直線，此直線中之任意一點 P 之坐標爲 (x, y)．平行於 Y 軸引 PN，平行於 LMP 引 OQ，則 NP

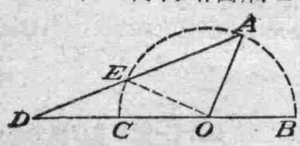


$=NQ+QP$. 但 $ON=x$, $NP=y$, 而命 $\angle XOY=\omega$, 斜率角 $NLP=\angle NOQ=\phi$, $\frac{NQ}{ON}=\frac{\sin\phi}{\sin(\omega-\phi)}=m$, $QP=OM=k$, 則 $NP=m\cdot ON+OM$, 即 $y=mx+k$．此式稱爲直線 LMP 之方向方程式或傾斜方程式．k爲直線LMP關於Y軸之截部．m即直線LMP 之斜率或其方程式之角係數．由 $y=mx+k$, 得 $m=\frac{y-k}{x}$．又由 $m=\frac{\sin\phi}{\sin(\omega-\phi)}$, 得 $\tan\phi=\frac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega}$, 或 $m=\frac{\tan\phi}{\sin\omega-\tan\phi\cos\omega}$, 如爲直交軸，則 ω 爲直角，而 $m=\tan\phi$．故於直交軸 $m=\tan\phi=\frac{y-k}{x}$, 即一直線方程式之角係數，爲其軌跡之斜率角之正切．若直線方程式爲 $Ax+By+C=0$ 之形狀，就 y 解之，得 x 之係數，即 $-\frac{B}{A}$, 爲其角係數． (二)軌跡爲曲線者：如圖 (2)，曲線 C 爲函數 $y=f(x)$ 之軌跡．設 x, y 爲 C 上任意一點 M 之坐標，則與 M 相鄰之他一點 M′ 之坐標可以 $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ 表之．命過 M, M′ 之割線 D 與 OX 軸所成之角爲 θ，於是 $\theta=$

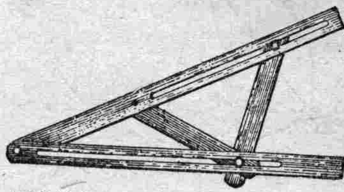


∠M'MP，故 $\tan\theta=\frac{M'P}{MP}=\frac{M'A'-PA'}{OA'-OA}$．因 $M'A'=y+\Delta y$，$PA'=y$，$OA'=x+\Delta x$，$OA=x$，故 $\tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$．設 M 一定，當 M' 移動而趨進於 M 時，則割線 D 趨進於 M 之切線 T，而以 T 爲其極限，亦卽當 Δx 與 Δy 趨進於零時，其比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 趨進於一極限值．此極限值謂之曲線 C 上M點切線 T 之角係數．茲以 θ' 代T與 X 軸所成之角或 ∠TMP，得 $\tan\theta'=\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$．故曲線函數 $y=f(x)$ 上之任意一點之切線之角係數者，卽其函數 $y=f(x)$ 之微分係數也．

【角之三等分】The trisection of an angle．〔幾〕此問題爲幾何學三大問題之一．而初等幾何學，卽直線及圓之範圍之幾何學，不能解之．今錄其用曲線之解法於次：〔第一法〕求三等分角 AOB．以 O 爲心，OA 爲半徑作圓，由 A 引割

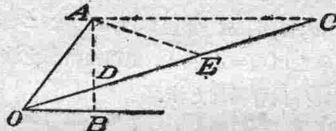


線 AED，使 DE=EO=AO，則 $\angle D=\frac{1}{3}\angle AOB$．因 $\angle OAE=\angle OEA=\angle D+\angle EOD=2\angle D$ 故也．然欲引 AED 使 DE=EO=AO，非僅用界尺及圓規所能爲．如圖之器械，爲三等分器，



爲應用上理以三等分一角者也．其法爲開相當於 DA 及 OB 之棒間之角使與所與之角能密合；則相當於 D 之角爲與角之三分之一．

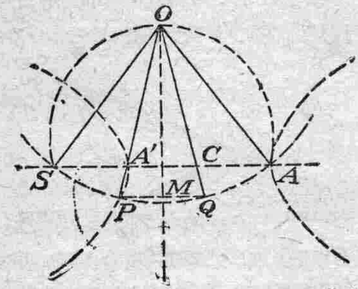
〔第二法〕命 AOB 爲與角．引 AC∥OB，及 AB⊥OB．由 O 引直線 ODC，使



DC 等於 AO 之二倍（然此亦非僅用界尺及圓規之所能爲），則 $\angle BOC=\frac{1}{3}\angle AOB$．因若命 DC 之中點爲 E，則 $AE=CE=\frac{1}{2}CD=AO$，故 $\angle AOE=\angle AEO=\angle ACE+\angle CAE=2\angle ACE=2\angle COB$ 也．

〔第三法〕作離心率等於 2 之雙曲線，命其中心爲 C，其二頂點爲 A，A'．延長 CA' 至 S，使 A'S=CA'．於 AS 上作包含等於欲三等分之角之圓弧．命 AS 之垂直二等分線與此圓弧之交點爲 O．

以 O 為心，OA 即 OS 為半徑作圓，交以 A′ 為頂點之雙曲線之枝線於 P. 則 ∠SOP 為 ∠SOA 之三分之一. 因



離心率等於 2，故 S 為此雙曲線之焦點，AS 之垂直二等分線為準線而由 P 至此垂直二等分線之距離 PM 之二倍等於 PS. 命 PM 之延線與圓弧 APS 之交點為 Q，則 PQ 為 PM 之二倍，而 AQ 等於 SP 甚明. 故 SP=PQ=QA. 故 ∠SOP=∠POQ=∠QOA. 是為帕帕斯之法. 此外尚有種種之法.

貝

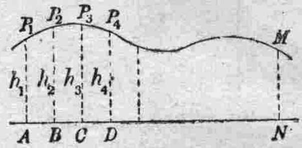
【貝治阿之法】Bezouts′ method.
〔代〕即未定乘數法，見該條.

足

【足】Foot.〔幾〕足亦稱趾，即由一點至一直線或平面引垂線或斜線時，其相交之點也.

辛

【辛普孫法】Simpson's rule. 求不規則之曲線所圍之面積，多用辛普孫之近似法. 例如求曲線 $P_1P_2\cdots M$ 所圍之面積，如圖所示，只見其曲線之一部分，為



便利計，可取直線 AN，求 P_1ANM 之面積. 如斯求得之數面積相加，即得全曲線之面積.分 AN 為若干等分，由等分點 A, B, C, D, ……作 AN 之垂線 AP_1, BP_2, CP_3……, 與曲線相交於 P_1, P_2, P_3, ……. 而命 $AB=BC=CD=\cdots=x$, $AP_1=h_1$, $BP_2=h_2$, $CP_3=h_3$, ……, 則面積 $P_1ANM=P_1ABP_2+P_2BCP_3+P_3CDP_4+\cdots\cdots=\frac{1}{2}x(h_1+h_2)+\frac{1}{2}x(h_2+h_3)+\frac{1}{2}x(h_3+h_4)+\cdots\cdots=x\left\{\frac{1}{2}(h_1+h_n)+h_2+h_3+\cdots\cdots+h_{n-1}\right\}$. 於是得次之法則.

〔法則〕二外垂線之和之半與中間諸垂線相加，以相隣二垂線間之距離乘之，即所求之面積.

邦

【邦斯累定理】Poncelet's theorem.
〔幾〕即九點圓之定理之謂，見九點圓條.

里

【里】〔算〕長度名，屬營造尺庫平制，即 1800 尺.合 576 公尺.

八畫

京

【京】〔算〕我國記數之名，萬萬曰億，萬億曰兆，萬兆曰京。

來

【來布尼茲公式】Leibnitz's formula.〔微〕亦稱來布尼茲定理．爲一種表二變數之積之第 n 次微分係數之公式．其式如次：$\frac{d^n}{dx^n}=(uv)\frac{d^nu}{dx^n}v+n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\!\underline{2}}\frac{d^{n-2}u}{dx^{r-2}}\frac{d^2v}{dx^2}+\cdots\cdots+n\frac{du}{dx}\frac{d^{r-1}v}{dx^{r-1}}+u\frac{d^nv}{dx^n}$．變數 u，v 爲 x 之函數，諸項中含變數之本身與其疊次微分係數，而微分係數之次數對應於二項定理之指數（u 與 v 可設想爲 $\frac{d^\circ u}{dx^\circ}$ 與 $\frac{d^\circ v}{dx^\circ}$），又各項之數字係數與二項定理之數字係數同一規則．此公式可由疊次微分二變數之積之方法推證之：

$$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx},\quad \frac{d^2}{dx^2}(uv)=\frac{d^2u}{dx^2}v+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}v+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(vu)=\frac{d^3u}{dx^3}v+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx}+2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx}+2\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}+u\frac{d^3v}{dx^3}=\frac{d^3u}{dx^3}v+3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx}+3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}+u\frac{d^3v}{dx^3},$$

同樣屢次爲之，即可理解上式爲眞．例題：已知 $y=e^x\log x$，求 $\frac{d^3y}{dx^3}$．設 $u=e^x$，$v=\log x$，則 $\frac{du}{dx}=e^x$，$\frac{d^2u}{dx^2}=e^x$，$\frac{d^3u}{dx^3}=e^x$，$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}$，$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$，$\frac{d^3v}{dx^3}=\frac{2}{x^3}$，代入上之公式，得 $\frac{d^3y}{dx^3}=e^x\log x+\frac{3e^x}{x}-\frac{3e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}=e^x\left(\log x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$．

例

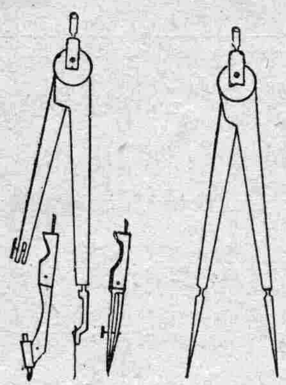
【例題】Example.〔數〕應用一般原理之一部分所作之命題曰例題，故例題多爲說明定理之性質及應用而設。

依

【依變數】Dependent variable.〔代〕即因變數，見變數條。

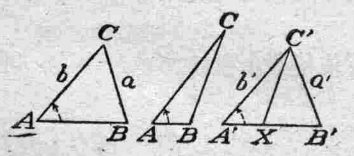
兩

【兩脚規】Compasses.〔數〕兩脚規爲由鋼製之兩脚而成，以此兩脚相交之端爲樞，可開閉自如．兩脚規有二種，一種之兩脚爲固定之兩尖錐，可爲測距離之用．一種之一脚插入尖頭之針，而其他一脚



則插入烏嘴鋼筆或鉛筆,以爲畫圓之用.

【兩意情形】Ambiguous case.〔幾〕〔三〕兩意情形如次所述.〔幾何學〕二三角形若 $a=a'$, $b=b'$, $\angle A=\angle A'$, 則 $\angle B=\angle B'$或$\angle B+\angle B'=2\angle R$.〔證〕令 $\triangle ABC$ 重置於 $\triangle A'B'C'$ 上, A 在 A′ 上, b 與 b′ 合, B 及 B′ 在 b 之同側,則因 $\angle A=\angle A'$, 故 AB 必沿 A′B′ 而相重.然 B 爲落於 B′ 上 (1), 或落於 A′B′ 上他點 X 上(2). (1)之情形爲二三角形全



合, $\angle B=\angle B'$. (2)之情形 $C'X=a=a'$, $\angle B'=\angle C'XB'$, 而 $\angle C'XA'+\angle CXB'=2\angle R$,故$\angle B+\angle B'=2\angle R$.故在本定理I. $a>b$, 則兩形爲全等. II. $a=b$, 則兩形爲全等. III. $a<b$, 則兩形爲兩意之情形. IV. $\angle B=\angle R$,兩形爲全等. V. $\angle A=\angle R$或$\angle A>\angle R$,兩形爲全等.〔三角法〕令解一三角形,已知二邊及對於其一邊之角.則 $\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$, 故 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$, 可由 $\frac{b}{a}\sin A$ 以求 $\sin B$. 如斯求 $\sin B$, 若 $\frac{b}{a}\sin A<1$, 則 B 可得兩值皆爲小於 180°, 一爲銳角,一爲鈍角.兹考究三種情形如下.

(1)若 $b\sin A>a$, 則 $\sin B>1$, 適合此情形之三角形不能成立. (2)若 $b\sin A=a$, 則 $\sin B=1$, 適合此情形之 B 值爲 90°, 故適合此情形只有一三角形.與前幾何學之情形 IV 相對應. (3)若 $b\sin A<a$, 則 $\sin B<1$, 此 B 有二值,一爲銳角,一爲鈍角. (A)若 $b<a$, 則 $B<A$, 故 B 爲銳角,而適合之三角形只有一,與幾何學之情形 I. 同. (B) 若 $b=a$, 則 $B=A$, 適合題意之三角形只有一,與幾何學之情形 II. 同. (C) 若 $b>a$, 則 B 不一定爲銳角,而 B 之二值俱合題意.故適合題意有二三角形,與幾何學之情形 III. 同.

【兩邊歧點】〔幾〕歧點之第一種.詳歧點條.

函

【函數】Function.〔數〕於二變數,前數給以一值時,後數對應之而得一值,則後數稱爲前數之函數.例如若干三角形,

其高皆同，則每三角形之面積爲其底之函數．又火車所行之路程，當速率一定時，爲其所經過時間之函數．於方程式 $y=ax^2+bx$，當 x 給以任何值時，y 必得相當之值，故 y 稱爲 x 之函數．又此時 x 稱曰自變數，y 稱曰因變數，卽函數亦可稱爲因變數也．但二數之孰爲自變，孰爲因變，則無一定，如前例若問火車經過之時間，則時間可視爲所行路程之函數．故於上之方程式，亦可謂 x 爲 y 之函數．有時於多於二之變數之中，除一數外，皆給以定值，而此一數因亦得以決定者，則此數稱爲他諸數之函數．如於方程式

$y=ax+bz+u$，y 爲 x，z，u 之函數．如前例當三角形之底及高皆變時，則其面積卽爲底及高之函數也．函數可以方程式表之，亦可以圖形表之．故(i)當自變數連續由 a 變至 b 時，函數亦連續由 A 變至 B．(ii)當自變數有小變化時，函數亦相當有小變化．但有時自變數給以定值時，反使函數成爲無意義而不能決定者，例於函數 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，如令 $x=1$，則 $y=\dfrac{0}{0}$，此爲絕對無意義也．故宜先除以 $x-I$，因此時不視 $x-1$ 爲等於零也．又於函數 $y=\sqrt{(1-x^2)}$，x 之值僅可使小於 1 或等於 1，故 x 在 -1 至 $+1$ 之範圍內，函數 y 方能決定其值．函數常以 f，F，或希臘字 ϕ，ψ，π 表之，如 $f(x)$，$\phi(x)$．是等字母 f，F…曰函數記號，此記號 $f(x)$ 須視爲一體，卽"x之函數"之意，同時對於相異之多種函數，須用相異之函數記號．$f(a)$爲表示"當 x 爲 a 時，函數 $f(x)$ 之值"之意．故如令 $f(x)$ 表函數 x^2-3x-1，則 $f(o)=-1$，$f(1)=-3$，$f(a+b)=(a+b)^2-3(a+b)-1$，$f(x)^2=(x^2)^2-3x^2-1=x^4-3x^2-1$．同一記法常用以表多種變數之函數，如 $f(x,y)$，$F(p,v)$，$\phi(x,y,z)$ 卽所以表 x 與 y；p 與 v；x，y 及 z 之函數也．故若

$$f(x,y)=3x^2-2xy-y^2+4,$$

則 $f(1,1)=3+2-1+4=8$，

$$f(a,b)=3a^2-2ab-b^2+4.$$

〔函數之種類〕函數大別之爲代數函數與超越函數．代數函數者，卽自變數與函數之關係，可以代數學之六種通常運算，卽加減乘除常數指數之冪及根表之也．而超越函數，則不能以代數學之六種通常運算表之．例如 $y=4ax^2$，$y=2px+\sqrt{yz}$ 爲代數函數，而 $y=a^x$，$y=\sin^{-1}x$ 爲超越函數．超越函數又有種種．對數函數者用對數以表之，例如 $y=\log x$．指數函數者用變數之指數，例如 $y=a^x$．圓函數或三角函數者用正弦，餘弦，正切以表之，例如 $y=\sin x$，$u=\cos z$，$z=\tan^{-1}x$．

又函數有陰陽之別．陽函數者如 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，$y=\sin z$，自變數與函數之關係顯明表示之者．陰函數如 $y^2+2xy+x^2+b=o$，$x\sin y=2a\cos y$，爲自變數與因變數相混合者．又函數有正逆之別．例如 $y=a^x$及$x=\log_a y$，前者

爲正函數,後者爲逆函數.又 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 爲正函數, $x=\sin^{-1}y$, $x=\cos^{-1}y$, $x=\tan^{-1}y$ 爲逆函數.茲將常用之函數,列舉於次.

代 數 函 數

第一對 $\begin{cases} u=f(x)+f'(x), & \text{和.} \\ f(x)=u-f'(x), & \text{差.} \end{cases}$

第二對 $\begin{cases} u=f(x)\times f'(x), & \text{積.} \\ f(x)=u/f'(x), & \text{商.} \end{cases}$

但 $f(x)$, $f'(x)$ 爲x之代數函數.

第三對 $\begin{cases} u=x^m, & \text{冪.} \\ x=\sqrt[m]{u}, & \text{根.} \end{cases}$

超 越 函 數

第四對 $\begin{cases} u=a^x, & \text{指數.} \\ x=\log_a u, & \text{對數.} \end{cases}$

第五對 $\begin{cases} u=\sin x, & \text{正.} \\ x=\sin^{-1}u, & \text{逆.} \end{cases}$

【函數論】Theory of functions.〔數〕論函數之性質及其定理等之學也.

刻

【刻】Quarter.〔算〕一小時之四分之一,卽十五分.

周

【周角】Circum-angle 或 Perigon.〔幾〕見角條.

【周圍】Perimeter 或 Contour.〔幾〕指閉幾何圖形之境界全體而言.

命

【命法】〔算〕複名數(諸等數)算法中,化低級單位數爲高級單位數之方法,稱曰命法.其法有二:(1)命複名數爲單名數之法:先用進率除最低級單位數,其商加以原有較高級單位數,得較高級單位數;再用進率除此較高級單位數,所得之商又加以原有更高級單位數,得更高級單位數;如此繼續演算,至最高級單位數止.例,化5日18時41分24秒爲日之單名數.

```
60)24    (秒)
   0.4(分)
   41            (+
60)41.4(分)
   0.69(時)
   18            (+
24)18.69(時)
   0.77875(日)
   5              (+
答……………5.77875(日)
```

(2)命單名數爲複名數之法:先用進率除低級單位數,所得之商爲較高級單位數,餘數仍爲低級單位數;再用進率除此較高級單位數,所得之商爲更高級單位數,餘數仍爲較高級單位數;如此繼續演算,至最高級單位數止 取最後之商及所有餘數卽得.例,化92146寸爲複名數.

```
10)92146(寸)
 5)9214(尺)……6 (寸)
360)1842(步)……4 (尺)
      5(里)……42(步)
```

答5里42步4尺6寸.

【命題】Proposition.〔幾〕陳述一事項者,曰命題.例如「甲爲乙」爲一命題.而

證明事項之陳述爲定理，解事項之陳述爲問題或作圖題等.

【命數法】Numeration.〔算〕用名稱以顯數，謂之命數法.其目的在於用甚少之名，而能表無限之數也.現今所通行者爲十進命數法，如次所述.整數之最小者，命名曰"一"，自一次第增一，每數各命一名，曰"二""三""四""五""六""七""八""九".於九增一，命名曰"十"，即一之十倍.自十次第十倍之，命名曰"百"曰"千"曰"萬".自萬次第十倍之，曰"十萬""百萬""千萬"，而萬萬則命名曰"億".自億次第十倍之，曰"十億""百億""千億"而萬億則命名曰"兆".自兆次第萬倍之，命名曰"京"曰"垓"曰"秭""穰""溝""澗""正"……等，實則徒有其名而無其用耳.代數學則論以任意底表數之一般方法，英語爲 System of numeration.

〔附註〕自萬以上之進法，古有上中下三等之不同.漢徐岳數術記遺云：黃帝爲法，數有十等，及其用也，乃有三焉.十等者，億，兆，京，垓，秭，穰，溝，澗，正，載；三等者，謂上中下也.其下數者，十十變之，若言十萬曰億，十億曰兆，十兆曰京.中數者，萬萬變之，若言萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京.上數者，數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也.下數淺短，計事則不盡，上數宏廓，世不可用，故其傳業，惟以中數耳.按今仍有採用下數者，且所用之中數，又與徐岳所記者異.蓋本自數理精蘊，以四位爲一程，係以萬變，非以萬萬變，即如上所記之萬萬曰億，萬億曰兆，萬兆曰京是也.由是言之，以億兆等字所記之數，不免有游移不確實之弊.民國二十年六月，教育部通令，在記數名詞未確定前，將算學中有歧義之億兆等字暫取消.所有萬以上之數目，即在萬字以上累冠數字，如十萬，百萬，千萬，萬萬，十萬萬，百萬萬，千萬萬，……等.世界通行之命數法，則以三位爲一節，至千而一易，故萬爲十千，而百萬則另定一名爲 million，十萬萬爲 billion.現我國凡會計統計之記數，均已一律採用此三位一節制.

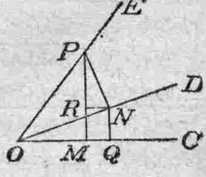
和

【和】Sum.〔算〕〔代〕二或多於二之數之和者，在算術爲包含其各數之單位之全體，故和常大於其部分.然在代數則和不一定爲增加，如其中正或負多量之和，有小於其任一部分者，有等於0者，故名此和曰代數和，以與算術和相區別.

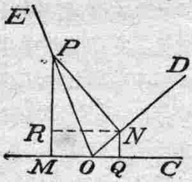
【和合數】Amicable numbers.〔代〕亦稱和順數，即伴數，見伴數條.

【和較法】Alligation Alternate.〔算〕見混合法條.

【和角之三角函數】Trigonometrical functions of the sum of two or more angles.



〔三〕〔二角之和〕以 A 表 COD 角，以 B 表 DOE 角，則 COE 角，可以



$A+B$ 表之。由作圖知 NPR 角與 PNR 角互為餘角，故等於 RNO 角，即等於 NOC 角或 A 角.

故 $\sin(A+B)=\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{RM+PR}{OP}$

$=\dfrac{NQ}{OP}+\dfrac{PR}{OP}=\dfrac{NQ}{ON}\cdot\dfrac{ON}{OP}+\dfrac{PR}{PN}\cdot\dfrac{PN}{OP}$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

$\cos(A+B)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{OQ-QM}{OP}$

$=\dfrac{OQ}{OP}-\dfrac{NR}{OP}=\dfrac{OQ}{ON}\cdot\dfrac{ON}{OP}-\dfrac{NR}{NP}\cdot\dfrac{NP}{OP}$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

又 $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$,

分子分母各以 $\cos A\cos B$ 除之，則得

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$

$\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}.$

分子分母以 $\sin A\sin B$ 除之，則得

$$\cot(A+B)=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-1}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}}$$

$=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}.$

上之關係不論 A 及 B 為任何角均可.如 A 及 B 為小於二直角，則 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A+B)$ 之公式，又可以托勒密定理證明之.托勒密之定理為如 ABCD 為圓之內接四邊形，則 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ (1)令 BD 為圓之直徑，且等於單位長，又 $ADB=\alpha$, $BDC=\beta$，則 $ABD=\dfrac{1}{2}\pi-\alpha$, $DBC=\dfrac{1}{2}\pi-\beta$, $AC=\sin(\alpha+\beta)$, $AB=\sin\alpha$, $CD=\cos\beta$。故托勒密之定理為等於 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. (2)令 CD 為圓之直徑，且等於單位長，又 $BCD=\alpha$, $ADC=\beta$，則 $BCA=\alpha+\beta-\dfrac{1}{2}\pi$, $AB=-\cos(\alpha+\beta)$，而上述定理等於 $-\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$. 即 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

〔三角之和〕此可由上述諸式誘導得之，即 $\sin(A+B+C)=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C=\sin A\sin B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$

又 $\cos(A+B+C)=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C=(\cos A\cos B$

$-\sin A\sin B)\cos C-(\sin A\cos B$

$+\cos A\sin B)\sin C=\cos A\cos B\cos C$

$-\sin A\sin B\sin C-\cos B\cos C\sin A$

$-\cos A\sin C\sin B$.

上之二式亦可書爲

$\sin(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C$

$\times(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B$

$\tan C)$,

及$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C$

$\times(1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A$

$\tan B)$.

故 $\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.$$

又$\cot(A+B+C)$

$$=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1}.$$

〔n 角之和〕由歸納法可得 n 角 A_1, A_2, A_3,⋯A_n 之和之正弦餘弦之公式如下.

$\sin(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n)$

$=S_1-S_3+S_5-\cdots\cdots$;

$\cos(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n)$

$=S_0-S_2+S_4-\cdots\cdots$,

S_r 爲表 r 角之正弦與其餘 (n−r) 角之餘弦之諸積之和, r 角爲由 n 角中用種種之組合法選出.如$S_0=\cos A_1\cos A_2\cdots$ $\cos A_n$, $S_1=\sin A_1\cos A_2\cdots\cdots\cos A_n$ $+\cos A_1\sin A_2\cos A_3\cdots\cdots\cos A_n$ $+\cos A_1\cos A_2\sin A_3\cdots\cdots\cos A_n$.

上之二式,又可書爲

$\sin(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\cos A_1\cos A_2$

$\cdots\cdots\cos A_n(t_1-t_3+t_5\cdots\cdots)$.

$\cos(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\cos A_1\cos A_2$

$\cdots\cdots\cos A_n(1-t_2+t_4\cdots\cdots)$.

而 t_r 爲表 $\tan A_1$, $\tan A_2$, ⋯⋯, $\tan A_n$, 每取 r 角之諸積之和, 如 $t_1=\tan A_1$ $+\tan A_2+\cdots\cdots+\tan A_n$, $t_2=\tan A_1$ $\tan A_2+\tan A_2\tan A_3+\tan A_1\tan A_3$.

故 $\tan(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n)$

$$=\frac{t_1-t_3+t_5\cdots\cdots}{1-t_2+t_4\cdots\cdots},$$

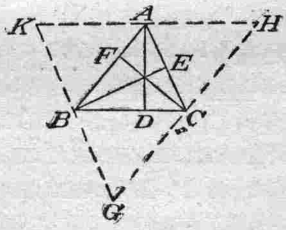
此爲 n 角之和之正切之公式.

固

【固定資本】Fixed capital.〔算〕見資本條.

垂

【垂心】Orthocentre.〔幾〕三角形之三垂線必交於同一點, 此交點稱曰垂心.



由三角形之各頂點至對邊引三垂線 AD, BE, CF, 又過 A, B, C 與邊 BC, CA, AB 平行引三直線作 △GHK. 則 AKBC 爲平行四邊形, AK=BC, 同理 AH=BC, 故 AK=AH. 同理 BK=BG, CG=CH, 故 AD, BE, CF 爲 GHK 三角形各邊

中點之垂線，而相交於同一點.

【垂足】Foot of perpendicular.〔幾〕垂線與他線相遇之點，稱為垂足.

【垂直】perpendicular.〔幾〕一直線與他直線相交，其所成二隣角各為直角，則此二直線為互相垂直. 一直線垂直於一平面內過其足之諸直線，則此直線即垂直於此平面，而此平面亦垂直於此直線.

設一平面與他一平面成一直二面角，則此二平面為彼此垂直. 又兩圓弧其所含之平面互相垂直，則兩圓弧亦互為垂直.

【垂趾】Foot of perpendicular.〔幾〕即垂足，見該條.

【垂線】perpendicular.〔幾〕一直線垂直於他直線，則此直線為他直線之垂線，或他直線為此直線之垂線. 一直線垂直於一平面，則此直線為此平面之垂線. 垂線為自一點至一直線或一平面之最短距離.

【垂足線】Pedal line.〔幾〕或曰垂趾線，即西摩孫線，見該條.

【垂直角】Vertical angle.〔幾〕〔三〕垂直角者，其邊在垂直面上之角之稱. 而垂直角之一邊為水平，他邊向上者，曰仰角；一邊為水平，他邊向下者，曰俯角.

【垂直面】Vertical plane.〔幾〕〔三〕垂直面者，含垂直線之平面也.

【垂直圓】Vertical circle.〔幾〕大圓之平面與水平垂直者，謂之垂直圓，或稱縱圓，又稱鉛直圓.

【垂直線】Vertical line.〔幾〕〔三〕為鉛垂線之方向之直線也.

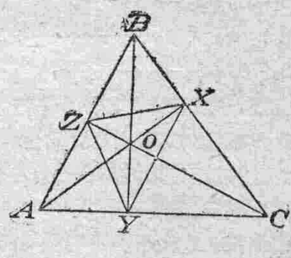
【垂足曲線】Pedal curve.〔幾〕自同一之點向一曲線之諸切線作垂線，其垂足之軌跡，謂之垂足曲線或垂趾曲線，其諸垂線所同自出發之點，謂之垂足原點或垂趾原點. 原點為垂足原點時，等邊雙曲線之垂足線為雙紐線，拋物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之垂足線為環索線.

【垂足原點】Pedal origin.〔幾〕見垂足曲線條.

【垂直方向】Vertical direction.〔幾〕〔三〕即鉛垂線之方向.

【垂直距離】Perpendicular distance.〔幾〕垂直距離者，由一點至他一點或一直線或一平面，或一直線與他一直線，一平面與他一平面間之最短距離，即其間所作之垂線也.

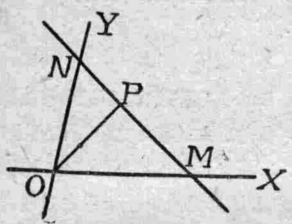
【垂足三角形】Pedal triangle或Orthique triangle.〔幾〕或稱垂趾三角形. 聯結三角形三垂線之足所成之三角形，



稱為垂足三角形. 即 AX, BY, CZ 為三角形 ABC 之三垂線，XYZ 為垂足三角形. AX, BY, CZ 為三角形 XYZ 之各角之二等分線，故其交點 O 為三角形

XYZ 之內心．又 BC，CA，AB 爲三角形 XYZ 之各外角之二等分線，故 A，B，C 爲其三角形之傍心．

【垂直方程式】Normal equation．〔幾〕設任意直線 MN 至原點 O 之距離 OP=p，$\angle XOY=\omega$，$\angle POX=\alpha$．若 OM=a，ON=b，則直線MN之截部方程式爲$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$．而 $a\cos\alpha=p$，$b\cos$



$(\omega-\alpha)=p$，故 $a=\frac{p}{\cos\alpha}$，$b=\frac{p}{\cos(\omega-\alpha)}$．以 a，b 之值代入上方程式，得$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\cos(\omega-\alpha)}}=1$，即 $x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)=p$．此式謂之直線 MN 之垂直方程式，x，y之係數名曰此直線之方向餘弦，p 名曰垂直距離．若兩軸爲直交軸，則 $\cos(\omega-\alpha)=\sin\alpha$，於是垂直方程式變爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$．

【垂直二等分線】Perpendicular bisector．〔幾〕一直線與一有限直線垂直且二等分之之稱也．

奇

【奇解】Singular solution．〔微〕見高次一階微分方程式條．

【奇數】Odd number．〔算〕凡二所不能整除之數曰奇數，如 1，3，5，7，…等．自一起連續 n 個奇數之和爲 n^2．因此 n 數成等差級數，其首項爲 1，公差爲 2，故其和 $S=\frac{n}{2}\{2+(n-1)2\}=n^2$．

【奇函數】Odd function．〔數〕適合於 $f(-x)=-f(x)$關係之x之函數，謂之奇函數，例如 sinx 是．

【奇幻平方】Magic square．〔算〕即幻方，見該條．

定

【定則】Law 或 Rule．〔數〕與定律同意而意較狹．例如級數之定律者，其各項間順次之關係之謂也，而定則則爲由定律所表示之假設以求各項時所必要之方法．

【定律】Law．〔數〕數學上定律一語，常與法則同意義用之，而較之定則之意，更爲普遍．

【定理】Theorem．〔數〕於幾何學言之，定理爲由已知命題證明他命題之謂．其已知之命題爲定義公理或已證明之定理等．定理由假設與終結二部而成，假設者，假定其爲眞，終結者，由假設而導得眞理也．例如「若 A 爲 B，則 C 爲 D」爲一定理，「若 A 爲 B」爲假設，「則 C 爲 D」即終結也．在解析法中，定理不必如上所述表記之，而有時如一恆等式，例如二項

式定理等.

【定義】Definition.〔數〕說明學語之意義之敍述也.

【定列式】Determinant.〔代〕同行列式,見該條.

【定坐標】Fixed coördinates.〔幾〕點之位置一定而以一定之數值表示之者,謂之定坐標.定坐標普通以常數 a, b 等記之.

【定準數】〔代〕即定列式.

【定積分】Definite integral.〔積〕見積分法條.

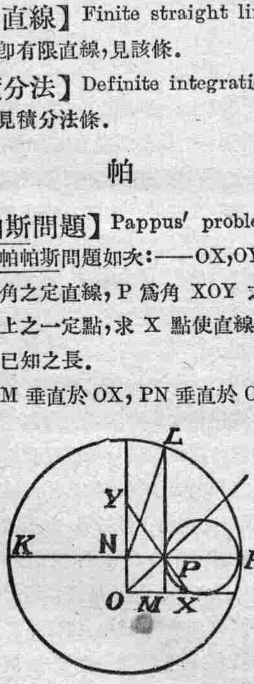
【定長直線】Finite straight line.〔幾〕即有限直線,見該條.

【定積分法】Definite integration.〔積〕見積分法條.

帕

【帕帕斯問題】Pappus' problem.〔幾〕帕帕斯問題如次:——OX,OY 爲互成直角之定直線,P 爲角 XOY 之二等分線上之一定點,求 X 點使直線 XPY 等於已知之長.

作 PM 垂直於 OX, PN 垂直於 OY, 延



長 MP 至 L, 使 PL 等於已知之長.以 N 爲中心, NL 爲半徑畫圓,交 NP 之延線於 H 及 K. 以 HP, KP 爲徑之圓交 OX 於四點(問題有不能者).命以 HP 爲徑之圓交 OX 於 X, 聯 XP, 交 OY 於 Y. 因 PM=PN, 及 HX, PY 與 PM, PN 作等角,故互相等.又 $PL^2=NL^2-NP^2=NH^2-NP^2=YH^2-YP^2=YH^2-XH^2=XY^2$. 故 XY=PL.

底

【底】Base.〔算〕〔代〕〔幾〕平面形之底者,多角形立於其上之一邊也,亦曰底邊.二等邊三角形除相等二邊外其他一邊爲底.梯形之底爲相平行之二邊.其他三角形或多邊形可以任一邊爲底.圓錐,角錐之底者與其頂點相對之面也,亦稱底面.圓柱之底爲其平行之二面.球帶之底爲二平面截球所生之二圓周.球角錐之底爲球面多邊形,球分之底爲扇形之弧所生之球帶.球盤之底爲二平面所作之截面.記數之底於十進法爲 10, 即滿位須進之數.對數之底見對數條.

【底角】Base angle.〔幾〕與底邊相鄰之角也.

【底面】Base.〔幾〕見底條.

【底線】Base line.〔幾〕即底邊.

【底邊】Base-side.〔幾〕見底條.

弦

【弦】Chord, Hypotenuse.〔幾〕圓之弦(Chord)者,一直線與圓周相交,夾於圓

周間之部分也.又弦 (Hypotenuse) 者，直角三角形直角之對邊也，亦稱斜邊.

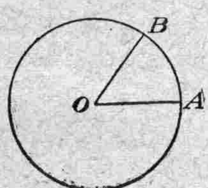
弧

【弧】Arc.〔幾〕弧爲一般曲線之一部分，初等幾何學所稱之弧爲圓周之一部分，故謂之圓弧.若弧爲圓周之半者，稱爲半周.兩弧之和等於一圓周，則兩弧稱爲共軛弧.一弦對兩共軛弧，若兩弧不相等，則小者稱爲劣弧，大者稱爲優弧.通常所稱之弧多指劣弧而言.

【弧度】Circular measure.〔三〕以一角之頂爲中心任意之長爲半徑晝圓，其角所跨之弧與半徑之比，謂之角之弧度.如以 r 表圓之半徑，則全圓周爲 $2\pi r$. 故四直角之弧度爲 $\frac{2\pi r}{r}$ 卽 2π，二直角之弧度爲 π，一直角之弧度爲 $\frac{\pi}{2}$.

n 直角之弧度爲 $\frac{n\pi}{2}$，n 爲整數分數均可.

【弧度法】Circular method.〔三〕以 O 爲中心之任意圓，若 AB 爲等於圓之半徑之弧，則 AOB 角不依圓而變，而此角稱爲半徑度 (Radian)，或稱爲弧度之單位.



若 A 角爲此單位角之若干倍，則 A 角爲等於若干半徑度.以半徑度量角之法，稱爲弧度法. 由幾何學，圓之中心角與其所跨之弧成比例，故 $\frac{\angle AOB}{2\text{直角}}=\frac{\text{半徑}}{\text{半圓周}}$

$=\frac{\text{直徑}}{\text{圓周}}=\frac{1}{\pi}$，

而 $\angle AOB=\left(2\text{ 直角之}\frac{1}{\pi}\right)$

$=\left(180^\circ\text{ 之}\frac{1}{\pi}\right)$.

卽 AOB 角爲 180° 之一定分數，不以圓之大小而變. 故以半徑度測角有二便利處:(1)凡半徑度皆相等,(2)以半徑度爲測角之單位，於理論的三角法之公式可變爲簡單，又解析的數學之公式亦可化爲簡單. 1半徑度 $=2\text{直角}\times\frac{1}{\pi}=57^\circ.29577951\cdots=57^\circ17'45''$. 如以 D 表某角之度數，$\theta$ 表其弧度，則 $\frac{D}{180}=\frac{\theta}{\pi}$，

故 $D=180\cdot\frac{\theta}{\pi}$，　$\theta=\frac{\pi}{180}\cdot D$.

卽某角之度數以 $\frac{\pi}{180}$ 乘之，則爲弧度.某角之弧度以 $\frac{180}{\pi}$ 乘之，則爲度數.

忽

【忽】〔算〕記小數之名，卽 .00001.

或

【或是率】Probability 或 Chance.〔代〕卽適遇，見該條.

抹

【抹甫耳定理】De Moivre's theorem.

〔三〕抹甫耳定理如次：——當 n 爲實數，則 $\cos n\theta+i\sin n\theta$ 爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 之一值. $\cos\alpha+i\sin\alpha$ 以 $\cos\beta+i\sin\beta$ 乘之，其積爲 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$，即 $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)$；此式以 $\cos\gamma+i\sin\gamma$ 乘之，其積爲 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. 逐次如是，可得任何個形如 $\cos\alpha+i\sin\alpha$ 之因數之積. 設有 n 個此積因數，且各因數皆爲 $\cos\theta+i\sin\theta$；則得 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$. 此證明抹甫耳定理當 n 爲正整數時能成立. 次命 n 爲負數，設 $n=-m$，則

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta};$$

分子分母以 $\cos m\theta-i\sin m\theta$ 乘之，則得

$$\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}\text{ 即 }\cos m\theta-i\sin m\theta;$$

即 $\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$ 或 $\cos n\theta+i\sin n\theta$. 此證明抹甫耳定理當 n 爲負數時能成立. 既因 n 爲任意整數，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，故當 n 爲任意整數，$\cos\theta+i\sin\theta$ 爲 $(\cos n\theta+i\sin n\theta)^{\frac{1}{n}}$ 之一值. 又命 n 爲分數，設 $n=\frac{p}{q}$，

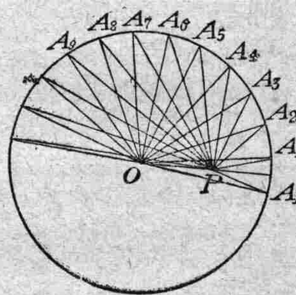
則 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$

$=(\cos p\theta+i\sin p\theta)^{\frac{1}{q}}$；故最後之式一值爲 $\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}$.

如是抹甫耳定理完全成立矣.

抹甫耳定理甚爲重要，凡三角函數之展開，求任意個角和之三角函數，因數分解，方程式用三角函數之解法等等皆用之.

【抹甫耳圓之性質】 De Moivre's property of the circle. 〔三〕命 O 爲圓心，P 爲圓之平面上任意一點；分全圓爲 n 等分於 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots, A_n$. 聯 O 及 P 於諸分點 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots, A_n$. 命圓之半徑爲 a，OP 之距離爲 c. 命角 POA_1 以 θ 表之，則角 POA_2，POA_3，……各爲 $\theta+\frac{2\pi}{n}$，$\theta+\frac{4\pi}{n}$，….



則 $PA_1^2=OA_1^2-2OA_1\cdot OP\cos\theta+OP^2$，

$PA_2^2=OA_2^2-2OA_2\cdot OP\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+OP^2$，

$PA_3^2=OA_3^2-2OA_3\cdot OP\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{n}\right)+OP^2$，

……………………………………………，

$PA_n^2=OA_n^2-2OA_n\cdot OP$

$\cos\left\{\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}+OP^2$.

因 $OA_1=OA_2=OA_3=\cdots\cdots=OA_n=a$, $OP=c$, 故 $PA_1^2\cdot PA_2^2\cdots\cdots\cdots PA_n^2$

$$=\prod_{s=0}^{s=n-1}\left\{a^2-2ac\cos\left(\theta+\frac{2s\pi}{n}\right)+c^2\right\}.$$

由是由因數分解之公式,得

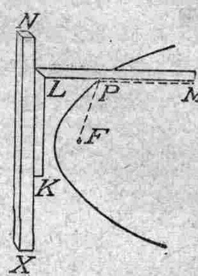
$PA_1^2PA_2^2PA_3^2\cdots PA_n^2=a^{2n}-2a^2c^n\cos n\theta+c^{2n}$. 是謂之抹甫耳圓之性質. 當 P 在圓周上, 則 $PA_1\,PA_2\,PA_3\cdots\cdots PA_n=2a^n\cos\frac{1}{2}n\theta$,

是爲抹甫耳圓之性質之特例.

科次(Cotes)圓之性質,亦爲抹甫耳圓之性質之二特例. 當 P 在半徑 OA 上,則 $\theta=0$, 而 $PA_1PA_2PA_3\cdots PA_n=a^n\sim c^n$. 又當 P 在角 A_nOA_1 之二等分線上,則 $\theta=\frac{\pi}{n}$, 而得 $PA_1\cdot PA_2\cdot PA_3\cdots PA_n=a^n+c^n$. 是二者謂之科次圓之性質.

拋

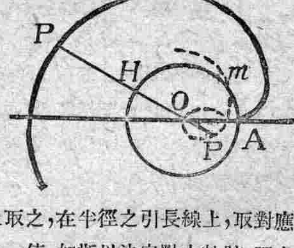
【拋物線】Parabola. 〔幾〕拋物線爲圓錐曲線或二次曲線之一種, 而爲一點在平面內移動, 其由一定點與由一定直線之距離常相等之軌跡. 此定點曰焦點,定直線曰準線.拋物線可作之如次.如圖. KLM 爲一直角定規,規之一邊 KL 與一定尺 XN 密合,而可沿之移動.又命一線其長等於 LM, 釘其一端於 M, 而釘其他端於 F. 將直角定規之邊 KL 沿 XN 滑動之,而以鉛筆 P 使此線緊隨直角定規移動, 則 P 畫成一拋物線, 因移動時 PF 常等於PL也. 如以頂點爲原點, 而頂點與焦點之距離爲 d,則



拋物線之方程式爲 $y^2=4dx$. 若以任意之徑及徑端之切線爲兩軸, 則拋物線之方程式爲 $y^2=\frac{4dx}{\sin^2\theta}$, 又拋物線之極方程式爲 $\rho=\frac{2d}{1-\cos\theta}$.

【拋物線體】Paraboloid. 〔幾〕拋物線體有橢圓的拋物線體與雙曲線的拋物線體二種.見二次曲面條.

【拋物線螺線】Parabolic spiral. 〔幾〕爲超越曲線之一.設於拋物線方程式 $y^2=4dx$, x 之數值,從 A 點於圓 AH

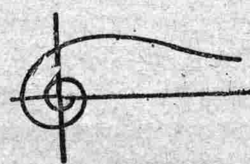


上取之,在半徑之引長線上,取對應於 x 之 y 值.如斯以決定點之軌跡,謂之拋物線螺線.命半徑 OA 爲 r, P 爲任意之點, 則 $x=AmH=r\theta$, $y=HP=OP-OH=\rho-r$. 將 x 與 y 之數值代入於

$y^2=4dx$，得 $(\rho-r)^2=4dr\theta$. 是爲拋物線螺線之方程式.此曲線爲從 A 起之二分支所成.其一分支以 y 之正數值決定，全在圓外. 他一分支過極成一環,而於 $\rho=-r$ 及 $\theta=\frac{r}{\rho}$ 時，越圓而走於其外.

拐

【拐杖螺線】Lituus.〔幾〕爲超越曲線之一.動點之動徑 ρ 之平方,與其變角 θ 爲反比例時，其軌跡謂之拐杖螺線或平



方倒數螺線.方程式爲 $\rho^2\theta=a$,有次之二性質：(1)此曲線隨 θ 之無限增大而漸近於極,但不能達於極.(2)極軸爲無窮遠分支之漸近線.

昇

【昇冪】Ascending power.〔代〕一式中某文字之指數由低順次至高，則稱爲某文字之昇冪.如 $10-5x+2x^2-x^3$ 之式爲 x 之昇冪.又如 $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ 之式爲 a 之昇冪,而爲 x 之降冪,參觀降冪條.

【昇級數】Ascending series.〔代〕卽遞昇級數,見該條.

東

【東經】East meridian.〔算〕見經度條.

枝

【枝】Branch.〔幾〕見雙曲線條.

【枝距】〔幾〕見主線條.

歧

【歧點】Cusp point 或 Cusp.〔幾〕方程式之軌迹有二以上之分支時，則其分支之會合點,稱曰歧點,或曰尖點. 曲線於歧點有一公切線,且不橫越此點.歧點有二種，曲線之分支不同在公切線之一邊者,爲第一種歧點,或謂之兩邊歧點，同在公切線之一邊者,爲第二種歧點,或謂之一邊歧點.

法

【法則】Rule.〔數〕法則者,爲表示欲得某結果所必要之運算之方法也. 法則又爲公式之以通常語言述說之者，而公式則爲法則之以代數記號表示之者也.

【法度】Grade.〔三〕一直角之百分之一也.此法爲法國之米突制所創定,因諸數皆以十進,故角度亦用十進法,其實用之者甚少.參閱百分法條之(二).

【法線】Normal.〔幾〕平面曲線之某點之法線者,爲於其曲線之平面上,由該點引曲線之切線，又過其點垂直於切線之直線也,故圓之法線過其中心. 又曲面

上某點之法線者，爲於該點作曲面之切面又過其點垂直於切面之直線也，故球之法線過其中心．而於平面上一點之垂線，亦稱其點之法線．

【法數】〔算〕見實數條．

【法噸】英語爲 Metric ton，法語爲 Tonneau．〔算〕即米突噸，見該條．

【法國制】French system．〔算〕即米突制，見該條．

【法國法】Erench method．〔三〕角之百分法，亦稱法國法，詳百分法條．

【法線面】Normal plane．〔幾〕見空間曲線條．

泥

【泥科美德蚌線】Conchoid of Nicomedes．〔幾〕見蚌線條．

直

【直交】Orthogonal．〔幾〕兩曲線相交，於其交點引兩曲線之切線，若此兩切線成直角，則此兩曲線爲直交．

【直角】Right angle．〔幾〕一直線與他直線相垂直，則其兩直線間之角，稱爲直角．直角等於平角之二分之一，周角之四分之一，即 90 度．

【直徑】Diameter．〔幾〕過圓心，其兩端在圓周上之直線，稱爲圓之直徑，凡圓之諸直徑皆相等．過球心以球面爲界之直線，稱爲球之直徑，球之諸直徑皆相等．

【直線】Straight line 或 Right line．〔幾〕點移動而成線，若其移動之方向處處相同，則其軌跡成一直線．故直線者，始終同一方向之線．或二點間最短之線．或曰直線者，取其一部分任置他部分上而完全重合者也．直線形之周界爲直線，二平面之交線爲直線，常簡稱曰線．

【直交圓】Orthocycle．〔幾〕兩圓相交，由其交點作兩圓之切線，此二切線夾成直角時，此兩圓稱爲直交圓．

【直向弧】Direct arc．〔幾〕聯結球面上二點所成大圓弧之小部分，曰直向弧．

【直向線】Direct line．〔幾〕於任意表面上取二點，可完全確定在其面上之線者，則此線稱爲其面之直向線．故直線爲平面之直向線，球之大圓爲球面之直向線．

【直角柱】Right prism．〔幾〕直角柱者，角柱之諸側稜垂直於其兩底者也．

【直角錐】Right pyramid．〔幾〕角錐之底爲正多角形，其高之趾在底面之中心者，曰直角錐．

【直角體】Cuboid．〔幾〕即直角平行六面體，見該條．

【直徑面】Diameter plane．〔幾〕設曲面內有平行弦一羣，此等弦之中點之軌跡，稱爲關於此等平行弦之直徑面．橢圓面之直徑面之方程式爲 $\frac{lx}{a^2}+\frac{my}{b^2}+\frac{nz}{c^2}=0$; l, m, n 爲平行弦之方向餘弦．一般二次曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy+2A''x+2B''y+2C''z+F=0$ 之直徑面之方程式爲 $x(Al+C'm+B'n)+y(C'l+Bm+A'n)+z(B'l+$

$A'm+Cn)+A''l+B''m+C''n=0$.

【直圓柱】Right circular cylinder.〔幾〕圓柱之諸基線或軸垂直於其兩底者也.或曰以矩形之一邊爲軸而旋轉所生之立體也.

【直圓錐】Right circular cone,〔幾〕直圓錐者,圓錐之軸垂直於其底面者也.或曰以直角三角形直角傍之一邊爲軸而旋轉所生之立體也.

【直截面】Right section 或 Normal section.〔幾〕(1)與角柱之側稜成直角之截面. (2)與圓柱之基線成直角之截面. (3)與圓錐之軸成直角之截面.亦稱直截口.

【直線角】Rectilinear angle.〔幾〕角之二邊爲直線者.

【直線形】Rectilineal figure 或 Rectilinear figure.〔幾〕三以上之直線所包圍之平面形也.亦稱多邊形或多角形.

【直線數】Linear number.〔代〕見多角數條.

【直二面角】Right dihedral angle.〔幾〕一平面與他平面相交,若其所成之兩隣二面角相等,則其各二面角,稱爲直二面角.

【直三角形】Right triangle.〔幾〕卽直角三角形,見該條.

(直三面角】Rectangular trihedral angle.〔幾〕三面角之一個面角爲直角者,稱爲直三面角.

【直角坐標】Rectangular co-ordinates.〔幾〕坐標軸互爲垂線,謂之直交軸,互爲斜線,謂之斜交軸.關於直交軸之點之坐標,稱直角坐標,關於斜交軸之點之坐標,稱斜角坐標.又坐標面相交成直角者,曰直角坐標,否則曰斜角坐標.

【直接相似】Directly similar.〔幾〕與逆相似相對之語,卽普通之相似形也.

【直角三角形】Right angled triangle.〔幾〕三角形之一角爲直角者.

【直角雙曲線】Rectangular hyperbola.〔幾〕卽等邊雙曲線.等邊雙曲線兩漸近線間之角爲直角,故有此名.

【直接公切線】Direct common tangents.〔幾〕二圓之公切線不在二圓之中心間與二圓之中心線相截,則此二公切線,稱爲直接公切線,卽外公切線也.

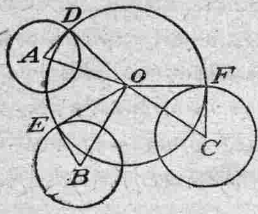
【直線方程式】Linear equation.〔代〕一次方程式以圖示之,爲一直線,故亦曰直線方程式.

【直平行六面體】Right parallelopiped.〔幾〕平行六面體之諸側稜,垂直交於其兩底者也.

【直角平行六面體】Rectangular parallelopiped (或 parallelepiped).〔幾〕平行六面體之各面皆爲矩形者之稱.或稱直角體,長方體,或矩形體.

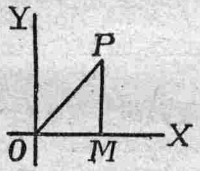
【直交於三圓之圓】Orthotomic circle.〔幾〕卽與三圓直交之圓也.如圖 A,B,C 爲三圓,O 圓與之直交於 D,E,F 三點,則 O 圓卽爲所要之圓.命 A,B,C 三圓之半徑爲 r, r', r'',則

$\overline{AO}^2-r^2=\overline{BO}^2-r'^2$,卽 $\overline{AO}^2-\overline{BO}^2=r^2-r'^2$ 而 A 及 B 爲定點,故 O 點



爲由 A，B 二定點之距離之平方之差，而爲一定之點，其軌跡爲一直線．同理 $\overline{BO}^2-\overline{CO}^2=r'^2-r''^2$，O點爲由定點B及 C 之距離之平方差爲一定之點，其軌跡亦爲一直線．是等直線之交點，卽爲所要之圓之中心．

【直角坐標與極坐標之關係】Relative between rectangular coördinates and polar coördinates．〔幾〕設關於直交軸一點 P 之坐標爲 (x, y)，而以原點O爲極，橫軸OX爲極軸，P 之極坐標爲(ρ, θ)，則 $x=OM$，$y=MP$，$\rho=OP$，$\theta=\angle XOP$．



但 $OM=OP\cdot\cos\angle MOP$，$MP=OP\cdot\sin\angle MOP$，故 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$．是爲以極坐標表直角坐標之公式．又 $\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{MP}^2$，$\tan\angle MOP=\frac{MP}{OM}$，故$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$ 或 $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$．是爲以直角坐標表極標之公式．上爲平面內一點之二種坐標之關係．空間中一點之二種坐標之關係，可同樣求得之如次．$x=\rho\sin\theta\cos\psi$，$y=\rho\sin\theta\sin\psi$，$z=\rho\cos\theta$，是爲以極坐標表直角坐標之公式．$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$，$\tan\psi=\frac{y}{z}$，是爲以直角坐標表極坐標之公式．參閱坐標條與極坐標條．

空

【空間】Space．〔幾〕吾人試曠觀周傍，上而日月星辰，下而河海山嶽，茫茫無際，靡知終極．而晴夜仰望蒼空，則無數星辰，碁布散列，若用望遠鏡視之，則更見多數之星，以更强之望遠鏡視之，更可發見無數之星，蒼空之渺茫無窮，誠令人驚嘆不止．故欲對空間下一精密之定義，實非易易．略言之，則空間者在無限諸方向之中而包含諸物體者也．數學的空間，亦爲無窮大，近世幾何學之無限直線無限平面卽由此着想．然一物體皆占空間之一部分，故初等幾何學卽爲就此空間而論之學科．在幾何學上凡空間之有限部分曰立體．立體者，有長有廣有厚有位置者也．立體與其周傍空間之界爲面，故面有長有廣有位置而無厚．面之四方廣至無限．若就面之一部而論，則其周圍爲線，故線有長有位置而無廣與厚．線之兩端長至無限．然就線之一部考之，則其一端爲點．故點唯有位置而無長，廣及厚也．

【空間曲線】Curve in space．〔幾〕非平面上之曲線，名曰空間曲線，或稱倍率曲線或歪曲線．此種曲線之任何鄰接四

點不在同一平面上。其一般方程式爲 (1) $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$; (2) $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\kappa(t)$。螺旋線 (Helix) 即一種空間曲線，其方程式爲 $x=a\cos\frac{z}{c}$, $y=a\sin\frac{z}{c}$。又凡兩曲面之交線而不在一平面上者，皆空間曲線也。空間曲線之次數，由其與任意平面相截而生之交點之數而定。例如 m 次曲面與 n 次曲面相交之曲線，皆爲 m n 次。因此以一平面截之，則此平面與二曲面相交而生之曲線，各爲m，n次，而此二曲線之交點，總有 mn 個。空間曲線上一點(x', y', z')之切線之方程式爲 $(x-x')\Big/\frac{dx}{dt}=(y-y')\Big/\frac{dy}{dt}=(z-z')\Big/\frac{dz}{dt}$。切線與三軸所成角之餘弦爲 $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$。過曲線之一點與此點切線垂直之平面，名曰法線面，其方程式爲 $(x-x')\frac{dx}{dt}+(y-y')\frac{dy}{dt}+(z-z')\frac{dz}{dt}=0$。過曲線上三接近之點之平面至極限之位置時，稱曰觸面，其方程式爲 $(x-x')\left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+(y-y')\left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)+(z-z')\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0$。觸面與法線面之交線爲主法線，其方程式爲 $(x-x')\Big/\frac{d^2x}{ds^2}=(y-y')\Big/\frac{d^2y}{ds^2}=(z-z')\Big/\frac{d^2z}{ds^2}$。互相接近之兩法線面與觸面相交之點，名曰絕對曲率中心。三接近法線面會合之點，稱爲球曲率中心。球曲率中心之坐標爲 X, Y, Z, 則球曲率半徑 $R=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}$。二接近觸面所成之角，稱曰捩回角。

股

【股】〔幾〕直角三角形直角傍之二邊中，比較長之一邊也，見勾條。

近

【近數】〔連分數之近數〕Convergent of continued fraction.〔代〕計算連分數至任意之階級，其所得分數，稱爲連分數之近數。例如連分數

$$a+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

首之三近數爲

$$\frac{a}{1},\ \frac{ab_1+a_1}{b_1},\ \frac{ab_1b_2+aa_2+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}.$$

【近似法】Approximation.〔算〕即省略算，見該條。

【近似值】Approximate value.〔數〕近似值者，近似於眞值之値也。例如$\sqrt{5}$爲不盡根，而 2.23606 或 2.23607 爲其近似值，因$\sqrt{5}=2.236068\cdots$，與前二值之差皆小於 .00001，爲數甚微也。近似值於實際之計算上常用之。如圓周率之值爲 3.14159265358979323846，而實際上多用其近似值 3.1416.

【近世幾何學】Modern geometry.〔幾〕爲第十九世紀 Carnot-géométrie de position (1803 年), Brianchon-Mémoire sur les lignes du second ordre (1817年), Poncelet-Traité des propriétés projectives des figures(1822 年), Möbiuos-Barycentrische calcnl (1827 年), Steiner-Systematische Entwickelung (1832 年), Chaeles-Géométrie supérieure (1852 年), Von Staudt-Geometire der Lage (1847 年), 及其他諸氏之研究所得之綜合幾何學之稱. 其研究方法, 與解析幾何學全不相同,不由數量,純據位置而用射影法以探求圖形之性質, 一切坐標法與解析法擯除不用,與解析幾何學適相反對.而其中所記載之主要事項爲非調和比(Anharmonic ratio), 布立安深之定理 (Brianchon theorem), 稅瓦之定理 (Ceva theorem), 同軸圓 (Coaxal circles), 完全四邊形 (Complete quadrilateral), 戴沙固之定理 (Desargues theorem), 調和列點 (Harmonic range), 調和束線(Harmonic pencils),倒形法(Inver-sion), 對合 (Involution),門涅雷阿斯之定理(Menelaus theorem),巴斯噶之定理(Pascal theorem),極及極線(Pole and polar), 托勒密之定理 (Ptolemy theorem) 等.又其所以異於古代幾何學者,以二大原理爲其基礎,即連續之原理 (Principle of continuity) 及雙對之原理 (Principle of duality) 是也.連續之原理者,乃所有定理,無往不眞, 可以普通應用,靡有特例,如尋常幾何之理,每至無窮處,即不適用, 概以出規名之,故所求者爲一種線與面之特例. 而近世幾何之各例,即本於無窮原素之存在(如無窮直線,無窮平面,平圓之無窮點),視有盡與無窮爲一律, 故所求者爲一類之線與面之通例.蓋皆由代數上之推論,以爲幾何上之假定,故尋常幾何所不能解,皆得而說明之也.至所謂雙對之原理者,即各圖形之定理, 必有他之定理與之相伴,成爲雙對,前者一點, 後者有一直線對之,前者一直線,後者有一點對之之謂也.

【近似值公式】Approximate formula. 〔微〕應用泰羅級數以求函數之近似值之範式,謂之近似值公式.此公式所截取之項數,視欲求之小數位數而定,通用者爲 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ ········(1),或 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{\underline{|2}}(x-a)^2$ ········(2).例題,設 $f(x)=\sin x$,則依(1)式, $\sin x=\sin a+\cos a(x-a)$. 如已知 $a=30^\circ=\cdot5236$ 半徑度,則 31° 之正弦可計算之,即 $\sin 31^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(31^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(1^\circ=\cdot01745$ 半徑度$)=\cdot5000+\cdot8660\times\cdot01745=\cdot5000+\cdot0151=\cdot5151$.同樣可計算 32° 之正弦,即 $\sin 32^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(32^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(2^\circ=\cdot03490$ 半徑度$)=\cdot5000+\cdot8660\times\cdot03490=\cdot5000+\cdot0302=\cdot5302$.上之第一結果,三位小數爲眞; 第二結果,僅一位小數爲眞. 若用(2)式,則均可求得

四位小數爲眞如次。因 $\sin x=\sin a+\cos a(x-a)-\frac{\sin a}{\lfloor 2}(x-a)^2$，故 $\sin 31^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(\cdot 01745)-\frac{\sin 30^\circ}{2}(\cdot 01745)^2=\cdot 5000+\cdot 01511-\cdot 00008=\cdot 51503$，$\sin 32^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ(\cdot 03490)-\frac{\sin 30^\circ}{2}(\cdot 03490)^2=\cdot 5000+\cdot 03022-\cdot 00030=\cdot 52992$。

金

【金衡】Troy-weight.〔算〕英美衡金銀所用之重量，其單位如次。

1 grain(gr.)……合我國 ·002074 市兩

1 penny weight(pwt.)=24gr.……合我國 ·04976 市兩。

1 ounce(oz.)=20pwt.……合我國 ·9953市兩。

1 pound (lb.) =12oz.……合我國 11·9436市兩。

長

【長度】Length.〔算〕〔幾〕短之對，二線相較，其大者曰長．一物之長度，即其物之長所含之單位也．如以尺爲單位，則某物之長度爲 3 尺者，即其物之長爲單位尺之三倍也。

【長徑】Major axis.〔幾〕過橢圓之二焦點其兩端在曲線上之直線之部分，稱曰長徑，或稱爲長軸，橫軸。

【長軸】Major axis.〔幾〕即長徑.

【長噸】Long ton.〔算〕即重噸，見該條.

【長方形】Oblong.〔幾〕即矩形，見該條.

【長方體】Rectangular parallelopiped.〔幾〕即直角平行六面體，見該條.

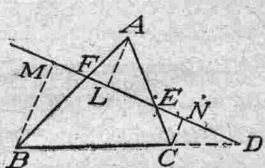
【長除法】Long division.〔算〕爲與短除法對稱之語．例如 37562÷7 及 12345÷23，以下式運算之，即稱爲長除法。

```
7)37562(5366      23)12345(536
  35                 115
  --                 ---
   25                 84
   21                 69
   --                 --
    46                155
    42                138
    --                ---
     42                17
     42
     --
```

【長菱形】Rhomboid.〔幾〕即平行四邊形，或稱偏菱形，斜矩形，長斜方形.

門

【門涅雷阿斯定理】Menelaus' theorem.〔幾〕一截線與三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 交於 D, E, F，則



$BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$.

自各頂點向 DEF 引垂線 AL,BM,CN，則由相似三角形之理，倂考其線分之方向，得 $BD:-DC=BM:CN$，$CE:EA=CN:-AL$，$AF:FB=-AL:BM$.

$\therefore BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB=-BM\cdot CN\cdot AL=-CN\cdot AL\cdot BM$，

$\therefore BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$.

又其逆定理亦眞，卽 D, E, F 在三角形 ABC之邊BC, CA, AB上，如BD·CE·AF $=-$DC·EA·FB，則 D, E, F 爲共線點．設 FE 交 BC 於 D′，則由上述定理．

$$BD'\cdot CE\cdot AF=-D'C\cdot EA\cdot FB,$$

然 $BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$,

$\therefore BD':D'C=BD:DC$，卽 D′ 與 D 合，而與 E, F 在同一直線上。

阿

【阿剌伯數字】 Arabic numerals. 〔算〕卽通常所用之數字 0, 1, 2, 3, …, 9 也。

【阿柏爾定理】 Abel's theorem. 〔代〕 $(x+a)^n=x^n+A_1a(x+b)^{n-1}+A_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\cdots\cdots+A_ra(a-rb)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\cdots+a(a-nb)^{n-1}$. 但 A_r 爲由二項式定理 x^r 之係數．由查理斯密大代數學第 259 及 305 款，已證明次式。

$$a^p-n(a-1)^p+{}_nC_2(a-2)^p+\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)^p=0\cdots\cdots(A)$$

但 p 爲小於 n 之正整數。

若以 $n-r$ 代 n, n 代 a, $n-r-1$ 代 p，且逆其順序書之，則得 $r^{n-r-1}-{}_{n-r}C_1(r+1)^{n-r-1}+{}_{n-r}C_2(r+2)^{n-r-1}-{}_{n-r}C_3(r+3)^{n-r-1}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}n^{r-r-1}=0\cdots\cdots(1)$

又於 (A) 以 $n-1$ 代 n, n 代 a, $n-2$ 代 p；且逆其順序書之，則得

$$1-(n-1)2^{n-2}+{}_{n-1}C_2 3^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}{}_{n-1}C_r r^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}n^{n-2}=0\cdots\cdots(2)$$

由是得次式．

$$a^n={}_nC_1ab^{n-1}+{}_nC_2a(a-2b)(2b)^{n-2}+\cdots+{}_nC_ra(a-rb)^{r-1}(rb)^{n-r}+\cdots+a(a-nb)^{n-1}\cdots\cdots(B)$$

因於此式比較 a^n 之係數，則爲 $1=1$，比較 a^{n-1} 之係數，則爲 ${}_nC_{n-1}(\overline{n-1}b)-(n-1)(nb)=0$。

又普通於(B)之右邊求 a^r 之係數，則得

$${}_nC_r(rb)^{n-r}-{}_nC_{r+1}\cdot{}_rC_1(\overline{r+1}b)(\overline{r+1}b)^{r-r-1}+{}_nC_{r+2}\cdot{}_{r+1}C_2(\overline{r+2}b)^2(r+2b)^{n-r-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}{}_{n-1}C_{n-1}(nb)^{n-r}$$

$$={}_nC_r r^{n-r}b^{n-r}-{}_nC_r\frac{n-r}{r+1}\cdot r(r+1)^{n-r}b^{n-r}+{}_nC_r\frac{(n-r)(n-r-1)}{(r+1)(r+2)}\times\frac{(r+1)r}{1\cdot2}(r+2)^{n-r}\cdot b^{n-r}+\cdots\cdots+(-1)^{n-r}{}_nC_r\frac{r!(n-r)!}{n!}\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}\cdot n^{n-r}b^{r-r}$$

$$=r\cdot{}_nC_rb^{n-r}\{r^{n-r-1}-{}_{n-r-1}C_1(r+1)^{n-r-1}+{}_{n-r}C_2(r+2)^{n-r-1}+\cdots+(-1)^{n-r}n^{n-r-1}\}.$$

以(1)式代入之，則上式之値爲零．又於(B)式之右邊取 a 之係數，與上同樣而變化之，則得次式．

$$nb^{n-1}\{1-(n-1)\cdot2^{n-2}+{}_{n-1}C_2 3^{n-2}-\cdots+(-1)^{r-1}{}_{n-1}C_r\cdot r^{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n^{n-2}\}.$$

以(2)式代入之，則此式之値爲零．故(B)

式之眞確得以證明．而阿柏爾定理之眞確，亦得以證明之．即

$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1a(x+b)^{n-1}$

$+{}_nC_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\cdots\cdots$

$+{}_nC_ra(a-b)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\cdots\cdots$

$+a(a-nb)^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$

於(C)式之右邊取 x^{n-r} 之係數，則得

${}_nC_1a_{n-1}C_{r-1}b^{r-1}+{}_nC_2a(a-2b)_{n-2}$

$C_{r-2}(2b)^{r-2}+{}_nC_3a(a-3b)^2{}_{n-3}C_{r-3}$

$(3b)^{r-3}+\cdots\cdots+{}_nC_ra(a-rb)^{r-1}$

如前法將 ${}_nC_1\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$，${}_nC_2\cdot{}_{n-2}C_{r-2}$ 變化之，則爲 ${}_nC_r\{rab^{r-1}+$

$+{}_rC_2a(a-2b)(2b)^{r-2}+\cdots\cdots\cdots$

$+a(a-rb)^{r-1}\}$．

於(B)式以 r 代 n 則此式爲 ${}_nC_ra^r$．

又於(C)式之右邊求不含 x 之項，則得與(C)同一之式．故(C)爲眞確．

【阿刺伯記數法】Arabic system of notation.〔算〕阿刺伯記數法者，即現今一般算術上所用之記數法也．其法以列1,2,3,4,5,6,7,8,9,0十個數字以記數，某位數字爲表其右位數字之十倍，而於個位數之右作小數點，以下則爲小數，故其位之列法如次．

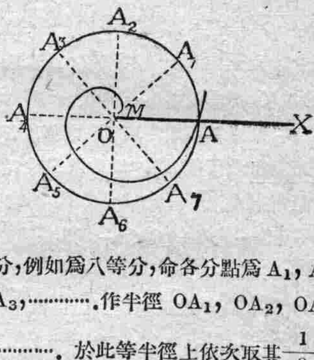
………十萬萬千百十個．分釐毫絲忽………

此記數法歐洲人由阿刺伯人傳入，故有此名，但阿刺伯人則得之於印度人也．

【阿內濟箕舌線】Witch of Agnesi.〔幾〕見箕舌線條．

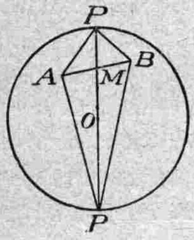
【阿基米得定理】Archimede's theorem.〔幾〕三角形之三垂線必交於同一點，此定理爲阿氏所證明，故名．參閱垂心條．

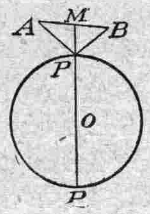
【阿基米得螺線】Spiral of Archimedes.〔幾〕爲超越曲線之一．動點之動徑 ρ 與其變角 θ 爲正比例時，其軌跡謂之阿基米得之螺線．取O爲極，OA 爲極軸，M 爲動點．設弧 AA_1 爲圓周之 $\frac{1}{8}$，則OM當爲OA_1之 $\frac{1}{8}$，而 $\frac{OM}{OA_1}=\frac{AA_1}{\text{圓周}}$，即 $\frac{\rho}{r}=\frac{\theta}{2\pi}$，即 $\frac{\rho}{\theta}=\frac{r}{2\pi}$．命 $a=\frac{r}{2\pi}$，則 $\rho=a\theta$．是爲阿氏螺線之方程式．其圖可作之如次：將圓周分爲若干等



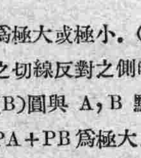
分，例如爲八等分，命各分點爲 A_1，A_2，A_3，………．作半徑 OA_1，OA_2，OA_3，………．於此等半徑上依次取其 $\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，………之長，連此等長不在O之各端，即得此螺線之一匝而爲第一螺形．再將各半徑依次延長其 $\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，………，連此等延線不在圓周上之各端，即得第二螺形．餘倣此．此螺線二個螺形間之距離等於 r．

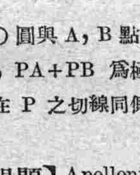
【阿爾海聖問題】Alhazen′s problem. 〔幾〕P 爲已定圓周上之動點. A, B 爲二定點. 於 P 在如何位置時, 則 (1) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$, 或 (2) PA+PB 爲極大或極小. 此爲阿爾海聖之問題. 〔解〕(1) 命 M 爲 AB 之中點, 則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{MA}^2$, 故使 PM 爲極大或極小卽可.





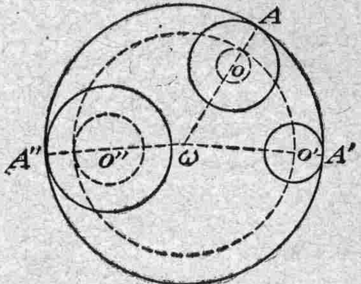
卽 P 於過 M 之直徑之兩端中, 取距 M 遠時爲極大, 距 M 近時爲極小也. (2) 命圓之中心爲 O, P 爲其圓周上之任意點, 則當 ∠OPA=∠OPB 時, PA+PB



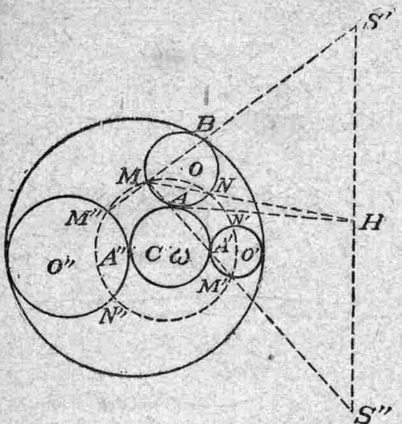


爲極大或極小. (A) 圓與 A, B 點在 P 之切線反對之側時, PA+PB 爲極小. (B) 圓與 A, B 點在 P 之切線同側時, PA+PB 爲極大.

【阿坡羅尼阿斯問題】Apollonius′ problem. 〔幾〕阿坡羅尼阿斯問題, 卽求作切於三與圓之圓之問題也. 尋常解此問題之法爲平行移動法, 其法如次: 命三與圓之中心爲 o, o′, o″, 其半徑各爲 r, r′, r″. 且設其中 r′ 爲最小者. 以 o, o″ 爲心, r−r′, r″−r′ 爲半徑作圓. 求得切於此二圓及過 o′ 之圓之中心 ω.



以 ω 爲心, ωA 爲半徑作圓, 則此圓切圓 o′, o″ 於 A′, A″, 而爲所求之圓. 此爲初等的解法, 而爲 Vieta 所發見. 茲述可應用於與圓之一或二或三代以直線或點之法. 此巧妙之解法爲葛爾剛納 (Gergonne) 所發明, 其法如次: 三與圓之中心與某一相似軸對於此三圓之極相聯之三直線與三與圓之交點爲一雙所求之圓之切點, 而可作得所求之圓. 用葛氏此巧妙之解法猶有不能解者, 例如三與圓之中心在一直線上時是也. 1892 年, 佛社 (Fouche′) 除去葛氏解法之不全完之點. 其法如次: 有含相似中心 S′, S″, 之相似軸. 命 M 爲 O 圓上之任意一點. 聯於 S′, S″. MS″ 與 O′ 圓交於二點, 其一點 M′ 爲 M 之逆相應點. 同樣 MS′ 定 O″ 圓上 M 之逆相應點 M″. 畫外接於三角形 MM′M″ 之圓 C. 設此圓 C 與三與圓各交於 N, N′, N″. 聯 MN, 延長之交相似軸



S′S″於H.由H引O圓之切線HA.如前於他二圓 O′, O″ 上求得 A 之逆相應點A′, A″. 則外接於三角形 AA′A″之圓爲所求之圓.因由 H 可作 O 圓之二切線 HA, HB, 以是各相似軸與二個實或虛之解,故此問題共有八個實或虛之解.換言之,其八解答如次: 所求之圓,與三與圓相切爲

內切	內切	內切
外切	外切	外切
外切	內切	外切
內切	外切	內切
內切	外切	外切
外切	內切	內切
外切	外切	內切
內切	內切	外切

玆討論實解之數如次:

I. 三與圓無公共點時, (i)任取二圓皆互在外時則有八實解. (ii)取二個一組之圓,任何一圓在他圓之內,他二組皆互在外時,則問題明爲不能. (iii)二組之圓爲一圓在他圓之內, 而第三組之圓互在外時,卽二與在第三組之圓互在外時,有八實解. (iv)取二圓之任何組,一圓在他圓內時,問題明爲不能.

II. 圓周之二相交時. 第三圓不過前二圓之交點,而交於此二圓時,有八實解. 又第三圓交前二圓之一, 或不交於任何圓,或過其交點之一時;惟有四實解.

III. 二圓外切, 第三圓在此二圓之外; 或二圓內切, 第三圓在大圓之內而在小圓之外時,有六實解.其他情形皆有四實解.

IV. 三圓切於同一點時, 問題爲不定.

阿坡羅尼阿斯問題,當特別情形,三與圓之任何者可變爲直線或點. 故此問題與其特別情形,共有十種不同情形.今以 P 表點, L 表直線, C 表圓,則十種不同之情形如次: (1)已知 PPP, 卽過三點作一圓,祇有一解. (2)已知 LLL, 有四解. (3)已知 PPL, 有二解. (4)已知 PPC, 有二解. (5)已知 PLL, 有二解. (6)已知 PLC, 有四解. (7)已知 PCC, 有四解. (8)已知 LLC, 有八解. (9)已知 LCC, 有八解. (10)已知 CCC, 有八解.

非

【非素數】 Composite number.〔算〕〔代〕不爲素數之數曰非素數,卽能以大

於 1 之整數整除之數也，例如 12, 15, 27. 下表爲集合百以內非素數之數因數而成，其百以內之素數，則用大字，以示區別.此表之直行表十位數，横列表個位數，其行列相交處，卽爲所取之數之素因數之分解式.例如欲分解 63 爲素因數，則於直行下數至 6, 於横列右數至 3. 其行列相交處卽得 $3^2\cdot7$. 注意此表，可發見次述諸件: (1)11之各倍數在自左方上端至右方下端之對角線中. (2)3^2之諸倍數在他一對角線中. 而與此對角線平行每隔二行之線，則各爲含 3 之倍數. (3) 2 與 5 之倍數悉含在 2 與 2 之直行中，而 0 下直行則含 2 與 5 之積之倍數. 求某非素數約數之總數，則如次法. 例如求 60 卽 $2^2\cdot3\cdot5$ 之約數之總數，先將 1, 2, 2^2 書爲第一列，3 書爲第二列，5 書爲第三列.於是更書第一列之數，次以第二列之數乘第一列各數之積，置爲新第二列. 又以舊第三列之數乘新第一，第二列各數之積，置爲新第三列，第四列.則數新四列各數之和·卽得約數之總數，如本例卽 12 也.一般將 60 之素因數 2,3,5 之指數 2,1,1 (卽 $2^2\times3^1\times5^1$ 之指數)各加 1 之連乘積，卽 $3\times2\times2$，卽爲 60 之約數之總數.但此處 1 及 60 本數，亦計在內. 普通某數之約數(1 及其本數常不在內)之數爲其各素因數之指數各加 1 之連乘積減 2. 玆述代數學之求法於下.設已知數爲 N，而從 N 約得各異之素因數爲 a, b, c, …………. 則 $N=a^x b^y c^z$ …………….

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	2^2	5	$2\cdot3$	7	2^3	3^2
1	$2\cdot5$	11	$2^2\cdot3$	13	$2\cdot7$	$3\cdot5$	2^4	17	$2\cdot3^2$	19
2	$2^2\cdot5$	$3\cdot7$	$2\cdot11$	23	$2^3\cdot3$	5^2	$2\cdot13$	3^3	$2^2\cdot7$	29
3	$2\cdot3\cdot5$	31	2^5	$3\cdot11$	$2\cdot17$	$5\cdot7$	$2^2\cdot3^2$	37	$2\cdot19$	$3\cdot13$
4	$2^3\cdot5$	41	$2\cdot3\cdot7$	43	$2^2\cdot11$	$3^2\cdot5$	$2\cdot23$	47	$2^4\cdot3$	7^2
5	$2\cdot5^2$	$3\cdot17$	$2^2\cdot13$	53	$2\cdot3^3$	$5\cdot11$	$2^3\cdot7$	$3\cdot19$	$2\cdot29$	59
6	$2^2\cdot3\cdot5$	61	$2\cdot31$	$3^2\cdot7$	2^6	$5\cdot13$	$2\cdot3\cdot11$	67	$2^2\cdot17$	$3\cdot23$
7	$2\cdot5\cdot7$	71	$2^3\cdot3^2$	73	$2\cdot37$	$3\cdot5^2$	$2^2\cdot19$	$7\cdot11$	$2\cdot3\cdot13$	79
8	$2^4\cdot5$	3^4	$2\cdot41$	83	$2^2\cdot3\cdot7$	$5\cdot17$	$2\cdot43$	$3\cdot29$	$2^3\cdot11$	89
9	$2\cdot3^2\cdot5$	$7\cdot13$	$2^2\cdot23$	$3\cdot31$	$2\cdot47$	$5\cdot19$	$2^5\cdot3$	97	$2\cdot7^2$	$3^2\cdot11$

1	2	2^2
3		
5		
1,	2,	2^2,
3,	2×3,	$2^2\times3$,
5,	2×5,	$2^2\times5$,
3×5,	$2\times3\times5$,	$2^2\times3\times5$.

故 N 可以次之連乘積之各項整除之，其連乘積為 $(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^x)(1+b+b^2+\cdots+b^y)\times(1+c+c^2+\cdots+c^z)\cdots\cdots\cdots$. 由是得整除 N 之約數，並 N 及 1，共為 $(x+1)(y+1)(z+1)\cdots\cdots\cdots$.

又求已知數之約數之法如下.

$N=a^xb^yc^z\cdots\cdots$，則其約數之和，為 $(1+a+a^2+\cdots+a^x)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^y)(1+c+c^2+\cdots+c^z)\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=\frac{(1-a^{x+1})(1-b^{y+1})(1-c^{z+1})\cdots}{(1-a)(1-b)(1-c)\cdots}.$$

【非調和比】 Anharmonic ratio 或 cross-ratio.〔幾〕若 A, B, C, D 為直線上之四列點，而 C, D 內分或外分 AB 線，則 $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$ 稱為四列點 A,B,C,D 之非調和比或十字比，常略書為 {AB,CD}，其線之方向須計及. 而 $\frac{AC}{CB}$ 及 $\frac{AD}{DB}$ 二比名曰距離比，其 A與B, C與D 名曰共軛點，A與C, C與B, B與D, D與A 則為非共軛點. 共軛點之一雙互換，則為非調和之反比.

【非歐幾里得幾何學】 Non-Euclidean Geometry.〔幾〕歐幾里得第 12 公例云"若一直線與二直線相交，其一側內角之和小於二直角，則此二直線充分延長必相交於其內角和小於二直角之側". 非歐幾里得幾何學者，不用歐氏此公例而獨立創造之有系統的幾何學也，非歐幾里得幾何學思想之由來，發源於求證歐氏第 12 公例之失敗. 其始不過見該公例較繁不能一目了然，故思有以證明之，證明不得，懷疑以生. 關於此公例研究特深者，為鑑伯 (Lambert 1728-1777) 及勒戎德耳 (Legendre 1752-1833) 二氏，其鴻篇傑構實開非歐幾里得幾何學之先河. 其後學者輩出，俄有羅柏奇 (Lobachevsky 1793-1856)，匈牙利有波利牙 (J. Bolyai 1802-1860)，德有高斯 (Gauss 1777-1855)，均深加研究，不謀而同，咸謂歐氏公例不可證明，且可不用該公例而另創一種有系統之幾何學. 高氏此類著作，零星斷片，散見於書札及遺稿中，未之編輯. 波氏之作附錄於其父書之後，1832-35 年間出版. 羅氏著作較多，出版於 1833-1855 年間. 三氏共創之幾何學曰羅柏奇幾何學 (Lobachevskian Geometry)，蓋以羅氏之作最完且備也. 羅氏之幾何學為銳角之假說，三角形各角之和，小於二直角. 又在一平面上二線同垂直於第三線，則二線

在其公垂線之任一旁，皆係開義，故亦稱爲雙曲線幾何學．羅氏幾何學獨享非歐幾里得幾何學之名有年，1854 年里曼(Riemann 1826－1866) 始以微分學爲立足地，另闢一派新幾何學，名曰里曼幾何學 (Riemann Geometry)．里氏之幾何學爲鈍角之假說，一直線爲定長，如環無端，可自行回折，故亦稱爲橢圓幾何學．

九　畫

係

【係數】Coefficient 或 Co-factor.〔代〕係數即表示某數所取倍數之數，例如 $3ax$ 則 3 爲 ax 之係數，即表示 ax 取三倍之意．上式或可云 $3a$ 爲 x 之係數．故係數有爲數字者，則曰數字係數 Numerical coefficient；有爲文字者，則曰文字係數 Literal coefficient；又有數字與文字混合者，則曰混係數 Mixed coefficient．然係數之意義甚廣，即凡將積之因數分爲二部分，則其一部即云他部之係數．且係數不僅限於整數，分數正數負數皆可．例如$\frac{2}{3}ax$ 則 $\frac{2}{3}$即爲 ax 之係數，如 $-5bx^2$ 則 $-5b$ 即爲 x^2 之係數，又如 xy 則 x 爲 y 之係數，或可云 y 爲 x 之係數．

【係數與根之關係】Relation between the roots and coefficient.〔代〕凡含一未知數之方程式，常可變形而爲 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$，此爲 n 次方，故有 n 根，命之爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_n$，則常可得下之恆等式:——

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+p_{n-1}x^{n-1}+p_n$$
$$\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)\cdots\cdots\cdots(1).$$

將上式右邊之諸因子乘出，并將 x 之係數左右方程之，則得

$$\left.\begin{aligned}p_1&=-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_3+\cdots+\alpha_n),\\p_2&=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\cdots\cdots\\&\quad+\alpha_{n-1}\alpha_n)\\p_3&=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\cdots\cdots\\&\quad+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\p_n&=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n\end{aligned}\right\}(2)$$

故得一定理曰，凡任一代數方程式其最高項之係數爲一時，則將第二項之係數 p_1 變更符號，即爲此方程諸根之和，第三項之係數 p_2 即爲諸根中每取二根之積之和，第四項之係數 p_3 變更符號即爲諸根中每取三根之積之和，以此類推，至末項 p_n 即 x° 之係數，則爲 n 根之總乘積 $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$，而其符號須視 n 而定，故一方程式之每一根皆爲其絕對項之除數.又若方程式之諸根皆爲正數時，則方程式之係數正負相間（最高項亦計在內），諸根皆爲負數時，則其係數皆正，此觀(2)式即明.

保

【保險】Insurance 或 Assurance.〔算〕在定期之內，爲金錢之賠償，以保生命財產之危險，謂之保險.營其業者，曰保險公司 Insurance Co.如保房屋貨物之火險 Fire Insurance，則任其被火時之賠償；如保船隻及船中貨物之水險 Marine Insurance，則任其被水時之賠償；如保某人之人壽險 Life Insurance，則任其死亡時之賠償.凡所保之房屋貨物等，謂之保險物.有此保險物者，按期付銀於公司，謂之保費 Premium.至保險物有損失時，公司所出之賠償，謂之險金 Insurable value.保險之計算，則用分釐法，險金爲母數，保費即子數也.

前

【前項】Antecedent 或 Antecedents.〔算〕〔代〕〔幾〕即比之第一項或比例之第一項及第三項之稱，例如比 a : b，則 a 曰前項.比例 a:b=c:d 則 a 及 c 爲二前項，又有稱前率者.

南

【南緯】South latitude.〔算〕見緯度條.

威

【威爾遜定理】Wilson's theorem.

〔代〕若 p 爲素數，則 $1+\lfloor p-1$ 可以 p 除盡，是爲威爾遜定理.命 a 表諸數

$$1,2,3,4,\cdots\cdots\cdots,(p-1)\cdots\cdots\cdots(1)$$

內任意一數，則 a 與 p 爲互素數，若諸積

$$1\cdot a,\ 2\cdot a,\ 3\cdot a,\cdots\cdots\cdots\cdots,(p-1)a,$$

以 p 除之，則其中僅有一餘數爲 1.命此積爲 ma；則可證除 $a=p-1$ 或 1 以外，m 與 a 爲不同.因若 a^2 以 p 除之，得餘數 1，則得 $a^2-1\equiv 0(\mathrm{mod}\cdot p)$，而因 p 爲素數，此式僅當 $a+1=p$ 或 $a-1=0$ 時，即 $a=p-1$，或 1 時始能成立.故 2a, 3a,……,(p−2)a 諸積，以 p 除之，其中祇有一積之餘數爲 1，即(1)內諸數之任一數，除第一及最後者外，皆可求得他數，使此一對之數之積形

如 M(p)+1. 故諸整數 2, 3, 4,……, (p−2), 其數爲偶數,可結合之成對,使每對之積形如 M(P)+1. 故將諸對全數相乘,則

$2.3.4\cdots\cdots(p-2)=M(p)+1;$

$1.2.3.4\cdots(p-1)=(p-1)\{M(p)+1\};$

故 $\underline{|p-1}=M(p)+p-1$, 或 $1+\underline{|p-1}$ 爲 p 之倍數.

度

【度】Degree.〔算〕〔幾〕〔三〕圓周三百六十分之一,曰弧度之一度;一度之弧所對之中心角,稱爲角度之度.

【度】Dimension.〔幾〕長,廣,厚謂之物體之三度.

【度量衡】Weights and measures.〔算〕度以量長,量以量容積,衡以衡輕重.歐美度量衡之制,大概可分爲三派:一曰大陸派,卽米突制,法德奧意等二十餘國用之.二曰島派,卽英國制,英美及英之屬地用之.三曰斯拉夫派,卽俄國制,俄國用之.此外又有日本之制,通行於日本之諸島而已.而爲各國所通行者,則爲萬國度衡量同盟會所定之米突制卽公尺制,其詳見該條.今將我國度量衡之數,與米突制略爲比較如下.

1 米 (metre) =營造尺3·125尺

1 竔 (litre) =30·517578立方寸
=·965747升.

1 兛(gramme)=庫平·026808932兩.

又一營造尺=·32米.一升=1·0355竔.

庫平一兩=27·301兛.

後

【後項】Consequent 或 Consequents.〔算〕〔代〕〔幾〕卽比之第二項或比例之第二項及第四項之稱.例如比 a:b, 則 b 曰後項.如 a:b 之值爲 r, 則 a=br, 卽後項乘比之值等於前項.又比例 a:b =c:d, 則 b 及 d 稱爲二後項,亦曰後率.

恆

【恆等式】Identity.〔代〕〔三〕等式兩邊所含之文字,不論其值如何,而兩邊恆相等者,曰恆等式.如代數中之

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

三角中之 $2\sin A\cos A=\sin 2A$ 等.

恆等式之等號(=)常書爲(≡), 如

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

又因 n 次有理整函數,若能以多於 n 之變值消盡之,則亦能以任何變值消盡之,故凡二 n 次之有理整函數若於多於 n 變值時爲相等,則於任何變值時亦相等,此時二函數爲恆等, 而其同次變值之係數各各相等,此定理爲不定係數之原理.

【恆方程式】Identical equation.〔代〕卽恆等式.

【恆同餘數】Congruence.〔代〕卽等剩式,見該條.

括

【括弧】Bracket 或 Parenthesis 或 Brace.〔數〕欲將二以上之數或項括爲一數或一項時所用之記號曰括弧. 其種類通例有 ( ), { }, 〔 〕三種,英名順次爲 Parenthesis, Brace, Bracket. 某式括弧前之符號爲(+)時, 則去括弧時,其式內各項之符號不變, 例如 $N+(a+b)=N+a+b$, $N+(a-b)=N+a-b$. 反之, 一式中之若干項, 皆可使之包於括弧之內, 而於其前置符號(+), 例如 $a+b+c=a+(b+c)$, $a+b-c=a+(b-c)$. $a-b+c=a+(-b+c)$. 若某式括弧前之符號爲(−)時, 則去括弧時,須儘變其括弧內各項之符號,例如 $N-(+a+b)=N-a-b$, $N-(+a-b)=N-a+b$, $N-(a+b-c)=N-a-b+c$. 反之,可變某式各項之符號,爲包括於括弧之內, 而於其前置符號(−), 例如 $a+b+c=a-(-b-c)$, $a-b-c=a-(b+c)$, $a+b-c=a-(-b+c)$. 又去括弧時每一次可去其一種括弧, 逐次由內部以及於外部, 例如 $a-[b+\{c-(d+e)\}]=a-[b+\{c-d-e\}]=a-[b+c-d-e]=a-b-c+d+e$.

【括線】Vinculum.〔數〕欲將諸數或諸項括爲一式時, 有時於其上引一直線以代括弧,是曰括線.例如 $a-\overline{b-c}$ 即等於 $a-(b-c)$, 又 $\sqrt{a+b}$ 等於 $\sqrt{}(a+b)$. 但不用括弧或括線而僅用根號, 則意與用括弧或括線時大異,例如 $\sqrt{}a+b$ 非爲 $a+b$ 之平方根之意,乃以 a 之平方根加於 b 之意.同樣 $\sqrt{}2a$ 非爲 2a 之平方根之意,乃以 2 之平方根乘 a 之意.又分數之分子與分母間之橫線, 亦爲括線之一種, 例 $\frac{a+b}{3}$ 即等於 $\frac{1}{3}(a+b)$.

指

【指標】Characteristic.〔代〕見對數條.

【指數】Exponent 或 Index.〔數〕爲表示某數自乘若干次之積, 而於其數之右肩書小字以記之,此所記之小字,稱曰指數.例如 3^5 即 $3\times3\times3\times3\times3$ 之意, 而 5 爲 3 之指數,又 a^4 即 aaaa 之意, 而 4 爲 a 之指數.一般 a^n 爲 a 自乘 n 次之意,而 n 爲其指數. n 之範圍推廣至負數分數皆可,例如 a^{-2} 則 −2 即爲 a 之指數,一般 a^{-n} 則 −n 即爲 a 之指數.而因 $a^n\times a^{-n}=a^0=1$, 故 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, 又 $a^{\frac{1}{3}}$ 則 $\frac{1}{3}$ 即爲 a 之指數,一般 $a^{\frac{1}{n}}$, 則 $\frac{1}{n}$ 爲 a 之指數. 而因 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$, 故 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. 又因 $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=a^n$,故 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$. 但僅書 $\sqrt[n]{a}$ 時,則 n 稱曰根指數. 又所宜先證明者,因由指數定則 $a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$, 故 $a^0=a^n\div a^n=1$, 不論 a 爲任何數皆可.

【指數函數】Exponential function.〔代〕見函數條.

【指數定則】Index law.〔代〕

$a^m\times a^n=a^{m+n}$, $a^m\div a^n=a^{m-n}$,
$(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$,
m 及 n 無論爲正數或負數,整數或分數皆可,是稱之曰指數定則.

【指數級數】Exponential series.〔代〕將 a^x 依 x 之昇冪展開之,則得

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{k^nx^n}{n!}+\cdots\cdots.$$

此時 $a=e^k$,故 $a^x=e^{kx}$,而上式可書爲 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$,是曰指數級數.

【指數方程式】Exponential equation.〔代〕即含有以未知數爲指數之項之方程式,例如 $a^x=b$, $3^{2x}+5\times3^x-1=0$. 指數方程式之最簡者爲 $a^x=b$,其解法有二種,一用連分數之解法,一用對數之解法.

I. 連分數之解法

例. 解 $2^x=6\cdots\cdots(1)$. 由觀察知 $2<x<3$,命 $x=2+\frac{1}{x'}$,代入(1)式爲 $2^{2+\frac{1}{x'}}=6$,即 $2^2\times2^{\frac{1}{x'}}=6$,故 $2^{\frac{1}{x'}}=\frac{3}{2}$,即 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'}=2\cdots\cdots(2)$.

又由觀察知 $1<x'<2$,命 $x'=1+\frac{1}{x''}$,代入(2)式,得 $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}}=2$. 此式可變爲 $\left(\frac{4}{3}\right)^{x''}=\frac{3}{2}\cdots\cdots(3)$.

又由觀察而知 $1<x''<2$,命 $x''=1+\frac{1}{x'''}$,代入(3)式,變化後得 $\left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}=\frac{4}{3}\cdots\cdots(4)$. 又由觀察知 $2<x'''<3$,命 $x'''=2+\frac{1}{x^{\text{IV}}}$ 如前法推求之,即可得 $2<x^{\text{IV}}<3$. 餘倣此.將是等之値順次代入前之方程式.則得

$$x=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

故 x 之値之分數部其第一近似値爲 $\frac{1}{1}$,第二近似値爲 $\frac{1}{2}$,第三近似値爲 $\frac{3}{5}$,第四近似値爲 $\frac{7}{12}$,此與眞値僅差 $\frac{1}{144}$. 故若以 x 之値爲 $2\frac{7}{12}$,則較眞値僅小 $\frac{1}{144}$.

II. 對數之解法

例與前同 $2^x=6\cdots(1)$. 兩邊各取對數,得 $x\log2=\log6$. $\therefore x=\log6\div\log2$,即 $x=\frac{0.778151}{0.301030}=2.584$. 又用對數便於解更複雜之方程式,例如解 $(a)^{b^x}=c$. 先命 $b^x=y$,則 $a^y=c$. 故如前法,得 $y=\frac{\log c}{\log a}$. 又 $x=\frac{\log y}{\log b}$,以前式代入後式,則得 $x=\log\left(\frac{\log c}{\log a}\right)/\log b$.

【指數式定理】Exponential theorem.〔代〕由二項式定理,若 n 大於一,則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots(1).$$

令 x=1，則得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots(2).$$

但$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$，

故級數(1)爲級數(2)之 x 次方，即

$$1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots=\left\{1+1+\frac{1+\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots\right\}^{x},$$

雖 n 爲任何大,此式常正確.故若 n 增至無窮大時，則

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots=\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots\cdots\right)^{x}.$$

上式右邊括弧內之級數常以 e 表之，故 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

以 cx 代 x，則得

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{2!}+\frac{c^3x^3}{3!}+\cdots\cdots.$$

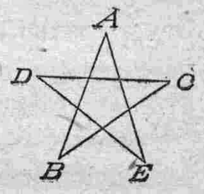
令 $e^c=a$，則 $c=\log_e a$，代入上式，得

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log_e a)^3}{3!}+\cdots\cdots.$$

是即指數式定理也.

星

【星形】Star-polygon.〔幾〕正多邊形之邊之互相交截者，謂之星形.如圖之 ABCDE 爲星形正五邊形.命其外接圓之半徑爲 R，則星形正五邊形之一邊$=\frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.



【星形線】Asteroid.〔幾〕即四歧點內旋輪線,見內旋輪線條.

柏

【柏努利級數】Bernoulli's series.〔微〕〔積〕將含一個變數之函數微分之積分化爲級數，其公式如次：$\int x dx=Ux-\frac{dx}{dx}-\frac{x^2}{1.2}+\frac{d^2x}{dx^2}-\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{d^3x}{dx^3}-\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$，U 爲 x 之任意函數.此公式爲柏努利發明,故名柏努利級數.

【柏努利數值】Bernoulli's numbers.

〔微〕將$\frac{x}{e^x-1}$展開之,其展開式為$\frac{x}{e^x-1}$

$$=1-\frac{x}{2}+B_2\frac{x^2}{\underline{|2}}-B_4\frac{x^4}{\underline{|4}}+$$

$$B_6\frac{x^6}{\underline{|6}}-B_8\frac{x^8}{\underline{|8}}+\cdots\cdots,$$ 但$B_2=\frac{1}{6}$,

$B_4=\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=\frac{1}{30}$,

$B_{10}=\frac{5}{66}$, $B_{12}=\frac{691}{2730}$, $B_{14}=\frac{7}{6}$,

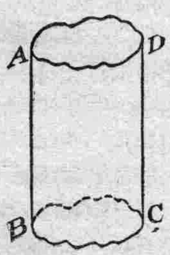
$B_{16}=\frac{3617}{5\ 0}$, $B_{18}=\frac{43867}{798}$, $B_{20}=\frac{174611}{330}$, $B_{22}=\frac{854513}{138}$. 此等數值為柏努利所決定,故名.

【柏努利方程式】Bernoulli's equation.〔微〕見一階一次微分方程式條.

【柏努利雙曲線】Bernoulli's lemniscate.〔幾〕見雙紐線條.

柱

【柱】Cylinder.〔幾〕柱面為通過與曲線及平行於原位置之直線移動所生之面.生柱面之動直線謂之母線.母線所過之與曲線,謂之母曲線或準線;母線在任意位置之直線,謂之柱面之基線.母曲線為曲線時,柱面以二平行平面截之,則其平面與



柱面間之立體謂之柱.如圖 ABCD 為母曲線,AB 為基線.若母曲線為圓,則此柱為圓柱.

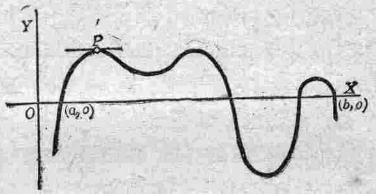
【柱面】Cylindrical surface.〔幾〕見柱條.

歪

【歪曲線】Gauche curve.〔幾〕即空間曲線,見該條.

洛

【洛爾定理】Rolle's theorem.〔微〕設 $y=f(x)$ 為 x 之連續單價函數,對於 $x=a$ 與 $x=b$ 消滅,且當 x 從 a 變至 b 時,$f'(x)$連續變化.此函數可用連續曲線表之,如圖對於 x 在 a 與 b 之間之至



少一價值,切線平行於 X 軸(例如在 P 點),即斜率為零.於是得一定理如次:若 $f(x)$ 於 $x=a$ 與 $x=b$ 時消滅,且 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 對於 x 從 $x=a$ 至 $x=b$ 之一切價值連續,則 $f'(x)$ 對於 x 在 a 與 b 之間之至少一價值為零.此定理名曰洛爾定理.

流

【流通坐標】Current coördinates.

〔幾〕於方程式軌跡中任一點之坐標曰流通坐標，或稱動坐標．換言之，流通坐標者，動點之坐標也．因動點不絕移動，故常以不定之數值表示其隨時之位置，此不定之數值卽流通坐標．流通坐標普通以變數 x，y 等記之．

相

【相似】Similar．〔幾〕凡兩直線形之各角順次相等，且其對應邊成比例者曰相似，常以"∽"表之．如 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，卽表示三角形 ABC 與三角形 $A'B'C'$ 爲相似也．

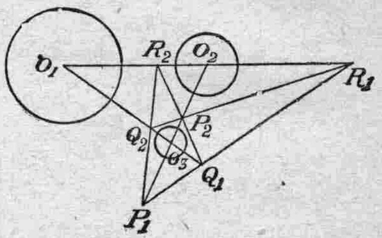
【相等】Equal．〔數〕凡兩數量之相同者曰相等，如數之等值，線之等長，角或面積之等大是．常於兩數量之間置"="以表示之，是曰等號．

【相似比】Ratio of similitude．〔幾〕相似多邊形之相當線之比，稱爲兩多邊形之相似比．

【相似分】To divide similarly．〔幾〕一已知直線將他一已知直線之已知二分比分之，則前線爲後線之相似分．又以對應直線分相似形時，亦曰相似分．

【相似形】Similar figures．〔幾〕凡直線形之相似者，曰相似形．故相似形之條件有二：(一)諸相當角相等，(二)諸對應邊成比例．相似形之比等於其對應邊或對應線之二乘比．又相似形之爲立體者，曰相似體．

【相似軸】Axis of similitude．〔幾〕過三圓六相似中心之四直線，稱爲相似軸．且此四直線爲一完全四邊形之四邊，而六相似中心爲其六頂點．如圖命 O_1，O_2，O_3 爲三圓之中心，r_1，r_2，r_3 爲其半徑，P_1，P_2，爲二圓 O_2，O_3 相似之



內心及外心，Q_1，Q_2 爲二圓 O_3，O_1 相似之外心及內心，R_1，R_2 爲二圓 O_1，O_2 相似之外心及內心．則四直線 $P_1Q_2R_2$，$Q_1P_2R_2$，$R_1P_2Q_2$，$P_1Q_1R_1$ 各爲三圓之相似軸．

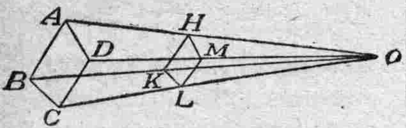
【相似圓】Circle of similitude．〔幾〕以二圓相似中心之連線爲直徑之圓，稱爲相似圓．上圖以 P_1P_2 爲直徑之圓，卽爲二圓 O_2，O_3 之相似圓．又三圓之三相似圓爲共軸圓．

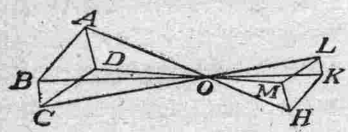
【相當線】Homologous lines．〔幾〕相似多邊形之相當線，爲在相似位置之諸線．亦稱對應線．

【相加平均】Arithmetic mean．〔算〕〔代〕見平均數條．

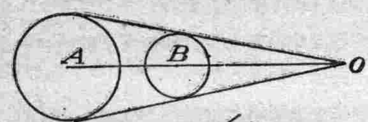
【相似中心】Centre of similitude 或 Centre of similarity．〔幾〕置二相似形使其各對應邊互爲平行時，則聯結其各相當角頂之諸直線，必相交於一點，此點曰相似中心，例如二相似形 ABCD，HKLM 之相似中心爲 O．但當 O 點在

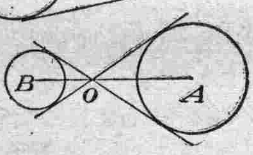
兩形之外方卽同方時，則 O 曰相似之外心。當 O 點在兩形之內方卽在兩形之間時，O 曰相似之內心。





又相似形爲圓時，則二圓之外公切線之交點爲相似之外心，其內公切線之交點爲相似之內心，而二圓之相似中心常在其中心線 AB 上或其延線上。





【相乘平均】Geometric mean.〔算〕〔代〕見平均數條。

【相似三角形】Similar triangle.〔幾〕卽相似形之爲三角形者．相似形之條件有二，而相似三角形則有其一卽包他條件在內，卽凡兩互等角三角形必相似，或兩三角形之諸邊成比例，則此兩三角形亦必相似也。

【相似不盡根】Similar surds 或 Like surds.〔代〕卽無理部分相同之不盡根或同類不盡根．例如 $2\sqrt{3}$ 與 $5\sqrt{3}$，又 $m\sqrt{ab}$ 與 $n\sqrt{ab}$．

【相似多面體】Similar polyhedrons.〔幾〕凡多面體有同數之面，彼此各相似，且在相似位置，而其諸相當多面角相等者，曰相似多面體．故 (1)相似多面體，可分作同數之四面體，彼此各相似，且在相似位置． (2)相似多面體之諸相當稜成比例． (3)相似多面體之兩相當線之比，等於其兩相當稜之比．(4)相似多面體之兩相當面，與其相當稜之平方成比例．(5)兩相似多面體之全面，與其兩相當稜之平方成比例． (6)兩相似多面體之體積之比，等於其相當稜之立方之比．

【相似多邊形】Similar polygons.〔幾〕卽相似形之爲多邊形者．故凡相似多邊形，(1)可分爲同數三角形，彼此各相似，且在相似位置.(2)其周界之比，等於其兩相當邊之比．(3)其面積之比，等於任兩相當邊之平方之比． (4)其面積之比，亦等於任兩相當線之平方之比．

【相屬不盡根】Conjugate surds.〔代〕與共軛二次不盡根同，見該條．

【相屬複虛數】Conjugate complex numbers.〔代〕與共軛複虛數同，見該條．

【相似圓錐曲線】Similar conics.〔幾〕由一點 O 向一曲線所引之動徑與由他一點 O′ 向他一曲線所引之動徑成定角且成定比時，此二曲線爲相似而不

在相似之位置，謂之相似圓錐曲線．相似二圓錐曲線之漸近線，其交角相等．

【相當圓錐曲線】Homothetic conics.〔幾〕由一點 O 向一曲線所引之動徑與由他一點 O′ 向他一曲線所引之動徑互相平行且成定比時，此二曲線爲相似而在相似之位置，謂之相當圓錐曲線．相當二圓錐曲線之漸近線互相平行．

省

【省略算】Approximation.〔算〕實際上名數之計算，罕有至小數第三位以下者，換言之，實際上之計算均大於單位名數之千分之一．例如普通之金錢以圓爲單位，而實際上算至釐位．長度以尺爲單位，而實際上算至分爲限．學術上名數之計算，大抵求至百萬分之一（小數第六位），亦罕有求其更精密之數者．關於時間之計算，則佐治安來（Sir George Airy）之器械可算至八百六十四萬分之一．關於重量，則敎授馬克斯維耳（Prof. Clerk Maxwell）算至五百萬分之一．長之測算最困難，其最精密之度，約可求至六萬分之一．而絕對的精密，則仍不能得到．然此等冗長之計算，於實際上則徒覺煩雜而無用，故有用省略算之必要也．省略算者，卽於位數甚多之數，將其若干位以後之數棄而不計之謂．多用之於小數，小數內所省略之部分，稱爲端數．處置端數之法，有一律捨棄之者，有一律收入之者，有視其首位如何而四捨五入者．省略與不省略所差之數，謂之誤差．由捨棄而得之數，必小於原數，由收入而得之數，必大於原數，其誤差皆小於所得數末位之 1．由四捨五入而得之數，或大或小於原數，其差小於末位之 $\frac{1}{2}$，是爲誤差之界限．省略算有加減乘除開平方開立方各法，分述于下．

〔省略加法〕若干數相加，無論何位，其由右位進至左位之數，雖極大必比相加數之個數少 1．例如三數相加，進位之數不能多于 2，因右位之數，皆以 9 爲最大，而 $9\times3=27$，亦只可進 2 至左位也．小數多位之各數相加，可於所要小數位之右一位或二，三位，加以加數少一之數，但使加於某位而不致變動所要之位，則加法卽自某位演起，而以下可省略．〔例1〕求 $129.3\dot{5}7\dot{1}$ 與 $22.\dot{4}\dot{2}$ 及 $109.45\dot{2}1\dot{1}$ 之和至小數第七位．此例爲三數相加，加數少一則爲2，所要之小數至第七位，其右一位和之末位爲 8．以 2 加之爲 10，故變動第七位小數．須更取第八第九二位之和卽 93，加以 2 爲 95，不致變動第七位小數．故所求之和爲261.2335116．

$$\begin{array}{r|l}
129.3571571 & 57 \\
22.4242424 & 24 \\
109.4521121 & 12 \\
\hline
261.2335116 & 93
\end{array}$$

〔例2〕求 $0.\dot{3}2\dot{1}$，$0.45\dot{6}7\dot{8}$，$7.\dot{3}\dot{2}$ 及 $5.6\dot{2}$ 之和至小數第三位．此例爲四數相加，加數少一則爲 3，所要之小數至第三位，其右一位和之末位爲 4，加 3 則爲 7，不致變動所要之小數位，故卽自小數第四位加起，

$$\begin{array}{r|l}
0.321 & 3 \\
0.456 & 7 \\
7.323 & 2 \\
5.622 & 2 \\
\hline
13.723 & 4
\end{array}$$

得其和爲 13.723. 四位以下,可從省略.
〔省略減法〕求二小數之差,可自所要之末位演起而省略其他. (1)如右一位之被減數大於減數、則末位依原數而減. (2)如右一位之被減數小於減數,則末位減數宜加一. (3)如右一位之被減數減數相等,則再審視右二位之數而定之.
〔例 1〕求 $314.29\dot{0}5$ 與 $180.41\dot{6}2$ 之差至小數第七位. 茲小數第八位之被減數大於減數,故從(1)法.

314.2905905	9
180.4162626	2
133.8743279	

〔例 2〕求 $0.989\dot{3}$ 與 $0.291\dot{6}$ 之差至小數第三位. 茲小數第四位之被減數小於減數,故從(2)法,將小數第三位之減數加一而後行減法.

0.989	$\dot{3}$
0.291	$\dot{6}$
0.697	

〔例 3〕由 $6.4\dot{5}$ 減 0.345. 求其差至小數第二位. 此例小數第三位之被減數與減數相等,故更查其第四位,而知其與(1)相合.

6.45	55
0.34	50
6.11	

〔省略乘法〕凡被乘數爲 m 位,乘數爲 n 位,其乘積之末位如爲 S 位者,設將被乘數比 m 位或進或退若干位,將乘數反之而比 n 位或退或進若干位,則其乘積之末位,亦必皆爲 S 位. 例如釐位乘分位,乘積之末位爲毫位,則毫位乘單位,絲位乘十位,分位乘釐位,單位乘毫位,各積之末位,亦皆爲毫位,如下式.

$$.7\times.02=7\times.002=70\times.0002$$
$$=.07\times.2=.007\times2=.014.$$

省略乘法卽應用上述之理而得之者. 其法先書被乘數,視所要之小數至某位,卽於其右二位之下,置乘數之單位,且顚倒乘數之位次而書之. 次以乘數之各位,各自相當位起,與彼乘數相乘,而於其相當位右之各位,則可以省略. 乘得之各部分積,其末位皆與乘數之單位相齊,如右位有應進位之數,則宜併入. 次將各部分積相加,棄其右端二位,卽爲所求之積.
〔例 1〕求 62.84563 乘 3.293578 之積,至小數兩位.

```
                 62.84563
                875392.3
628456×3+1........ 1885369
 62845×2+1...........125691
  6284×9+5........... 56561
   628×3+1...............1885
    62×5+4............... 314
     6×7+1.....................43
        +5                  5
              206.9868
```

此例所要小數爲兩位,故於再右二位卽第四位之下,置乘數之單位. 依法乘之,再棄積之右二位,得所求之數爲 206 98.
〔例2〕求 0.248264 乘 0.725234 之積,至小數五位.

```
                  0.248264
                  432527.0
248264×7.................... 1737848
 24826×2+1.......................49653
  2482×5+3.......................12413
   248×2............................ 496
    24×3+2............................ 74
     2×4+1................................9
                  .1800483
```

此例所要之小數爲五位，故置被乘數之單位于更右二位卽第七位之下，依法乘之，於其積棄去右二位，得所求數爲.18004。

〔省略除法〕先書法實，如法數爲有整數者，則準商數所要之小數位，在實之小數中截取多一之位數，卽在法數中截取與實相應之位數，然後相除。旣得初商，以初商乘截取之法數，併入右位應進之數，自實減之。每添得一商，則法尾少乘一位，故每次之減數亦遞少，而所要之商，易於求得。

〔例〕求 2835.14762÷7.5438621 之商至釐位。

```
7.54386/21)2835.147/62(375.82
           2263158....第一減積
           -------
            571989
            528707....第二減積
            ------
             43919
             37719....第三減積
             -----
              6200
              6034....第四減積
              ----
               166
               151....第五減積
               ---
                15
```

此例所要小數爲二位，故於實多截一位，至小數三位。必多截一位者，防末位之誤差，影響及於商數也。

第一減積＝7.54386×3，

第二減積＝7.5438×7＋4(4爲6×7＝42之進位數)，

第三減積＝7.543×5＋4 (4爲8×5＝40之進位數)，

第四減積＝7.54×8＋2 (2爲3×8＝24之進位數)，

第五減積＝7.5×2＋1(1爲4×2＝8收入之進位數)。

常法於餘實屢添位，卽以10乘實也；此法於法數屢截位，卽以10除法也。而實數乘以10，與法數除以10，其所得之商無異。若法爲無整數者，則先將法實之小數點，同移右若干位，使其法數有一位整數，然後依前法除之。

〔例〕2.83514762÷0.0075438621，求商至釐位。此例若截取實數至毫位而求之，其所得之商，必不能至釐位，故可將實數法數之小數點，各移右三位，改寫爲2835.14762÷7.5438621，然後截取，卽與前例同。若法有整數多位者，亦可將法實之小數點，同移左若干位，使其法只有一位整數，然後依前法除之。

〔例〕2835147.62÷7543.8621 求商至釐位。此例若截取實數至毫位而除之，則當乘減之時，所省略者無幾，故可將實數法數之小數點，各移左三位，改寫爲2835.14762÷7.5438621，然後截取，亦與前例同。

〔注〕省略除法，不但小數相除可用，卽整數除整數而求商至某位者，亦可用之。

〔省略開平方〕大小兩數和之平方，等於兩數平方之和，加兩數乘積之二倍。設其數之小者爲甚小，則小者之平方，可略去不計，故兩數和之平方，略可謂等於大者之平方，加兩數乘積之二倍，例如

$(1.039562)^2=(1.039+0.000562)^2$

$=(1.039)^2+2\times1.039\times.000562+(.000562)^2$

$=1.079521+.001167836+.0000003$
15844

$=1.080689151844$

而 $1.079521+.001167836=1.080688836$，故可謂 $1.080689151844=1.080688836$ 略。省略開平方卽應用上理，其法先用通常之法，求得所要平方根半數以上之位數，卽以此已得根數之二倍，除此時之餘積，以所得之商，續寫於已得根數之右，補足所要之位數。

例。求 $\sqrt{1.080689151844}$ 之值，至小數六位。先依常法開至小數三位，得 1.039。此時所餘之積爲 0.001168151844，可視爲等於已得根與後數位根乘積之二倍，故以 1.039×2 除之。(用省略算)，得商 $.000562$，續於已得根之右，卽得所求根爲 1.039562。

〔省略開立方〕$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$，若 x 爲甚小，則 $(a+x)^3$ 可視爲略等於 a^3+3a^2x。省略開立方之法，卽應用此理。卽先用通常之法，求得所要立方根半數以上之位數，卽以此已得根之平方之三倍，除此時之餘積，以所得之商，補足立方根所要之位數，

例。求 $\sqrt[3]{687}$ 之值，至小數四位。

先依常法求得小數二位之立方根爲 8.82，此時之餘積爲 0.871032，將 8.82 平方之得 77.7924，又三倍之，則爲 233.3772，以此數除 0.871032，得商 0.0037。補足於已得根，卽得所要立方根爲 8.8237。惟用此法求得之立方根，恆比眞正之立方根爲略大。

科

【科犀定理】Cauchy's theorem.〔代〕如級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 均爲正項，且各項恆比其前項爲小，則此級數恆視他級數 $u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\cdots\cdots+a^nu_{a^n}+\cdots\cdots$ 爲歛級數或發級數，從而決定其爲歛級數或發級數。但 a 爲任何正整數。是爲科犀定理，證明之如次：原級數之各項旣比其前項爲小，故有次之關係：

$u_1+u_2+\cdots+u_a<au_1$ 卽 $(a-1)u_1+u_1$，$u_{a+1}+u_{a+2}+\cdots+u_{a^2}<(a^2-a)u_a$ 卽 $(a-1)au_a$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，

$u_{a^n+1}+u_{a^n+2}+\cdots+u_{a^{n+1}}<(a^{n+1}-a^n)u_{a^n}$ 卽 $(a-1)a^nu_{a^n}$。

相加得 $S<(a-1)\Sigma+u_1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$。

其 $(a-1)\Sigma=(a-1)(u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\cdots\cdots+a^nu_{a^n})$。又以 $a\nless2$，故

$a(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_a)>au_a$，

$a(u_{a+1}+u_{a+2}+\cdots\cdots+u_{a^2})>a(a^2-a)u_{a^2}>a^2u_{a^2}$，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，

$a(u_{a^{n-1}+1}+u_{a^{n-1}+2}+\cdots\cdots+u_{a^n})>a(a^n-a^{n-1})u_{a^n}>a^nu_{a^n}$，

相加得 $aS>\Sigma-u_1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$。

由(1)及(2)可見 S 爲有限，則 Σ 亦爲有限，若 S 爲無限大，則 Σ 亦爲無限大。

【科次圓之性質】Cotes' property of the circle.〔三〕見抹甫耳圓之性質條。

秒

【秒】Second.〔算〕〔三〕(1)一小時之六十分之一曰分，一分之六十分之一曰秒.(2)一度之六十分之一曰分，一分之六十分之一曰秒，恆以($''$)表之，如 $50''$ 即五十秒也.

紀

【紀變數】Derivative.〔微〕一稱紀數，即微分係數，見該條.

約

【約度】Measure.〔幾〕一直線若正爲他直線之若干倍之長，或一面積若正含他面積之若干個，則後直線或面積曰前直線或面積之約度.

【約數】Exact measure 或 Exact divisor.〔算〕〔代〕A 數或 A 式若能整除 B 數或 B 式時，則 A 數或 A 式爲 B 數或 B 式之約數，例如 3 爲 18 之約數，$x+3$ 爲 $x^2+7x+12$ 之約數.

背

【背理】Absurdity.〔幾〕即不合理，見該條.

英

【英國法】English method.〔三〕即六十分法，見該條.

【英國制】English system.〔算〕以呎 foot 爲長度之單位.磅 Pound 爲重量之單位.秒 Second 爲時間之單位之制度，曰英國制(F. P. S. unit).

表

【表】Table.〔數〕表乃集錄事物，分門別類，以便檢查者也.數學上多用種種之表，惟大要可分爲二種:其一如度量衡等表，範圍較狹，及爲特別物類之集合.他一則爲由集錄一般公式而得之結果，範圍甚廣，例如對數表及三角函數表等.

【表差】Tabular difference.〔數〕對數表，三角函數表或三角函數之對數表，其上所載相隣二數之差之謂也.

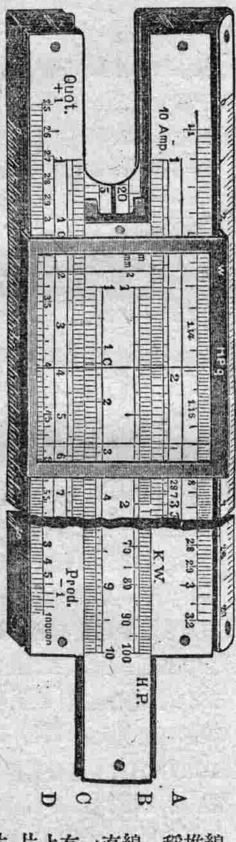
【表面積】Superficial area.〔幾〕即立體之面積.

【表對數】Tabular logarithm.〔數〕三角函數多小於一，其對數之指標爲負，欲避此不便，故表上將三角函數之眞對數加 10 以記之，是之謂表對數.　例如 $L\sin 18°35'=9.50298$，乃 $18°35'$ 之正弦之對數加 10 而得，即謂之表對數.正弦之眞對數以 logsin 記之，如 $\log\sin 18°35'=\bar{1}.50298$.而表對數則用 L 記之，以示區別.

【表面幾何學】Surface geometry.〔數〕表面幾何學乃數學之一分科，論曲面上圖形之形狀，大小，位置等之學科也.然現今數學之進步，僅於球面幾何學(Spherical geometry)有若干之知識，對於一般表面幾何學之知識，則尙極幼稺.平面幾何學乃表面之合特別條件而爲平面時所論之幾何學也.

計

【計算尺】 Slide rule〔數〕英人干武(Gunter)及文蓋特(Wingate)二氏先後發明，為基於對數原理作成之尺，以計算敏捷而無差誤為其特長，且攜帶便利，用途廣賅，用法簡易，可謂數學上唯一之器具。如乘法、除法、乘方、開方、代數式之連乘連除，三角函數及對數等計算，皆可應用；其他關於工業上實用之計算，尤為便利。如圖：

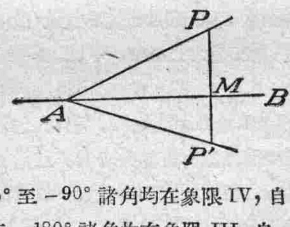


尺分上下兩層，上層為上尺，或稱A尺，下層為下尺，或稱D尺；中間可抽動者為滑尺，或稱尺舌，亦分上線下線，或稱B尺C尺；尺上套明角方片，片上有一直線，稱推線，或推片.尺背面兩端缺處畫標線，此處露滑尺兩端.滑尺背面分三格，上S，中L，下T，為算正弦，對數，正切用者.尺面數字，可任意定其數值，按照所設之問題，依法抽動滑尺，或稱動推線，視A,B,C,D各尺所指之數，即可得所求之數.尚有專備工業用者，則載有機械電機多種算法.

【計數器】 Abacus 或 Arithmograph 或 Arithmometer.計算數之器，其形狀有種種，大抵多用球以表數。此因以實物表示數之加減乘除，則思考力幼稚之兒童，其觀念易於明瞭也，故教授小學校初年級生多用之。我國之算盤，實亦為計數器之一種。

負

【負角】 Negative angle.〔三〕角之動徑與時針同方向旋轉所生之角曰負角，如圖 BAP 為正角，BAP′ 為負角.自



0° 至 −90° 諸角均在象限 IV，自 −90° 至 −180° 諸角均在象限 III，自 −180° 至 −270° 諸角均在象限 II，自 −270° 至 −360° 諸角均在象限 I，餘類推.故廣言之，負角 (n×360°−X) 所在之象限，視 −X 角所在之象限而定，式內 n 為負整數.又 (n×360°±X) 角之邊與 ±X 之邊同在一處，n 為正負整數均可.故若

n 爲負整數時，則負角 $A=(n\times360^\circ+X)$ 之各比，與正角X之各比相同。 又 $\sin(-A)=-\sin A$, $\cos(-A)=\cos A$.

因 $\sin A=\frac{PM}{AP}$, $\sin(-A)=\frac{P'M}{AP}$.

但PM等於P′M而符號相反，故 $\sin(-A)=-\sin A$. 而 $\cos(-A)=\frac{AM}{AP'}=\frac{AM}{AP}=\cos A$.

【負根】Negative root. 〔代〕方程式之根之爲負數者，如方程式 $x^2+x-6=0$ 之根爲2與−3，−3爲其負根.由笛卡兒之法則，方程式負根之數，不能多於多項式 $f(-x)$ 各項符號更變之數.

【負量】Negative quantity. 〔代〕於其量之前置負號者稱負量.算術之運算，限於正量，故遇減數大於被減數時，甚覺不便.代數上即加入此新元素，以便運算.而負量與正量實爲性質相反之量，如人之資產爲正量，而其欠債爲負量，故減負量時，量反增大，如於 a 中減去(−b)則得 $a+b$.

【負項】Negative term. 〔代〕代數式中某項前之置有符號(−)者，則稱其項曰負項.但其實非必爲負量，如代數式 $a-b+c$，其第二項曰負項，但若 b 等於 −d 時，則此項實爲正量也.

【負號】Negative sign. 〔代〕即用以表示負量之符號(−)，此實減號之廣義用法，因算術之符號(−)僅爲減之意，而代數上所用之符號(+)及(−)，則含有二種意義，一即用以演算通常之加減者，一則用以區別諸量反對之性質者.

【負數】Negative number. 〔代〕即數前之置有符號(−)而爲負量者，見負量條.

【負指數】Negative index. 〔代〕即指數之爲負數者.由指數定則，

$a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$, $\therefore a^0=a^m\div a^m=1$. 又 $a^{-m}\times a^m=a^{-m+m}=a^0=1$,

$\therefore a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$. 由是變任何量指數之符號，可將其分母爲分子，或分子爲分母.

指數爲負數時，其定則亦正確，如命 $n=-r$，r 爲正數.則 $(a^m)^n=(a^m)^{-r}=\frac{1}{(a^m)^r}=a^{-mr}=a^{mn}$.

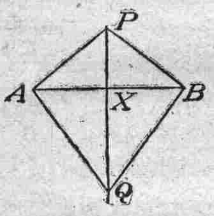
又 $(ab)^n=(ab)^{-r}=\frac{1}{(ab)^r}=\frac{1}{a^rb^r}=a^{-r}b^{-r}=a^nb^n$.

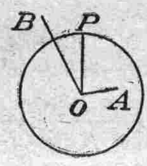
【負布洛喀點】Nagative Brocard point. 〔幾〕見布洛喀點條.

軌

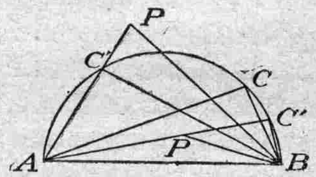
【軌跡】Locus. 〔幾〕〔第一平面之條例〕某點適合一定之條件而運動時，其路徑全體稱爲此點之軌跡.如點之運動限在一平面上，則其軌跡爲一直線或數直線或曲線.欲確定某點之軌跡，須證明次之二命題.即 I.X 線上之點適合條件 A. II.適合條件 A 之點，在 X 線上.惟亦可證明次之 III，IV 二命題以代 I，II；III.不適合條件 A 之點不在 X 線上.IV.不在 X 線上之點，不適合條件 A.

今取次之問題以爲由 I. II. 而確定軌跡之例. 卽求距已知二點等距離之點之軌跡. A, B 爲已知之二點, (I)P 爲在 AB 之垂直二等分線 PX 上之任意點. 聯結 PA, PB, 則在二三角形 AXP, BXP. AX=BX, PX 爲兩形公有, ∠AXP=∠R=∠BXP, 故 AP=BP. 又(II)命 Q 爲 AQ=BQ 之任意點, 聯 XQ, 則 △AXQ, △BXQ 之三邊各相等, 因而 ∠AXQ=∠R=∠BXQ. 故 Q 點在 AB 之垂直二等分線上.(斷定)故距 A, B 等距離之點之軌跡, 爲 AB 之垂直二等分線.





又取次之問題以爲由 I. IV. 而確定軌跡之例. 卽求由一定點之已知距離之點之軌跡. 以一定點 O 爲中心, 以已知距離爲半徑畫圓, 則(I)由此圓周上任一點 P 至中心 O 恆等於已知距離. (IV)由圓外任一點 A 至中心 O 之直線必截圓周, 故 AO 大於圓之半徑, 又由中心 O 至圓內任一點 B 之直線 OB, 必延長之方能截圓周, 故 OB 小於圓之半徑, 故由圓外任何點或圓內任何點至中心 O 皆不等於已知距離. (斷定)由一定點之已知距離之點之軌跡爲圓. 又取次之問題, 以爲由 II. III. 而確定軌跡之例. 卽已知三角形之底邊與頂角, 而求其頂點之軌跡. 命三角形 ABC 之底邊 AB 與頂角 C 爲已知, 畫外切圓弧, 則(II)以 AB 爲底邊頂角等於 C 之三角形之頂點皆在 ACB 弧上. (III)以 AB 爲底邊而頂角不等於 C 之三角形之頂點, 均不在 ACB 弧上. 此因若不在 ACB 弧上任取一點 P, 令 ∠P=∠C, 則 AP 或 AP 之延長線截 ACB 弧於 C′, 聯結 BC′, 則 ∠APB<或>∠AC′B, 卽 ∠APB<或>∠ACB, (斷定)故所求之軌跡爲 ACB 弧.



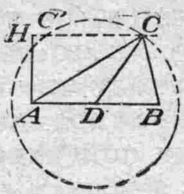
〔第二立體之條例〕將平面之軌跡之定義推廣之, 卽得立體幾何學之軌跡. 例如與二定點 A, B 等距離之點之軌跡, 爲垂直二等分 AB 之平面.

〔第三直線之軌跡〕直線適合某定則而運動, 其所生之面爲此直線之軌跡. 例如一直線沿圓周與一定之方向平行而移動, 則生圓柱面, 卽其軌跡.

【軌跡之交】 Intersection of loci.

〔幾〕於幾何學之作圖題中, 常須由二已知條件而決定適合此條件之位置者, 解此種問題時, 必須用軌跡法. 卽先求適合各條件之軌跡, 而後求二軌跡之共同點, 卽二軌跡之交點, 則此交點必滿足二已

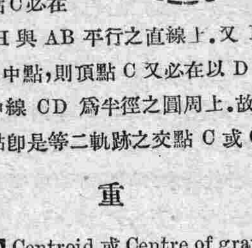
知條件也．例如已知三角形之底邊與高及此底邊之中線，求作此三角形．命 AH 爲已知之高，則所要三角形之頂點 C 必在



通過 H 與 AB 平行之直線上．又 D 爲 AB 之中點，則頂點 C 又必在以 D 爲中心以中線 CD 爲半徑之圓周上．故所要之頂點卽是等二軌跡之交點 C 或 C′.

重

【重心】Centroid 或 Centre of gravity. 或 Median point.〔幾〕三角形之三中線必交於一點，此點曰三角形之重心．其與各頂點之距離，爲各頂點至對邊中點之距離之三分之二．



如圖．中線 BY 與中線 CZ 交於 O 點，聯 AO，引長之交 BC 於 X．由 C 作 CK ∥ BY，引長 AX 交 CK 於 K，聯 BK．則在 △AKC， O 爲 AK 之中點，在 △ABK，ZO ∥ BK，卽 OC ∥ BK，故 BKCO 爲平行四邊形．而 X 爲 BC 之中點，卽 AX 爲 △ABC 之中線，卽三中線交於 O 點．又因 AO=OK．而 OX =XK，$\therefore AO=\frac{2}{3}AX$.

【重比】Multiple ratio.〔幾〕單比之方乘相比，曰重比．如 $a^2:b^2$ 爲 $a:b$ 之二重比，$a^3:b^3$ 爲 $a:b$ 之三重比．

【重合】Coincide.〔幾〕如兩三角形 ABC 與 A′B′C′ 爲全等，則置 △ABC 於 △A′B′C′ 上，使 AB 與 A′B′ 密合，則 AC 落於 A′C′ 上，BC 落於 B′C′ 上，兩三角形密合，是曰重合．

【重根】Multiple roots.〔代〕如方程式 $f(x)=0$ 有 n 根，其中有 m 根皆爲 α_1 時，則 α_1 曰重根，卽等根也．視 m 爲 2,3……，而 α_1 稱曰二重根，三重根….因 $f(x)$ 有 m 根互相等，卽有 m 相等因數，故 $f(x)$ 可書爲

$$f(x)=(x-\alpha_1)^m\phi(x).$$

於是 $f'(x)=m(x-\alpha_1)^{m-1}\phi(x)+(x-\alpha_1)^m\phi'(x)$ ．而 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 有公因數 $(x-\alpha_1)^{m-1}$．故求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數，設此因數爲 $(x-\alpha_1)^r$，則 $f(x)$ 含因數 $(x-\alpha_1)^{r+1}$，而有 $r+1$ 等根，卽 α_1 根有 $r+1$ 次也．設最高公因數爲 $(x-\alpha_1)^r(x-\alpha_2)^s$，則根 α_1 有 $r+1$ 次，根 α_2 有 $s+1$ 次．由此可知 $f(x)=0$ 之 m 次重根，卽爲 $f'(x)$ 之 $m-1$ 次重根．

【重噸】Gross ton 或 Long ton.〔算〕美國人稱 2240 磅之重曰重噸，此卽英國之一噸，因美國通例以 2000 磅爲一

噸，特於關稅及量鐵石炭等則用英噸，卽以 2240 磅爲一噸，因之別於 2000 磅之噸，而稱 2240 磅之噸曰重噸，或曰長噸。

【重積分】Multiple integral.〔積〕見偏積分法條與疊次積分法條。

【重複排列】Permutation with repetition.〔代〕重複排列，分爲無限制及限制二種：由 n 個相異原素 a_1，a_2，a_3，……，a_n 取 r 個之無限制重複組合中，用種種方法交換其原素之位置時，成一羣由 r 個原素而成之排列，如是之排列爲由 n 個原素取 r 個之無限制重複排列。又由 n 個相異原素取 r 個之限制重複組合中，用種種方法交換其原素之位置時，成一羣由 r 原素而成之排列，如是之排列，謂之限制重複排列。

構成排列之字母	組合之數	排列之數
(1)2個同種，1個異種(ii 及 n，o，a，b，c，m，t 中之一；nn 及 i，o，a，b，c，m，t 中之一；oo 及 i，n，a，b，c，m，t 中之一)	${}_3C_1\times{}_7C_1$ 卽 21	$21\times\frac{3!}{2!}$ 卽 63
(2) 3 個皆異種(i，n，o，a，b，c，m，t 中任何三個)	${}_8C_3$ 卽 56	$56\times3!$ 卽 336
合　　計	77	399

茲求由 n 個原素取 r 個之無限制重複排列之數如次：假想於一直線上列 r 個位置。其第一位置，可有 n 方法充滿之。由其中之任何方法充滿第一位置之後，因任何原素皆可再用之，故第二位置又有 n 方法充滿之。故充滿第一第二兩位置之方法有 $n\times n$ 或 n^2 個。第三位置又有 n 方法充滿之，故充滿三位置之方法有 n^3。以下類推。且因 n 之指數常與已充滿之位置之數同，由是充滿此等 r 個位置有 n^r 個方法。是卽爲所求排列之數。故若以 ${}_nK_r$ 表所求之無限制重複排列之數，則 ${}_nK_r=n^r$。

求限制重複排列之數之方法，先作限制重複組合，次計算由各組合可作排列之數，則得所求之數。例如由構成文字Combination 之字母取 3 字母可作若干排列。因所設之原素爲 i，i；n，n；o，o；a；b；c；m；t。故所求之排列之數如上表所示。關於求重複排列之數之法，尙有他法，見北京高等師範數理雜誌二卷三四號。

【重複組合】Combination with repetition.〔代〕作組合時，設原素中有 α_1 個 a_1，α_2 個 a_2，α_3 個 a_3，……，α_n 個 a_n。試考由其中取 r 個之組合，因一組合中所含原素之數爲 r，由是一組合中所含相同原素之數，至多爲 r。若相同原素之數雖多於 r，而其所作組合之數與其原素爲 r 時組合之數同。例如當 $\alpha_1=3$，$\alpha_2=4$，$\alpha_3=6$，而 $r=2$，可作之組合爲 a_1a_1，a_1a_2，a_1a_3，a_2a_2，a_2a_3，a_3a_3

六個，與 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=r=2$ 時無異．然相同原素之數小於 r 時，則與等於 r 時不同．例如當 $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=2$ 時，可作之組合為 $a_1a_2, a_1a_3, a_2a_2, a_2a_3, a_3a_3$ 五個，與前相同．故重複組合可區別之為二種：I. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots\cdots=\alpha_n=r$ 者．II. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots,\alpha_n$ 不皆大於 r，其中至少有一小於 r 者．所設原素中有數個相同時，可作如次想之，即所設諸原素中無相同者，惟當作組合時，同原素可重複取若干次．例如由原素 $a_1,a_1,a_2,a_2,a_2,a_3,a_3$ 作取 2 之組合，又可稱為由原素 a_1, a_2, a_3 作取 2 之組合，而 a_1 可重複 1 次，a_2 可重複 2 次，a_3 可重複 1 次．如是之組合，謂之重複組合；而如 I 者，謂之無限制重複組合，如 II 者，謂之限制重複組合．

求無限制重複組合之數如次：由 n 個原素每取 r 個之無限制重複組合之總數，以 ${}_nH_r$ 表之；此無限制重複組合之數 ${}_nH_r$ 與 n 個字母 r 次之齊次乘積之數同．〔第一法〕作連乘積

$$(1+a_1x+a_1^2x^2+a_1^3x^3+\cdots\cdots)$$
$$(1+a_2x+a_2^2x^2+a_2^3x^3+\cdots\cdots)$$
$$(1+a_3x+a_3^2x^2+a_3^3x^3+\cdots\cdots)\cdots\cdots$$
$$(1+a_nx+a_n^2x^2+a_n^3x^3+\cdots\cdots).$$

x^r 之係數為由 n 個原素 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots a_n$ 取 r 個所有諸無限制重複組合之總和．故於連乘積內，命 $a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=1$，則可得由 n 個原素取 r 個諸無限制重複組合之數．故所求組合之數等於 $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)^n$ 內 x^r 之係數．然 $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=(1-x)^{-1}$；故所求組合之數為 $(1-x)^{-n}$ 內 x^r 之係數．故

$$ {}_nH_r=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}={}_{n+r-1}C_r.$$

故由 n 個相異原素每次取 r 個之無限制重複組合之數，等於由 n+r−1 個原素取 r 個不許重複之組合之數．〔第二法〕由 $a_1, a_2, a_3,\cdots,a_n$ 中取 r 個所作之無限制重複組合，各以 n 原素 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots,a_n$ 全數加入，其組合之數不變．如斯所得之各組合至少含各原素一次，而每一組合由 n+r 個原素而成．故所求之組合之數，等於由 n 個原素中取 n+r 個，其中各原素至少含一次之組合之數．如斯之組合之數，可求之如次：將組合中之原素依自然之順序列之，相同之原素除第一個外，皆以 s 換之；例如組合 $a_1a_1a_1a_2a_2a_3a_3\cdots\cdots$ 則以 $a_1ssa_2sa_3s\cdots\cdots$ 代之．如是各組合皆為由 n 個依次序之原素 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots,a_n$ 及 r 個 s 而成．故此問題成為求 n+r 個原素，其中有 r 個相同者能排成不同形式之數．當 s 在左端時為無意義．且因與原素 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ 之次序無關，故可定 a_1 為第一位．由是今可考察 n−1 個原素 $a_2, a_3,\cdots\cdots,a_n$ 及 r 個 s 之排列．故求此之時，與 $a_2, a_3,\cdots\cdots,a_n$ 之次序無關，必須注意；故當計算排列時可視為相同．而此題成為求 n+r−1 個原素，其中 n+1 為相同，r 個為相同所能成之不相同之排列之數．故

$${}_nH_r=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,n!}\,{}_{n+r-1}C_r.$$

求限制重複組合之數之法如次：設所有 n 個原素中，n_r 個得重複 r 次者，n_{r-1} 個得重複 r−1 次或 r 次者，n_{r-2} 個得重複 r−2 次或 r−1 次以上者，以下同樣，n_1 個但見一次或得重複二次以上者.如是則 $n_r\leqq n_{r-1}\leqq n_{r-2}\leqq\cdots\cdots\leqq n_1$，$n_1=n$. 如此限制,準備求由 r 個原素而成之組合之數，一組合中之原素爲 r 個,可置之度外,祇須求 $k_1,k_2,k_3,\cdots\cdots,k_r$ 個原素各重複 1, 2, 3……,r 次諸組合之數,但此等 k 爲非 o 之正整數,如是組合中所含原素之總數爲 $k_1+2k_2+3k_3+\cdots+rk_r$. 作如是之組合，須由 n_r 個原素選擇 k_r 個，而其方法有 ${}_{n_r}C_{k_r}$ 個. 今用某方法選擇 k_r 個，次選擇 k_{r-1} 個之方法有 ${}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}$ 個.以下同樣，選擇 k_1 之方法有 ${}_{n_1-n_2-\cdots\cdots-k_r}C_{k_1}$ 個.故組合之數爲

${}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdots\cdots\cdots{}_{n_1-n_2-\cdots\cdots-k_r}C_{k_1}$ 於是更加入所作組合之所含之原素爲 r 之條件,則 k 不可不滿足下之條件：

$$k_1+2k_2+3k_3+\cdots\cdots+rk_r=r.$$

由是k中必有爲 0 者.故所求組合之數爲 $\sum{}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdots{}_{n_1-n_2-\cdots-k_r}C_{k_1}$. 例如求字 Examination 之字母每次取三個之組合若干? 因諸字母得重複二次者共三個，僅見一次或得重複二次者共八個.故所求之組合之數,爲於 $k_1+2k_2=3$……(1)限制內可求得之 $\sum{}_3C_{k_2}\cdot{}_{8-k_2}C_{k_1}$.而(1)之解爲 $k_1=1$, $k_2=1$; $k_1=3$, $k_2=o$. 故所求之數爲 ${}_3C_1\cdot{}_7C_1+{}_3C_0\cdot{}_8C_3=77$.

降

【降冪】Descending power〔代〕某文字之降冪云者，即其指數順次由高及低之謂。如 $5x^4-3x^3+7x^2+x-5$ 及 $x^2+2xy+y^2$ 皆依 x 之降冪順次列之,而第二式又爲 y 之昇冪.

【降級數】Descending series.〔代〕即遞降級數,見該條.

限

【限界】Limit.〔積〕見積分法條.

【限點】Limiting points.〔幾〕見同軸圓條.

面

【面】Surface 或 Face.〔幾〕(1)面 Surface. 線在空中移動所生之跡曰面，面爲空間之一部與他之一部之界，亦爲立體與周圍空間之界。但面非立體之一部分，故有長有廣而無厚. (2)面 face,包圍立體之平面曰面.

【面角】Face angle.〔幾〕多面角之相隣二稜所成之角曰面角.

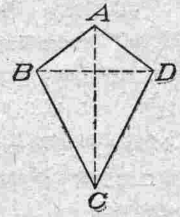
【面積】Area.〔幾〕單位長之正方爲面之單位,面之面積爲其所含面之單位之數.測田地之面積常以畝步等爲單位，測國土時則用方里.

【面積坐標】Areal coördinates.〔幾〕

見三線坐標條.

風

【風箏形】Kite.〔幾〕四邊形之相鄰二邊相等者，謂之風箏形．如圖之ABCD 爲風箏形．風箏形之兩對角線成直角，故風箏形之面積爲二對角線之積



之半，卽風箏形 ABCD 之面積 $=\frac{1}{2}$ (AC×BD).

首

【首項】First term.〔算〕〔代〕普通稱等差級數或等比級數之第一項曰首項．以 a 表之．

【首線】〔角之首線〕Initial line of a angle.〔幾〕〔三〕以一直線之一端爲樞旋轉而生角，其直線之初位置曰首線．又極坐標之極軸亦曰首線，參閱極坐標條．

十畫

乘

【乘方】Power.〔算〕〔代〕卽乘冪，見該條．

【乘法】Multiplication.〔算〕〔代〕乘法（整數）爲某數與他數累次相加之簡便法，此某數與他數之累次簡便相加曰相乘，其某數卽乘法之實數曰被乘數，乘某數之他數，卽乘法之法數曰乘數，乘得之數曰積，又相乘亦可云相倍．被乘數與乘數互換，其二數之積不變，例如 $a\times b=b\times a$ 故被乘數與乘數實無區別，而均爲積之因數．次分數乘某數時，則不得不將整數乘法之定義擴張之，因分數爲一新數，故不可不新設一定義曰：分數乘某數者，卽以乘數之分子表所取被乘數之數，而以分母表等分之數．依此定義，故例如 $\frac{3}{5}$ 乘某數者，卽以 5 除被乘數之 3 倍也．次論小數，例如以 0.1 乘之者，因 $0.1=\frac{1}{10}$，故卽取被乘數之 $\frac{1}{10}$ 也．同理以 0.5 乘之者，因 $0.5=\frac{5}{10}$，故卽以 10 除被乘數之 5 倍也．又如 $0.375\times0.27=\frac{375}{1000}\times\frac{27}{100}=\frac{375\times27}{100000}$，故可先不問小數點之如何而行乘法，而後取其積之小數位等於被

乘數與乘數小數位之和．最後代數式之相乘，以各項與被乘數相乘，取其各積之代數和可也，例如 $(a+b+c)(x+y)$

$$=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$$
$$=ax+ay+bx+by+cx+cy.$$

【乘垜】〔算〕〔代〕即擬形數，見該條．

【乘號】Sign of multiplication.〔算〕〔代〕即表示二以上之數相乘之記號，通常用(×)，如 $a\times b$ 卽 a 與 b 相乘之意．惟多數連乘時，則於各數之間置(·)以代之，如 $2\times3\times5$ 之連乘常以 $2\cdot3\cdot5$ 表之，有時此二種符號均從省，故 abc 卽 $a\times b\times c$ 之略也．

【乘數】Multiplier.〔算〕〔代〕見乘法條．

【乘冪】Power.〔算〕〔代〕一數自乘若干次，其積稱爲此數之乘冪，如一數 a 自乘一次，二次，三次，…………n 次，恆以 $a, a^2, a^3\cdots\cdots a^n$ 記之，而順次稱曰 a 之一乘冪(First power)，二乘冪(Second power)，三乘冪(Third power)，……n 乘冪，(nth power)．二乘冪亦稱平方，三乘冪亦稱立方．任何數之 0 乘冪爲 1，卽 $a^0=1$．某數之負乘冪等於同數之同整數乘冪除 1 卽 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$．某數之分數乘冪，等於同數之分子所表之乘冪，以分母表其開方之數，卽 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$．某數之乘冪，一般從 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 之定則，卽指數定則也．

【乘積】Product.〔算〕〔代〕二數相乘，其結果曰乘積，或簡曰積，如 3a 與 5b 之積爲 15ab．

【乘法表】Multiplication table.〔算〕卽記載二個一位數之積之表，亦曰九九表，又稱畢達哥拉斯表 (Pythagoras's table)．其表如下，縱橫二行各數字相交之處，卽二數字之乘積，如縱第 5 橫第 7 相交之處爲 35，故知 $5\times7=35$，讀爲 5，7，→35，餘類推．

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

俯

【俯角】Angle of depression.〔三〕垂直角之一邊在水平面上，而其他邊向下者，曰俯角．

個

【個位】Units place.〔算〕十進記數法之第一位也，在此位之數，曰個位數．

倍

【倍度】Multiple.〔幾〕一直線爲他直線之整數若干倍，則測度時前線爲後線之倍度．

【倍量】Multiple.〔算〕〔代〕某數量之整數若干倍之謂，如長 6 尺爲長 2 尺之倍量．

【倍數】Multiple.〔算〕〔代〕某數為他數所整除時,則前數曰後數之倍數.例如 15, 20, 30 皆為 5 之倍數; ma 為 a 之倍數; a^2x 為 a, ax, a^2 之倍數.

【倍級數】Geometical progression.〔算〕〔代〕即等比級數,見該條.

【倍率曲線】Curve of double curvature.〔幾〕見曲線及空間曲線條.

【倍角之三角函數】Trigonometrical functions of multiple angles.〔三〕(1)將和角之三角函數之公式,令B=A,則得

$$\sin 2A=2\sin A\cos A,$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$$
$$=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1,$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A},$$

$$\cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}.$$

(2)$\sin 3A=\sin(2A+A)$
$=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$
$=2\sin A\cos^2 A+(1-2\sin^2 A)\sin A$
$=2\sin A(1-\sin^2 A)+(1-2\sin^2 A)\sin A$
$=3\sin A-4\sin^3 A.$

同理　$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A,$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A},$$

$$\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}.$$

(3)三角函數

$\sin A,\ \sin 2A,\ \sin 3A,\cdots\cdots,$

$\cos A,\ \cos 2A,\ \cos 3A,\cdots\cdots,$

之次序乃為循環的,因

$\sin(n+1)A=2\cos A\cdot\sin nA-\sin(n-1)A,$

$\cos(n+1)A=2\cos A\cdot\cos nA-\cos(n-1)A,$

故是等結果之各項,可以 $2\cos A$ 乘其前之函數而減去又前之函數以得之.用此法則只須記明 $\sin 2A$ 及 $\cos 2A$ 之公式,而任何倍角之公式均可求得.故級數

$1+x\sin A+x^2\sin 2A+x^3\sin 3A+\cdots\cdots$

或 $1+x\cos A+x^2\cos 2A+x^3\cos 3A+\cdots\cdots$

之關係式為 $1-2x\cos A+x^2$.

借

【借代法】〔代〕見補助未知數條.

倒

【倒形】Inverse figure.〔幾〕如 O 為一定點, A 為某圖形上任一點,在 OA 或其延長線上取 B 點,令 $OA\cdot OB=K^2$ (常數),則 B 稱為 A 之倒形,對於中心 O 半徑 K 之圓言, O 曰倒形中心, K^2 為倒形率, K 曰倒形半徑,其圓曰倒形圓.又 A 亦為 B 之倒形,而 OA 與 OB 為倒變.又倒形亦曰反形.若A在某圖形上取種種之位置,則B亦有相應之種種位置,而另成一新圖形.如此由一形演成他一形之法,名曰倒演.倒形有二特性:(I)A距倒形中心愈近,則 B 愈遠, A 與 O 合一,則 B 在無窮遠處,反之亦然.(II)於 O 為倒形中心 K 為倒形半徑之圓周上取A 點,則 A, B 合一.

【倒演】Inversion.〔幾〕見倒形條.

【倒數】Reciprocals.〔算〕〔代〕3 之倒

數為$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$之倒數為$\frac{5}{2}$，a之倒數為$\frac{1}{a}$，$\frac{y}{x}$之倒數為$\frac{x}{y}$．一般整數之倒數，即以其數為分母，分子為1之分數．分數之倒數，即其分母與分子互相交換之分數．又如$\frac{x}{y}$與$\frac{y}{x}$稱為互倒分數(Reciprocal fraction)．

【倒點】Inverse points．〔幾〕C, D二點，就一圓直徑二端 A,B 言，為調和共軛時，則就其圓言，C,D 為倒點．如圓之中心為 O，半徑為 r，則 $OC \cdot OD = r^2$．C與D對中心 O 言，稱為互為倒形，亦稱互為倒點．一線或圖形上各點之倒點，亦成一線或圖形，名為前者之倒形，參閱該條，又見對極線條．

【倒形法】Inversion．〔幾〕即求倒形之法也．

【倒形圓】Circle of inversions．〔幾〕見倒形條．

【倒數式】Reciprocal expressions．〔代〕a之倒數式為$\frac{1}{a}$，$\frac{b-x}{a+x}$之倒數式為$\frac{a+x}{b-x}$．一般言之，整數式之倒數式，為以其式為分母以1為分子之式，分數式之倒數式，為將其式之分子分母互換之式．

【倒形中心】Centre of inversion．〔幾〕見倒形條．

【倒數螺線】Reciprocal spiral．〔幾〕與雙曲線螺線同，見該條．

【倒冪級數】〔代〕即倒乘冪級數．

【倒乘冪級數】〔代〕級數各項之分母為整數依一定規則遞加之乘冪而分子恆為1者，稱曰倒乘冪級數或倒冪級數．例如$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots$或$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots\cdots$是．第一式無窮項之和等於$\frac{\pi^2}{6}$，第二式無窮項之和等於$\frac{\pi^2}{8}$．

【倒數方程式】Reciprocal equation．〔代〕於恆等式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$中，以$\frac{1}{y}$代 x，變化之後，得

$$\frac{1}{y^n}+\frac{p_1}{y^{n-1}}+\frac{p_2}{y^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{p_{n-1}}{y}+p_n\equiv\frac{p_n}{y^n}\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\left(y-\frac{1}{\alpha_n}\right),$$

或

$$y^n+\frac{p_{n-1}}{p_n}y^{n-1}+\frac{p_{n-2}}{p_n}y^{n-1}+\cdots\cdots+\frac{p_1}{p_n}y+\frac{1}{p_n}\equiv(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\cdots\cdots(y-\alpha_n).$$

故一含 x 之方程式，以$\frac{1}{y}$代 x，以$\frac{y^n}{p_n}$乘之，則其結果為一含 y 之方程式，而有以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$之倒數為其根，此種方程式當 x 變為倒數後，其值不變，是曰倒數方程式．由上知倒數方程式其係數中所有之條件為

$$\frac{p_{n-1}}{p_n}=p_1,\ \frac{p_{n-2}}{p_n}=p_2,\ \cdots,\ \frac{p_1}{p_n}=p_{n-1},$$

$\frac{1}{p_n}=p_n$，由最後之條件得 $p_n^2=1$ 或 $p_n=\pm1$。依 p_n 之爲 $+1$ 或 -1，而倒數方程式分爲二類，

(1)當 $p_n=+1$ 時，得關係

$p_{n-1}=p_1$，$p_{n-2}=p_2$，$\cdots$，$p_1=p_{n-1}$。

此爲第一類倒數方程式，其首尾相對應項之係數量相等而號相同。

(2)當 $p_n=-1$ 時，得關係

$p_{n-1}=-p_1$，$p_{n-2}=-p_2$，$\cdots$，$p_1=-p_{n-1}$，

此爲第二類倒數方程式，其首尾相對應項之係數量相等而號相反。此類之方程式當爲偶次時，如云 $n=2m$，則其係數關係中必有一關係變爲 $p_m=-p_m$，即 $p_m=0$，故第二類倒數方程式之爲偶次時，必無中項。

如 α 爲倒數方程式之一根，則 $\frac{1}{\alpha}$ 亦爲其一根，故倒數方程式之根常成對，如 $\alpha,\frac{1}{\alpha}$；$\beta,\frac{1}{\beta}$ 等。若方程式爲奇次，則必有一根自爲倒數，即一根必爲 $+1$ 或 -1，第一類時爲 -1，第二類時爲 $+1$。在此二情形均可以因數 $(x+1)$ 或 $(x-1)$ 除之，而得第一類之偶次倒數方程式。第二類偶次方程式必有 (x^2-1) 爲其因數，因其方程式常可書爲 $x^n-1+p_1x(x^{n-2}-1)+\cdots\cdots=0$ 也。除以 (x^2-1) 之後，則亦變爲第一類之偶次倒數方程式，故所有倒數方程式皆可變爲第一類而其次數爲偶數，此爲倒數方程式之標準式。玆舉例以示一般之解法。

〔例〕解方程式

$$6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0.$$

此方程式之左邊明知有因數 x^2-1，而其對應根爲 ±1。故 $6(x^6-1)-25x(x^4-1)+31x^2(x^2-1)=0$ 所要之根爲 ±1 及 $6x^4-25x^3+37x^2-25x+6=0$ 之根。

後之方程式各項以 x^2 除之，得

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+37=0,$$

命 $x+\frac{1}{x}=y$，即 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，

故 $6y^2-25y+25=0$，因而 $y=\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{3}$。若 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，則 $x=2$ 或 $\frac{1}{2}$，

若 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{3}$，則 $x=\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$。

故所要之根爲 ±1，2，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$。

【倒數置換法】Reciprocal substitution.〔積〕見有理化積分法條。

値

【値】Value.〔數〕有爲式之値者，例 $(2+3)4$ 式之値爲 20，卽運算其式所得之結果也。有爲文字之値者，如 $2:3=10:x$，則適合 x 之値爲 15。又比之値卽後項除前項之商也。又函數之値如 $f(x)=x^2+3x-5$，當 $x=4$ 時之値爲 $16+12-5=23$。

原

【原線】Initial line.〔幾〕〔三〕卽首線，

見該條。

【原點】Origin.〔幾〕角之首線初與他一邊相合，其後自他邊之端迴轉，此角之頂曰原點. 又方程式之幾何學的表示，即作曲線圖時，常以互成直角之二直線爲縱橫軸，其交點曰原點. 故在解析幾何中，原點之坐標爲 (0,0)。

哩

【哩】Mile.〔算〕英美兩國量長距離之單位，一哩等於 1760 碼，即 5280 英尺，合我國 5029.1094 尺。

埃

【埃拉托色尼素數淘汰法】Eratosthenes's sieve.〔算〕〔代〕此法乃由各數中淘汰非素數而求素數之法也.(爲希臘天文學者埃拉托色尼新發明，故名. 氏爲西歷紀元前 275 年乃至 195 年頃之人).先將自然數凡爲 2 所能整除者除 2 外，皆省去之，記之如次。

1	2	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27	29
31	33	35	37	39	41	43	45
47	49	51	53	55	57	59	61
63	65	67	69	71	73	75	77
79	81	83	85	87	89	91	93
95	97	99……					

次將凡爲 3 所整除之數上記點，又凡爲 5 所能整除之數上記點，又凡爲 7 所能整除之數上記點，逐次如斯，則不記點之數，即爲素數。

容

【容量】Capacity.〔數〕某器物之內部所含之容積也。

【容積】Contents 或 Volume.〔數〕同體積，見該條。

射

【射影】Projection.〔幾〕一點在一直線上之射影，爲由此點所引該直線之斜線(即射線)之趾之謂. 一直線在他直線上之射影，爲由其直線之各點至直線所引平行射線之趾之軌跡之謂. 一點在一平面上之射影，爲由此點引該平面之射線之趾之謂. 某線(直線或曲線)在一平面上之射影，爲由其線上各點至該平面所引平行射線之趾之軌跡之謂. 上所述者爲斜射影. 若射影爲直線，或平面之垂線，則謂之正射影.各點聯結於一定點 S 之射影，謂之中心射影. 而定點 S 謂之射影中心。

【射線】Ray.〔幾〕由一點所發射之直線，謂之射線.例如束線之射線，射影之射線，見各條。

【射影面】Projecting plane.〔幾〕射影所在之平面，謂之射影面。

【射影中心】Centre of projection.〔幾〕見射影條。

【射影幾何學】projective geometry.〔幾〕亦稱投影幾何學，與綜合幾何學同。

見近世幾何學條.

展

【展開】Expand 或 Development. 〔代〕〔幾〕代數學上之展開,見下條. 表面之展開者,即單曲面在一平面上迴轉,其曲面之各母線與平面相切而完成一迴轉,是等母線即在平面上畫曲面之展開,例如圓柱面之展開爲矩形,圓錐面之展開爲圓扇形.

【展開式】Expansion. 〔代〕表示冪或除法運算後之結果者,曰展開式.例如 $(a+b)^3$ 之展開式爲

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 又 $\dfrac{1}{1+x}$ 之展開式爲 $1-x+x^2-\cdots\cdots$. 而爲二項式定理中所常見者,即 $(x+a)^n$ 之展開式

$$x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+a^n \text{ 也.}$$

【展開面】Development. 〔幾〕單曲面在平面上之展開,亦有稱之爲展開面者,見展開條.

【展開線】Involute. 〔幾〕一名漸伸線. 見縮閉線條.

差

【差】Difference. 〔算〕〔代〕一數減他數之殘餘曰差.取二數之差時,由其大者減其小者,是曰二數之算術差. 由第一數減去第二數時,曰二數之代數差.故二數之算術差恆爲正,而二數之代數差,則當第一數大於第二數時爲正,小時爲負.

【差法】Method of difference. 〔代〕亦名推差法或逐差法,又稱積較術.於任意之級數由其各項減其前項, 則得差之第一次級數. 同樣於此級數亦由各項減其前項,得差之第二次級數. 逐次行之,得差之第三,……級數. 但於等差級數,差之第二次級數皆爲零,故第三,第四以下皆零之級數也. 次例取一級數將其下各次之差記出之, 即至差之第四次悉爲零也.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 5 & & 12 & & 24 & & 43 & & 71 & & 110\cdots \\
& 4 & & 7 & & 12 & & 19 & & 28 & & 39\cdots & \\
& & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11\cdots & & \\
& & & 2 & & 2 & & 2 & & 2\cdots & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 0\cdots & & & &
\end{array}$$

一般以 $a_1, a_2, a_3\cdots$ 爲第一級數,如下所示.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 & & a_7\cdots \\
& b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & & b_6\cdots & \\
& & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5\cdots & & \\
& & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & d_4\cdots & & & \\
& & & & e_1 & & e_2 & & e_3\cdots & & & &
\end{array}$$

而終必達於其差悉爲零.

〔求任意項之法〕爲簡略計,假定第五次之差悉爲零,而遇他條件時亦同理.按作某次之差之方法,而得各等式如次.

$a_2=a_1+b_1$, $a_3=a_2+b_2=a_1+2b_1+c_1$.

$b_2=b_1+c_1$, $b_3=b_2+c_2=b_1+2c_1+d_1$.

$c_2=c_1+d_1$，$c_3=c_2+d_2=c_1+2d_1+e_1$.

$d_2=d_1+e_1$，$d_3=d_2+e_2=d_1+2e_1$.

$e_2=e_1$，$e_3=e_2=e_1$.

$a_4=a_3+b_3=a_1+3b_1+3c_1+d_1$.

$b_4=b_3+c_3=b_1+3c_1+3d_1+e_1$.

$c_4=c_3+d_3=c_1+3d_1+3e_1$.

$d_4=d_3+e_3=d_1+3e_1$.

$a_5=a_4+b_4=a_1+4b_1+6c_1+4d_1+e_1$.

$b_5=b_4+c_4=b_1+4c_1+6d_1+4e_1$.

$c_5=c_4+d_4=c_1+4d_1+6e_1$.

$a_6=a_5+b_5=a_1+5b_1+10c_1+10d_1+5e_1$.

$b_6=b_5+c_5=b_1+5c_1+10d_1+10e_1$.

$a_7=a_6+b_6=a_1+6b_1+15c_1+20d_1+15e_1$.

餘做此.且 a_5 式之係數爲$(x+y)^4$之係數，而 a_6，a_7 式之係數亦可見出有同樣之關係，一般 a_1，b_1，c_1……… 可書爲 a, b, c………而第 $n+1$ 項卽 a_{n+1} 之式爲如次所書. $a_{n+1}=a+nb+\frac{n(n-1)}{1.2}c+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d+\cdots\cdots$.

例.求級數 1, 5, 12, 24, 43, 71, 110 之第十一項.玆 $a=1$, $b=4$, $c=3$, $d=2$, $e=0$.(此差之作法見本條之首).而 $n=10$. $\therefore a_{11}=a+10b+45c+120d$

$=1+40+135+240=\underline{416}$.

〔求級數之和〕令第一項爲 0，而以前級數之第一項爲二項，以其第一項與第二項之和爲第三項，如此作累次各項而成新級數，卽0, a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$，則此級數之第 $n+1$ 項爲級數 a_1，a_2，a_3，a_4………之 n 項之和.例如求級數 1, 5, 12, 24, 43, 71…. 首十一項之和. 新級數及其各次之差如次:

```
0   1   6   18   42   85   156
  1   5   12   24   43   71
    4   7   12   19   28
      3   5   7   9
        2   2   2
```

玆 $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=3$, $e=2$, 而 $n=11$. 故新級數之第十二項爲

$s=a+11b+55c+165d+330e$

$=11+220+495+660=\underline{1386}$.

若 s 爲級數 a_1，a_2，a_3….首 n 項之和，

則 $s=0+na+\frac{n(n-1)}{1.2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c+\cdots\cdots$.

例.求自然數之平方 1^2, 2^2, 3^2…. 之首 n 個之和.此級數與其各次之差如次:

```
1   4   9   16   25....n²
  3   5   7   9....
    2   2   2....
      0   0....
```

故 $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=0$. 而將是等之值代入一般式爲

$$s=n+\frac{n(n-1)}{1.2}.3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.2$$

$$=n\left\{1+\frac{3n}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}(n^2-3n+2)\right\}$$

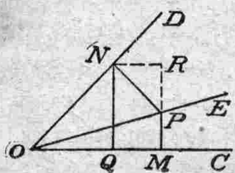
$$=\frac{n}{6}\{6+9n-9+2n^2-6n+4\}$$

$$=\frac{n}{6}\{2n^2+3n+1\}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

【差級數】Arithmetical progression. 〔算〕〔代〕即等差級數，見該條.

【差角之三角函數】Trigonometrical functions of the difference of two angles. 〔三〕命角 COD 以 A 表之，



角 DOE 以 B 表之，則角 COE 可以 A−B 表之.於 OE 上任取一點 P，引 PM 垂直於 OC，PN 垂直於 OD，又引 NR 垂直於 PM 之引長線，NQ 垂直於 OC. 則角 NPR 爲角 PNR 之餘角，等於角 DNR，即等於角 DOC.

而 $\sin COE=\frac{PM}{OP}=\frac{RM-RP}{OP}$

$$=\frac{NQ}{OP}-\frac{RP}{OP}=\frac{NQ}{ON}.$$

$$\frac{ON}{OP}-\frac{RP}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}.$$

又 $\cos COE=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ+QM}{OP}$

$$=\frac{OQ}{OP}+\frac{NR}{OP}=\frac{OQ}{ON}.$$

$$\frac{ON}{OP}+\frac{NR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}.$$

故 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$,

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$

又 $\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}.$$

分子分母以 $\cos A\cos B$ 除之，則得

$$\tan(A-B)=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}}{1+\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

同理，$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$

A 及 B 爲任何角均可，若 A 及 B 爲小於兩直角，則前之二式，又可以托勒密之定理 (Ptolemy's theorem) 證明之. 托氏之定理爲「若 ABCD 爲圓之內接四邊形，則 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.」茲命 CD 爲圓之直徑且等於單位長，$BCD=\alpha$, $ACD=\beta$，則 $AB=\sin(\alpha-\beta)$，而其定理爲 $\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha=\cos\beta\sin\alpha$. 又若命 BD 爲圓之直徑且等於單位長，$ADB=\alpha$, $CBD=\beta$，則 $ADC=\frac{1}{2}\pi+\alpha-\beta$; 而 $AC=\cos(\alpha-\beta)$，故其定理爲

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

與上所證明者相合.

徑

【徑】Diameter.〔幾〕直徑之簡稱.

扇

【扇形】Sector of a circle.〔幾〕扇形為圓之一部，界以兩半徑及其所截之弧.扇形之面積A等於其半徑及弧相乘積之半,若中心角為 N°，則已知扇形之弧之長 S 可以求得,因 S 等於 π 與半徑之積乘扇形之角之度數 N° 與 180° 之比,即

$$S=\pi r\frac{N^\circ}{180^\circ} \text{ 及 } A=\pi r^2\frac{N^\circ}{360^\circ}.$$

【扇形角】Angle of sector.〔幾〕即扇形之兩半徑所夾之角.

時

【時差】Difference in times.〔算〕某地之地方時(見標準時條)與他地之地方時之差,曰此兩地之時差.

根

【根】Root. Radix.〔算〕〔代〕英語之 Root 由拉丁語之 Radix 而來，故英語中稱數之根少有用 Radix 者.方程式之根者，以之代入方程式之未知數而得方程式之眞值，即使方程式之兩邊相等之實數或虛數也.含一未知數整數方程式之根之數,常與其次數同,如二次方程式有二根，三次方程式有三根.數之根者,即以之為因數取若干次之積,等於其數之謂也.如某數之二乘根或平方根者,乃以之為因數取二次之積即其平方等於某數，又某數之三乘根或立方根者，乃以之為因數取三次之積即其立方等於某數之謂也.故一般某數之 n 乘根者,即以之為因數取 n 次之積即其 n 乘冪等於某數之謂也.數之根有為實數者,有為虛數者，$+a$ 及 $-a$ 二乘冪為 $+a^2$，故各數有二平方根,其絕對值相等,而符號相反.而 $-a^2$ 則無實數之平方根,其二根為 $+a\sqrt{-1}$ 及 $-a\sqrt{-1}$，皆虛數也.又 $x^3=a^3$ 列為方程式則為 $x^3-a^3=0$，即 $(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$.

由前之因數得 $x=a$，由後之因數得

$$x=a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),\text{ 及 }x=a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right);$$

故 a^3 之立方根有三,

$$\text{即 } a,\ a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),\ a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

通例以 a, $a\omega$, $a\omega^2$ 表之,

$$\text{因}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\text{及}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\text{也}.$$

又 $x^4=a^4$，即 $x^4-a^4=0$，

或 $(x^2-a^2)(x^2+a^2)=0$.

故由前之因數即 $x^2-a^2=0$，

或 $(x-a)(x+a)=0$.

故 $x=a$ 或 $x=-a$.由後之因數 $x^2+a^2=0$

即 $(x-a\sqrt{-1})(x+a\sqrt{-1})=0$，

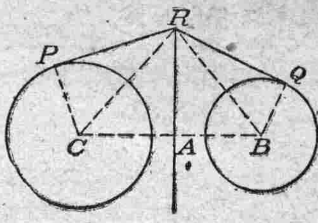
故 $x=a\sqrt{-1}$ 或 $x=-a\sqrt{-1}$.

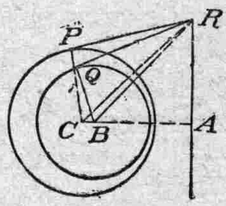
【根面】Radical plane.〔幾〕自一點至二球引切線為相等，則其點之軌跡稱為二球之根面,或稱為等冪面,根面為一平

面.二球相交時,其根面爲含其交圓之平面.二球不相交時,其根面爲過其公切線中點之平面.二球相切時,其根面爲過其切點之公切面.設二球爲同心,則根面在無窮遠處,因此時根面之方程式$(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+\frac{1}{2}\left\{a_1^2+b_1^2+c_1^2-(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-r_1^2+r_2^2\right\}=0$ 中,有 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$之關係,而其方程式變爲常數也.式中 a_1, b_1, c_1 與 a_2, b_2, c_2 爲兩球之中心坐標,r_1 與 r_2 爲兩球之半徑.

【根率】Modulus.〔代〕毛業 (Mourey) 氏證明得各數恆可化爲 $a+b\sqrt{-1}$ 之形,但 a 及 b 爲實數,無論正數或負數,整數或分數,有理數或無理數或零均可.當 b=o 時,則 $a+b\sqrt{-1}$ 爲實數.而 $\sqrt{a^2+b^2}$ 之正根稱曰 $a+b\sqrt{-1}$ 之根率.b 不爲零時,則根率稱爲虛數率,或稱模數,常以 Mod(a+bi) 記之.故 $\mathrm{Mod}(a+bi)=\sqrt{a^2+b^2}$.毛業氏虛數之圖示法,以根率表一直線之長,而 a 及 b 之關係則以一定主線對於前線之方向決定之,其詳見複虛數圖示法條.

【根軸】Radical axis.〔幾〕自一點至二圓引切線爲相等,則其點之軌跡,稱爲二圓之根軸,或稱爲等冪線.根軸爲一直線,取任意二圓 C,B,於 BC 上或其延長線上取 A 點,令 $\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$,但 CP 爲 C 圓之半徑,BQ 爲 B 圓之半徑.而 R 爲通過 A 點 CB 之垂線





上之任一點.自 R 引切線 RP, RQ, 則 $\overline{CR}^2-\overline{BR}^2=\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$,即 $\overline{CR}^2-\overline{CP}^2=\overline{BR}^2-\overline{BQ}^2$.故 $\overline{RP}^2=\overline{BQ}^2$,故RP=RQ,而RA爲二圓C,B之根軸.

(系)二圓相交時,其共同弦之直線爲二圓之根軸.二圓內切時,其共同外切線爲其根軸.外切時,則其共同內切線爲其根軸.惟以相交二圓之共同弦爲根軸之一部分時,則宜將根軸之定義稍擴張之.

【根號】Radical sign.〔算〕〔代〕表示某數或某式開方時所用之符號曰根號,例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{a^2+b^2}$,符號$\sqrt{\ }$即根號也.此符號$\sqrt{\ }$實爲 Radix 之縮寫.根之次數以根號上所書之小字表示之,例如$\sqrt[3]{\ }$即表示立方根,$\sqrt[4]{\ }$表示四乘根,一般即 $\sqrt[n]{\ }$ n 乘根之意.但平方根則不記爲$\sqrt[2]{\ }$,而僅記爲$\sqrt{\ }$.

【根數】Radical.〔代〕數或式之不問其爲有理無理而均以根號表示之者,曰根

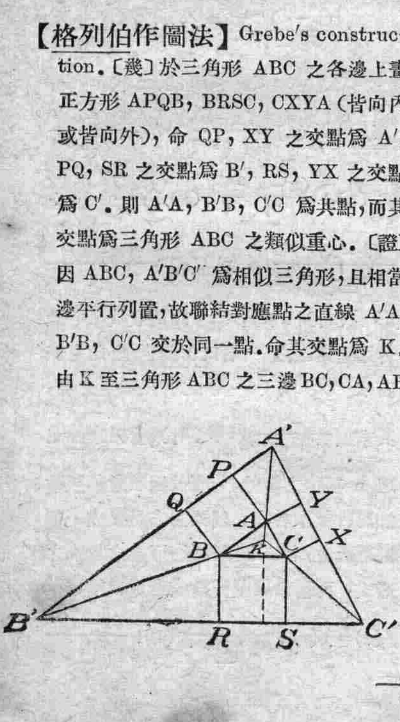
數，如 $\sqrt{7}$，$\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{(a+b)}$，$\sqrt{(x+y)^4}$．其中 $\sqrt{9}=3$，$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt{(x+y)^4}=(x+y)^2$ 實皆爲有理數也．而 $\sqrt{7}$，$\sqrt{2}$ 等則不能精密求其值，稱爲不盡根，詳該條．

【根指數】Index of radicals．〔代〕根號左旁所記之數曰根指數，如於 $\sqrt[n]{a}$ 式中，n 卽根指數．

【根軸心】Radical centre〔幾〕三圓之三根軸，成對相取時，必同交於一點，此點曰根軸心，或曰根心．

格

【格列伯作圖法】Grebe's construction．〔幾〕於三角形 ABC 之各邊上畫正方形 APQB，BRSC，CXYA（皆向內或皆向外），命 QP，XY 之交點爲 A'，PQ，SR 之交點爲 B'，RS，YX 之交點爲 C'．則 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 爲共點，而其交點爲三角形 ABC 之類似重心．〔證〕因 ABC，$A'B'C'$ 爲相似三角形，且相當邊平行列置，故聯結對應點之直線 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 交於同一點．命其交點爲 K．由 K 至三角形 ABC 之三邊 BC，CA，AB



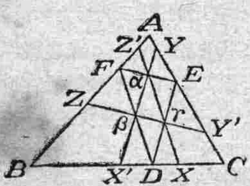
作垂線，命各爲 p，p'，p''；又至 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 作垂線，命各爲 q，q'，q''．則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似．故 $a:a'=p:q=p':q'=p'':q''$．然 $q=a+p$，$q'=b+p'$，$q''=c+p''$；故 $p:a+p=p':b+p'=p'':c+p''$，或 $p:a=p':b=p'':c$，由是 p，p'，p'' 與邊 a，b，c 成比例．然三角形之類似重心與各邊之距離亦與 a，b，c 成比例．由是依同一法易知 K 不可不爲類似重心．故三直線 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 之交點爲原三角形之類似重心．上述求三角形之類似重心之作圖，謂之格列伯作圖法．

【格列高里級數】Gregory's series．〔三〕由餘弦與正弦之指數值 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{\theta i}+e^{-\theta i})$，$\sin\theta=\frac{1}{2}(e^{\theta i}-e^{-\theta i})$ 得 $i\tan\theta=\frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}$；故 $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}=\frac{e^{\theta i}}{e^{-\theta i}}=e^{2\theta i}$．取兩邊之對數，則得 $2\theta i=\log_e(1+i\tan\theta)-\log_e(1-i\tan\theta)=2i\left\{\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots\right\}$．故 $\theta=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots$．是謂之格列高里級數，當 θ 在 $\pm\frac{\pi}{4}$ 之間能成立，而二界限亦在內．於此級數內命 $\tan\theta=x$，則 $\theta=\tan^{-1}x$，故 $\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots\cdots$．此不過

格列高里級數之別形，而 x 須在 ±1 之間.

泰

【泰羅圓】Taylor circle.〔幾〕DEF 爲三角形 ABC 之垂趾三角形，α, β, γ 爲其邊之中點. $\beta\gamma$ 交 CA，AB 於 Y′，



Z；$\gamma\alpha$ 交 AB，BC 於 Z′，X；$\alpha\beta$ 交 BC，CA 於 X′，Y. 則六點 X,X′，Y,Y′，Z,Z′ 在一圓周上，此圓與三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之內切圓同中心，稱之曰泰羅圓.

〔證〕由逆平行線之理，知

$\angle DFZ = \angle C = \angle Y'ZA$，$\therefore \beta Z = \beta F$.

同理 $\beta X' = \beta D$. 然 $\beta F = \beta D$，故以 FD 爲直徑之圓，過 Z 及 X′. 故 ZX′ 逆平行於 DF 及 XZ′，平行於 CA，故 Z,Z′，X,X′ 爲共圓點.同理 Z′Y 平行於 BC.故 $\angle Z'YX' = \angle YX'C = \angle A = \angle Z'XX'$，故過 Z,Z′,X,X′ 之圓亦過 Y 點. 同理，亦過 Y′ 點.又 $\beta Z = \beta X'$，故 ZX 之垂直二等分線分 β 角爲二等分，即過 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之內心.同理，XY′，YZ′ 之垂直二等分線過同點.故圓 XX′YY′ZZ′ 之中心，合於三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之內心.

【泰羅定理】Taylor′s theorem.（一）〔幾〕即上述 X,X′,Y,Y′,Z,Z′ 六點在一圓周上，其圓之中心爲 $\triangle\alpha\beta\gamma$ 之內心之定理也.由此定理可推得二系.（1）六點 Z,Y′,X,Z′,Y,X′ 爲三角形 ABC 之高之趾 D,E,F 至各邊上之射影.（2）三角形ZXY,Y′Z′X′全相等，且各與 $\triangle ABC$ 相似.（二）〔微〕即微積學中常用之泰羅級數，見下條.

【泰羅級數】Taylor′s series.〔微〕泰羅氏於廣義的平均值定理（參閱平均值定理條），即 $f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{\lfloor 1}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{\lfloor 2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{\lfloor 3}f'''(a) + \cdots\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(x_1)$，$a < x_1 < b$，以 x 代 b，得

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{\lfloor 1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{\lfloor 2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{\lfloor 3}f'''(a) + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(x_1),$$

$a < x_1 < x$，此爲微積學中最普遍之定理之一，名曰泰羅定理.此定理表示 $f(x)$ 爲 $(x-a)$ 之有限級數之和，其末項 $\frac{(x-a)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(x_1)$ 稱曰泰羅定理 n 項後之剩餘.若剩餘因項數無限增加而收斂趨於零，則式之右端變成一無限羃級數，名曰泰羅級數，可書之於次之形式，而稱曰展開函數成泰羅級數：

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{\lfloor 1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{\lfloor 2}$$

$f''(a)+\frac{(x-a)^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\cdots\cdots$. 若代 x 以 $a+x$，則得泰羅級數之他一形式：

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{\underline{|1}}f'(a)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(a)+\cdots\cdots.$$

於泰羅定理，置 $a=o$，則成

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{\underline{|1}}f'(o)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(o)+\frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(o)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(o)+\frac{x^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(x_1),$$

$o<x_1<x$，名曰馬克羅麟定理．於泰羅級數，置 $a=o$，得馬克羅麟級數卽

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{\underline{|1}}f'(o)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(o)+\frac{x^3}{\underline{|3}}f'''(o)+\cdots\cdots.$$

此級數爲泰羅級數之特殊形式，極爲有用，舉例於次：展開 $\cos x$ 爲無限冪級數．先微分之，而後置 $x=o$，得

$f(x)=\cos x$,　　$f(o)=1$,

$f'(x)=-\sin x$,　　$f'(o)=0$,

$f''(x)=-\cos x$,　　$f''(o)=-1$,

$f'''(x)=\sin x$,　　$f'''(o)=0$,

$f^{iv}(x)=\cos x$,　　$f^{iv}(o)=1$,

$f^{v}(x)=-\sin x$,　　$f^{v}(o)=0$,

$f^{vi}(x)=-\cos x$,　　$f^{vi}(o)=-1$,

……………………………………………．

代入上式得 $\cos x=1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$．同樣得 $\sin x=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$.

海

【海里】 Nautical mile.〔算〕海里者，航海里程之單位，基於地球之周圍．海里之定法，各國少異，或以地球赤道周圍一分之弧之長爲一海里，或地球子午線一分之長爲一海里．海里亦稱輿地里，又簡稱爲〔浬〕．

消

【消去式】 Eliminant.〔代〕由含 x，y 二元之方程式消去 y，得含 x 之方程式，是曰「x 消去式」．例如

$$x^2+xy=4x-2\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$y^2+xy=4y-1\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由 (1) 得 $y=\frac{-x^2+4x-2}{x}$，代入(2)得

$$(x^2-4x+2)^2-(x^2-4x+2)x^2=4x(-x^2+4x-2)-x^2,$$

卽 $3x^2-8x+4=0$，此方程式卽「x 消去式」也．故由含 x，y 二元之方程式，消去 y 而得含 x 之式，故「x 消去式」不當思爲消去 x 之式也．又若最初消去 x，則得「y 消去式」．

【消去法】 Elimination.〔代〕由二以上之方程式而求出不含一未知數或多未知數之方程式之法曰消去法．消去法有加減消去法，代入消去法，比較消去法三種，詳見各條．茲舉一二例以示說明．

例．由 $ax+b=o$，$a'x+b'=o$ 消去 x．由

第一方程式 $x=-\frac{b}{a}$，第二方程式 $x=-\frac{b'}{a'}$。故 $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$，卽 $ba'-b'a=0$，此爲由上二方程式消去 x 之式。又有方程式 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$，$a''x+b''y+c''=0$。由前二方程式消去 x 及 y，得 $\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$。x 及 y 是等之值必適合第三方程式，代入且變化之，得 $a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$。又由 $ll'=a$，$mm'=b$，$nn'=c$，$mn'+m'n=2f$，$nl'+n'l=2g$，$lm'+l'm=2h$ 六方程式消去 l,m,n,l',m',n'，卽由最後之三方程式連乘之，得

$$8fgh=2lmnl'm'n'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'=4af^2+4bg^2+4ch^2-4abc$$

卽 $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$。

〔行列式消去法〕欲由四方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0$$

消去 x，y，z，則先由首三方程式求得 x，y，z 之值，代入第四方程式，卽將

$$x=-\frac{[d_1b_2c_3]}{[a_1b_2c_3]},\quad y=-\frac{[a_1d_2c_3]}{[a_1b_2c_3]},$$
$$z=-\frac{[a_1b_2d_3]}{[a_1b_2c_3]},$$

代入第四方程式，得

$$-a_4\begin{vmatrix} d_1b_1c_1 \\ d_2b_2c_2 \\ d_3b_3c_3 \end{vmatrix}-b_4\begin{vmatrix} a_1d_1c_1 \\ a_2d_2c_2 \\ a_3d_3c_3 \end{vmatrix}-c_4\begin{vmatrix} a_1b_1d_1 \\ a_2b_2d_2 \\ a_3b_3d_3 \end{vmatrix}$$

$$\times d_4\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}=0.$$

卽
$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1d_1 \\ a_2b_2c_2d_2 \\ a_3b_3c_3d_3 \\ a_4b_4c_4d_4 \end{vmatrix}=0.$$

而不限於四方程式，若有 n 個方程式含 n－1 個未知數時，亦可擴張求得之。

〔西薇士德 (Sylvester) 氏之消去法〕此法爲由含 x 之任意二方程式消去 x，如由下例

$$ax^2+bx+c=0 \text{ 及 } px^2+qx+r=0$$

消去 x，由此二方程式可得

$ax^3+bx^2+cx=0$，　$ax^2+bx+c=0$，
$px^3+qx^2+rx=0$，　$px^2+qx+r=0$。

以 x 之各乘冪卽 x^3，x^2，x 爲未知數，則由前法得其消去式爲

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

【消約法】Cancellation.〔算〕〔代〕對於除法之被除數與除數，分數之分子與分母，消去其共同約數之法也.

【消失分數】Vanishing fraction.〔代〕對於函數或分數內之變數，與以某值時，其函數或分數變爲$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$之形之謂也，見不定形條.

特

【特別解答】Particular solution.〔微〕見微分方程式條.

【特別積分】Particular integral.〔微〕與特別解答同.

眞

【眞分數】Proper fraction.〔算〕分子小於分母之分數也，例如$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{14}{17}$等.

【眞數正切】Natural tangent.〔三〕正切之眞值也，例如$\tan 45^\circ=1$，此爲對於正切之對數而言.

【眞數正弦】Natural sine.〔三〕正弦之眞值也，例如$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，此爲對於正弦之對數而言.

【眞數正割】Natural secant.〔三〕正割之眞值也，例如$\sec 60^\circ=2$，此爲對於正割之對數而言.

【眞數函數】Natural function.〔三〕正弦餘弦等之眞數，爲對於其對數之區別之稱.

【眞數餘切】Natural cotangent.〔三〕餘切之眞值也，例如$\cot 45^\circ=1$，此爲對於餘切之對數而言.

【眞數餘弦】Natural cosine.〔三〕餘弦之眞值也，例如$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，此爲對於餘弦之對數而言.

【眞數餘割】Natural cosecant.〔三〕餘割之眞值也，例如$\operatorname{cosec} 30^\circ=2$，此爲對於餘割之對數而言.

矩

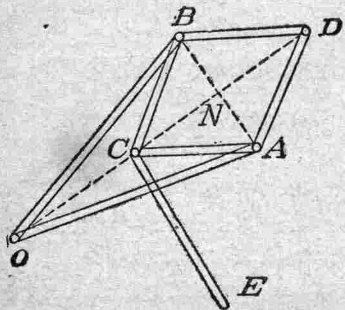
【矩形】Rectangle 或 Oblong.〔幾〕平行四邊形之各角爲直角者曰矩形.〔平行四邊形有一角爲直角者，其他三角亦皆爲直角，故矩形之定義，亦可曰平行四邊形之一角爲直角者〕.矩形之相鄰二邊相等，則其四邊皆相等，而矩形變爲正方形.等底兩矩形之比，等於其高之比.等高兩矩形之比，等於其底之比.兩矩形之比，等於其底高相乘積之比.矩形之面積等於其底高相乘之積.於矩形之平面上任取一點，由其點至相對兩角頂線上之正方形之和，等於由其點至他兩角頂線上之正方形之和.

【矩形體】Rectangular parallelopiped.〔幾〕卽直角平行六面體，見該條.

破

【破賽里葉氏聯節器】Peaucellier's linkage.〔幾〕C，D 二點，就中心 O 之

圓言，互為倒點．若 C 之軌跡為一圓，則其倒點 D 一般之軌跡，為他一圓．惟 C 所作之圓過 O 時，則 D 之軌跡為一直線．破賽里葉氏發明自圓運動生直線運動之聯節法，即用此定理之後部，依倒轉之原理而得．最簡單之方法如下．



取頂點能自由運動之菱形 ACBD，於 A，B 附着 AO，BO 二等長之棒．將 O 點固定之，則棒任何迴轉，O，C，D 常為共線點．又因對角線 AB，CD 互為垂直二等分線；

$\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}=\overline{\mathrm{ON}}^2-\overline{\mathrm{CN}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{CB}}^2=$ 常量． 故就 O 點言，C 及 D 為倒點．更附一棒 CE（E 為固定．且 EO=EC），若 C 所作之圓過 O 點，則 D 動於 OE 之一垂線上．

神

【神分線】〔幾〕即理分中末線，見該條．

租

【租稅】Duties．〔算〕人民納款於政府以供國家之用者曰租稅．我國租稅以地稅關稅為大宗，地稅者按地納稅，名曰地丁，所納之租曰錢糧．關稅分常關海關，常關設於內地，海關設於海口，其納稅之法，有按貨之件數而計算者，曰從量稅（Specific duty）．有按貨物之價值而計算者，曰從價稅（Advalorem duty）．從價稅之計算，以貨價為母數，其規定之稅則即分釐率，其應納之稅銀，即子數也．

納

【納白爾對數】Napierian logarithm．〔代〕即以 e 為底之對數，亦曰自然對數，見對數條．

【納白爾比例式】Napier's analogies．〔三〕下之五式，(1)為平面三角形二邊與其對角之關係式，(2)至(5)為球面三角形角邊之關係式，而皆為納白爾所發明，稱曰納白爾比例式，或稱納白爾方程式，或稱納白爾同比例法，或稱納白爾公式．

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}\cdots\cdots(2)$$

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}\cdots\cdots(3)$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}\cdots\cdots(4)$$

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}\cdots\cdots(5)$$

純

【純小數】Pure decimal.〔算〕數之首位在單位下者之謂也.對雜小數而言.例如 0.23 與 0.031 皆是.

【純正數學】Pure mathematics.〔數〕論數學之原理者，爲與應用數學 (Applied mathematics) 相對之語.

【純循環小數】Pure recurring decimal.〔算〕見循環小數條.

【純二次方程式】Pure quadratic equation.〔代〕方程式之未知數只含二乘羃者,如 $ax^2+b=o$, $3x^2-5=7-4x^2$.

級

【級數】Progression 或 Series.〔代〕級數之英語 progression 與 series,其意義稍有不同.前者爲其級數順次之各項,可由前項以一定之關係而增減者;後者則其意義稍廣.前者中含有算術級數 (Arithmetic progression 卽等差級數,見該條) 與幾何級數 (Geometric progression 卽等比級數,見該條)及調和級數(Harmonic progression.見該條)三種.廣義之級數(Series)者,乃由無數之項而成一連之數，其各項可由前之一項或數項以一定之法則而誘導之，若級數之項甚充足時，亦可由之而知級數之法則.有時級數之法則，以已知公項表示之.級數可由種種方法而誘導之,如由展開函數而誘導時，則由其展開之函數而命名，如對數級數指數級數.級數各項之絕對值,比其前項之絕對值小時,爲遞降級數,大時爲遞昇級數.級數之項數增至無限大而其和近於一定之値者，是曰收斂級數(Convergent series.見該條).其項數增至無限大而其和亦無限者，是曰發散級數(Divergent series.見該條).其項增至無限大,其和非爲無限大,亦不近於一定値者，是曰不定級數或中性級數(Oscillating series.見該條).級數之總和法 (Summation) 者,求其若干項之和之式也.收斂級數至無窮項時其和亦可求得,此和卽曰該級數之總和.今列舉必要之數種級數於下: 1.算術級數. 2.幾何級數. 3.調和級數.上已說及. 4.循環級數(Recurring series.見該條). 5.對數級數 (Logarithmic series)，將 $\log(1+y)$ 依 y 之昇羃而展開之級數，卽 $\log(1+y)=M\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\cdots\cdots\right)$，但 M 爲對數率,於納氏對數等於 1. 6. 指數級數,卽展開指數函數之級數，如 $a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{k^nx^n}{1.2\cdots n}+\cdots\cdots$,

但 k 等於 a 之納氏對數. 7. 三角級數 (Trigonometric series), 此乃展開 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等爲 x 之昇冪之級數, 如 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \cdots\cdots.$$

【級數率】 Scale of relation. 〔代〕見循環級數條.

【級數互求法】 〔代〕級數互求法者, 原級數中未知元之值, 以原級數之總和之諸乘冪所作新級數式顯之之法也. 例如 $s = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots$ 爲原級數, s 爲其總和, 如係數 $a, b, c, d, e, \cdots\cdots$ 皆爲已知數. 由不定係數法, 令新級數式爲 $x = As + Bs^2 + Cs^3 + Ds^4 + Es^5 + \cdots\cdots$, 各係數 $A, B, C, D, E, \cdots\cdots$ 與原級數各係數之關係爲 $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{1}{a^3}b$, $C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac)$, $D = -\frac{1}{a^7}(5b^3 - 5abc + a^2d)$, $E = \frac{1}{a^9}(14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e)$. 將 $A, B, C, D, E, \cdots\cdots$ 之值代入新級數式, 卽爲以 s 之值示 x 之值之式.

素

【素數】 Prime number. 〔算〕凡數除一及本數之外不能以他任意數除盡之者, 其數曰素數, 二數無公約數者曰互素數, 如 2, 3, 5, 7……等爲素數, 7 與 12 爲互素數. 求素數雖無簡單之法則, 而埃拉托色尼 (Eratosthenes) 之素數淘汰法, 亦爲求素數之一法, 見該條. 次就下表而說明素數之諸性質:

數	素　　　數	相　等　式
1	$4n+1$	y^2+z^2
2	$6n+1$	y^2+yz+z^2
3	$8n+1, 7$	y^2-2z^2
4	$8n+1, 3$	y^2+2z^2
5	$12n+1$	y^3-3z^2
6	$12n+11$	$3y^2-z^2$
7	$14n+1, 9, 11$	y^2+7z^2
8	$20n+1, 9, 11, 19$	y^2-5z^2
9	$20n+1, 9$	y^2+5z^2
10	$20n+3, 7$	$2y^2+2yz+3z^2$
11	$24n+1, 19$	y^2-6z^2
12	$24n+5, 25$	$6y^2-z^2$
13	$24n+5, 11$	$2y^2+3z^2$
14	$24n+1, 7$	y^2+6z^2
15	$28n+1, 9, 25$	y^2-7z^2
16	$28n+3, 19, 27$	$7y^2-z^2$
17	$30n+1, 19$	y^2+15z^2
18	$30n+17, 23$	$3y^2+5z^2$
19	$40n+1, 9, 31, 39$	y^2-10z^2
20	$40n+3, 13, 27, 37$	$2y^2-5z^2$
21	$40n+1, 9, 11, 19$	y^2+10z^2
22	$40n+7, 13, 23, 37$	$2y^2+5z^2$
23	$120n+11, 29, 59, 101$	$5y^2+6z^2$
24	$120n+13, 37, 43, 67$	$10y^2+3z^2$
25	$120n+1, 31, 49, 79$	y^2+30z^2
26	$120n+17, 23, 47, 113$	$2y^2+15z^2$

1.凡數以其平方根以下諸數皆不能除盡者必爲素數. 2.凡素數大多爲 $4n\pm1$ 之形,即素數以 4 除之,其剩餘爲 ±1.素數亦有爲 $6n\pm1$ 之形,及其他諸式之形者,前表已記出若干.然是等命題之逆命題未必爲眞,即爲是等之形之各數,不必皆爲素數也. 3.三素數其公差爲 6 所能除盡,或其首項爲 3 時,則三數不能不爲等差級數.然多於三之素數,則決不成等差級數. 4.如 n 爲素數,則 $1+\lfloor n-1$ 能爲 n 所除盡,是爲威爾遜(Wilson)之定理. 5.如 n 爲素數,r 與 n 爲互素數,則 $r^{n-1}-1$ 能爲 n 所能除盡,是爲斐馬(Fermat)之定理. 6.如前條同一之假定,則 $r^{n}-r$ 爲 n 之倍數. 7.爲 $4n+1$ 之形各素數之平方爲 y^2+25z^2 之形. 8.歐拉(Euler)所發見 $2^{31}-1=2147483647$,當時信爲最大之素數,其後發見更大之素數,是即 19 位之數字所成之數 $2^{61}-1=2305843009213693951$ 是也.

9. $2^{2^m}+1$ 之形之整數皆爲素數是亦爲斐馬之定理.然在 1732 年歐拉發見 m 爲 5 時,即 $2^{2^5}+1$ 得以 $5\times2^7+1$ 除盡之.在 1880 年 Landry 又發見 m 爲 6 時,即 $2^{2^6}+1$ 得以 $1071\times2^8+1$ 除盡之.在 1878 年 Pewouchine 發見 m 爲 12 及 23 時,即 $2^{2^{12}}+1$ 得以 $7\times2^{14}+1$ 除盡之,而 $2^{2^{23}}+1$ 得以 $5\times2^{25}+1$ 除盡之.在 1886 年 Seelhoff 又發見 m 爲 36 時,即 $2^{2^{36}}+1$ 得以 $5\times2^{39}+1$ 除盡之.由前表可得素數之多種性質,而知素數之配置不從一定之法則.又由前表及其他諸表,可見數目增大時,則素數之數隨之減少,例如 1 與 10000 之間有素數 1230, 10000 與 20000 之間有素數 1033, 20000 與 30000 之間有 983, 90000 至 100000 之間則僅有素數 879.又自 1000000 至 1010000 之間有 753,又自 1010000 至 1020000 之間有 719,又自 3826019 至 3826157 之間並一素數而無之.

$N=\dfrac{x}{A\log x-B}$ 爲 x 甚大時決定素數之數之公式,N 爲表素數之數,A 及 B 爲由實驗決定之數.x 甚大時,用納氏對數,則 A 等於 1,B 殆等於 1.08366,而 $N=\dfrac{x}{\log x-1.08366}$.此公式滿足已知之結果,乃由實驗決定而不能證明者.素數之大無限,則可證明之,如命 P 爲最大之素數,N 爲諸素數 2.3.5....P 之積,故 N 可以其任一素數除盡之,而 N+1 則不能爲 2,3,5....或 p 所除盡,故 N+1 或自爲一素數,或可以大於 p 之素數除盡之,而與 p 爲最大素數之假定相背.故素數之大爲無限,惟現今所已發見者,即前述 $2^{61}-1$ 之數也.

【素因數】 Prime factor.〔算〕〔代〕某數之素因數,即其因數之爲素數者,或曰整除此數而得素數之謂也.任意數之素因數以 a, b, c, d....表之,其因數之次數以 m, n, p, q....等表之,其數之自身則以 $a^m\cdot b^n\cdot c^p\cdot d^q$........表之,而其約數之數(連 1 及其本數)則爲 $(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$........ 今命 N 爲此數,

則小於 N 而與 N 爲互素數之數可以

$$N\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{p-1}{p}\cdot\frac{q-1}{q}\cdots\cdots$$

表之.分解其數爲因數,而其因數不爲素因數時,則有種種分法,例如 12 爲 2×6 或 3×4, 6 非素數, 4 亦然.然分解某數爲因數,而欲其因數皆爲素數時,則只有一分法.

〔例 1〕 12 爲 $2\times2\times3$ 或 $2^2\times3$, 此外無素因數能表其積.

〔例 2〕求 4095 之素因數.先以 3 整除之,又以 3 整除之,又以 5, 7, 整除之;故分解 4095 爲素因數,得 $3\times3\times5\times7\times13$, 即 $3^2\times5\times7\times13$ 也.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4095 \\ 3 & 1365 \\ 5 & 455 \\ 7 & 91 \\ & 13 \end{array}$$

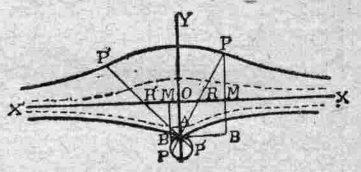
【素約數】Prime measure 或 Prime divisor.〔算〕即素因數,見該條.

【素數分解法】Resolution into prime factor. 即求某數之素因數之法,見素因數條.

【素數淘汰法】〔算〕從 1 起之諸整數中淘汰其非素數而求其各素數之法也.詳埃拉托色尼素數淘汰法條.

蚌

【蚌線】Conchoid〔幾〕爲四次曲線之一.XX' 爲一定直線, A 爲其外一定點,過 A 任作直線交 XX' 於 R,而於 AR 引長線上取 RP, 令其長等於所設之常數,則 P 點之軌跡曰蚌線. A 爲極, XX' 爲準線,距離常數 RP 爲通徑,以 b 表之.以 XX' 及過 A 而直交於 XX' 之 AY 爲兩軸,則 $OM=x$, $MP=y$, $AO=a$, $RM=\sqrt{RP^2-MP^2}=\sqrt{b^2-y^2}$. 因 $AB:BP=RM:MP$, 故 $x:y+a=\sqrt{b^2-y^2}:y$, 即 $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$. 是爲蚌線方程式.又取 A 爲極, AB 爲極軸.設 ρ 爲動徑, θ 爲變角,則 $\rho=AR+RP=a\cdot\csc\theta+b$. 是爲蚌線之極方程式.蚌線爲泥科美德 (Nicomedes) 所發明,其性質如次: (1)不通過原點. (2)在 Y 軸之截部爲 $+b$, $-a$. (3)關於 Y 軸爲對稱. (4)在 $y=b$ 及 $y=-b$ 二直線之間. (5) X 軸爲各分支之漸近線. (6)若 $b>a$, 則有如圖之環形;若 $b=a$, 則下分



支通過 A,其狀如圖,惟無環;若 $b<a$, 則上下二分支如圖之點線;若 $a=o$, 則蚌線成爲圓.此曲線於任意角三等分時用之.

被

【被加數】Addends 或 Summand.〔算〕〔代〕加法中之實數曰被加數,例如 $5+3=8$, 則 5 爲被加數.或以加法中相加諸數統稱爲被加數,如上例之 5 與 3.故減法乘法有被減數減數被乘數乘數之區別,而加法則無之. summand 本爲德

語，近來則英文書中亦用之.

【被乘數】Multiplicand.〔算〕〔代〕乘法中之實數，即以他數乘之之數，例如 $3\times4=12$，則 3 爲被乘數.

【被除數】Dividend.〔算〕〔代〕除法中之實數，即以他數除之之數，例如 $15\div3=5$，則 15 爲被除數.

【被減數】Minuend.〔算〕〔代〕減法中之實數，即由此減去他數之數，例如 $a-b=c$，則 a 爲被減數.算術中被減數常大於減數，代數上則無此限制.

【被算數】Operand.〔數〕對於一數而施以運算時，則此數稱爲被算數.

【被開方數】Radicand.〔算〕〔代〕某數之 n 乘冪爲 a 時，則某數稱爲 a 之 n 乘根，以 $\sqrt[n]{a}$ 表之，此 a 稱爲被開方數. n 爲根之次數，稱曰根指數.

記

【記法】Notation.〔數〕用記號以表數及運算，而圖便利之法也.數之記法即記數法，現今一般所通行者爲阿剌伯記數法.又代數學記法者，以 $a+b$ 表和，ab 表積，a^m 表冪之謂也.幾何學記法者，直線以兩端之文字記之如 AB，三角形以其三角頂之文字記之如 ABC 之類是.又三角法之記法者，如 A 角之正弦，餘弦，以 $\sin A$，$\cos A$ 記之之類是也.

【記號】Symbol.〔代〕$+\ -\ \times\ \div$ 等之運算符號，$=\ >\ <$ 等之關係符號及代表數量之 a,b,c……m,n,……x,y,z 等，其總稱曰記號.

【記數法】Scale of notation.〔算〕〔代〕通常以數字 1,2,…8,9,0 表任何之數，於其數之右位進至左位時，以十進，是曰十進法，亦曰通常記數法，而以 10 爲其底或根.然記數法除以 10 爲底外，亦可以任何數爲底，如以 2 爲底者曰二進法，以 3 爲底者曰三進法，…，普通至十二進法，詳見各條.用十二進法時，以 t, e, T 三記號表 10, 11, 12 三數，但以何數爲底，即以何數爲限.如 4235 爲以七進法所記之數，則 3 所以表 3×7，2 所以表 $2\times7\times7$，4 所以表 $4\times7\times7\times7$，因滿七即須進一位也.一般某數 N 用 r 進法表其數，可記其形爲 $\cdots\cdots d_3d_2d_1d_0$.數字 $d_0, d_1, d_2, d_3\cdots\cdots$ 爲小於 r 之正整數或爲零，其 d_0 所以表 d_0 數位，d_1 表 $d_1\times r$，d_2 表 $d_2\times r\times r$，逐次如此，故 $N=d_0+d_1r+d_2r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$.故任何正整數皆可用任何數爲記數之底表之.

〔例 1〕將十進數 5213 以七進法表之.

故 $5213=2\times7^4+1\times7^3+1\times7^2+2\times7+5$，而所要之數爲 21125.

```
7| 5213
  7| 744....5
   7|106....2
    7|15....1
       2....1
```

〔例 2〕變七進法之數 21125 爲十一進法.

所要之數爲 3t0t.說明. $21=2\times7+1$

$=\text{fifteen}$

$=1\times e+4$

```
e|21125
 e|1244....t
  e| 61....o
      3....t
```

故以 e 除之得商 1，而餘 4.

次 $4\times7+1=\text{twentynine}=2\times e+7$.故以 e 除之得商 2 而餘 7.餘類推.關於

記數法之定理：I. 於 r 進法所記之數，其數之和以 $r-1$ 除之所得之剩餘，與其全數以 $r-1$ 除之所得之剩餘同，故 r 進法所記之數得以 $r-1$ 除盡之，當其數字之和得以 $r-1$ 除盡之時. II. 於 r 進法所記之數，其奇位數字之和與偶位數字之和之差，如得以 $r+1$ 除盡，則全數亦得以 $r+1$ 除盡之.

【記數底】Base 或 Radix of the scale. 〔算〕〔代〕即記數所用之底，或曰根，例如十進法以 10 爲底，故在十進法 356 爲 $3\times10^2+5\times10+6$. 一般以 r 爲底之記數法，如命其數字爲 $a_0, a_1, a_2\cdots$，則其數 $a_0a_1a_2\cdots\cdots a_n=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$.

【記底分數】Radix fraction. 〔代〕任何記數法之記底分數，與常用記數法之小數相應，例於 r 進法所記之 $0\cdot abc\cdots$ 即所以表 $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}\cdots$. 凡任何分數，皆可記以任何數爲底之記底分數.

〔例 1〕將 $\frac{7}{8}$ 記以 6 進法之記底分數.

$$\text{則}\frac{7}{8}\times6=\frac{7\times3}{4}=5+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4}\times6=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}\times6=3.\quad \text{故所要分數}=\frac{5}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{3}{6^3}=.513.$$

〔例 2〕變 8 進法之 1606.7 爲 5 進法.

$$\begin{array}{r|l}
5 & 606 \\ \hline
5 & 264\cdots\cdots2 \\ \hline
5 & 44\cdots\cdots0 \\ \hline
5 & 7\cdots\cdots1 \\ \hline
 & 1\cdots\cdots2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\frac{7}{8}\times5=4+\frac{3}{8}, \\[2ex]
\frac{3}{8}\times5=1+\frac{7}{8}.
\end{array}$$

故所要之數爲 $12102.\dot{4}\dot{1}$.

討

【討論】Discussion. 〔代〕〔幾〕方程式之討論者，即將其方程式中之任意之量，代入以各值，而說明其結果也. 作圖題之討論者，即討論其解答之結果，能不能之界限也.

逆

【逆比】Reciprocal ratio 或 Inverse ratio. 〔算〕〔代〕同反比，見該條.

【逆數】Reciprocals. 〔算〕〔代〕同倒數，見該條，

【逆比例】Inverse proportion. 〔算〕〔代〕同反比例，見該條.

【逆定理】Converse theorem. 〔幾〕將原定理之假設及終結互易，則得逆定理. 如有原定理設 A 爲 B 則 C 爲 D，其逆定理即設 C 爲 D，則 A 爲 B 也. 原定理爲眞時，其逆定理未必皆眞，眞否須俟證明而定. 例如三角形之二邊相等時，其對角相等，其逆定理爲三角形之二角相等，其對邊相等，是爲眞. 然如二角各爲直角，則此二角相等，其逆定理爲若二角相等，則此二角各爲直角，此則非一概爲眞，因相等二角可各爲任何之角也. 又定理含多種假設時，則將其一換爲終結，即爲其

定理之逆．例如兩三角形之二邊與其夾角相等，則其底邊亦相等，其逆定理爲兩三角形之二邊與底邊相等，則其頂角亦相等．

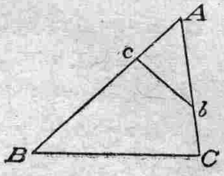
【逆函數】Inverse function．〔數〕當 y 爲 x 之函數卽 $y=f(x)$ 時，則 $x=f^{-1}(y)$，此時 x 謂之 y 之逆函數，而 f^{-1} 卽爲逆函數之記號．此記法與逆三角函數甚相類似，如 $\sin x=y$，則 $\sin^{-1}y=x$，而 $\sin(\sin^{-1}y)=y$．故同理 $f\{f^{-1}(y)\}=y$，或 $ff^{-1}(y)=y$．

【逆相似】Inversely similar．〔幾〕同一平面上之二三角形，其各角相等，而各邊不能置爲平行位置時，曰逆相似．故若於平面上取一直線爲軸，將一三角形旋轉之，再與原平面一致，則二三角形之各邊，可在平行之位置．

【逆運算】Inverse operation．〔算〕〔代〕數學中常有二種運算，一曰 Direct operation，加法，乘法，乘方等是．其結果常爲惟一的，且求之較易．一卽前種運算之逆，如加法之逆爲減法，乘法之逆爲除法，乘方之逆爲開方．由逆運算常生新數，如由減法而生負數，由除法而生分數，由開方而生根數．且求其結果較難，須用試驗法．

【逆對數】Antilogarithm．〔代〕對應於對數之數，卽眞數也．如 $\log a=b$，則 a 爲 b 之逆對數．

【逆平行線】Antiparallels．〔幾〕二橫截線截一角之二邊，若其橫截線與二邊所作之二三角形爲逆相似，則其橫截線對於其角而互稱逆平行線．如下圖，ABC 三角形自 CA 邊上取 b 點，AB 邊上取 c 點，令 $\angle Abc$ 等於 $\angle ABC$，



則三角形 Abc 與 ABC 爲逆相似．而底邊 bc 對 A 角言，稱爲 BC 之逆平行線．四邊形 BCbc 之對角和，等於二直角，故 B, c, b, C 爲共圓點．

【逆相似圓】Circles of anti-similitude．〔幾〕以二圓之二相似中心爲中心，以相對應之逆相似矩形之平方根爲半徑所畫之圓，曰逆相似圓．

【逆圓函數】Inverse circular function．〔三〕卽逆三角函數，見下條．

【逆三角函數】Inverse trigonometric function．〔三〕如 $\sin A=x$ 則 $A=\sin^{-1}x$．同樣 $\tan A=x$，則 $A=\tan^{-1}x$．$\sin^{-1}x$ 及 $\tan^{-1}x$ 爲逆三角函數，或以 $\arcsin x$，$\arctan x$ 表之．故一數之逆正弦或逆正切者，角之正弦或正切等於此數者也．故角之三角函數爲數，數之逆三角函數爲角．逆三角函數之公式可由三角函數之公式推得之，茲舉二例，以示一般．

〔1〕因 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$．令 $\theta=\sin^{-1}x$，　$\phi=\sin^{-1}y$．

則 $x=\sin\theta$，　$y=\sin\phi$．

$\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$，　$\sqrt{1-y^2}=\cos\phi$．

故 $\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$

$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

故 $\theta+\phi=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]$，

即 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}]$.

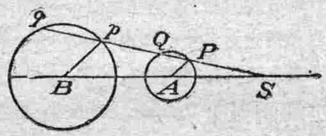
〔2〕令 $\theta=\tan^{-1}x$，$\phi=\tan^{-1}y$

則 $x=\tan\theta$，$y=\tan\phi$.

故$\tan(\theta+\phi)=\frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{x+y}{1-xy}$.

即 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

【逆相似矩形】Rectangle of anti-similitude.〔幾〕過二圓之相似外心 S，



引一截二圓之直線，則由相似中心至二組非對應點，即 SP 與 Sq 所包之矩形及 SQ 與 Sp 所包之矩形，爲逆相似矩形，互相等且各爲常數.

【逆數方程式】Reciprocal equation.〔代〕同倒數方程式，見該條.

【逆定理之法則】Rule for converse theorem.〔幾〕逆定理不常眞，但若一定理中，含三定理，此三者中，僅一假設爲眞，不能有二終結同時爲眞，則其逆定理亦必眞. 如「在同圓或等圓內，等圓心角必對等弧，若兩圓心角不等，則大角必對大弧」之命題，爲一定理中具三定理者. 一曰若角 AOB 等於角 A′OB′，則弧 AB 必等於弧 A′B′. 二曰若角 AOB 大於角 A′OB′，則弧 AB 必大於弧 A′B′. 三曰若角 AOB 小於角 A′OB′，則弧 AB 必小於弧 A′B′. 此三假設中必有一爲眞，因角 AOB 必等或大或小於角 A′OB′ 也. 然終無二終結同時爲眞者，因弧 AB 不能等於且大於弧 A′B′，亦不能等於且小於弧 A′B′ 並不能大於且小於弧 A′B′ 也. 凡若此者，其逆定理亦必眞. 是爲逆定理之法則.

【逆雙曲線函數】Inverse hyperbolic function.〔三〕例如$\sinh u=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$爲雙曲線函數，則 $hu=\sin^{-1}\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$ 或 $hu=\arcsin\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$ 爲逆雙曲線函數. 參閱雙曲線函數條.

配

【配分法】Proportional parts.〔算〕將一已知數分爲若干份，其各份之比，須按已定之比，是謂配分法. 配分用比例法，以定比之和爲第一項，所分之全量爲第三項，以定比之各數各爲第二項，所得各數爲第四項，即爲各份之數.

〔例 1〕將銀 391 圓分給 A，B，C 三人，令其比爲 3，7，11. $5+7+11=23$. 即以 23 爲第一項.

$23:5=391:A$，$\therefore A=\frac{391\times5}{23}=85$圓，

$23:7=391:B$，$\therefore B=\frac{391\times7}{23}=119$圓.

$23:11=391:C$，$\therefore C=\frac{391\times11}{23}=187$圓.

若各定比未成連比者，則先化爲連比而求之．

〔例 2〕將銀 1050 圓分給甲乙丙丁四人，四人所得之比爲甲:乙=2:3， 乙:丙=4:5， 丙:丁=6:7．則

$$\begin{array}{l} 2:3 \\ \quad 4:5 \\ \qquad 6:7 \\ \hline 48:72:90:105 \end{array}$$

甲:乙:丙:丁=48:72:90:105．然後再照前法求之．

若所定之比爲分數者，則以分母之最小公倍數乘之，使成整數之比．

若連比各項間有公約數者，可先以公約數除之．

【配方法】Method of completing a square．〔代〕如 $x^2+2ax+a^2$ 卽 $(x+a)^2$ 爲完全平方．若僅有其二項 x^2 及 $2ax$，欲配成完全平方則宜加 a 之平方，卽 x 係數之半之平方，是謂配方法．例 x^2+6x 加以 $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ 爲完全平方，而其加得之式爲 x^2+6x+9 卽 $(x+3)^2$．由是 x^2+ax，其 a 不拘如何，而於此加以 $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 卽成完全平方，卽

$$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2.$$

此爲求二次式之因數之一法，玆示一般求 ax^2+bx+c 之因數之法如下．

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

於 $x^2+\frac{b}{a}x$ 加以 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 卽 $\frac{b^2}{4a^2}$ 爲完全平方． $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}$$

$$=a\left[\left\{x+\frac{b}{2a}\right\}^2-\left\{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2\right]$$

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}.$$

故任何二次式如 ax^2+bx+c 之形，欲求因數，可以其 a, b, c 之値代入上所得之式內而求之．但求得之因數，未必皆爲有理整式，爲虛數，無理數均可．

【配分定則】Distributive law．〔代〕一項式乘多項式之積，等於以一項式乘多項式之各項之積之代數和，例如 $a(b+c-d)=ab+ac-ad$，是爲乘法之配分定則．一項式除多項式之商，等於一項式除多項式之各項之商之代數和，例如 $(b+c-d)\div a=b\div a+c\div a-d\div a$，是爲除法之配分定則．

【配列變數】〔代〕見組合條．

除

【除】To divide．〔算〕卽求其某數中含他數之幾倍，或等分某數爲他數也．例如 $15\div 3$ 卽 15 以 3 除，其値爲 5，卽 15 含 3 之 5 倍，或等分 15 爲三份之意也．

【除法】Division．〔算〕〔代〕除法者，卽求某數中含他數之幾倍之法，或等分某數爲他數之法也．故除法爲累減之簡法，

爲乘法之逆運算，卽已知二數求以何數乘第一數而生第二數之法也．例如 $a \div b = x$，x 爲未知數，卽云當以何數乘 b 方爲 a 也。

【除號】Sign of division.〔算〕〔代〕卽表示某數以他數除之之符號(÷)也．此符號記於被除數之右，其右則記除數，例如 27 以 3 除，則記爲 $27 \div 3$．又有用橫線或斜線以代除號(÷)者，此時被除數記於橫線之上或斜線之左，除數記於其下或其右，如前例 $27 \div 3$，則記爲 $\frac{27}{3}$ 或 $27/3$。

【除數】Divisor.〔算〕〔代〕除法之法數，卽乘所得之商而等於被除數之數也。

【除比之理】Dividendo.〔代〕與分比之理同，見該條．

隻

【隻項】Single term.〔算〕單比例只有四數，其三數常爲已知，其中有一數與未知數爲同種者，名曰隻項．例如紙 4 張價 9 元，問紙 7 張價若干，則 9 元爲隻項．

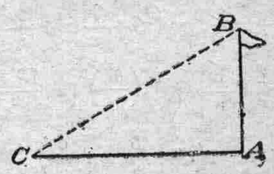
馬

【馬克羅麟定理】Maclaurin's theorem.〔微〕見泰羅級數條．

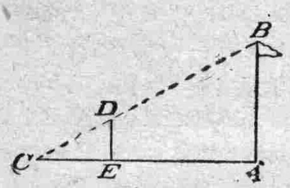
【馬克羅麟級數】Maclaurin's series.〔微〕見泰羅級數條．

高

【高】Height 或 Altitude.〔幾〕〔三〕高者，物體之第三廣度也．三角形之高爲自三角形之頂點至其底邊或其延長線之垂直距離．三角形可以任何邊爲底邊，而其對角頂卽三角形之頂點，故三角形之高有三，普通於圖上取水平之一邊爲底邊．又於直角三角形，則恆以夾直角之一邊爲底，以他一邊爲高．梯形之高爲相平行二邊間之垂直距離．平行四邊形之高爲任意平行二邊間之垂直距離．圓錐及角錐之高爲自頂點與底面間之垂直距離．圓柱及角柱或圓臺及角臺之高，爲兩底間之垂直距離．平行六面體可任取二平行平面間之距離爲高．球帶及球盤之高，爲其二底圓平面之垂直距離，若只有一底圓時，則其高爲切於球帶或球盤之表面而平行於底圓之平面與底圓間之距離．水準測量由一點至他點之高，爲由各點至地球中心之距離之差．陸地測量物體之高，爲自其物體之最高點至最下點（或觀測者之位置）引二水平面間之距離．而高之測量，分能就近測得者與不能就近測得者二種．能就近測得者，卽物體之高，先可自觀測者之位置至物體之距離而測得也．不能就近測得者，卽其間有障礙物，故不能直接自觀測者之位置至物體之底之距離而測得物體之高也．

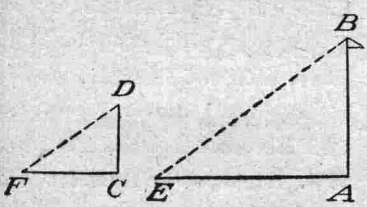


I. 能就近測得物體之高者，茲述二三重要方法如下：(1)求決定物體AB之高，在通過 A 之水平線上取適當之點 C，由 C 點用器械測得角 BCA 及距離 CA. 則由直角三角形 ABC，得 $AB=\tan BCA\cdot CA$. 故 AB 之值，可直接由計算而得. (2) 無測角之器械時，則如前擇C點，測得距離 AC. 然後更測得距離 CE，於 E 點垂直立標竿，由 C 點望物體之頂，視線



截標竿於 D 點，測定 DE. 則由二相似三角形，得 CE:DE=CA:BA，故

$$BA=\frac{CE\times CA}{CE}$$，物體之高卽可求得. 用此方法，雖 AC 不成水平，亦無誤差. (3)由物體之影而決定其高. AB 爲所求

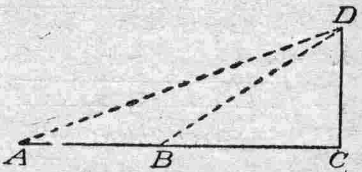


物體之高，垂直立標竿 CD 於地面上，其長爲已知，於某瞬間得 B 點之影落於 E 點，D 點之影落於 F 點，測得 FC 及 AE 之距離，則由相似三角形 ABE 及 CDF，

$FC:CD=EA:AB$，$\therefore AB=\dfrac{CD\times EA}{FC}$.

用此方法，雖 AE 不在水平面上，亦無誤差.

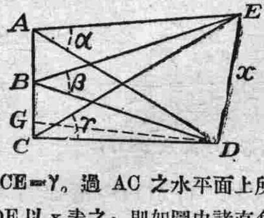
II. 不能就近測得物體之高者. (1)求水平面 AC 上 D 點之高. 於過 D 點之垂直面內取 A 點及 B 點，測定 AB之距離.



由 A 點及 B 點用器械測得對於 D 點之仰角DAC及DBC. 則 $\sin DBC=\sin DBA$. $\sin ADB:\sin DBC=AB:AD$.

故 $AD=\dfrac{AB\times\sin DBC}{\sin ADB}$. 然 $\angle ADB$ 等於 $\angle DBC-\angle DAB$.

$\therefore AD=\dfrac{AB\times\sin DBC}{\sin(DBC-DAB)}$. 由此公式求得 AD. 再由直角三角形 ADC 得 $DC=AD\cdot\sin DAC$. (2)於同一水平線上取三點 A，B，C，又測定距離 $AB=a$，$BC=b$. 及仰角 $\angle DAE=\alpha$，$\angle DBE=\beta$，



$\angle DCE=\gamma$. 過 AC 之水平面上所要之高 DE 以 x 表之，則如圖由諸直角三角形知 $AD=x\cot\alpha$，$BD=x\cot\beta$，$CD=$

$x\cot\gamma$. 由 D 至 AC 引垂直線 DG，則 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+2AB\cdot BG$，$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC\cdot BG$.代入上所測得之值，得 $x^2\cot^2\alpha=a^2+x^2\cot^2\beta+2a\cdot BG$，

$x^2\cot^2\gamma=b^2+x^2\cot^2\beta-2b\cdot BG$.

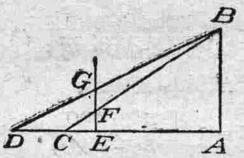
將此二方程式消去 BG. 得

$$x=\sqrt{\frac{ab(a+b)}{b\cot^2\alpha+a\cot^2\gamma-(a+b)\cot^2\beta}}$$

若 $a=b$. 則

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{\frac{1}{2}\cot^2\alpha+\frac{1}{2}\cot^2\gamma-\cot^2\beta}}.$$

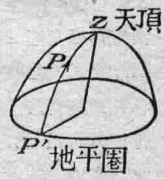
若以物之高乘各測點仰角之餘切，則得各測點至物之水平距離. (3)若無測角器械，則其高可如下法求之. AB=x 表



所求之高.於過 B 點之垂直面上取 C 及 D 兩點，測定 CD=c. 於 C 及 A 之間之 E 點立標竿，測得距離 CE=f. 又由 C 點覘 B 點，於標竿上記 F 點，於 D 點覘 B 點，於標竿上記 G 點，測定 AC=y，EF=a，FG=b. 則由相似三角形 CEF 及 CAB，$\frac{a}{f}=\frac{x}{y}$………(1). 又由相似三角形 DBA 及 DEG，$\frac{a+b}{c+f}=\frac{x}{y+c}$………(2). 由 (1) (2) 消去 y，即求得

$$x=\frac{a^2c+bac}{a(c+f)-f(a+b)}.$$

【高度】Angular altitude.〔三〕天體與地平圈之距離曰高度，設通過天體 P 作垂直圈 ZPP′，與地平圈交於 P′ 點，則 PP′ 爲 P 之高度.



高度自地平圈向天體量，其向天頂者作爲正，向天底者作爲負，故若天體在地平面之上，則高度之值在 0° 與 90° 之間，在下則其值在 0° 與 −90° 之間.

【高次式】Expression of higher degree.〔代〕代數式某文字所含之乘冪在三次以上者，如 $ax^4+bx^3+cx^2+x$ 等式.

【高次方程式】Equation of higher degree.〔代〕即二次以上之方程式，三次及四次方程式之普通解法，現已求得，五次以上之方程式，則決不能求其普通之解法，故非遇特別情形時，不能解之.

【高斯方程式】Gauss′s equations.〔三〕見球面三角形之解法條之〔6〕.

【高等代數學】Higher algebra.〔數〕爲對初等代數學而言，見該條.

【高等幾何學】Higher geometry.〔數〕論較複雜之線，如圓錐曲線等之幾何學. 其實初等高等，乃相對而言，並無截然之界限可分.

【高次平面曲線】Higher plane curve.〔幾〕凡超越曲線及三次以上之代數曲線，概稱曰高次平面曲線. 參閱曲線條.

【高次一階微分方程式】Differential equation of the higher degree and of the first order.〔微〕微分方程式之次數高於一,階級為一者之謂.其解法可大別為三類:

(1) 得分解為一階一次微分方程式者.原式為$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+P_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)+P_n=o$, P_1, P_2,……, P_n 均為 x, y 之函數.若原式可分解為$\left(\frac{dy}{dx}-R_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-R_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{dy}{dx}-R_n\right)=o$, 則命各因數為 O,可得 n 個一階一次微分方程式.設各式之解答(解法詳一階一次微分方程式條)為 $f_1(x,y,C_1)=o$, $f_2(x,y,C_2)=o$,……, $f_n(x,y,C_n)=o$, 因 C_1, C_2,……,C_n 均為任意常數,以 c 表之,則原式之一般解答為$f_1(x,y,c)f_2(x,y,c)\cdots\cdots f_n(x,y,c)=o$.

(2)不能分解為因數者,原式為$f(x,y,p)=o$, p 代$\frac{dy}{dx}$. 解法有四:(一)就 y 解之, $y=F(x,p)$, 兩邊關於 x 微分之, $p=\phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$. 此微分方程式,就 x 解之,得 $\psi(x, p, c)=o$. 由原式及此式消去 p, 即得一般積分. (二)就 x 解之, $x=F(y,p)$, 兩邊關於 y 微分之, $\frac{1}{p}=\phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$. 此為 y 與 p 之微分方程式,解之得 $\psi(y,p,c)=o$. 由原式及此式消去 p, 即得一般積分. (三)為 x,y 同次式時,設次數為 n, 則以 x^n 除之,得 $F\left(p, \frac{y}{x}\right)=o$. 此式若能就 p 解之,則為一階一次式.又若能就$\frac{y}{x}$解之,得 $\frac{y}{x}=f(p)$, 即 $y=xf(p)$. 兩邊關於x微分之, $p=f(p)+xf'(p)\frac{dp}{dx}$, 於此式可使 x 與 p 分離. (四)克雷洛(Clairaut)方程式. $y=px+f(p)$ 之一般解答為 $y=cx+f(c)$. 又其奇解可由 $x+f'(p)=o$ 與原式消去 p 得之.

(3)奇解. $F(x,y,p)=o$ 各解之中,除一般積分 $\varphi(x, y, c)=o$ 及特別積分之外,倘有所謂奇解者.此為一般積分之包線之方程式,可由 $\varphi(x,y,a)=o$ 及$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=o$ 消去 a 得之.然亦可簡單由 $F(x,y,p)=o$ 及此式關於 p 微分時所得之式消去 p 得之.

【高階一次微分方程式】Differential equation of the higher order and of the first degree.〔微〕微分方程式之階數高於一而其次數為一者之謂.此類方程式為一階一次微分方程式中之單系方程式之特殊場合,有四種模範形態.

(1)單系微分方程式, $\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+p_ny=o$, 係數

$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ 均為常數.解:以 e^{rx} 代 y,得$(r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots\cdots+p_n)e^{rx}=0$, 即 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$. 此方程式謂之原方程式之補助方程式.設 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 為補助方程式之根, 則原方程式之解答為 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots\cdots\cdots+c_ne^{r_nx}$. 實際上之運算,可分為四步: 第一步,作與微分方程式對應之補助方程式. 第二步,解補助方程式. 第三步,依補助方程式之根, 按照下法寫出微分方程式之對應特別解答: (a)每一特殊實根 r_1 給與一特別解答 e^{r_1x}. (b)每一特殊虛根 $a\pm bi$ 之一對給與二特別解答 $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. (c) S 個重根給與 S 個特別解答, 而此等特別解答由以 $1, x, x^2, \cdots\cdots, x^{s-1}$ 乘(a)或(b)之特別解答得之. 第四步, 以上所得諸特別解答各以一任意常數乘之 其結果之和即完全解答. 例 1. 解 $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$. 解:作補助方程式 $r^3-3r^2+4=0$. 解補助方程式,其根為 $-1, 2, 2$. 由 -1 得解答 e^{-x}, 由二重根 2 得二解答 e^{2x}, xe^{2x}. 於是一般解答為 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}$. 例 2. 解 $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+10\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}+5y=0$. 解: 作補助方程式 $r^4-4r^3+10r^2-12r+5=0$. 解之,其根為 $1, 1, 1\pm2i$. 由一對虛根 $1\pm2i$ 得二解答 $e^x\cos 2x$, $e^x\sin 2x$ (此例 $a=1, b=2$); 由二重根 1 得二解答 e^x, xe^x. 於是一般解答為 $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$, 或 $y=(c_1+c_2x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x)e^x$.

(2)單系微分方程式, $\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+p_ny=X$, X 單為 x之函數,或常數; $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$ 均為常數. 當 $X=0$, 則成為 $\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+p_ny=0$. 後方程式之完全解答謂之前方程式之餘函數. 設 u 為後者之完全解答即前者之餘函數, v 為前者之任何特別解答, 則 $\frac{d^nv}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+p_nv=X$, $\frac{d^nu}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots+p_nu=0$, 相加得 $\frac{d^n}{dx^n}(u+v)+p_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(u+v)+p_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(u+v)+\cdots\cdots+p_n(u+v)=X$, 此式顯示 $u+v=y$, 即所求之解答. 例題, 解 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=ae^{-2x}\cdots\cdots$(a). 解: 第一步,置(a)之右端為零,即 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0\cdots\cdots$(b), 應用(1)之法則, 得(b)之完全解答為 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}=u\cdots\cdots$(c). 第二步,微分(a)得 $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=-2ae^{-2x}\cdots\cdots$(d),

以 2 乘(a)而加其結果於(d)，得 $\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-4y=o$ ……(e)． 第三步，應用(1)之法則，得(e)之完全解答為 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}$，或由 (c)，$y=u+c_3xe^{-2x}=u+v$．第四步，因 c_3xe^{-2x} 為(a)之特別解答 v，故須決定 c_3．置 $y=c_3xe^{-2x}$，$\frac{dy}{dx}=c_3e^{-2x}(1-2x)$，$\frac{d^2y}{dx^2}=c_3e^{-2x}(4x-4)$ 於(a)，得 $-3c_3e^{-2x}=ae^{-2x}$，$\therefore -3c_3=a$，或 $c_3=-\frac{1}{3}a$．於是(a)之特別解答為 $v=-\frac{1}{3}axe^{-2x}$，而其完全解答為 $y=u+v=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{1}{3}axe^{-2x}$．

(3) $\frac{d^ny}{dx^n}=X$，X 單為 x 之函數，或常數．此類方程可依疊次積分法解之，即遞次積分 n 次，而每次積分之後引入一任意常數．例題，解 $\frac{d^3y}{dx^3}=xe^x$．解：第一次積分之，$\frac{d^2y}{dx^2}=\int xe^xdx$，或 $\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x-e^x+C_1$． 第二次積分之，$\frac{dy}{dx}=\int xe^xdx-\int e^xdx+\int C_1dx$，或 $\frac{dy}{dx}=xe^x-2e^x+C_1x+C_2$．第三次積分之，$y=\int xe^xdx-\int 2e^xdx+\int C_1xdx+\int C_2dx=xe^x-3e^x+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$，或 $y=xe^x-3e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$．

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$，Y 單為 y 之函數．此類方程可依次法解之． 第一步，用因數 $2\frac{dy}{dx}dx$ 乘左邊，用等值因數 $2dy$ 乘右邊，而積分之，其左邊之積分為 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$，因 $d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 等於 $2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx$ 也．第二步，左右兩邊各開平方根，分離變數，再積分之．例題，解 $\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y$．解：以 $2\frac{dy}{dx}dx$ 乘左邊，以 $2dy$ 乘右邊，得 $2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx=-2a^2ydy$． 積分之，得 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-a^2y^2+C_1$．左右兩邊各開平方根而取其正號，得 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1-a^2y^2}$．分離變數得 $\frac{dy}{\sqrt{C_1-a^2y^2}}=dx$．再積分之，得 $\frac{1}{a}\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=x+C_2$，或 $\arcsin\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=ax+aC_2$，即 $\frac{ay}{\sqrt{C_1}}=\sin(ax+aC_2)=\sin ax\cos aC_2+\cos ax\sin aC_2$，或 $y=\frac{\sqrt{C_1}}{a}\cos aC_2\sin ax+\frac{\sqrt{C_1}}{a}\sin aC_2\cos ax=c_1\sin ax+c_2\cos ax$．

十一畫

乾

【乾量】Dry-measure.〔算〕英美俄等國之量制分乾量液量兩種，乾量爲用以計量固體物品之單位，液量爲用以計量液體物品之單位．參閱附錄英美量制表及俄國量制表．

假

【假定】Assumption.〔數〕即假定其如此者，有時與假設同，見下條．

【假設】Hypothesis.〔幾〕即設定其如是者，如於「若甲爲乙則丙爲丁」之命題，「若甲爲乙」即爲假設．例三角形之兩邊相等則其對角相等之命題，引線之文句，即爲假設．

【假數】Mantissa.〔代〕某數之對數之小數部分曰假數，見對數條．

【假分數】Improper fraction.〔算〕假分數者，分數之分子不小於其分母者也．例如$\frac{8}{5}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{7}{7}$等．

【假設法】Rule of supposition.〔算〕算術上解問題之一種方法．有時此法稱爲僞設法〔False suppositions〕，即先設虛僞之數而後發見其眞答者也．又稱試差法〔Rule of trial and errors〕，即試設虛僞之數，比較其差，以發見眞答數也．用此法於一次方程式之問題，常能得問題之眞解答．若二次以上之方程式，則不過得近似之結果，而屢次適用之，則其近似之度愈精密．此法適用於求高次方程式之根，又解指數方程式及一般超越方程式時，皆須用之．又開數之高次根時，亦可適用．假設法分單複二種．單假設法者，問題之答由假設之數與之成比例以解之也．此法如次所述：假定任意之數，施以問題上所述說之各種運算，其所得結果與其眞結果之比，等於假定之數與所要之數之比．例如何數與其二分之一，三分之一，四分之一相加則爲125．〔解〕先假定本數爲 72，則 $72+36+24+18=150$，依法得 $150:125=72:x$，$\therefore x=60$，即爲所要之數．又複假設法者，問題之答，不僅由假設之數與之成比例以解之也．此法如次所述：任意取二數，各從問題之要件，施以運算，則二結果之差與二假定數之差之比，等於眞結果與誘求結果之一之差與假定數對應於其結果之改正數之比，如誘求之結果小於問題之結果，則將假定數加改正數．又如大於問題之結果，則將假定數減改正數．例如何數乘 6，其積加 18 之和，以 9 除之，得商 20．

第一假設	第二假設
18	30
6	6
108	180
18	18
9 ⌊126	9 ⌊198
14	22

依法得 $22-14:30-18=20-14:x$，

$\therefore x=9$．故問題之答爲 $18+9=27$．

又 $22-14:30-18=22-20:x$，

$\therefore x=3$. 故所求之數爲 $30-3=27$。

偏

【偏角】Angle of declination. 〔三〕磁針之南北線與地球之南北所成之角也．蓋磁針之南北，與地球之南北，不盡相合．其所偏之角，又隨地而異，如在美國，最大者爲偏東十度與偏西十度，而在法國，最大者爲偏西十七度．

【偏商】Partial quotient. 〔算〕〔代〕卽部分商，見該條．

【偏程】Inequality. 〔代〕卽不等式，對方程而言也．詳不等式條．

【偏微分】Partial differential. 〔微〕於 $z=f(x,y)$，僅一自變數變化而他自變數爲常數時，其及於 z 之變化之微分，名偏微分．z 之關於 x 之偏微分係數爲

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{dz}{dx}$$，於是 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx$，此 dz 或 $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ 謂之 z 之偏微分．參閱全微分及偏微分係數條．

【偏菱形】Rhomboid. 〔幾〕卽長菱形，見該條．

【偏微分法】Partial differentiation. 〔微〕於含二以上之自變數之函數，僅認其中之一自變數變化而其他自變數爲常數，以求函數關於該自變數之微分係數或微分，同樣遞次求函數關於他一自變數之微分係數或微分，此運算謂之偏微分法．其所求之微分係數或微分，謂之偏微分係數或偏微分．參閱偏微分係數及偏微分條．

【偏積分法】Partial integration. 〔積〕微分學中有偏微分法，積分學中與之對應有偏積分法之逆運算．於含二或二以上自變數之微分式，視其中僅一自變數變化，其餘自變數爲常數，積分之，再將結果視他一自變數變化餘爲常數而積分之，同樣依次積分之．此種積分法，謂之偏積分法．所求之積分，謂之重積分，而依自變數之數爲 2,3,4 等，分別稱之爲二重積分，三重積分，四重積分等．例如式 $u=\int\int f(x,y)dydx$ 係指示欲求 x 與 y 之函數 u，卽 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x,y)$．故若已知適合於 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ 之偏微分係數，欲求其 u，則可以下式表之：$u=\int\{\int f(x,y)dy\}dx+\phi(x)+\psi(y)=\int\int f(x,y)dydx+\phi(x)+\psi(y)$．卽將 $f(x,y)$ 視 x 爲常數而關於 y 積分之，然後於其結果視 y 爲常數而關於 x 積分之．$\phi(x)$ 單爲 x 之函數，$\psi(y)$ 單爲 y 之函數，均爲不定函數．此形式之結果爲不定二重積分．同樣若已知適合於 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=f(x,y,z)$ 之偏微分係數，則 $u=\int\int\int f(x,y,z)dzdydx+\phi(x)+\psi(y)+K(z)$．此形式之結果爲不定三重積分。

〔附註〕由疊次積分法所得之結果亦稱重積分，蓋卽由上法所得者之特殊場合，所

異者為疊次積分法乃始終關於同一變數積分之.參閱疊次積分法條.

【偏微分係數】Partial differential coefficient.〔微〕設於 $z=f(x,y)$ 中之 x, y 皆為自變數,則視 y 為常數時所求之 z 關於 x 之微分係數,謂之 z 關於 x 之偏微分係數,以符號 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 記之.同樣視 x 為常數時所求之 z 關於 y 之微分係數,謂之 z 關於 y 之偏微分係數,以符號 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 記之.於是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y=0}\left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right]$.符號 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 又可寫如 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$;或 $\frac{\partial f}{\partial x}$.同樣 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 又可寫如 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$,或 $\frac{\partial f}{\partial y}$.又於 $u=F(x,y,z)$,則有三偏微分係數 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$;或 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.求 $z=ax^2+2bxy+cy^2$ 之偏微分係數:以 y 為常數,則 $\frac{\partial z}{\partial x}=2ax+2by$;以 x 為常數,則 $\frac{\partial z}{\partial y}=2bx+2cy$.

【偏微分方程式】Partial differential equation.〔微〕見微分方程式條.

側

【側面】Lateral face.〔幾〕立體之側面者,除底以外之傍面也.例如角錐之側面,則為其頂點與兩稜所成諸三角形之面.又側面云者,有指每個側面而言,或指側面全體而言.

【側稜】Lateral edge.〔幾〕兩側面之交線曰側稜,故角柱或角錐之側稜云者,除底邊之稜而言也.亦曰斜稜.

【側面積】Lateral area.〔幾〕立體之側面積云者,卽其各側面之面積之和也.如圓柱之側面積為除兩底以外其他部分之面積,角錐之側面積為除去底面其他三角形之面積之全體.然有時亦指每個側面之面積而言.又亦曰傍面積.

偶

【偶數】Even number.〔算〕凡 2 能除盡之數曰偶數.

【偶函數】Even function.〔數〕適合於 $f(-x)=f(x)$ 關係之 x 之函數,謂之偶函數,例如 cosx 是.

副

【副角】Auxiliary angle.〔三〕卽補助角,見該條.

【副圓】Auxiliary circle.〔幾〕卽補助圓,見該條.

勒

【勒滿點】Lemoine point.〔幾〕卽類似重心,見該條.

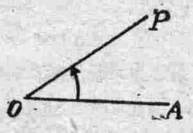
【勒滿平行線】Lemoine parallels.〔幾〕過三角形之類似重心與其邊平行之

直線也.

動

【動角】Vectorial angle.〔幾〕同變角,見極坐標條.

【動徑】Radius vector.〔幾〕〔三〕(1)例如 P 點沿某線而運動,則此點與一定點(原點)之距離曰動徑.於三角法中,O點沿圓周而運動,



直線 OP 由 OA 位置起,繞 O 點以逆鐘向而迴轉,生角 POA,則 OP 即曰動徑.(2)圓錐曲線上之任一點至焦點之距離,名曰該點之動徑,或名焦點半徑.

【動坐標】Current coördinates.〔幾〕即流通坐標,見該條.

【動搖級數】Oscillating series.〔代〕即中性級數,見該條.

參

【參考軸】Axes of reference.〔幾〕即坐標軸,見該條.

商

【商】Quotient.〔算〕〔代〕某數以他數除之,其結果曰商. 例如 $54\div6=9$,則 9 為 6 除 54 之商.又 $(a^3+x^3)\div(a+x)=a^2-ax+x^2$, a^2-ax+x^2 為 $a+x$ 除 a^3+x^3 之商.

問

【問題】Problem.〔數〕問題者,待解之題也.問題之解者,滿足問題之已知條件而求其值之運算也.問題有代數學的與幾何學的. 解代數學的問題,即以方程式為問題之要件. 若欲問題爲定問題,則所立方程式之數須與未知數之數相等.既求得問題之方程式,即可由代數學通常之運算以解之,而須由問題之所要部分,說明求得之根之孰爲適合. 幾何學之問題有作圖題,軌跡題及計算的問題.作圖題可直接由幾何學的綜合法與分析法解得之.解軌跡問題須證明一定理及其逆定理. 解計算的問題,結合已知未知之部分,作代數方程式以解之.

基

【基數】1. Simple number.〔算〕一,二,三,四,五,六,七,八,九,之九數,稱爲基數,即基本之數也. 2. Cardinal number.〔算〕一,二,三,四,……,十,十一,十二,十三,……等曰基數,即通常之數,乃對於第一,第二,第三,……之序數而言.

【基線】Base line.〔三〕基線者,三角測量之基礎,即可精密測量之線也.三角測量之精確視基線測量之精確與否而定,故測量者甚注意也.

【基線】Element.〔幾〕見柱及錐條.

【基本定則】Fundamental law.〔算〕〔代〕運算之根本定則也,有結合定則,交換定則,配分定則,指數定則四者.(1)結合定則如次所述. 對於加法

$a+b+c=a+(b+c)$, $a+b+c+d=a+b+(c+d)=a+(b+c+d)=a+(b+c)+d$，卽三以上之數之和，可任意取若干項，集合之爲若干羣而加之，必無差異．此理對於減法亦眞確．又對於乘法，$abcd=a(bcd)=a(bc)d=ab(cd)$，卽三以上之數之積，可任取若干因子，集合爲若干羣，而後相乘，必無差異．此理對於除法亦眞確．　(2)交換定則，對於加法，　$a+b=b+a$，$a+b+c+d=b+a+d+c=d+c+b+a=\cdots\cdots$，卽二以上之數之和，不論其相加之次序如何，其結果恆同．此理對於代數的減法亦眞確，但算術上之減法則不得如此．對於乘法，$ab=ba$，$abc=acb=bca=bac=\cdots\cdots$，卽二以上之數之積，不論其所取因數之次序如何，其結果恆同．此理對於除法亦眞確．　(3)配分定則對於乘法 $(b+c-d)a=ab+ac-ad$，卽一項式乘多項式之積，爲一項式乘多項式各項之積之代數和．此理對於除法亦眞確．
(4)指數定則　不論 n 爲正數，負數，整數，分數，$a^m\times a^n=a^{m+n}$．

【基本單位】Standard unit.〔算〕見單位條．

堆

【堆垜】Piles of shot.〔代〕卽積彈，其底面爲等邊三角形者，曰三角垜卽三角積彈；爲正方形者，曰正方垜卽正方積彈；爲矩形者，曰矩形垜卽矩形積彈．詳積彈條．

帶

【帶徑】Radius vector〔幾〕〔三〕卽動徑，見該條及極坐標條．

【帶分數】Mixed number.〔算〕〔代〕卽整數與分數合成之數，例如 $5\frac{2}{3}$ 卽 $5+\frac{2}{3}$ 之意．又如 $a+\frac{c}{b}$ 亦爲帶分數．帶分數又稱混數．

常

【常量】Constant quantity〔數〕與常數同．

【常數】Constant.〔數〕常數者對變數而言，卽其值一定不變者也．例如 a 與 b 爲互變數，則令 a:b 卽 $\frac{a}{b}=m$，卽 $a=mb$，m 爲常數．又如三角形之底邊，爲圓之定弦，其頂點在圓周上移動，則三角形之面積隨時消長，謂之變數；其頂角一定不變，謂之常數．又如正方形之對角線與其每邊之比爲常數，卽 $\sqrt{2}$ 也．常數有絕對常數與任意常數兩種，詳各該條．

【常衡】Avoirdupois weight.〔算〕此爲英美秤通常物品之單位．在英國

16 Drams = 1 Ounce.
16 Ounce = 1 Pound.
14 Pounds = 1 Stone.
28 Pounds = 1 Quarter.
4 Quarters = 1 Hundredweight.
20 Hundredweights = 1 Ton.

但美國通常以 100 Pounds 爲 1 Hundredweight, 20 Hundredweights 爲 1 Ton. 故 1 Ton=2000 Pounds. 秤通常之物卽用此噸，而於稅關及鐵石炭之賣買則用以 2240 Pounds 爲 1 Ton之重噸.

【常分數】Simple fraction.〔算〕卽簡分數,見該條.

【常函數】Common function.〔代〕卽代數函數,見該條.

【常微分】Ordinary differential.〔微〕卽普通微分,見微分條.

【常積分】Ordinary integral.〔積〕卽不定積分,見積分法條.

【常用對數】Common logarithm.〔代〕卽以 10 爲底之對數,爲英數學家布立格茲(Briggs) 所發見.故又稱布立格茲對數,通常略記爲 log，不必以其底數 10 表出之.

【常用記數法】Common scale of notation.〔算〕卽十進記數法,與阿剌伯記數法同,見該條.

【常微分係數】Ordinary differential coefficient.〔微〕卽普通微分係數,見微分係數條.

【常微分方程式】Ordinary differential equation.〔微〕卽普通微分方程式,見微分方程式條.

排

【排列】Permutation 或 Arrangement.〔代〕由若干之物,每次悉取或取其中之若干,作種種次序排列之,是稱其物之排列.故此排列所取之物雖同於彼排列,但次序有異者，不得謂之同排列. (1)例如將 cambridge 一語之字母悉取之,作種種之排列,問其排列之數有幾.茲有九字母.將九字母之中,任意取其一列爲第一,則得九種列法. 將其餘八字母中,任意取其一列爲第二，則第二之列法有八種. 逐次如斯,最後之一字母,只有一種列法.故所求排列之數爲 $9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$，卽 $\underline{9|}$ 或 $9!$ 也. 一般 n 個不同之物，悉取排列之，其列法有 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot3\cdot2$，卽 $\underline{n|}$ 或 $n!$ 種也. (2)由 n 個物中,每次取 r 個其排列之數爲 $n(n-1)(n-2)\cdots r$ 個因數，卽 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(r-1)\}$，卽 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$.
(3) 將 eye 一語之字母排列之，而求其排列之數有幾.今以 e_1, e_2 區別二 e 字，則得其排列數如次,卽 e_1ye_2, e_2ye_1, e_1e_2y, e_2e_1y, ye_1e_2, ye_2e_1. 是等排列將 e 之添數取去,則 e_1e_2 與 e_2e_1 無區別,而 e_1 與 e_2 相換之排列同,故 eye 之排列只有三法,卽 $2!$ 除 $3!$ 也.又同理將 a, a, a, x, x 每次悉取之排列數爲 $\frac{5!}{3!2!}$ 卽 10 也. 一般 n 個物中有 p 個相同之物,他 q 個亦相同,他 r 個亦相同,……,則將 n 個物悉取排列之,其排列之數爲 $\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$. (4)於 n 個不同之物，每次悉取其重複排列之數爲 n^n. 又於 n 個不同之物中,每次取 r 個,其

重複排列之數爲 n^r. 次討論(2)項之公式.以a,b,c····n 字母表n個不同之物,從n個物中每次取 r 個其排列之數以 ${}_nP_r$ 表之.則 ${}_nP_1=n$, 其理甚明.於 ${}_nP_r$ 中取一特別字母列爲第一, 則其排列之數等於 ${}_{n-1}P_{r-1}$, 而此 n 個字母之任一字母皆可列爲第一,故 ${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}$. 而r不大於n, 且n,r 皆爲正整數,則此關係,無論 n,r 之值如何,皆能合理,故

$${}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2},$$
$${}_{n-2}P_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}P_{r-3},$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$${}_{n-r+2}P_{r-r+2}=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}P_{n-r+1},$$

又 ${}_{n-r+1}P_{r-r+1}={}_{n-r+1}P_1=n-r+1$.

將各式之兩邊連乘之,而約其公因數,得

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

若 $r=n$, 則 ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1.$

接

【接角】Contiguous angles.〔幾〕卽鄰角,詳角條.

【接觸圓】Osculating circle.〔幾〕〔微〕卽曲率圓,見該條.

捩

【捩回角】Angle of torsion.〔幾〕見空間曲線條.

【捩四邊形】Gauche quadrilateral.〔幾〕亦稱折面四角形,卽四邊形之各邊,不在同一平面上者.

推

【推論】Corollary.〔幾〕〔代〕推論者,其理可由定理直接推定也,與系同,詳該條.

【推差法】Method of difference.〔代〕卽差法,見該條.

斜

【斜角】Oblique angle.〔幾〕角之不爲直角者,卽銳角或鈍角也.

【斜高】Slant height.〔幾〕直圓錐之斜高爲自其頂點至底面之周之任意直線.截圓臺之斜高爲其兩底間之基線之長.正角錐之斜高爲自頂點至底面之一邊之垂線.截角錐之斜高爲其側面之梯形之高.

【斜率】Slope.〔幾〕與角係數同,見該條.

【斜稜】Lateral edge.〔幾〕卽側稜,見該條.

【斜線】Oblique line.〔幾〕(1)對平面言,一直線之斜線者,卽除其垂線外之其他諸直線卽與其線成斜角之直線也.
(2)對立體言,除與其平面垂直之直線外,其餘與平面斜交之諸直線,均稱此平面之斜線.

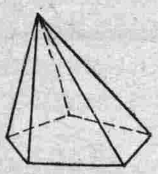
【斜邊】Hypotenuse.〔幾〕直角三角形直角之對邊也.亦稱曰弦.

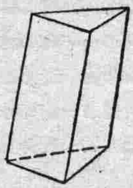
【斜角柱】Oblique prism.〔幾〕角柱之諸側稜傾斜於其兩底者也,如下圖.

【斜角臺】Truncated pyramid.〔幾〕同截角錐,見該條.

【斜角錐】Oblique pyramid.〔幾〕角

錐諸側稜之不等長者，如下圖.

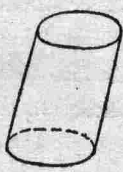

斜角錐


斜角柱

【斜矩形】Rhomboid.〔幾〕即平行四邊形，或稱長菱形，偏菱形，詳平行四邊形條.

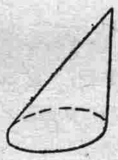
【斜率角】Angle of slope.〔幾〕見角係數條.

【斜圓柱】Oblique cylinder.〔幾〕圓柱之基線與兩底面成斜交，其兩底面爲橢圓者.



【斜圓臺】Truncated cone.〔幾〕同截圓錐，見該條.

【斜圓錐】Oblique cone.〔幾〕圓錐諸基線之不等長，其底面爲橢圓者.



【斜截面】Oblique section.〔幾〕圓柱或圓錐以不垂直於其軸之平面截之，或角柱以不垂直於其側稜之平面截之，其所生之面，均曰斜截面.

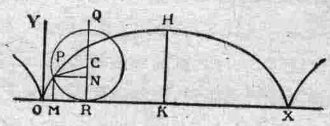
【斜三角形】Scalene triangle 或 Oblique triangle.〔幾〕見三角形條.

【斜角坐標】Oblique co-ordinates.〔幾〕見直角坐標條.

【斜角三角形】Oblique angled triangle.〔幾〕三角形之無一角爲直角者.

旋

【旋輪線】Cycloid.〔幾〕爲超越曲線之一.圓 RPQ 旋轉於直線 OX 上，其圓周上一定點 P 所運行之軌跡，名曰旋輪線或擺線，日本古算書中稱點跡弧.RPQ圓曰母圓或母輪 (Generatrix)，直線 OX 曰底 (Base)，P 點曰母點 (Generating point). P 點初與 O 點相合，母輪旋轉一周，則 P 點運行至 X，即成一分支，若



母輪旋轉數周，則成數分支，通常祇就一分支而言. 底之長等於母輪周. HK 爲底之中垂線，其長與母輪徑等，稱曰軸 (Axis)，而 H 名爲最高點. 一分支如 OHX 之長等於母輪徑之四倍，其面積如 OHX 等於母輪面積之三倍.旋輪線係意大利數學家伽利略 (Galileo) 所發明，其方程式可求之如次：取 OX 爲 X 軸，曲線與底之交點 O 爲原點.設母輪之半徑爲 a，角 PCR 爲 θ，則弧 PR 等於直線 OR，而 $\theta=\frac{\overset{\frown}{PR}}{a}$. P 點之坐標爲 x, y，則 $x=OM=OR-MR=\overset{\frown}{PR}-PN=a\theta-a\sin\theta$, $y=MP=RC-NC=a-a\cos\theta$, 即 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-$

$\cos\theta$)。此聯立方程式，即旋輪線之方程式。再從此二式消去 θ，得 $x=a\,\mathrm{vers}^{-1}\frac{y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$ 或 $x=a\cos^{-1}\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$。此為旋輪線之普通方程式，然於實用，則以前二式為便。旋輪線之性質如次：(1)通過原點。(2)在X軸上之截部為 $2n\pi a$。(3)關於Y軸為對稱。(4)全在 $y=0$，$y=2a$ 二直線之間。(5)有無窮分支，與OHX同形。旋輪線之用，能顯重物向地心之理，重物循旋輪線而下，自起點至止點，其所行之路，較循他線而行者，歷時最速。又旋輪線之諸性質及其與母輪之諸關係，均極饒興趣。故自圓錐曲線發明之後，足以啓迪數學者之心思者，當以此曲線為最。

【旋轉軸】Axis of revolution.〔幾〕一直線，或曲線，或平面以他一直線為軸而旋轉，則此他直線稱為旋轉軸。故旋轉之直線或曲線或平面上之各點各畫圓周，其中心在旋轉軸上，其平面與旋轉軸垂直。例如球可以任何直徑為旋轉軸。

【旋轉線】Line of revolution.〔幾〕即旋轉於平面上或空間之線也。如以一直線之一端連於固定之一點而於平面上順轉(逆時針向)或逆轉(順時針向)之，則自最初之位置旋轉至於終止之位置而成一平面角，其大小視旋轉之度而無關於線之長，其正負視旋轉之順逆。又圓柱之曲面，可視作由一直線以他一平行直線為軸，繞之旋轉一周而成，線之長即為圓柱之高，線與軸之距離即為圓柱底之半徑。

【旋轉體】Solid of revolution.〔幾〕一面以一直線為軸而旋轉所生之立體也。例如一半圓以直徑為軸而旋轉則生球，故球為一旋轉體。又如以直角三角形直角傍之一邊為軸而旋轉，則生圓錐，故圓錐亦為一旋轉體。

【旋輪線體】〔幾〕由普通旋輪線迴轉而成之體也。分二種：(1)為以旋輪線一支之底為軸迴轉而成，其曲面積 $=\frac{64}{3}\pi r^2$，體積 $=5\pi^2r^3$，r 表母圓半徑。因母圓之面積為 πr^2，外切圓柱之體積為 $2\pi r\times4\pi r^2=8\pi^2r^3$，故可換言之曰，體之曲面積，為母圓面積之二十一又三分之一，體積為外切圓柱體積之八分之五。(2)為以旋輪線一支之軸為軸迴轉所生之兩體對合而成，其曲面積 $=16\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\pi r^2$，即等於母圓面積之 $16\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$倍，體積 $=3\pi^3r^3-\frac{16}{3}\pi r^3$，即等於外切圓柱體積 ($=4\pi^3r^3$) 之四分之三減去同高圓球體積 ($=\frac{4\times8}{3}\pi r^3$) 之二分之一。

【旋轉曲面】Curved surface of revolution.〔幾〕由一曲線以一定直線為軸旋轉而成之面也。曲線名曰母線，定直線名曰旋轉軸。以通過旋轉軸之平面截曲面，其截口謂之子午剖面或經截面。

【旋轉圓柱體】Cylinder of revolution.〔幾〕直圓柱之別名，因可取一矩

形,以其一邊爲軸繞之旋轉而生此體也。

【旋轉圓錐體】Cone of revolution.〔幾〕直圓錐之別名,因可取一直角三角形,以其一邊爲軸繞之旋轉而生此體也。

既

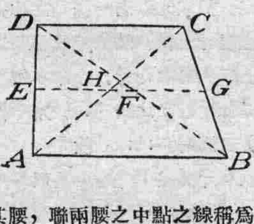
【既約項】Lowest term.〔算〕〔代〕分數之分子與分母所有公約數皆約盡而再無公約數者。例如 $\frac{2}{3}$, $\frac{a}{bx}$ 皆爲既約項。反之 $\frac{6}{14}$, $\frac{ab^2}{a^3b}$ 則非既約項,因將其分子與分母之公約數約盡之後得 $\frac{3}{7}$, $\frac{b}{a^2}$,才爲既約項也.

條

【條件】Condition.〔數〕如解代數方程式或證幾何問題時,必有已知之規約及必須遵守之限制,此規約與限制,即爲其所含之條件.

梯

【梯形】Trapezoid.〔幾〕四邊形之有兩邊相平行者.兩平行邊爲其底,其他兩邊



爲其腰,聯兩腰之中點之線稱爲梯形之中線.梯形之中線與兩底平行,且等於其兩底之半和。聯結梯形兩對角線之中點之線,等於其兩底之差之半.梯形之兩腰相等者,稱爲等腰梯形。梯形之高,爲兩底間之垂直距離.梯形之面積,等於其兩底之半和乘高之積,即等於其中線乘高之積。

毫

【毫】〔算〕小數名,即 ·0001。

液

【液量】Liquid-measure.〔算〕即英美俄等國量制中用以計量液體物品之單位。參閱附錄英美量制表,及俄國量制表.

混

【混數】Mixed number.〔算〕〔代〕即帶分數,見該條.

【混小數】Mixed decimal.〔算〕即雜小數,見該條.

【混合法】Alligation 或 Mixture.〔算〕混合法者,以價值不同分量不等之同種類各物,混合而比較之之法也.其法分爲二種. (1)已知各物之價值及分量,而求其混合後之平均價,此時謂之混和法(Alligation, medial). (2)已知各物之價,且豫定其平均價,而求混合時所取各物之分量,此時謂之和較法(Alligation, alternate).混和法與求平均數之法同.例如每升 72 錢之酒 6 斗, 78 錢之酒 5 斗, 96 錢之酒 7 斗,三種混合後,求每升

之平均價。

1升72錢之酒60升之價＝4320錢

……… 78………… 50 …………＝3900

……… 96………… 70 …………＝6720

混合酒　180升　＝14940錢

故混合酒1升之價$=\dfrac{14940}{180}$錢＝83錢。

因之得次之法則。以同單位表各物之數，以各物之數乘各物之價之積之和，以各物之數之和除之，則得混合物一單位之價。次例亦可以此法推得之，卽二十二開之金6兩與十七開之金4兩混合之，問金之成分如何。

22開之金6兩………132開　故200÷10，

17開之金4兩………68開　卽得二十開

10兩………200開　之金。

和較法不外代數學之不定問題。例如甲乙二物之價爲a,b，命其單位之數爲x,y，而混合物爲m單位，其每單位之價命爲c，則 $ax+by=mc$…………(1)，

$x+y=m$…………(2)，　由(1)，(2)得

$(a-c)x+(b-c)y=0$，卽$x:y=b-c:c-a$，卽甲乙分量之比爲 $b-c:c-a$。故若m爲未知數，則雖知x，y之比，而此問題仍爲不定．此理可以次例明之．例，一斤28錢之茶與一斤35錢之茶混合之，賣一斤32錢，問每種應各混入若干斤。

	一斤之價	損　益	混合量
低價茶	28　錢	益4錢	3
混合茶	32　錢		
高價茶	35　錢	損3錢	4

(說明)1斤28錢之茶賣1斤32錢，則其所益爲32－28＝4錢，1斤35錢之茶賣1斤32錢，則其所損爲35－32＝3錢。故若低價茶賣3斤，則所益＝4×3＝12錢，高價茶賣4斤，則所損＝3×4＝12錢。卽依3與4之比而混合之，則益損打消，適得每斤賣32錢之茶。

上式可簡單排列之如次。

$$32\left|\begin{matrix}28\\ \\35\end{matrix}\right.\begin{matrix}\diagdown 3\\ \\ \diagup 4\end{matrix}$$　答混入量爲3斤與4斤。

若三物相混合，則其不定方程式爲

$ax+by+cz=md$……………(1)，

$x+y+z=m$……………………(2)。

卽 $(a-d)x+(b-d)y+(c-d)z=o$……(3)。

故是等方程式解答之數爲無限，然混合法之解答，限於正整數，故解答之數概爲有限。於(3)將三未知數任意定其二，則其他一卽可求得。一般n種物品之方程式，含n個未知數，其中n－1個得任意定之。例，下茶每斤2角7分，中茶每斤3角1分，上茶每斤3角4分，混合之使成每斤3角，問每種各混入幾斤。本例爲三以上之物相混合，故其分量以分配爲不定。故宜先除去一種類之物，將其他二種混合定後，然後配置前除去之物對於他二物之混合量。今命本例下茶與中茶混合斤數之比爲5:3，則三種茶混合斤數之比爲5:3:x，故

下茶取5斤共益15分，中茶取3斤共損3分，其差爲益12分。欲使此所益之數打消，則上茶須取12÷4卽3斤也。

	一斤之價	損　益	混合量
下　茶	27　分	益 3 分	5
混合茶	30　分		
中　茶	31　分	損 1 分	3
上　茶	34　分	損 4 分	x

因之上中下三種茶混合斤數之比爲 3:3:5。又若命上中下之茶其混合斤數之比爲 2:1:x，則上茶取 2 斤損 8 分，中茶取 1 斤損 1 分，合計損 9 分。而下茶取 1 斤能益 3 分，故欲使所損之 9 分打消，則下茶宜取 9÷3 即 3 斤也。故所要上中下之茶混合斤數之比爲 2:1:3。本例之算式，通常列之如此。

	27	1	4	5
30	31	3		3
	34		3	3

與上第一之答相合。此解下中之比爲 1:3，下上之比爲 4:3，如若干倍其一亦爲適合，若干倍雙方或約其公約數而後相加亦可。例如 2 倍下上之比 4:3 則爲 8:6，與下中之比 1:3 相加，則得上下中之比爲 6:3:9，即 2:1:3 也。與前之第二答數相合。更述一例如次。取十七開，十八開，二十二開及鈍金四者，問如何混合而得二十一開之金。今命十七開，十八開，二十二開及鈍金之混合量之比爲 3:1:3:x (注意，鈍金爲二十四開)。

	過不足	混合量
17	不足 4	3
18	不足 3	1
平均21		
22	過　1	3
24	過　3	x

故 $x=(4\times3+3\times1-1\times3)\div3=4$。

本例可得下列種種解法。

(1)

	17	3		3
21	18		1	1
	22		3	3
	24	4		4

(2)

	17	3	1		4
21	18			1	1
	22		4	3	7
	24	4			4

(3)

	17	3	1		4
21	18			3	3
	22		4		4
	24	4		3	7

(4)

	17	1			1
21	18		3	1	4
	22	4		3	7
	24		3		3

(5)

	17	3			3
21	18		3	1	4
	22			3	3
	24	4	3		7

(6)

	17	3	1			4
21	18			3	1	4
	22		4		3	7
	24	4		3		7

(7)

21	17 1		1
	18	3	3
	22 4		4
	24	3	3

上之種種解答，皆爲正確，而以(1)法爲最簡單．凡聯以括弧之二物，必取一爲過於混合物，一爲不足者．又同行中有公約數時，則可約簡之，例如上(3)法，爲

21	17 3	1		4
	18		$\$^1$	1
	22	4		4
	24 4		$\$^1$	5

若混合物之量，有豫先限定者，則宜就求得之比，用同乘同除之法以求其適合．例如本題若欲得二十一開之金三十兩，則就(4)法四種混合量之比爲 $1:4:7:3$，而 $1+4+7+3=15, 30\div15=2$，故十七開之金須 1×2 兩，十八開之金須 4×2 兩，二十二開之金須 7×2 兩，純金須 3×2 兩，即四種金各取 2,8,14,6 兩可也．

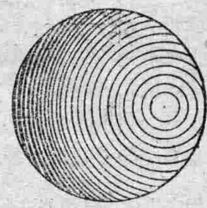
【混循環小數】Mixed recurring decimal.〔算〕即雜循環小數，見環循小數條．

添

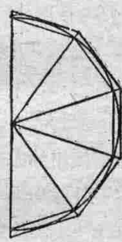
【添數】Suffix.〔數〕添於文字之右側下方以示區別之數字也，例如 $a_1, a_2, \cdots a_n$，1，2，…n 皆爲 a 之添數．

球

【球】Sphere.〔幾〕球者，乃稱爲球面之曲面所包圍之立體，其面上各點與所稱爲中心之一點等距離者也．或曰球者，乃一半圓以其直徑爲軸而旋轉所生之立體也．



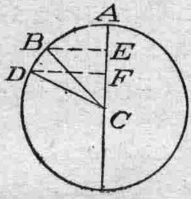
由球之中心至球面上任意點之直線，稱爲球之半徑．過球心以球面爲界之直線，稱爲球之直徑．以任意平面截球，其截口爲圓，而以與中心等距離之平面截之，則其截口相等．過中心之平面對於球之截口，稱爲大圓．諸大圓皆相等，其半徑等於球之半徑．若以若干邊數之半正多邊形內切於半圓，又以相似半正多邊形外切於同圓，此三圖形以半圓之直徑爲軸而旋轉之，則二半正多邊形所生之面相互之差，又此二面與半圓所生之球面之差，可使小於任何之面積．

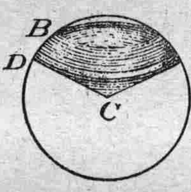


而二半正多邊形所生之體積相互之差，又此二體積與球之體積之差，亦可使小於任何之體積．故球之面積及體積，可由半正多邊形旋轉其徑所生面積及體積之極限考得之．球之面積等於其直徑乘大圓周之積，或等於四大圓之面積．若以 r 表球之半徑，d 表其直徑，則面積 $S=4\pi r^2=\pi d^2$，故兩球面積之比，等於其半徑或直徑之

平方比.若直圓柱外切於球,則直圓柱凸面之面積，等於球之面積.球之體積等於其面積與半徑之積之三分之一，又等於外切圓柱之體積之三分之二，即體積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$. 故任意二球體積之比,等於其半徑或直徑之立方比.

【球分】Spherical sector.〔幾〕球分爲球之一部分，由圓之扇形以過其中心之任直徑爲軸，旋轉而生之立體.例如扇形 BDC，以過其中心 C 之任直徑 AC 爲軸，旋轉之卽生球分.故扇形如至極限爲半圓時，則球分卽爲全球.又扇形如至極限



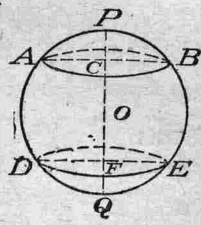


BC，CD 相合時,則球分爲圓錐面.球分之底,爲扇形之弧所生之球帶.球分之體積，等於其底帶及其球之半徑之三分之一相乘之積.令 h 爲 BD 所生球帶 EF 之高，r 爲球之半徑，則球分之體積爲 $\frac{2}{3}\pi r^2h$.

【球心】Centre of sphere.〔幾〕球之中心,與球面上各點等距離之點也.

【球面】Spherical surface.〔幾〕包圍球體之曲面也.

【球帶】Zone of a sphere 或 Zone.〔幾〕球帶爲平行二平面間所夾球面之部分，其二平面所作截面之圓周，爲球帶之底.二平面間之距離爲球帶之高.若平面之一爲球面之



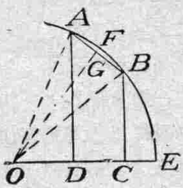
切面時,則生單底帶.如圖大圓 PDQB 繞直徑 PQ 而旋轉,則弧 AD 生球帶,二點 A 及 D 生其兩底，CF 爲其高,弧 PA 生單底帶.球爲半圓旋轉而生,其半圓之任意弧旋轉則晝球帶，故圓爲弧之極限,球面爲球帶之極限.球帶之面積等於其高及大圓周相乘之積，令球帶之高爲 h,球之半徑爲 r,則其面積爲 $2\pi rh$.單底帶之面積等於以其弧之弦爲半徑之圓之面積.若生單底帶之弧之弦爲 AP，則其面積爲 $\pi\overline{AP}^2$.

【球劈】Spherical wedge.〔幾〕球劈者，以球之月形爲底，二大半圓之面交於直徑,其間所夾之球之一部分也.球劈之角與月形之角同.其體積等於月形之面積與球之半徑之三分之一之相乘積.令月形之角爲 A°，球之半徑爲 r，則其體積爲 $\pi r^2\times\frac{A^\circ}{90^\circ}\times\frac{r}{3}$ 即 $\pi r^3\times\frac{A^\circ}{270^\circ}$.

球劈之角爲 360° 時,則爲全球。球劈亦稱球楔.

【球盤】Spherical segment.〔幾〕亦名球缺.球盤爲二平行平面間所夾球之一

部分，二平行平面所作之截面爲球盤之底，二平面間之垂直距離爲其高。二平行平面之一爲切面時，則生單底球盤。若球盤之高爲 $2r$，則球盤爲全球。球盤之體積爲 $V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$，證之如下。



如圖 ABCD 繞其 CD 軸旋轉，則生球盤。令 $DC=h$，$DE=h'$，$CE=h''$，$AD=r'$，$BC=r''$，$OE=r$。則（球盤 AFBCD）=（球分 OAFB）－（體積 AOB）+（臺 ABCD），

而（體積 GAFB）$=\frac{2}{3}\pi r^2h-\frac{2}{3}\pi h\times\overline{OG}^2=\frac{2}{3}\pi h\times\overline{AG}^2$

$=\frac{2}{3}\pi h\times\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{2}{3}\pi h\times\frac{(r'-r'')^2+h^2}{4}=\frac{1}{6}\pi h[(r'-r'')^2+h^2]$。

（臺 ABCD）$=\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r''^2+r'r'')$，

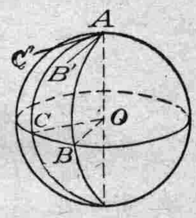
故（體積 AFBCD）$=\frac{1}{6}\pi h[(r'-r'')^2+h^2]+\frac{1}{3}\pi h\times(r'^2+r''^2+r'r'')$

$=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{\pi}{6}h^3$。

又（單底球盤之體積）=（球分 OAE）－（圓錐 OAD）$=\frac{2}{3}\pi r^2h'-\frac{1}{3}\pi r'^2(r-h')=\frac{\pi}{3}(2r^2h'-rr'^2+h'r'^2)$。

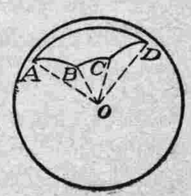
今 $r''=h'(2r-h')$，故體積 $=\pi h'^2(r-\frac{h'}{3})$。或體積 $=\frac{1}{2}\pi r'^2h'+\frac{1}{6}\pi h'^3$。

【球面角】 Spherical angle.〔幾〕球面角者，球面上相交二大圓弧間之角也。球面角可由其頂點（二大圓之交點）引二大圓弧之切線間之角測度之。此角等於二大圓平面所成之二面角。若球之半徑爲 1，則此角可以垂直於二大圓弧之大圓在二弧間所夾之部分測度之。如圖，球面角 BAC 可以∠B′AC′測之，亦可以BC測之。相交二大圓於其交點作兩兩相等之四球面角，其相鄰二角之和等於 180°，四角之和等於 360°。



【球面度】 Spherical degree.〔幾〕一球面爲八相等三直角三角形所合成，可分其各三角形爲 90 等分，每分稱爲一球面度，故全球面含 720 球面度。

【球角錐】 Spherical pyramid.〔幾〕球角錐者，以球面多邊形爲底及其諸邊之平面交於球之中心其間所含球之部分也。球之中心爲球角錐之頂，球面多邊形爲球角錐之底，如圖



O-ABCD爲一球角錐.球角錐之體積,等於其底面積乘球半徑之積之三分之一.

【球圓錐】Spherical cone.〔幾〕球角錐之底爲一單底帶時，則成球圓錐．其體積亦爲底面積乘球半徑之積之三分之一.

【球面過剩】Spherical excess.〔三〕與球面餘度同。

【球面圖形】Spherical figure.〔幾〕球面所畫之圖形也.

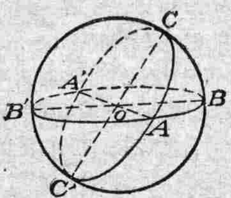
【球面餘度】Spherical excess.〔幾〕〔三〕球面三角形之諸角和與 180° 之差,稱爲三角形之球面餘度,或球面過剩.

【球曲率中心】Centre of spherical curvature.〔幾〕見空間曲線條.

【球面三角法】Spherical trigonometry.〔三〕球面三角法者,三角法之一分科，論球面三角形之六部分中已知其三而求其餘之解法，及球面三角形六部分間之關係者也．於球面三角形之三邊及三角之六部分中，已知其三，即可解得其餘．惟於二直角三角形之二直角及其一對邊爲已知時,則有無數之解答.

【球面三角形】Spherical triangle.〔幾〕〔三〕球面三角形者,三大圓弧所包圍之球面之一部也．此三大弧稱爲球面三角形之邊，其二弧間之角稱爲球面三角形之角，二弧之交點稱爲球面三角形之頂．命球之半徑爲 1，則球面三角形之邊可以球半徑至三角形各頂點所成之平面角測之．又三角之角以三邊之平面所成之二面測之．其每角之度數，以其大圓弧之度測之，即以角頂爲極,而夾於角之兩邊間之大圓弧也．三大圓弧常圍成八球面三角形，通常取其較小之三角形即球面三角形之六部分以每部小於 180° 爲限者論之。若六部分不設此限制,則可有自 0° 至 360° 之任何值.當此情形時，稱爲普通球面三角形 (General spherical triangle)．六部分中之任何二者若同小於 90°,或同大於 90°,則稱爲同類(Alike in kind)．若一小於 90°,一大於 90°,則稱爲異類(Unlike in kind).球面三角形有直角,鈍角,銳角,斜,二等邊,等邊之區別,其定義均與平面三角形同．球面三角形有二直角者稱爲二直角球面三角形，有三直角者稱爲三直角球面三角形，三直角球面三角形爲全球面之八分之一.二球面三角形,其一形內之各角爲其他一形內各對邊之補角者，則二形稱爲互極三角形或互補三角形．球面三角形有一邊等於 90° 者,稱爲象限三角形(Quadrantal triangle)．次略述球面三角形之重要性質：(1)最大邊對最大角，最小邊對最小角,中邊對中角,等邊對等角.若三角相等,則其三邊亦相等,而三角形爲等邊．其逆定理亦眞.
(2) 任意一邊比他二邊之和小而比其差大。(3)三角之和大於 180°,小於 540°.
(4)任意二角之和大於第三角之補角.
(5)任意二邊之差小於 180°，三邊之和小於 360°．(6)若任意二邊之和等於兩直角,則其對角之和亦等於兩直角。其逆定理亦眞．(7)若三角皆爲銳角或鈍角

或直角，則其三邊亦皆爲小於或大於或等於直角．(8)若二球面三角形，一形之三部分與他形之三部分順次相等，則兩形爲相等．若一三角形之部分與他三角形之部分相等，而順序不同，則兩形爲對稱，不能疊置之使密合．兩對稱球面三角形之面積相等．球面三角形之面積，以球面度表之，其數等於此三角形之球面餘度．如圖 CBA 爲球面三角形，以



A,B,C 表其三角之値，E 表其球面餘度．引長△CBA 之三邊成三全圓，則△A′BC 及 AB′C′ 爲對稱且等積．

又 $\triangle ABC+\triangle A'BC$ ≑ 月形 $ABA'C$．

以 $\triangle AB'C'$ 代其等積之 $\triangle A'BC$，

則 $\triangle ABC+\triangle AB'C'$ ≑ 月形 $ABA'C$．

且 $\triangle ABC+\triangle AB'C$ ≑ 月形 $BAB'C$．

$\triangle ABC+\triangle ABC'$ ≑ 月形 $CAC'B$．

三式相加，且以球面度計之，$\triangle ABC+\triangle AB'C'+\triangle AB'C+\triangle ABC'=360°$．

又 $ABA'C+BAB'C+CAC'B=2(A+B+C)$．

則 $2\triangle ABC+360°=2(A+B+C)$．

故 $\triangle ABC=A+B+C-180°=E$．

又因球面 S 之球面度數等於 720°．

$\therefore \triangle CBA:S=E:720°$，

但 $S=4\pi R^2$，

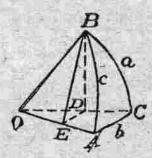
$$\therefore \triangle CBA=\frac{4\pi R^2E}{720°}=\frac{\pi R^2E}{180°}.$$

若已知三角形之三邊 a,b,c，則由幼氏公式(l'Huilier's formula)，即 $\tan^2\frac{1}{4}E=\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)$，其 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，可計算得 E 之值，然後由前之公式再求其面積．

【球面多邊形】Spherical polygon.
〔幾〕〔三〕三或多於三之大圓弧所圍之球面之一部分也．其諸邊之和小於 360°．設有球面 n 邊形，以 T 表其諸角之和之度數，則表其面積之球面度等於 $T-(n-2)180°$．

【球面幾何學】Spherical geometry.
〔幾〕爲表面幾何學之一種，論球之圖形之幾何學也．

【球面三角形之解法】Solution of spherical triangle. 〔三〕(1)設 ABC 爲僅含一直角之球面三角形，而 A，B，C 爲其各角，a,b,c 爲其各對邊．令 C 爲直角，而令其餘各



項皆小於 90°，又令其球之半徑爲 1．設通過各邊之平面，交於 OA，OB，OC 諸半徑．又設一平面 ⊥OA，通過 B 點而截 OA 於 E，及 OC 於 D．作 BE,BD,DE．

BE 及 DE 各 $\perp$OA，故 $\angle$BED$=\angle$A. 其平面 BED$\perp$ 平面 AOC，故 BDE及 BOC 兩平面之交線 BD$\perp$ 平面 AOC，卽 $\perp$OC 及 DE.

今　$\cos c=OE=OD\times\cos b$,

而　$OD=\cos a$,

故　$\cos c=\cos a\ \cos b$……(1).

又　$\sin a=BD=BE\times\sin A$,

而　$BE=\sin c$,

故　$\sin a=\sin c\ \sin A$……(2).

同理　$\sin b=\sin c\ \sin B$……(3).

又　$\cos A=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{OE\tan b}{OE\tan c}$,

故　$\cos A=\tan b\ \cot c$……(4).

同理　$\cos B=\tan a\ \cot c$……(5).

又　$\cos A=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{OD\sin b}{\sin c}=$

$\cos a\dfrac{\sin b}{\sin c}$，以(3)代$\dfrac{\sin b}{\sin c}$值，

得　$\cos A=\cos a\ \sin B$……(6).

同理　$\cos B=\cos b\ \sin A$……(7).

又　$\sin b=\dfrac{DE}{OD}=\dfrac{BD\cot A}{OD}=\tan a\ \cot A$

故　$\sin b=\tan a\ \cot A$……(8).

同理　$\sin a=\tan b\ \cot B$……(9).

設由(6),(7)代 cos a 及 cos b 之各值於(1)內，則得

$\cos c=\cot A\cot B$……(10).

用以上十公式，可解任何之球面直角三角形.惟推論此諸公式時，其三角形之各項，除直角外，俱假定爲小於 90°. 然卽不如此假定，其公式仍爲準確. 解直角三角形時，除直角外，須有二項爲已知. 例如已知兩邊 a 及 b，則由(1),(8),(9)三公式得

$\cos c=\cos a\ \cos b$,

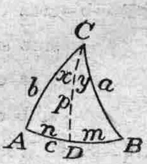
$\tan A=\tan a\ \csc b$,

$\tan B=\tan b\ \csc a$,

若已知 $a=27^\circ28'36''$, $b=51^\circ12'8''$, 則 $\log\cos a=9.94802$, $\log\cos b=9.79097$, $\therefore\log\cos c=9.74499$, $\therefore c=56^\circ13'41''$. 又 $\log\tan b=10.09476$, $\log\csc a=0.33594$, $\therefore\log\tan B=10.43070$, $\therefore B=69^\circ38'54''$. 又 $\log\tan a=9.71605$, $\log\csc b=0.10826$, $\therefore\log\tan A=9.82431$, $\therefore A=33^\circ42'51''$. 所得結果以公式 $\cos c=\cot A\cot B$ 驗之，則 $\log\cot A=10.17569$, $\log\cot B=9.56930$, 而 $\log\cos c=9.74499$, 故所解爲不誤.

〔2〕若過球面等腰三角形之頂點及其底之中點而作大圓，則其弧必分原形爲兩個等積之球面直角三角形，故球面等腰三角形可由球面直角三角形之解法解之. 若過球面多角形之中心及其各頂點而作大圓，則其弧必分多角形爲數相等之等腰三角形，而每等腰三角形，又可分爲兩個等積之直角三角形. 故球面多角形亦可化爲球面直角三角形解之.

〔3〕設 ABC 爲一球面斜角三角形，A, B, C 爲其三角，a, b, c 爲其各對邊. 過 C 作大圓弧 CD，垂直於 AB 邊，而遇 AB



於D.命 $CD=p$, $AD=n$, $BD=m$, $\angle ACD=x$, $\angle BCD=y$，1.由(1)，(2)二公式，於直角三角形 BDC 及 ADC 內，得

$$\sin p=\sin a\ \sin B,$$

及
$$\sin p=\sin b\ \sin A.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & \sin a\ \sin B=\sin b\ \sin A\\ \text{同理} & \sin a\ \sin C=\sin c\ \sin A\\ \text{及} & \sin b\ \sin C=\sin c\ \sin B\end{array}\right\}\cdots(11).$$

此三方程式又可寫爲比例式，如

$$\sin a:\sin b:\sin c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

即球面三角形各邊之正弦，與其對角之正弦成正比例也。 2.由公式(1)，則於直角三角形 BDC 內，得

$$\cos a=\cos p\ \cos m=\cos p\ \cos(c-n)$$
$$=\cos p\ \cos c\ \cos n+\cos p\ \sin c\ \sin n.$$

又於直角三角形 ADC 內，由公式(1)，得

$$\cos p\ \cos n=\cos b.$$

於是
$$\cos p=\cos b\ \sec n,$$

而
$$\cos p\ \sin n=\cos b\ \tan n.$$

由公式(4)，(5)，$\tan n=\tan b\ \cos A$.

$$\therefore\ \cos p\ \cos n=\cos b\ \tan b\ \cos A$$
$$=\sin b\ \cos A.$$

以 $\cos p\ \cos n$ 及 $\cos p\ \sin n$ 之各值代入 $\cos a$ 值內，則得

$$\left.\begin{array}{l}\cos a=\cos b\ \cos c+\sin b\ \sin c\ \cos A\\ \text{同理}\cos b=\cos a\ \cos c+\sin a\ \sin c\ \sin B\\ \cos c=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b\ \cos C\end{array}\right\}\cdots(12).$$

3.由公式(6)，則於直角三角形 ADC 內，得 $\cos A=\cos p\ \sin x-\cos p\ \sin(C-y)$

$$=\cos p\ \sin C\ \cos y-\cos p\ \cos C\ \sin y.$$

又由公式(7)，$\cos p\ \sin y=\cos B$,

故
$$\cos p=\cos B\csc y,$$

而
$$\cos p\ \cos y=\cos B\cot y,$$

由公式(10)，
$$=\cos B\tan B\cos a$$
$$=\sin B\cos a$$

以 $\cos p\ \sin y$ 及 $\cos p\ \cos y$ 之各值代入 $\cos A$ 值內，則得

$$\left.\begin{array}{l}\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \text{同理可得}\\ \cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b\\ \cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{array}\right\}\cdots(13).$$

由以上(11)，(12)，(13)三組公式，可解任何之球面斜角三角形。

〔4〕已知邊而求角，則有下之公式，其

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\ \sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\ \sin a}}\\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\ \sin b}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-a)}{\sin b\ \sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-b)}{\sin c\ \sin a}}\\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-c)}{\sin a\ \sin b}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}\end{aligned}\right\}$$

〔5〕已知角而求邊，則有下之公式，其

$$S=\frac{1}{2}(A+B+C).$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin C\sin A}}\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cos(S-A)}{\sin C\sin A}}\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\\ \tan\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}\\ \tan\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}\end{aligned}\right\}$$

〔6〕次更述高氏方程式及納氏比例式。因 $\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$。其 $\cos\frac{A}{2}$，$\cos\frac{B}{2}$，$\sin\frac{A}{2}$，$\sin\frac{B}{2}$ 之各值以上述〔4〕之諸公式代入而化簡之，則得

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.$$

而 $\sin s-\sin(s-c)=2\cos\frac{1}{2}(s+s-c)\sin\frac{1}{2}(s-s+c)=2\cos(s-\frac{1}{2}c)\sin\frac{1}{2}c$，

又 $\sin c=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$，

$$\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},$$

代入上式，則得 $\cos\frac{1}{2}(A+B)$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos(s-\frac{1}{2}c)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C$$

$=\frac{\cos(s-\frac{1}{2}c)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C$。又 $s-\frac{1}{2}c=\frac{a+b}{2}$，

$\therefore\ \cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$。　同理可得

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$$

是謂之高氏方程式 Gauss's Equations. 以高氏方程式中之第一式除第二式，第三式除第四式，第一式除第三式，及第二式除第四式，則得

$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c,$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c.$$

是謂之納氏比例式 (Napier's Analogies).

理

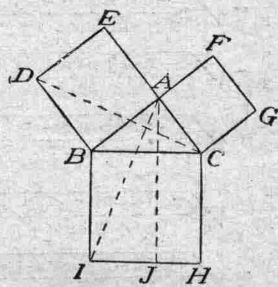
【理分中末線】〔幾〕即一線分成外中比也. 按幾何原本界說：理分中末線者，一線兩分之，其全與大分之比例，若大分與小分之比例. 古時稱曰神分線. 參閱外中分割條.

畢

【畢達哥拉斯表】Pythagoras's table. 〔算〕即乘法表，見該條.

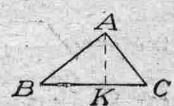
【畢達哥拉斯定理】Pythagoras's theorem. 〔幾〕「直角三角形斜邊之正方等於他二邊正方之和」，稱爲畢達哥拉斯定理. 此定理發見極古，我國周髀算經已有「弦方等於勾方加股方」之題，惟無一般之證法. 西籍謂此定理爲 Pythagoras 氏所發見，或曰 Pythagoras 聞諸埃及之僧，而發見其證明也. 此定理證法極多，北京高等師範數理雜誌第二卷所載已有六十法，玆述其數法於次：

〔第一證〕此證法卽普通幾何學書中所載者. 設 ABC 爲直角三角形，而 A 爲直角. 在各邊上畫正方形 AD, BH, CF, 引 AJ ∥ CH. 則 △BDC = △BAI，則



□AD = 2△BDC, □BJ = 2△BAI,
∴□AD = □BJ. 同理□CF = □CJ.
∴□BH = □AD + □CF, 卽 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. 本題將各正方畫爲種種方向，則得種種證法，玆從略.

〔第二證〕引 AK ⊥ BC，則 △ABK, CAK, ABC 皆爲相似，故 BC:AB = AB:BK，卽 $\overline{AB}^2 = BC\cdot BK$.



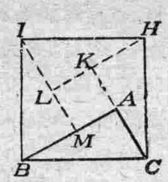
同理　$\overline{AC}^2 = CB\cdot CK$.

$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\cdot BK + BC\cdot CK.$

$= BC(BK + KC) = \overline{BC}^2.$

〔第三證〕於 BC 上作正方形 BH，延長

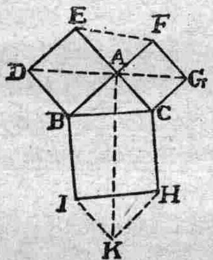
CA，截 CK＝AB，連結 HK 延長之，截 HL＝AB，連結 IL 延長之交 AB 於 M．則 △KCH≡△LHI≡△MIB≡△ABC．如圖，



□BH＝△KCH＋△LHI＋△MIB＋△ABC＋□AL＝4△ABC＋$\overline{AM}^2$＝2AB·AC＋$(AB-AC)^2$＝$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$，

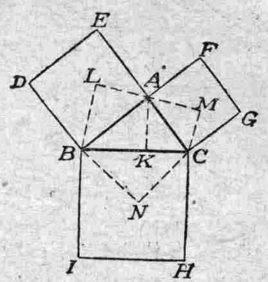
∴$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$．

〔第四證〕在各邊上畫正方形 AD,BH,CF．於 IH 上作 △KHI≡△ABC，



而 D,A,G 在一直線上．故四邊形 GFED≡四邊形 GCBD≡四邊形 ACHK≡四邊形 KIBA，因之六邊形 GFEDBC≡六邊形 ABIKHC．然 △AEF≡△ABC≡△KHI．各減去之，則得 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

〔第五證〕在各邊上畫正方形 AD,BH,CF．引 AK 正交於 BC，於各邊上作 △ABL，△BCN，△CAM≡△ABK，△BCA，△CAK．則 △BCN＝△ABL＋△CAM．然 △BCN∽△ABL∽△CAM，又□BH∽□AD∽□CF．故

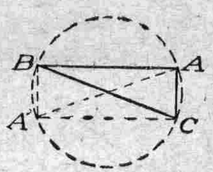


△ABC 各邊上之三角形與正方形等比，

∴□BH＝□AD＋□CF，

即 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$．

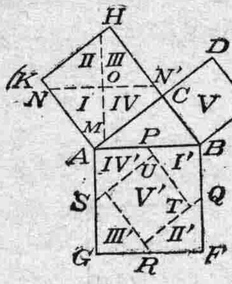
〔第六證〕作矩形 ABA′C，則此形得內接於圓，由托勒密定理 (Ptolemy's theorem)，圓內接四邊形二雙對邊所包矩形之和等於兩對角線所包矩形之和．故得



AB·A′C＋AC·A′B＝BC·AA′，

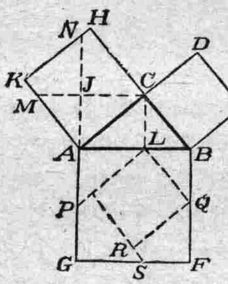
即 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$．

〔第七證〕過 AC 邊上正方形 AH 之中心 O，引 NO 平行 AB，又引 MO 垂直 AB．又由 AB 邊上之正方形之各邊之中點，引平行及垂直於 AC 諸線，如圖所示，ABN′N 為平行四邊形，N′N 等於 AB，O 為 N′N 之中點，P 為 AB 之中點，故 NO＝PB 及 MO＝NO＝BQ，而四邊形 I 與 I′ 為等角，故兩形相等．同理四邊形



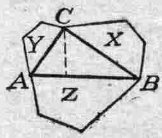
II，III，IV 等於四邊形 II′，III′，IV′，且互相等．次 PT=AN=BN′，及 PU=CN′，故 TU=BC，而四邊形 V′ 爲正方形且等於正方形 V。故正方形 AF 等於正方形 AH，BD 之和．

〔第八證〕於各邊上畫正方形，延長 GA 至 N，由 C 引 CL，CM 垂直及平行於 AB，



由 L 引 LP，LQ 平行於 CA 及 CB，LQ 上畫正方形 LR，將其一邊引長至 S．則由作圖知 △ACJ=△ACL=△PLA，△AMJ=△BCL=△BLQ，及 △ACM=△AKN，故正方形 LR 等於正方形 BD，而 BF=AB=MC=AN，及 BQ=AJ，QF=JN，又 QR=LQ=AM=KN，故兩四邊形 QRSF 及 KMJN 相等．又兩四邊形 PS 及 JH 相等，故正方形 AF 等於正方形 AH 及 BD 之和．

〔畢達哥拉斯之定理之擴張〕ABC 爲 C 爲直角之三角形，X，Y，Z 爲在 A，B，C



各角之對邊上在相似位置所作之相似直線形．則相似形與其對應邊上之正方形成比例，故 $X:Y=\overline{CB}^2:\overline{AC}^2$，$X+Y:Y=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2:\overline{AC}^2$．而 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$，且 $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=Z:Y$，$\therefore X+Y=Z$．即以直角三角形之三邊爲對應邊，在相似位置畫相似形，則斜邊之形之積等於他二邊之形之積之和．又以各邊爲直徑畫半圓，則此定理亦眞．畢達哥拉斯之定理，其應用極廣．如三數 3，4，5 有 $5^2=4^2+3^2$ 之關係，故若以 3，4，5 寸爲三邊作三角形，則 5 寸之邊所對之角爲直角．又由直角引斜邊之高，分斜邊爲二部分，則由 $5a_1=3^2$ 及 $5b_1=4^2$，而得 $a_1=\frac{9}{5}$，$b_1=\frac{19}{5}$，故此高 p 可由 $p^2=\frac{9}{5}\cdot\frac{16}{5}$ 求得即 $p=\frac{12}{5}$．〔問題〕求直角三角形三邊之整數表．此問題只須求適合方程式 $x^2=y^2+z^2$ 之 x，y，z 之值可也．命 m

m / n	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5 3 4	10 6 8	7 8 5	26 0 24	37 12 35	50 14 48	56 16 63	82 18 80
2		13 2 5	20 6 12	29 20 21	40 24 32	53 28 45	68 32 60	85 36 77
3			25 24 7	34 30 16	45 36 27	58 42 40	73 48 55	90 54 72
4				41 9 40	52 48 20	65 56 33	80 64 48	97 72 65
5					61 60 11	74 70 24	89 80 39	106 90 56

及n爲二數，則$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$，故$m^2+n^2$，$m^2-n^2$，$2mn$爲表此問題之答數．上表即輯錄如斯計算而得之數也．

略

【略除法】Contraction in division.〔幾〕見省略算條．

【略乘法】Contraction in multiplication.〔算〕見省略算條．

移

【移項】Transpose.〔代〕於等式或不等式之兩邊，將某項由一邊移至他邊之謂也．移項須變符號．例於$ax=bx+c$，將bx移項時，則爲$ax-bx=c$．又於$a+b>c+d$，將b與c移項時，則爲$a-c>d-b$．

笛

【笛卡兒坐標】Descartes' co-ordinates.〔幾〕近代幾何學上所用之坐標法，爲笛卡兒所發明，故一稱笛卡兒坐標．見坐標條．

【笛卡兒蝶線】Folium of Descartes.〔幾〕見蝶線條．

【笛卡兒之符號法則】Descartes' rule of signs.〔代〕笛卡兒之符號法則如次：若方程式$f(x)=o$之係數爲實數，則其正根之數與其左邊內諸項內之符號由＋至－及由－至＋之變化之數相同或少一奇數．茲先證明若以因數$x-\alpha$乘多項式$f(x)$，生一新正根，乘積內符號之變化較原多項式內者多一奇數．於x之降冪排列之函數，諸項之符號依次形式而變化：＋……－……＋……－……＋……，＋後之點表若干相連正項，而－後之點表若干相連負項．設α爲正根以$x-\alpha$乘$f(x)$，而書其同乘冪於一行，則所得之乘積，其符號可求之如次：

$$\begin{array}{l}+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots-\cdots\cdots+\cdots\cdots\\ -\cdots-+\cdots+-\cdots-+\cdots+-\cdots-\\ \hline +\pm\cdots-\pm\cdots+\pm\cdots-\pm\cdots+\pm\cdots-\end{array},$$

±表示兩意，即似此之項，其符號不能確定也．±後之點爲兩意；即$f(x)$內－符號之連續於$(x-a)f(x)$內以兩意代之．又$f(x)$之符號之變化，$(x-a)f(x)$內有一變化與之對應．且於乘積內其末尾更有一變化．故乘積較$f(x)$至少多含一變化．且乘積可含更多之變化，因$f(x)$內諸相續如＋＋＋或－－－在$(x-\alpha)f(x)$內以＋－＋或－＋－代之．然此類

符號之變化常增加偶數個．故 $(x-\alpha)f(x)$ 內符號之變化 $f(x)$ 內者多一奇數 1 或 $2h+1$．由是甚易得笛卡兒之法則．設已求得與 $f(x)=0$ 之負根及複虛根相當諸因數之乘積．此乘積以 $F(x)$ 表之．因 $F(x)=0$ 既無正根，則 $F(x)$ 之首項與末項為同號．故 $F(x)$ 內變化之數為偶數 $2k$，k 為零或正整數．若以因數 $x-\alpha$ 乘 $F(x)$，α_1 為正根，則得 $2k_1+1$ 變化之積，而 $k_1 \geqq k$．同理乘以第二因數 $x-\alpha_2$，則得 $2k_2+2$ 變化，由此類推．故引入 v 個正根，則得 $2k_v+v$ 變化．而 k_v 為零或正整數．故此定理成立．

第

【第一象限】First quadrant.〔三〕見象限條．

【第二象限】Second quadrant.〔三〕見象限條．

【第三象限】Third quadrant.〔三〕見象限條．

【第四象限】Fourth quadrant.〔三〕見象限條．

【第一勒滿圓】First Lemoine circle.〔幾〕即三乘比圓，見該條．

【第二勒滿圓】Second Lemoine circle.〔幾〕即餘弦圓，見該條．

【第里安問題】Delian problem.〔代〕此問題為於已知二正數之間插入二比例中項．即命 $a:b=b:c=c:d=\dfrac{1}{\rho}$，則 $b=\rho a$，$c=\rho^2 a$，$d=\rho^3 a$．$d/a=\rho^3$，$\therefore \rho=\sqrt[3]{(d/a)}$，因而

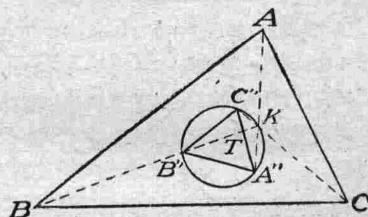
$$b=a\rho=a\sqrt[3]{(d/a)}=\sqrt[3]{(a^2d)},$$

$$c=a\rho^2=a\{\sqrt[3]{(d/a)}\}^2=\sqrt[3]{(ad^2)}.$$

高等幾何學中，常應用此問題以求立方倍積．

【第一布洛喀三角形】Brocard's first triangle.〔幾〕聯三角形之外心在其勒滿平行線上之正射影所成之三角形，謂之第一布洛喀三角形．又見布洛喀三角形及布洛喀圓條．

【第二布洛喀三角形】Brocard's second triangle.〔幾〕三角形之各角頂與其類似重心之聯線交布洛喀圓於三點，聯此三點所成之三角形，謂之第二布洛喀三角形．如圖，K 為三角形 ABC 之類似重心，T 為布洛喀圓，聯 AK，BK，CK，交 T 圓於 A″，B″，C″，則 A″ B″ C″ 為第二布洛喀三角形．



符

【符號】Sign.〔算〕〔代〕符號者，如 $+-\times\div=$ 等之稱也．在代數學中行減法時須換符號，即＋換為－，－換為＋．此時所云之符號單指＋－＝者而言．故符號用於廣義時為指＋，－，×，÷，＝，……，用於狹義時則指＋，－，＝者．

【符號之定則】Law of signs.〔代〕在代數學中之加法，$+a+(+b)=a+b$，$+a+(-b)=a-b$，即行加法時，不變其各項之符號.於減法 $+a-(+b)=a-b$，$+a-(-b)=a+b$，即行減法變其減式各項之符號.於乘法

$(+a)\times(+b)=+ab$，

$(-a)\times(+b)=-ab$，

$(+a)\times(-b)=-ab$，

$(-a)\times(-b)=+ab$，

即同符號相乘得正.異符號相乘得負，除法亦與乘法同，即

$(+ab)\div(+a)=+b$，

$(-ab)\div(-a)=+b$，

$(-ab)\div(+a)=-b$，

$(+ab)\div(-a)=-b$，

組

【組合】Combination.〔代〕由 n 個不同之物中，不論其次序如何，但選出 r 個不同之物而爲一組，此法謂之由 n 個物每次取 r 個之組合.例如由 a, b, c, d 四物每次取三個之組合爲 abc, abd, acd, bcd. 由 n 個物取 r 個之組合之數恆以 ${}_nC_r$ 表之，此種組合之數，亦名曰配列變數.（I）求 ${}_nC_r$ 之法如次.設以 a, b, c, d……表 n 個不同之物.由 n 個字母每次取 r 字之各組合，凡含有一特別字母之組，其數等於由 $n-1$ 字母中取 $r-1$ 字母組合之數.故凡 n 字母中之任一字母，含於諸組合之全數中者，爲有 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 次.則含於 ${}_nC_r$ 內字母之總數爲 ${}_{n-1}C_{r-1}\times n$. 而 ${}_nC_r$ 內之任一組，皆含 r 個字母，故字母之全數爲 ${}_nC_r\times r$. 由是 $r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$. 上式只須 r 不大於 n，則 r 及 n 爲任何之値均合理，順次得

$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2}$

$(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3}$

……………………=……………………

$2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_1$

又　${}_{n-r+1}C_1=n-r+1$

將各式之兩邊連乘之而約其公因數，得 $r!\times{}_nC_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$，即

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdots\cdots(1).$$

上式右邊之分子分母以 $(n-r)!$ 乘之，爲

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

〔別證〕每組合若變其次序，可有 $r!$ 種排列，故將所有各組合悉變其次序而爲排列，則爲 ${}_nP_r$. 由是得

${}_nC_r\times r!={}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$，即(2)式也. 又於(2)式，設 $r=n$，則

$${}_nC_n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{1}{0!},\quad 而\ {}_nC_n=1,$$

$\therefore 1=\dfrac{1}{0!}$ 即 $0!=1$.或可用他法求得，即 $n!=n(n-1)!$，若 $n=1$，則 $1!=1(1-1)!$，$\therefore 0!=1$. (II)由相異之 n 物內，每次取 r 個之組合數，恆等於每次取 $n-r$ 個之組合數.此因由 n 物中取去 r 物時，其餘尙有物 $n-r$ 個，而由 n 物取 r 物之組合，每次各異，則於同時

其所餘之 n-r 物，亦每次各異，故如上云云．以公式證之，則因 ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$，今以 n-r 代 r，則得 ${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$，$\therefore {}_nC_r={}_nC_{n-r}$．　(III)證 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$．於 n+1 物每次取 r 個之組合數，內以其含特別之一物者，與不含特別之一物者，分爲二羣．而含特別一物之組數，必爲 n 物每次取 r-1 個之組數，即 ${}_nC_{r-1}$．又不含特別一物之組數，必爲 n 物每次取 r 個之組數，即 ${}_nC_r$．$\therefore {}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$．

〔別證〕${}_nC_r+{}_nC_{r-1}$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}\{(n-r+1)+r\}.$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}={}_{n+1}C_r.$$

(IV)求 ${}_nC_r$ 之最大值．由前(1)式，${}_nC_r=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{r}$，

$$\therefore {}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

由是從 $n-r+1\gtreqless r$ 即 $r\lesseqgtr\frac{1}{2}(n+1)$，而定 ${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$．故若 r 小於 $\frac{1}{2}(n+1)$ 時，則 r 之值增大，而 ${}_nC_r$ 之值亦增大．故 n 爲偶數，則 $r=\frac{n}{2}$，其 ${}_nC_r$ 爲最大．又 n 爲奇數，則 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $r=\frac{1}{2}(n+1)-1=\frac{1}{2}(n-1)$，其 ${}_nC_r$ 之值爲最大，因 ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}={}_nC_{n-\frac{1}{2}(n+1)}={}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$ 故也．

【組合定則】 Associative law．〔代〕即結合定則，見基本定則條．

累

【累乘積】 Continued product．〔算〕即連乘積，見該條．

【累次消去法】 Method of successive elimination．〔代〕三以上之聯立方程式含三以上之未知數，累次消去其未知數之法也．例如三方程式爲

$$ax+by+cz=d\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$
$$a'x+b'y+c'z=d'\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$
$$a''x+b''y+c''z=d''\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

以 c′ 乘(1)式，c 乘(2)式，行減法，則得

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c\cdots\cdots(4).$$

又以 c″ 乘(1)式，c 乘(3)式，行減法，則得

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c\cdots\cdots(5).$$

此(4)與(5)又施以同法，則得

$$x=[-(bc'-b'c)(dc''-d''c)+(dc'-d'c)(bc''-b''c)]\div(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c).$$

【累次微分法】 Successive differentiation．〔微〕與疊次微分法同，見該條．

【累次積分法】Successive integration.〔積〕與疊次積分法同,見該條.

【累次微分係數】Successive differential coefficient.〔微〕卽疊次微分係數,見該條.

終

【終結】Conclusion.〔幾〕有命題「若A爲B則C爲D」,其前半部「若A爲B」爲假設,後半部「則C爲D」爲終結,卽由假設經推理而達最後之結果也.

【終身年金】Life annuity.〔算〕〔代〕終身年金者,人之一生繼續所有之年金,其人死後,年金卽消滅也.

蛇

【蛇狀雙曲線】Anguineal hyperbola.〔幾〕方程式 $xy^2+ey=-ax^3+bx^2+cx+d$ 之雙曲線,其形似蛇首,牛頓名之曰蛇狀雙曲線.

規

【規約的收斂級數】Conditional convergent series.〔代〕見絕對的收斂級數條.

貫

【貫徑】Transversal axis.〔幾〕雙曲線兩頂點之距離也.一稱貫軸或橫軸,又名截軸.參閱雙曲線條.

【貫軸】Transversal axis.〔幾〕見貫徑條.

趾

【趾】Foot.〔幾〕由一點至一直線或一平面引垂線或斜線,其相交之點曰趾,亦稱足.

逐

【逐乘】Factorial.〔代〕始自1之自然數之連乘積,稱爲逐乘或階乘.例如 $1.2.3\cdots\cdots n$,簡書爲 $\underline{n|}$ 或 $n!$,稱曰逐乘 n.

【逐差法】Method of difference.〔代〕卽差法,見該條.

【逐次除法】Successive division.〔算〕例如3456以12除之,而 $12=4\times3$,故可先以4除之,次以所得之商以3除之.此稱爲逐次除法,亦曰因數除法.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3456 \\ \hline 3 & 864 \\ \hline & 288 \end{array}$$

通

【通分】Reduction of fractions to a common denominator.〔算〕〔代〕異分母之諸分數,化爲同分母之諸分數,其法曰通分.可分爲二種:(1)諸分母爲互素數者,則以諸分母之連乘積爲公分母,各分子與他分母之連乘積爲新分子.例將 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ 三分數通分,則其公分母爲 $2\times3\times5=30$,

而 $\frac{1}{2}=\frac{1\times3\times5}{2\times3\times5}=\frac{15}{30}$,

$\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times5}{3\times2\times5}=\frac{20}{30}$,

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times2\times3}{5\times2\times3}=\frac{24}{30}.$$

(II) 諸分母有公約數者，則用其最小公倍爲最小公分母．將各分母除之之商，以各分子乘之，爲各新分子．例將 $\frac{2}{9}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{7}{15}$ 通分．各分母之L.C.M.=180，

$$\therefore\ \frac{2}{9}=\frac{2\times20}{9\times20}=\frac{40}{180},$$

$$\frac{5}{12}=\frac{5\times15}{12\times15}=\frac{75}{180},$$

$$\frac{7}{15}=\frac{7\times12}{15\times12}=\frac{84}{180},$$

【通法】〔算〕複名數(諸等數)算法中化高級單位數爲低級單位數之方法，稱曰通法．其法有二：(1)通複名數爲單名數之法：先用進率乘最高級單位數而加以原有次高級單位數，得次高級單位數；再以進率乘所得次高級單位數，而加以原有又次高級單位數，得又次高級單位數；如此繼續演算，至最低級單位數止．例，化5里42步4尺6寸爲寸之單名數．

$$\begin{array}{rrl} & 5 & (里) \\ \times) & 360 & \\ \hline & 1800 & (步) \\ +) & 42 & \\ \hline & 1842 & (步) \\ \times) & 5 & \\ \hline & 9210 & (尺) \\ +) & 4 & \\ \hline & 9214 & (尺) \\ \times) & 10 & \\ \hline & 92140 & (寸) \\ +) & 6 & \\ \hline & 92146 & (寸)\cdots\cdots 答. \end{array}$$

(2)通單名數爲複名數之法：先用進率乘單名數之小數部，所得積之整數部爲次高級單位數；再用進率乘所得積之小數部，再得積之整數部，爲又次高級單位數；如此繼續演算，至最低級單位數止，取所有整數及最後之積卽得．例，化2.345日爲複名數．

$$\begin{array}{lrl} (日)\cdots\cdots\cdots & 2|.345 & (日) \\ \times) & 24 & \\ \hline & 1380 & \\ & 690 & \\ \hline (時)\cdots\cdots\cdots & 8|.28 & (時) \\ \times) & 60 & \\ \hline (分)\cdots\cdots\cdots & 16|.8 & (分) \\ \times) & 60 & \\ \hline (秒)\cdots\cdots\cdots & 48 & (秒) \end{array}$$

答，2日8時16分48秒．

【通徑】Latus rectum 或 parameter．〔幾〕圓錐曲線，其通過焦點而與X軸直交之弦，名曰通徑．

【通常分數】Vulgar fraction．〔算〕卽普通之分數，爲與繁分數相對之語．

【通同方程式】Simultaneous equation．〔代〕卽聯立方程式，見該條．

連

【連比】Continued ratio．〔算〕諸數相連而作比者曰連比．如3:5:7爲3與5與7之連比．凡已知諸數中各自成比者，則可以下法化爲連比．如已知A與B之比爲4:7，B與C之比爲3:5，則以後比之3乘A與B之比，爲12:21．以前比之7乘B與C之比，爲21:35．故得A與B與C之連比爲

$$\begin{array}{r} 4:7 \\ 3:5 \\ \hline 12:21:35 \end{array}$$

12:21:35.

【連變】To vary jointly.〔代〕同合變.

【連分數】Continued fraction.〔代〕凡分數爲$\cfrac{a}{b\pm\cfrac{c}{c\pm\cfrac{e}{f\pm}}}$……之形者,謂之連分數.恆記爲 $\frac{a}{b\pm}\ \frac{c}{d\pm}\ \frac{e}{f\pm}$……….今就簡單之連分數論之.(I)化任意之既約眞分數 $\frac{b}{a}$ 爲連分數.以 b 除 a,命其商爲 p,剩餘爲 c,則$\frac{b}{a}=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}}=\cfrac{1}{p+\cfrac{c}{b}}$.次以 c 除 b,命其商爲 q,剩餘爲 d,則

$$\cfrac{1}{p+\cfrac{c}{b}}=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{\cfrac{b}{c}}}=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{d}{c}}}.$$

以下倣此,故$\frac{b}{a}=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cdots\cdots}}}$

卽$\frac{b}{a}=\frac{1}{p+}\ \frac{1}{q+}\ \frac{1}{r+}$…….此運算與求 a 及 b 之最大公約數之法同,故若 a 與 b 爲互素數,則終至達於剩餘爲 1 之連分數而止. (II)凡連分數從前向後,任於何處截止之,而截取之各分數,謂之連分數之近數.例如$\frac{m}{n}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}$……時,第一近數爲$\frac{a_1}{1}$,第二近數爲$a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}$,第三近數爲$a_1+\frac{a}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}=\frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3\cdot a_2+1}$.而第 n 近數恆以$\frac{p_n}{q_n}$表之. (III)連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}$……其 $a_1,a_2,a_3,\cdots$,皆爲正者,則各次之近數比連分數大小相間.第一近數爲$\frac{a_1}{1}$,截去$\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}$……諸正數,故比原連分數爲小.第二近數爲 $a_1+\frac{1}{a_2}$,其分母a_2比 $a_2+\frac{1}{a_3+}$….爲小,故 $a_1+\frac{1}{a_2}$比原連分數爲大.第三近數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3}$,其分母 $a_2+\frac{1}{a_3}$比 $a_2+\frac{1}{a_3+}$….爲大,故 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3}$比原連分數爲小.以下順次大小相間.故得一簡明定理曰,凡奇次(如第一,第三,……)之近數皆比原連分數小,凡偶次(如第二,第四……)之近數皆比原連分數大.惟如$\frac{m}{n}$爲眞分數,則 $a_1=0$,而此亦須作爲第一近數. (IV)連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}$……之首三近數爲 $\frac{a_1}{1}$, $\frac{a_1a_2+1}{a_2}$, $\frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3\cdot a_2+1}$,已如上述.故第三近數之分子爲以第三商乘第二近數之分子加第一近數之分子而成,其分母亦然.故如以 $a_1, a_2,\cdots a_n$ 表諸商, $p_1, p_2\cdots, p_n$ 及 $q_1, q_2,\cdots q_n$ 表諸近數之分子及分母,則一般

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$，　$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$．而 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$．此因
$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) \times q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$
$= (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$，同理，
$= (-1)^2 (p_{n-2} q_{n-3} - p_{n-3} q_{n-2})$
$= \cdots\cdots = (-1)^{n-2} (p_2 q_1 - p_1 q_2)$．
但 $p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_1 a_2 + 1) - a_1 a_2 = 1 = (-1)^2$，故 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$．

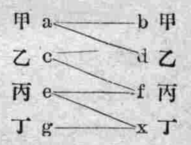
【連心線】〔幾〕連結二圓中心之直線也．亦稱聯心線．相交二圓之連心線，為其公弦之垂直二等分線．相切二圓之連心線，與其內公切線垂直相交於切點．

【連比例】Continued proportion．〔算〕〔代〕a，b，c，d，……為 $a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots$ 時，則謂之成連比例．而 a，b，c，d……成連比例，則 $a:c=a^2:b^2$，$a:d=a^3:b^3$，……，又等比級數之各項為成連比例．

【連乘積】Continued product．〔算〕〔代〕第一數乘第二數，又以第三數乘其積，則其結果稱為三數之連乘積，四數，五數，……，準此．

【連結線】Joins．〔幾〕連結二點之直線也，常簡稱為連線．

【連鎖法】Chain rule．〔算〕有順次而列之諸數，已知其順次之比，則可用連鎖法以求其首末二數之比．如 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$，今將各分為 $\frac{a}{b}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{c}{d}$ 約簡之，使各為 $\frac{m}{n}$，$\frac{p}{q}$，$\frac{r}{s}$，則 $\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$ 雖不等於 $\frac{m}{s}$，而其值仍等於 $\frac{a}{d}$．以是等分數表比之值，則得如次所述，即「甲乙之比，乙丙之比，丙丁之比，是等連鎖比之積，等於甲丁之比，即首末二項之比」．又得如下所述，即「甲乙之比，乙丙之比，丙丁之比，丁甲之比，是等連鎖比之積等於 1」．又如已知甲乙之比為 $\frac{a}{b}$，乙丙之比為 $\frac{c}{d}$，丙丁之比為 $\frac{e}{f}$，又已知丁甲之比之一項而求其他項，例如丁為 g 時求甲之相對值 x．則由前所述得 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{x}=1$．
故 $x=\frac{aceg}{bdf}$．以圖式記之，則如次．即由甲而乙，由乙而丙，由丙而丁，由丁而甲，恰如繫以鏈鎖．



則比之前項(分子)悉在左側，後項(分母)悉在右側，而左右各積之比為 1，即左右各積相等．則將左方各數之積，以右方除 x 外各數之積除之，即得 x 之值，是為連鎖法問題一般之解法．然連鎖法之實用問題，於連鎖比之關係，多以各數倍數之關係表之．例如有甲乙丙丁四數，甲之 a 倍等於乙之 b 倍，乙之 c 倍等於丙之 d 倍，丙之 e 倍等於丁之 f 倍．問丁之 g 倍等於甲之若干倍．今解此題，因甲之 a 倍等於乙之 b 倍，故甲乙之比為其倍數

之比之逆卽爲 b:a，餘準此．故命所要甲之倍數爲 x，則

甲 b —— a 乙
乙 d —— c 丙
丙 f —— e 丁
丁 x —— g 甲

故 $x=\frac{aceg}{bdf}$.

如斯由倍數之關係改書爲比之關係，則須如上所述．然是等問題常可直接就倍數之關係而立連鎖式，其所求得 x 之值，與由比之關係求得者無異，卽

甲 a —— b 乙
乙 c —— d 丙
丙 e —— f 丁
丁 g —— x 甲

故 $x=\frac{aceg}{bdf}$.

今述一二實用問題於下。

〔例 1〕茶 3 斤與咖啡 4 斤，咖啡 6 斤與砂糖 20 斤，砂糖 15 斤與米 1 斗 2 升，其價各相等．問米 6 斗 4 升之價與茶幾斤之價相等．〔解〕茶 3 斤與咖啡 4 斤等價，故茶與咖啡之價之比爲 3 與 4 之反比，卽爲 4:3．餘準此．故命 x 爲所求茶之斤數，則由比之關係而得左式．

茶 4 —— 3 咖
咖 20 —— 6 糖
糖 12 —— 15 米
米 x —— 64 茶

又俱歸一斤之價論之，則茶之 3 倍爲咖啡之 4 倍，以下準此．故由倍數之關係，可得次之連鎖式．

茶 3 —— 4 咖
咖 6 —— 20 糖
糖 15 —— 12 米
米 64 —— x 茶

故 $x=\frac{3\times 6\times 15\times 64}{4\times 20\times 12}$
$=18$斤.

〔例 2〕有五數，甲乙二數之比如三與二，乙之四倍等於丙之五倍，丙之三分之一等於丁之五分之一，丁爲 6 時則戊爲七，問如甲爲9則戊爲何數．〔解〕命x爲戊數．

由各數之比之關係所立之連鎖式．

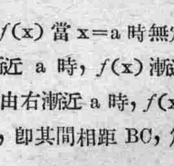
甲 3 —— 2 乙
乙 5 —— 4 丙
丙 $\frac{1}{5}$ —— $\frac{1}{3}$ 丁
丁 6 —— 7 戊
戊 x —— 9 甲

由各數之倍數之關係所立之連鎖式．

甲 2 —— 3 乙
乙 4 —— 5 丙
丙 $\frac{1}{3}$ —— $\frac{1}{5}$ 丁
丁 7 —— 6 戊
戊 9 —— x 甲

$$\therefore x=\frac{2\times 4\times \frac{1}{3}\times 7\times 9}{3\times 5\times \frac{1}{5}\times 6}=9\frac{1}{3}.$$

【連續性】Continuous.〔數〕卽有連續之性質者．如以函數而論，當其自變數由 a 變 b，至經過 ab 中間之一一變值．同時函數亦對應之而得一一之值，卽自變數爲極小之變化時，函數亦生極小之變化，則函數謂之有連續性而曰連續函數．反之如右圖所示，當 x 自稍小於 a 之值變至稍大於 a 之值，函數卽生大變化 BC，則此函數爲無連續性．故函數 $f(x)$ 當 $x=a$ 時無定值，而當 x 由左漸近 a 時，$f(x)$ 漸近一極限 AB，若 x 由右漸近 a 時，$f(x)$ 漸近另一極限 AC，卽其間相距 BC，爲不連續也．



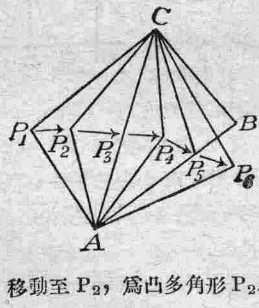
【連續量】Continuous quantity.〔數〕爲與個個之物之不連續量相對之語，如物之長，時間，角度等皆爲連續量．因如物之長寸寸尺尺，互相銜接，非如馬之一

四，羊之一隻分割之則不成物也.

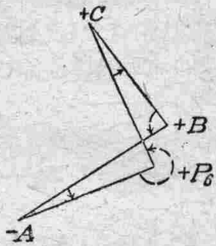
【連續數】Continued numbers.〔算〕〔代〕依次相連之若干整數，謂之連續數．如 6, 7, 8, 9, 如 $n-1$, n, $n+1$, 皆連續數也．但 n 爲任意整數．

【連續函數】Continuous function.〔數〕凡函數之增量與其自變數增量同時趨近於零者，謂之連續函數或連函數．例如有函數 $y=f(x)$, 若與 x 一增量 Δx, y 亦得一增量 Δy, 即 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, 或 $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x)$, 如當 Δx 趨近於零時，Δy 亦爲零，則 $f(x)$ 名爲連續函數，反之爲不連續函數．又見連續性條．

【連續之定則】Law of continuity.〔數〕在幾何學證明「n 邊多角形內角之和等於 $2(n-2)$ 直角」之定理，普通多就凸多角形而證明之．其實不必限於凸多角形，即就凹多角形而論，亦一般眞確．即該定理在凸多角形 P_1ABC 時爲眞，若

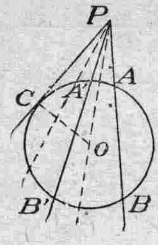


P_1 移動至 P_2，爲凸多角形 P_2ABC 時該定理亦眞，若 P_2 移動至 P_3 而成 P_3ABC(P_3 爲平角，故可視爲四邊形)時，該定理亦眞(即就三角形 ABC 而論，亦眞)．若 P_3 再移動至 P_4，成凹多角形 P_4ABC 時，該定理亦眞，若 P_4 更移動至 P_5，成圖形 P_5ABC，$\angle BAP_5=0$，而就四邊形論之，該定理亦眞．最後 P_5 移動至 P_6，成交截四邊形 P_6ABC，在此情形時，所云爲內角者，與通常之意義有所不合．即 A 角過零後則爲負值，而內角 $\angle AP_6C$ 在初學者視之或生疑義，其實視爲由 P_1, P_2, P_3, P_4,……漸次引續者，當亦無差異也．



此連續之定則，在數學中極爲重要，惟其理甚深，茲僅說明幾何學之一例耳．幾何學的量之連續，可概言之曰，凡就一圖形而證明定理，若其已知條件爲連續，則對於一般圖形亦爲連續．惟若過零，則須加入負值．本例首圖多角形 P_1ABC 之內角之和爲四直角．P_1 漸向右移動，圖形變化，而所云內角之條件不變，故該定理常爲眞．P 超過 AB 邊後，則須注意角之符號及內角意義之擴張，即已知之條件爲連續，則該定理之眞確亦連續也．又舉一例以明連續之理．由圖外一點 P 引圓之二割線 PAB, $PA'B'$ 及切線 PC．則矩形 $PA\cdot PB=PA'\cdot PB'=$ 一定之值．又矩形 $PA\cdot PB=\overline{PC}^2$．此二定理在外觀上視之，似乎不同，而基於連續之定則考之，則全歸同一．因割線

PA′B′ 以 P 爲樞而迴轉之，則 A′ 及 B′漸相近，終至二點合爲一點，而 PA′B′ 即爲圓之切線 PC也.



部

【部分商】Partial quotient.〔算〕〔代〕例如 325 以 5 除之，先得十位之商 60，次得個位之商 5，此 60 與 5 即爲部分商.

$$\begin{array}{r} 5)325(65 \\ \underline{30} \\ 25 \\ \underline{25} \end{array}$$

又如 x^2+3x+2 以 $x+1$ 除之，得商 $x+2$，此商之各項 x 與 2 即爲部分商.

$$\begin{array}{r} x+1)x^2+3x+2(x+2 \\ \underline{x^2+\ x} \\ 2x+2 \\ \underline{2x+2} \end{array}$$

【部分積】Partial product.〔算〕〔代〕例如以 4 乘 32，先以 4 乘其個位之 2 則得 8，次以 4 乘其十位之 3 則得 120，此 8 與 120 爲部分積.又如以 23 乘 467，先以個位之 3 乘之得 1401，次以十位之 2 乘之得 9340，皆部分積也.又以 c 乘 $a+b$ 得 $ac+bc$，ac 與 bc 爲部分積.又以 $x-y$ 乘 x^2+xy+y^2，此被乘數以 x 乘之得 $x^3+x^2y+xy^2$，以 $-y$ 乘之得 $-x^2y-xy^2-y^3$，皆部分積也.

【部分分數】Partial fraction.〔代〕求若干分數其和等於一已知分數，且分子較分母之次數爲低，則是等若干分數謂之部分分數或散分數. (I)設分母爲可分括爲若干一次因子之積，即知此一分數之部分分數有若干，而其各一次因子即爲各分數之分母.若所設之一分數其分母可分括爲 $x-a, x-b, x-c\cdots\cdots n$ 因子，而其分子爲 $F(x)$，但 $F(x)$ 爲不含高於 x 之 $n-1$ 次之任意代數式，則可得部分如次，其 $A, B, C,\cdots\cdots$爲與 x 不相關，故可求得其值.

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots\cdots,$$

兩邊以 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots$乘之，得 $F(x)=A(x-b)(x-c)\cdots\cdots+B(x-a)(x-c)\cdots\cdots+C(x-a)(x-b)\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ 上式爲恆等式，故其兩邊 $x^0, x^1, x^2,\cdots\cdots x^{n-1}$ 之係數全相同，故可由兩邊比較 x 之同次係數，而得 $A, B, C,\cdots\cdots$之各值.又因(1)式爲恆等式，故對於 x 之任何值皆合理.故 $x=a$，則 $F(a)=A(a-b)(a-c)\cdots\cdots$，故 $A=\dfrac{F(a)}{(a-b)(a-c)\cdots}$，同理 $B=\dfrac{F(b)}{(b-a)(b-c)\cdots}$，C 以下均可由同法求得之.〔例 1〕試分 $\dfrac{5x-11}{2x^2+x-6}$ 爲部分分數.其分母爲 $(x+2)(2x-3)$.故使 $\dfrac{5x-11}{2x^2+x-6}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{2x-3}$，消去分母，得 $5x-11=A(2x-3)+B(x+2)$.

比較兩邊 x 之同次係數，$2A+B=5$，$-3A+2B=-11$，因之 $A=3$，$B=-1$，

而 $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}$.

〔例 2〕試分 $\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}$ 爲部分分數.

使 $\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x+b)}$,

故 $mx+n=A(x+b)+B(x-a)$.

令 $x-a=0$，或 $x=a$，則 $A=\frac{ma+n}{a+b}$.

令 $x+b=0$，或 $x=-b$，則 $B=\frac{mb-n}{a+b}$.

故 $\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{ma+n}{x-a}+\frac{mb-n}{x+b}\right)$. (II)分母不能分括爲一次因子者，如〔例 3〕 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$，因其第二項之分母爲二次式，故其分子取低於二次者爲一次式，而以 $Bx+C$ 表之.由是 $x^2+15=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$.

$x=1$ 則 $1+15=8A$，$\therefore A=2$.

代入上式，則 $x^2+15=2(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$，即 $-x^2-4x+5=(Bx+C)(x-1)$，$\therefore Bx+C=-(x+5)$.

故 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{2}{x-1}-\frac{x+5}{x^2+2x+5}$. (III)如上所述，爲部分分數之分母含有相異之因子者，若含有相同之因子則可如次例解之.〔例 4〕分解下式爲部分分數．令原式

$$\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{f(x)}{(x-2)^4}$$

$\therefore 9x^3-24x^2+48x=A(x-2)^4+(x+1)f(x)$. 令 $x=-1$，則 $A=-1$. 代入上式，并移項，$(x+1)f(x)=(x-2)^4+9x^3-24x^2+48x=x^4+x^3+16x+16$，$\therefore f(x)=x^3+16$，又令 $x-2=z$，

則 $\frac{f(x)}{(x-2)^4}=\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{(z+2)^3+16}{z^4}$

$$=\frac{z^3+6z^2+12z+24}{z^4}=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{12}{z^3}+\frac{24}{z^4}=\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

故原式 $=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}$. (IV)有時已知代數式之分子，其所含某文字之次數，比分母爲高者，則先以分母除分子，即可以所得整代數式與分數式之代數和表其原分數，而以所得之分數式視其屬於上述之何種，再按法分析之.

【部分微分】 Partial differential.

〔微〕即偏微分，見該條.

【部分被除數】 Partial dividend.

〔算〕〔代〕於除法中，各階級被除數之部分，謂之部分被除數．例如 6847 以 41 除之，演算如右，其各階級之被除

```
41)6847(167
   41
   ---
   274
   246
   ---
    287
    287
    ---
      0
```

數如 68,274,287 即 6800,2740,287 皆爲部分被除數.

【部分微分法】Partial differentiation.〔微〕即偏微分法,見該條.

【部分積分法1】Partial integration.〔積〕偏積分法,亦稱部分積分法,見該條.

【部分積分法2】Integration by parts.〔積〕應用次之公式將積分式分爲二部以求積分之法也.設 u 及 v 均爲 x 之函數,由微分法知 $d(uv)=udv+vdu$,積分之得 $uv=\int udv+\int vdu$,或 $\int udv=uv-\int vdu$.此爲部分積分法之公式,又可書爲 $\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx$ 之形.〔例一〕求 $\int xe^x dx$ 之結果.設 $u=x$, $dv=e^x dx$,則 $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$.於是 $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+C$.〔例二〕求 $\int \log x dx$ 之結果.設 $u=\log x$, $dv=dx$,則 $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$.於是 $\int \log x dx=x\log x-\int x\frac{dx}{x}=x(\log x-1)+C$.

【部分微分係數】Partial differential coefficient.〔微〕即偏微分係數,見該條.

【部分微分方程式】Partial differential equation.〔微〕即偏微分方程式,見微分方程式條.

閉

【閉面】Closed surface.〔幾〕包圍空間之有限部分之面也,例如球面.

【閉線】Closed line.〔幾〕包圍平面之一部之線也,例如圓,橢圓等.

【閉多角形】Closed polygon.〔幾〕數直線所包圍之直線形也,例如五角形,六角形等.

陪

【陪元】〔代〕見主元條.

陰

【陰歷】Lunar calendar.〔算〕以太陰繞地球一週之日期爲一月者,謂之陰歷,即我國向來所用之歷.太陰繞地球一週須時二十九日十二小時四十四分三秒,故陰歷之月,或爲三十日而大,或爲二十九日而小.而積十二月之久,又與陽歷之一年約差十日二十一小時,故必添置閏月,恆三年而一閏,五年而再閏,十九年而七閏.陰歷每月以朔月爲始,晦月爲終,故望月之盈虛而知其時日,頗爲農家或行旅者所便,而其一年之日數,多少不確,且與各國不同,甚爲不便,故民國以後,已廢止之.

【陰函數】Implicit function.〔數〕函數中自變數與因變數混在一方程式而未經解出者,則其因變數稱爲自變數之陰函數,例如在方程式 $axy+bx+cy+d=0$, y 爲 x 之陰函數.解此方程式,得 $y=-\frac{bx+d}{ax+c}$,則 y 即爲 x 之陽函數.

【陰函數之微分】Differentiation

of implicit functior. 〔微〕方程式 $f(x,y)=0$, 設 $u=f(x,y)$, 則 u 關於 x 之全微分係數為 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. 因 $f(x,y)=0$; 故 $u=0$, $\frac{du}{dx}=0$, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$. 解之得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$. 但 $u=f(x,y)$, 故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0\right)$. 〔例一〕求 $x^2y^4+\sin y=0$ 之 $\frac{dy}{dx}$. 設 $f(x,y)=x^2y^4+\sin y$, 則 $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^4$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4x^2y^3+\cos y$. 故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^4}{4x^2y^3+\cos y}$. 〔例二〕求 $2xy^2-3x^2y=0$ 之 $\frac{dy}{dx}$. 設 $f(x,y)=2xy^2-3x^2y$, 則 $\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2-6xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4xy-3x^2$. 故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y^2-6xy}{4xy-3x^2}$.

頂

【頂】Vertex.〔幾〕(1)角之頂者，角之兩邊之交點也. (2)二等邊三角形底邊之對角，稱為其頂. (3)多角形之角頂者，其多角形各角之頂也. (4)圓錐或角錐之頂者，圓錐或角錐之尖頭也. (5)普通三角形可以任一邊為底，而對其所取之底之角頂，即為三角形之頂或頂點.

【頂角】Vertical angle.〔幾〕(1)三角之頂角者，對其底邊之角也. (2)錐體之頂角者，對其底面之立體角也.

十 二 畫

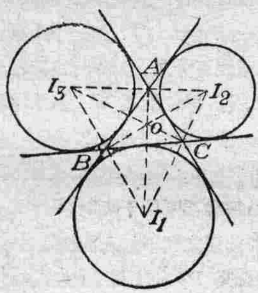
傍

【傍心】Ex-centre.〔幾〕傍切圓或傍切球之中心,稱爲傍心.

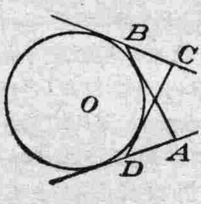
【傍角】Adjacent angles.〔幾〕即鄰角,詳角條.

【傍切球】Excribed sphere 或 Escribed sphere 或 Ex-sphere.〔幾〕切於四面體之一面及他三面之延伸面之球也.

【傍切圓】Excribed circle 或 Escribed circle 或 Ex-circle.〔幾〕切於三角形之一邊及他二邊之延長線之圓也,如下圖.故三角形有三傍切圓.每角之內二



等分線與他二角之外二等分線必交於一



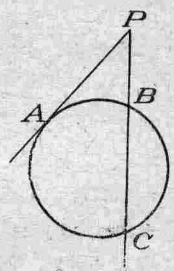
點,其交點即爲三角形之傍心,如左上圖之 I_1, I_2, I_3. 通例傍切圓多就三角形而言,其實不限於三角形,如左下圖之 O 圓,即爲交截四邊形 ABCD 之傍切圓.

【傍面積】Lateral area.〔幾〕即側面積,見該條.

【傍心三角形】Ex-central triangle.〔幾〕連結三角形之內心及二傍心所成之三角形也,如左上圖之 OI_1I_2, OI_1I_3 及 OI_2I_3.

割

【割線】Secant.〔幾〕截曲線於二點或多於二點之直線,謂之該曲線之割線.若割線以其交點之一爲樞而迴轉之,至與第二交點相重合,則割線成爲切線,在初等幾何學,圓之割線截圓周於二點.而由圓外一點 P 引圓之割線 PBC 及切線 PA,則 $\overline{PA}^2 = PB \cdot PC$.



剩

【剩餘】Remainder,〔算〕〔代〕某數或某式以他數或他式除之之殘餘也.例如 $7 \div 3$ 得商 2 其剩餘爲 1. 又 $(3x+5) \div (x+1)$ 得商 3, 其剩餘爲 2.

【剩餘定理】Remainder theorem.〔代〕以 $f(x)$ 表有理整式

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots\cdots + kx + l.$$

將 $f(x)$ 以 $x-\alpha$ 除之至剩餘不含 x 而止。命其商爲 Q，剩餘爲 R，則 $f(x)\equiv Q(x-\alpha)+R$。此爲恆等式，故於式中令 $x=\alpha$ 則 $f(\alpha)\equiv Q\times 0+R=R$。卽 n 次之有理整式以 $x-\alpha$ 除之，其剩餘爲與該式之 x 以 α 代入之之結果相等。是爲剩餘定理。〔例1〕x^3-4x^2+2 以 $x-2$ 除之，其剩餘爲 $2^3-4\cdot 2^2+2=-6$。〔例2〕$2x^4-7x^3+ax+b$ 若能爲 $x-3$ 所整除，則 a 與 b 之關係如何。將此式之 x 以 3 代入之而令其剩餘爲零，卽 $2\cdot 3^4-7\cdot 3^3-3a+b=0$，故 $3a+b=27$，卽所求之關係也。由剩餘定理可立刻證明以下諸式，n 爲正整數。

(I) x^n-y^n 常爲 $x-y$ 所整除。因其剩餘爲 y^n-y^n 或 o 也。

(II) x^n+y^n 能爲 $x+y$ 所整除，當 n 爲奇數時。因如 n 爲奇數，則 $x+y$ 除 x^n+y^n 之剩餘爲 $(-y)^n+y^n=-y^n+y^n=0$ 也。若 n 爲偶數，則其剩餘爲 $(-y)^n+y^n=y^n+y^n=2y^n$，故 $x+y$ 不能除盡 x^n+y^n。

(III) 同理，當 n 爲偶數時，x^n-y^n 能爲 $x+y$ 所整除，而 x^n+y^n 則永不能爲 $x-y$ 所整除。

單

【單比】Simple ratio.〔算〕比之前後項皆祇一數者曰單比，例如 3:7 及 8:5 者爲單比。

【單位】Units.〔算〕凡欲表明某量之多寡，必取其同類一定之量以爲標準，是爲單位。以單位量與某量比較，而定某量含單位量若干倍或若干分，而後某量之大小，可以一覽而明。其表示若干倍或若干分之數值，謂之某量之測度。學術上所用之量甚多，惟吾人恆利用各種量間所有一定關係，僅選少數單位，以爲基本，其他種單位以所選少數單位誘導構成之。此所選少數單位謂之基本單位(Fundamental units)，由基本單位誘導而出之單位，謂之誘導單位(Derived units)。普通所用之基本單位爲長，時，質量三者，以〔L〕.〔T〕.〔M〕.等符號表之。各國所通行者，長以一 Centimeter (我國名公分，一米突之百分之一)爲單位，質量以 gramme (我國亦曰公分，卽攝氏四度時一立方 Centimeter 蒸溜水之重量)爲單位，時以一 Second (秒，卽一平太陽日之八萬六千四百分之一)爲單位，而總名之曰 C. G. S. 單位制，卽取三基本單位原語之第一字母而名之也。

【單利】Simple interest.〔算〕〔代〕單利者，無論經歷若干時期，其本金始終不變，卽前期之利不加入於後期之本者也。命本金爲 P，利率爲 r，期間爲 n，利息爲 I，本利和爲 A，則

$$I=Prn,\qquad A=P(1+rn).$$

【單比例】Simple proportion.〔算〕〔代〕比例之相等符號之雙方皆由單比而成者，稱曰單比例，例如 $5:7=15:21$，$a:b=c:d$。故單比例只有四數，而單比例之題，必有三數爲已知以求一數。例如茶 5 斤價 18 元，問茶 7 斤價若干。

命七斤之價爲 x 元,則 5:7=18:x,

$\therefore x=\frac{18\times 7}{5}=25.2$ 元. 單比例有正比例與反比例二種,見各條.

【單平均】Single average.〔算〕與複平均相對之語,即單純之平均也.例如日曜日正午之溫度爲華氏 88 度,月曜日爲 70 度,火曜日爲 69 度,水曜日爲 68 度,木曜日爲 71 度,金曜日爲 70 度,土曜日爲 67 度,則求此一週間之平均溫度,即爲單平均.

【單名數】Simple number.〔算〕凡用一個單位所表示之數,無論整數小數,皆謂之單名數.例如 12 尺及 4.5 丈等皆單名數也.單名數爲與複名數相對之語,見該條.

【單曲面】Single curved surface.〔幾〕見曲面條.

【單位圓】Unit circle.〔三〕半徑爲 1 之圓也.亦稱三角圓.

【單項式】Simple expression.〔代〕僅由一項所成之式,即一項式也,見該條.

【單合資算】Simple partnership.〔算〕見合資算條.

【單性函數】〔數〕即一價函數,見該條.

【單軌曲線】〔幾〕一稱單進曲線.凡三次以上之曲線,其方程式之兩未知元不能使之分離獨立以便於追跡者,常以一助變數例如 t 代其 y/x,化爲 $x=\phi(t)$,$y=\psi(t)$ 之形,則與 t 以相當之各值,可定兩未知元對應諸值,因而得曲線之追跡.如斯之曲線,稱曰單軌曲線,蝶線即此種曲線也.參閱蝶線條.

【單假設法】Single supposition.〔算〕見假設法條.

【單循環節】Single repetend.〔算〕見循環小數條.

【單葉雙曲線體】Hyperboloid of one sheet.〔幾〕二次曲面以次之方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

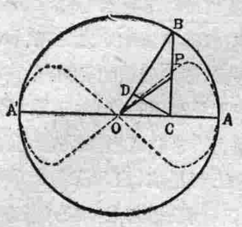
表示之者,謂之單葉雙曲線體.

【單一微分方程式】Single differential equation.〔微〕即普通微分方程式,見微分方程式條.

【單系微分方程式】Linear differential equation.〔微〕凡微分方程式之因變數與其微分係數或微分均爲一次者,謂之單系微分方程式,或名線微分方程式.其解法視其階數而異.詳一階一次微分方程式及高階一次微分方程式條.

喀

【喀西尼卵線】Cassini's oval.〔幾〕由動點 P 至横軸上相距 2a 之二定點之距離之積常爲定數 (m) 時,則 P 點之軌迹爲一卵形線.其方程式爲 $(x^2+y^2+$



$a^2)^2-4a^2x^2=m^4$，或 $\rho^4-2a^2\rho^2\cos 2\theta+a^4-m^4=0$。此曲線爲十七世紀意大利數學家喀西尼氏所作，故名.此曲線之 m 等於 a 時，則爲雙紐線.參閱雙紐線條.

幾

【幾何像】Geometrical image.〔幾〕見平面對稱條.

【幾何學】Geometry.〔幾〕幾何學者，數學之一分科，論物體之形狀大小及位置而研究其眞理者也.初等幾何學（Elementary geometry）論點，直線，圓，及其集合，或由直線或圓所成之面（即平面，圓柱面，圓錐面，球），并與之對應之立體.高等幾何學（Higher geometry）論複雜之線，即如圓錐曲線等.考幾何一學，發明甚古，二千五百年前希臘人退利斯（Thales）時已卓然成科.後至紀元前第三世起，誕生三傑，太古幾何學遂達於極點.三傑者首歐幾里得(Euclid)，著幾何原本，將當時幾何學之知識，重爲整理，加以嚴密之證明，更附以一己所發明者，遂成宏大之著作.迄今學者仍讀其書不衰.歐幾里得沒而阿基米得（Archimedes）及阿坡羅尼阿斯（Apollonius）繼踵以興，咸爲幾何學中之元勳.惟阿基米得之事業，偏於度量的幾何學，阿坡羅尼阿斯則偏於圖形的，兩大分科之基礎，二氏實肇之.自茲以後，此學發達甚緩，直至距今三百年前，法人笛卡兒（Descartes）出，創坐標之法，以代數應用於幾何，研究之法全變，幾何之學，嶄然一新，世所稱爲解析幾何學者是也.然一方解析幾何學進步時，一方又起一分科，其導源之星宿海，遠在阿坡羅尼阿斯，而使之屹然獨立者，厥爲(Desargues)及巴斯噶(Pascal)二人，其所創之法，今日稱爲近世幾何學，仍就幾何學之本體而研究之，一切解析法，擯除不用，雖其說見斥於當時，然日後亦駸駸乎盛矣.至距今七十年前，又有一分科起，將歐幾里得書中關於空間之思想，全行顚覆，斥其所論平行線之公理爲謬妄，是爲非歐幾里得幾何學(Non-Euclidian geometry).故綜前所論，今日幾何學之分科，厥有四種，即一太古人之幾何學，一解析幾何學，一近世幾何學，一非歐幾里得幾何學是也.

【幾何體】Geometical solid.〔幾〕空間之有限部分稱爲幾何體或立體.空間可得而分離，取其一部而考之，即爲幾何體.幾何體與物體異，物體爲實質體，如木石金等，幾何體則僅指物體所占有之空間之一部而言，不計其實質.立體有長，廣，厚，且可分離.

【幾何中項】Geometric mean.〔算〕〔代〕即等比中項，見等比級數條.

【幾何公理】Geometrical axiom.〔幾〕幾何公理者，關於幾何學之公理也，即如次所述：　I.圖形可不變其形狀及大小而變其位置.　II.全相合之量爲相等.　III.過一點在一方向引一直線，而只限於一直線.此公理又可換言之如次所述.一點與一方向可決定一直線.由此公理

可知次之二件. 1.二點可決定一直線(或若二直線公有二點則全相合而爲一直線). 2.相異二直線只能相交於一點. IV. 兩點間之最短距離爲其間之直線. V.凡周角皆相等. VI.過一點可引一直線平行於一已知直線，且只限於一直線等.

【幾何原本】〔幾〕即歐幾里得原理之譯本，詳歐幾里得條.

【幾何級數】Geometrical progression 或 Geometrical series.〔算〕〔代〕即等比級數，見該條.

【幾何圖形】Geometrical figure.〔幾〕點線面體合成之形，稱爲幾何圖形.

【幾何學之三大問題】Three famous problems in geometry.〔幾〕求立方體之倍積，任意角之三等分及等於圓面積之正方，此三者稱爲古代幾何學之三大問題. 是等問題爲初等幾何學即以直線及圓爲範圍之幾何學所不可解. 詳見各條.(1)見立方倍積問題，(2)見角之三等分，(3 見圓積問題條.

循

【循環節】Recurring period 或 Repetend. 〔算〕〔代〕見下條循環小數.

【循環小數】Recurring decimal 或 Repeating decimal 或 Circulating decimal.〔算〕〔代〕無限小數之一種，有以同數字依同順序連續重列者，謂之循環小數.其連續重列之循環部分，謂之循環節.循環小數有純〔正〕雜〔混〕二種，純循環小數者，小數點之右之第一數字即循環節之第一數字，即純由循環節而成者也；雜循環小數者，有一或數數字在小數點與循環節之間者也.單循環節者，只有一數字循環者也，例如0.33….如斯之循環小數則於循環節之一數字上記“·”以表之，例如 $0.\dot{2}$ 與 0.222…. 同，$0.\dot{3}$ 與 0.333….同.複循環節者，例如 0.57235723….，其循環節爲由多於一之數字而成者也，而此等循環小數則於循環節首尾二位之上，各記“·”以表之，如上例則可記爲 $0.\dot{5}72\dot{3}$. 純循環小數之值等於以循環節爲分子，依循環節數字之數列書若干個 9 爲分母之分數，例如 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$.

$$0.\dot{5}72\dot{3}=\frac{5723}{9999},$$

因 $5723=5723.\dot{5}72\dot{3}-.\dot{5}72\dot{3}$

$$=.\dot{5}72\dot{3}(10000-1)=.\dot{5}72\dot{3}\times 9999,$$

$$\therefore 0.\dot{5}72\dot{3}=\frac{5723}{9999}.$$

雜循環小數之值等於取循環節前之小數部分爲分數，與以循環節爲分子，依循環節數字之數列書若干個 9，又依小數點與循環節第一數字間數字之數添加若干 0 爲分母之分數.例如 $2.4\dot{1}\dot{8}=2\frac{4}{10}+\frac{18}{990}=2\frac{23}{55}$，$0.13\dot{0}8\dot{1}=\frac{13}{100}+\frac{81}{99900}=\frac{121}{925}$. 或云雜循環小數化成分數，可自循環小數減不循環數用爲分子，連列 9 字與循環節數字之數相等，添附 0 字，與

不循環部分數字之數相等，用爲分母，而再約之．例如 $0.26\dot{1}3\dot{5}=\dfrac{26135-26}{99900}=\dfrac{967}{3700}$．因 $26135-26=26135.\dot{1}3\dot{5}-26.\dot{1}3\dot{5}=.26\dot{1}3\dot{5}(100000-100)=.26\dot{1}3\dot{5}\times 99900$，

故 $0.26\dot{1}3\dot{5}=\dfrac{26135-26}{99900}$．

其實兩法全同，如本例以第一法解之，則爲 $0.26\dot{1}3\dot{5}=\dfrac{26}{100}+\dfrac{1}{100}\times\dfrac{135}{999}$

$$=\frac{26\times 999+135}{99900}=\frac{26\times(1000-1)+135}{99900}$$

$$=\frac{26000-26+135}{99900}=\frac{26135-26}{99900}\text{也}.$$

同初位循環節者，其循環節同始於小數之第幾位也，例如 $0.3\dot{5}\dot{4}$ 與 $0.7\dot{5}3\dot{4}$．不同初位循環節者，其循環節始於相異之小數位也，例如 $0.1\dot{2}\dot{5}$ 與 $0.\dot{3}5\dot{4}$ 之謂．同末位循環節者，其循環節同終於小數之第幾位也，例如 $0.2\dot{3}5\dot{6}$ 與 $2.35\dot{7}\dot{4}$ 之謂．

〔循環小數之性質〕 (1)任意之小數可以 0 爲循環節而作成循環小數之形，例如 0.35 可書爲 $0.35\dot{0}$ 或 $0.35\dot{0}\dot{0}$ 或 $0.35\dot{0}0\dot{0}$．(2) 循環小數可以其原循環節（數字之數）之二倍或數倍爲新循環節之小數，例如 $0.25\dot{3}\dot{7}$ 可書爲 $0.25\dot{3}73\dot{7}$ 或 $0.25\dot{3}7373\dot{7}$．故凡循環節數字之數不同之數循環小數，可由次之法則，使變成循環節有同數之數字，卽取數循環小數循環節數字之數之最小公倍數，以其數取各循環小數新循環節之數字可也．例如 $0.13\dot{8}$，$7.5\dot{4}\dot{3}$ 及 $0.04\dot{3}5\dot{1}$ 得書爲 $0.13\dot{8}8888\dot{8}$，$7.5\dot{4}3434\dot{3}$ 及 $0.04\dot{3}5435\dot{1}$，因 1,2,3 最小公倍數爲 6 也，是曰通位法．(3)任意之循環小數其小數點與循環節第一數字之間可得爲有任意之若干數字，例如 $0.5\dot{7}$ 可書爲 $0.5\dot{7}\dot{5}$ 或 $0.5\dot{7}5\dot{7}$ 或 $0.5\dot{7}57\dot{5}$．故任意之二循環小數可使成爲同初位并同末位循環節之循環小數．

〔循環小數之運算〕 (1)加法宜先通位使有同初位且同末位之循環節，然後相加，又依循環首位所進於上位之數，而加於循環末位．例如求 $.00\dot{5}\dot{1}+3.2\dot{7}8\dot{5}+.6\dot{9}+.18$ 之和，則如右式．

$$\begin{array}{rcl}
.00\dot{5}\dot{1} & = & .00\dot{5}1515\dot{1}\\
3.2\dot{7}8\dot{5} & = & 3.27\dot{8}5785\dot{7}\\
.6\dot{9} & = & .69\dot{9}9999\dot{9}\\
.18 & = & .18\dot{0}0000\dot{0}\\
\hline
 & & 4.16\dot{3}7300\dot{9}
\end{array}$$

(2)減法先通位而後求其較．若循環首位減數大於被減數，則較之循環末位宜減 1．例求 $2.\dot{3}-.1\dot{8}2\dot{5}$ 之較，則如右式．

$$\begin{array}{rcl}
2.\dot{3} & = & 2.3\dot{3}3\dot{3}\\
.1\dot{8}2\dot{5} & = & .1\dot{8}2\dot{5}\\
\hline
 & & 2.1\dot{5}0\dot{7}
\end{array}$$

(3) 乘法，以整數或有限小數乘循環小數，其異於通常乘法者，宜加以循環首位進位之數，而各部分積，必先通位而後相加．例求 $1.0\dot{3}\dot{7}\times 2.8$ 之積．以 8 乘得之積本爲 8296，因 8 乘循環首位 3 時，有 2 進於上位，故加 2 於末位，而其積改爲 $.82\dot{9}\dot{8}$．以 2 乘得之積爲 $2.0\dot{7}\dot{4}$，與前積通位，得 $2.07\dot{4}\dot{7}$，相加，得所求之積 $2.90\dot{4}\dot{6}$．若乘法之乘數

$$\begin{array}{rl}
 & 1.0\dot{3}\dot{7}\\
 & 2.8\\
\hline
.82\dot{9}\dot{8}\cdots\cdots & .82\dot{9}\dot{8}\\
2.0\dot{7}\dot{4}\cdots\cdots & 2.07\dot{4}\dot{7}\\
\hline
 & 2.90\dot{4}\dot{6}
\end{array}$$

被乘數均為循環小數，則將乘數之循環小數化為分數，以分子乘被乘數而以分母除之.例 $3\dot{8}.5\dot{7}\times.9\dot{2}\dot{7}=3\dot{8}.5\dot{7}\times\frac{51}{55}=35.\dot{7}7286\dot{3}$.

(4) 除法，以整數或有限小數除循環小數,可如通常法除之,實數取盡，即續附循環數再除之,至商成循環數而止.例求 $.03\dot{1}\dot{5}\div2.4$ 之商. 先以2.4除.0315得商數 .013 後，實之數字已盡，乃續書循環數於殘數 3 之右,再除之,逐次如是,除至商數為8時,其殘數又為 3,即知商之循環數為 138，而全商為 $.013\dot{1}3\dot{8}$.

$$
\begin{array}{r}
0.4).03\dot{1}\dot{5}(.013\dot{1}3\dot{8} \\
24 \\
\hline
75 \\
72 \\
\hline
33 \\
24 \\
\hline
91 \\
72 \\
\hline
195 \\
192 \\
\hline
33
\end{array}
$$

若除法之除數被除數,均為循環小數，則將除數之循環小數化為分數，以分母乘被除數而以分子除之.例 $1.2\dot{8}\dot{6}\div.\dot{1}\dot{3}=1.2\dot{8}\dot{6}\div\frac{13}{99}=1.2\dot{8}\dot{6}\times\frac{99}{13}=127.3\dot{9}\dot{9}\div13=127.4\div13=9.8$.

惟循環小數之乘除，實以盡化各數為分數,而以分數行乘除為便.

【循環級數】Recurring series.〔代〕級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 於其連續 r+1 項之間,有 $a_nx^n+px(a_{n-1}x^{n-1})+qx^2(a_{n-2}x^{n-2})+\cdots=0$ 之關係者.謂之 r 次循環級數,而以 $1+px+qx^2+\cdots$ 為級數率或關係式 (Scale of relation).此關係式不僅對於其第 n 項以前之 r 項為合理,即自初項至 r 項以後之諸項,皆適合於此關係也.例如級數 $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$ 為一次循環級數,而其關係式為 $1-2x$.又級數 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots$ 為二次循環級數,而其關係式為 $1-2x+x^2$. 若關係式為已知，并已知所求任意項以前之各項時（以足用為限），則可求得該項.如 $1-px-qx^2-rx^3$ 為級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 之關係，則 $a_nx^n=px\cdot a_{n-1}x^{n-1}+qx^2\cdot a_{n-2}x^{n-2}+rx^3\cdot a_{n-3}x^{n-3}$, 或 $a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}$.即當任一項以前三項之係數為已知，則可求得該項之係數.反之若級數之各項(以足用為限)為已知,則可求得其關係式.例,求級數 $2+5x+13x^2+35x^3+\cdots$ 之關係式.令其關係式為 $1-px-qx^2$, 則 $13-5p-2q=0$ 又 $35-13p-5q=0$, 故 $p=5$ 及 $q=-6$,而所求之關係式為 $1-5x+6x^2$.

〔求已知級數 n 項之和〕級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$，假定其關係式為 $1+px+qx^2$ (此關係式為二次者,若為一次,則 $q=0$, 若二次以上，可由此關係類推之).

$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n.$$

$$\therefore S_n(1+px+qx^2)=a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2+\cdots\cdots+(a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}=a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}qa_nx^{n+2},$$

其間 $(a_2+pa_1+qa_0)x^2+\cdots\cdots\cdots+(a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n$ 諸項皆適合於 $a_kx^k+px(a_{k-1}x^{k-1})+qx^2(a_{k-2}x^{k-2})\equiv0$ 之關係，故悉消去之.（但此關係其 k 之值爲大於 1）. 由是

$S_n=\{a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}\}\div\{1+px+qx^2\}$. 此已知級數如爲收斂級數，則 n 增至極大時，其第 n 項爲極小，故其無窮項之和爲 $S_\infty=\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$. 若將此式依 x 之昇羃展開之，而爲收斂級數者，其展開式中 x^n 之係數，與此循環級數中 x^n 之係數相同. 故此式

$$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$$

稱爲二次循環級數之母函數 (The generating function). 若其母函數可以部分分數表之者，則此循環級數之公項容易求得. 如設其母函數可分解爲部分分數 $\dfrac{A}{1-ax}+\dfrac{B}{1+bx}+\dfrac{C}{(1-cx)^2}$. 則其公項爲 $\{Aa^r+(-1)^rBb^r+(r+1)Cc^r\}x^r$. 在此情形時，可不用前法以求其 n 項之和. 例求循環級數 $1-7x-x^2-43x^3-\cdots$ 之母函數，公項及其 n 項之和. 令其關係式爲 $1-px-qx^2$，則 $-1+7p-q=0$ 及 $-43+p+7q=0$，故 $p=1$，$q=6$，而關係式爲 $1-x-6x^2$. 令 S 表其 n 項之和，則 $(1-x-6x^2)S=1-8x$，

$\therefore S=\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$，此爲其母函數. 將此分解爲部分分數，得 $\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{1}{1-3x}$，故 $(r+1)^{th}$ 或公項爲 $\{(-1)^r2^{r+1}-3^r\}x^r$. 令 $r=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$，則 n 項之和

$=\{2-2^2x+2^3x^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}2^nx^{n-1}\}$
$-(1+3x+3^2x^2+\cdots\cdots+3^{n-1}x^{n-1})$
$=\dfrac{2+(-1)^{n-1}2^{n+1}x^n}{1+2x}-\dfrac{1-3^nx^n}{1-3x}$.

【循環順序】Cyclical order.〔代〕見輪換次序條.

【循環連分數】Periodic continued fraction.〔代〕連分數之諸元依相同之順序連續而下者，名曰循環連分數. 循環連分數亦如算術之循環小數，分純循環雜循環兩種. 例如 $a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{c+}\,\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{c+}\,\dfrac{1}{a+}\cdots\cdots$ 爲純循環連分數，$\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{b+}\cdots\cdots$ 爲雜循環連分數.

插

【插入法】Interpolation.〔代〕設 y 之值因 x 而定，而對於 x 在 a 與 b 間之各值，y 有一定值. 又謂已知 y 之相當於 x 之某若干值之各值. 由是由此諸值可誘得 y 之相當於 x 在 a，b 間之他值之值. 而此法謂之插入法. 插入法不外不定係數法及差法二者. 不定係數法爲設已知 y 之相當於 $x=x_1, x_2,\cdots, x_{r+1}$ 之 $r+1$ 值 $y=y_1, y_2,\cdots, y_{r+1}$，

由不定係數法求得公式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r\cdots$(1). 由此公式可計算y之相當於x之值之值.例如當 $x=2,3,4,5$, 知 $y=5,4,-7,-34$; 當 $x=\frac{5}{2}$, 求y. 設 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. 則得

$$5=a_0+2a_1+4a_2+8a_3.$$
$$4=a_0+3a_1+9a_2+27a_3.$$
$$-7=a_0+4a_1+16a_2+64a_3.$$
$$-34=a_0+5a_1+25a_2+125a_3.$$

解此等方程式,得 $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=4, a_3=-1$. 故 $y=1-2x+4x^2-x^3$. 故當 $x=\frac{5}{2}$, 得 $y=1-5+25-\frac{125}{8}$

$$=\frac{43}{8}.$$ (1)式可化爲

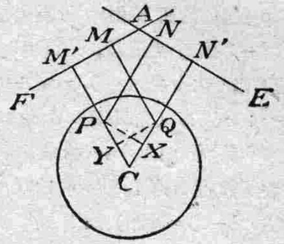
$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})}$$
$$+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})}+\cdots$$
$$+y_{r+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)}.$$

是謂之蘭格倫日 (Lagrange) 之公式. 差法詳該條.

散

【散分數】Partial fraction.〔代〕即部分分數,見該條.

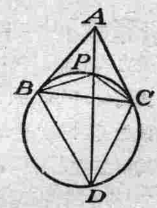
【散夢定理】Salmon's theorem.〔幾〕由圓心至二點之距離之比，等於其各點至他點對於圓之極線之距離之比，是爲散夢之定理. 命 P,Q 爲二點，P 點對於圓之極線爲 AF，Q 點對於圓之極線爲 AE. 作 PN，QM 垂直於 AE 及 AF，又 PX，QY 垂直於 CQ 及 CP.



如此則 $CP\cdot CM'=R^2=CQ\cdot CN'$, 然 P, Y, X, Q 爲共圓點,故 $CP\cdot CY=CQ\cdot CX$, 相減得 $CP\cdot YM'=CQ\cdot XN'$. 故 $CP:CQ=XN':YM'$, 即 $CP:CQ=PN:QM$.

斐

【斐馬點】Fermat's point.〔幾〕於 △ABC 內取一點 P，若 ∑PA 爲極小，則此 P 點謂之斐馬點. 求斐馬點之法如次：於 BC 上 △ABC之外側作等邊三角形BCD. 若P在△ABC內而不在圓BCD上，則 $PA\cdot BC+PB\cdot CD+PC\cdot BD>PA\cdot BC+PD\cdot BC$, 即 $PA+PB+PC>PA+PD$. 而 P 在此圓周上,則不等式變爲等式,由是 P 在圓 BCD 上時,即爲 AD 截圓 BCD 之點時,∑PA 與 PA+PD



同時爲極小。注意，於此點 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$。

【斐馬定理】Fermat's theorem.〔代〕若 p 爲素數，而 N 與 p 互爲素數，則 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數。是爲斐馬定理。

〔證〕因 $(a+b+c+\cdots)^p = a^p+b^p+c^p+\cdots+M(p)$，（見 Hall & Knight 大代數 420 節）命 a, b, c,⋯諸量各等於 1，且設其數爲 N，則 $N^p = N+M(p)$；即 $N(N^{p-1}-1)=M(p)$。然 N 與 p 爲互素數，故 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數。

〔證 2〕因 N 與 p 互爲素數，故諸數

$$N, 2N, 3N, \cdots\cdots, (p-1)N \cdots\cdots (1),$$

以 p 除之，其餘數爲

$$1, 2, 3, \cdots\cdots, p-1 \cdots\cdots (2),$$

雖其次序不必如是。故(1)內諸項之積與(2)內諸項之積，以 p 除之，其餘數相同。即 $\lfloor p-1 \, N^{p-1}$ 與 $\lfloor p-1$ 以 p 除之，其餘數相同；然 $\lfloor p-1$ 與 p 互爲素數，故 $N^{p-1}-1=M(p)$。

普

【普通式】General expression.〔代〕一般之式之謂。例如一未知數之一次普通式爲 $ax+b$，二次普通式爲 ax^2+bx+c。又如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，在某情形時與公式之意同。

【普通項】General term.〔代〕級數中一般之項之謂。例如 $(a+b)^n$ 之二項展開式之普通項爲 $\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r$。

又見公項條。

【普通公理】General axiom.〔數〕推理之基本命題關於普通之量者之謂。普通公理通例如次所述。(1)全量等於其各部分之和，故全量大於其部分。(2)與同量或等量相等之諸量，彼此必等。(3)等量加等量，其和必等。(4)等量減等量，其差必等。(5)不等量加等量，其和不等，大者仍大。(6)不等量減等量，其差不等，大者仍大。(7)等量減不等量，其差不等，所減爲大量者，所餘爲小量，所減爲小量者，所餘爲大量。(8)等量之同倍數之量相等，又等量之同分數之量相等。

【普通微分】Ordinary differential.〔微〕見微分條。

【普通解答】General solution.〔代〕〔微〕與一般解答同，見該條。

【普通算術】Universal arithmetic.〔數〕大數學家牛頓 (Newton) 氏著一書名 Arithmetica Universalis，是爲普通算術 (Generalised Arithmetic) 之起源，即論一般之數之算術，實代數學之別名。然當時之普通算術不如現今代數之發達。

【普通積分】Ordinary integral.〔積〕即不定積分，見積分法條。

【普通擺線】Ordinary cycloid.〔幾〕即普通旋輪線。

【普通二次式】General quadratic expression.〔代〕二次式之諸項完備者，稱爲普通二次式。例如 x 之二次式爲 ax^2+bx+c，x 及 y 之二次式爲

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

【普通旋輪線】Ordinary cycloid. 〔幾〕凡平面上一動圓切於一定直線而旋轉,其圓周上一點之軌迹,謂之普通旋輪線,或省稱旋輪線,詳旋輪線條.

【普通微分係數】Ordinary differential coefficient. 〔微〕見微分係數條.

【普通二次方程式】General quadratic equation. 〔代〕普通二次方程式,爲 $ax^2+bx+c=o$.

【普通微分方程式】Ordinary differential equation. 〔微〕見微分方程式條.

最

【最大値】Greatest value. 〔代〕即 $_nC_r$ 之最大値,見組合條.

【最大項】Greatest term. 〔代〕見二項式定理條.

【最大係數】Greatest coefficient. 〔代〕見二項式定理條.

【最簡分數】Fraction in its lowest term. 〔算〕〔代〕分數之分子分母所有之公約數已約盡者,見已約分數條.

【最大公因數】Greastest common factor. 〔算〕〔代〕即最大公約數或最高公因數,見該條.

【最大公約數】Greatest common measure. 〔算〕在算術中,二以上之數之最大公約數者,即能整除其各數而又爲最大之數也. 例如 12 與 18 之最大公約數爲 6,因 2,3,6 皆爲 12 與 18 之公約數,而以 6 爲最大也. 最大公約數恆略記爲 G. C. M.

〔求最大公約數之第一法〕例如求 36,42 及 84 之最大公約數. 因

$$36=2\times2\times3\times3\quad=2^2\times3^2,$$
$$42=2\times3\times7\quad=2\times3\times7,$$
$$84=2\times2\times3\times7\quad=2^2\times3\times7,$$

故各數皆能爲 2 及 3 所整除,而所要之之最大公約數則 $2\times3=6$. 用次所述之法,則較爲簡便,即先用公約數除諸數,再用公約數除諸商,直至諸商爲互素數而止. 乃

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36,\ 42,\ 84 \\ \hline 3 & 18,\ 21,\ 42 \\ \hline & \ \ 6,\ \ 7,\ 14. \end{array}$$

將各公約數連乘,即得最大公約數,故本例之最大公約數爲 $2\times3=6$. 〔求最大公約數之第二法〕欲求二數之最大公約數,而不易知其公約數時,則可先以小數除大數,得剩餘,再以剩餘除小數,又得剩餘,如是遞以剩餘除法數,直至除盡而止.其最後之法數,即最大公約數. 例如求 651 與 189 之最大公約數. 由式之運算,知 21 即爲所求之最大公約數. 如求多數之最大公約數,則先取其中兩數依上法求得最大公約數,順次遞求,至末後求得之數,即多數之最大公約數.

```
189)651(3
    567
    ---
     84)189(2
        168
        ---
         21)84(4
            84
            --
             0
```

例如求 1085,465,651 之最大公約數. 先求得 465, 651 之 G. C. M.=93, 再求得 93 與 1085 之 G. C. M.=31, 故 31 即爲三數之最大

公約數.〔第三法〕求諸數之最大公約數，除一數外，可不必求其素因數．例如求4095，3029 及 1703 之最大公約數.將4095 分解爲素因數而得 $5\times7\times3\times3\times13$，而 3029 及 1703 二數皆不能爲5，7，3 所整除，然能爲 13 所整除，即 $3029=13\times233$ 及 $1703=13\times131$，而 233 及 131 無論其能分解爲如何之因數，但不能爲 5，7 或 3 所整除，故所要之最大公約數即爲 13。

【最小二乘法】Method of lowest square. 〔數〕爲數學之一分科，以平均誤差爲主要點，於天體測量，測地學等用之.

【最小公分母】Least common denominator.〔算〕〔代〕有相異分母之諸分數，恆可以有同分母之分數表之，而此公分母之數，以最小爲便．最小公分母者，即諸分母之最小公倍數也.例如欲化 $\frac{4}{9}$，$\frac{6}{12}$，$\frac{7}{15}$ 爲同分母，則可先求諸分母之最小公倍數，使爲最小公分母．乃以各分母除之，以各商乘各分子，使爲各新分子，此因分數之分子分母以同數乘之其值不變也．本例之最小公分母爲180，而

$$180\div9=20,\text{故}\frac{4}{9}=\frac{4\times20}{9\times20}=\frac{80}{180},$$

$$180\div12=1\ ,\text{故}\frac{5}{12}=\frac{5\times15}{12\times15}=\frac{75}{180},$$

$$180\div15=12,\text{故}\frac{7}{15}=\frac{7\times12}{15\times12}=\frac{84}{180},$$

故 $\frac{4}{9}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{7}{15}$ 等於 $\frac{80}{180}$，$\frac{75}{180}$，$\frac{84}{180}$.

又如求化 $\frac{x}{a^2b(x+a)}$，$\frac{z}{ab^2(x-a)}$，$\frac{z}{ab(x^2-a^2)}$ 爲同分母之分數．此三分母之最小公倍數爲 $a^2b^2(x^2-a^2)$ 順次以各分母除之，其商爲 $b(x-a)$，$a(x+a)$，ab．各以其商乘其分母分子，因得

$$\frac{x}{a^2b(x+a)}=\frac{x\cdot b(x-a)}{a^2b(x+a)\times b(x-a)}$$

$$=\frac{bx(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)},$$

$$\frac{y}{ab^2(x-a)}=\frac{y\cdot a(x+a)}{ab^2(x-a)\times a(x+a)}$$

$$=\frac{ay(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)},$$

$$\frac{z}{ab(x^2-a^2)}=\frac{z\cdot ab}{ab(x^2-a^2)\times ab}$$

$$=\frac{abz}{a^2b^2(x^2-a^2)}.$$

通分時其公分母並不限於最小公分母，惟以最小公分母爲最簡便耳.

【最小公倍數】Least common multiple.〔算〕在算術中二以上之數之最小公倍數者，即能爲各數所整除而又爲最小之數也；恆略記爲 L. C. M.，例如 60，120，180 等皆爲 3，4，5 之公倍數，而其中以 60 爲最小.故 60 爲 3，4，5 之最小公倍數.

〔求二數之最小公倍數之法〕例如求 475 589 之最小公倍數.先求得 475 與 589 之最大公約數爲 19，而 475 與 589 以

此最大公約數即 19 除之，其商爲 25 與 31，此二商爲互素數．則 475 之各倍數必可含 19 及 25 之因數，又 589 之各倍數必可含 19 及 31 之因數，故 475 及 589 之各公倍數必可含 19，25 及 31 諸因數，故所要之最小公倍數即爲 $19\times25\times31=475\times31=589\times25=14725$。今可換書之爲 $19\times25\times31=589\times(475\div19)=475\times(589\div19)=475\times589\div19$。

由是知二數之最小公倍數，可以其最大公約數除二數之一，而以其商乘他一數得之．或以其最大公約數除二數之積而得之。〔求三以上之數之最小公倍數之法〕先求得二數之最小公倍數，再與第三數求其最小公倍數，如斯逐次求之可也．例如求 45，60，72 之最小公倍數．茲 45 與 60 之最小公倍數爲 180，而 180 與 72 之最小公倍數爲 360，故 45，60，72 之最小公倍數爲 360。〔求最小公倍數之簡法〕諸數容易分解爲素因數者，則可直接求其最小公倍數．例如求 45，60，72 96 之最小公倍數，

$$45=3\times3\times5 \qquad =3^2\times5,$$
$$60=2\times2\times3\times5 \qquad =2^2\times3\times5,$$
$$72=2\times2\times2\times3\times3 \qquad =2^3\times3^2,$$
$$96=2\times2\times2\times2\times2\times3 \qquad =2^5\times3.$$

此四數之因數爲由 2,3,5 之乘冪而成，此四數之公倍數爲含有各數中是等因數之最高冪，而其最小公倍數又爲不含他因數．故所要之最小公倍數爲 $2^5\times3^2\times5=1440$．此運算又可如次所述．即將諸數並書爲一列，以二數以上之公約數除之，其不能約之數與各商並書於第二列，再依

$$\begin{array}{r|l} 3 & 45,\ 60,\ 72,\ 96 \\ \hline 5 & 15,\ 20,\ 24,\ 32 \\ \hline 8 & \cancel{3},\ \cancel{4},\ 24,\ 32 \\ \hline & 3,\ \ 4 \end{array}$$

$$3\times5\times8\times3\times4=1440.$$

前法以公約數除之，直至同列之數爲互素數而止，乃將各公約數與未列各數連乘，即得最小公倍數．於上例第三列消去 3 與 4 者，因 3 爲 24 中所含之因數，4 爲 32 中所含之因數也．於此運算中須以素數爲除數，然爲簡略計，用非素數亦可，如前例之 8 是．

【最低公分母】 Lowest common denominator．〔代〕與最小公分母同，見該條．

【最低公倍數】 Lowest common multiple．〔代〕在代數學中二以上之整式之最低公倍數者，即能爲其各式所整除而又爲最低次之式也．亦略記爲 L．C．M.．例如求 a^3b^2x 及 $a^2b^3x^4$ 之最低公倍數。二式中 a 之最高冪爲 a^3，故二式之任意公倍數不得不含 a^3 之因數．同理二式之任意公倍數不得不含 b^3 及 x^4 之因數，故所要之最低公倍數爲 $a^3b^3x^4$。即求二以上諸一項式之 L．C．M。取其各式中所有文字之最高冪，以爲因子，即得．求多項式之 L．C．M.，可先求得諸多項式之因數，乃準一項式求 L．C．M．法，取其所有因數之最高冪即得．例如求 $a^3+3a^2b+2ab^2$ 及 $a^4+4a^3b+3a^2b^2$ 之 L．C．M．因

$a^3+3a^2b+2ab^2=a(a+b)(a+2b)$,
$a^4+4a^3b+3a^2b^2=a^2(a+b)(a+3b)$
故所求之L.C.M.$=a^2(a+b)(a+2b)(a+3b)$.〔最高公因數與最低公倍數之關係〕設A及B爲任意二整式,其最高公因數爲H,其最低公倍數爲L,而以H除A,B所得之商爲a,b.即$A=H\times a$, $B=H\times b$.因H爲A及B之最高公因數,故a及b不復有公因數,

$$\therefore\quad L=H\times a\times b\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$從(1)L=Ha\times\frac{Hb}{H}=A\times\frac{B}{H}\cdots\cdots(2),$$

$$又\quad L\times H=Ha\times Hb=A\times B\cdots\cdots(3).$$

從(2)知二式之最低公倍數等於以最高公因數除其一式而與他一式相乘之積.從(3)知二式之積等於其最高公因數與最低公倍數之積.

【最近幾何學】Recent geometry.〔數〕幾何學之此分科起於十九世紀之後半期.西歷1873年勒滿氏(Lemoine)在Lyons學術奬勵會開會之席上講演〔三角形之奇異點及其性質〕之題之論文,實爲其濫觴.(此點卽稱爲勒滿點.又發見其三線坐標與三邊a,b,c成比例.)其後德國格來伯(Grebe),法國卡他郎(Catalan),又中經馬秀(Mathieu),叔羅密爾去(Schlomilch),敎授諾依保(Neuberg),布洛喀(Brocard),泰羅(Taylor),愷撒(Casey)等及其他諸氏之研究,遂成此分科.內容爲逆平行線(Antiparallels),等角線(Isogonals),逆點(Inverse point),布洛喀點(Brocard point)及布洛喀橢圓(Brocard ellipse),勒滿點(Lemoine point)及三乘比圓(Trilplicate ratio circle),布洛喀圓(Brocard circle)及第一布洛喀三角形(First Brocard triangle),塔刻圓(Tucker circle),餘弦圓(Cosine circle)及泰羅圓(Taylor circle)等.

【最高公因數】Highest common factor.〔代〕代數學中二以上之整式之最高公因數者,卽能整除其各式而又爲最高次之式也;恆略記爲H.C.F..I.〔一項式之H.C.F.〕例求$12x^2y^3zu$, $6x^3y^4z^2u^2$, $24x^6y^2z^3$之最高公因數.能除盡各式之公因數,x之最高次爲x^2, y之最高次爲y^2,z之最高次爲z,而u則非三次所公有,又12,6,24之最大公約數爲6,故所求之H.C.F.爲$6x^2y^2z$.由是二以上之一項式,其最高公因數卽各式中公有文字之最低冪之積.若諸一項式有數係數者,則將諸數係數求其最大公約數,而爲所求H.C.F.之數係數.II.〔多項式之H.C.F.〕求二多項式之H.C.F.與算術上求最大約數之法同,卽將二式俱以同一某文字之降冪列之,而以其低次式除其高次式,若爲同次,則任以一式除他式,若有剩餘,則以其剩餘爲除式,轉除前之除式,依此法則,逐次轉除之,至無剩餘而止,其最後之除式,卽爲二式之H.C.F..例求x^3+x^2-2及x^3+2x^2-3之最高公因數.用係數除法,演之如次.

故所要之最高公因數爲 $x-1$. 但上述之法，爲僅求多項因數者。若兩多項式中含有一項因數，則宜先取出之，由視察而求其

$$\begin{array}{l} 1+1+0-2)1+2+0-3(1 \\ \qquad\qquad\quad\; 1+1+0-2 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\; 1+0-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+0-1)1+1+0-2(1+1 \\ \qquad\qquad 1+0-1 \\ \hline \qquad\qquad\quad 1+1-2 \\ \qquad\qquad\quad 1+0-1 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 1-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1-1)1+0-1(1+1 \\ \qquad 1-1 \\ \hline \qquad\quad 1-1 \\ \qquad\quad 1-1 \\ \hline \end{array}$$

H. C. F.. 例如求 x^4+x^3-2x 及 $x^5+2x^4-3x^2$ 之 H. C. F.，因

$$x^4+x^3-2x=x(x^3+x^2-2),$$

$$x^5+2x^4-3x^2=x^2(x^3+2x^2-3).$$

故一項因數之 H. C. F. 爲 x，而 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 H. C. F. 前已求得爲 $x-1$，故所求之 H. C. F. 爲 $x(x-1)$.

玆證明上述之定則於次.設 A 及 B 爲兩多項式，各依同文字之降羃列之，又 B 之次數較 A 爲高.以 A 除 B 得商爲 Q，其餘式爲 R，則

$$\begin{array}{l} A)\,B\,(Q \\ \quad\; AQ \\ \hline \quad\;\; R \end{array} \qquad \text{故 } B=AQ+R\cdots\cdots(1), \quad R=B-AQ\cdots\cdots(2).$$

任意代數式之各項能以某式除盡之，卽其全式亦能以某式除盡，故(1)式之 B 能以 A 及 R 之各公因數除盡，(2)式之 R，能以 B 及 A 之各公因數除盡.由是 A 及 B 之各公因數與 A 及 R 之各公因數全然相同，故 A 及 R 之 H. C. F. 卽所求 A 及 B 之 H. C. F.. 今設以 R 除 A，其餘式爲 S，則 R 及 S 之 H. C. F. 可由同法推得與 A 及 R 之 H. C. F. 同，亦卽爲所求 A 及 B 之 H. C. F.. 若依此續除之(卽又以 S 除 R)，則其除式及被除式之 H. C. F.，必與原兩式之 H. C. F. 同.故依此方法除至無餘，則其最後之除式，必爲其最後之被除式之最高公因數，卽爲所求之最高公因數.依除法之性質，餘式之次數必比除式爲低，故如前次第施其除法，則餘式必次第爲低次式，若所得餘式無公有之文字，則兩原式爲無最高公因數.前述之求 H. C. F. 法，其兩式內皆不含一項之公因數，卽祇求多項式之 H. C. F. 也.故其被除式或除式，以任何一項式除之或乘之，其所求之 H. C. F. 不變.例如求 x^5-y^5 與 x^7-y^7 之最高公因數.則如次之運算，故 $x-y$ 爲所求之 H. C. F.

$$\begin{array}{r|r|r|l} x^3 & x^5-y^5 & x^7-y^7 & x^2 \\ & x^5-x^3y^2 & x^7-x^2y^5 & \\ \cline{2-3} xy^2 & x^3y^2-y^5 & y^5)x^2y^5-y^7 & \\ & x^3y^2-xy^4 & & \\ \cline{2-3} & y^4)xy^4-y^5 & x^2-y^2 & x \\ & & x^2-xy & \\ \cline{2-3} & x-y & xy-y^2 & y \\ & & xy-y^2 & \\ \cline{3-3} \end{array}$$

又如求 $2x^2-5x+2$ 及 $x^3+4x^2-4x-16$ 之最高公因數.欲避去分數之不便，故將第二式乘以 2 而行運算如次.

故 $x-2$ 卽爲所求之最高公因數.

又求三式以上之最高公因數，可先求第一第二式之最高公因數，再以所得之式與第三式求其最高公因數，如斯逐次求

$2x$	$2x^2-5x+2$	$x^3+4x^2-4x-16$	
	$2x^2-4x$	2	
-1	$-x+2$	$2x^3+8x^2-8x-32$	x
	$-x+2$	$2x^3-5x^2+2x$	
		$13x^2-10x-32$	
		2	
		$26x^2-20x-64$	13
		$26x^2-65x+26$	
		$45)45x-90$	
		$x-2$	

之可也.例如求x^3+x^2-x+1,x^3+3x^2-x-3 及 x^3+x^2-2 最高公因數.則第一式與第二式之 H. C. F. 爲 x^2-1, x^2-1 與第三式之 H. C. F. 爲 $x-1$, 故 $x-1$ 爲所要之最高公因數.

【最簡交代式】Simplest alternating expression.〔代〕a,b,c 三字母之最簡交代式者,即 $(b-c)(c-a)(a-b)$之謂也.三字母 a,b,c 之諸交代式得爲其最簡交代式所整除,見交代式條.

棄

【棄公生】Cancelation.〔算〕〔代〕卽消約法,見消約法條.

殘

【殘餘】Remainder.〔算〕〔代〕卽剩餘,見該條.

減

【減】To subtract.〔算〕〔代〕由甲數減乙數者,卽求乙數加何數而等於甲數之謂也.或曰由甲數中所含之單位取去乙數中所含之單位,而求其殘爲何數也.甲數稱爲被減數,乙數稱爲減數,其殘曰差.

【減式】Subtraction formula.〔三〕見差角之三角函數條.

【減法】Subtraction.〔算〕〔代〕算術上之減法卽由大數減去小數而求其殘之法,或曰求小數加何數而爲大數之法也.代數學上之減法,範圍較廣,卽求以何數加於已知之第二數而等於已知之第一數之法也.而第一第二二數之大小,可置之不論.

【減號】Sign of subtraction.〔算〕〔代〕減法之符號爲"−",記於被減數之右,其右記減數.例如由 8 減 5 及由 a 減 b,則記爲 8−5 及 a−b,因 8 與 a 爲被減數,5 與 b 爲減數也.

【減數】Subtrahend.〔算〕〔代〕卽減法中所減去之數也.

測

【測度】Measure.〔算〕某量與其同種之單位相比較,爲若干倍或若干分,其表示若干倍或若干分之數值,謂之某量之測度.

【測鎖】Surveyor's chain.〔三〕測量用之鎖由鋼鐵製成,其長有種種.英國製測地用之測鎖長 66 英尺,土木用之測鎖長 100 英尺,法國製之測鎖長 10 米突.鎖之兩端有握手之環,全鎖分爲百節,每節有三小環以相連續,可伸屈自如,而每十節,二十節,三十節等處又附有異形之鐵

片，以便計算.

【測地線】Geodesic(或 Geodetic)line.〔幾〕〔三〕地球（橢圓體）表面上二點間所引之最短線，稱爲測地線．又以廣義言之，則任意立體表面上之任意二點間所引之最短線，稱爲測地線.

【測地學】Geodesy.〔數〕爲測量術之一部分，依三角測量及天文上之觀測以測定地球表面之面積及形狀者也．測地學之創始者爲亞里斯多得 (Aristotle).

【測量術】Surveying.〔數〕爲應用數學之一分科，硏究地面上形狀位置距離面積等之科學也．凡分兩大類，一曰高等測量，亦曰大地測量，用於極廣大之地面，須依曲面之理以爲計算，卽前述之測地學也．一曰普通測量，亦曰平面測量，用之於小區域，可將地面視同平面以爲計算者也.

【測角函數】Goniometrical function.〔三〕卽三角函數，見該條.

無

【無限】Ad-infinitum.〔數〕此爲拉丁語，卽英語之 To an indefinite degree of extent，不加限制之意也.

【無理式】Irrational expression.〔代〕卽含無理項之代數式，例如$\sqrt{(3+x)}+2$，$\sqrt{(a+x)}-\sqrt{(a-x)}$ 等.

【無理根】Irrational root.〔代〕方程式之根之爲無理數者，如解方程式 $x^2-2=0$　$x=\pm\sqrt{2}$，卽無理根也.

【無理量】Irrational quantity.〔代〕與無理數同，見下條.

【無理項】Irrational term.〔代〕卽代數式中含無理數之項.

【無理數】Irrational number.〔代〕無理數者，不能以整數或分數表之之數，卽無限接近二分數之間之數也．以$\frac{m}{n}$及$\frac{m+1}{n}$代表二分數，如當其差無限減小時，恆爲$\frac{m}{n}<I<\frac{m+1}{n}$則 I 爲無理數．例如 $\sqrt{2}$

$$1<\sqrt{2}<2,$$
$$1.4<\sqrt{2}<1.5,$$
$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$
$$1.414<\sqrt{2}<1.415,$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2-1=1,$$
$$1.5-1.4=0.1,$$
$$1.42-1.41=0.01,$$
$$1.415-1.414=0.001,$$
$$1.4143-1.4142=0.0001,$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots.$$

故 $\sqrt{2}$ 爲無理數.

【無窮大】Indefinitely great.〔數〕亦曰無限大．如以數而言，卽其數大至無窮，比任何之數皆大者也，恆以記號∞表之．如$\frac{a}{o}=\infty$，卽以零除任何數等於無窮大也．又$\frac{a}{\infty}=o$，卽以無窮大之數除任何數等於零也.

【無窮小】Indefinitely small.〔數〕亦曰無限小.如以數而言,即其數小至無窮,此任何之數皆小者也,常以 o 爲其極限.如圓之半徑爲無窮小時則成點圓,即其半徑小至無窮,直與無半徑等,則圓即變爲一點耳.

【無限小數】Infinite decimal.〔算〕不能以有限數字表之之數,曰無限小數,循環小數即爲無限小數之一種.又如將 $\sqrt{2}$ 逐漸開方,則亦得無限小數.

【無限級數】Infinite series.〔代〕級數之項數以次連續而不終止者,謂之無限級數.如對數級數,指數級數及三角級數等皆爲無限級數之一種.又無限級數常可由其性質而區別爲收歛級數與發散級數.(1)無限級數之項正負相間,其各項比其前項爲小者,此級數爲收歛級數.(2)無限級數之項俱爲同號且每項大於一定之量(即極小之量亦可)者,則此級數爲發散級數.(3)於無限級數若干定項之後,其各後項與其前項之比,恆小於某定數量,但某定數量爲小於 1 者,則其級數爲收歛級數.(4)無限級數之項皆同號於若干定項之後,其各後項與其前項之比,若大於 1 或等於 1,則其級數爲發散級數.(5)兩無限級數之項皆爲正,其相當項之比常爲有限,則此兩級數俱爲收歛或俱爲發散.(6)無限級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots,$$

若 p 爲正而大於 1,則爲收歛級數,若 p 等於 1 或小於 1 或爲負,則均爲發散級數.(7)二項級數,若 x 小於 1,則爲收歛級數.(8)指數級數不論 x 爲任何值,皆爲收歛級數.(9)對數級數,若 x 爲小於 1 或等於 1 時,爲收歛級數,若 $x=-1$,則爲發散級數.

【無理函數】Irrational function.〔代〕凡函數之變數含根號即爲無理式者,爲代數函數之一種,對有理函數而言.

【無窮小數】Infinite decimal.〔算〕即無限小數.

【無窮級數】Infinite series.〔代〕即無限級數.

【無定方程式】Indeterminate equation.〔代〕即不定方程式,見該條.

【無定長直線】Indefinite straight line.〔幾〕無定長之直線之謂也.例如於二直線相交所生之對頂角相等之定理,二直線之長,不論如何皆適宜,是爲無定長直線.然於以一直線爲一邊,於其上作正方形之問題,一直線爲有限直線之意.即不以有限直線爲一邊,不能於其上作正方形也.

【無限連分數】Non-terminating continued fraction.〔代〕連分數 $a_1+\cfrac{1}{a_2+}\,\cfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 之商 $a_1, a_2, a_3,$ ………之數爲無限者,謂之無限連分數.

【無理方程式】Irrational equation.〔代〕方程式含有未知數之平方根,立方根或其他之方根者,謂之無理方程式,如 $\sqrt{(x+1)}+2=0$, $\sqrt[3]{(x^2+b^2)}+a=x$

等.解無理方程式須先移無理項於一邊,其餘諸項於他邊,乃將兩邊各自乘,乘後如尙有無理之項,再依此法解之,至悉化爲有理項而止.例如求解次式,

$\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$. 移項得

$\sqrt{2x+8}-2=2\sqrt{x+5}$, 兩邊自乘,則

$2x+8-4\sqrt{2x+8}+4=4(x+5)$, 即

$-4\sqrt{2x+8}=2x+8$. 又將兩邊自乘,則

$16(2x+8)=(2x+8)^2$,即 $4x^2-64=0$,

即 $x^2-16=0$, 即 $x^2=16$,

$\therefore \quad x=4$ 或 -4.

【無心圓錐曲線】Non-central conics.〔幾〕圓錐曲線之無中心者之謂,即拋物線是也.

【無理分數之積分法】Integration of irrational fraction.〔積〕見有理化積分法條.

【無理函數之積分法】Integration of irrational function.〔積〕見有理化積分法條.

焦

【焦點】Focus.〔幾〕見橢圓,雙曲線及拋物線各條.

【焦點弦】Focal chord.〔幾〕通過圓錐曲線之焦點之弦也.

【焦點半徑】Focal radius.〔幾〕與焦點距離同,見該條.

【焦點距離】Focal distance.〔幾〕由圓錐曲線上任一點至焦點之距離,謂之焦點距離.橢圓二焦點距離之和爲一常數且等於其長軸.雙曲線二焦點距離之差爲一常數且等於橫軸.

畫

【畫面】Picture plane.〔幾〕在任意位置之立體,由立體上諸點至吾人之眼引諸直線,是等直線稱爲射線.當眼在一定位置,同時所射入之射線,其頂角約在六十度之圓錐內爲限.此射線之圓錐垂直於其軸,截任意平面,此平面即所取之畫面.射線與畫面相交之點,即形成此立體在畫面之圖.

【畫法幾何學】Descriptive geometry.〔幾〕爲幾何學之一分科,通例用二補助平面,以求長廣厚三度諸圖形之圖的解法爲目的.二補助平面稱爲射影面或投影面 (plane of projective),一爲水平,一爲垂直,而此二平面之交線,稱爲地線(Ground line).

留

【留點】Tarry point.〔幾〕從三角形之各角頂至其第一布洛喀三角形之對應邊作垂線,則其三垂線相交於原三角形之外接圓周上之一點,此交點謂之留點.參閱布洛喀三角形條.

發

【發散】Divergency.〔代〕指級數之發散而言,級數之發散者,其級數之首 n 項之和,當 n 無限增大時,其和亦無限增大之謂也.例如等比級數之初項爲 a,公比爲 r,其首 n 項之和爲

$S_n = \frac{r^n a}{r-1} - \frac{a}{r-1}$. 若 n 爲正而大於 1，則當 n 無限增大，$\frac{r^n a}{r-1}$ 亦無限增大，即 S_n 之絕對值可大於任何大之正數.即 r=1，則 $S_n=na$，當 n 無限增大時，S_n 亦得大於任何之值.故在此二情形時,此級數爲發散.

【發級數】Divergent series.〔代〕卽發散級數.

【發散級數】Divergent series.〔代〕見級數及無限級數條.

短

【短徑】Minor axis.〔幾〕過橢圓之中心,與其長徑垂直截於橢圓之直線,稱爲短徑,亦曰短軸或縱軸.

【短軸】Minor axis.〔幾〕卽短徑.

【短除法】Short division.〔算〕對長除法而言，即簡便之除法，如右所演. 此法多用於除數爲一位數時.

求 587÷4

$$4\overline{)587}$$

146……3

答,商146,餘3.

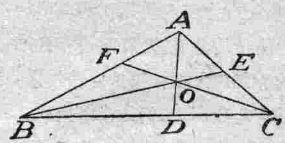
稅

【稅瓦定理】Ceva's theorem.〔幾〕過三角形頂點 A,B,C, 之三截線,交對邊於 D,E,F，如三線爲共點線，則

BD·CE·AF=DC·EA·FB.

此定理爲意人 Ceva 於 1678 年公布於世.設三截線相交於 O，則

BD:DC=△ABD:△ADC,



又 BD:DC=△OBD:△ODC,

∴ BD:DC=△ABO:△CAO.

同理 CE:EA=△BCO:△ABO,

又 AF:FB=△CAO:△BCO.

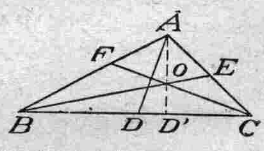
∴ BD·CE·AF:DC·EA·FB

=ABO·BCO·CAO:CAO·ABO·BCO.

即BD·CE·AF=DC·EA·FB.

又其逆定理亦眞,即 D,E,F, 在三角形之邊 BC, CA, AB 上,如 BD·CE·AF=DC·EA·FB, 則 AD,BE,CF 爲共點線.設 BE,CF 相交於 O，若 AD 不過 O 點,而 AO 交 BC 於 D′, 則

BD′·CE·AF=D′C·EA·FB，然原設



BD·CE·AF=DC·EA·FB,

∴BD′:D′C=BD:DC，故 D′ 與 D 相合.

等

【等比】Ratio of equality.〔算〕〔代〕比之前項後項,其值相等者爲等比.例有比 a:b，若 a=b，則 a:b 爲等比，其比之值等於 1.

【等式】Equality.〔代〕等式者,相等之二代數式以符號“=”連結之之謂也.

例如 $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$；或如 $x=5$，則 $3x+7=2x+12$，等．而第一式爲絕對的等式（Absolute equality）即恆等方程式（Identical equation）或恆等式（Identity）；第二式爲規約的等式（Conditional equality）或方程式（Equation）．

【等根】Equal roots．〔代〕即方程式有二或二以上之根爲相等者，見重根條．

【等號】Sign of equality．〔數〕表示二數或二式之相等，常於其二數或二式之間記符號"＝"，是曰等號．例如由 a 減 b 後等於 c，則記爲 $a-b=c$．

【等次式】Homogeneous expression．〔代〕見同次式條．

【等次積】Homogeneous product．〔代〕見同次積條．

【等角形】Isagon 或 Isogon 或 Equiangular figure．〔幾〕多角形之各角相等之稱．

【等角線】Isagonals．〔幾〕某角之等角線者，與其角之二等分線成等角之直線也，亦稱等角共軛線，圖見等角共軛點條．

【等值量】Equivalent quantity．〔幾〕幾何學中相等之量，能以疊合法表示其相等者，稱全等量，否則謂之等值量．例如一矩形與其同高倍底之三角形是也．表全等量之符號爲≡或≌，表等值量之符號爲≑或≂．

【等距項】〔算〕〔代〕級數中在中項前之第幾項與在中項後之第幾項，其與中項相距之項數相等者，名等距項．又三項或三以上諸項，若其每二項中間所夾之項數皆相等，則此三項或三以上諸項，亦謂之等距項．例如自然級數 1,2,3,4,5,6,……中，1,4,7,10 等項或 1,5,9,13 等項是．

【等距離】Equi-distant．〔幾〕有三點 A,B,C，若 A 至 B 之距離與 A 至 C 之距離相等，則 A 爲對於 B,C 成等距離，例如圓心與其圓周上之任意點成等距離，又直線與直線，平面與平面，或點與線，點與面，線與面等，所稱爲等距離者，指其垂直距離相等而言．

【等剩式】Congruence．〔代〕二數 a 及 b 以第三數 c 除之，其所得之剩餘爲同一者，則稱此二數爲對於其模數（Modulus）c 而等剩．其記法爲 $a\equiv b(\mathrm{Mod.}c)$，此式稱爲等剩式．例如 $a=m(c)+r$，$b=m(c)+r$，則記爲 $a\equiv b(\mathrm{Mod.}c)$．又 21 及 1 各以 10 除，其所得之剩餘同爲 1，$\therefore 21\equiv 1(\mathrm{Mod.}10)$．又 $(a+1)^2$ 及 1 以 a 除之，其所得之剩餘同爲 1，$\therefore (a+1)^2\equiv 1(\mathrm{Mod.}a)$．於等剩式 $a\equiv b(\mathrm{Mod.}c)$，其 $a-b$ 必爲 c 之倍數．因 $a=mc+r$，$b=nc+r$，故 $a-b=c(m-n)$，即 $a-b$ 爲有 c 之倍數，即可記爲 $a-b\equiv o(\mathrm{Mod.}c)$．

〔定理〕若 $a_1\equiv b_1(\mathrm{Mod.}x)$ 及 $a_2\equiv b_2(\mathrm{Mod.}x)$，則
$a_1+a_2\equiv b_1+b_2(\mathrm{Mod.}x)$ 及
$a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{Mod.}x)$．假設
$a_1=m_1x+r_1$，$a_2=m_2x+r_2$，及

$b_1=n_1x+r_1$, $b_2=n_2x+r_2$. 故

$$a_1+a_2-(b_1+b_2)=(m_1+m_2-n_1-n_2)x,$$

即 $a_1+a_2\equiv b_1+b_2(\text{Mod}.\,x)$.

又 $a_1a_2=(m_1x+r_1)(m_2x+r_2)$

$$=M(x)+r_1r_2,$$

$$b_1b_2=(n_1x+r_1)(n_2x+r_2)$$

$$=M(x)+r_1r_2,$$

由是 $a_1a_2-b_1b_2=M(x)$,

$\therefore\ a_1a_2\equiv b_1b_2(\text{Mod}.\,x)$.

等剩式與方程式有許多類似之性質，例如等剩式 $Ax^2+Bx+C\equiv O(\text{Mod}.\,p)$，而 A,B,C 爲常數，其對於 x 之三值 a,b,c 爲能適合者，且 $a-b$ 爲 1 或對於 p 而爲素數，其他 $b-c$，$c-a$ 亦然，則此等剩式對於 x 之一切整數值，可以適合，而 A,B,C 皆爲 p 之倍數.此因

$$Aa^2+Ba+C\equiv O(\text{Mod}.\,p),$$

$$Ab^2+Bb+C\equiv O(\text{Mod}.\,p).$$ 由減法

$$(a-b)\{A(a+b)+B\}\equiv O(\text{Mod}.\,p).$$

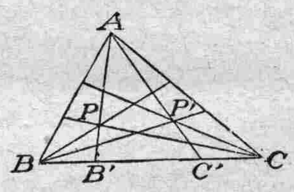
惟因 $a-b$ 爲 1 或對 p 而爲素數，故以 $a-b$ 除上之等剩式，而得 $A(a+b)+B\equiv O(\text{Mod}.\,p)$. 由同法得 $A(a+c)+B\equiv O(\text{Mod}.\,p)$，相減 $A(b-c)\equiv O(\text{Mod}.\,p)$. 惟因 $b-c$ 爲 1 或對於 p 而爲素數，故 $A\equiv O(\text{Mod}.\,p)$. 同法 $B\equiv O(\text{Mod}.\,p)$. 由此法可證得其一般之定理，即等剩式含有 x 之 n 次，其於 x 之整數值而能適合者，其值多於 n，且此等任何兩值之差爲 1，或對模數而爲素數者，則此等剩式對於 x 之各整數值均能適合，而 x 之各次之係數，必爲模數之倍數.

【等剩數】〔算〕二數之差能爲第三數除盡，則此二數對於第三數稱爲等剩數.例如23與17之差即6能爲6或3或2除盡，則23與17對於6或3或2爲等剩數，因以6或3或2除23與17，其剩餘同爲5或2或1也.

【等勢式】Symmetrical expression. 〔代〕即對稱式，與對稱函數同，見對稱條.

【等截線】Isotomic line. 〔幾〕於三角形 ABC 之底邊 BC 上取 B', C' 二點，而 $BB'=CC'$，則直線 AB', AC' 稱爲等截線.

【等截點】Isotomic point. 〔幾〕自各角所引二組之三等截線，同交於二點，此二點稱曰等截點，如圖中之 P, P'.



【等冪面】Equi-potential plane. 〔幾〕與根面同，見該條.

【等冪線】Equi-potential line. 〔幾〕與根軸同，見該條.

【等積形】Equivalent figure. 〔幾〕面積相等之圖形，稱爲等積形，其形狀之異同，則置之不論.

【等十字比】Equi-cross ratio. 〔幾〕二組列點或束線之十字比相等者，稱爲等十字比.

【等切曲線】Equi-tangential curve.

〔幾〕與引弧線同，見該條。

【等比中項】Geometrical mean.〔算〕〔代〕見下條等比級數.

【等比之理】Ex-aequali.〔代〕〔幾〕$a,b,c,d,e,\cdots,l$ 及 $x,y,z,w,\cdots,t$ 二組之數量，若 $a:b=x:y$, $b:c=y:z,\cdots$, 則 $a:l=x:t$, 是爲等比之理.

【等比級數】Geometical progression.〔算〕〔代〕等比級數或幾何級數者，其級數中任一項與其前項之比恆爲一定數者也，常略記爲 G. P., 是等級數普通以 $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$ 表示之，a 名曰首項，r 名曰公比. 而 r 之指數順次增 1，但恆比項數少 1，故若以 l 表其第 n 項，則

$$l=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

二數之間之等比中項(或幾何中項)者，即插入於此二數之間，而是等三數成爲等比級數者也. 如 a, b 爲二數，G 爲其等比中項，則由等比級數之定義，

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G},\quad \therefore G=\pm\sqrt{ab}\cdots\cdots(2).$$

即已知二數量之等比中項，等於其積之平方根. 已知之二數量之間，可插入若干之等比中項，今若插入 m 等比中項，則其級數之項數爲 $m+2=n$，故於方程式 $l=ar^{n-1}$ 中以 $m+2$ 代 n，其結果爲 $l=ar^{m+1}$. 故 $r^{m+1}=\dfrac{l}{a}\cdots\cdots(3)$.

今於 3 與 48 之間插入三等比中項，而求其 r 之值. 則 $r^4=\dfrac{48}{3}=16$，而 $r=\pm2$. 因之此級數爲 3, ±6, 12, ±24, 48.

已知	公　　式
a r n	$l=ar^{n-1}$.
a r s	$l=\dfrac{a+(r-1)s}{r}$.
a n s	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$.
r n s	$l=\dfrac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}$.
a r n	$s=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$.
a r l	$s=\dfrac{rl-a}{r-1}$.
a n l	$s=\dfrac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$.
r n l	$s=\dfrac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}$.
r n l	$a=\dfrac{l}{r^{n-1}}$.
r n s	$a=\dfrac{(r-1)s}{r^n-1}$.
r l s	$a=rl-(r-1)s$.
n l s	$a(s-a)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0$.
a n l	$r=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$.
a n s	$r^n-\dfrac{s}{a}r+\dfrac{s-a}{a}=0$.
a l s	$r=\dfrac{s-a}{s-l}$.
n l s	$r^n-\dfrac{s}{s-l}r^{n-1}+\dfrac{l}{s-l}=0$.
a r l	$n=\dfrac{\log l-\log a}{\log r}+1$.
a r s	$n=\dfrac{\log[a+(r-1)s]-\log a}{\log r}$.
a l s	$n=\dfrac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}+1$.
r l s	$n=\dfrac{\log l-\log[lr-(r-1)s]}{\log r}+1$.

命首項為 a，公比為 r，末項為 l，項數為 n，以 s 表其 n 項之和，則 $s=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$.兩邊以 r 乘之，則 $rs=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$，由第二式減第一式，得 $(r-1)s=a(r^n-1)$，

$$\therefore s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots\cdots(4).$$

若 $r<1$，則上式書為 $s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 為便.又 $l=ar^{n-1}$，$rl=ar^n$，因之(4)式可書為 $s=\frac{rl-a}{r-1}$. 若 r 之絕對值小於 1，當 n 無限增大時，其第 n 項之值 ar^{n-1} 得小於任何之數，以 0 為極限.而 n 項之和 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 可記為 $\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$. 當 n 無限增大時，$\frac{ar^n}{1-r}$ 得小於任何之值，以 0 為極限. 故 n 項之和接近其極限 $\frac{a}{1-r}$. 故等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+\cdots$，若 r 之值小於 1，則其無窮項之和為 $\frac{a}{1-r}$，例如 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 至無窮項，其和為 $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$. 等比級數首項 a，公比 r，末項 l，項數 n，n 項之和 s，任知其三數時，可由左表求其他二數.

【等角束線】 Isagonal pencil.〔幾〕若一由四直線而成之束線，其兩對射線互成等角線，則此束線謂之等角束線.

【等角螺線】 Equiangular spiral.〔幾〕與對數螺線同，見該條.

【等差中項】 Arithmetical mean.〔算〕〔代〕見下條等差級數.

【等差級數】 Arithmetical progression.〔算〕〔代〕等差級數或稱算術級數者，其級數之任一項與其前項之差恆為一定數者也，常略記為 A. P.. 是等級數普通以 a，a+d，a+2d，a+3d，……，表示之，a 名曰首項，d 名曰公差.而各項之 d 之係數順次增 1，但恆比項數少 1，故若以 l 表其第 n 項，則

$$l=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots(1).$$

知等差級數之任意二項，則其級數即能決定，例如第 m 項為 α，第 n 項為 β，則設其首項為 a，公差為 d，故

$$a+(m-1)d=\alpha,\quad a+(n-1)d=\beta,$$

由此二方程式即可由 α 及 β 以求 a 及 d 之值，因而全級數可定. 二數之間之等差中項（或算術中項）者，即插入於此二數之間，而是等三數成為等差級數者也.如 a，b 為二數，A 為其等差中項，則由等差級數之定義，$A-a=b-A$，

$$\therefore A=\frac{1}{2}(a+b)\cdots\cdots\cdots(2).$$

即二數之等差中項，等於其和之半.已知二數量之間可插入若干之等差中項，今若插入 m 等差中項，則其級數之項數為 $m+2=n$，故於方程式 $l=a+(n-1)d$ 中以 m+2 代 n，其結果為

$$l=a+(m+1)d,\ \text{故}\ d=\frac{l-a}{m+1}\cdots(3).$$

今於 3 與 17 之間插入六等差中項，

已知	公　　式
a d n	$l=a+(n-1)d$.
a d s	$l=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$.
a n s	$l=\frac{2s}{n}-a$.
d n s	$l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$.
a d n	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$.
a d l	$s=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}$.
a n l	$s=\frac{n}{2}(l+a)$.
d n l	$s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d]$.
d n l	$a=l-(n-1)d$.
d n s	$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$.
d l s	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(l+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}$.
n l s	$a=\frac{2s}{n}-l$.
a n l	$d=\frac{l-a}{n-1}$.
a n s	$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$.
a l s	$d=\frac{l^2-a^2}{2s-l-a}$.
n l s	$d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}$.
a d l	$n=\frac{l-a}{d}+1$.
a d s	$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2d}$.
a l s	$n=\frac{2s}{l+a}$.
d l s	$n=\frac{2l+d\pm\sqrt{[(2l+d)^2-8ds]}}{2d}$.

而求其 d 之值.則 $\frac{17-3}{6+1}=2$，故此級數爲 3，5，7，9，11，13，15，17.

等差級數之首項爲 a，公差爲 d，末項爲 l，項數爲 n，以 s 表其 n 項之和，則

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l。$$

又從末項逆記之，則得

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a,$$

由是加其相當項，則得

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)\cdots \text{至 n 項} =n(a+l),$$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

又從 (1) 式得

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots(5).$$

從(1)，(4)，(5)三公式，則於 a，d，l，n，s 五數中任知其三，即可求其餘二數，茲立表於左.

【等腰梯形】 Isosceles trapezoid. 〔幾〕梯形不平行之兩邊相等者，稱爲等脚梯形或等腰梯形.詳二等邊梯形條.

【等邊圓柱】 Equilateral cylinder. 〔幾〕以連結正方形相對邊之中點之直線爲軸，旋轉而生之圓柱也.

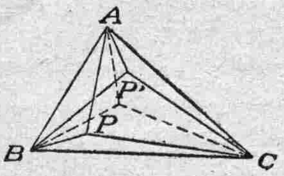
【等邊圓錐】 Equilateral cone. 〔幾〕以等邊三角形之高爲軸，旋轉而生之圓錐也.

【等次對稱式】 Homogeneous symmetric expression. 〔代〕見同次對稱式條.

【等角三角形】Equiangular triangle.〔幾〕三角形之三角相等者之稱,普通稱爲等邊三角形.

【等角共軛線】Isagonals.〔幾〕卽等角線,見該條.

【等角共軛點】Isagonal conjugate points.〔幾〕二組之三等角線各於一點相交,此二交點稱爲等角共軛點.如圖



AP 及 AP′, BP 及 BP′, CP 及 CP′ 各爲 A 角 B 角 C 角之等角線,而 AP′ 與 BP′ 及 CP′ 三者交於 P′ 點, AP 與 BP 及 CP 三者交於 P 點,此 P′ 及 P 二點謂之等角共軛點. 三角形之類似重心與重心成等角共軛點.

【等角雙曲線】Equiangular hyperbola.〔幾〕與等邊雙曲線同,見該條.

【等值方程式】Equivalent equations〔代〕二或二組方程式,適合其未知數之值(卽其方程式之根)全相同者,謂之等值方程式或同解方程式.

【等圓旋輪線】Equicircular cycloid.〔幾〕卽心臟線,見該條.

【等腰三角形】Isosceles triangle.〔幾〕三角形有二邊相等者,謂之等腰三角形或等腳三角形,普通稱爲二等邊三角形.

【等邊三角形】Equilateral triangle.〔幾〕三角形之三邊相等者之稱,卽等角三角形.

【等邊雙曲線】Equilateral hyperbola.〔幾〕雙曲線之橫軸與共軛軸相等者,稱爲等邊雙曲線,亦稱等角雙曲線,或直角雙曲線.

答

【答】Answer.〔數〕數學上運算之結果或解問題之結果稱爲答. 算術上之答常爲數,故普通稱爲答數.

絕

【絕對值】Absolute value.〔代〕某數之大小,去其符號關係而言之,謂之絕對值.例如 -5 之絕對值爲 5, 又 $+4$ 與 -4 之絕對值相等.

【絕對項】Absolute term.〔代〕方程式中不含未知數之項,謂之絕對項,如二次方程式 $ax^2+bx+c=o$ 中, c 爲絕對項.

【絕對常量】〔數〕與絕對常數同.

【絕對常數】Absolute constant.〔數〕卽常數之值爲一定不變者,與任意常數相對待. 例如正方形之對角線與其邊之比卽 $\sqrt{2}$ 及圓周率之 π 卽 3.14159…. 等是也.

【絕對的不等式】Absolute inequality.〔代〕絕對的不等式者,不拘其式中文字之值如何,而恆爲不等式者也.例如 $x^2+1>o$, 不拘 x 之值如何,此式恆爲眞.又如 a 與 b 之值不相等,則不拘 a 與

b 之值如何，常得 $(a-b)^2>0$，故 $a^2+b^2>2ab$。

【絕對曲率中心】Centre of absolute curvature.〔幾〕見空間曲線條.

【絕對的收斂級數】Absolute convergent series.〔代〕級數之各項有異符號時，若悉改爲正符號而仍爲收斂級數者，謂之絕對的收斂級數.其他之收斂級數，謂之不絕對的收斂級數，或規約的收斂級數.絕對的收斂級數爲對於規約的收斂級數而言.規約的收斂級數有時稱爲半收斂級數.例如 $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots\cdots$ 爲絕對的收斂級數，因將其改變爲 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots$ 時，仍爲收斂級數也.又 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$ 爲規約的收斂級數，因將其改變爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$ 之調和級數時，而爲發散級數也.

結

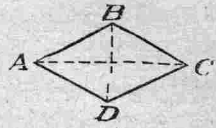
【結合定則】Associative law.〔代〕見基本定則條.

絲

【絲】〔算〕小數名，即 .0001.

菱

【菱形】Rhombus 或 Lozenge 或 Diamond.〔幾〕平行四邊形相鄰之邊相等者，稱爲菱形.故菱形之四邊相等，如圖 ABCD.若菱形有一角爲直角，則菱形成爲正方形.菱形之兩對角線互爲垂直二等分，且二等分其通過之角.菱形之面積等於其二對角線所包矩形之面積之半.



虛

【虛根】Imaginary roots.〔代〕普通二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 $\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$，若 $b^2-4ac<0$，則此方程式之根爲虛根，即含有虛數之根也.若方程式 $f(x)=0$ 之係數皆爲實數，則當有虛根 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 時，亦必有共軛虛根 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.以根 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 代入已知方程式內之 x，用二項式定理展開 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 之乘冪而化簡之，凡不含 $\sqrt{-1}$ 即含 $\sqrt{-1}$ 之偶數乘冪諸項皆爲實數，凡含 $\sqrt{-1}$ 之奇數乘冪諸項皆爲虛數.以 P 表諸實數項之代數和，Q 表諸虛數項之代數和，則得

$$P+Q\sqrt{-1}=0.$$

然因實數與虛數部分決不能互相抵消，故此方程只當 $P=0$ 及 $Q=0$ 始能成立.今又以 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 代入方程式 $f(x)=0$ 內之 x，如前展開且化簡之，諸實數項

皆不變，諸虛數項與前相同，惟改其號，故此時多項式 $f(x)$ 之值為 $P+Q\sqrt{-1}$. 然已證明 $P=0$ 及 $Q=0$，故

$$P-Q\sqrt{-1}=0.$$

即 $x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 適合方程式 $f(x)$，而 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 為其一根．故凡方程式之係數皆為實數時，則其所有虛根之數必為偶數，即虛根常成對也．又由笛卡兒符號之法則，亦可驗虛根之數．例如方程式 $x^8+10x^3+x-4=0$，則其項之符號只有一變遷，故由笛卡兒法則，只有一正根．又以 $-x$ 代 x，則上之方程式變為 $x^8-10x^3-x-4=0$，其項之符號又只有一變遷，故由笛卡兒法則，只有一負根．然此為八次方程式必有八根，故有六虛根，由此亦可見虛根必成對也．惟此驗法，只能用於不完全方程式．

【虛數】Imaginary number 或 Imaginary quantity.〔代〕適合方程式 $i^2=-1$ 之 i 之值常以 $\sqrt{-1}$ 表示之，稱為虛數．虛數為對於通常之實數而言．因正數之平方與負數之平方皆為正，今其數之平方為負，實際上則無此數，亦不能說明其意義，僅以 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ 為一種符號之表示而已．

【虛線】Imaginary line.〔幾〕線之方程式內含虛數者謂之虛線，如方程式 $\sqrt{-}ax+by=0$ 所表之線為虛線．

【虛點】Imaginary point.〔幾〕點之坐標含虛數或複虛數者，謂之虛點．

【虛因數】Imaginary factors.〔代〕二因數如 $x+1+\sqrt{-3}$ 與 $x+1-\sqrt{-3}$ 者，稱曰 x^2+2x+4 之虛因數．

【虛指數】Imaginary index.〔數〕指數之為虛數者．例如於三角法中，

$$\cos A=\frac{e^{A\sqrt{-1}}+e^{-A\sqrt{-1}}}{2},$$

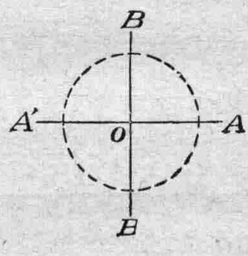
$$\sin A=\frac{e^{A\sqrt{-1}}-e^{-A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

（按此二式為歐拉氏考出）

【虛數率】Modulus.〔代〕見根率條．

象

【象限】Quadrant.〔三〕若通過一點作兩互垂線，則此兩線等分全平面即全圓為四份，其每份即全圓之四分之一，謂之一象限．如圖 AOB 名為第一象限，凡自



0° 至 90° 之角均在其內．BOA′ 名為第二象限，凡自 90° 至 180° 之角均在其內．A′OB′ 名為第三象限，凡自 180° 至 270° 之角均在其內．B′OA 名為第四象限，凡自 270° 至 360° 之角均在其內．餘照此可推得．又自 −0° 至 −90° 之角均在第四象限，自 −90° 至 −180° 之角均在第三象限，餘倣此．

【象限三角形】Quadrantal triangle.

〔三〕見球面三角形條.

費

【費兒巴黑定理】Feuerbach's theorem.〔幾〕即[三角形之九點圓切於其內切圓及三傍切圓」之定理,爲九點圓中最有名者.

超

【超越數】Transcendental number.〔代〕超越數者,如 $\log x$, $\sin x$, a^x 等即不能以含通常代數的運算（即加減乘除及常數指數之乘冪及根）之有限的代數項所表示之數也.

【超越曲線】Transcendental curve.〔幾〕超越曲線者,其變數爲指數或對數或三角函數等之方程式之軌跡也.又見曲線條.

【超越函數】Transcendental function.〔數〕凡非代數的函數如三角函數對數函數指數函數等,謂之超越函數.又見函數條.

【超越方程式】Transcendental equation.〔代〕含超越數之方程式,謂之超越方程式.

距

【距離】Distance.〔算〕〔幾〕〔三〕二點間之距離者,連結其二點間之直線之長也.又由一點至一直線或一平面之距離,爲自其點至直線或平面所引之垂線之長.二平行直線或平面間之距離,爲其二平行直線或平面間共同垂線之長.又球面上二點之距離爲連結其二點之大圓弧.測量術上之距離分垂直距離(高)水平距離及斜距離三種.水平距離又分能就近測得及不能就近測得二種.能就近測得者可用測鎖或卷尺或測竿直接測定之,其測定須極精密,因與其他由推算而知之結果之精粗有關.不能就近測得之距離,須用他補助距離及補助角以測定之,可由三角法或幾何之法則以計算之,或用計算音響之速度之法.

【距離比】Distance-ratio.〔幾〕見非調和比條.

軸

【軸】Axis.〔幾〕軸者,關於某幾何圖形或幾何體之各部分爲對稱位置之直線也.例如對稱軸,角錐或圓錐之軸,角柱或圓柱之軸,球之軸(半圓以其徑爲軸而旋轉之則生球)等.又見坐標軸條.

【軸對稱】Axial symmetry.〔幾〕(1)於一平面上之軸對稱.連結 A,a 二點之直線 Aa 若與他已知直線成垂直二等分,則 A, a 爲關於此已知直線而對稱.A 沿任意之線而運動,若 a 亦沿對應之線而運動,則此二線亦爲對於該已知直線而對稱.此已知之直線稱爲對稱軸.關於軸對稱之線或圖形,其在對稱軸一方之平面上之部分,若以對稱軸爲軸而迴轉之,可與平面上之他部分全相密合.關於對稱軸之圖,若引對應直線,必交於對稱軸且等傾斜,而連結對應點之直線皆平

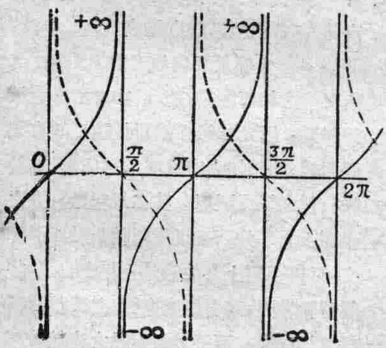
行. (2)於空間之軸對稱. 立體或數立體以垂直於與軸之任意平面截之，若截面爲以其平面與軸之交點爲中心對稱，則此立體謂之關於此軸而對稱. 而與平面內中心對稱同理，軸對稱之立體可以疊置.

週

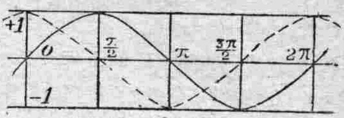
【週期三角函數】Periodic trigonometrial function.〔三〕亦稱週期圓函數.週期函數者,函數之值以一定之週期循環不止者也。諸三角函數皆爲週期函數.如 $\tan\theta=\tan(n\pi+\theta)$ 及 $\cot\theta=\cot(n\pi=\theta)$，故 $\tan\theta$, $\cot\theta$ 當 θ 增 π 時，其值不變. 故 $\tan\theta$, $\cot\theta$ 爲週期三角函數,其週期爲 π。又

$$\sin\theta=\sin(2n\pi+\theta),$$
$$\cos\theta=\cos(2n\pi+\theta),$$
$$\sec\theta=\sec(2n\pi+\theta),$$
$$\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta).$$

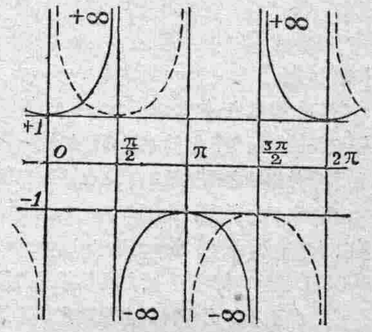
正切及餘切之曲線



正弦及餘弦之曲線



正割及餘割之曲線



故 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ 亦爲週期三角函數，而其週期爲 2π. 今由圖以示明其週期，實線爲表正切正弦正割之曲線,虛線以爲表餘切餘弦餘割之曲線.

【週期收歛級數】Periodic convergent series.〔代〕即中性級數,見該條.

量

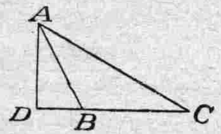
【量】Quantity.〔數〕凡可增減或測度者,可施以數學之運算者,皆謂之量。代數上量與數常作同一意義用之.

鈍

【鈍角】Obtuse angle.〔幾〕大於一直角而小於二直角之角,謂之鈍角.

【鈍三角形】Obtuse triangle.〔幾〕與鈍角三角形同.

【鈍角三角形】Obtuse angled triangle.〔幾〕三角形有一角爲鈍角者,稱爲鈍角三角形,或鈍三角形.鈍角三角形,鈍角對邊之正方形大於其他二邊上之正方形之和,其所大者爲一邊與他邊在其邊上之射影所包矩形之二倍.



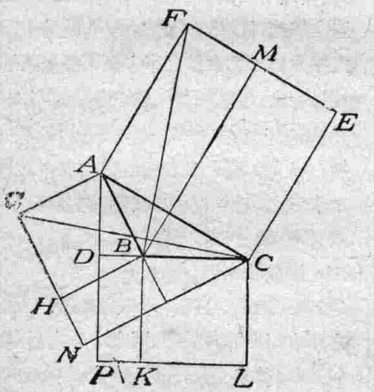
〔第一證〕

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC+BD}^2$

$=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+2BC\cdot BD$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot BD$

〔第二證〕於邊 AC,AB,BC 上作正方形 ACEF, ABGH, BCLK, 且引 BM, CN AP 垂直於邊 AC,AB,BC. 因 $\triangle BAF$, $\triangle GAC$ 二邊之夾角相等,且 $AB=AG$, $AF=AC$, 故兩形全等.



而　$\triangle BAF=\frac{1}{2}\square AM$,

又　$\triangle GAC=\frac{1}{2}\square AN$,

故 $\square AM=\square AN$. 同理, $\square CM=\square CP$.

故 $\overline{AC}^2=\square AN+\square CP$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\square BN+\square BP$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot BD$.

開

【開方法】Evolution 或 Radication 或 Extraction of roots.〔算〕〔代〕求某數或某式之根之法,謂之開方法,即自乘法之逆運算.

【開平方法】Extraction of square root.〔算〕〔代〕求某數或某式之平方根之法也.百以內完全平方數之平方根,可由下表一覽而得.欲求多位數之平方根,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

則須知 (1)凡平方數之位數,爲其平方根位數之二倍或二倍少一. (2)二數和之平方,等於二數平方之和,加二數相乘積之二倍.次述一般開平方之法於下.先將方數分幅,從小數點起,向左向右,皆以二位爲一幅,以首幅所含平方之根爲初商,自首幅減去其平方,接書第二幅,爲次商實.二十倍初商爲廉法,以除次商實,得次商.於廉法加次商爲廉隅共法,以次商乘之,從次商實減去,接書第三幅,爲三商實.二十倍初次商爲廉法,以

除三商實，得三商。於廉法加三商，爲廉隅共法，仍仿前法次第開之。例求 83521 之平方根，演之如下。

商………	2 8 9 ……答	
方數………	8,35,21	
初商平方………	4	
廉法……40	435……二次實	
廉隅共法……48	384	
廉法……560	5121……三次實	
廉隅共法……569	5121	

求代數上一項式之平方根，則可由公式 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ 直接求得，例如 $\sqrt{16a^2b^4}=\sqrt{16}\times\sqrt{a^2}\times\sqrt{b^4}=4ab^2$。但平方根恆有正負二值，故 $\sqrt{16a^2b^4}=\pm4ab^2$。若求多項式之平方根，則其通法如下。如求 $(A+B)^2$ 之平方根，其 A 爲其平方根之若干項，B 爲其餘之若干項，而 A 及 B 爲依一特別文字之降冪(或昇冪)列之，故 A 之各項次數，比B之任一項爲高(或低)。已知 A 之各項，則從 $(A+B)^2$ 減 A^2，其餘式爲 $(2A+B)B$。前所設之特別文字，在此餘式內之最高次(或最低次)之項，必等於 A 之第一項與 B 之第一項之積之二倍。由是欲求之根之次項，其法將已求得之根之平方，從原式中減去之，再以根之第一項之 2 倍，除其餘式之最高次(或最低次)之項，所得之商，即根之次項。平方根第一項爲原式第一項之平方根，此甚易求得，既求得平方根之第一項，乃從上之法則順次求得平方根之次項，因而求其根之全數可也。例如求 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ 之平方根。則先將代數式以 x 之降冪列之，求其第一項 x^6 之平方根，得 x^3 爲所求平方根之第一項。

平方根…x^3-2x^2+x-2

原式…$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$

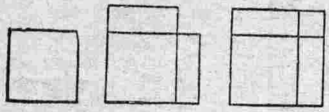
$$(x^3)^2=x^6$$
$$(x^3-2x^2)^2=x^6-4x^5+4x^4$$
$$(x^3-2x^2+x)^2=$$
$$x^6-4x^5+6x^4-4x^3+x^2$$
$$(x^3-2x^2+x-2)^2=$$
$$x^6-4x^6+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$$

從原式減 x^3 之平方 x^6，其餘式之第一項爲 $-4x^5$，以 $2x^3$ 除之，得 $-2x^2$ 爲所求之平方根之第二項。次從原式減 x^3-2x^2 之平方 $x^6-4x^5+4x^4$，其餘式之第一項爲 $2x^4$，以 $2x^3$ 除之，得 x 爲所求之平根之第三項。又從原式減 x^3-2x^2+x 之平方，其餘式之第一項爲 $-4x^3$，以 $2x^3$ 除之，得 -2 爲所求平方根之末項。而從原式減 x^3-2x^2+x-2 之平方，適盡無餘，故 x^3-2x^2+x-2 即爲所求之平方根。又求數之平方根，得用圖解法以明之。例 $25^2=(20+5)^2=20^2+2\times20\times5+5^2=625$。

	625	25
2	4	
	225	
45	225	

20^2 以(1)圖之正方形表示之。$2\times20\times5$ 爲長20廣5之二矩形，添加於(1)圖，則成(2)圖。5^2爲完成(20+5)之正方形而添付於(2)圖之小正方形，如(3)圖。故求 $(20+5)^2=25^2=625$ 之平方根，先去一邊20之正方形，而餘 225。

(1)　　(2)　　(3)



此面積爲由長各 20 之二矩形與以此矩形之廣爲邊之小正方形而成．求此矩形之廣，可以二矩形之長之和 40 除 225，其商爲 5．故此餘面積爲長 20,20,5 三矩形之和，卽 $20\times5+20\times5+5\times5$ 卽 $45\times5=225$ 也．

【開立方法】Extraction of cube root.〔算〕〔代〕求某數或某式之立方根之法也．千以內完全立方數之立方根可記誦下表而直知之．若欲求多位數之立方根，

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

則須知 (1) 凡立方數之位數，爲其立方根位數之三倍，或三倍減二，或三倍減一．(2)二數和之立方，等於二數立方之和，再加第一數平方乘第二數之三倍，及第二數平方乘第一數之三倍．次述開立方之法如下．先將方數分幅，從小數點起，向左向右，皆以三位爲一幅．以首幅所含立方之根爲初商，自首幅減去其立方，接書第二幅，爲次商實．將初商自乘，又三百倍之，爲方廉，以除次商實，得次商．再以次商乘初商，又三十倍之，爲長廉，又將次商自乘爲隅，加於方廉長廉爲廉隅全法，以次商乘之．自次商實減去其積，接書第三幅，爲三商實．將初次商自乘，又三百倍之，仍爲方廉，仍照前法，再求以後各商．例如求 94818.816 之立方根，演算如下．

商……………… 4　5.6….答
立方數……………94,818.816
初商立方…………64
方廉……4800　　30818……………次商實
長廉……　600
廉隅法….5425　　27125….5425×5
方廉……607500　　3693816……三商實
長廉…………8100
廉隅法….615636　　3693816….615636×6
　　　　　　　　　　0

代數上一項式之立方根，則可由公式 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ 直接求得，例如 $\sqrt[3]{27a^6x^3}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{x^3}=3a^2x$．求多項式之立方根，其通法如次所述．試求 $(A+B)^3$ 之立方根，A 爲立方根之若干項，B 爲其餘之若干項，A 及 B 爲依某文字之降羃(或昇羃)列之，故 A 之各項比 B 之各項，其文字之次數高(或低)．若已知 A 之各項而求 B 之各項，則由 $(A+B)^3$ 減 A^3，其餘式爲 $(3A^2+3AB+B^2)B$．在餘式內最高次(或最低次)之項，必等於 3 乘 A 之第一項之平方乘 B 之第一項．由是欲得立方根之次項(卽 B 之最高次式最低次項)，其法將已得若干項立方根之立方，從原式中減去之．再將立方根第一項之平方三倍之，以除其餘式之最高次(或最低次)之項，卽得立方根之次項。乃以 A 之各項乘次項，三倍之，又將次項平方之，

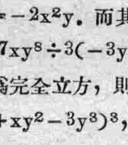
加於 A 之各項平方之三倍，以次項乘此全和，從原式減去之。倘仍有餘式，則再以 A 之各項與次項之和之平方，三倍之，以除餘式而得立方根之三項，再照前法次第求之。例如求

$27+108x+90x^2-80x^3-60x^4+48x^5-8x^6$ 之立方根，立其運算於右方。求立方根用上法者少，施諸實用，倘有簡法如下。例如求

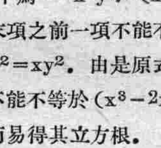
$x^9-6x^8y+15x^7y^2-29x^6y^3+51x^5y^4-60x^4y^5-64x^3y^6-62x^2y^7+27xy^8-27y^9$ 之立方根。若所設之式為完全立方，則其立方根之初項及末項為 $\sqrt[3]{x^9}$ 及 $\sqrt[3]{-27y^9}$，即 x^3 及 $-3y^3$。又立方根之第二項，不能不為 $-6x^8y\div3(x^3)^2=-2x^2y$。而其末項之前一項不能不為 $27xy^8\div3(-3y^3)^2=xy^2$。由是原式若為完全立方，則不能不等於 $(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)^3$，而易得其立方根。

又求數之立方根，可用圖解以明之。例如 $25^3=(20+5)^3=20^3+3\times20^2\times5+3\times20\times5^2+5^3$。$20^3$ 以 (1) 圖之立方體表示之。$3\times20^2\times5$ 為長 20，廣 20，厚 5 之三直角體，以附於 (1) 圖之相鄰三面如 (2) 圖以表示之。$3\times20\times5^2$ 為長 20，

(1)



(2)



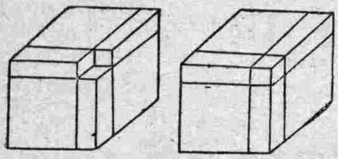
前例求 $27+108x+90x^2-80x^3-60x^4+48x^5-8x^6$ 之立方根之運算

$$
\begin{array}{lll}
 & & 27+108x+90x^2-80x^3-60x^4+48x^5-8x^6\,(\underline{\underline{3+4x-2x^2}} \\
 & & 27 \\
3\times(3)^2=27 & & \quad 108x+90x^2-80x^3 \\
3\times3\times4x= & +36x & \\
(4x)^2= & +16x^2 & \\
 & \overline{27+36x+16x^2} & \quad 108x+144x^2+64x^3 \\
3\times(3+4x)^2 = & 27+72x+48x^2 & \quad -54x^2-144x^3-60x^4+48x^5-8x^6 \\
3\times(3+4x)\times(-2x^2)= & -18x^2-24x^3 & \\
(-2x^2)^2= & +4x^4 & \\
 & \overline{27+72x+30x^2-24x^3+4x^4} & \quad -54x^2-144x^3-60x^4+48x^5-8x^6 \\
 & & \quad 0
\end{array}
$$

此運算與前算術上求立方根之運算，全相一致。

廣 5，厚 5 之三直角體，添附於 (2) 圖則為 (3) 圖。5^2 為完成 $(20+5)^3$ 之立方體補足。(3) 圖之小立方體，故添附於 (3) 圖則成 (4) 圖之完全立方體 $(20+5)^3$。

(3) (4)



故求 $(20+5)^3=25^3=15625$ 之立方根，則先將一邊為 20 之立方體減去之，其所餘之體積為 15625－8000，即 7625. 此餘積之大部分為添附於 (1) 圖之三直角體，即長 20，廣 20 之三直角體．求此直角體之厚，則以此三直角體之三面之和，即 3×20^2 即 1200 除 7625，試商以 6，則 6 等於此三直角體之厚．但如其厚為 6，而餘積 7625 內所含 7 直角體之面，為(1)添附於(1)圖之三直角體之三面 3×20^2，(2) 添附於 (2) 圖之三直角體之三面 $3\times20\times6$，(3)添附於(3)圖之小直角體之面 6^2. 將 (1),(2),(3) 相加，其面積之和為 1596. 以厚 6 乘之應有體積 9576，比餘積 7625 大，故其所求之厚不能為 6. 乃試以 5. 則餘積 7625 內所含 7 直角體之面，為 (1) 3×20^2，(2) $3\times20\times5$，(3) 5^2. 將 (1)，(2)，(3) 相加得 1525，以厚 5 乘之，其積為 7625，却等於餘積．故所求之立方根為 25.

【開高次方】Extraction of higher root.〔算〕〔代〕此屬於代數之範圍，因 $(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\cdots\cdots$ 低於 $n-1$ 次之項，故求代數式 n 方根之法則如次．將代數式依某文字之降冪或昇冪列之，取其第一項之 n 方根，為所求 n 方根之第一項．乃從原式減其已得根若干項之乘方，又以 n 方根第一項之 $n-1$ 方乘之 n 倍，除其餘式之第一項，即得 n 方根之次項．依此法則，次第求之，則 n 方根可得．惟高次方之次數如 6,8,12 等有 2 與 3 之因數者，則可迭開平方立方而得其根．例如

$$\sqrt[6]{15625}=\sqrt{(\sqrt[3]{15625})}=\sqrt{25}=5,$$

$$\sqrt[6]{64a^{12}b^{24}}=\sqrt[3]{(\sqrt{64a^{12}b^{24}})}$$

$$=\sqrt[3]{8a^6b^{12}}=2a^2b^4.$$

【開方之符號】Sign of radication.〔算〕〔代〕即記號 $\sqrt{\ }$ 之稱．如 a 之平方根則僅用 $\sqrt{\ }$，即以 $\sqrt{a}$ 記之(為 $\sqrt[2]{a}$ 之略)，立方根則記為 $\sqrt[3]{a}$，四乘根則記為 $\sqrt[4]{a}$，餘倣此．

閏

【閏月】Intercalary month.〔算〕見陰歷條．

【閏年】Leap year 或 Bissextile.〔算〕見陽歷條．

陽

【陽歷】Solar calendar.〔算〕以地球繞太陽一周為一年者，謂之陽歷．以三百六十五日為一年，其一，三，五，七，八，十，十二各月皆三十一日，四，六，九，十一，各月皆三十日，二月則平年二十八日，閏年二十九日．所以有閏年者，因地球繞太陽一周之時間為 365.2422 日，

即 365 日 5 時 48 分 46 秒，即約 $365\frac{1}{4}$ 日，故一平年爲 365 日，一閏年爲 366 日，而每四年置一閏．蓋羅馬愷撒(Julius Cæsar，西歷紀元前 100 年生，同 44 年死)以前無閏年，至愷撒始以 365 日爲一平年，每四年置一閏年，爲 366 日，是稱曰愷撒歷．然照此法，則每四百年須插入百日．其實 $0.2422\times400=96.88$ 日，即約 97 日．故凡一世紀(百年)之數能爲 4 所整除者則爲閏年，否則爲平年，即每第四年置一閏年，如第一百年第二百年第三百年皆廢閏，第四百年則置一閏年．例如西歷 1700 年，1800 年，1900 年皆非閏年，2000 年則爲閏年．此稱爲格列高里之改正，因係法王格列高里第十三世 (Gregory XIII，1502 年生，1585 年死)所改正也．

【陽函數】Explicit function．〔數〕自變數與函數之關係，顯明表示之者，謂之陽函數，例如 $y=x^2-2x+3$，y 爲 x 之陽函數．

階

【階】Order．〔微〕微分係數或微分之階者，即將函數疊次微分之至若干次所得之微分係數或微分之次數之謂．參閱疊次微分係數條．又微分方程式之階，見微分方程式條．

【階乘】Factorial．〔代〕即逐乘，見該條．

集

【集合】Combinations．〔代〕即組合，見該條．

項

【項】Term．〔代〕代數學中不以加，減，等，不等，…，之記號相連結之單式，謂之項，如 $3a^2b$，ax^2，$4ab$，… 皆爲項．而諸項以此等記號連結之則爲式，如 $3a^2b+4ab=ax^2$，即爲式．

順

【順列】Permutations．〔代〕即排列，見該條．

黃

【黃金分割】Golden section．〔幾〕即外中分割，見該條．

十 三 畫

傾

【傾角】Angle of inclination 或 Inclination. 〔幾〕一直線對於他直線之傾角,為其二直線間之角.一直線對於一平面之傾角,為此直線與其在此平面上之射影所成之角.一平面對於他平面之傾角,為其兩平面間之角,卽在兩平面上垂直於兩平面之交線之兩直線間之角.

【傾斜方程式】Direction equation.〔幾〕見角係數條.

滙

【滙兌】Exchange.〔算〕甲地之人付現款於甲地之銀行或郵局,取得證券寄於乙地之人.乙地人持此證券,可向乙地之銀行或郵局兌換現款,是為匯兌.兩地同在國內,則稱國內匯兌.一在本國,一在外國者,則稱國外匯兌.

【匯票】Bill of exchange 或 Draft.〔算〕由甲地匯款至乙地,憑以收兌之證券也.亦稱匯單.

【匯劃】Exchange.〔算〕甲處匯款於乙,適丙有還甲之款,甲卽令丙轉付乙,劃抵甲款,是為匯劃.

【匯兌率】Course of exchange 或 Rate of exchange.〔算〕某國之貨幣合作他國之貨幣,謂之匯兌率.匯兌率日有變動,故須由兩國貿易金融之狀况,及匯票需要供給之關係,立一法定平價 (Mint per of exchange) 以為標準.

圓

【圓】Circle.〔幾〕圓者,乃為圓周之曲線所包圍之平面,其曲線上各點與所稱為中心之一點為等距離者也.圓之一字,常用作圓周之意.由中心至圓周之直線,謂之圓之半徑.過中心而兩端在圓周上之任意直線,謂之圓之直徑或簡稱徑.圓與直線為平面幾何學之元素,次所示者,為圓之最重要之性質. (1)各徑二等分圓及圓周.而普通等弧必對等弦. (2)圓周等於徑之長,以π卽 3.14159265....又或用近似數 3.1416 乘之.故任意二圓周之比等於其徑或半徑之比. (3)圓之面積,等於半徑之平方以π乘之.故任意二圓之面積之比,等於其半徑之平方或其徑之平方或任二對應線之平方之比. (4)圓之面積,小於外切任意正多邊形之面積,而大於內接任意正多邊形之面積.而圓之面積為外切或內接正多邊形之極限,卽等於正多邊形之邊數無限增加時之面積.圓周與外切及內接多邊形之周間同樣之關係亦成立. (5)圓為同長之圍繞線所有平面形之中最大之面積.於直交軸,任意圓之方程式為

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

若以中心為原點,則圓之方程式為

$$x^2+y^2=r^2.$$

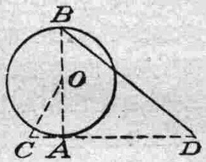
【圓心】Centre of a circle.〔幾〕見中心條及圓條.

【圓周】Circumference.〔幾〕圓周為圓

面積之界線，而由稱爲中心之一點至其線上之距離皆相等者也．任意圓之圓周之長，爲徑卽半徑之二倍以 π 乘之，命圓之半徑爲 r，則圓周之長等於 $2\pi r$．玆述求等於圓周之直線之近似法如次：

〔第一法〕設圓之半徑爲 r．作直線使等於 3r．將 r 七等分之，加其一分於此直線於一端，則得全長爲 $3\frac{1}{7}r$ 之直線．將此直線延長一倍，卽得近似於圓周之直線．此法乃以 π 之近似值爲 $3\frac{1}{7}$ 爲根據者．其理甚明．

〔第二法〕設 O 爲與圓之心，r 爲半徑．於直徑 AOB 之一端 A，作切線 AD．次於 DA 之延線上取一點 C，使 $\angle COA=30°$．



次於 C 之反對方向取一點 D，使 CD=3r．聯 BD．則 BD 爲近似於此半圓之二分之一長之直線．因 $AC=\frac{r}{3}\sqrt{3}$，

故 $AD=3r-\frac{r}{3}\sqrt{3}$．

$$\text{故 } BD=\sqrt{(2r)^2+\left\{\frac{r(9-\sqrt{3})}{3}\right\}^2}$$

$$=r\sqrt{4+\frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}}$$

$$=\frac{r}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}\doteqdot r(3.141533)．$$

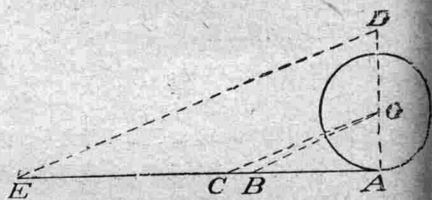
而 $\pi=3.141592\cdots$，故所差甚微．是謂之阿多萊魯之法．

〔第三法〕作等於 $\frac{5}{4}r$ 之直線．以 15r 及 2r 之長之二直線爲二邊作直角三角形，則斜邊等於 $r\sqrt{15^2+2^2}$．取其八分之一加於前直線，則得近似於半圓周之直線，卽爲所求直線之二分之一．此時所得之直線等於 $\left\{\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\sqrt{15^2+2^2}\right\}r$

$$=r\,\frac{10+\sqrt{229}}{8}\doteqdot(3.1415932)r．$$

是謂之巴萊弇之法．

〔第四法〕命 O 爲與圓，其半徑 OA 爲 r．



於 OA 之 A 端作切線 AE．於 AE 上取 B，C 二點，使 $AB=\frac{11}{5}r$，$BC=\frac{2}{5}r$．延長 AO 至 D，使 AD=OB．過 D 作 DE 平行於 OC，交 AE 於 E．則 AE 爲近似於圓周之直線．因 $OB=\frac{r}{5}\sqrt{146}$，

及 $AC=\frac{13}{5}r$．故 $AE=\frac{13r}{25}\sqrt{146}$

$\doteqdot 2(3.141592)r$．

是爲斯貝西脫 (Specht) 之法．

【圓弧】 Circular arc.〔幾〕圓周之一部分，謂之圓弧或簡稱弧．

【圓柱】 Circular cylinder.〔幾〕以矩形之一邊爲軸而迴轉之，則所生之立體，謂

之直圓柱；普通之圓柱爲柱之母曲線爲圓者之謂，而母線垂直於底面時，謂之直圓柱，不然謂之斜圓柱.普通之圓柱之體積，等於底面乘高；而於直圓柱，命底面之半徑爲 r，高爲 h，則其側面積爲 $2\pi rh$，而體積爲 πr^2h.

【圓規】Compasses.〔數〕與兩脚規同，見該條.

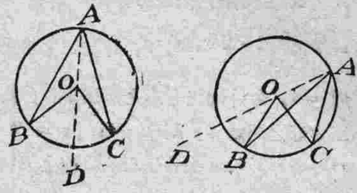
【圓臺】Frustum of cone.〔幾〕圓錐以平行於底之平面截去其上部，其所餘者爲圓臺.截直圓錐所生之圓臺之體積爲 $\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$，但 r，r′ 爲兩底之半徑，h 爲高.又命斜高爲 s，則側面積爲 $\pi s(r+r')$.

【圓錐】Circular cone.〔幾〕直角三角形以直角傍一邊爲軸而旋轉之，則所生之立體，謂之直圓錐；普通之圓錐爲錐之母曲線爲圓者之謂，若高之趾爲底面之圓之中心，則謂之直圓錐，不然則謂之斜圓錐.普通圓錐之體積，等於底面積乘高之 $\frac{1}{3}$.而於直圓錐命底面之半徑爲 r，高爲 h，斜高爲 s，則其體積爲 $\frac{1}{3}\pi r^2h$，側面積爲 πrs.

【圓心角】Angle at the centre 或 Central angle.〔幾〕角之頂在圓心，邊爲兩半徑者，謂之圓心角.

【圓函數】Circular function.〔三〕與三角函數同，見該條.

【圓周角】Angle at the circumference.〔幾〕由圓周上一點引二弦，其所夾之角，謂之圓周角，如圖之 BAC 是也.圓心角等於同弧所跨之圓周角之二倍.即如圖命 BOC 爲圓心角，BAC 爲圓周角，跨同



弧 BC，則 $\angle BOC=2\angle BAC$.〔證〕聯 AO 延長至 D.於 $\triangle AOB$，因 $OA=OB$，$\therefore \angle ABO=\angle BAO$.然外角 $\angle BOD=\angle BAO+\angle ABO$，故 $\angle BOD=2\angle BAO$.同樣 $\angle COD=2\angle CAO$.故於左圖取此二結果之和，於右圖則取其差，得 $\angle BOC=2\angle BAC$。

【圓周率】Ludolphian number.〔幾〕圓周率爲圓周與徑之比，常以 π 表之.求 π 之值之法有二：第一，利用圓內接正多邊形或外切正多邊形之極限之法.第二，用無窮級數，無窮乘積，或無限連分數之法.前者謂之幾何之法，而爲古代所用之法；後者謂之解析法，而爲近世所用之法.由前法以求 π 之值，若正多邊形之邊數愈增，則 π 之值愈精，故甚爲困難；由後法以求 π 之值，取無窮級數等之項數愈多，則其值愈精，故較爲便易.此外圓周之近似法，見圓周條.

茲用幾何法以求 π 之值如次：設已知圓之直徑，計算內接正多邊形及與之相似之外切正多邊形之周，然後計算邊數二倍之內接及外切正多邊形之周，次依同

樣之方法，計算又二倍其邊數之正多邊形之周，逐次如是，算得之值爲圓周之逐次近似值，命與圓之徑爲 1，自其內接及外切正方形始，內接正方形之周

$=4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，外切正方形之周 $=4$. 命外切正方形之周爲 P，內接正方形之周爲 p，則 $P=4$，$p=2\sqrt{2}=2.8284271$. 次外切正八邊形之周爲

$P'=\frac{2Pp}{P+p}=3.3137085$，$p=\sqrt{p\times P'}=3.0614675$. 以此等爲與量，令 $P=3.3137085$，$p=3.0614675$，對於正十六邊形依同式得 $P'=3.1825979$，$p'=3.1214452$. 續用此法，可得次之結果.

邊數	外切正多邊形之周圍	內接正多邊形之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

由此表之末二數知其徑爲 1 之圓周小於 3.1415928 而大於 3.1415926. 而徑爲 1 之圓周等於 π，故 $\pi=3.1415927$，不過爲小數第七位之一單位以內之誤差.

我國求得 π 之值甚早，周時（西歷紀元前 700 年）商高著周髀算經卽以 π 爲 3. 九章算法中所載 π 之值，亦與此同. 當時西方巴比倫，埃及，非尼基諸國學者，亦由古代之法，求得 π 之略值爲 3 或 3.16. 至希臘幾何學者歐幾里得（Euclid）證得 $3<\pi<4$，而 π 之極限略定. 至阿基米得（Archimedes），由圓內接正 96 邊形，求得 $3\frac{1}{7}<\pi<3\frac{10}{71}$，由是遂以 $\frac{22}{7}$ 爲 π 之近似值. 托勒密（Ptolemy）亦求得 $\pi=3\frac{17}{120}$. 羅馬人以 3，4，$3\frac{1}{8}$ 等表 π 之略值. 同時東方印度諸國，以 π 爲 $\frac{49}{16}$，$\frac{62832}{20000}$，$\sqrt{10}$. 其中有學者巴斯略拉（Bhaskara），作內接正 384 邊形，求得 $\pi=\frac{3927}{1250}$，或 $\frac{754}{240}$. 而阿剌伯人亦以 $\frac{22}{7}$，$\frac{62832}{20000}$，及 $\sqrt{10}$ 表 π 之值. 吾國晉時（約西歷 400 年）劉徽，由圓內接正 1536 邊形，求得 $\pi=3.1416$，卽今普通所用之略值. 劉徽後數十年，宋人祖冲之，求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$. 自十三世紀至十五世紀，歐洲以 $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$，$\frac{62832}{20000}$，及 $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{4}$ 表 π 之值. 至十六世紀，布耶塔（Vieta）由內接正

6×2^{16} 邊形，決定 $3.1415926535<\pi<3.1415926537$. 同時又得 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}}$ ……………. 同世紀中，亞多里亞 Adriaen Authonisz 求得

$\pi=\frac{355}{113}$；又由圓內接正 2^{30}(1073741824) 邊形，算得 π 之值至 15 位小數. 此世紀之末，路多路福(Ludolph Van Cenlen 由圓內接 60×2^{33} 邊形，算得 π 之值至 20 位小數；又由內接正 2^{62} 即 4611686018427387904 邊形，算至 32 位小數. 1663 年，日人村松茂清作內接正 2^{15} 邊形，求 π 之 21 位之值. 1700 年，日人關孝和求至 24 位. 1722 年，日人健部賢弘求至 41 位. 至十七世紀中葉，瓦利斯 (Wallis) 證得

$\pi=\frac{2.2.4.4.6.6\ldots\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots}$. 又先瓦利斯數年，富蘭克發見次之公式，即

$\frac{\pi}{4}=1+\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\frac{7^2}{2+}\cdots$. 上所述爲用幾何學之法以求 π 者. 至近世發明無窮級數後，而得求 π 之良好之法. 1671年，發明格列高里 (Gregory) 級數，

即 $\theta=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\frac{1}{7}\tan^7\theta+\cdots\cdots$. 於此式內，命

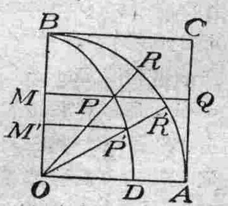
$\theta=\frac{\pi}{4}$，則 $\tan\theta=1$，故得

$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$. 於此式右邊項數取之愈多，則所得之值愈近於 $\frac{\pi}{4}$，而可得 π 之精密之值. 然此級數收斂甚緩，用以求 π 之值，尙覺繁雜. 1706 年，馬慶 (Machin) 用公式

$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{379}$，求得 π 之 100 位精確之值. 1719 年，拉古尼與喜亞夫，依同法求得 π 之 127 位之值，其中有 120 位爲正確. 十九世紀以來，學者用 $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$，$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$，

$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$. 等公式以求 π 之值，或得 152 位，或得 200 位，或得 248 位. 至 1853 年，羅扎夫所託氏求至 440 位；向克 (Shanks) 求至 530 位，是年氏又求至 607 位，晚年氏求得 π 之精密值至 707 位(見附錄二).

【圓積線】Quadratrix.〔幾〕圓積線爲伊利斯(Elis) 之喜庇亞 (Hippias) 所發明. 此曲線可作之如次：設 AOB 爲一象限，圓之半徑 OA，以 O 爲樞由 OA 之位置，以均速度迴轉一直角而至 OB 位置. 同



時一平行於OA之直線由OA之位置，以均速度保持平行之位置進行至B點之切線BC，其與半徑之交點之軌跡，謂之圓積線.命 OR，MQ 爲此二直線於任意時之位置，P爲其曲線上之交點.於是OM：OB＝弧 AR：弧 AB＝∠AOP：∠AOB.命 OR′ 爲半徑之他位置，依同理 OM′：OB＝∠AOP′：∠AOB. ∴OM：OM′＝∠AOP：∠AOP′ ∴∠AOP′：∠P′OP＝OM′：M′M.故若角 AOP 已與時，欲分爲與比，分直線 OM 於M′，使成與比，引直線 M′P′，則 OP′ 分 ∠AOP 爲與比.故此曲線可用以作角之三等分及任意等分.又此曲線可用以解圓積問題.命 OA 爲首線，$OP=r$，$\angle AOP=\theta$，$OA=a$，則 $\theta:\frac{1}{2}\pi=r\sin\theta:a$；故圓積線之極方程式爲 $r=\dfrac{2a\theta}{\pi\sin\theta}$.

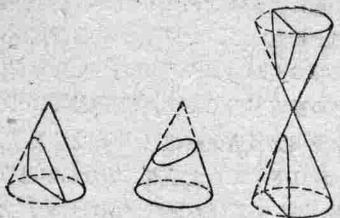
【圓錐面】Conical surface.〔幾〕圓錐之母線所畫之面之謂也.

【圓之方積】Puissance or potency (of a circle.)〔幾〕關於一點圓之方積者，爲由該點至圓之中心之距離之平方與圓之半徑之平方之差之謂也.

【圓之曲率】Curvature of circle.〔微〕見曲率條.

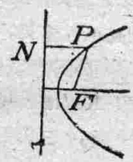
【圓積問題】The quadrature of a circle.〔幾〕卽求等圓之面積之正方形也.此問題爲幾何學三大問題之一，不能僅以界尺及圓規解之.玆用圓積線解之如次：命與圓之直徑之長爲 $d=2r$，其圓周之長爲 n，則 $n=\pi d$.又命其面積爲 A，則 $A=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{2}rn$.故欲求面積等於 A 之正方形之一邊，須求得長等於n之直線.參看圓積線，知弧 BR：弧 BA＝BM：BO.故命 x 表 OM，y 表 PM，則 $\dfrac{y}{x}=\tan BOR=\tan\left(\dfrac{弧BR}{BO}\right)$ $=\tan\left(\dfrac{弧BA}{BO}\cdot\dfrac{BM}{BO}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{r-x}{r}\right)$ $=\cot\dfrac{\pi x}{2r}$.故 $y=x\cot\dfrac{\pi x}{2r}$.是爲圓積線之方程式.若 x 近於 o，則得 AG 之長，卽 $AG=\lim\limits_{x=0}x\cot\dfrac{\pi x}{2r}=\lim\limits_{x=0}\dfrac{x}{\sin\dfrac{\pi x}{2r}}=\dfrac{2r}{\pi}$.故 $\pi=\dfrac{2r}{AG}$.然 $n=2\pi r$，故 $\pi=\dfrac{n}{2r}$.故 $AG:2r=2r:n$.故若畫得圓積線，換言之，若許用此曲線，則可知 AG，求 AG 與 2r 卽 2AB 之比例第三項，是卽n也.

【圓錐曲線】Conic 或 Conic section.〔幾〕圓錐曲線，爲以平面截圓錐時截口之曲線之謂，有拋物線，橢圓，雙曲線三種.若截圓錐之平面平行於母線，則其截口爲拋物線，如圖(i)是也；若截面與圓錐底面間之角小於圓錐之底角時，則其截口爲橢圓，如圖(ii)是也；若截面與底面間之角，大於圓錐之底角時，則其截口爲雙曲線，如圖(iii)是也.又若截面平行於圓錐之底則截口爲圓，卽橢圓之特別之例；

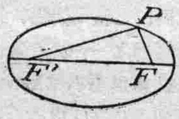


(i)　(ii)　(iii)

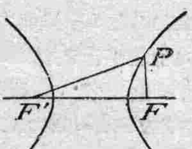
又若截面過圓錐之頂點，則或爲一直線，或爲一點，或爲相交二直線，是爲拋物線，橢圓，雙曲線之特別之例．圓錐曲線，又有與以平面之定義者．即拋物線爲由名爲焦點之一定點F及名爲準線之一定直線N等距離點之軌跡之謂；



橢圓爲由名爲焦點之二定點F,F′之距離之和爲一定之點之軌跡之謂；



雙曲線爲由名爲焦點之二定點F，F′之距離之差爲一定之點之軌跡．



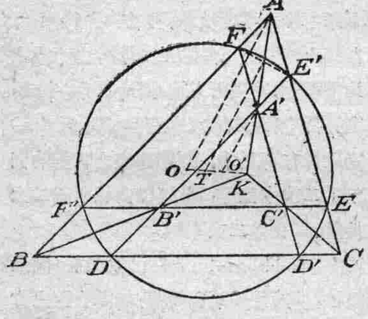
又由名爲焦點之一定點之距離與由名爲準線之一定直線之距離之比爲等於1之軌跡，謂之拋物線；小於1之點之軌跡，謂之橢圓；大於1之點之軌跡，謂之雙曲線．圓錐曲線爲紀元前四世紀柏拉圖之門生孟尼哥馬(Meneachimus)所發明．此發明蓋由於解「角之三等分」及「立方體之倍積」之二著名問題而起，蓋此二題皆須藉圓錐曲線以解之也．歐幾里得(Euclid，約紀元前300年)有關於圓錐曲線之著作四卷，今已不存．阿基米得(Archimedes，紀元前287－212)亦有關於圓錐曲線之著作，且證得拋物線截部之面積，等於其弦與弦端二切線所成三角形面積之三分之二．其後阿坡羅尼阿斯(Apollonius)著圓錐曲線八卷，證得可由同一圓錐得之，只須改變截面對於圓錐基線之傾角而已．氏又發見橢圓及雙曲線之焦點，且定拋物線(parabola)橢圓(ellipse)雙曲線(hyperbola)諸名詞．至帕帕斯(Pappus約300年)發見拋物線之焦點，且視圓錐曲線爲平面軌跡，發見次之特性，即曲線上任一點至焦點及至準線之距離之比爲常數．其後刻卜勒(Kepler)，牛頓，刻特雷(Quetelet)，但得林(Dandelin)諸氏皆有所貢獻．圓錐曲線之代數的表示爲二次方程式，故圓錐曲線亦稱二次曲線．任何二次方程式 $ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=o$ 之軌跡爲一圓錐曲線，惟其最簡單者如次，即拋物線之方程式爲 $y=4dx^2$，橢圓之方式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，雙曲線之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，倘見各條．

【圓錐曲線法】Conic sections.〔數〕

圓錐曲線法，爲論圓錐曲線之一分科，有幾何學的與解析的二種。幾何圓錐曲線法，爲以幾何學以論圓錐曲線者；而解析圓錐曲線法，爲以代數式解析的論之者，即解析幾何學是也。

塔

【塔刻圓屬】Tucker's family of circles.〔幾〕K 爲三角形 ABC 之類似重心；於 KA，KB，KC 上取 A′，B′，C′ 令 A′B′，B′C′，C′A′ 各平行於 AB，BC，CA，將三角形 A′B′C′ 各邊雙方引長之，與三角形 ABC 之邊交於 D，D′，E，E′，F，F′ 六點，此六點在一圓周上。且其中心爲聯結二三角形 ABC，A′B′C′ 之重心之直線之中點。〔證〕因 AFA′E′ 爲



梯形，是以 AA′ 二等分 FE′。然 AA′ 爲類似中線，故 FE′ 逆平行於 BC，因之逆平行於 F′E。故 E，E′，F，F′ 爲共圓點。同様 D，D′，E，E′；D，D′，F，F′ 亦爲共圓點。故由大衞斯定理，D，D′，E，E′，F′，F 爲共圓點。次命 O，O′ 各爲三角形 ABC，A′B′C′ 之外心，因 K 爲兩三角形之相似中心。故知 KO′O 爲一直線，而 AO⊥FE′，O′A′∥OA，故過 AA′ 之中點而平行 OA 之直線，即於 FE′ 之中點與之垂直之直線過 OO′ 之中點 T。同様 DF′，ED′ 之垂直二等分線亦過 T 點。由是 T 爲圓心。變三角形 A′B′C′ 之位置，可得一羣之圓，而謂之塔刻圓屬。三角形之外接圓，三乘比圓，餘弦圓，皆爲塔刻圓屬之一。當 A′，B′，C′，各與 A，B，C 一致時，則爲三角形之外接圓。當 A′，B′，C′ 皆與類似重心 K 一致時，則爲三乘比圓。當 AA′ 之中點與 K 一致時，則逆平行線 FE′，DF′，ED′ 皆過 K，而此塔刻圓爲餘弦圓。

又有謂 KA′:KA＝KB′:KB＝KC′:KC＝常數時，三角形 A′B′C′ 之各邊與 △ABC 之各邊相交之六點在一圓周上，此圓謂之塔刻圓屬。如是則泰羅圓亦塔刻圓屬之一，於泰羅圓已證 YZ′，ZX′，XY′ 各與 BC，CA，AB 平行。延長此三直線交於 A′，B′，C′。因 BXB′Z 爲平行四邊形，故 BB′ 二等分 Z′X，而 Z′X 爲 CA 之逆平行線，故 BB′ 爲類似中線，且過 K 點。同様 AA′ 及 CC′ 亦過 K 點。由是 KA′:KA＝KB′:KB＝KC′:KC，由三角法可知此比等於 $1-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$，而爲一常數。故泰羅圓亦爲塔刻圓屬之一。

微

【微】〔算〕微爲小數名，即 $\cdot 000001$，十纖爲微，十微爲忽。

【微分】Differential.〔微〕變數之極微的增量也。設 $y=f(x)$ 之關於 x 之微分係數爲 $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$，則 $f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，故 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\epsilon$。以 Δx 乘此式之兩邊，得 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\epsilon\Delta x$。$\epsilon$ 雖不得知其究爲何數，然由性質上，知 $\lim_{\Delta x=0}\epsilon=0$。故若以 dx 表 Δx（x之增量）小至於接近於極限零時之值，以 dy 表對應於此值之 Δy（y 之增量）之值，則上式變爲 $dy=f'(x)dx$，或 $dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$。此 dx 謂之 x 之微分，dy 謂之 y 之微分，而 $f'(x)$ 或 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 係表 y 之關於 x 之微分係數。由此可知 y 之關於 x 之微分係數，即等於 y 之微分與 x 之微分之比。（參閱微分係數條）。微分有普通微分與偏微分之別。普通微分爲函數僅具一自變數時之微分，即如上述之微分，亦曰常微分，或直稱微分，乃對於偏微分而言。偏微分詳該條。

【微商】Differential quotient.〔微〕即微分係數，見該條。

【微分法】Differentiation.〔微〕自所設函數求其關於自變數之微分係數之法，謂之微分法。例如 $y=f(x)$ 之關於 x 之微分係數爲 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，微分法者，即求此結果之運算也。微分法之普通法則，名四步法則，見四步法則條。此外有全微分法，偏微分法，及疊次微分法等，參閱全微分係數，偏微分係數，及疊次微分係數各條。

【微分學】Differential calculus.〔數〕微分學，爲數學之一分科，而依微分法由一定之函數誘求名爲其微分之他函數而應用之以說明代數學，幾何學，力學者也。發明微分學者爲來布尼茲(Leibnitz)及牛頓（Newton）。

【微係數】〔微〕即微分係數，見該條。

【微積分】Calculus.〔數〕爲微分學與積分學之總稱。

【微分係數】Differential coefficient.〔微〕函數增量與自變數增量相比，當自變數增量變化而接近於零時，其比之極限值，謂之函數關於自變數之微分係數。例如函數 $y=f(x)$，若與 x 任一增量 Δx，y 亦與之相應得一增量 Δy，則函數之新值爲 $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$，即 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$。以自變數之增量 Δx 除之，得 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。當 Δx 接近於極限零時，此比之極限值即稱爲 y 關於 x 之微分係數，而以符號記之如次：$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$。微分係數一稱微係數，

微商，變函數，或誘導函數．求微分係數之一般法則，詳四步法則條．關於微分係數之重要定理如次：(1)常數之微分係數等於零．(2)變數之微分係數等於一．(3)多項式之微分係數，等於其各項之微分係數之代數和．(4)常數與函數之積之微分係數，等於其函數之微分係數與常數之積．(5)二函數之積之微分係數，等於其第二函數之微分係數與第一函數之積加第一函數之微分係數與第二函數之積．(6)函數之 n 乘冪之微分係數，等於以函數之 (n－1) 乘冪與 n 之積乘函數之微分係數．(7)變數之 n 乘冪之微分係數，等於變數之 (n－1) 乘冪與 n 之積．(8)二函數之商之微分係數，等於其分子之微分係數與分母之積減分母之微分係數與分子之積，而以分母之平方除之．(9)常數除函數之微分係數，等於其函數之微分係數而以常數除之．以上諸定理之公式及對數函數，指數函數，三角函數，逆三角函數等之微分係數之公式，均見附錄二之微分公式．微分係數有普通微分係數與偏微分係數之別．普通微分係數爲僅含一自變數之函數之微分係數，如上述者是，亦謂之常微分係數，或直稱曰微分係數，乃對於偏微分係數而言．偏微分係數見該條．

【微分方程式】Differential equation．〔微〕凡含微分係數或微分之方程式，謂之微分方程式．有二種，含一自變數與其函數及其微分係數或微分者，曰普通微分方程式，或常微分方程式，或單一微分方程式，或直稱曰微分方程式；含二以上之自變數與其偏微分係數或偏微分者，曰偏微分方程式，或部分微分方程式．例如 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$……(1)，$\left(3a\frac{dy}{dx}+2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(a\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dy}{dx}$……(2)，$dy=\frac{b^2x}{a^2y}dx$……(3) 爲普通微分方程式；$x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial x}$……(4)，$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=5u$……(5)，$\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)u$……(6)，即爲偏微分方程式．微分方程式之階數(order)，即其所含微分係數或微分之階數之最高者，式中最高階微分係數或微分之階數爲一或二或三時，即稱其式爲一階或二階或三階之微分方程式．例如(3)式與(5)式爲一階微分方程式，(1)式與(4)式爲二階微分方程式，(2)式與(6)式爲三階微分方程式．又微分方程式之次數 (degree)，即其所含微分係數或微分之冪指數之最高者，式中最高次微分係數或微分之冪指數爲一或二或三時，即稱其式爲一次或二次或三次之微分方程式．例如上六式中除(2)式爲二次微分方程式外，餘五式均爲一次微分方程式．作微分方程式，例如 $\psi(x, y, a)=0$，關於x微分之，由此二式消去 a，即得微分方程式 $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$．又就 $\psi(x, y, a, b)=0$，關

於x之微分之，再微分之，由此三式消去a, b，即得微分方程式 $f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2})=o$。解微分方程式，例如由 $f(x, y, \frac{dy}{dx})=o$，求出原方程式 $\phi(x, y, a)=o$，如斯凡由微分方程式求出不含微分係數之關係式，名曰解此微分方程式，或曰積分此微分方程式。至其結果，若含有與其階數同數之積分常數，則稱之為一般解答，或一般積分，或完全積分，若積分常數之數比階數少，則稱為特別解答，或特別積分。

損

【損函數】Descending function.〔數〕即遞降函數，見該條。

會

【會合】Concurrent.〔幾〕即交於一點之謂。

【會合線】Concurrent lines.〔幾〕與共點線同，見該條。

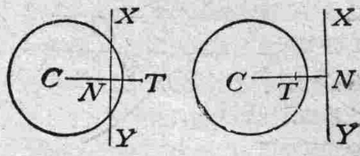
【會合點】Point of concurrence.〔幾〕即會合線之交點，亦稱聚交點。

極

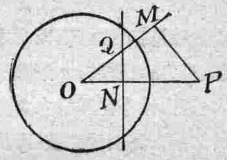
【極】Pole.〔幾〕(一)球之圓之極，為垂直於其圓之平面之球之直徑之兩端之謂。

(二)球之極，為球之軸交於其球面之點之謂。

(三)於圓之任意徑上取二點 N, T，一在圓內，一在圓外，使 CN·CT 等於圓之半徑之平方，過N作直線XY使垂直於CN，

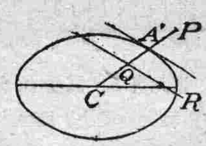


則T謂之 XY 之極，XY 謂之T之極線。(1)若對於O圓，P點之極線通過 Q，則 Q 之極線通過 P.〔證〕命 QN 為P之極線。由P作 PM 垂直於 OQ；則 Q, M, N, P 為共圓點，



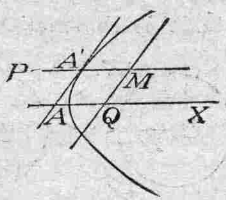
∴ $OM \cdot OQ = ON \cdot OP = OA^2$. 故 PM 為 Q 之極線。故 Q 之極線經過 P。(2)聯二直線之極之直線為二直線之交點之極線。此可應用(1)以證明之。

(四)於有中心圓錐曲線，即橢圓或雙曲線，若於其徑 CA' 上取 P, Q 二點，使 $CP \cdot CQ = CA'^2$，過其一點 Q 作 QR 平行於 A' 之切線，則P謂之 QR 之極，QR 謂之 P 之極線。關於橢圓或雙曲線之極與極線之性質與關於圓之極與極線之性質同。



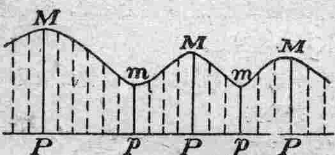
(五) $A'M$ 為平行於拋物線之軸 AX 之任意直線。於此直線上，取 $A'M = A'P$，過

M 作 MQ 平行於 A′ 點之切線，則 P 為 MQ 之極，MQ 為 P 之極線。

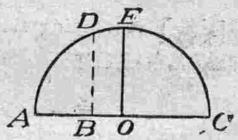


(六)極坐標之極，為極軸與動徑之交點之謂。

【極大】Maximum.〔數〕含一變數 x 之 y 式之值，因 x 變，漸漸增大，又漸漸減小，則由增大轉為減小之際，y 必經過大於前後鄰接值之值，而謂之 y 經過極大值。反之，x 變時，y 漸漸減小，又漸漸增大，則由減小轉為增大之際，y 必經過小於其前後鄰接值之值，而謂之 y 經過極小值。今舉一例以明此定義，一人行山道，其足出海面之高有種種變化，即登於頂上 M，則此高 MP 為極大，及降至 m

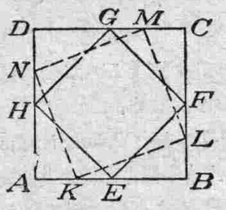


處，則此高 mp 為極小。由是知一曲線可有數極大或極小。而極大或極小乃對於變量之前後二量而言，無所謂最大或最小之意；即如上圖，MP 有種種，任何者皆為極大，mp 亦有種種，任何者皆為極小。茲示極大極小之問題數例於次：(1)若二數之和為常數 a，求其積 y 之極大值。命一數為 x，則他數為 a−x，由是 $y=x(a-x)$。命 x 由 o 變至 a，$x=o$ 時，$y=o$；而 $x=a$ 時，又得 $y=o$；而於其中間，y 為正。故 y 始增大，後減小，而經過極大值甚明。因 $y=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$，故 $\frac{a}{2}-x=o$ 時，即 $x=\frac{a}{2}$ 時，y 為極大，而其極大值為 $\frac{a^2}{4}$。又普通將 $y=ax-x^2$ 解 x，則得 $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-y}$，故欲 x 為實數，y 不能超過 $\frac{a^2}{4}$。(2)茲研究對應於前題之幾何學的問題，即矩形之周圍為一定時，求其面積之極大者。命 AC 為一定周圍之半，則 AC 亦為一定，以 AC 為



徑於其上畫半圓。由其中心 O 作 OE 垂直於 AC。又由 AC 上任意點 B 作 BD 垂直於 AC。則由幾何學之定理，$AB\cdot BC=BD^2$。故 B 合於 O 時，$AB\cdot BC$ 為極大甚明。(3)二數之和為常數 a，求其平方和 y 之極小值。命二數之一為 x，則他數為 a−x，故 $y=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$。故 $\frac{a}{2}-x=o$ 時，即 $x=\frac{a}{2}$ 時，y 為極小。本題亦可以普通之法解之，即 $y=2x^2-2ax+a^2$，解 x，則

$x=\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2y-a^2}$. 故 y 不能小於 $\frac{a^2}{2}$. 故 y 之極小值為 $\frac{a^2}{2}$. (4) 茲研究對應於前題之幾何學的問題，即求內接於已知正方形之正方形之面積之為極小者。命 KLMN 為內接於已知正方形 ABCD 之任意正方形，EFGH 為以已知正方形各邊之中點為角頂之正方形.



則 EFGH 之面積明為 ABCD 之面積之半。而 AK·KB 等於 △AKN，△BLK，△CML，△DNM 之二倍.而 AK·KB 以 K 與 E 合時為極大。故 EFGH 明為內接 ABCD 之正方形之極小者。

【極小】Minimum.〔數〕見極大條.

【極限】Limit.〔數〕變量之極限，為其漸漸接近之一定量，而此量與變量之差可使之小於任意量，然變量決不能達於其極限.例如 a^2+2ax 與 x 俱為變量，即為 x 之函數.而因 x 減小，漸漸接近於 a^2. 與 x 以適當之量，則小於 a^2 者可使之小於任意之量.故 x=o 時，a^2+2ax 之極限為 a^2，而以 $\lim\limits_{x=o}(a^2+2ax)=a^2$ 記之.同樣當 x 無窮減小，$a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$ 之極限為 a_o. 又有內接於圓之正多邊形，若漸漸增加其邊數，內接多邊形之周圍次第接近於圓周，其與圓周之差，可使之小於任意之量，然不能使為零.故圓周為其內接正多邊形之邊數無限增加時其周圍之極限.同樣，圓之面積，為其內接正多邊形之面積之極限.圓錐及圓柱之面積及體積，各為以正多邊形為內接角錐及角柱之面積及體積之極限。變量之諸眞實之任意性質，對於其極限亦為眞.此理可用以誘導得線面體之若干重要性質，而於解析法極限論應用甚廣，微分學之原理多屬於極限論。茲述關於極限論之重要定理於次：(1)設一變量 x 之極限為零，則此變量以任何有限常量 k 乘之，其積 kx 之極限亦為零。(2)設一變量 x 之極限為零，則此變量以任何有限量 k 除之，其商 $\frac{x}{k}$ 之極限亦為零。(3)有限數變量 x，y，z ……之和之極限，等於其各變量之極限之和。(4)設一變量 x 之極限不為零，則此變量以任何有限常量 k 乘之，其積 kx 之極限，即等於 x 之極限以 k 乘之。(5)設一變量 x 之極限不為零，則此變量以任何有限常量 k 除之，其商 $\frac{x}{k}$ 之極限，即等於 x 之極限以 k 除之。(6)數變量之積之極限，等於其各變量之極限之積，但此諸極限，須無一為零。(7)一變量之 n 乘冪之極限，即為此變量之極限之 n 乘冪。(8)一變量之 n 乘根之極限，即為此變量之極限之 n 乘根。(9)設兩變量常相等，且各近於一極限，則此二極限必等。(10)設兩變量之比

爲一常量，且各漸近於其極限，若其極限不爲零，則其極限之比，必與兩變量之比同．於切線之理論，極限甚爲重要．例如「圓之切線爲交圓周於一點之直線」之定義，適用於如圓或橢圓之凸曲線，然不適用於一般之曲線．然如「切線爲曲線之割線，以其交點之一爲樞而迴轉時，第二交點接近於第一交點之極限」之定義，適用於一般之曲線．同樣可辨釋曲面之切面．

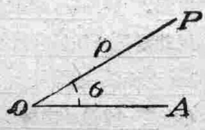
【極軸】Polar axis．〔幾〕見極坐標條．

【極線】Polar．〔幾〕見對極線及極條．

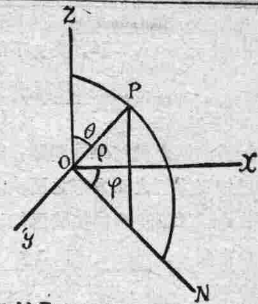
【極大值】Maximum value．〔數〕見極大條．

【極小值】Minimum value．〔數〕見極大條．

【極坐標】Polar co-ordinates．〔幾〕此種坐標法如次．一點P之位置，以其由一與點O之距離及OP與一定直線OA所成之角AOP決定之．O謂之



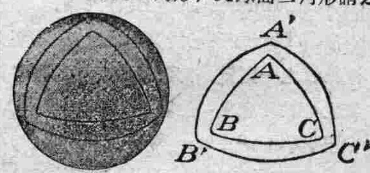
極，OA謂之極軸或首線；距離OP謂之動徑，常以希臘字ρ表之，角AOP謂之變角，常以希臘字θ表之，即P之極坐標爲(ρ, θ)．是爲平面內一點之極坐標．空間中一點之極坐標如次．設Ox，Oy，Oz爲直交之軸，P爲空間之一點，則P之位置，可由OP，$\angle POz$及$\angle xON$定之．今命$OP=\rho$，$\angle POz=\theta$，$\angle xON=\varphi$，則P之極坐標爲(ρ, θ, φ)．



【極限值】Limiting value．〔數〕即極限，見該條．

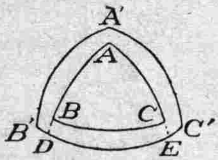
【極距離】Polar distance．〔幾〕在球面上由小圓之近極至其圓周上任一點之距離，謂之小圓之極距離．又由大圓之任一極至其圓周上任一點之距離，謂之大圓之極距離．大圓之極距離爲一象限，即其圓周之四分之一．

【極三角形】Polar triangle．〔幾〕設以球面三角形之三角頂爲極作大圓弧，則另成球面三角形，此球面三角形謂之

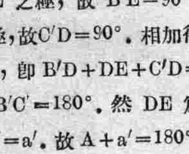


前球面三角形之極三角形．例如A爲B'C'之極，B爲C'A'之極，C爲A'B'之極，則A'B'C'謂之ABC之極三角形．以A，B，C爲極作三大圓，則此三圓分球面爲八球面三角形．此八三角形中，其一之角頂A'與A相當，且與A在BC之同側，其他角頂亦如此者，爲ABC之極三角形．若A'B'C'爲ABC之極三角形，

則 ABC 亦爲 $A'B'C'$ 之極三角形.因 A 爲 $B'C'$ 之極，C 爲 $A'B'$ 之極，故 B' 與 A 及 C 之距離爲一象限，故 B' 爲 AC 之極.同理 A' 爲 BC 之極，C' 爲 AB 之極.故 ABC 爲 $A'B'C'$ 之極三角形.於兩極三角形，一三角形之各角與他三角形之各對邊相補.命 ABC，$A'B'C'$ 爲兩極三角形.命其各角頂之大字母表各角之度，小字母表各對邊之度.延長弧 AB 及 AC 使遇 $B'C'$ 於 D 及 E.因 B' 爲 AE 之極，故 $B'E=90°$.又 C' 爲 AD 之極，故 $C'D=90°$.相加得 $B'E+C'D=180°$，即 $B'D+DE+C'D=180°$，或 $DE+B'C'=180°$.然 DE 爲 ∠A 之測度，$B'C'=a'$.故 $A+a'=180°$.同理可證 $B+b'=180°$，$C+c'=180°$；及 $A'+a=180°$，$B'+b=180°$，$C'+c=180°$.因極三角形有此性質，故極三角形常稱爲補三角形.



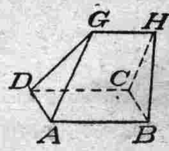
【極方程式】Polar equation.〔幾〕即一軌跡以極坐標表之之方程式也.命 OX，OY 爲直交軸，P 爲極坐標之極，OX 爲首線.命 x，y 爲一點 P之坐標，ρ，θ 爲同點之極坐標.則由圖得 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$.以此代入各軌跡之方程式，得其極方程式.例如代入直線之普通方程式，$Ax+By+C=o$，則得 $\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+c=o$，是爲直線之極方程式.又代入圓之方程式 $x^2+y^2=2rx$.即以圓周上一點爲極，以一半徑爲首線，則其極方程式爲 $\rho=2r\cos\theta$.若以焦點爲極，主軸爲首線則圓錐曲線之極方程式爲



$$\rho=\frac{ep}{1-e\ \cos\theta}$$，而 e 爲離心率，p 爲由焦點至準線之距離.$e=1$ 則爲拋物線，$e<1$ 則爲橢圓，$e>1$ 則爲雙曲線.

楔

【楔】Wedge.〔幾〕楔爲五平面包圍之立體.如圖，平行四邊形（通常爲矩形）ABCD 謂之背，二梯形 ABHG，CDGH 謂之面，GH 謂之刃，刃與背之距離謂之高.命背之長爲 L，廣爲 b，刃之長爲 l，高爲 h，則楔之體積 $V=\frac{1}{6}bh(2L+l)$.



準

【準球】Director sphere.〔幾〕有心二次曲面之三切面互相直交之交點之軌跡爲球，名曰準球或導球.

【準圓】Director circle.〔幾〕亦名導圓.橢圓或雙曲線之二切線互相直交之交點

之軌跡之圓，謂之準圓．又外旋輪線，內旋輪線，外餘旋輪線，內餘旋輪線等，其各母圓所切之定圓，亦謂之準圓．

【準線】Directrix．〔幾〕畫曲線或面時，用作標準之已定直線或曲線也．又畫柱面或錐面時，母線所經沿之曲線，亦曰準線．參閱圓錐曲線，拋物線，雙曲線，橢圓，及錐，柱等條．

【準三角形】Triangle of reference．〔幾〕見三線坐標條．

稜

【稜】Edge．〔幾〕立體之面與面之交謂之稜．

【稜柱】Prism．〔幾〕與角柱同，見該條．

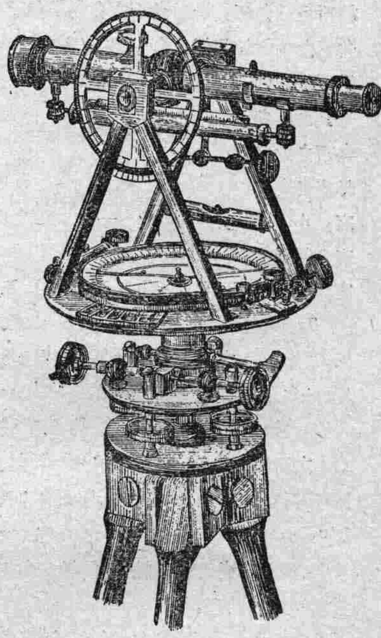
【稜錐】Pyramid．〔幾〕與角錐同，見該條．

經

【經度】Longitude．〔算〕某地之經度，為由本初子午線向東或西沿赤道之弧測至該地之子午線之度數之謂．

【經截面】Longitudinal section．〔幾〕見旋轉曲面條．

【經緯儀】Theodolite．〔三〕經緯儀為測量用器械，用以測垂直角及水平角．其用廣者為轉鏡經緯儀（Transit theodolite）．經緯儀有垂直及水平二分度圈．水平分度圈與羅盤之分度圈同．而望遠鏡有遊尺以支持之；迴轉水平分度圈，用以測水平角．又望遠鏡之軸上，支垂直分度圈，附同樣遊尺，以供測傾斜角之用．望遠鏡之下，附水準器，以供使望遠鏡水平或測定水平線或測兩地之高低．望遠鏡之筒中，裝置蛛絲網或白金針直角相交之十字網，以其交點定視軸（視線之過望遠鏡之中心者）．



置

【置換法】Substitution．〔代〕於 $a_1a_2a_3a_4$ 四字之排列，命各字以其他一字置換之，例如以 a_4 代 a_1，a_3 代 a_2，a_1 代 a_3，a_2 代 a_4，則此運算謂之置換，可以記法 $\begin{pmatrix} a_1a_2a_3a_4 \\ a_4a_3a_1a_2 \end{pmatrix}$ 表之，而各字以其後之字置換之；或以記法 $(a_1a_4a_2a_3)$ 表之，

而各字以其後之字置換之，最後之字 a_3 以第一字 a_1 置換之.尋常多用後記法.

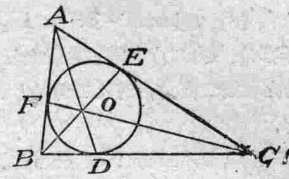
【置換積分法】Integration by substitution.〔積〕不定積分法之一.求微分係數時，應用新變數，往往能使演算簡易，求積分亦然，茲舉例說明之.〔例一〕求$\int\sqrt{a+bx}dx$之結果.設 $a+bx=y$，則 $bdx=dy$. 因此 $\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{1}{b}y^{\frac{1}{2}}dy$. 積分此方程式之兩邊，則得 $\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{1}{b}\int y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{b}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$. 於是 $\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b}+C$.〔例二〕求$\int\cos ax\,dx$之結果.設 $ax=y$，則 $a\,dx=dy$，$\cos ax dx=\frac{1}{a}\cos y dy$. 於是$\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int\cos y dy=\frac{1}{a}\sin y+C=\frac{1}{a}\sin ax+C$.

腰

【腰】Legs.〔幾〕於等腰三角形，其兩相等之邊謂之腰.又於直角三角形，直角傍之兩邊謂之腰.又於梯形，其非平行之兩邊謂之腰.

葛

【葛爾剛訥點】Gergonne's point.〔幾〕三角形之內切圓之切於三邊之點，與各對角頂相聯之三直線交於圓一點，此點謂之葛爾剛訥點.〔證〕命三角形



ABC 之內切圓於 BC，CA，AB 之切點各為 D，E，F. 因 BD=BF，CE=CD，AF=AE. 故 BD:CD，CE:AE，AF:BF 之複比為等比. 故由稅瓦定理知 AD，BE，CF 交於同一點.

萬

【萬】〔算〕數名. 為千之十倍，阿剌伯以 10000 記之.

號

【號】Sign.〔數〕即符號之略，見該條.

裏

【裏定理】Obverse of a theorem.〔幾〕若以「A 為 B，則 C 為 D」表定理，則「A 非 B，則 C 非 D」謂之原定理之裏.某定理為眞，其裏定理不必眞.例如「二三角形，二邊各相等，且其夾角亦相等，則此二三角形為等積」之定理之裏，即「二三角形，二邊各相等，然其夾角不等，則二三角形不等積」，不必為眞.因二邊各相等，其夾角為補角時，其面積相等故也.

補

【補角】Supplement (of an angle). 〔幾〕某角由二直角減去之者之謂.若二角之和爲二直角，則此二角謂之互爲補角.

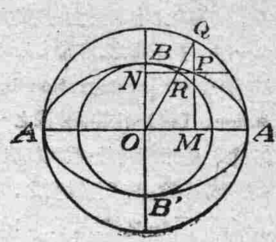
【補弦】Supplementary chords.〔幾〕補弧之弦,謂之補弦.互爲補弧之二弧之弦,謂之互爲補弦.

【補弧】Supplement (of an arc) 或 Supplementary arcs.〔幾〕由半圓周減去某弧所餘者之謂. 若二弧相合等於一半圓周,則此二弧謂之互爲補弧.

【補題】Lemma.〔數〕即預備定理,見該條.

【補助角】Auxiliary angle 或 Subsidiary angle.〔三〕於解三角形時,爲便於對數計算,有用補助角者.例如於直角三角形之解法，$c^2=a^2+b^2$，使之適於對數計算,則 $a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$，命 $\frac{b}{a}=\tan\theta$，則 $c^2=a^2(1+\tan^2\theta)=a^2\sec^2\theta$. $\therefore c=a\sec\theta$，$\therefore \log c=\log a+\log\sec\theta$. 此 θ 即謂之補助角,而此時可由 $\log\tan\theta=\log b-\log a$ 求得之.

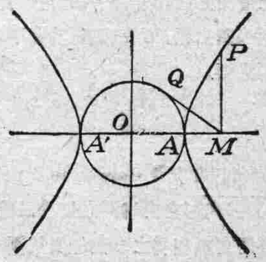
【補助圓】Auxiliary circle.〔幾〕以橢圓之長軸爲直徑之圓，謂之補助圓或輔圓,其方程式爲 $x^2+y^2=a^2$. 又以短軸爲徑之圓,謂之小補助圓,其方程式爲 $x^2+y^2=b^2$. 設 P 爲橢圓上任意一點，延長縱坐標 MP 遇補助圓於 Q，而 P，Q 爲對應點,角 QOM 謂之離心角. 命



y 及 y' 爲橢圓及補助圓上有同横坐標 x 之二對應點之縱坐標. 則由二曲線之方程式得 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，

$y'=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. 由是 $y:y'=b:a$. 即橢圓及補助圓與公共横坐標相當之縱坐標之比，如橢圓之半短軸與半長軸之比,而爲一常數.此性質可用以當知橢圓之長短軸而作橢圓. 其法如次: 作長軸及短軸,且作二補助圓. 作任意半徑,交二圓於 Q 及 R. 過 Q 作 QM 平行 BO，又過 R 作 NR 平行於 OA. 命此二線之交點爲 P. 因 $MP:MQ=OR:OQ$，即 $y:y'=b:a$. 故 P 爲橢圓上之一點，同樣可得任意若干點，聯結之則得橢圓.

又以雙曲線之長軸 AA′ 爲徑畫圓,則此圓謂之雙曲線之補助圓或輔圓.設 P 爲



雙曲線上任意一點．由其縱坐標之足M作補助圓之切線MQ，則可證得PM：QM＝b：a，即雙曲線之任一縱坐標與由其足至補助圓之切線之比，如雙曲線之半短軸與半長軸之比而爲一常數．此性質亦可應用之以作雙曲線．

【補三角形】Supplemental triangles.〔幾〕即極三角形，見該條．

【補助單位】Auxiliary unit.〔算〕補助單位者，爲基本單位之若干分，或若干倍者之謂也．例如於標準制長之單位，糎，粉，籿，粀，粌，粴等皆爲補助單位；又於營造制寸，分，丈皆爲補助單位．

【補助方程式】Auxiliary equation.〔微〕見高階一次微分方程式條．

【補助未知數】Auxiliary unknown quantity.〔代〕代數中既常以字母 a，b，c 等代已知數，x，y，z 等代未知數，由此推廣之，於解較繁複之代數式時，亦可更用他字母或他式以代式中之某幾項或某幾數，變其式爲較簡之形，使易於變化，待變化既畢，仍以原代之式還之，則其解簡明精巧．此時所用之字母，稱曰補助未知數或助變數．例如於解

$$\frac{1+\sqrt{(x^2-1)}}{1+2a\sqrt{(x^2-1)}}=\frac{\sqrt{(x^2-1)}-1}{x^2-2}，$$

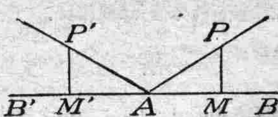
命 $\sqrt{(x^2-1)}=y$，則 $x^2-2=y^2-1$，與方程式爲 $\dfrac{1+y}{1+2ay}=\dfrac{y-1}{y^2-1}=\dfrac{1}{y+1}$．

$\therefore y^2+2y+1=1+2ay$．解之，則 $y=0$ 或 $y=2(a-1)$，即 $\sqrt{x^2-1}=0$，

$\therefore x=\pm1$，或 $\sqrt{x^2-1}=2(a-1)$，解之，得 $x=\pm\sqrt{\{1+4(a-1)^2\}}$．

此解中之 y，即爲補助未知數．補助未知數，在尋常之淺代數中，用之甚少，惟於代數最深之處，則必用之．而微分積分之中，尤以用補助未知數之法爲最重要之事．用補助未知數以變原式之形而解之，亦可名之爲借代法．

【補角之三角函數】Trigonometrical functions of the supplement of an angle.〔三〕即一角之三角函數，以其角之三角函數表之．命 PAB 爲任意之角，延長BA至B′，作 P′AB′＝PAB；取 AP′＝AP，作 PM，P′M′ 垂直於 BB′．$\angle P'AB=180^\circ-\angle P'AB'=180^\circ-\angle PAB$；故 $\angle P'AB$ 爲 $\angle PAB$ 之補角．



三角形 PAM 與 PAM′ 相等；因

$$\sin A=\frac{PM}{AP}，\ \sin(180^\circ-A)=\frac{P'M'}{AP'}；$$

又 $\cos A=\dfrac{AM}{AP}$，$\cos(180^\circ-A)=\dfrac{AM'}{AP'}$；

又因 PM 與 P′M′ 相等且同號，而 AM 與 AM′ 相等，惟號相反，故得 $\sin(180^\circ-A)=\sin A$，$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$．

其他 A 角與其補角之三角函數可由圖比較之，或由已得之二結果而比較之，今由後法得

$$\tan(180^\circ-A)=\frac{\sin(180^\circ-A)}{\cos(180^\circ-A)}$$

$$=\frac{\sin A}{-\cos A}=-\tan A,$$

$$\cot(180^\circ-A)=\frac{\cos(180^\circ-A)}{\sin(180^\circ-A)}$$

$$=\frac{-\cos A}{\sin A}=-\cot A,$$

$$\sec(180^\circ-A)=\frac{1}{\cos(180^\circ-A)}$$

$$=\frac{1}{-\cos A}=-\sec A,$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\frac{1}{\sin(180^\circ-A)}$$

$$=\frac{1}{\sin A}=\operatorname{cosec}A.$$

故任意角之正弦及餘割各與其補角之正弦及餘割同;而他諸三角函數各與其補角之對應函數等值,然號相反.

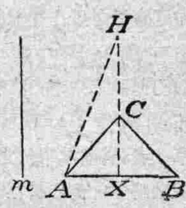
解

【解法】Solution.〔數〕問題之解法,為求滿足問題之條件之未知數之法之謂.問題之解法有算術的,代數的,幾何學的等等.方程式之解法,為保持方程式相等之未知數之值.

【解答】Solution.〔數〕與解法同,見該條.

【解析法】Method of analysis 或 Analysis.〔幾〕解析法為以字母表數,以記號示運算之數學論法之謂.解析法有古代之解析法與近世之解析法二種:(1)古代之解析法之意義,由巴普斯之著作,抄其大要如次.解析法為假定所求者為成立者而由之分出之推理法也.反之,於綜合法(Synthesis)為由解析法內在最後者達所求者也.今以一例說明之.

〔問題〕知由二等邊三角形之頂點至底邊之垂線與二等邊之一之和及底邊,求作本形.〔解析法〕命 ABC 為所求之三角形,由 C 引底邊 AB 之垂線 CX,則二等分 AB 於 X.延長 XC 至 H,使 XH 等於其和 m,則知 CH=CA.聯結 AH,則 ∠CAH=∠CHA,故可決定 C 點之位置.



〔綜合法〕二等分 AB 於 X,由 X 作 XH 垂直於AB,使 XH=m;作AC使∠HAC等於∠AHC,命其交 XH 之點為 C,則 ABC 為所求之三角形.〔證〕因 XH 為 AB 之垂直二等分線,故 AC=BC,故 ABC 為二等邊三角形.又HC=AC,兩邊各加 CX,則得 AC+CX=HC+CX=HX=m.由是觀之,古代之解析法全為綜合法之反對之推理法,而假定某命題為眞,經漸漸推理,達眞或僞之結果,若達眞之結果,則最初假定之結果為眞;若達僞之結果,則最初假定之結果為僞.而後者謂之反證法. (2)近世之解析法,無推理之特別之方法,而為數學的研究之意.凡用記號之數學的推理,卽非幾何學的推理,皆為解析法.卽數以字母表之,用記號以運算者,因是,甚為簡明.解析法於數學之研究,有便利之處,常應用於物理學,其效用不少.

【解析幾何學】Analytical geometry.〔數〕解析幾何學,爲用解析法以論幾何學者也.解析幾何學,普通分定與不定二者.定解析幾何學,爲以解定問題爲目的,表已知未知之間之關係之方程式,常等於所求部分之數.解析幾何學之此部分,比較的爲不重要,不過應用代數學於幾何問題而已.不定解析幾何學,爲以研究直線,圓,圓錐曲線及一次二次之表面,其他如高次曲線,及超越曲線等之普通性質爲主,而用坐標以研究之.此部分爲十七世紀之初笛卡兒(Decartes)所發明,而此發明於解析數學現今之進步發達,關係不淺.

試

【試除數】Trial divisor.〔算〕〔代〕於開平方之運算,至任意階級之剩餘,取所得之商之 2 倍爲除數而除之,而此除數謂之試除數.又於開立方之運算,至任意階級之剩餘,取所得之商之平方之 3 倍爲除數以除之,而此除數,謂之試除數.例如當求 1369 之平方根,至第二階級之剩餘,以所得之商之 2 倍,即 60 除之,而此 60 謂之試除數.

$$\begin{array}{r|l} & 1369 \;\big|\; 37 \\ & 9 \\ \hline 67 & 469 \\ & 469 \\ \hline \end{array}$$

資

【資本】Capital.〔算〕資本爲投於以利益爲目的之事業之金之謂.且不限於現金,凡公債票,地面,家屋,或商品,勞力等有算入於資本者.資本有流動資本(Circulating capital 或 Floating capital)與固定資本(Fixed capital).流動資本爲現金或公債票,商品等可轉運生利益者之謂;固定資本爲工場之器械,營業用之地面,家屋等固定而無轉運之方者之謂.

【資產】Assets.〔算〕資產爲商人所有之財產與負債相抵消所得之動產,不動產或破產財產之謂.

較

【較】Difference.〔算〕〔代〕即差,見該條.

運

【運算】Operation.〔數〕於初等數學中,運算者依表示加減乘除,冪及根之記號而實行之者之謂也.

鉛

【鉛垂線】Plumb line.〔三〕附重錘且自由懸垂之絲之向之直線之謂.

零

【零】Zero,或 Nought (Naught) 或 Cipher(Cypher).〔數〕零(Zero)有二意義,一爲無(Nought 或 Cipher)之意,算術內之零,多爲此意義.他一爲可命之小於任意數之數之意,爲無窮小之意,此意義於代數學及普通之解析的數學內多用之.例如取分數 $\frac{a}{b}$,假定 b 爲常

數，而 a 逐漸減小，則此分數之值因 a 減小而減小，至 a 爲無限小時，亦爲無限小．又於同分數，命 a 爲常數，而 b 逐漸增大，則分數之值逐漸減小，而 b 與 a 比較爲極大時，則分數之值爲極小．及至 b 爲無窮大卽 ∞ 時，則分數之值爲無窮小，卽爲0．故 $\frac{a}{\infty}=0$．此種 0 謂之極限零 (Limiting value zero)．而 a 減 a 所得之零卽 $a-a=0$ 謂之絕對零(Absolute zero)．絕對零無討論之必要，凡絕對零皆相等．然極限零，不可不以無窮小之意而討論之，而任何極限零決不能相同．例如考二分數 $\frac{a}{b}$，$\frac{2a}{b}$，命 a 爲常數，b 漸漸增大，則此二分數之值漸漸減小，結果，當 b 爲無限大，則爲無限小，卽 $b=\infty$ 時，$\frac{a}{b}$ 及 $\frac{2a}{b}$ 俱爲 o，然其比依然爲 2 也．玆述零之數重要性質如次：(i) $a+o=a$，故 $o+o=o$．(ii) $o-o=o$．(iii) $a\times o=o$．(iv) $\frac{o}{o}$ 爲不定形．(v) $\frac{a}{o}$ 爲不能．又 (vi) $a^{\circ}=1$．(vii) $\underline{o|}=1$．(viii) $\log o=-\infty$．(ix) $\lim\limits_{n=\infty} ne^{-n}=o$．

【零係數】Zero coefficient．〔代〕於代數式或方程式，其未知數之某乘冪缺少之項，則以 o 爲其係數，此係數謂之零係數．例如於 $ax^2+c=o$ 可書爲 $ax^2+ox+c=o$，而此 o 爲零係數．

預

【預期】Expectation．〔代〕欲得何種權利而希望某事之成就，此成就適遇之值，謂之預期．卽預期者，等於以金額乘適遇．設某事成就時所得之金額爲 M，其某事成就之適遇爲 $\frac{a}{a+b}$，則其預期爲 $M\times\frac{a}{a+b}$．

【預備定理】Lemma．〔數〕亦稱補題，卽欲解或證明次之本命題必須預先明此命題也．例如欲證明「由三角形之外接圓周上任一點，向各邊所引之垂線之趾，同在一直線上」之定理，卽西摩孫線．爲證明引用起見，須預先置以「圓內接四邊形之相對角互爲補角，而其逆亦爲眞」之定理，此謂之預備定理或補題．

十四畫

僞

【僞設法】Rule for false positions. 〔幾〕與假設法同,見該條.

圖

【圖】Diagram. 〔數〕於幾何學中,爲證明或說明所畫之圖畫之謂也.

【圖形】Figure. 〔數〕點,線,面,體或其集合,謂之圖形.

境

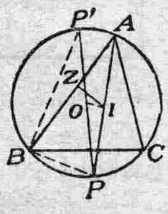
【境界】Boundary. 〔數〕物之界之謂,例如某平面之周圍是也.

塵

【塵】〔算〕爲沙之十分之一,即 ·000000001 也.

蔡

【蔡拍爾定理】Chapple's theorem. 〔幾〕三角形之外接圓及內切圓之半徑爲 R, r, 其中心爲 O, I, 則 $IO^2=R^2-2R\cdot r$.



$\angle BP'P=\angle BAP$,

$\therefore \triangle BP'P \backsim \triangle AZI$. 故 $PP':PB=AI:IZ$.

即 $2Rr=PB\cdot AI=PI\cdot AI=R^2-OI^2$.

$\therefore IO^2=R^2-2R\cdot r$.

實

【實】〔算〕爲算術中實數之簡稱.

【實量】Real quantity. 〔代〕與實數同.

【實數】〔算〕加減乘除四法中,其受動之數曰實數,主動之數曰法數.實數或單稱實,即被加數,被減數,被乘數,被除數之總稱; 法數或單稱法,即加數,減數, 乘數,除數之總稱.

【實數】Real number. 〔代〕爲對於虛數而言, 凡通常之數,即整數,分數,正數,負數皆實數,見虛數條.

【實體】Material solid. 〔幾〕實體爲吾人五官所能認識之物,而即爲物體.

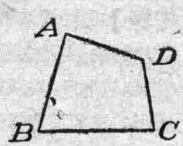
【實用算術】Practical arithmetic. 〔數〕實用算術不以算術之理論爲主,而以日用之計算爲主所述之算術之謂.

對

【對合】Involution 〔幾〕在同一直線上點 A, A'; B, B'; C, C'; ……與他點 O 有 $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=OC\cdot OC'=\cdots\cdots$ 之關係時,則若干組之二點 A, A'; B, B'; C, C'; ……謂之對合, O 爲對合中心,而各組之二點 A 與 A', B 與 B', C 與 C' 爲對合共軛點.從直線外之點 P 與對合諸點作聯結之直線,謂之對合束線.作對合點之法,畫同弦之大小諸圓,過弦(或弦之延線)及諸圓周任意作一直線, 其與弦(或弦之延線)之交點,即對合中心,與諸圓周之交點,即對合點,同一圓周上

之二點,爲對合共軛點．中心在弦上,則共軛點在中心之兩側，中心在弦之延線上,則共軛點在中心之同側．

【對角】Opposite angle.〔幾〕某角之對角者，與之相向之角之謂．例如四邊形ABCD,A角爲C角之對角，B角爲D角之對角．又有指對多邊形之邊之角,或對多面體之面之角者．



【對面】Opposite face.〔幾〕即於多面體對某角或稜或面之面之謂．

【對偶】Contraposition(of a theorem).〔數〕將原定理之假設及終結皆反改之即得其對偶．設原定理爲「若A爲B，則C爲D」,則其對偶爲「若C不爲D，則A不爲B」．若原定理爲眞,則其對偶必爲眞．例如「若三角形之二邊相等,則其對角亦相等」之對偶,即「若三角形之二角不相等,則其對邊不相等」必爲眞．

【對稱】Symmetry.〔代〕〔幾〕〔於代數學之對稱〕二以上變數之函數，交換其變數之一組之任意一對，其函數之值不變,則謂之對於變數之此等一組爲對稱．例如 $2x+y+z$ 對於 y 及 z 爲對稱．又 $yz+zx+xy+x+y+z$ 對於 x，y，z 爲對稱，而 $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$ 及 $(a+b+c)/(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$ 對於 a，b，c 爲對稱．若欲一整數函數爲對稱，其必要且充足條件爲任意同一形式之諸項須爲同係數．因變數之一對之交換不過特別之形之任意項變爲同形之他項而已．例如於 $ax^2+bxy+cy^2$，交換 x 與 y，則爲 $cx^2+bxy+ay^2$，而欲 $ax^2+bxy+cy^2=cx^2+bxy+ay^2$，必須 a=c．次所示各次數之對稱整數函數爲最普徧者之例：──

次數	變數	函數
1	x,y	$a+bx+cy.$
2	x,y,z	$a+bx+by+bz+cx^2+cy^2+cz^2+dyz+dzx+dxy.$
3	x,y	$a+bx+by+cx^2+dxy+cy^2+ex^3+fx^2y+fxy^2+ey^3.$

次所示各次數之齊次對稱整數函數爲最普徧者之例：──

次數	變數	函數
1	x,y,z	$ax+ay+az.$
2	x,y,z	$ax^2+ay^2+az^2+byz+bzx+bxy.$
3	x,y	$ax^4+bx^3y+cx^2y^2+bxy^3+ay^4.$

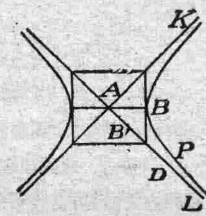
〔於幾何學之對稱〕有中心對稱,軸對稱,平面對稱三種,見各條．

【對數】Logarithm.〔代〕〔三〕一數等於他數之某乘冪時，則稱其乘冪之次數爲第一數以第二數爲底之對數．例如於

$a^x=y$，謂 x 為 y 以 a 為底之對數，而以 $x=\log_a y$ 記之.此時 a 為對數之底，而 1 以外之任意正數皆可為底.若計算對於特別底數之對數，可得對數之一組.因對數之底可取任意之數，故對數之種類為無數；然世所用之對數有二種，卽常用對數(Common logarithm)與納白爾對數(Napierian logarithm)是也.納白爾對數亦稱自然對數.常用對數以 10 為底；納白爾對數以不盡數 $e=2.71828\cdots\cdots$為底.數之對數由二部而成，卽整數部分與小數部分.而整數部分謂之指標(Characteristic)，小數部分謂之假數(Mantissa).例如 52 之常用對數為 1.716003，而 I 為指標，.716003 為假數.種種之對數表中，以常用對數為便利，其便利之點如次：〔第一〕指標不必記載，因常用對數之指標，為數之整數位數減一.〔第二〕小數之對數與同數字且同排列之整數之對數同，卽不論小數，整數其假數皆同，而小數亦有指標，惟為負，但其絕對值為在小數點與第一有效數字之間之零之數加一.以是之故，常用對數，世界實用計算多用之.次所示對數之性質，各種對數皆可適用之. (1)命 $\log_a x=\alpha$, $\log_a y=\beta$, $\log_a z=\gamma,\cdots\cdots$，因 $x=a^{\alpha}$, $y=a^{\beta}$, $z=a^{\gamma},\cdots\cdots$, $\therefore xyz\cdots=a^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$，故得$\log_a(xyz\cdots)=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots\cdots$. 由是若干因數之積之對數，等於其各因數之對數之和. (2)命 $\log_a x=\alpha$, $\log_a y=\beta$，因 $x=a^{\alpha}$, $y=a^{\beta}$, $\therefore x\div y=a^{\alpha-\beta}$，故得$\log_a(x\div y)=\alpha-\beta=\log_a x-\log_a y$. 由是商之對數，等於被除數與除數兩對數之差. (3)$x=a^{\alpha}$，則$x^m=a^{m\alpha}$, $\therefore \log_a x^m=m\alpha=m\log_a x$. 由是一數某乘冪之對數等於其數之對數，而以其指數乘之. (4)若$\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$，則$x=a^{\alpha}=b^{\beta}$，而$a=b^{\frac{\beta}{\alpha}}$，及 $b=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$. 故$\frac{\beta}{\alpha}=\log_b a$, $\frac{\alpha}{\beta}=\log_a b$. 由是 $\log_a b\times\log_b a=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$, $\therefore \beta=\alpha\log_b a$，卽$\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a$. 由是以 b 為底任何數之對數，等於以 a 為底同數之對數，而以 $\log_b a$ 乘之.此四原理可省略乘除，累乘開方之計算，當實行計算多用之.此外如次所示，為解析的研究中所用者.

I. 於任意種類之對數，1 之對數為 0.
II.不論對數之底如何，其底之對數為1.
III. 於大於 1 任意之底之對數，大於 1 諸數之對數為正，而小於 1 諸數之對數為負. ∞之對數為+∞，而 0 之對數為−∞.
IV. 於小於 1 任意之底之對數，大於 1 諸數之對數為負，小於 1 諸數之對數為正.∞之對數為−∞，而 o 之對數為+∞.
V. 負數無實數之對數，卽負數無對數.各對數為由二因數而成，其一為關於其底者，而為常數；他一為關於其數者，而因其數變而變.第一因數謂之對數率(Modulus).某種對數之對數率，任意數之納白爾對數，以此乘之，可

得與其種類同數之對數．常用對數之對數率爲 $\frac{1}{\log_e 10}=\frac{1}{2.30258509\cdots\cdots}$ 或 $0.434294482\cdots\cdots$．而納白爾對數之對數率爲 1．任何種對數之對數率等於該種之底之納白爾對數之倒數．納白爾對數爲各種對數之基本，而由此可得他種對數．納白爾對數又稱雙曲線對數，因納白爾對數與等邊雙曲線及其漸近線間所夾之面積有關係故也．命 BP 爲等邊雙曲線之一分枝，AK 及 AL 爲其漸近線．假定頂點B之橫線AB′爲1，如是縱線



BB′ 與他任意縱線間所夾之面積之單位之數，等於外縱線 PD 之橫線之納白爾對數，即面積 B′BPD=log (AD)．普通之對數不謂之雙曲線對數，而納白爾對數特名之爲雙曲線對數，無其他之理由，且此爲不可思議，因納白爾對數與等邊雙曲線間成立之關係，同關係任意種對數與斜雙曲線間亦成立，即於斜雙曲線時，限於二斜縱線之面積，該種對數之對數率等於斜縱線傾於橫線之角之正弦．

〔對數表之計算〕對數表用級數以計算之，而其基本者爲次之對數級數，

$$\log(1+x)=M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\right).$$

但 log 爲表任何種對數，M 爲其對數率，x 爲任意之數．若命 M=1，則得納白爾對數，即

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots(1).$$

然此級數收歛甚遲，故於實際計算表時可變之如次．於(1)命 x 爲 -x，則(1)變爲

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots(2).$$

而由(1)減(2)，$\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$ 記爲 $\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，則得

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

命 $x=\frac{1}{2n+1}$，$\log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 記爲 $\log_e(n+1)-\log_e n$，則得 $\log_e(n+1)=$

$$\log_e n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots\cdots(4).$$

此級數收歛極速．計算對數表計算素數之對數表即可，因非素數之對數，由已述之對數之性質，將素因數之對數相加即可得之．玆爲示公式(4)之用法，示計算始十整數之對數．若於(4)命 n=1，則得 2 之對數；次命 n=2，則得 3 之對數；如是類推．即

$\log_e 1=0$,

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right.$$

$+\cdots\Big)=0.693147,$

$\log_e 3=0.693147+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3.5^3}+\right.$

$\left.\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\cdots\right)=1.098612,$

$\log_e 4=2\times\log_e 2=1.386294,$

$\log_e 5=1.386294+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\right.$

$\left.\frac{1}{5.9^5}+\frac{1}{7.9^7}+\cdots\right)=1.609437,$

$\log_e 6=\log_e 2+\log_e 3=1.791759,$

$\log_e 7=1.791759+2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{3\times 13^3}+\right.$

$\left.\frac{1}{5.13^5}+\frac{1}{7.13^7}+\cdots\right)=1.945910,$

$\log_e 8=3\times\log_e 2=2.079441,$

$\log_e 9=2\times\log_e 3=2.197224,$

$\log_e 10=\log_e 2+\log_e 5=2.302585.$

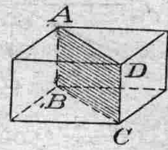
同樣可算至任何數之納白爾對數。如是常用對數可以對數率乘納白爾對數而得之。

【對應】Homologous 或 Corresponding.〔數〕於幾何學中，相似多邊形或相似多面體，相似之部分，謂之對應部分或相當部分。例如於相似多邊形為對應點，對應邊，對應角，對應線。又如於相似多面體為對應稜，對應面，對應立體角。於比例中，其第一項與第三項，第二項與第四項為對應項。

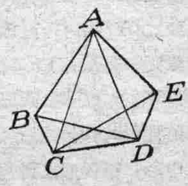
【對點】Opposite points.〔幾〕相對之點之謂，如球之徑之兩端是也。

【對邊】Opposite sides.〔幾〕於多邊形對於某邊之邊，對於某角之邊之謂。

【對角面】Diagonal plane.〔幾〕含多面之相對稜之平面或含一稜與對於該稜之角頂之平面之謂。如圖之 ABCD 為對角面。



【對角線】Diagonal.〔幾〕聯結多邊形之不相鄰二角頂之直線，謂之對角線。例如於多邊形 ABCDE，AC，AD，BD，CE 任何者皆為對角線。於 n 邊之多邊形，對角線之數為 $\frac{1}{2}n(n-3)$。又有指聯結多面體之相對角之直線為對角線者。

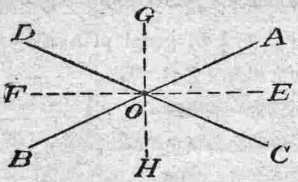


【對角點】Diagonal points.〔幾〕相對之角頂之謂也。

【對定理】Contraposition (of a theorem).〔數〕即定理之對偶，見對偶條。

【對消法】Cancellation.〔算〕〔代〕與消約法同，見該條。

【對頂角】Vertically opposite angles.〔幾〕二直線 AB，CD 交於一點 O 時，角 AOC 與 BOD，角 AOD 與 BOC 謂之對頂角。而對頂角相等。因對頂角為同角之補角故也。又二組對頂角之四二等分線 EO，FO，GO，HO，成二同一直線，且此二直線互垂直。因 $\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC,$

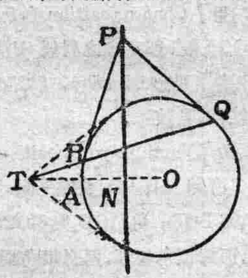


$\angle COH=\frac{1}{2}\angle COB$,

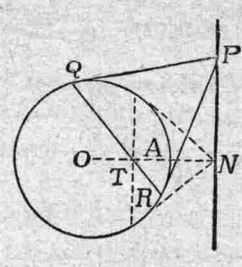
而 $\angle AOC+\angle COB=2\angle R$,
故 $\angle EOC+\angle COH=\angle R$,
即 $\angle EOH=\angle R$;同樣$\angle HOF=\angle R$,故EO, OF 為同一直線.同樣 GO, CH 亦為同一直線,而此二直線明為互相垂直.

【對等心】〔幾〕圖形就其內之一點具對等性質時,則此點謂之對等心.例如圓之中心,平行形之對角線之交點,均對等心也.

【對極線】Polar.〔幾〕圓之弦繞任意之一定點而轉,於其每一位置時之兩端所作二切線之交點之軌跡,名曰關於定點之對極線,而定點名曰此線之極.如圖T



為定點即極,QR 為繞T而轉之弦之任一位置,P為由Q, R所作二切線之交點,PN為P 之軌跡即對極線.由圓心至極與



對極線之距離各為 OT, ON,而OA為圓半徑 有次之關係式: OT:OA=OA:ON,或 $ON\cdot OT=\overline{OA}^2$. 如斯之 N 與 T 兩點對中心O言,稱為互為倒形,或稱互為倒點.又關於T點之對極線通過P點,則關於P點之對極線必通過 T 點.如此二點之性質名曰倒換.對極線一稱極線,參閱極條.

【對稱式】Symmetrical expression.〔代〕與對稱函數同,見對稱條.

【對稱形】Symmetrical figure.〔幾〕成對稱之圖形之謂.

【對稱軸】Axis of symmetry.〔幾〕見軸對稱條.

【對數底】Logarithmic base.〔代〕〔三〕見對數條.

【對數表】Table of logarithms.〔代〕〔三〕實用對數表為載數之以 10 為底之對數之表(例如由一至十萬),而有算至四位者,有算至五位,六位,七位者.尋常數學中多用四位者,至高等數學中則須用七位者,方能精密.

〔對數表用法〕今示五位對數表(附錄二參照)之用法如次: I.求某數之對數.

(1)表中所有之數，其對數可直求得之。例如 27 之對數，其假數爲於表中當N行27之列，又當L列之o行處知爲3146，其前附以4，則得假數43146，附以指標1，則得 $\log 27=1.43146$。又求 3.94 之對數，當表中 N 行 39 之列，又當 L 列 4 行之處，知爲 9550，其前附以 5，得 59550，是爲假數，因指標爲零，故 $\log 3.94=0.59550$. (2)表中所無之數，檢最近此數之二數之對數，依比例可得所求之數．例如 153.7 之對數，檢表得 $\log 154-\log 153=2.18752-2.18469=0.00283$，是爲對應於小數第四位之一之差，由是 $1:0.7=0.00283:x$，$\therefore x=0.001981$ 四捨五入，$x=0.00198$，故得 $\log 153.7=2.18469+0.00198=2.18667$。II.求對應於某對數之眞數.(1)表中所有之數，其眞數可直求得之.例如對應於對數 $\overline{5}.22011$ 之眞數，由表知爲 0.0000166。(2)表中所無之數，檢最近此對數之二對數，依比例可得對應於與對數之眞數。例如求其對數爲 $\overline{3}.83142$ 之眞數，表中無適當之對數，然 $\log 0.00679-\log 0.00678=\overline{3}.83187-\overline{3}.83123=0.00064$，又 $\log N-\log 0.00678=\overline{3}.83142-\overline{3}.83123=0.00019$。由是 $64:19=0.00001:x$，$\therefore x\doteqdot 0.000003$。

$\therefore N=0.00678+0.000003=0.006783$。

【對數率】Modulus. 〔代〕〔三〕見對數條。

【對應角】Homologous angles 或 Corresponding angles.〔幾〕見對應條。

【對應面】Homologous face.〔幾〕見對應條。

【對應稜】Homologous edges.〔幾〕見對應條。

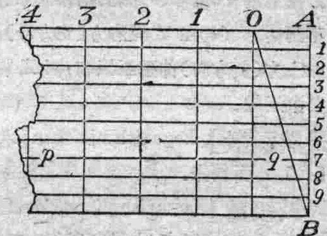
【對應線】Homologous lines.〔幾〕見對應條。

【對應點】Homologous points.〔幾〕見對應條。

【對應邊】Homologous sides.〔幾〕見對應條。

【對合中心】Centre of involution.〔幾〕見對合條。

【對角線尺】Diagonal scale.〔幾〕對角線尺，爲依相似三角形之理以精密與小線分者也．圖所示爲與一英寸之四十分



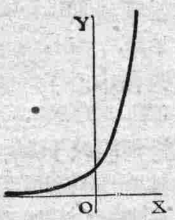
之一者，即設 OA 爲一英寸之四分之一。AB 以水平之平行線十等分之，命分點爲 1,2,3,……。如是 AB 與 OB 間所夾之部分，依相似三角形之理，由下端起表明 OA 之 $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \cdots\cdots, \frac{9}{10}$。

故 pq 之長爲 1 英寸零四十分之七。

【對稱中心】Centre of symmetry.〔幾〕見中心對稱條。

【對稱函數】Symmetrical function。〔代〕見對稱條。

【對數曲線】Logarithmic curve.〔幾〕爲超越曲線之一.關於直交軸之曲線,其各點橫線,恆等於其縱線之對數者,名曰對數曲線.方程式爲 $x=\log_a y$ 或 $y=a^x$. 如爲納白爾對數,則其方程式爲 $x=\log_e y$ 或 $y=e^x$. 圖爲 $x=\log_{10}y$ 或 $y=10^x$ 之軌跡,即常用對數的曲線也.對數曲線之性質如次:



(1)不通過原點. (2)在 Y 軸之截部爲一,在 X 軸之截部爲 $-\infty$. (3)關於兩軸及原點均不對稱. (4)在 Y 軸右方(正方向) X 軸上方(負方向)伸張至無窮,而 X 軸爲其漸近線.

【對數函數】Logarithmic function. 〔代〕見函數條.

【對數級數】Logarithmic series.〔代〕將 $\log_e(1+x)$ 展成x之昇冪所得之級數,謂之對數級數.其法如次:於指數定理

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2(\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3(\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$$

以 $1+x$ 代 a;則

$$(1+x)^y=1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\{\log_e(1+x)\}^2+\frac{y^3}{\lfloor 3}\{\log_e(1+x)\}^3+\cdots\cdots\cdots(1).$$

又由二項式定理,若 $x<1$,則得

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots\cdots(2).$$

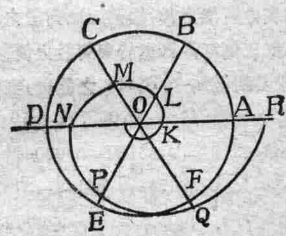
今(1)內 y 之係數爲 $\log_e(1+x)$,而(2)內爲

$$x+\frac{(-1)}{1.2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{1.2.3}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots,$$

即 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots,$

故 $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$,是即爲對數級數.

【對數螺線】Logarithmic spiral. 〔幾〕爲超越曲線之一.動點之動徑 ρ 之對數與其變角 θ 成正比例時,其軌跡謂之對數螺線.方程式爲 $\rho=a^\theta$ 或 $\theta=\log_a\rho$.從此方程式 $\theta=0$ 時,$\rho=1$,故



對數螺線皆通過點(1,0).又隨 θ 之增大,而 ρ 增大更速,然惟 θ 爲無窮大,ρ 亦爲無窮大,故無限次迴轉之後,ρ 爲無窮大.若 θ 由零減少,則 ρ 亦從 1 減少,θ 接近於負無窮大,則 ρ 接近於零,故此曲線漸近於極,而絕不能達於極.作對數

螺線法：任作一圓，分其周爲 AB，BC，CD，……若干等分．命其對數底爲 a，於 OA，OB，OC，OD，………諸半徑上取 OK，OL，OM，ON，…………令等於 1，a，a^2，a^3，………，則聯 K，L，M，N，………諸點之曲線，即對數螺線也．蓋 OK，OL，OM，ON，……諸動徑之對數爲 0，1，2，3，……，適等於其變角之比也．對數螺線之切線與其切點之動徑所成之角不變，故又名等角螺線．研究此曲線之主要人物爲雅各柏努利（Jacob Bernoulli），臨歿遺言，刻此曲線中有興味諸性質於其墓碑．

【對角三角形】Diagonal triangle.〔幾〕見完全四角形及完全四邊形兩條．

【對頂二面角】Vertically opposite dihedral angles.〔幾〕與對稜二面角同，見該條．

【對頂多面角】Vertically opposite polyhedral angles.〔幾〕以交於同一點三以上直線爲稜之相對之多面角之謂．

【對稜二面角】Vertically opposite dihedral angles.〔幾〕二平面相交所生相對之角之謂．而對稜二面角相等．

【對稱三角形】Symmetrical triangle.〔幾〕於平面三角形各邊各角相等者之謂．又於球面三角形見對稱球面三角形條．

【對稱方程式】Symmetrical equation〔幾〕與截部方程式同，見該條．

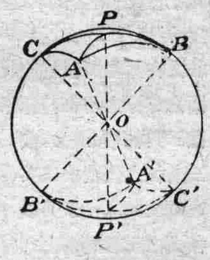
【對稱多面角】Symmetrical polyhedral angles.〔幾〕可對置於對頂多面角之位置之多面角之謂．

【對稱多面體】Symmetrical polyhedrons.〔幾〕關於點，直軸或面爲對稱之多面體之謂．

【對稱多邊形】Symmetrical polygons.〔幾〕於平面多邊形各邊各角相等者之謂．然對稱多邊形不相等，因須將其反轉後方可使之疊置故也．又於球面多邊形，見對稱球面多邊形條．

【對稱球角錐】Symmetrical spherical pyramids.〔幾〕球角錐之底面爲對稱多邊形者之謂．

【對稱球面三角形】Symmetrical spherical triangles.〔幾〕過球之中心 O，引三直徑 AA′，BB′，CC′．以大圓弧連結點 A，B，C，又以大圓弧聯結點 A′，B′，C′，成球面三角形 ABC，A′B′C′，而稱之爲對稱球面三角形．若二對稱球面三角形爲二等邊，則可疊置，故相等．又二對稱球面三角形爲等積．取小圓 ABC 之極，命 POP′ 爲直徑，則三角形 ABC，A′B′C′ 皆分爲二等邊三角形，故可證其爲等積．



【對稱球面多邊形】Symmetrical spherical polygons.〔幾〕以球面多邊形之各角頂之對點爲角頂，作成第二球面多邊形，則此多邊形，謂之前多邊形之

對稱球面多邊形.

截

【截口】Section.〔幾〕即截面,見該條.

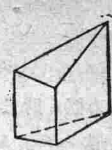
【截面】Section.〔幾〕曲面或立體或以一平面截之，其平面與曲面相交之曲線或平面與立體相交之平面形，謂之截面或截口.

【截部】Intercept.〔幾〕一線與兩軸相交,從原點至其交點之長,謂之軌跡之截部.例如X軸上軌跡之截部,即該軌跡交於X軸之點之橫線也.求截部法:取軌跡方程式,令 $y=0$ 解之,得 x 之值,即為在X軸上之截部.同理令 $x=0$ 解之,得 y 之值,即為在Y軸上之截部.

【截軸】Transversal axis.〔幾〕見貫徑條.

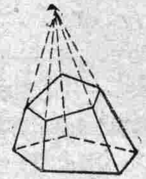
【截線】Transversal.〔幾〕橫截一列直線之直線,謂之截線或橫截線.

【截角柱】Truncated prism.〔幾〕角柱之在其底與傾斜於其底之平面之截面間之部分之謂也.其底為三角形者,謂之截三角柱;餘類推.截三角柱之體積與以其底為公共底，以其斜截面之三頂為頂之三個角錐之和為等積.



又截三角柱之體積等於其直截面與其三側稜之和之積之三分之一.

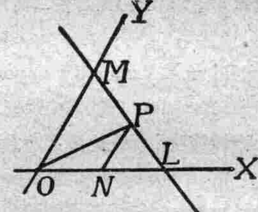
【截角錐】Truncated pyramid.〔幾〕截角錐者，角錐之上部以不平行於其底之平面截去之所遺留之部分之謂也. 如圖所示為截五角錐.



【截圓柱】Truncated cylinder.〔幾〕圓柱之在其底與傾斜於其底之平面之截面間之部分之謂.

【截圓錐】Truncated cone.〔幾〕圓錐之上部以不平行於其底之平面截去之，其所遺留之部分,謂之截圓錐.

【截部方程式】Intercept equation.〔幾〕設任意直線 LM 關於X軸之截部為



$OL=a$，關於Y軸之截部為 $OM=b$，而兩軸之交角為 ω. 從此直線上任意一點 $P(x,y)$ 引與Y軸平行之直線 PN，則 $\triangle LOP+\triangle POM=\triangle LOM$，即 $OL\cdot PN\sin\omega+OM\cdot ON\sin\omega=OL\cdot OM\sin\omega$，

即 $bx+ay=ab$，即 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 此式名曰直線 LM 之截部方程式,或謂之對稱方程式.直線之一般方程式為 $Ax+$

By+C=0，化之為$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$.

與上式比較，可知一般直線方程式之截部為$-\frac{C}{A}$，$-\frac{C}{B}$.

演

【演算】Operation.〔數〕與運算同，見該條.

【演繹法】Deduction.〔數〕推理之法，大別為二，一曰歸納法，一曰演繹法．歸納法為考察種種事實，依適當之法則，發見普遍之眞理之法之謂；演繹法為由普徧之眞理，以斷定特殊之眞理之法之謂．幾何學為以演繹法為主.

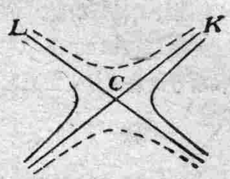
【演算記號】Symbol of operations.〔算〕即表實行運算之記號，例如 a+b 之+為表示加 b 於 a 之運算之符號．又記號 +，-，×，÷，√ 等皆謂之演算記號.

漸

【漸伸線】Involute.〔幾〕即展開線，詳縮閉線條.

【漸屈線】Evolute.〔幾〕即縮閉線，見該條.

【漸近線】Asymptote.〔幾〕切曲線於無窮遠點之直線，謂之該曲線之漸近線．雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有二漸近線，即$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$是也，前者為

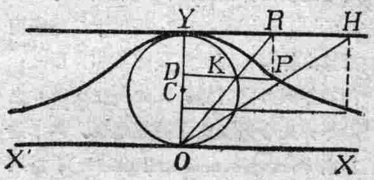


CK，後者為 CL．此雙曲線之共軛雙曲線，即$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，與之有共同之漸近線.

【漸近分數】Convergent fraction.〔代〕即連分數之近數，見連分數條及近數條.

箕

【箕舌線】Witch.〔幾〕為三次曲線之一．如圖，OY 為圓 OKY 之直徑，從 Y 作



切線 YH，從O向 YH 引任意直線 OR，遇圓於 K，自 K 作 KD 垂直 OY，引長 DK，使 DP=YR，則 P 點之軌跡，謂之箕舌線．此線為十八世紀意大利數學家阿內濟(Agnesi)所作，其方程式可求之如次：以切線 OX 及直徑 OY 為兩軸，設 OY=2a，P 為動點，則 OD=y，DP=x．而 OD:OY=DK:DP(=YR)，即 $y:2a=\sqrt{y(2a-y)}:x$，故$x^2y=4a^2(2a-y)$．此曲線之性質如次：(1)在 Y 軸之截部

爲 2a. (2)關於 Y 軸爲對稱. (3)全在 $y=0$ 及 $y=2a$ 二直線之間. (4) X 軸爲在 Y 軸兩方無窮遠分支之漸近線.

算

【算術】Arithmetic.〔數〕算術爲數學之一分科，用數字以論數之性質及關係者也.算術大別爲二，一論整數，分數，小數之記數法，命數法，加減乘除，自乘法，開方法者，而爲算術之根本.一爲算術之應用者，而爲諸等數，比及比例，百分法及利息，求積等.普通所用之記數命數法爲十進法，然 10 以外任意之數可用爲底.例如德國之來布尼茲 (Leibniz) 發明二進法.算術因其論法而有種種特別之名稱.即十進算術(Decimal arithmetic)，爲十進法之算術之謂.十二進算術(Duodecimal arithmetic)，爲以十二爲底而計算之算術，而世間實際某部分用之，例如年與月之計算，又如英尺與英寸之計算，先令與便士之計算是也.六十進算術 (Sexagesimal arithmetic)，爲以六十爲底而計算之算術，例如度分秒之計算是也.普通算術 (Universal arithmetic)，爲就普通之數而論之算術，見普通算術條.器械的算術 (Instrumental arithmetic)，爲用器械以計算者，如我國算盤之計算(見算盤條)，又如計算尺亦爲器械的算術.表算術 (Tabular arithmetic)，爲用表以計算之算術.政治的算術(Political arithmetic)，爲應用政治的數於算術者，例如定一國之人口，男女兩性之分數，作生死之統計，算輸出輸入之額，諸稅之計算是也.

【算盤】Abacus.〔算〕爲珠算所用之器械，以木爲之.四周作長方形之框，中植縱桿若干，名曰檔，每檔貫木珠七顆，用橫木一，隔爲上二下五，此橫木名曰梁.梁下每珠作一，梁上每珠作五.其左檔各珠皆爲右檔之十倍.用時可用口訣以行計算，頗爲便利.

【算術差】Arithmetical difference.〔代〕由大數減去小數之餘數之謂，見差條.

【算術中項】Arithmetic mean 或 Arithmetical mean.〔算〕〔代〕即等差中項.

【算術級數】Arithmetic (或 Arithmetical) progression 或 Arithmetical series.〔算〕〔代〕即等差級數，見該條.

綜

【綜合法】Synthesis, method of.〔數〕綜合法爲解析法之逆，而由公理，定義及已知之定理，推理希望之結論之推理法之謂.初等幾何學之推理法，多爲綜合法.綜合法爲由特殊之事實推至普遍之事；解析法爲由普遍之事實推至特殊之事實.見解析法條.

【綜合除法】Synthetic division.〔代〕綜合除法爲和涅(Horner)所發明，其法如次. $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\cdots$，以 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\cdots\cdots$ 除之，命此商

爲 $Ax^{m-n}+A_1x^{m-n-1}+A_2x^{m-n-2}+A_3x^{m-n-3}+A_4x^{m-n-4}+\cdots\cdots$，茲示決定 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots\cdots$ 之方法。因以除數乘商，則得被除數，而此運算用分離係數法則如次。

$$
\begin{array}{l}
A+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots\cdots \\
1+a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots \\
\hline
A+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots\cdots \\
\quad a_1A+a_1A_1+a_1A_2+a_1A_3+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad a_2A+a_2A_1+a_2A_2+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad a_3A+a_3A_1+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +a_4A+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\
\hline
A+B+C+D+E+\cdots\cdots
\end{array}
$$

今末列之各項可依次將二橫線間之各行相加而得之，若設已知 $A, B, C, D, \cdots\cdots$ 求 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 而對於此目的，將上之運算逆之如次。

$$
\begin{array}{r|l}
 & A+B+C+D+E+\cdots \\
-a_1 & \quad -a_1A-a_1A_1-a_1A_2-a_1A_3-\cdots \\
-a_2 & \qquad\qquad -a_2A-a_2A_1-a_2A_2-\cdots \\
-a_3 & \qquad\qquad\qquad -a_3A-a_3A_1-\cdots \\
-a_4 & \qquad\qquad\qquad\qquad -a_4A-\cdots \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\hline
 & A+A_1+A_2+A_3+A_4+\cdots
\end{array}
$$

前運算之縱行與後運算之縱行，結果相同，後運算對於此目的更爲便利。例如前運算之第四縱行爲 $A_3+a_1A_2+a_2A_1+a_3A=D$，後運算之第四縱行爲 $D-a_1A_2-a_2A_1-a_3A=A_3$。故此法如次：(1)除數之第一項若爲數字係數，則以此係數除被除數及除數之各係數。如是係數可如次。(2)被除數之係數以適當之符號書於一橫列(其缺乏之係數以 o 補之)，則得 $A+B+C+D+E+\cdots\cdots$ 之橫列。(3)於此係數之左引縱線，將除數之係數變其符號，而書之(缺乏者亦以 o 補之)，如是得 $-a_1-a_2-a_3-a_4-\cdots\cdots$，但除數之第一項之係數爲 1，可置之勿論。(4)此縱行之各係數，以被除數之第一係數乘之，其結果可書於第一斜行，此 $-a_1A-a_2A-a_3A-\cdots\cdots$，而其第一項須置於B之下。(5)縱線右第二行相加爲 $B-a_1A=A_1$，是爲商之第二項之係數。(6)以如斯所得之係數乘縱線左之各係數，得第二斜行 $-a_1A_1-a_2A_1-a_3A_1-\cdots\cdots$，其第一項須置於 C 之下。(7) 縱線右第三項相加爲 $C-a_1A_1-a_2A=A_2$，是爲商之第三項之係數。(8) 繼續此等運算，可得所求之項。例如以 x^2-2x+3 除 $4x^4+3x^2-3x+1$。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4+0+3-3+1 \\
2 & \quad 8+16+14-26-92 \\
-3 & \qquad -12-24-21+39+138 \\
 & \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & 4+8+7-13-46-53+\cdots
\end{array}
$$

故商爲 $4x^2+8x+7-13x^{-1}-46x^{-2}-53x^{-3}+\cdots\cdots$。若商止於 7，則棄去斜行 -26，$+39$ 及其以後之斜行，而結果爲 $4x^2+8x+7-\dfrac{13x+20}{x^2-2x+3}$。

【綜合幾何學】Synthetic geometry.〔幾〕亦名組立幾何學,組成幾何學,組織幾何學,又稱近世幾何學,位置幾何學,射影幾何學,投影幾何學.詳近世幾何學條.

聚

【聚交點】Point of concurrence.〔幾〕三以上直線相交之點即共點線之交點,謂之聚交點.

臺

【臺】Frustum.〔幾〕立體之一部以平行於底之平面截去之,其所遺之部分,謂之臺或平截體.多就角臺,圓臺而言,即角錐或圓錐之上部以平行於其底面之平面截去之者之謂.

複

【複比】Compound ratio.〔算〕〔代〕二以上之比相乘合成之比,謂之複比.例如比 2:5 與 3:7 之複比爲 $2\times3:5\times7$,以 $\left.\begin{matrix}2:5\\3:7\end{matrix}\right\}$ 記之.又比 a:b, c:d, e:f 之複比爲 ace:bdf.

【複式】Compound expression.〔代〕由二項以上而成之式之謂.例如 $a+b$, $2x+3y-z$ 是也.實即多項式.

【複利】Compound interest.〔算〕〔代〕於利息,某期間之利息,於其期之末,算入本金以爲次期之本金;次期之利息,於其期之末又算入本金,以爲第三期之本金;如是類推,此種利息,謂之複利.命本金爲 P,本利合計爲 A,利率爲 r,期間爲 n,則 $A=P(1+r)^n$.

【複數】Composite number.〔算〕即非素數,見該條.

【複分數】Compound fraction.〔算〕〔代〕複分數爲分數之分數.例如 $\frac{5}{7}$ 之 $\frac{2}{3}$,及 $\frac{3}{8}$ 之 $\frac{2}{3}$ 之 $\frac{2}{15}$ 爲複分數.而複分數可用乘法化成簡分數,如 $\frac{5}{7}$ 之 $\frac{2}{3}=\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{21}$, $\frac{3}{8}$ 之 $\frac{2}{3}$ 之 $\frac{2}{15}=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{30}$

【複比例】Compound proportion.〔算〕〔代〕比例之等號之一側或二側爲複比者,謂之複比例.例如 $\left.\begin{matrix}2:3\\4:5\end{matrix}\right\}=100:x$ 是也.

開複比例式之法,以隻項爲第三項,未知數爲第四項,其他同種之數,考其正反,而爲第一二項;然後以第一項之連乘積,除第二項,乘第三項之連乘積,則得答數.例如農夫 5 人每日作工 11 小時,則 6 日耕田 13 畝,今 9 人每人作工 10 小時,欲耕田 39 畝需幾日.先以隻項 6 日,未知數 x 日列於後節.因同工程之人數與日數爲反比,故有 9 人 :5 人;因同工程之時數與日數爲反比,故有 10 時 :11 時;因同工人之畝數與日數爲正比,故有 13 畝 :39 畝.

$$\left.\begin{array}{r}9:5\\10:11\\13:39\end{array}\right\}=6:x,$$

得 $x=\dfrac{5\times11\times39\times6}{9\times10\times13}=11$ 日

又或不論已知與未知，但將各數分爲起因與結果．將起因之數列於前節，結果之數列於後節，然後依尋常之法解之卽得未知數．是爲之因果法．如上例可用因果法開比例式如次:

5人×6日×11時:9人×x 日×10時=13畝:39畝．求解其未知數之式仍與上同．

【複平均】Compound average．〔算〕平均之複雜者之謂．例如某火車每日行 80 里 2 小時，100 里 3 小時，110 里 5 小時，求每小時平均之里數．因所行里數之總數 $80\times2+100\times3+110\times5=1010$ 里，以時間之總數 $2+3+5=10$ 除之，則得 101 里．

【複名數】Compound number．〔算〕用二以上單位所表示之數，謂之複名數或諸等數．例如 3 尺 5 寸，7 小時 20 分是也．複名數可化爲單名數．如 3 尺 5 寸可化爲 3.5尺 或 35 寸；7 小時 20 分可化爲 $7\dfrac{1}{3}$時或 440 分．

【複因數】Composite factor．〔算〕由二以上因數之積而成之因數之謂．例如 42 分爲因數 7×6 時，6 尙可分爲二因數 2×3，故爲複因數．然 7 除 1 及本身外，不能分解爲二因數，故爲單因數．

【複曲面】Double curved surface．〔幾〕見曲面條．

【複利法】Compound interest．〔算〕關於複利之算法之謂．

【複符號】Double sign 或 Ambiguous sign．〔代〕卽符號±之謂，卽爲＋或－之意義者．例如 $a\pm b$．

【複虛數】Complex number．〔代〕複虛數含有實數與虛數二種數，若 a 及 b 爲實數，則形如 $a+b\sqrt{-1}$ 之數謂之複虛數，而 $\sqrt{-1}$ 通例以 i 表之，故複虛數 $a+ib$．複虛數可以圖表之，見複虛數之圖示法條．

【複合資算】Compound partnership．〔算〕於合資算，利益之分配，損失之擔負，比例出資之多寡與出資期間之長短之算法，謂之複合資算．例如甲五月間出資本金 2400 元，乙六月間出資本金 1600 元．共營商得純利益 865 元，按比例於出資之額與月而分配之是也．

【複利年金】Annuity at compound interest．〔算〕〔代〕複利年金者，年金之利息依複利法而計算者之謂．

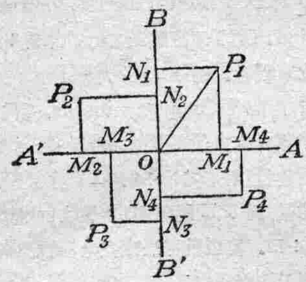
【複性函數】〔數〕與多價函數同，見一價函數條．

【複假設法】Double suppositions．〔算〕見假設法條．

【複循環節】Compound repetend．〔算〕見循環小數條．

【複虛數之圖示法】Graphical representation of a complex number．〔代〕複虛數之圖示法，1797年味塞爾(Wessel)始發明之．1806 年阿共 (Argand) 亦發

明之．其法如次：於平面內引互相垂直二直線 AOA'，BOB'，命 AOA' 爲實數軸，BOB' 爲虛數軸．凡實數 x 可在實數



軸上表之，卽於 AOA' 上取 $OM=|x|$，按 x 爲正或負，以定在 O 點之右方或左方取之；如是實數 x 可以 M 點之位置或 OM 直線表之．虛數 iy 可在虛數軸上表之，卽取 $ON=|y|$，按 y 爲正或負以定在 O 點之上方或下方取之；如是虛數 iy 可以 N 點之位置或 ON 直線表之．複虛數 $x+iy$ 可以 OM，ON 爲邊所完成之矩形 OMPN 之對角線 OP 表之．如圖 P_1 表示複虛數 x_1+iy_1，而 x_1，y_1，皆爲正；P_2 表示 x_2+iy_2，而 x_2 爲負，y_2 爲正；P_3 表示 x_3+iy_3，而 x_3，y_3 皆爲負；P_4 表示 x_4+iy_4，而 x_4 爲正，y_4 爲負．

複虛數之加，減，乘，除，自乘，開方諸運算，皆可以圖表示之．其法見北京高等師範學校數理雜誌二卷三，四號．

誤

【誤差】Error．〔數〕近似值與眞值之差，謂之誤差．例如以 .33 代 $\frac{1}{3}$，其誤差爲 $\frac{1}{300}$．

輔

【輔角】Auxiliary angle．〔三〕卽補助角，見該條．

【輔圓】Auxiliary circle．〔幾〕卽補助圓，見該條．

輕

【輕噸】Short ton．〔算〕美國之噸之謂，卽二千磅之噸，等於我國庫平 1520 斤．

遞

【遞昇次】Ascending order．〔代〕數之次序遞次上昇之謂．例如式之昇冪之排列，卽於 $1-2x+5x^2-4x^3$，x 之指數爲遞昇次．

【遞降次】Descending order．〔代〕數之次序遞次下降之謂．例如 x 降冪之排列，卽如於 $3x^4-5x^3+7x^2-x+1$，x 之指數爲遞降次．

【遞昇函數】Ascending function．〔數〕凡函數因其變數之增而亦增者，謂之遞昇函數，亦稱遞增函數或增函數，對遞降函數而言也．故於遞昇函數，其變數減，函數亦隨之而減．例如 $y=ax^3$，$y=(a+x)^3$ 等式內，y 爲 x 之遞昇函數．

【遞昇級數】Ascending series．〔代〕級數之各項之絕對值大於其前項之絕對值者之謂，例如 1，2，4，8，……是也．

【遞降函數】Descending function.〔數〕凡函數因其變數之增而反減者，謂之遞降函數，或稱遞減函數或損函數，爲與遞昇函數相對待之稱。故於遞降函數，其變數減，函數反隨之而增。例如 $y=(a-x)^3$，$y=\frac{a}{x}$ 等式內，y 爲 x 之遞降函數。

【遞降級數】Descending series.〔代〕級數之各項之絕對值少於其前項之絕對值者之謂，例如 9,7,5,3,1,……是也。

【遞降積分法】Integration by reduction.〔積〕所設積分式常可以一已知之函數及他一新積分表之，用此方法能使複雜函數之積分漸次化爲簡單積分，是名遞降積分法。例一：$\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$。先令 $u=x^{n-1}$，$\frac{dv}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 而行部分積分，則得 $\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x^{n-1}(-\sqrt{a^2-x^2})-\int(n-1)x^{n-2}(-\sqrt{a^2-x^2})dx=-x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}+(n-1)\int\frac{a^2x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx-(n-1)\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$。將右邊最後之積分移至左邊，而後兩邊以 n 除之，得 $\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(n-1)a^2}{n}\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$。此式右邊積分函數比之左邊積分函數，其分子次數低二次，故用前法可由此積分更得低二次之積分，反覆推行，終至於得 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$（n 爲偶數），或 $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$（n 爲奇數）。然此兩積分爲既知者，故不論 n 爲何數，$\int\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ 恆可以求得。例二：$\int x^ne^{ax}dx$（n 爲正整數）。令 $u=x^n$，$\frac{dv}{dx}=e^{ax}$ 而行部分積分，則得 $\int x^ne^{ax}dx=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\int\frac{e^{ax}}{a}nx^{n-1}dx=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$。此法反覆用之，終達 $\int e^xdx$ 即 $\frac{e^{ax}}{a}$。茲將遞降法求二項微分式或三角函數的微分式之積分之公式列之於次：

(A). $\int x^m(a+bx^n)^pdx=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b}-\frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^pdx$.

(B). $\int x^m(a+bx^n)^pdx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$.

(C). $\int x^m(a+bx^n)^pdx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a}-\frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a}$

$\int x^{m+r}(a+bx^n)^p dx.$

(D). $\int x^m(a+bx^n)^p dx=$

$-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a}+\frac{np+n+m+1}{n(p+1)a}$

$\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$

式中之 p 為有理數，m 與 n 為整數，且 n 為正。若 $np+m+1=0$，則(A)與(B)二式失敗；若 $m+1=0$，則(C)式失敗；若 $p+1=0$，則(D)式失敗。

例題。$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C$。解：$m=3$，$n=2$，$p=-\frac{1}{2}$，$a=1$，$b=-1$。應用(A)式，

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{x^{3-2+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)}-\frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)}\int x^{3-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+C=-\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

(E). $\int\sin^m x\cos^n xdx=$

$\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}$

$\int\sin^m x\cos^{n-2}xdx.$

(F). $\int\sin^m x\cos^n xdx=$

$-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}$

$\int\sin^{m-2}x\cos^n xdx.$

(G). $\int\sin^m x\cos^n xdx=$

$-\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}$

$\int\sin^m x\cos^{n+2}xdx.$

(H). $\int\sin^m x\cos^n xdx=$

$\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1}+\frac{m+n+2}{m+1}$

$\int\sin^{m+2}x\cos^n xdx.$

當 $m+n=0$ 時，(E)與(F)兩式失敗；$n+1=0$ 時，(G)式失敗；$m+1=0$ 時，(H)式失敗。

例題。$\int\sin^2x\cos^4xdx=-\frac{\sin x\cos^5x}{6}+\frac{\sin x\cos^3x}{24}+\frac{1}{16}(\sin x\cos x+x)+C$。解：應用(F)式，$\int\sin^2x\cos^4xdx=-\frac{\sin x\cos^5x}{6}+\frac{1}{6}\int\cos^4xdx$。應用(E)式積分上之結果之第二項，

$\int\cos^4xdx=\frac{\sin x\cos^3x}{4}+\frac{3}{4}\int\cos^2xdx$。應用(E)式積分上之結果之第二項，$\int\cos^2xdx=\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{x}{2}$。

將第三次所得之結果代入第二次之結果中，於是以其結果代入第一次之結果中，即得如題之解答。

銀

【銀行折扣】Banker's discount.〔算〕〔代〕見折扣條。

齊

【齊次式】Homogeneous expression. 〔代〕與同次式同,見該條.

【齊次積】Homogeneous product. 〔代〕與同次積同,見該條.

【齊次對稱式】Homogeneous symmetrical expression.〔代〕與同次對稱式同,見該條.

十五畫

價

【價】Value.〔算〕價爲物品之值之謂,例如鉛筆一打之價,紙一張之價是也.

億

【億】〔算〕數名. 有以十萬爲億者,即 100000 是也,有以萬萬爲億者,即 100000000 是也.參閱命數法條.

劈

【劈】Wedge.〔幾〕同楔,見該條.

【劈生數】Factorisation.〔算〕〔代〕即因數分解,見該條.

增

【增根】Additional root 或 Extraneous root.〔代〕方程式 $P=Q$ 之兩邊以 L 乘之,則爲 $LP=LQ$,或 $L(P-Q)=0$. 但設 L, P, Q 皆爲含未知數之式. 上方程式含 $L=0$ 及 $P-Q=0$ 二方程式,然其根爲 $L=0$ 或 $P=Q$ 之根,然 $L=0$ 之根,不必適合 $P=Q$;故以含未知數之式乘方程式之兩邊則得增根. 又方程式 $P=Q$ 之兩邊自乘 n次,則 $P^n=Q^n$,或 $(P-Q)(P^{n-1}+P^{n-2}Q+\cdots+Q^{n-1})=0$,故 $P=Q$ 之根必爲 $P^n=Q^n$ 之根,然 $P^n=Q^n$ 之根爲方程式 $P=Q$ 或 $P^{n-1}+P^{n-2}Q+\cdots\cdots+Q^{n-1}=0$ 之根,故不能必適合方程式 $P=Q$. 故方程

式之兩邊自乘常得增根。欲解分數方程式以分母之最小公倍數乘之，或欲解無理方程式，方程兩邊自乘，常得不適合方程式之根，即得增根。例如於方程式

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)}-\frac{3}{x-3}=0\cdots\cdots(1),$$

以分母之最小公倍數乘之，則得 $x^3-4x^2+2x+3=0$，即 $(x-3)(x^2-x-1)=0$，故其根爲 $x=3$，$x=(1\pm\sqrt{5})/2$。其中 $x=(1\pm\sqrt{5})/2$ 適合原方程式，而 $x=3$ 則不適合原方程式，而非爲其根。此時惟一之要點爲(1)之左邊有多餘之除數，即(1)之左邊以部分分數分離之，實爲 $\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-x-3}{(x-2)(x-3)}-\frac{3}{x-3}\equiv\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}\equiv\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+1$。

又如欲解 $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(x-1)}=1$，移項得 $\sqrt{(x+1)}=1-\sqrt{(x-1)}$，兩邊平方而化簡之，則得 $1=-2\sqrt{(x-1)}$。兩邊再平方，則 $1=4(x-1)$，故 $x=\frac{5}{4}$。然 $x=\frac{5}{4}$ 不爲原方程式之根。

【增量】Increments.〔數〕一變數由一數值變化至他一數值時，從第二者減去第一者之差，謂之該變數之增量，x 之增量通常以符號 Δx 表之。

【增函數】Ascending function.〔數〕即遞昇函數，見該條。

廣

【廣】Breadth 或 Width.〔幾〕物體由前至後之距離謂之廣。

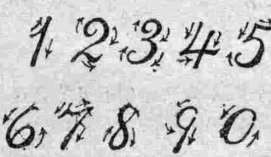
數

【數】Number.〔數〕有若干之物，由其各個謂之一物之外取去其特性時，則得數之觀念。對於一物之數謂之一，一與一之集合謂之二，二與一之集合謂之三，三與一之集合謂之四，逐次至五，六，七，八，九，而各以記號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 表之。由此更進至十，十一，十二，……其結果至無限。如上所述，由數 1 集合而成之數謂之整數。次若 a 不爲 b 之倍數，則 $a\div b$ 即 $\frac{a}{b}$ 爲無意義，然今擴張數之範圍，a 不爲 b 之倍數時，謂 $\frac{a}{b}$ 爲分數，而加入於數之中。此時 a 謂之分子，b 謂之分母。例如 $\frac{3}{5}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{8}{13}$，而分數如整數然，能當基本之定則者。小數不過其分母爲 10 或 10 之乘冪之分數之特別之例而已。例如 $\frac{3}{10}$，$\frac{19}{100}$，$\frac{23}{1000}$，……，各以 0.3，0.19，0.023 記之。又擴張數之範圍，例如 $\sqrt{2}$，其平方爲 2 之數，如斯之數謂之根數，或無理數。而根數或無理數惟可求得其近似值。即 $(1.4142135)^2$ 與 2 之差爲 0.00000017641775；而 $(1.4142136)^2$ 與 2 之差爲 0.00000010242469，故 $\sqrt{2}$ 之至小數第六位之近似值爲 1.414213。凡冠以根號 $\sqrt{\ }$ 者皆謂之根數，不盡根，或無理數。例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{4}$

是也.又有正數負數,見正量,負量條.今將數之關係以表記之如次.

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 正數
        - 正整數
        - 正分數
      - 負數
        - 負整數
        - 負分數
    - 無理數
      - 正無理數
      - 負無理數
  - 虛數

【數字】Digit 或 Figure.〔算〕數字爲代表九基數之記號,即 1,2,3,4,5,6,7,8,9 之謂.然有時加 0 於其中而謂之數字者,此時由 1 至 9 之諸數字謂之有效數字(Significant figure).數字之書法可如次示依矢之向以書之.



5 又有如右圖連續書之者,是爲 5 之本來之寫法,然現今普通皆如前書之.

【數值】Numerical value.〔代〕代數式之數值爲式中之諸文字,以數值代入之,且行所示之運算所得之結果之謂.例如 $a=2$, $b=3$, $c=1$, $d=5$, 則 a^2b-c^2d 之數值爲 $2^2.3-1^2.5=7$.

【數論】Theory of numbers.〔代〕論整數之性質,及關於整數之定理者也.

【數學】Mathematics.〔數〕數學爲論關於數及量之科學之總稱.數學分三大分科,即算術,幾何學,解析法是也. I.算術爲以數字表數而論其關係性質等,而算術有純正部分與應用部分二者之分. II.幾何學爲論關於線,面,體之定理,性質等等之分科,幾何學有初等幾何學與高等幾何學之別. (1)初等幾何學爲以直線及圓爲元素,而論此等或由此等之集合而成之圖形. (2)高等幾何學論直線與圓之外普通之曲線曲面等.此外尙有 (3)畫法幾何學,爲關於含三度者,以諸問題之圖的解法爲目的. III.解析法含以字母表數,以記號表運算之諸分科,而其中有代數學,解析幾何學,微積分學等. (1)代數學爲論關於代數數及超越數之性質,關係,運算等.三角函數亦屬於其中,然普通將三角法另立一分科. (2)解析幾何學爲應用代數式於幾何學者,而其中有定解析幾何學與不定解析幾何學. (3)微積分學爲數學分科之最高科;又有稱爲變分學.微分學,積分學爲就既知之函數而立論者;然變分學爲就未知之函數而立論者也.以上所述之外,尙有力學爲應用數學之一分科.

【數字值】Digit value.〔算〕數字本身之值之謂,即對於位置值而言也.

【數字係數】Numerical co-efficient.〔代〕數字係數爲數字所表之係數之謂.例如 $5x^3$ 之 5 爲數字係數.數字係數

對於文字而言之語也.

【數字方程式】Numerical equation.〔代〕方程式之係數爲數字者之謂.數字方程式爲對於文字方程式而言之語.例如 $3x-7=0$, $7x+4y=10$, $x^2-3x+5=0$ 皆是也.

【數學的歸納法】Mathematical induction.〔數〕數學的歸納法,可由次例以明之.依除法 $\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+\frac{a(x^{n-1}-a^{n-1})}{x-a}$.故若 $x^{n-1}-a^{n-1}$ 可以 $x-a$ 整除之.則 x^n-a^n 可以 $x-a$ 整除之.然 x^2-a^2, x^3-a^3 可以 $x-a$ 整除之,此明知之.故 x^4-a^4 亦可以 $x-a$ 整除之,旣知 x^4-a^4 可以 $x-a$ 整除之,則 x^5-a^5 亦可以 $x-a$ 整除之,如是類推.故 n 爲正整數時, x^n-a^n 可以 $x-a$ 整除之.又他例證明級數 1,3,5,7,……之 n 項之和爲 n^2.因此級數之第 n 項爲 $2n-1$.假定 $1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$.加 $2n+1$ 於其兩邊,則 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.故若此級數之 n 項之和等於 n^2,則 $n+1$ 項之和等於 $(n+1)^2$;換言之,此定理若取級數之任意若干項爲眞,則項數增一時亦爲眞.然 $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$,卽取四項時此定理爲眞,故取五項時此定理爲眞,由是取六項時及取七項時亦爲眞,如是類推.故此定理普通皆眞.由是以觀,數學的歸納法如次:若知一定理於任意某事例爲眞,證明其次之事例亦爲眞,由是已證此定理一般皆眞.於數學中若干重要公式,用尋常之證法難證明之,此時須用此證法.

標

【標準制】Standard system.〔算〕卽係萬國公制,與米突制同,見米突制條.

【標準時】Standard time.〔算〕太陽經過某地之子午線時,以爲其地之正午,而謂之地方時.而地方時各地不同,例如格林維基之正午,爲紐約之午前 7 時 3 分 59.8 秒;上海之正午爲漢口之午前 11 時 32 分 20 秒.而電報,輪船,火車等迅速交通機關之開發,用各地之地方時,甚覺不便.於是取某地之時刻以爲本區域內各地方之時刻之標準,是謂之標準時.

模

【模數】Modulus.〔代〕見等剩式及根率條.

歐

【歐拉公式】Euler's formula[1].〔代〕

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,\quad \frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0,$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+$$

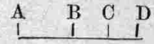
$$\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1,\quad \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=$$

$a+b+c$. 此四式謂之歐拉公式.又三角法中之歐拉乘積亦有稱之爲歐拉公式者，見歐拉乘積條.

【歐拉公式】Euler's formula[2]. 〔微〕$u=f(x,y,z,\cdots\cdots)$，且爲$x,y,z,\cdots\cdots$之n次同次函數時,則$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+\cdots\cdots=nu$，$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+2zx\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\cdots\cdots=n(n-1)u$. 此爲歐拉公式.由此得次之三公式：u爲x，y之n次同次函數時，則$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu$，$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$，$x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3x^2y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3xy^2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+y^3\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=n(n-1)(n-2)u$.

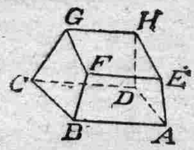
【歐拉定理】Euler's theorem[1]. 〔代〕代數中歐拉定理如次：若$\phi(m)$爲小於m而與m互爲素數之整數之個數,且若a與m互爲素數,則$a^{\phi(m)}-1$可以m除盡.此爲斐馬定理經歐拉普遍之者.

【歐拉定理】Euler's theorem[2].〔幾〕幾何學中歐拉定理有二，在平面幾何學中者如次：於一直線上依次取A,B,C,D四點,則矩形AC·BD等於矩形AB·CD與矩形BC·AD之和.〔證〕



$$\begin{aligned}AC\cdot BD&=(AD-CD)(BC+CD)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC+CD(AD-CD)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC+CD(AB+BC)\\&=AD\cdot BC-CD\cdot BC+CD\cdot AB+CD\cdot BC\\&=AD\cdot BC+CD\cdot AB.\end{aligned}$$

在立體幾何學中者如次：凸多面體之稜數加2等於其頂數與其面數之和.即任意多面體之稜數爲E，頂數爲V，面數爲F，則$E+2=V+F$.〔證〕先取一面ABCD，得$E=V$.次取第二面BCGF，置其一稜於第二面之相當稜，則有一公共稜BC與二公共頂B，C.故由二面得$E=V+1$.



再取第三面ABFE，與第一面第二面相接，則此三面有二公共稜與三公共頂A，B，F.故由三面得$E=V+2$.同理，由四面可得$E=V+3$，餘可類推. 故由$(F-1)$面得$E=V+(F-2)$.但$F-1$爲多面體缺一面者之面數，加此一面，其稜數與頂數不加增.故由F面得$E=V+F-2$，卽$E+2=V+F$.

【歐拉乘積】Euler's product.〔三〕因

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$=4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

$$=8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}.$$

故 $\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}.$

若 n 無限增大，則 $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ 之極限為 $\dfrac{\sin x}{x}$。此結果謂之歐拉乘積。

【歐拉級數】Euler's series. 〔三〕於格列高里級數 $\theta=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots\cdots$，

命 $\tan\theta=x$，則 $\theta=\tan^{-1}x$，故得

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots\cdots.$$

而 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{6}\right)\right\}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$;

$$\therefore\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}-\frac{1}{7\cdot2^7}+\cdots\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}-\frac{1}{7\cdot3^7}+\cdots\cdots$$

是謂之歐拉級數。

【歐幾里得】Euclid. 〔幾〕歐幾里得為希臘古代之幾何學者，為第一著完全幾何學書之人，而後世遂取其名以為書名，即所謂歐幾里得原理(Elements of Euclid)是也。現今通行之歐幾里得，第一卷直線，第二卷面積，第三卷圓，第四卷內接形及外接形，第五卷比例之理論，第六卷比例之應用，第十一卷為立體幾何學之初步。英國現今雖仍用稍加修正之歐幾里得，然他國用之甚少。歐幾里得之第七至第十卷所論多與數論之幾何學有關，第十二卷以下以至第十五卷論立體，或謂第十四第十五兩卷為後人所續。歐幾里得，我國舊時有譯本，即幾何原本是也。此書前六卷係西人利瑪竇與明人徐光啓所譯，後九卷係英人偉烈亞力及清人李善蘭所譯。

【歐拉消去法】Euler's method of elimination. 〔代〕此法就 x 之任意二方程式消去 x，其法可由次例以明之。〔例〕求消去 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$, $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之 x。若此二方程式有一公根，則得 $(B_1x+B_2)(a_0x^2+a_1x+a_2)\equiv(A_1x+A_2)(b_0x^2+b_1x+b_2)$，或

$$(B_1a_0-A_1b_0)x^3+(B_1a_1+B_2a_0-A_1b_1-A_2b_0)x^2-(B_1a_2+B_2a_1-A_1b_2-A_2b_1)x+B_2a_2-A_2b_2\equiv0.$$

使各項之係數等於零，則得次四個齊次方程式，即

$$B_1a_0 - A_1b_0 = 0,$$
$$B_1a_1 + B_2a_0 - A_1b_1 - A_2b_0 = 0,$$
$$B_1a_2 + B_2a_1 - A_1b_2 - A_2b_1 = 0,$$
$$B_2a_2 - A_2b_2 = 0.$$

消去 A_1, A_2, B_1, B_2 則得消去式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

碼

【碼】Yard. 〔算〕英國長度名，3 呎爲碼，合我國 2.7432 市尺.

窮

【窮極法】Proof by exhaustion. 〔幾〕此證法爲古代幾何學者所用之法，可由次例以明之.設已證明「三角形之二邊相等,則其對角相等」之定理,及「三角形之二邊不等,則對大邊之角,大於對小邊之角」之定理,而求證明「三角形之一角大於他角，則對大角之邊大於他邊」. 設 ABC 爲三角形,其角 ABC 大於角 ACB,則邊 AC 大於邊 AB. 因若 AC$\not>$AB,則必 AC=AB 或 AC<AB. 然 AC=AB 爲不能,若然,則須 ∠ABC=∠ACB 也. 又 AC<AB 爲不能,若然,則必須∠ABC<∠ACB 也. 故 AC 不能等於 AB,AC 亦不能小於 AB. 故 AC>AB. 此證法卽爲窮極法. 此法爲互不相容之假設之一必爲眞，而證明此等假設之一以外其他皆爲僞,由是知所餘之假設爲眞.

線

【線】Line. 〔幾〕面之界謂之線.面之一部與他部之界爲線. 線有位置與長而無廣及厚,卽線僅有一度.於幾何線分爲直線與曲線二者,直線爲方向不變之線,而曲線爲其各點方向變者之謂. 又有所謂折線者,見該條.

【線分】Segment of a line.〔幾〕直線之一部分之謂.

【線方向】Line direction.〔幾〕線有二方向,是又謂之線之向(Sense). 例如於圖取 A 與 B 之間之直線之一分而考之,

此線分可視爲由 A 至 B 者,卽視爲一點由 A 出發,運動至 B，謂之直線 AB; 又可視爲由 B 至 A，謂之直線 BA. 而通常命由右至左之線爲負，由左至右之線爲正.如是 AB 爲由 A 運動至 B 者,故 BA 爲點又來至原位線者，而謂之 AB+BA=0,與代數學之 $x+(-x)=0$ 同. 同樣 AB+BC+CA=0, 然 AB+BC+AC=2AC.

【線對稱】Line symmetry. 〔幾〕與軸對稱同,見該條.

【線方程式】Linear equation. 〔代〕卽一次方程式,見該條.

【線上正方形】Square on the line. 〔幾〕以一直線爲一邊所作之正方形也.

【線微分方程式】Linear differential equation.〔微〕與單系微分方程式同，見該條.

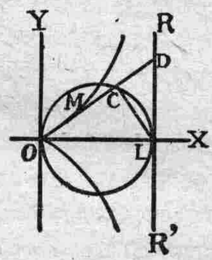
緯

【緯度】Latitude.〔算〕某地之緯度，爲過該地之地球之半徑與赤道平面所成之角之度數，而半徑在赤道面之北謂之北緯幾度，在南則謂之南緯幾度.而同緯度之圓周，謂之緯度圈.

【緯度圈】Circle of latitude.〔幾〕見緯度條.

蔓

【蔓葉線】Cissoid.〔幾〕爲三次曲線之一.命圓 OCL 之直徑 OL 爲 2a. RR′ 爲切於 L 點之切線.由 O 引任意割線，割圓於 C，遇切線於 D.於 OD 上取 OM＝CD，則 M 點之軌跡謂之蔓葉線.此線爲紀元前約 180 年希臘數學家戴奥克里斯(Diocles)所發明.先求其極方程式：O 爲極，OX



爲極軸，M 之極坐標爲 ρ,θ，則 ρ＝OM＝CD＝OD－OC.引 CL，則由 LOD，COL 爲直三角形，得 $OD=\frac{2a}{\cos\theta}$，$OC=2a\cos\theta$.故 $\rho=\frac{2a}{\cos\theta}-2a\cos\theta$ 即 $\rho=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$.是爲蔓葉線之極方程式.又 OX，OY 爲直角坐標，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，以之代入極方程式，得 $y^2(2a-x)=x^3$.是即此線之方程式.蔓葉線之性質如次：(1)通過原點.(2)關於X軸爲對稱.(3)在 $x=0$ 及 $x=2a$ 二直線之間.(4)通過直交於 OX 軸之直徑之兩端.(5)有無窮遠之二分支，而直線 $x=2a$ 爲其漸近線.

蝶

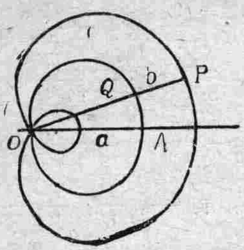
【蝶線】Folium.〔幾〕三次曲線之一，方程式爲 $x^3+y^3-3axy=0$，係法數學家笛卡兒所作，故又稱笛卡兒蝶線.(圖見曲線條)作法，令 $y=tx$，由方程式得

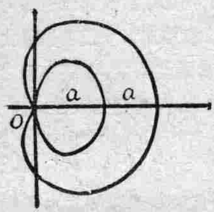
$$x=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1},$$

a 爲任意常數，由與 t 以各值，可以定 x 與 y 對應諸值，因而求得諸點，聯諸點即成一如蝶形之曲線.此曲線本身包圍之面積及其他部分與漸近線之間之面積，同等於 $\frac{3}{2}a^2$.

蝸

【蝸線】Limacon.〔幾〕由原點 O 於 x 軸上截取 OA 令等於 a，以 OA 爲直徑作圓.又由 O 作圓之任意割線 OQP，令 QP 等於 b，但 Q 爲由 A 至割線之垂線之足.當 OP 繞 O 旋轉時，P 之軌跡名曰蝸線.命 OP 爲 ρ，OP 與 OA 所成之角





爲 θ，則其方程式爲 $\rho=a\cos\theta\pm b$. 若 $b=a$，則此曲線變成心臟線.

調

【調和分】 To divide harmonically.

〔幾〕一有限直線內分於C，外分於D時，

若 $\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}$，則 AB 爲調和分於 C, D. 又 CD 調和分於 A, B. 因 $\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}$，則 $\frac{AC}{AD}=-\frac{BC}{BD}$，故 $\frac{CA}{DA}=-\frac{CB}{DB}$. 故 CD 調和分於 A, B.

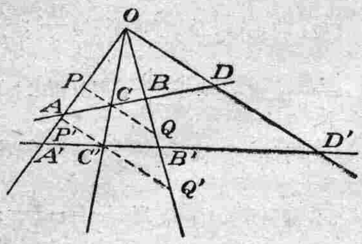
【調和中項】 Harmonic mean. 〔代〕〔幾〕若 a,b,c 成調和級數，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，或 $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$，則 b 謂之 a 及 c 之調和中項，而 $b=\frac{2ac}{a+c}$. 又若直線 AB 調和分於 C, D，則 $\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}$，即 $\frac{AC}{AC-AB}=-\frac{AD}{AD-AB}$，即 $\frac{AC}{AD}=\frac{AC-AB}{AB-AD}$. 故AC,AB,AD成調和級數，而 AB 謂之 AC, AD 之調和中項.

【調和分割】 Harmonic section. 〔幾〕調和分割卽調和分割直線之謂，見調和分條.

【調和比例】 Harmonic proportion. 〔代〕成調和級數之諸數，謂之成調和比例，見調和級數條.

【調和列點】 Harmonic range. 〔幾〕若直線 AB 調和分於 C,D，則 A,B,C,D 謂之調和列點. 其所以稱爲調和列點者，因此時 $\frac{AC}{AD}=\frac{AC-AB}{AB-AD}$，或 $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$. AB,AC,AB,AD 成調和級數故也.

【調和束線】 Harmonic pencil. 〔幾〕若一由四直線而成之束線，調和分一橫截線，則此束線謂之調和束線. 若一截線截一束線之四直線於 A,B,C,D，若 A,B,C,D 爲調和列點，則其他任何截線亦必爲調和線分. 命 O 爲束線之頂. 命他直線截束線之四射線於 A′,B′,C′,D′. 過 C,C′



作直線平行於OD，割OA於P，P′，割OB於Q，Q′．因PC∥OD，∴△APC，AOD相似，∴$\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{OD}$．又△BQC，BOD相似，∴$\frac{BC}{BD}=\frac{QC}{OD}$．因ABCD爲調和列點，∴$\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}$．∴$\frac{PC}{OD}=-\frac{QC}{OD}$．∴PC=CQ．今$\frac{P'C'}{PC}=\frac{OC'}{OC}=\frac{C'Q'}{CQ}$，∴P′C′=C′Q′．又由相似三角形得$\frac{A'C'}{A'D'}=\frac{P'C'}{O'D'}$，及$\frac{B'C'}{B'D'}=\frac{Q'C'}{OD'}$．∴$\frac{A'C'}{A'D'}=-\frac{B'C'}{B'D'}$，是即$\frac{A'C'}{B'C'}=-\frac{A'D'}{B'D'}$．故 A′，B′，C′，D′ 爲調和列點．

【調和級數】Harmonical（或 Harmonic）progression．〔代〕某級數任取其連續三項，其第一第二之差與第二第三之差之比等於其第一與第三之比，則此級數謂之調和級數．例如於級數 a，b，c，d，…………，a－b b－c＝a:c，又 b－c:c－d＝b:d，依此類推，則級數 a，b，c，d，…………謂之調和級數．略記爲 H．P．由定義得 c(a－b)＝a(b－c)，即 ca－cb＝ab－ac，以 abc 除之得 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$．同樣$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$．故$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=$……，而 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$，……成等差級數．由是成調和級數諸量之倒數成等差級數．故調和級數可由等差級數以推求之．又求調和級數之若干項之和，無普通之公式．所謂調和之命名之所由起如次．有同質同大之絲若干條，其長各比例於 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，此等絲以相等之力張緊之，若其二絲同時鳴時，則耳感音之調和。於往昔希臘時代之音樂之理論上，與三弦其長適成 1：$\frac{2}{3}=1-\frac{4}{5}:\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$，即長 1，$\frac{4}{5}$，$\frac{2}{3}$，用以發 do，mi，sol 三音，是爲調和之起因．

【調和共軛線】Harmonic conjugate rays，或 Harmonic conjugates．〔幾〕若四直線 OA，OB，OC，OD 爲調和束線，則 OC，OD 對於 OA，OB 爲調和共軛線．

【調和共軛點】Harmonic conjugate points 或 Harmonic conjugates．〔幾〕若直線 AB 調和分於 C，D，則 C，D 謂之對於直線 AB 爲調和共軛點．故若二點 C，D 對於直線 AB 爲調和共軛點，則

A, B 亦爲對於直線 CD 爲調和共軛點.

誘

【誘求式】 Derivative.〔代〕若方程式 $P=0$ 之諸解答亦爲方程式 $Q=0$ 之解答,則方程式 $P=0$ 爲方程式 $Q=0$ 之誘求式. 若方程式 $Q=0$ 之諸解答亦爲方程式 $P=0$ 之解答,則誘求謂之可逆. 而方程式 $P=0$ 之諸解答爲 $Q=0$ 之解答, 然方程式 $Q=0$ 之諸解答不能爲方程式 $P=0$ 之解答,則誘求謂之不可逆. 例如由 $6x+5=3x+14$……(1) $(6x+5)-(3x+5)=(3x+14)-(3x+5)$……(2) 故 $3x=9$……(3) 由是 $3x\div3=9\div3$……(4) 故 $x=3$……(5) 如是上所述諸解法之順序皆可以反對者取之. 換言之,(1),(2),(3),(4),(5) 爲可互逆之誘求式. 次由 $x-1=0$……(6) 誘求 $(x-1)(x-2)=0$……(7). 適合(6)之 x 之値亦適合(7),然其逆則不眞, 即 $x=2$ 爲(7)之解答,然非(6)之解答. 由是(7)爲(6)之不可逆誘求式.

【誘導函數】 Derived function. 或 Derivative.〔代〕於 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ 命以 $x+h$ 代 x, 則得 $f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+a_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$. 用二項式定理展開右邊各項, 而集合 h 同乘冪之係數, 則得

$$
\begin{aligned}
f(x+h)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n+h\left\{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}\right\}\\
&+\frac{h^2}{1.2}\left\{n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots\cdots+2a_{n-2}\right\}\\
&+\frac{h^3}{1.2.3}\left\{n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\cdots\cdots+3\cdot2a_{n-3}\right\}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{1}{1.2.3\cdots\cdots n}\left\{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1\right\}a_0.
\end{aligned}
$$

此展開式之第一行明爲 $f(x)$. 而 h 之係數謂之第一誘導函數, 以 $f'(x)$ 表之. 同樣 $\frac{h_2}{\lfloor 2}$ 之係數, 謂之第二誘導函數, 以 $f''(x)$ 表之; 如是類推, 第 r 誘導函數以 $f^r(x)$ 表之. 故上結果可用新記法書之如次:

$$
f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x).
$$

此級數在微分學中謂之泰羅(Taylor)定理; 而此等誘導函數謂之微分係數 (Differential coefficients). 比較下列諸式可得求誘導函數之便利法則:

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,\\
f'(x)&=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1},\\
f''(x)&=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

觀此知 $f'(x)$ 可由 $f(x)$ 求得之, 其法如次:

$f(x)$ 之各項，以該項之指數乘之，而後各項之係數減去一．用此法 a_0x^n 變爲 na_0x^{n-1}，a_1x^{n-1} 變爲 $(n-1)a_1x^{n-2}$，……，而 a_n 即 a_nx^0 變爲 $0\cdot a_nx^{-1}$ 即 0．且用與由 $f(x)$ 導 $f'(x)$ 同樣之法，可由 $f'(x)$ 導得 $f''(x)$，如此類推．例如

$$f(x)=x^5+3x^4+5x^3+6x^2+7x+10,$$

則 $f'(x)=5x^4+12x^3+15x^2+12x+7$，

$$f''(x)=20x^3+36x^2+30x+12,$$

$$f'''(x)=60x^2+72x+30,$$

$$f^{iv}(x)=120x+72,$$

$$f^{v}(x)=120.$$

【誘導單位】Derived unit.〔算〕見單位條．

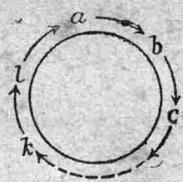
質

【質數】Prime number 或 Prime.〔算〕〔代〕即素數，見該條．

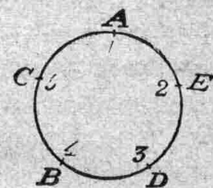
【質因數】Prime factor.〔算〕〔代〕同素因數，見該條．

輪

【輪換次序】Cyclic order.〔代〕輪換次序亦稱循環順序．例如於式 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$，第二項可於第一項以 b 代 a，以 c 代 b，以 a 代 c 而得之；第三項可於第二項以 c 代 b，以 a 代 c，以 b 代 a 而得之；而第一項可於第三項以 a 代 c，以 b 代 a，以 c 代 b 而得之．如斯文字之排列，謂之有輪換次序或循環順序．此類之式，記載甚爲便利，由一項可得他各對稱之項．今如圖記 a, b, c, ……, k, l 諸文字於圓周圍，則各文字可以其次之文字依循環次序而代之，甚爲明瞭．



【輪換排列】Cyclic permutation.〔代〕例如 A, B, C, D, E 五人圍圓桌而就席之法有幾．若不將五席互相比較，而與室內之物相比較，則就席之法共有 $\underline{|5}$．若就同桌互相比較，而不與室內他物相比，則因圓之爲物，無始無終，故如圖若席之號數 1, 2, 3, 4, 5, 各坐 A, E, D, B, C，相鄰之次序不變，而 A 至 2，E 至 3，D 至 4，如是類推，向右迴轉一席仍爲同排列，即向右迴轉二席，三席，四席，其排列亦仍相同，以是輪換排列之數共有 $\underline{|5}\div 5$ 即 $\underline{|4}$．普通 n 個物之輪換排列之數爲 $\underline{|n-1}$．但是爲由 n 人就席圓桌，不與室內他物相比而考之者．若有相異之 n 球，以線貫之，使成輪形，則其排列之數爲 $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$，因球之變化與人異，無上下表裏之別，其正反相對之各排列全同故也．



【輪換對稱】Cyclic symmetry.〔代〕例如 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$，

其文字有輪換次序之對稱式之謂也.

適

【適合】To satisfy.〔代〕方程式中之未知數代入某值時,若兩邊相等,則謂之適合或滿足此方程式,而未知數之此值謂之適合或滿足問題之條件.

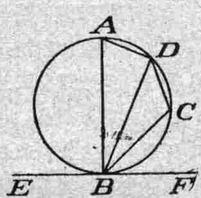
【適遇】Probability 或 Chance.〔代〕設有一事,其獲成功共有 a 次,其遭失敗共有 b 次,乃取其折中之數,謂其成功之適遇爲$\frac{a}{a+b}$,其失敗之適遇爲$\frac{b}{a+b}$.欲完全上之意義,須將折中二字之意義解釋之.凡有若干事,其各事之成功無難易之分,則於諸事中任取一事,而預定其成功之率,必皆相等,卽每事之適遇皆爲若干分之一,是謂之折中.例如一囊中盛黑球若干與白球若干,於無心任取其一球,則其所取出者爲黑球抑爲白球,固不可預知,而其黑球與白球之適遇皆爲$\frac{1}{2}$.因其所取出者爲黑球或非黑球,二者必居其一,故得黑球之適遇取其折中數爲$\frac{1}{2}$.又以非黑球卽爲白球,爲黑球卽非白球,故得白球之適遇亦爲$\frac{1}{2}$.若於囊中僅盛白球一種,則任何取出其一球皆爲白,故其適遇爲 1,而適遇爲 1,則其適遇已爲確實矣.又若一囊盛黑白赤三種球,各不知其數,而無心取其一球,其所取出者爲黑爲白抑爲赤,固不可預知,而其各色之適遇皆爲$\frac{1}{3}$,何則,以其所取出者,或黑或白或赤,三者必居其一,故取其折中數爲$\frac{1}{3}$.若求所取之球或黑或白而不爲赤,則其適遇爲$\frac{2}{3}$,因非白則或赤或黑,三者必居其二,故其折中數爲$\frac{2}{3}$.然折中二字亦有與以他意義者,卽於長期間內,一事出來之次數相等,則此出來之事謂爲折中.例如錢有正反兩面,將錢數之,若所投之次數不多,則正面出來之次數與反面出來之次數未必相同,然因所投之次數愈增,其正面出來之次數與反面出來之次數之比愈近於一,而所投之次數極大,則此比與一之差極小;此卽謂之於長期間內,正面與反面折中.今設一事,其獲成功a次,遭失敗b次,於長期間內,折中出來,則於 a+b 次中成功 a 次,失敗b次,由是得次定義而與定義相合:卽一事成或敗之適遇,爲於長期間內成或敗之次數與其次數之總和之比.例如已知於長期間內,每生 41 人,男子 21 人,女子 20 人,則知生男子之適遇爲$\frac{21}{41}$.又如甲乙二人作某游戲,於長期間內知每八次甲勝 5 次,則甲於某次勝之適遇爲$\frac{5}{8}$.

鄰

【鄰角】Adjacent angles.〔幾〕見角條.

【鄰邊】Adjacent sides.〔幾〕於多邊形有公共角頂之兩邊,謂之鄰邊.

【鄰弓形】Alternate segment.〔幾〕由圓周上引切線及割線,對於割線與切線在反對側之弓形,謂之鄰弓形,是由切線與割線間之弓形而言.於圓上一點引切線及弦,切線與弦間之角等於其鄰弓形內之角.即如圖,EF 切圓 ABC 於 B,命 BD 為由切點 B 所引之弦,則 ∠FBD＝鄰弓形 BAD 內之角,∠EBD＝鄰弓形BCD內之角.〔證〕



命 BA 為通過 D 之直徑,而 C 為不含 A 之弧內任意之點.聯 AD,DC,CB.因 ∠ADB 為直角,∴∠DBA＋∠BAD＝rt∠.又 ∠DBA＋∠FBD＝∠FBA＝rt∠.∴∠BAD＝∠FBD.又因 ABCD為圓內接四邊形,∴∠BCD＝∠BAD之補角＝∠FBD 之補角＝∠EBD.

【鄰接點】Consecutive points.〔幾〕令一直線過一曲線上之兩點,又令直線繞第一點迴轉,則第二點漸次與第一點接近,當二點重合時,因欲指之為兩分離點,故稱之為鄰接點,此時直線成為曲線之切線.若設想曲線為邊數無限之多角形(例如圓可設想為邊數無限之正多角形),則多角形之每邊為無限短,而其兩鄰角頂即為鄰接點.

【鄰二面角】Adjacent dihedral angles.〔幾〕二二面角有公共之稜,且中間之一面為公共者,謂之鄰二面角.

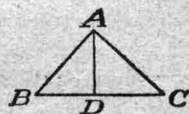
銳

【銳角】Acute angle.〔幾〕小於一直角之角之謂.

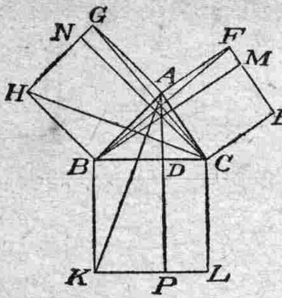
【銳三角形】Acute triangle.〔幾〕即銳角三角形.

【銳雙曲線】Acute hyperbola.〔幾〕雙曲線之漸近線互成銳角者.其貫軸常大於共軛軸.

【銳角三角形】Acute-angled triangle.〔幾〕三角形之諸角皆為銳角者,謂之銳角三角形.於銳角三角形對銳角之邊上之正方形,小於他二邊上之正方形之和,其所小者等於一邊與他邊在此邊上之射影所包之矩形之二倍.〔證1〕於三角形 ABC,由 A 引 BC 之垂線AD(即高),則$AC^2=AD^2+CD^2=AD^2+(BD-BD)^2=AD^2+BC^2+BD^2-2BC\cdot BD=AB^2+BC^2-2BC\cdot BD$.〔證2〕



於邊 AC,AB,BC 上各作正方形ACEF,ABHG,BCLK.作 BM,CN,AP 各線垂直於邊 AC,AB,BC.聯 AK,BF,CG,CH.於△BAF,△GAC,因 AB＝AG,AF＝AC,∠BAF＝∠GAC,∴△BAF＝△GAC.然因 $\triangle BAF=\frac{1}{2}\square AM$,



$\triangle GAC = \frac{1}{2}\square AN$. 故 $\square AM = \square AN$. 同樣 $\square CM = \square CP$. $\therefore AC^2 = \square AM + \square CM = \square AN + \square CP = AB^2 + BC^2 - \square BN - \square BP$.然於$\triangle ABK$,$\triangle HBC$,因$AB = HB$,$BK = BC$,$\angle ABK = \angle HBC$. 故 $\triangle ABK = \triangle HBC$. 而 $\triangle ABK = \frac{1}{2}\square BP$,$\triangle HBC = \frac{1}{2}\square BN$. 故 $\square BP = \square BN = BD \cdot BC$. 故 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC$.

十六畫

冪

【冪】Power.〔算〕〔代〕同乘冪,見該條.

【冪根】Root.〔算〕〔代〕即數之根,詳根條.

噶

【噶爾諾定理】Carnot's theorem.〔幾〕噶爾諾定理如次:圓錐曲線交三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 於 a, a'; b, b'; c, c' 時,則 $Ab \cdot Ab' \cdot Bc \cdot Bc' \cdot Ca \cdot Ca' = Ac \cdot Ac' \cdot Ba \cdot Ba' \cdot Cb \cdot Cb'$.

噸

【噸】Ton.〔算〕英美重衡名,有輕噸重噸之別,見各條.

導

【導球】Director sphere.〔幾〕即準球,見該條.

【導圓】Director circle.〔幾〕即準圓,見該條.

【導線】Directrix.〔幾〕即準線,見該條.

【導函數】Derivative.〔代〕一稱導來函數,即誘導函數,見該條.

整

【整式】Integral expression.〔代〕見代數式條.

【整數】Integer 或 Whole number. 〔算〕〔代〕數之適爲單位之若干倍而無零餘者，謂之整數，整數亦稱完全數，但普通以用整數爲多.

【整除數之法】Aliquotation.〔算〕某數當他數之幾分之一時，其分數利用於乘除法之計算上之方法之謂. 於物價之計算，百分法等，特覺其便利.

橫

【橫軸】Transversal axis.〔幾〕見貫徑條.

【橫軸】Axis of abscissa.〔幾〕見坐標條.

【橫線】Abscissa.〔幾〕卽橫坐標.

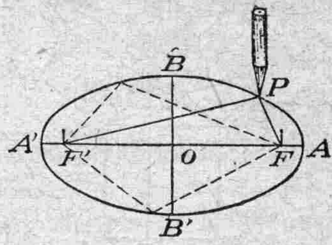
【橫坐標】Abscissa.〔幾〕見坐標條.

【橫截線】Transversal.〔幾〕橫截一列直線之直線，謂之橫截線或截線.

橢

【橢率】Ellipticity.〔幾〕橢圓之半長徑與半短徑之差與半長徑之比，謂之橢圓之橢率.其公式爲 $E=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}$，E 爲橢率，a 爲半長徑，b 爲半短徑.參閱橢圓條.

【橢圓】Ellipse.〔幾〕橢圓爲圓錐曲線之一種，爲一動點之軌跡，此點移動於一平面內，其與平面內二定點距離之和爲一定者也. 此二定點曰焦點，如圖之 F，F′ 是. 聯橢圓上一點至焦點之直線，謂之焦點半徑如 PF，PF′ 是.二焦點半徑之定和以 2a 表之.橢圓可作之如次：

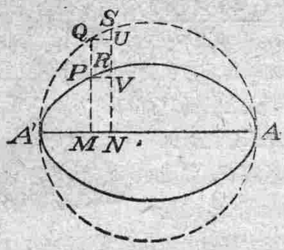


取一線令其長等於 2a，釘定其兩端於 F，F′. 以鉛筆尖緊張此線，令常爲直，移動之，則 P 點畫成一以 F，F′ 爲焦點之橢圓.因筆尖移動時，PF 與 PF′ 之和爲一定也.命橢圓交 FF′ 之延線於 A，A′，則 AA′=2a，而 AA′ 謂之長軸或長徑；作 AA′ 之垂直二等分線交橢圓於 B，B′，交 AA′ 於 O，則 BB′ 謂之短軸或短徑，而 O 謂之橢圓之中心.以橢圓之中心爲原點，長軸爲 X 軸，短軸爲 Y 軸，則橢圓之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

若 a=b，則此方程式變爲 $x^2+y^2=a^2$，而此時橢圓成爲圓. 又橢圓之極方程式爲 $\rho^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$，而 e 爲離心率，其值爲 $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$，而常小於 1，因 a 大於 b 故也.

茲示求橢圓之面積之法如次：——

設 PM，RN 爲橢圓之兩縱線；Q，S 爲補助圓上兩相當點.作 PV，QU 平行於長軸，過 NS 於 V 及 U.則 $\frac{\square PN}{\square QN}=$



$\frac{PM}{QM}=\frac{b}{a}$. 此關係對於橢圓及補助圓內所作諸相似矩形皆爲眞. 故

$\frac{\text{橢圓內▭之和}}{\text{補助圓內▭之和}}=\frac{b}{a}$. 此關係不論矩形之數若干皆爲眞. 而橢圓▭之和之極限爲橢圓之面積, 而補助圓內者之極限爲補助圓之面積,故橢圓之面積:圓之面積$=b:a$. 故橢圓之面積$=\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$.

【橢弧體】〔幾〕以一與長軸或短軸平行之直線割橢圓爲二部, 將其任一部以割線爲軸而旋轉之, 則所成之旋轉體名曰橢弧體.橢弧體之體積,可依下之公式求之: $\left\{\frac{2E^2+7(E-R)^2}{3}+\frac{E^2(E-R)}{\sqrt{(2E-R)R}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{(2E-R)R}}{E}\right\}2S\pi$. 其割線與長軸平行,則式中之 E 爲半短軸, 與短軸平行,則 E 爲半長軸.又 R 爲體之腰半徑, S 爲體長之半.

【橢圓體】Ellipsoid 或 Spheroid. 〔幾〕橢圓體爲二次曲面之一種.其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 若 $a>b=c$, 則橢圓體謂之長橢圓體或長球 (Prolate spheroid), 而可以將橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ 以其長軸爲軸旋轉得之.若 $a=b>c$, 則爲扁橢圓體或扁球 (Oblate spheroid),可將橢圓以其短軸旋轉而得之.此外尙有虛橢圓體,其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

因三實數之平方和,不能爲負,故其上無實點.

【橢圓的拋物線體】Elliptic paraboloid. 〔幾〕爲二次曲面之一種,其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2nz$. 此體之橫截面之截口爲橢圓,縱截面(與 X 軸或 Y 軸正交之截面)之截口爲拋物線.圖見二次曲面條.

獨

【獨立變數】Independent Variable. 〔代〕卽自變數,見變數條.

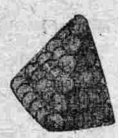
積

【積】Product. 〔算〕某數或式乘以他數或式之結果,謂之積.例 $3\times5=15$,故 15 爲 3 與 5 之積; 又 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, 故 a^2-b^2 爲 $a+b$ 與 $a-b$ 之積.

【積分】Integral. 〔積〕見積分法條.

【積彈】Piles of shot.〔代〕積彈,卽將彈丸堆積成角錐狀或劈狀者也. 積彈因其底面爲正三角形,正方形,矩形, 而積篋

三角積彈，正方積彈，矩形積彈。三角積彈者，爲於正三角形狀之底上，又積以各邊少一之正三角形狀之彈丸，又於其上積以各邊



少一之正三角形狀之彈丸，如是類推，及至頂上堆積一彈丸者也。於完全之三角積彈，彈丸之數等於 1，$1+2$，$1+2+3$，$1+2+3+4$，….，$1+2+3+\cdots+n$ 之和，即等於 $1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$。

依差法求此級數之和，則

$$S=na+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 6}d_3+\cdots\cdots(A)$$

由級數 $1,3,6,10$…………作各次之差，則

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 14 & & 21\ \cdots\cdots \\
& 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6\ \cdots\cdots & \\
& & 1 & & 1 & & 1 & & 1\ \cdots\cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0\ \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

由是 $a=1$，$d_1=2$，$d_2=1$，$d_3=0$，$d_4=0$，……，代入公式 (A)，則得

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

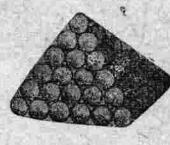
此式又可求之如次。因最下層彈丸之數爲 $\frac{n(n+1)}{2}$ 或 $\frac{1}{2}(n^2+n)$。於此式內以 $n-1$，$n-2$……代 n，則得自下第二層，第三層，……彈丸之數。故

$$S=\sum\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}(\sum n^2+\sum n)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}.$$ （參看自然數條）

又如圖作正方積彈，其頂上彈丸第二層之彈丸之數爲 2^2，其第三層之彈丸之數爲 3^2，如斯類推。今求 n 層



之正方積彈之彈丸之總數如次：

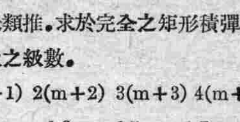
$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36\ \cdots\cdots \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11\ \cdots\cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2\ \cdots\cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0\ \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

由是 $a=1$，$d_1=3$，$d_2=2$，$d_3=0$，$d_4=0$，代入公式 (A)，則得

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{\lfloor 3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

此式又可求之如次。即 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{\lfloor 3}$.

又如圖作矩形積彈，其頂上一層爲 $m+1$ 個彈丸，列成一直線狀者，第二層積



$2(m+2)$ 個，第三層積 $3(m+3)$ 個彈丸，如是類推。求於完全之矩形積彈之總數，有次之級數。

$$\begin{array}{ccccccc}
(m+1) & & 2(m+2) & & 3(m+3) & & 4(m+4)\ \cdots\cdots \\
& m+3 & & m+5 & & m+7\ \cdots\cdots & \\
& & 2 & & 2\ \cdots\cdots & & \\
& & & 0\ \cdots\cdots & & &
\end{array}$$

由是 $a=m+1$, $d_1=m+3$, $d_2=2$, $d_3=0$, $d_4=0$,……代入公式(A)則得

$$S=\frac{n(n+1)(1+2n+3m)}{1.2.3}\cdots\cdots(3)$$

此式又可證之如次. 因其頂上一層爲 $m+1$ 個彈丸,第二層爲 $2(m+2)$ 彈丸,第三層爲 $3(m+3)$ 彈丸,最下層卽第 n 層爲 $n(m+n)$ 彈丸而成.

$$\therefore S=(m+1)+2(m+2)+3(m+3)+\cdots\cdots+n(m+n)=m(1+2+3+\cdots+n)+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)=m\sum n+\sum n^2=\frac{mn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

$$=\frac{n(n+1)(3m+2n+1)}{1.2.3}.$$

又於不完積彈求彈丸之數,加積彈之若干層使成完積彈,由其總數減去所加之積彈之數.此二數之差,爲於不完積彈內彈丸之數.

公式(1)(2)(3)又可記之如次:

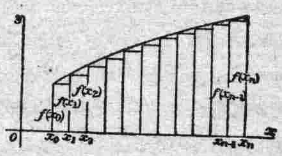
三角積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+1+1)$.

正方積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+n+1)$.

矩形積彈 $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\{(n+m)+(n+m)+(m+1)\}$. $\frac{n(n+1)}{2}$爲於各積彈之三角面之數,而次之因數爲於底之最長邊與對邊及平行頂上一層之彈丸之總數.由是於任意之積彈求彈丸之總數有次之法.底之最長邊彈丸之數與對邊彈丸之數及頂上一列彈丸之數相加,此和乘積彈之三角面之彈丸之數,以3除之.此法則記之甚便,因三積彈中之任何者,皆可適用之也.

【積分式】Integrand.〔積〕見積分法條.

【積分法】Integration.〔積〕積分法者,自微分係數求原函數之法也.約言之,積分法卽微分法之還原.若將所設微分係數以 $f(x)$ 表之,原函數以 $F(x)$ 表之,



則由微分法之符號得 $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$, 或 $dF(x)=f(x)dx$. 適合於此式之函數 $F(x)$ 稱爲 $f(x)$ 之關於x之積分.所設微分係數 $f(x)$ 稱爲積分式.通常以次之符號記之: $F(x)=\int f(x)dx$. 而由積分式以求積分之法,謂之積分法.積分有不定積分與定積分二種:

(1)不定積分. 亦稱普通積分或常積分,或直稱積分,卽如上面所述之形式之積分也. 因 $F(x)$ 旣爲 $f(x)$ 之積分,則 $F(x)+C$ 亦爲 $f(x)$ 之積分,此 C 爲不定常數,而常數之微分係數爲零也.以式表之如次: $\frac{d[F(x)+C]}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}+0=f(x)$. 申言之,則已知函數 $f(x)$ 之積分其數無窮,於上

式$F(x)+C$ 每與 C 以一定值即得一積分,以式表之爲 $\int f(x)dx=F(x)+C$. 但表之如 $\int f(x)dx=F(x)$ 亦爲合理. 蓋前式之意,$F(x)+C$之函數皆爲$f(x)$之積分,後式之意,$f(x)$之積分爲 $F(x)$,其 C 爲零也.故凡如前式或後式所表之積分,謂之**不定積分**.其不定常數 C,謂之**積分常數**.求不定積分之法,謂之**不定積分法**.不定積分法之二基本公式如次:(a)$\int cudx=c\int udx$……(c 爲常數,u 爲 x 之函數). (b)$\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$……(u, v 均爲 x 之函數). 其餘公式甚多,大概可由微分法公式推求之.(積分公式見附錄二). 〔例題〕$\int(a+bx+cx^2)dx=\int adx+\int bxdx+\int cx^2dx=a\int dx+b\int xdx+c\int x^2dx=ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}+C$. (2)**定積分**.如圖,設連續曲線之方程式爲 $y=f(x)$,在曲線下之面積爲 A,則 A 爲曲線及 X 軸與兩縱線$f(x_0)$ 及 $f(x_n)$所界成明甚.若$f(x)$ 關於 $a\leqq x\leqq b$ 範圍內 x 之值連續變易時,則X軸之間隔爲 (a, b). 將此間隔分爲 n 等分,於每分點作縱線$f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$,……$f(x_n)$,區全面爲 n 個近似長方形之面,則此等長方形面積之和,與全面積 A 相近,其所差者不過多數近似小三角形之面積之和. 如 n 之值愈增,則長方形之數愈多,而近值與眞值之差愈微. 若 n 增至無窮大,則長方形之寬近於極限零,而近值與眞值之差亦近於極限零. 茲命 Δx 爲各長方形之底之長,即命 $\Delta x=x_1-x_0=\frac{b-a}{n}$,則從左向右之第一長方形之面積爲 $f(a)\Delta x$ 或 $f(x_0)\Delta x$,第二長方形之面積爲 $f(x_1)\Delta x$,第 n 長方形之面積爲 $f(x_{n-1})\Delta x$. 於是此等面積之和爲 $f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\Delta x$,而於 n 無限增大時,得 $A=\underset{n=\infty}{\text{limit}}[f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\Delta x]=[f(x_0)dx+f(x_1)dx+\cdots\cdots\cdots+f(x_{n-1})dx]=\sum_{x_0}^{x_{n-1}}f(x)dx$. 同樣以各長方形右邊之縱線爲其高時,則 $A=\underset{n=\infty}{\text{limit}}[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x]=[f(x_1)dx+f(x_2)dx+\cdots\cdots+f(x_n)dx]=\sum_{x_1}^{x_n}f(x)dx$. 但因 $f(x)$ 爲 x 變化於 a 與 b 之間之連續函數,故等分 X 軸之間隔 (a,b) 爲 n 部分之點 $x_0=a$, $x_n=b$, 又因 n 無限增大,故間隔 (x_0,x_1) 或 (x_{n-1},x_n) 近於極限零. 故上之二式可書爲 $A=\sum_{x=a}^{x=b}f(x)dx$. 此 a 與 b 各爲變數 x 所及之兩限界.以積分符號$\int$代和之符號Σ,則有達於極限之義,書之爲 $A=\int_a^b f(x)dx$.此和之極限值$\int_a^b f(x)dx$ 名曰函數 $f(x)$ 關於 x 之值自 a 至 b 之定積分.求定積分之法,名曰定積分

法。實際定積分常由不定積分求之，即 $A=\int_a^b f(x)dx=F(b)+C$.因 $A=F(a)+C=0$，故 $C=-F(a)$.以之代入上式，得 $A=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=[F(x)]_{x=a}^{x=b}$。　積分法除上述之二基本法外，常視積分式之情狀而異其方法，普通者有偏積分法，疊次積分法，部分積分法，遞降積分法,有理化積分法,有理函數之積分法等.詳各該條.

【積分學】Integral calculus.〔數〕積分學爲微分學之逆，即與某函數之微分而求其原函數,且有應用之於代數學,幾何學者.

【積較術】Method of difference.〔代〕即差法,見該條.

【積分因數】Integrating factor.〔微〕見完全微分方程式條.

【積分常數】Constant of integration.〔積〕見積分法條.

諧

【諧級數】Harmonical progression.〔代〕即調和級數,見該條.

諳

【諳算】Mental arithmetie.〔算〕亦稱心算,即不用數字或計算器等,而惟心中作簡單之計算者也.

諸

【諸等數】Compound number.〔算〕即複名數,見該條.

輸

【輸數】Defective number.〔算〕見不完數條.

辨

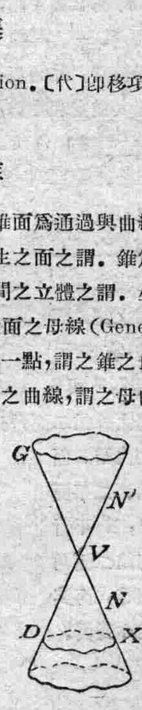
【辨別式】Discriminant.〔代〕即判別式,見該條.

遷

【遷項】Transposition.〔代〕即移項,見該條.

錐

【錐】Cone.〔幾〕錐面爲通過與曲線及與點之直線移動所生之面之謂.錐爲錐面與截錐面之平面間之立體之謂.生錐面之動直線,謂之錐面之母線(Generatrix).母線所過之一點,謂之錐之頂點(Vertex),母線所過之曲線,謂之母曲線或準線(Directrix),母線在任意位置之直線,謂之錐面之基線(Element).如圖 GX 爲母線,DX 爲母曲線,V 爲頂點,N 爲



錐之下一片，N′ 爲錐之上一片。V－DX 爲以 DX 爲底之錐。

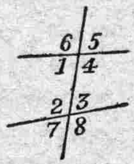
【錐面】Conical surface.〔幾〕見錐條。

錢

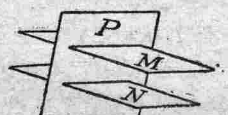
【錢】〔算〕衡法，十分爲錢，十錢爲兩。

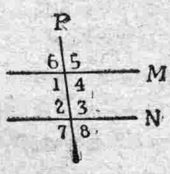
錯

【錯角】Alternate angles.〔幾〕如圖一直線截二直線時，1 與 3，2 與 4 謂之錯角。有時 5 與 7，6 與 8 謂之外錯角，而 1 與 3，2 與 4 謂之內錯角。一直線截二平行線時，錯角相等，而其逆定理亦爲眞。



【錯二面角】Alternate dihedral angles.〔幾〕二平面 M，N 以第三平面 P 截之，則 1 與 3，2 與 4（右例爲以錯二面角之平面角表之者）謂之錯二面角，有時 5 與 7，6 與 8 謂之外錯二面角，而與之相對前二組謂之內錯二面角。二平面 M，N 平行則錯二面角相等，而其逆亦爲眞。



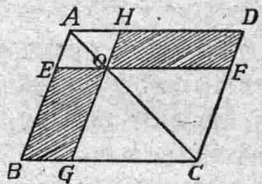


餘

【餘切】Cotangent.〔三〕見三角函數條。

【餘矢】Coversed sine.〔三〕見三角函數條。

【餘形】Complements (of a parallelogram).〔幾〕由平行四邊形 ABCD 之對



角線上一點 O，與各邊平行引直線 EF，HG。如斯所得之平行四邊形 BEOG，DFOH 稱爲沿平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 之平行四邊形 AEOH，GOFC 之餘形。

【餘角】Complement (of an angle).〔幾〕若二角之和等於一直角，則此二角稱爲互爲餘角。

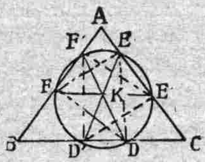
【餘弦】Cosine.〔三〕見三角函數條。

【餘弧】Complement (of an arc).〔幾〕二弧合成一象限，卽等於圓周之四分之一者，則此二弧稱爲互爲餘弧。

【餘割】Cosecant.〔三〕見三角函數條。

【餘數】Complement of a number.〔代〕某數之餘數者，爲由其數上一位之一單位，減去其數之餘也。例如 7 之餘數爲 $10-7$ 卽 3，45 之餘數爲 $100-45=55$。

【餘弦圓】Cosine circle.〔幾〕過三角形之類似重心，作三直線，與三邊逆平行，則其與各邊相交之六點，在一圓周上，此圓稱爲三角形之餘弦圓．FKE′，DKF′，EKD′ 爲三逆平行線，則因 K 爲類似重心，



故爲此三直線之中點．又$\angle KDD'=\angle A=\angle KD'D$，故 $KD=KD'$．同理 $KD=KE=KE'=KF=KF'$．故以 K 爲中心，以諸直線之一爲半徑作一圓，必過 D,D',E,E',F,F' 六點．所以稱爲餘弦圓者，因此圓所截取各邊之部分，

$DD'=2KD\cos A$，　$EE'=2KE\cos B$，

$FF'+2KF\cos C$，因而 $DD':EE':FF'=\cos A:\cos B:\cos C$ 也．此圓又稱第二勒滿圓，則以發明者之名而名．〔系〕$EFD'E'$爲矩形，又角DFE等於同弓形上之角$DL'E$，故等於$\angle A$．同理，$\angle DEF=\angle C$，$\angle EDF=\angle B$．故$\triangle FDE$與$\triangle ABC$相似．同理，$\triangle E'F'D'$亦與$\triangle ABC$相似．故 $\triangle FDE$ 及 $\triangle E'F'D'$ 爲相似，而因內接於同圓，故爲全相等．

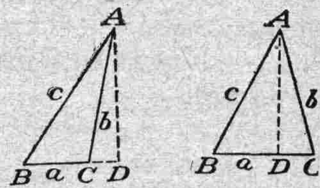
【餘函數】Co-functions.〔三〕餘弦，餘切，餘割，有時稱爲餘函數，蓋卽餘角之正弦，餘角之正切，餘角之正割之省筆也．

【餘函數】Complementary function.〔微〕見高階一次微分方程式條．

【餘對數】Complement of a logarithm.〔代〕由 1 減去對數之假數之餘，謂之餘對數．

【餘擺線】〔幾〕卽餘旋輪線．

【餘弦定則】Law of cosines.〔三〕本定則乃以三角形之三邊表示其餘弦之值者也．令 ABC 爲一三角形，C 爲銳角，則由幾何理，得



$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot CD,$$

又　$CD=AC\cos C$，

故　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

若 C 爲鈍角，則由幾何理，得

$$AB^2=BC^2+AC^2+2BC\cdot CD,$$

又　$CD=AC\cos(180°-C)=-AC\cos C$，

故　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$．

因而 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$．

又若C爲直角，則 $a^2+b^2=c^2$，而 $\cos C$ 爲零，故上之公式仍爲眞．同理可得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

故三角形各角之餘弦，得如上式以三邊表示之，是爲餘弦定則．上之三式，通常記之如次：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C.$$

此三公式，又可由他式誘導得之．如由上之左圖，$BC=BD+DC=AB\cos B+AC\cos C$，由右圖，$BC=BD-DC=AB\cos B-AC\cos(180°-C)=AB\cos B+AC\cos C$，二式均為 $a=c\ \cos B+b\ \cos C$……(1)．

同理得　$b=a\ \cos C+c\ \cos A$……(2)．

$c=b\ \cos A+a\ \cos B$……(3)．

將上(1)，(2)，(3)三式各以 $-a,b,c$ 乘之，相加，則得

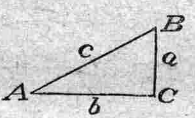
$$b^2+c^2-a^2=2bc\ \cos A,$$

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$．

其他二式可以同法誘得之．

【餘旋輪線】〔幾〕與半徑旋輪線同，見該條．

【餘角之三角函數】Trigonometrical functions of complementary angles.〔三〕兩角互為餘角之普通式為A及 $90°-A$．於直角三角形 ACB 內，$A+B=90°$，則 $B=90°-A$．以 $90°-A$ 代 B，



則 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\cos B=\cos(90°-A)$，

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B=\sin(90°-A),$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B=\cot(90°-A),$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B=\tan(90°-A),$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B=\operatorname{cosec}(90°-A),$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B=\sec(90°-A).$$

故一銳角之各函數，等於其餘角之餘函數．故求大於 45° 諸銳角之函數之值，祇須求其餘角（即小於 45° 者）之餘函數之值．例如欲求 sin60°，cot60° 及 sec54° 之值，祇須求 cos30°，tan30° 及 cosec 36° 之值．

【餘弦及正弦之指數值】Exponential values of the cosine and sine.〔三〕將 e^{kx} 及 e^{-kx} 用指數定理展開之，則得

$$e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^3x^3}{3!}+\frac{k^4x^4}{4!}+\cdots\cdots,$$

$$e^{-kx}=1-kx+\frac{k^2x^2}{2!}-\frac{k^3x^3}{3!}+\frac{k^4x^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

將上二式相加或相減，則得

$$\frac{1}{2}(e^{kx}+e^{-kx})=1+\frac{k^2x^2}{2!}+\frac{k^4x^4}{4!}+\cdots\cdots,$$

$$2k(e^{kx}-e^{-kx})=x+\frac{k^2x^3}{3!}+\frac{k^4x^5}{5!}+\cdots\cdots,$$

若令 $k^2=-1$，則 $k^4=1, k^6=-1,\ldots,$

又 $k=\sqrt{-1}=i$. 故上二式爲

$$\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots.$$

但 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots,$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots,$

故 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),$

$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$

是二式即稱爲餘弦及正弦之指數值. 故若將 i 即 $\sqrt{-1}$ 視爲實數,而將 e^{ix} 及 e^{-ix} 以指數定理展開之，即可得餘弦及正弦之級數.

十七畫

優

【優比】Ratio of greater inequality. 〔算〕〔代〕比之前項大於後項即比之值大於 1 者,謂之優比,如 5:3. 又 a:b 若 a>b 則爲優比.

【優角】Major angle. 〔幾〕見角條.

【優弧】Major arc. 〔幾〕圓之二弧合成全圓時,其大者謂之優弧.

【優弓形】Major segment. 〔幾〕見弓形條.

【優共軛角】Major conjugate angle. 〔幾〕共軛角之大者之稱,即優角，見角條.

【優共軛弧】Major conjugate arc. 〔幾〕共軛弧之大者之稱,即優弧,見共軛弧條.

【優共軛弓形】Major conjugate segment. 〔幾〕共軛弓形之大者之稱,即優弓形,見共軛弓形條.

應

【應數】Function. 〔數〕即函數,見該條.

【應用數學】Applied mathematics. 〔數〕應用數學爲對純正數學之稱，不主重數學之理論而專論其應用者也，如力學及測量術等爲應用數學之一種.

擬

【擬形數】Figurate numbers. 〔算〕

〔代〕擬形數一稱擬形級數，又名形數或乘垛，先各項爲 1 之級數，即1,1,1,1....，稱爲一次擬形數，

1,2,3,4,5,6,7,................，

1,3,6,10,15,21,28,........，

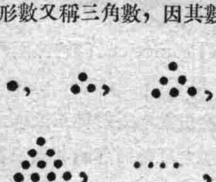
....，

稱爲二次，三次，........，擬形數．而各次擬形數任意之第 n 項，等於其前一次擬形數之首 n 項之和．由此定義，故二次擬形數之第n項爲n，三次擬形數之第n項爲

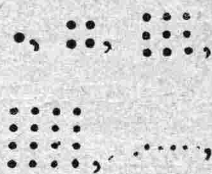
$1+2+3+\cdots\cdots+n$ 即 $\frac{1}{2}n(n+1)$，

四次擬形數之第n項爲 $\frac{1}{2}\{n(n+1)+(n-1)n+\cdots\cdots\cdots\cdots+1\cdot2\}$，即 $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}$，五次擬形數之第n項爲 $\frac{1}{2\cdot3}\{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)+\cdots\cdots\cdots\cdots+1\cdot2\cdot3\}$，即 $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$．一般r次擬形數之第n項爲 $\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)}{(r-1)!}$．

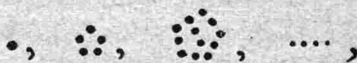
三次擬形數又稱三角數，因其數等於



即由自然數 1,2,3,4,5,........ 而生三角數即三次擬形數．又由 1,3,5,7,9,........ 而生級數 1,4,9,16,25,........，其形爲



又由 1,4,7,10,13,........而生級數 1,5,12,22,35,........，其形爲



此擬形數之所以名也．

【擬形級數】Figurate series．〔算〕〔代〕即擬形數．

歛

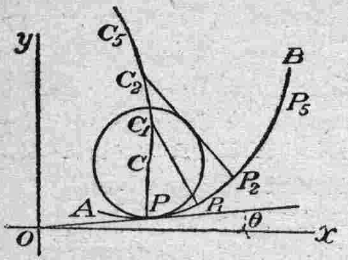
【歛級數】Convergent series．〔代〕即收歛級數，見級數條，及無限級數條．

環

【環索線】Strophoid．〔幾〕自原點向拋物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之諸切線作垂線，其垂足之軌跡，名環索線．方程式爲 $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$，圖見曲線條．

縮

【縮閉線】Evolute．〔幾〕一名漸屈線．曲線上各點之曲率中心之軌跡，謂之此曲線之縮閉線．如下圖 AB 爲一曲線，C 爲 P 點之曲率中心．設 P 點在 AB 線上運行，經 P_1，P_2 等點，則 C 點亦沿一



線運行經 C_1，C_2 等點，而 P_1C_1，P_2C_2 等爲其曲率半徑. C 點如是運行所得之軌跡 CC_5，稱爲 PP_5 曲線之縮閉線. 而 PP_5 稱爲 CC_5 之展開線(Involute).

總

【總和】Sum.〔算〕〔代〕諸數量之和之謂.

【總和法】Summation.〔代〕求級數之總和之法也. 求級數之總和無普通之法則，今舉二三例如次. 〔例 1〕求級數 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots$ 之 n 項之和. 兹命 $S_n=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots\cdots+(n-1)n+n(n+1)$. 又命 $\sum=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$.

將各項移右一位列之，爲

$\sum=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots(n-2)(n-1)n+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$.

由前式減後式，得

$0=1\cdot2\cdot3+3\cdot2\cdot3+3\cdot3\cdot4+\cdots+3(n-1)n+3n(n+1)-n(n+1)(n+2)$，由是得 $3\{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+(n-1)n+n(n+1)\}=n(n+1)(n+2)$.

$\therefore S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

〔例 2〕求級數 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots$ 之 n 項之和. 兹命 $S_n=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$.

$\sum=1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3)$.

與前同法將各項移右一位列之，爲

$\sum=1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots+(n-1)n(n+1)(n+2)+n(n+1)(n+2)(n+3)$.

由前式減後式，得

$0=1\cdot2\cdot3\cdot4+4\cdot2\cdot3\cdot4+4\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+4(n-1)n(n+1)+4n(n+1)(n+2)-n(n+1)(n+2)(n+3)$,

$\therefore 4\{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)\}=n(n+1)(n+2)(n+3)$,

$\therefore S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

〔注意〕此級數與前級數爲級數之重要之例，因(1)各項含同數之因數，(2)任意之項之因數成等差級數，(3)各項之第一因數與第一項之因數成同一之等差級數，(4)求所要之和時所用之$\sum$級數，爲與已知級數同法則而成，惟每項多一因數而已. 〔例 3〕求級數 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$ 之 n 項之和. 兹命 $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. 因 $n^2=n(n+1)-n$，

$\therefore S_n=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$-1-2-3-\cdots\cdots-n.$

由前例 1, $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

又 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$

故 $S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}$

$n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

〔例 4〕求級數 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ 之 n 項之和。

命 $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$

而 $4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2,$

故 $4\cdot1^3=(1\cdot2)^2,$

$4\cdot2^3=(2\cdot3)^2-(1\cdot2)^2,$

$4\cdot3^3=(3\cdot4)^2-(2\cdot3)^2,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2,$

$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2,$

兩邊相加，

$$4\{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3\}=\{n(n+1)\}^2,$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

而 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$

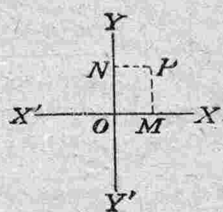
$\therefore 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$. 故自然數自 1 至 n 之立方之和，等於其自 1 至 n 之和之平方。

縱

【縱軸】Axis of ordinate.〔幾〕坐標之縱軸，如下圖之 YY′.

【縱線】Ordinate.〔幾〕卽縱坐標。

【縱坐標】Ordinate.〔幾〕如圖，P 點之位置可由 X 軸及 Y 軸表示之，自 P 引平行於 Y Y′ 之直線 PM，PM 卽爲P點之縱坐標。又由P引平行於XX′之直線 PN，PN 爲 P 點之橫坐標。



繁

【繁分數】Complex fraction.〔算〕〔代〕分數之分子分母又爲分數所成者，例如

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{5+\frac{2}{7}}.$$ 繁分數可化爲簡分數，如

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{5+\frac{2}{7}}=\frac{\frac{13}{4}}{\frac{37}{7}}=\frac{13}{4}\times\frac{7}{37}=\frac{91}{148}.$$

聯

【聯心線】〔幾〕見連心線條。

【聯結線】Join.〔幾〕聯結二點之直線也，或曰連結線。

【聯節器】Linkage.〔幾〕引直線之器械也，見破塞里葉氏聯節器條。

【聯立方程式】 Simultaneous equations.〔代〕一方程式含有二或二以上之未知數，則其諸未知數之值，能適合者，多至無限.例如 $2x+y=12$，其 $y=12-2x$。若 $x=1$，則 $y=10$，$x=2$，則 $y=8$，$x=3$，則 $y=6$，故 x 及 y 可有無限之值，皆能適合。然同此二未知數，若有二方程式，則其適合未知數之值，即爲有限。推之至於含 n 未知數之方程式，如亦有 n 式，則其未知數之值，同時能適合者，亦必有限。二以上之方程式，其所含諸未知數之值，能同時適合者，謂之聯立方程式。故一組聯立方程式之條件，爲(1)方程式之數等於未知數之數，(2)方程式都爲獨立，不相矛盾.如此則可有一定之解答.其未知數之乘冪爲一次者，稱曰一次聯立方程式；其最高乘冪爲二次者，稱曰二次聯立方程式.如下列第一，二兩組爲一次聯立方程式，第三組爲二次聯立方程式。

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c\cdots\cdots(1)\\ a'x+b'y&=c'\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}(\text{一組})$$

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=d\cdots\cdots(1)\\ a'x+b'y+c'z&=d'\cdots\cdots(2)\\ a''x+b''y+c''z&=d''\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}(\text{二組})$$

$$\left.\begin{aligned} ax^2+bxy+cy^2&=d\cdots\cdots(1)\\ a'x^2+b'xy+c'y^2&=d'\cdots(2)\end{aligned}\right\}(\text{三組})$$

聯立方程式每組只含二方程式如第一組第三組者，可用加減消去法，代入消去法，比較消去法以解之.若一組含三或三以上之方程式如第二組者，則可用累次消去法以解之，詳見各條。例如解第三組，則以 d' 乘(1)式，d 乘(2)式，相減，得 $d'(ax^2+bxy+cy^2)-d(a'x^2+b'xy+c'y^2)=dd'-dd'$，即 $(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)xy+(cd'-c'd)y^2=0$，此式可由解普通二次方程式之法解之。

二次聯立方程式所含之未知數在三以上者，則無一定之解法，茲舉一二特別之例，解之如下：

$$\text{〔第一例〕解}\begin{cases}(x+y)(x+z)=a^2\cdots\cdots(1)\\(y+z)(y+x)=b^2\cdots\cdots(2)\\(z+x)(z+y)=c^2\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

(2)式及(3)式之積，以(1)式除之，則得

$$(y+z)^2=\frac{b^2c^2}{a^2},\quad \therefore y+z=\pm\frac{bc}{a}.$$

同法得 $z+x=\pm\dfrac{ca}{b}$，$x+y=\pm\dfrac{ab}{c}$.

由是 $(y+z)+(z+x)-(x+y)$

$$=\pm\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right).$$

即 $z=\pm\dfrac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}$. 同法，

可得 $x=\pm\dfrac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$，

及 $y=\pm\dfrac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}$.

$$\text{〔第二例〕解}\begin{cases}x(y+z)=a\cdots\cdots(1)\\y(z+x)=b\cdots\cdots(2)\\z(x+y)=c\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

由(1)，(2)兩式之和，減去(3)式，則得

$2xy=a+b-c$。同法

$2yz=b+c-a$，$2zx=c+a-b$。

$$\therefore\frac{2xy\cdot 2zx}{2yz}=\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a},$$

即 $x=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$.

同法得 $y=\pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$,

及 $z=\pm\sqrt{\frac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$.

【聯係三角形】Associated triangle. 〔三〕延長球面三角形 ABC 之邊 AB, AC, 復交於 A′ 點,生三角形 A′BC. 延長其 BC, BA 邊,復交於 B′ 點,生三角形 AB′C. 延長其 CA, CB 邊,復交於 C′ 點,生三角形 ABC′. 與原三角形合稱之爲聯係三角形. 由是一三角形之內切圓及傍切圓爲其聯係三角形之傍切圓及內切圓.

【聯圓四邊形】Cyclic quadrilateral. 〔幾〕四邊形之各角頂在同一圓周上者之謂.

螺

【螺旋】Screw. 〔幾〕有二圓柱,其一爲實體圓柱,於其周圍作凸隆之連續曲線,其與水平面所成之角始終均等. 其一爲中空圓柱, 於其裏面周圍作凹陷之連續曲線,其與水平面所成之角亦始終均等. 如是則將第一圓柱插入第二圓柱時, 必可密合而旋轉. 前圓柱謂之雄螺旋,後者謂之雌螺旋,爲力學上單式機械之一種.

【螺線】Spiral. 〔幾〕當變角 (Vectorial angle) 漸增或漸損於無限之際,而一點之動徑亦同時漸增或漸損, 則該點所運行之軌跡,謂之螺線. 普通所用之螺線,有下列五種. (1)阿基米得之螺線(The spiral of Archimedes), 動點之動徑與其變角成正比例者,其方程式爲 $\rho=a\theta$. (2)雙曲線螺線 (The reciprocal 或 hyperbolic spiral), 點之動徑與其變角成反比例者,其方程式爲 $\rho\theta=a$. (3)對數螺線 (The logarithmic spiral), 動徑之對數與其變角成正比例者, 其方程式爲 $\log\rho=a\theta$. (4)拐杖螺線(The lituus), 點之動徑之平方與其變角成反比例者,其方程式爲 $\rho^2\theta=a$. (5)拋物線的螺線 (Parabolic spiral), 其方程式爲 $(\rho-r)^2=4dr\theta$. 詳各條.

還

【還原法】〔算〕運算終結後, 欲驗其運算之有無差誤,則可逆其道而施運算,以視其是否與原始之數值相同, 是曰還原法. 如加法中 $5+6+7=18$, 欲驗其是否眞確, 則可行還原法, 即將所得之和 18, 漸次減去 7 與 6, 是否爲 5 也. 減法之還原則行加法,乘法之還原行除法,除法之還原行乘法,開方之還原行自乘,可知還原法爲原運算之逆運算也.

隱

【隱分狀】〔代〕即不定形,見該條.

【隱函數】Implicit function. 〔數〕即陰函數,見該條.

點

【點】Point. 〔幾〕點者,無長無廣無厚無

大小而惟有位置者也，故常於其所在之位置用一字母以表之。有限直線之端爲點，二線之交爲點，三面之交爲點。

【點跡弧】Cycloid.〔幾〕日本古算書中。稱旋輪線曰點跡弧，詳旋輪線條。

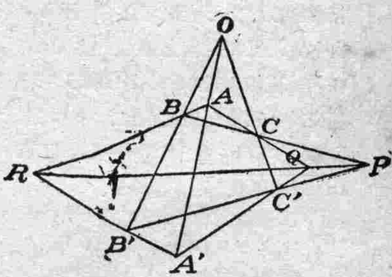
【點對稱】Point symmetry.〔幾〕即中心對稱，見該條。

十八畫

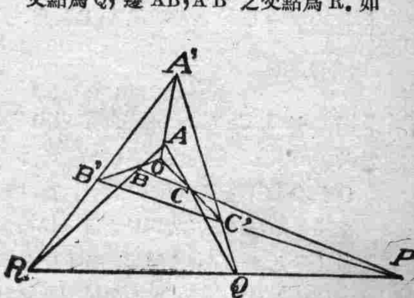
戴

【戴沙固定理】Desargues theorem.〔幾〕二三角形 ABC 及 A′B′C′，連結其對應頂點之直線 AA′,BL′,CC′ 若爲共點線，則其相對應之邊之交點 P, Q, R 爲共線點。又其逆定理亦眞，即二三角形之對應邊之交點 P,Q,R 若爲共線點，則連結其對應頂點之直線爲共點線。此稱爲戴沙固之定理。

〔證〕命 AA′,BB′,CC′ 之交點爲 O，邊



BC, B′C′ 之交點爲 P，邊 AC, A′C′ 之交點爲 Q，邊 AB,A′B′ 之交點爲 R。如



是則三角形 OAB 爲直線 $A'B'R$ 所截，故由門涅雷阿斯之定理，知 $AR:RB$, $BB':B'O$, $OA':AA'$ 之複比爲等比．同理就 $\triangle OBC$ 而言，$BP:PC$, $CC':C'O$, $OB':B'B$ 之複比爲等比．又就 $\triangle OAC$ 而言，$CQ:QA$, $AA':A'O$, $OC':C'C$ 之複比亦爲等比．而此等三複比之複比亦成等比，卽 $AR:RB$, $BP:PC$, $CQ:QA$ 之複比爲等比．故就三角形 ABC 言之，由美奈勞斯之逆定理，而知 R, Q, P 三點在同一之直線上而爲共線點．逆證之，若 P, Q, R 在同一之直線上，則命 BB', CC' 之交點爲 O，連結二三角形 RBB', QCC' 相對應頂點之三直線相交於一點 P，故由本定理其相對應之邊之交點 O, A, A' 在同一直線上，卽 AA', BB', CC' 三直線相交於一點 O 而爲共點線．

【戴奧克里斯蔓葉線】Cissoid of Diocles.〔幾〕見蔓葉線條.

擺

【擺線】Cycloid.〔幾〕卽旋輪線，見該條.

【擺線體】〔幾〕卽旋輪線體，見該條.

歸

【歸一法】Unitary method.〔算〕解比例問題之一種方法也．如次例所述．〔例 1〕茶 5 斤之價爲 3 元 3 角，問同種之茶 8 斤，其價若干．5 斤之價 $=3.3$ 元，故 1 斤之價 $=(3.3\div5)$ 元，故 8 斤之價 $=(3.3\div5)\times8=5.28$ 元，卽 5 元 2 角 8 分．〔例 2〕某事限 4 日告成，須用 27 人，問若限 18 日告成，則須用若干人．限 4 日告成須用 27 人，故限 1 日告成須用 4×27 人，故限 18 日告成須用 (4×27) 人 $\div18=6$ 人．〔例 3〕農夫 4 人，每日作工 14 時，則 5 日耕田 15 畝．今 7 人每日作工 13 時，欲耕田 19.5 畝，問需幾日．

旣 4 人每日作 14 時耕田 15 畝需 5 日，則 1 人每日作 14 時耕 15 畝所需 5×4 日，1 人每日作 1 時耕 15 畝需 $5\times4\times14$ 日，1 人每日作 1 時耕 1 畝需 $\dfrac{5\times4\times14}{15}$ 日，

而 1 人每日作 1 時耕 19.5 畝需

$$\frac{5\times4\times14\times19.5}{15}\text{日，}$$

1 人每日作 13 時耕 19.5 畝需

$$\frac{5\times4\times14\times19.5}{15\times13}\text{日，}$$

故 7 人每日作 13 時耕田 19.5 畝需

$$\frac{5\times4\times14\times19.5}{15\times13\times7}\text{日，}$$

將上之分數約簡之，得所需爲 4 日．

【歸納法】Induction.〔數〕見演繹法條.

簡

【簡分數】Simple fraction.〔算〕分數之分母分子各爲整數者，例如 $\dfrac{3}{5}$ 或 $\dfrac{8}{7}$．對於繁分數而言．或稱常分數．

轉

【轉跡線】Roulette.〔幾〕一曲線沿定

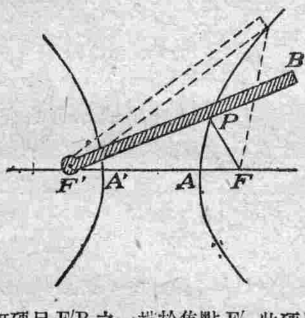
直線或定曲線而旋轉時，其上一定點所成之軌跡，名曰轉跡線.旋輪線即一種轉跡線。

釐

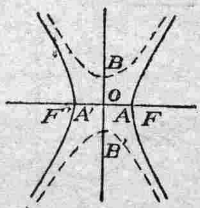
【釐】〔算〕(1)小數名，單位之百分之一，即 ·01。(2)我國貨幣名，圓之百分之一。

雙

【雙曲線】Hyperbola。〔幾〕雙曲線爲圓錐曲線或二次曲線之一種，爲一移動點之軌跡，此點移動於一平面內，其與此平面內兩定點之距離之差爲一定者也。此兩定點稱爲焦點，如圖 F,F′。聯曲線上一點於兩焦點之直線，稱爲點之焦點半徑，如 PF,PF′。雙曲線可作之如下。



釘硬尺 F′B 之一端於焦點 F′，此硬尺即以 F′ 爲圓心，繞之而旋轉於紙上.取一線比硬尺短，其差等於兩焦點半徑之定差 2a，釘其一端於他焦點 F，而釘其他端於硬尺之一端 B。今使硬尺繞 F′ 旋轉，以鉛筆尖 P，引此線緊隨硬尺移動，則 P 點畫一雙曲線.因硬尺移動時，F′P 及 FP 各增一等量，故 F′P 及 FP 之差，常爲一定。此硬尺繞 F′ 旋轉而成之曲線，爲雙曲線之右枝。可以同法以 F 爲圓心，使硬尺繞F旋轉而作對稱之左枝。設雙曲線之兩枝截線 FF′ 於 A 及 A′，則因其圖形之對稱，而得 AA′=2a，此爲雙曲線兩枝之最近點之距離。雙曲線無一點能爲FF′之垂直二等分線上者，因垂直二等分線上之各點，與兩焦點等距離，其差爲零也.如下圖，O點稱爲雙曲線之中心，AA′稱爲橫軸或貫軸，A 及 A′ 稱爲頂.設FF′之垂直二等分線上兩點 B 及 B′ 與 A(或 A′)之距離等於 C(兩焦點間之距離之半)，則 BB′ 稱爲雙曲線之共軛軸，以 2b 表之。以 O 爲原點，AOA′ 及BOB′爲坐標軸，則雙曲線之方程式爲



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

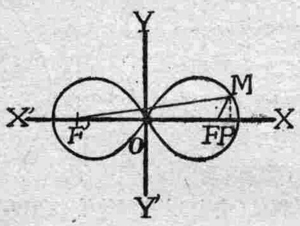
又方程式爲 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之雙曲線，爲前者之共軛雙曲線.若 a=b，則此雙曲線稱爲等邊雙曲線或直角雙曲線，其方程式爲

$x^2-y^2=a^2$。又雙曲線之極方程式爲 $\rho^2=\frac{b^2}{e^2\cos^2\theta-1}$，

e 爲其離心率，其值爲 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$，而常大於 1。

【雙素數】Prime-pair.〔算〕凡一偶數之左右夾以二素數者，稱曰雙素數，例如11與13，41與43，59與61，569與571等.相隣之二素數不必爲雙素數，例如7與11二素數其中間有8，9，10諸數.

【雙紐線】Lemniscate.〔幾〕爲四次曲線之一.動點與二定點之距離之積，等於此二定點之距離之半之平方，則該動點之軌跡，謂之雙紐線.此線爲瑞士數學家柏努利(Bernoulli James)所作.如圖



F，F′爲二定點，O爲原點，M爲動點，令OF=a.由定義得 $FM \cdot F'M = \overline{OF}^2$，即 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2$.解之得 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.是爲雙紐線之方程式.又令 $OM=\rho$，$\angle MOP=\theta$，則以 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入於上式，得 $\rho^4=2a^2\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$，即 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$.是爲雙紐線之極方程式.雙紐線之性質如次：(1)通過原點.(2)在X軸上之截部爲 $\pm a\sqrt{2}$.(3)關於兩軸爲對稱.(4)全在 $x=\pm a\sqrt{2}$ 二直線之間.(5)爲在極O接續之二個卵形所成，其面積爲 $2a^2$.雙紐線除上述者外，又有佐魯氏雙紐線，見該條.

【雙曲線體】Hyperboloid.〔幾〕爲二次曲面之一種.其以方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示之者，稱曰單翼雙曲線體；以方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示之者，稱曰雙翼雙曲線體.

【雙曲線函數】Hyperbolic functions〔三〕雙曲線函數爲法人鑑伯(Lambert 1728－1777)所發明，與三角函數或圓函數甚相類似，其定義如下：

$$\sin hu=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u}),$$

$$\cos hu=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u}),$$

$$\tan hu=\frac{\sin hu}{\cos hu}=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}},$$

$$\cot hu=\frac{\cos hu}{\sin hu},\quad \sec hu=\frac{1}{\cos hu},$$

$$\operatorname{cosec} hu=\frac{1}{\sin hu},$$

sin hu 爲「u之雙曲線正弦」之意，cos hu 爲「u之雙曲線餘弦」之意，餘同此.雙曲線函數可以 iu 之圓函數表之如下之方程式：

$\sin hu=-i\sin iu$，$\cos hu=\cos iu$，$\tan hu=-i\tan iu$，$\cot hu=i\cot iu$，$\sec hu=\sec iu$，$\operatorname{cosec} hu=-i\operatorname{cosec} iu$.

雙曲線函數有下之關係，

$$\cos h^2u-\sin h^2u=1,$$

$$\sec h^2u+\tan h^2u=1,$$

$$\cot h^2u-\operatorname{cosec} h^2u=1.$$

此與圓函數之關係

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$
$$\sec^2\theta-\tan^2\theta=1,$$
$$\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1,$$

相當,因令 $\theta=iu$, 卽可誘得之. 又與圓函數之和角或倍角函數相當,則有下式:

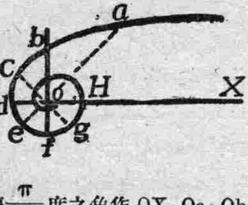
$$\sinh(u\pm v)=\sinh u\cosh v\pm\cosh u\sinh v,$$
$$\cosh(u\pm v)=\cosh u\cosh v\pm\sinh u\sinh v,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

若 $u=v$, 則

$$\sinh 2u=2\sinh u\cosh u,$$
$$\cosh 2u=\cosh^2 u+\sinh^2 u$$
$$=2\cosh^2 u-1=1+2\sinh^2 u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

【雙曲線對數】Hyperbolic logarithm. 〔代〕〔三〕卽納白爾對數,見對數條.

【雙曲線螺線】Hyperbolic spiral. 〔幾〕爲超越曲線之一.動點之動徑 ρ 與其變角 θ 爲反比例時,其軌跡謂之雙曲線螺線或倒數螺線. 設動點繞極一周後之動徑爲 r, 則依定義得 $\rho:r=2\pi:\theta$ 卽 $\rho\theta=2\pi r=a$ 是爲雙曲線螺線之極方程式.此 r 爲繞極一周後動點與極之距離,爲常數,而 a 代 r 爲半徑之圓周,亦爲常數.此曲線可作之如次:如圖從極



O 每隔 $\frac{\pi}{4}$ 度之角作 OX, Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of, Og 諸線,取 $OH=r$, 而取 $Oa=8\cdot OH$, $Ob=4\cdot OH$, $Oc=\frac{8}{3}OH$, $Od=2\cdot OH$, 等等,聯 a, b, c, d, 諸點,卽得曲線之軌跡. 由方程式可推知次之二條: (1) θ 漸近於無窮大時,則 ρ 接近於零,故此曲線漸近於極而不達於極. (2)平行於 OX, 距 OX 爲 a 之直線,爲此曲線無窮遠分支之漸近線.

【雙翼雙曲線體】Hyperboloid of two sheets.〔幾〕二次曲面之一種,其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

【雙曲線的拋物線體】Hyperbolic paraboloid.〔幾〕二次曲面之一種,其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2nz$.

雜

【雜小數】Mixed decimal. 〔算〕由整數與小數所成之數也.亦稱混小數,對純小數而言.例如 5.723 卽雜小數.

【雜循環小數】Mixed recurring decimal. 〔算〕亦稱混循環小數,見循環小數條.

【雜二次方程式】Adfected quadratic equation. 〔代〕含一未知數 x 之一次及二次之方程式,稱爲雜二次方程式,例如 $3x^2+5x-8=0$, 此爲與純二次方程式對稱之語.

十九畫

羅

【羅盤】Compass.〔三〕陸地測量用之羅盤(Surveyor's compass)由裝置磁針之圓盤而成,記東西南北四方位,分全面爲三百六十度,由南北兩點至左右各九十度,以數字記之,如記爲北幾度東(或西),又南幾度東(或西)等.又航海用之羅盤(Mariner's compass)亦由裝置磁針之圓盤而成,分全面爲三十二方位.以北爲基點,與時針同方向迴轉之,其方位之順次如下.又羅盤我國亦稱爲指南鍼,爲三大發明之一.

【羅耳定理】Rolle's theorem.〔代〕羅耳定理如次:$f(x)=0$ 之二實根之間必有 $f'(x)=0$ 之一實根.

【羅馬數字】Roman numbers.〔算〕羅馬記數法,現今計算上雖已不用,而於鐘錶表面,書籍卷目,西歷紀年,則多用以記數,是爲羅馬數字,其字如下.

數字	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
字值	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

用此七個數字,以記一切之數,其法如下:

(1) 同字幾個並書者,則以其字值之幾倍爲值,例
III 爲 3, XX 爲 20, CCC 爲 300.

(2) 異字並寫,左值大於右值者,則以其相和之值爲值,例如
XII 爲 $10+2=12$, VIII 爲 $5+3=8$, DCLVII 爲 $500+100+50+5+2=657$.

(3) 異字並寫,右值大於左值者,則以其相差之值爲值,例如
IV 爲 $5-1=4$, XC 爲 $100-10=90$, CD 爲 $500-100=400$.

(4) 數字之上引一橫線者,則以其字值之千倍爲值,例如
$\overline{\mathrm{L}}$ 爲 $50\times1000=50000$,
$\overline{\mathrm{C}}$ 爲 100000, $\overline{\mathrm{IX}}$ 爲 9000.

【羅馬記數法】Roman notation..〔算〕即用羅馬數字以記數之法也,見上條.

藥

【藥衡】Apothecaries' weight.〔算〕英美秤藥品用之重量,其單位如次:

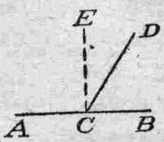
1 grain(gr.)……合我國 .002074市兩
1scruple(℈)….20grains…. .04147市兩
1 dram(ʒ)….3scruples…. .1244市兩

1 ounce(℥)····8drams········ ·9953市兩

1 pound(lb)····12ounce····11.9436市兩

證

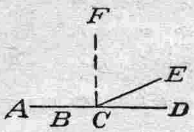
【證明】Proof 或 Demonstration.〔數〕證明(proof)者,驗證法則或運算之結果之正否也.運算之正否常可逆其跡而查證之,例如驗證加法運算之正否,則由其和順次減去被加數,至悉減去後,如得結果爲0,則其運算爲正確不誤.驗證減法則可將其差加減數,如其結果等於被減數,則其運算爲正確不誤.同理乘法可以除法驗證之,除法可以乘法驗證之,開方可以自乘驗證之,此卽所謂還原法也.又加減乘除之運算均可以去九法證明之,見該條.又證明(Demonstration)者,達到終結之推理之步程也,其證明之目的,爲由假定之眞理以求結果.數學的證明所假定之眞理,爲定義,公理及前所已證明之命題等.證明法有二種,卽直接證明法與間接證明法.間接證明法含通常所稱之反證法(Reductio ad absurdum),先假設其終結爲不能,施以推理,因以得到與已知之眞理相矛盾之結果,故可推定其原終結爲眞.直接證明法者,卽由假定之眞理如定義公理及已證之命題,直接施以推理而得到終結者也.惟前之 proof 與後之 demonstration 常作同意用之.玆取幾何學之例以說明二種證法如次:〔直接證明法之例〕二直線與他直線相交,其所成兩隣角之和,等於二直角.如直線 CD 與 AB 相交於 C 點,則兩隣角 DCA,DCB 之和等於二直角.證明此命題所用之假設爲直角之定義〔1〕,三公理〔2,3,4〕及一公法〔5〕.1.若一直線與他直線相交,其兩隣角互相等,則各角稱爲直角,二直線稱爲互相垂直.2.諸量若均與他量相等,則諸量互等.3.等量加等量,其和相等.4.全量等於其諸分量之和.5.於線內一已知點僅可作一直線垂直於此線,〔證〕於直線 AB 上 C 點引一垂線 CE,則由〔1〕,角 ACE,ECB 各爲直角.由公理〔4〕,∠ACD等於∠ACE+∠ECD,又由公理〔3〕,∠ACD+∠DCB 等於∠ACE+∠ECD+∠DCB.然∠ECD+∠DCB=∠ECB〔4〕,故∠ACD+∠DCB 等於 ∠ACE+∠ECB 等於 ∠ACB〔2〕,卽二直角,本命題爲已證明.於此證明所假定之眞理爲定義,公理及公法.



〔間接證明法之例〕設兩直線有二公共點,則此兩線必相合而成一線.欲證明此命題,用前之公理,定義,公法及前命題之結果外,須更用次之二公理〔6,7〕.6.過二點惟可引一直線.7.等量減等量其差相等.〔證〕命與兩直線有公共點 A,B,則由公理〔6〕此二直線於 A,B 間相合.今命二直線過 B 點後於 C 點開始分離,第一直線向 CD,第二直線向 CE.於 C 點作 AC 之垂線 CF.ACE 直線與 FC 交於 C 點,則由前命題 ∠ACF+∠FCE

$=2\hat{R}$，又 ACD 直線與 FC 交於 C 點，由前命題 $\angle ACF+\angle FCD=2\hat{R}$.

故$\angle ACF+\angle FCE=\angle ACF+\angle FCD$〔2〕，由公理〔7〕，



$\angle FCE=\angle FCD$，而此爲不合理，因部分不能等於全量．故二直線於某點開始分離之假定不眞，卽二直線不能於某點分離，而必爲全相合．於此證明法由二直線於某點開始分離之假設，致誘出不合理之終結，故此假設之反面爲眞(卽二線相合成一線)，此卽所謂反證法也．

邊

【邊】Side．〔幾〕夾成角之直線稱爲角之邊．包圍正多角形之直線稱爲正多角形之邊．

【邊心距】Apothem．〔幾〕由正多邊形之中心至其一邊之距離，卽其內切圓之半徑，稱爲多邊形之邊心距．

鏈

【鏈線】Chain line．〔幾〕卽主線，見該條．

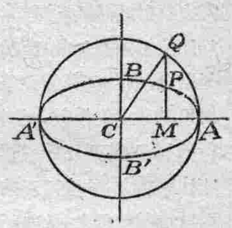
關

【關係式】Scale of relation．〔代〕見循環級數條．

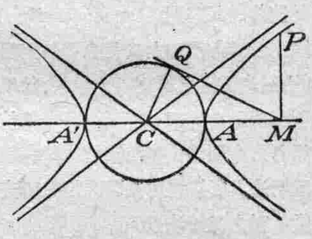
【關係值】Relative value．〔代〕兩未知數不能求得其一定之值，僅能以已知數表其關係時，此種已知數謂之兩未知數之關係值．例如 $7x=5y$，兩端同以 $7y$ 除之，得 $x/y=5/7$，此 $5/7$ 卽 x,y 之關係值．

離

【離心角】Eccentric angle．〔幾〕〔1〕如圖，由橢圓之補助圓上一點 Q，作AA′軸之垂線QM，交橢圓於P點，則角 QCM 稱爲橢圓上 P 點之離心角．



〔2〕如圖



與雙曲線同心以CA爲半徑畫圓．由雙曲線上 P 點作縱坐標 PM，由 M 引圓之切線 MQ，則角 QCM 稱爲雙曲線上 P 點之離心角．

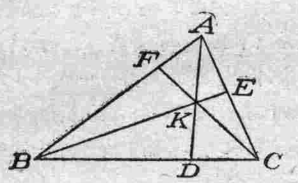
【離心率】Eccentricity 或 Excentricity．〔幾〕由圓錐曲線上任意一點至焦點之距離與至準線之距離之常數比也．〔1〕命橢圓之長徑，短徑之半爲a，b，則 $\sqrt{a^2-b^2}:a$ 稱爲橢圓之離心率，爲小於 1 之實數．〔2〕命雙曲線之橫軸，共軛軸

之半爲 a,b，則$\sqrt{a^2+b^2}:a$ 稱爲雙曲線之離心率，爲大於 1 之實數. 〔3〕拋物線之離心率爲等於 1 之實數.離心率常以 e 表之.

類

【類似中線】Symmedian lines.〔幾〕過三角形之頂點，且二等分底邊逆平行線之直線，稱爲類似中線.如下圖之 AD, BE, CF 是也.

【類似重心】Symmedian point.〔幾〕三類似中線之交點，稱爲類似重心，或勒滿(Lemoine)點. 如圖類似中線 AD,



BE, CF 之交點 K 爲 $\triangle ABC$ 類似重心. 命 K 之三線坐標即至三邊之距離爲 α, β, γ，則 $a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$.

故 $\alpha=\dfrac{2\Delta a}{a^2+b^2+c^2}$.

然 $\tan\omega=\dfrac{4\Delta}{a^2+b^2+c^2}$，$\omega$爲布洛喀角. 故得$\alpha=\dfrac{1}{2}a\tan\omega$. 同樣

$$\beta=\frac{1}{2}b\tan\omega,\ \gamma=\frac{1}{2}c\tan\omega.$$

故$\dfrac{\alpha}{a}=\dfrac{\beta}{b}=\dfrac{\gamma}{c}$；即類似重心至三角形三邊之距離，與三邊成比例.

二十畫

懸

【懸鏈線】Catenary.〔幾〕將均一密度之鏈之兩端懸之，則因地心吸力而自成一種曲線，名曰懸鏈線，或稱垂絲線或軟腰線.命曲線頂點至橫軸之距離爲 a，則其方程式爲 $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. (圖見曲線條附圖)

贏

【贏數】Abundant number.〔算〕見不完數條.

觸

【觸角】Osculating angle.〔幾〕即切角，見該條.

【觸面】Osculating plane.〔幾〕見空間曲線條.

鐘

【鐘狀拋物線】Bell-shaped parabola.〔幾〕方程式 $ay^2=x^3-bx^2$ 之拋物線，其形如鐘，稱爲鐘狀拋物線.

二十一畫

屬

【屬徑】Conjugate axis.〔幾〕一稱屬軸，或共軛軸，見雙曲線條.

【屬軸】Conjugate axis.〔幾〕卽共軛軸，見雙曲線條.

蘭

【蘭格倫日定理】Lagrange's theorem.〔代〕p 若爲素數，則於 $1,2,3,\cdots\cdots p-1$ 中取 r 個以爲積，其諸積之和可以 p 除之.但 r 不大於 $p-2$.是爲蘭格倫日定理，證明之如次：恆等式 $(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-\overline{p-1})\equiv x^{p-1}-S_1x^{p-2}+S_2x^{p-3}-\cdots\cdots+(-1)^{p-1}S_{p-1}$.若以 $x-1$ 代此式之 x，則得 $(x-2)(x-3)\cdots\cdots(x-p)=(x-1)^{p-1}-S_1(x-1)^{p-2}+\cdots\cdots+(-1)^{p-1}S_{p-1}$，由是得 $(x-p)\{x^{p-1}-S_1x^{p-2}+S_2x^{p-3}-\cdots\cdots+(-1)^{p-1}S_{p-1}\}=(x-1)\{(x-1)^{p-1}-S_1(x-1)^{p-2}+\cdots\cdots+(-1)^{p-1}S_{p-1}\}$.將 x 之異方乘諸項比較其係數，得

$$\text{(I)}\quad S_1=\frac{p(p-1)}{1.2}.$$

$$\text{(II)}\quad S_2=\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+S_1\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}.$$

$$\text{(III)}\quad S_3=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}+S_1\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}+S_2\frac{(p-2)(p-3)}{1.2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$(p-2)S_{p-2}=\frac{p(p-1)\cdots\cdots2}{1.2\cdots\cdots(p-1)}+S_1\frac{(p-1)(p-2)\cdots\cdots2}{1.2\cdots\cdots(p-2)}+S_2\frac{(p-2)\cdots\cdots2}{1.2\cdots\cdots(p-3)}+\cdots\cdots+S_{p-3}\frac{3.2}{1.2}.$$

因 p 爲素數，故各右邊之第一項可以p整除之.由 (I) 之方程式知 S_1 爲p之倍數，因而知 S_2 亦爲 p 之倍數，且順是以下至 S_{p-2} 皆爲 p 之倍數，亦可知矣.但 S_1 爲於 $1,2,3,\cdots\cdots p-1$ 中取一個之和，S_2 爲取二個諸積之和，至 S_{p-2} 爲取 S_{p-2} 個諸積之和.故上之證明適與題意相合.

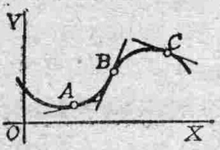
魔

【魔方】Magic square.〔算〕見幻方條.

二十二畫

彎

【彎點】Point of inflection.〔幾〕〔微〕曲線從向下凹變而爲向上凹之點，謂之彎點．例如若曲線 $y=f(x)$ 從向上凹



(於 A) 變 (於 B) 而爲向下凹 (於 C)，或從向下凹變而爲向上凹，則如斯之變化點B即彎點，在彎點曲線之切線，横截曲線，此時 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 或 $\frac{d^2x}{dy^2}=0$，且在此前後，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 變其符號．

疊

【疊分數】Complex fraction.〔算〕即繁分數，見該條．

【疊次微分法】Successive differentiation.〔微〕將原函數微分之，所得之微分係數爲一新函數，又將新函數微分之，如斯遞次微分至n次之運算，謂之疊次微分法，其第二次以下所得之各微分係數，謂之疊次微分係數．參閱疊次微分係數條．

【疊次積分法】Successive integration.〔積〕疊次積分法者，疊次微分法之逆運算也．即將 n 階微分係數依次積分至 n 次之運算．其第二次積分所得之結果，謂之二重積分，第三次所得者，謂之三重積分，餘類推，而總之曰重積分．

例1．已知 $\frac{d^3y}{dx^3}=6x$，求 y，解：書原式爲 $\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}=6x$，或 $d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=6x\,dx$，積分之得 $\frac{d^2y}{dx^2}=\int 6x\,dx$，或 $\frac{d^2y}{dx^2}=3x^2+C_1$，此爲第一次積分之結果．同樣書此結果爲 $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=(3x^2+C_1)dx$，再積分之得 $\frac{dy}{dx}=\int(3x^2+c_1)dx$，或 $\frac{dy}{dx}=x^3+c_1x+c_2$，此爲第二次積分之結果．再同樣，$dy=(x^3+c_1x+c_2)dx$，$y=\frac{x^4}{4}+\frac{c_1x^2}{2}+c_2x+c_3$，此爲第三次積分之結果，即所求之結果．第二次結果又可書爲 $\frac{dy}{dx}=\iint 6x\,dx\,dx$（或 $=\iint 6x\,dx^2$）之形，是爲表二重積分之符號．第三次結果又可書爲 $y=\iiint 6x\,dx\,dx\,dx$（或 $=\iiint 6x\,dx^3$）之形，是爲表三重積分之符號．

凡如上例無指定之限界，則所求之結果爲不定積分，若對於每次積分有指定之限界，則所求之結果爲定積分．例2．有一曲線，其上之任意一點之縱坐標關於横坐標之第二次微分係數等於4，求此線

之方程式.解:由題意有$\frac{d^2y}{dx^2}=4$，積分之，$\frac{dy}{dx}=4x+C_1$……(a)，再積分之，$y=2x^2+C_1x+C_2$……(b)．此爲拋物線方程式，其軸平行 OY，且向上伸展．由給積分常數 C_1 與 C_2 以一切適宜之值，可得如上述情狀之一切拋物線.如欲決定 C_1 與 C_2，則更需增設二條件.設云(1)於 $x=2$ 之點，曲線之切線之斜率爲零；(2)曲線經過點$(2,-1)$．代 $x=2$ 及$\frac{dy}{dx}=0$ 於(a)，得 $0=8+C_1$ 因此 $C_1=-8$，而(b)變爲 $y=2x^2-8x+C_2$．又點$(2,-1)$之坐標必滿足此方程式，故 $-1=8-16+C_2$，即 $C_2=+7$．於是滿足所有三條件之特殊拋物線之方程式爲 $y=2x^2-8x+7$．

〔附註〕疊次積分法所得之重積分，爲偏積分法所得者之特殊場合．參閱偏積分法條．

【疊置之公法】Postulate of superposition.〔幾〕任何圖形，可變其位置，而其大小及形狀不變．

【疊次微分係數】Successive differential coefficient.〔微〕x 之函數之微分係數普通又爲 x 之函數，此新函數又可微分之，如斯之第一次微分係數之微分係數，謂之原函數之第二次微分係數，第二次微分係數之微分係數，謂之第三次微分係數，以至第n次微分係數，而總稱此第二次以下之微分係數曰疊次微分係數．例如 $y=3x^4$，$\frac{dy}{dx}=12x^3$，$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=36x^2$，$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=72x$，…………．疊次微分係數常用次之符號記之：$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$，…………………，$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$．若 $y=f(x)$，則疊次微分係數又可用次之各組符號表之：$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，……………，$f^{(n)}(x)$；y'，y''，y'''，y^{iv}，…………，$y^{(n)}$；或 $\frac{d}{dx}f(x)$，$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$，$\frac{d^3}{dx^3}f(x)$，$\frac{d^4}{dx^4}f(x)$，…………………，$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.第若干次微分係數或微分，有時稱曰第若干階或若干階微分係數或微分．如稱第n次微分係數曰第n階或n階微分係數是．

二十三畫

纖

【纖】〔算〕小數名，即 .0000001.

變

【變】To vary.〔代〕見變數法條.

【變角】Variable angle 或Vectorial angle.〔幾〕見極坐標條.

【變量】Variable quantity.〔代〕與變數同.

【變數】Variable.〔代〕代數式或方程式中，可任意取得之數曰變數.例如於代數式 ax^2+bx+c，x 爲變數.又於方程式 $x^2+y^2=r^2$，x，y 爲變數.數之得自爲消長變易者，稱曰自變數；因自變數而定者，稱曰因變數.例如於 $y=ax^2+bx+c$，x 爲自變數，y 爲因變數.又於 $x^2+y^2=r^2$，若 y 爲自變數，則 x 爲因變數.因變數又稱爲自變數之函數.而自變數與因變數無固定之名，於含二變數之方程式，若取其一爲自變數，則其他即爲因變數.又如 $y=ax^2+bx+c$，若就 x 而解之，則可以 $x=f(y)$ 表示之，故 y 爲自變數而 x 爲因變數.又含三變數之式如 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 可任取其中之二變數如 x，y 爲自變數，而其他一如 z 爲因變數.餘倣此.

【變函數】Derived function.〔數〕即誘導函數，見該條.

【變數法】Variation.〔代〕二量有一定之關係，其第一量任意二值之比，等於第二量相當二值之比，則謂之第一量因第二量而變.例如第一量之兩值爲 a_1，a_2 之比，等於第二量之相當兩值 b_1，b_2 之比，則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$，故 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，由是此二量之相當值爲常比.變之記號爲 $\propto$，如 $A\propto B$ 讀爲「A 因 B 而變」.若 $a\propto b$，則 a:b 爲常數.命此常比爲 m，則 $\frac{a}{b}=m$，$\therefore a=mb$.於任意之例欲求常比 m，必先知 a 及 b 之一對相當數值.例如

$a\propto b$，知 $a=15$，$b=5$，則 $a=mb$，

$\therefore 15=m\times5$，即 $m=3$，$\therefore a=3b$.

凡二量，其第一量因第二量之反商而變，則謂之第一量因第二量而反變.一量依他二量之積而變，則謂之此量因他二量而合變.有三量其第一量依第二量及第三量之反商之積而變，則謂之第一量因第二量而正變，因第三量而反變.有 a，b，c 三量，a 與 b 及 c 相關係，若 c 爲常數，則 a 因 b 而變，若 b 爲常數，則 a 因 c 而變，若 b 及 c 俱爲變數，則 a 因 bc 而變.例如三角形之面積，若高爲常數，則因底邊而變，若底邊爲常數，則因高而變，若高及底邊俱爲變數，則其面積因高及底邊之積而變　又如氣體之壓力，若溫度爲常數，則因其質之密度而變，若密度爲常數，則因溫度而變，若密度及溫度俱爲變數，則氣體之壓力，因密度與溫度之積而變.故變數法爲解關於

比及比例之問題之一種方法，玆舉二例如下：〔例 1〕有三角形之底邊爲 8 寸，其面積爲 20 平方寸，與其等高之三角形，其面積爲 45 平方寸，則底邊爲若干寸．命三角形之面積及底邊爲 A 及b，則 $A=mb$． 而 $b=8$，則 $A=20$，

$\therefore 20=8m$，$\therefore m=\frac{5}{2}$．故 $45=\frac{5}{2}b$，

$\therefore b=18$ 寸． 〔例 2〕氣體之體積因溫度正變，因壓力反變．今壓力 15，溫度 260，則其體積爲 200 立方寸．若壓力 18，溫度 390，則其體積爲若干．命體積爲 V，壓力爲 P，溫度爲 T，則

$V=mT\times\frac{1}{P}$． 即 $200=m\times 260\times\frac{1}{15}$，$\therefore m=\frac{150}{13}$．故 $V=\frac{150}{13}\times 390\times\frac{1}{18}=250$ 立方寸．

【變數分離法】Separation of variables．〔微〕見一階一次微分方程式條．

【變數置換法】Substitution of variable．〔積〕見有理化積分法條．

驗

【驗證】Verification 或 Proof．〔數〕徵驗計算之結果之誤否之謂也．

體

【體積】Volume 或 Solidity．〔幾〕立體所占有之空間之部分之量，謂之體積．任意立體之體積爲其所含體積單位之數，故可用體積單位測之．

【體積單位】Unit of volume．〔幾〕一正方形之諸稜等於一單位，則此正方形爲體積單位．

（完）

數學辭典附錄

目　次

附錄一　數學之諸法則及定理

算術法則

命數法及記數法

●基數．一二三四五六七八九．

●數字．1,2,3,4,5,6,7,8,9,0．

●取位．

…兆千億百億十億億千萬百萬十萬萬千百十一．分釐毫絲忽………．

●符號．＋，－，×，÷，＝．

●羅馬數字．

I(一)，V(五)，X(十)，L(五十)，C(百)，D(五百)，M(千)．(1)同字幾個並寫者，則以其字值之幾倍爲值．(2)異字並寫，左值大於右值者，則以其相和之值爲值．(3)異字並寫，右值大於左值者，則以其相差之值爲值．(4)數字之上引一橫線者，則以其字值之千倍爲值．

整數小數之四則

●諸數相加，不論其順序如何，其和不變．

●被減數－減數＝差，故

被減數＝差＋減數．被減數－差＝減數．

●二數之積，可不拘其因數之順序．

●某數乘諸數之和之積，等於以某數乘各數之積之和．

●被除數與除數以同數除之或以同數乘之，其商不變．

●除數×商＋剩餘＝被除數．

●同種若干數之和，等於以其個數乘其平均數．

●加減之運算之式，由左順次及右．

●乘減之運算之式，由左順次及右．

●加減乘除之運算相混之式，須先行乘除之運算，而後行加減之運算．

整數之性質

●約數之性質．

(1)二數之公約數爲其和或其差之約數．

(2)某數之約數爲其諸倍數之約數．

(3)二數之公約數，爲其一之任意若干倍與他一之任意若干倍之和或其差之約數．

●得約數之條件．

(1)凡數之末位爲零，或爲偶數，則其數能爲 2 所整除．

(2)凡數之末位爲零或爲 5，則其數能爲 5 所整除．

(3)凡數之末二位爲零者，其數能爲 4 與 25 所整除．又其末二位爲 4 之倍數者，其數能爲 4 所整除．其末二位爲 25 之倍數者其數能爲 25 所整除．

(4)凡數之末三位爲零者，其數能爲 8 與 125 所整除．其末三位爲 8 之倍數者，其數能爲 8 所整除．其末三位爲 125 之倍數者，其數能爲 125 所整除．

(5)凡數之數字之和能爲 9 或 3 所整除者，則其數能爲 9 或 3 所整除．凡偶數爲 3 之倍數者，則其數能爲 6 所整除．

(6)凡數若各奇位數字之和，與各偶位數字之和相等，或其較爲 11 所整除者，則其數能爲 11 所整除。

● 二數之最大公約數與最小公倍數之積，等於二數之積．

分 數

● 以整數乘分子，等於以同數乘其分數．以整數除分子，等於以同數除其分數．

● 以整數乘分母，等於以同數除其分數．以整數除分母，等於以同數乘其分數．

● 分子與分母以同數乘之，或以同數除之，其分數之值不變．

● 同分母之二分數，其分子大者，則其分數之值大．

● 同分子之二分數，其分母小者，則其分數之值大．

● 諸分數之最大公約數，爲以諸分母之最小公倍數爲分母，諸分子之最大公約數爲分子之分數．

● 諸分數之最小公倍數，爲以諸分母之最大公約數爲分母，諸分子之最小公倍數爲分子之分數．

循 環 小 數

● 純循環小數化成分數，可取其循環節爲分子，依循環節數字之數列書若干個 9 爲分母．

● 雜循環小數化成分數，可自全小數減不循環數，用爲分子，依循環節數字之數列記若干 9 字，又依不循環之數字之數連附若干 0 字爲分母．

比

比之值＝前項÷後項．

前項＝後項×比之值．

後項＝前項÷比之值．

比 例

外項之乘積＝中項之乘積．

百 分 法

百分率＝子數÷母數．

母數＝子數÷百分率．

子數＝母數×百分率．

內折＝子數÷母數．

外折＝子數÷(母數－子數)．

利 息

● 單利

利息＝本金×利率×時間．

本利和＝本金＋本金×利率×時間

$$=\text{本金}\times(1+\text{利率}\times\text{時間}).$$

本金＝利息÷(利率×時間)

$$=\frac{\text{本利和}}{1+\text{利率}\times\text{時間}}.$$

利率＝利息÷(本金×時間)．

時間＝利息÷(本金×利率)．

● 複利

$$\text{本利和}=\text{本金}\times(1+\text{利率})^{\text{時間}}.$$

$$\text{利息}=\text{本金}\times(1+\text{利率})^{\text{時間}}-\text{本金}$$

$=\text{本金}\times\{(1+\text{利率})^{\text{時間}}-1\}$.

本金$=\text{本利和}\div(1+\text{利率})^{\text{時間}}$

$=\text{利息}\div\{(1+\text{利率})^{\text{時間}}-1\}$.

代數學法則及定理

交換之理

●諸數之和可不拘其被加數之順序.

$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\cdots$.

●諸數之積可不拘其因數之順序.

$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=\cdots$.

結合之理

●求諸數之和，可任意集合若干項爲若干羣，而後相加.

$a+d+c+d=a+(b+c+d)$

$=(a+b)+(c+d)=\cdots$.

●求諸數之積，可任意集合若干因數爲若干羣，而後相乘.

$a\times b\times c=a\times(b\times c)=b\times(a\times c)=\cdots$.

配分之理

●以某數乘由若干項所成之式，可以此數乘其各項.

$(a+b+c+d)m=am+bm+cm+dm$.

●逆之，以某數除由若干項所成之式，可以此數除其各項.

$$(a+b+c+d)\div n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}.$$

指數之理

●$a^m\times a^n=a^{m+n}$.

●逆之，若 $m>n$，$a^m\div a^n=a^{m-n}$;

若 $m<n$，$a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$.

符號之定則

●加法　$+a+(+b)=+(a+b)$.

$-a+(+b)=-(a-b)\ [a>b]$;

$=+(b-a)\ [a<b]$.

$+a+(-b)=+(a-b)\ [a>b]$;

$=-(b-a)\ [a<b]$.

$-a+(-b)=-(a+b)$.

●減法　$+a-(+b)=+(a-b)\ [a>b]$;

$=-(b-a)\ [a<b]$.

$+a-(-b)=+(a+b)$.

$-a-(+b)=-(a+b)$.

$-a-(-b)=-(a-b)\ [a>b]$;

$=+(b-a)\ [a<b]$.

●乘法　$(+a)\times(+b)=+ab$.

$(-a)\times(+b)=-ab$.

$(+a)\times(-b)=-ab$.

$(-a)\times(-b)=+ab$.

●除法　$(+ab)\div(+a)=+b$.

$(-ab)\div(+a)=-b$.

$(-ab)\div(-a)=+b$.

$(+ab)\div(-a)=-b$.

公約數及公倍數

●命 H 爲二代數式 A 及 B 之最高公因數，L 爲其最低公倍數，而 $A=aH$，$B=bH$.

則 $L=abH=A\times\dfrac{B}{H}=B\times\dfrac{A}{H}$

$=\dfrac{A\times B}{H}$，$L\times H=A\times B$.

分數

●$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$，$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$.

●$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}$

$$=\left(\frac{pa_1{}^n+qa_2{}^n+\cdots}{pb_1{}^n+qb_2{}^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

方程式

●一元一次方程式 $ax+b=o$ 之根爲

$x=-\dfrac{b}{a}$.

●二元一次方程式 $ax+by+c=o$ 與 $a'x+b'y+c'=o$ 之根爲

$x=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$，　$y=\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$.

●三元一次方程式 $ax+by+cz=d$，$a'x+b'y+c'z=d'$，　$a''x+b''y+c''z=d''$ 之根，

$x=\{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)\}\div\{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)\}$.

y 之值可由 x 之值將 a,b,c 變爲 b,c,a 而得之。z 之值可由 y 之值施以同樣之變化而得之。但 x,y,z 之值之分母均相等。

●二次方程式 $ax^2-b=o$ 之根爲 $\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

$ab>o$ 爲實根，$ab<o$ 爲虛根。

●二次方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之根爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$b^2-4ac>o$ 爲相異之實根。

$b^2-4ac=o$ 爲相等之實根。

$b^2-4ac<o$ 爲相異之虛根。

●根與係數之關係。命 α,β 爲方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之二根，則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

乘冪及根

● $a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}$.

● $(a^m)^n=a^{mn}$.

● $(a^xb^yc^z\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots$.

● $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$.

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$.

● $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$.

● $a^\circ=1,\ a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

● $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}=$

$$\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}.$$

不等式

●若 $a>b$，則

$a+x>b+x$，$-a<-b$.

$ma>mb[m>o]$，$ma<mb[m<o]$.

● $a_1>b_1,a_2>b_2,a_3>b_3,\cdots,a_n>b_n$，若諸文字皆爲正數，則

$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n$.

● $a>b$，$c>d$，若諸文字皆爲負數，則 $ac<bd$.

● $a>b$，若 a,b 皆爲正數，則

$a^m>b^m[m>o]$，$a^m<b^m[m<o]$.

●由 $ax+b>o$，得

$$x>-\frac{b}{a}[a>o],x<-\frac{b}{a}[a<o].$$

●於不等式 $ax^2+bx+c>o$，

命方程式 $ax^2+bx+c=o$ 之根爲 $\alpha,\beta[\alpha>\beta]$，若 α,β 爲實數，則當

$a>o$ 時，$x>\alpha$，或 $x<\beta$.

$a<o$ 時，$\alpha>x>\beta$.

若 $ax^2+bx+c=o$ 之根爲虛數，則當

$a>o$ 時，x 之諸值均能適合。

$a<o$ 時，此不等式爲不可能。

● $ax^2+bx+c<o$，則得與上相反對之結果。

● $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)>o$，適合此不等式爲

$x>\alpha_1$ 或 $\alpha_2>x>\alpha_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$\alpha_{2r}>x>\alpha_{2r+1},\cdots\cdots[$但$\alpha_r>\alpha_{r+1}]$.

● $ax+by+c=o\cdots(1)$，$a'x+b'y+c'\gtrless o\cdots(2)$ 之解答爲 $x=-\frac{c+by}{a}$，$y\gtrless\alpha$.

即由(1)未知數之一例如 x，以他未知數 y 表之，代入(2)以解不等式，則得 $y\gtrless\alpha$.

● $(x^2+y^2+z^2+\cdots)(a^2+b^2+c^2+\cdots)\nless(ax+by+cz+\cdots\cdots\cdots)^2$.

●若 a,b 爲正數，則 $\frac{a+b}{2}\nless\sqrt{ab}$.

●若干正數之相加平均數大於相乘平均數，即

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}.$$

● n 正數之 m 乘冪之相加平均，大於其相

加平均之 m 乘冪，即

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}>\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^m.$$

若 m 爲正眞分數則反是.

● m 及 r 皆爲正數，若 $m>r$，則

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}\not<\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots\cdots+a_n^r}{n}\times\frac{a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots\cdots+a_n^{m-r}}{n}.$$

● $\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots$ 皆爲正數，若 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=m$，則

$$\frac{\sum a_1^m}{n}\not<\frac{\sum a_1^\alpha}{n}\cdot\frac{\sum a_1^\beta}{n}\cdot\frac{\sum a_1^\gamma}{n}\cdots.$$

● $a,b,c,\cdots\cdots$ 爲正整數，若 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$ 爲正數，則

$$\left(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots}{a+b+c}\right)^{a+b+c+\cdots}\not<\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\cdots.$$

極大極小

●若干正數之積爲一定數，則各數相等時，其和爲極小.

●若干正數之和爲一定數，則各數相等時，其積爲極大.

●若文字皆表正數，$x^my^nz^p\cdots$ 爲一定值，則 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\cdots\cdots$ 時，其和 $x+y+z+\cdots\cdots$ 爲極小.

●若文字皆表正數，$x+y+z+\cdots$ 爲一定值，則 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\cdots\cdots$ 時，其積 $x^my^nz^p\cdots\cdots$ 爲極大.

●於代數式 ax^2+bx+c，當 $a>0$ 時之極小值及 $a<0$ 時之極大值，均爲 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，而與之對應 x 之值爲 $-\frac{b}{2a}$.

●求 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 之極大或極小值，可以此分數爲等於 y 之方程式，而由此方程式書出 x 之值爲實數之條件：

$$(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)>0,$$

由此二次不等式解得 y 之值即可.

比　例

●若　$ad=bc$，則 $a:b=c:d$.

●逆之，若　$a:b=c:d$，則 $ad=bc$.

●又　$a:b=c:d$，則

$b:a=d:c$〔反轉之理〕.

$a+b:b=c+d:d$〔合比之理〕.

$a\sim b:b=c\sim d:d$〔分比之理〕.

$a+b:a\sim b=c+d:c\sim d$〔分合比之理〕.

$a:c=b:d$〔更迭之理〕.

$a^n:b^n=c^n:d^n$.

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

●若　$a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots$，則

$$a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots=a+b+c+\cdots:a'+b'+c'+\cdots.$$

●若　$a:b=b:c=c:d$，則

$a:c=a^2:b^2$,

$a:d=a^3:b^3$,

$b^2=ac$.

變數法

●若 $A\propto B$ 及 $B\propto C$，則 $A\propto C$。

●若 $A\propto B$ 及 $C\propto D$，則 $AC\propto BD$。

●若 $A\propto B$，則 $A^n\propto B^n$。

●若 C 爲一定數時 $A\propto B$，又 B 爲一定數時 $A\propto C$，則當 B，C 俱變時，$A\propto BC$。

記數法

●以 r 爲底所記之數，若其數字之和得以 $r-1$ 或其因數整除，則其全數亦得以 $r-1$ 或其因數整除之。

●以 r 爲底所記之數，若其奇位數字之和與偶位數字之和之差，得以 $r+1$ 整除，則其全數亦可以 $r+1$ 整除之。

排列，組合.

● n 個相異之物，同時悉取時，其排列之數爲 ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$。

● n 個相異之物，每次取 r 個時，其排列之數爲

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

● n 個物之輪換排列之數爲 $(n-1)!$。

● n 個物中有 p 個，q 個，r 個相同之物，則每次悉取時，其排列之數爲

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}.$$

● n 個相異之物，每次悉取，其重複排列之數爲 n^n。

● n 個相異之物，每次取 r 個，其重複排列之數爲 n^r。

●由 n 個相異之物中取 r 個，其組合之數爲 ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

● ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$. ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$.

● ${}_nC_r$ 之最大值. n 爲偶數，則 $r=\dfrac{n}{2}$ 時，${}_nC_r$ 之值爲最大. n 爲奇數，則 $r=\dfrac{n-1}{2}$ 及 $r=\dfrac{n+1}{2}$ 時，${}_nC_r$ 之值爲最大.

● $x+y+z$ 個相異之物，各分爲含 x，y，z 個物之三組，其組合之數爲

$$\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}.$$

●凡得蒙之定理 Vandermonde's theorem. 若 n 爲任意之正整數，x 與 y 爲任意之值，則

$$(x+y)_n=x_n+nx_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{2}x_{n-2}y_2+\cdots\cdots+\frac{n!}{r!(n-r)!}x_{n-r}y_r+\cdots\cdots+y_n.$$

●由 n 個文字所能作之 r 次同次積之數爲 ${}_nH_r=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{1.2\cdots\cdots r}$

$$={}_{n+r-1}C_r.$$

●由 n 個物中取 r 個之重複組合之數與上式同，即 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$.

二項式定理

● $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+b^n$.

●二項式定理之公項爲 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$.

●二項式 $(a+b)^n$ 之展開式，其與初末兩

項等距離之項之係數相等。

● $(1+x)^n$ 之展開式之最大項爲適合

$$\frac{(n+1)x}{x+1}<r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1$$ 之整數 r 所取之第 r 項.若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$，則第 r 項與第 r+1 項同爲最大項。

● $(1\pm x)^n$ 之展開式，其絕對值最大係數之項爲適合

$$\frac{n+1}{2}<r<\frac{n+1}{2}+1$$ 之整數 r 所取之第 r 項.故若 n 爲偶數,則

$r=\frac{n}{2}+1$，此第 r 項之係數爲最大。

若 n 爲奇數,則第 $\frac{n+1}{2}$ 項及第 $\frac{n+3}{2}$ 項之係數互相等，而大於其餘任何項之係數。

● $(1+x)^n$ 之展開式，其各項係數之和爲 2^n。

● $(1+x)^n$ 之展開式，其奇位數各項之係數之和與偶位數各項之係數之和爲互相等。

多項式定理

● $(a+b+c+\cdots\cdots)^n$ 之展開式之公項爲

$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots$，但 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$。

● $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots)^n$ 之展開式之公項爲

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\cdots}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots}$$。

但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots=n$。

● $(1+x+x^2+\cdots+x^r)^n$ 之展開式，其與兩端等距離之項之係數相等。

對數

● $\log_a a=1$. $\log_a a^m=m$. $\log_a 1=0$.

● $\log(ab)=\log a+\log b$.

● $\log(a\div b)=\log a-\log b$.

● $\log a^m=m\log a$. $\log\sqrt[m]{a}=\frac{1}{m}\log a$.

● $\log_a b\times\log_b a=1$.

● $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$
$=2.7182818284\cdots$.

● $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

● $a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log_e a)^3}{3!}+\cdots$.

● $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$.

● $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$.

● $\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$.

級數之收斂發散

●收斂級數

I. 諸項悉較某收斂級數之對應諸項爲小者。

II. 二級數其對應諸項之比常爲有限,而其一爲收斂級數者。

III. 諸項皆爲正數,於若干定項之後,其各後項與其前項之比,恆小於某定量,而某定量爲小於1者。

IV. 相隣二項符號相反,而其絕對值爲 $u_n > u_{n+1}$,若 n 無限增大時,u_n 無限減小者。

V. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$之極限大於 1 者。

●發散級數

I. 級數之各項皆爲有限值,且諸項爲同符號者。

II. 二級數其對應諸項之比常爲有限,而其一爲發散級數者。

III. 諸項皆爲正數,於若干定項之後,其各後項與前項之比爲等於1或大於1者。

IV. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限爲小於 1 者。

● $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 爲發散級數。

●二項級數 $1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$,若 n 爲非正整數而 $|x|<1$ 者,爲收斂級數。

●指數級數 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$ 爲收斂級數。

●對數級數 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$,當 $1>x>-1$ 時爲收斂級數,$x=-1$ 爲發散級數。

連分數

●於連分數 $a+\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots$,命第n近數爲$\frac{p_n}{q_n}$,則

$$p_n=b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2},$$
$$q_n=b_{n-1}q_{n-1}+a_{n-1}q_{n-2}.$$

●於連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$,

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$$

●於$\frac{a_1}{b_1-}\,\frac{a_2}{b_2-}\,\frac{a_3}{b_3-}\cdots\cdots$,

$$p_n=b_np_{n-1}-a_np_{n-2},$$
$$q_n=b_nq_{n-1}-a_nq_{n-2}.$$

●於 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$,

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}.$$

●於$\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$,

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}.$$

適遇法

●必成功即確實出來之事之適遇爲 1,

●命事 A,B 成功之適遇各為 a,b，且設 A 及 B 無相互之關係,則

I. A,B 同時成功之適遇為 ab.

II. A,B 之任一成功之適遇為 a+b.

III. A 成功 B 失敗之適遇為 a(1-b).

IV. A,B 俱失敗之適遇為(1-a)(1-b).

●無相互關係之若干事各自成功之適遇各為 $p_1,p_2,p_3,\cdots\cdots$，則此等事俱成功之適遇為 $p_1p_2p_3\cdots\cdots$，而俱失敗之適遇為 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$.

●命事 A 成功之適遇為 p,A 成功時,第二事 B 隨之而成功之適遇為 q，則此二時同時成功之適遇為 pq.

●設已知某事於一次之試驗,其適遇為 p,則其於 n 次試驗內成功 n 次 n-1 次, n-2 次,等等之適遇為 $(p+q)^n$ 之二項展開式之諸項,但 q=1-p.

●於前條次之試驗，成功及失敗之適遇為於 $(p+q)^n$ 之展開式內之最大項.

●於前條 n 次試驗內最少成功 r 次之適遇為 $p^n+{}_nC_1p^{r-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots +{}_nC_{n-r}p^rq^{n-r}$.

●若 p 為一人得金之適遇，而金額為 M,則其人之希望為 pM.

行列式

●改行列式之行為列，而列為行，其行列式之值不變.

●行列式之任意相鄰二行(或列)互換時，行列式惟變其符號.

●若行列式之二行(或二列)相等，則其值為零.

●若行列式之任意一行(或一列)之諸原素以同一數乘之，則行列式為其乘數倍.

●$\triangle=a_1\triangle a_1-a_2\triangle a_2+a_3\triangle a_3-\cdots\cdots$

$=-b_1\triangle b_1+b_2\triangle b_2-b_3\triangle b_3+\cdots$

$=a_1\triangle a_1-b_1\triangle b_1+c_1\triangle c_1-\cdots\cdots.$

●
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

●$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots+k_1x_n=\alpha_1$,
$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\cdots+k_2x_n=\alpha_2$,
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,
$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots+k_nx_n=\alpha_n$
之解答如次:

$$x_1=\frac{[\alpha_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]}{[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]},\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而一般 $x_r=\dfrac{[a_1b_2\cdots\alpha_r\cdots k_n]}{[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]}$.

●形如 $a_1x_1+b_1x_2+\cdots+k_1x_n=\alpha_1$ 之 $n+1$ 個方程式爲聯立之條件爲
$[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n\alpha_{n+1}]=0$.

●形如 $a_1x_1+b_1x_2+\cdots\cdots+k_1x_n=0$ 之 n個方程式,無 $x_1=x_2=\cdots=0$, 欲適合於他值. $[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]=0$.

●西薇士德消去法. 由 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $px^2+qx+r=0$ 消去 x, 則

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

方程式論

●有理整方程式,至少有一根(基本定理).

● n 次之方程式祇有 n 根.

●根與係數之關係. 命由方程式
$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots p_{n-1}x+p_n=0$ 之 n 根之中取 r 個諸數之積之和爲 s_r, 則 $s_1=-p_1$, $s_2=p_2$, $s_3=-p_3$, $\cdots\cdots$, $s_n=(-1)^np_n$.

●於方程式
$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$,

I. 改變根之符號之方程式爲
$p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^n p_n=0$.

II. 以 c 乘諸根之方程式爲
$p_0y^n+p_1cy^{n-1}+p_2c^2y^{n-2}+\cdots+p^n c^n=0$.

III. 由根減去 c 之方程式爲
$f(x+c)=0$.

IV. 以根之倒數爲根之方程式爲
$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_0=0$.

●某方程式爲倒數方程式之條件爲由兩端同次第之項之係數相等(第一類), 惟符號相異(第二類)者.

●倒數方程式之重要性質.

I. 屬於第一類而爲奇數次者, 有等於 -1 之根.

II. 屬於第二類而爲奇數次者, 有等於 $+1$ 之一根.

III. 屬於第二類而爲偶數次者,有 ±1 二根.

IV. 由以上三條,由 $f(x)$ 除去對應於各根之因數時, 任意倒數方程式可化爲第一類而爲偶數次之方程式, 而此種方程式可視爲倒數方程式之標準形.

●第一類偶數次之倒數方程式可減半其次數.

●方程式之根爲有理數, 而其中有二次不

盡根之根或複虛根存在時，則必以共軛組而存在.

● n 次方程式之係數皆爲整數，且 n 次之係數爲 1 者，不能有分數之根.

●若 $f(x)$ 爲 x 之任意有理整函數，而 $f'(x)$ 爲其第一誘導函數，則

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\cdots,$$

但 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$ 爲 $f(x)=0$ 之實根或虛根.

● $f(x)=0$ 中所含等根爲求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最大公約數 $\phi(x)$，使之等於 0 而求之，但 $\phi(x)=0$ 之根含 m 個 a，n 個 b，$\cdots\cdots$ 時，則 $f(x)=0$ 之根含 $m+1$ 個 a，$n+1$ 個 b，$\cdots\cdots$.

● $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 有反對之符號時，則方程式 $f(x)=0$ 至少有一根在 α 與 β 之間.

●奇數次之方程式至少有一實根.

●偶數次之方程式之第一項之係數爲 1，而末項爲負時，則其方程式至少有二實根，其符號爲反對.

● $(x-a)(x-b)(x-c)-f^2(x-a)-g^2(x-b)-h^2(x-c)-2fgh=0$ 之根皆爲實數.

●若 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 爲異號時，則 $f(x)=0$ 有奇數個之根在 α 與 β 之間，又 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 爲同號時，$f(x)=0$ 有偶數個根在 α 與 β 之間，或無一根在 α 與 β 之間.

● $f'(x)=0$ 至少有一實根在 $f(x)=0$ 之鄰接二實根之間(洛爾定理).

●於 $f(x)=0$，正實根之數，不能超過 $f(x)$ 內諸項之係數之符號變化之數；又負實根之數，不能超過 $f(-x)$ 內諸項係數之符號變化之數(笛卡兒之符號法則).

●命 x^3+px+q 之根爲 $-(a+b)$，$-(\omega a+\omega^2 b)$，$-(\omega^2 a+\omega b)$，則 a^3 及 b^3 爲

$$\left\{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right\}.$$

●三次方程式解法之不能化之情形，a^3 及 b^3 之式爲 $\alpha+i\beta$ 及 $\alpha-i\beta$ 之複虛數式時，則 $r^2=\alpha^2+\beta^2$，$\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$，而三根爲 $-2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$，$-2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}$，$-2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}$.

●欲解 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$，先解

$$4(\lambda^2-s)(2\lambda+\frac{p^2}{4}-q)-(p\lambda-r)^2=0,$$

而求其根，則由 $2\lambda+\frac{p^2}{4}=q+\alpha^2$，$p\lambda=r+2\alpha\beta$，$\lambda^2=s+\beta^2$ 求得 α,β，而解 $x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\pm(\alpha x+\beta)=0$ 則得所求之根.

● $x^3+px+q=0$ 之根悉爲實數之條件爲 $27q^2+4p^3$ 爲負.

數　論

● $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots$，則其約數爲 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots$，但 a，b，c，$\cdots\cdots$ 爲相異之素數.

● $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots$，則其約數之總和爲

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots\cdots.$$

● p 爲素數,而 N 對於 p 爲素數,則 $N^{p-1}-1$ 爲 P 之倍數(斐馬定理).

● $\lfloor n$ 內所含素數 a 之最高乘冪之次數爲

$$I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\cdots\cdots,$$

但 $I\left(\frac{n}{a^r}\right)$爲表$\frac{n}{a^r}$內所含之最大整數.

● r 個相連續之整數之積可以 $\lfloor r$ 整除之.

●若 a 對於 b 爲素數,則 $a, 2a, 3a, \cdots, (b-1)a$ 各以 b 除之,其餘數皆互相異.

● $\phi(abcd\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\cdot\phi(d)\cdots$, 但 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 互爲素數.

●若 $N=a^p$(a爲素數), 則

$$\phi(N)=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

●若 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$, 而 $a, b, c, \cdots\cdots$ 爲相異之素數, 則 $\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$.

●若 p 爲素數, 則 $1+\lfloor p-1$ 爲 p 之倍數(威爾遜定理).

幾何學定理

平面部

普通公理

●與同量相等之諸量,彼此互相等.

●全量等於其各部分之和.

故全量大於其各部分.

●等量加等量其和必等.

●等量減等量其差必等.

●等量加不等量, 其和不等, 所加爲大量者,則其和大.

●不等量減等量,其差不等,原爲大量者仍爲大量.

●等量減不等量, 其差不等, 所減爲大量者,其餘爲小量,所減爲小量者, 其餘爲大量.

●諸等量之同倍數之量相等.

●諸等量之同分數之量相等.

幾何學公理

●圖形可不變其形狀及大小, 而得變其位置.

●能全相重合之圖形爲相等.

●過一點在一方向可引一直線, 而只限於一直線.

換言之,一點與一方向可決定一直線.

由此公理可知次之二件.

(1) 二點可決定一直線.

換言之,若二直線有二公共點,則此二直線必全相合而成一直線.

(2) 相異二直線只能相交於一點．

●二點間之最短徑爲其間之直線．

●諸周角相等．

●過一點可引一直線平行於他一直線，惟只限於一直線．

定理之關係

1. 定理者，其眞理可以已知之命題而證明之之命題也．但已知之命題爲公理或定理等．

定理由二部而成，一曰假設，一曰終結．假設者假定其如是者也，終結者由假設施以推理所生之結果也．例如定理之雛形爲

若 A 爲 B 則 C 爲 D.　　(1)

「若A爲B」爲假設,「則C爲D」爲終結．

此定理如果眞確，則次之定理亦必眞，即

若 C 不爲 D, 則 A 不爲 B.　(2)

此(1)與(2)稱爲互爲對偶．例如馬爲四足動物之命題,若欲合前之雛形,則須改書之如次．

如動物爲馬,則此動物爲四足．

其對偶爲

如動物不爲四足,則此動物不爲馬．

此定理常爲眞,因動物之不爲四足者,雖不僅爲馬,而其必非馬也則甚明．

2. 二定理其一之假設爲他之終結時，則後者稱爲前者之逆定理．例如

若 C 爲 D 則 A 爲 B.　　(3)

爲(1)之逆定理．又(3)之對偶爲

若 A 不爲 B 則 C 不爲 D.　(4)

此(4)稱爲(1)之裏定理．

一定理爲眞時，其逆定理與裏定理未必皆眞，果眞與否不得不特別討論之．例如前例之

如動物爲馬,則此動物爲四足．

其逆定理爲

如動物爲四足,則此動物爲馬．

又其裏定理爲

如動物不爲馬,則此動物不爲四足．

此二定理一見而知非眞，可知逆定理與裏定理未必一般爲眞也．

3. 前述定理之四種變態,又列舉之如次．

原定理．若 A 爲 B 則 C 爲 D.　(1)

其對偶，

若 C 不爲 D 則 A 不爲 B.　(2)

其逆定理．若 C 爲 D 則 A 爲 B.　(3)

其裏定理．

若 A 不爲 B 則 C 不爲 D.　(4)

此(1)爲眞時,(2)則常爲眞〔論理的〕．而(4)爲(3)之對偶，故(3)與(4)必同時爲眞．然(1)與(3)或與(4),則不能知其必眞與否．故此定理之四種變態中，其不互爲對偶者爲(1)與(3),(1)與(4),(2)與(3)及(2)與(4)，須由幾何的證法證明其眞確與否．

4. 定理之假設複雜時之情形．在此情形時,將假設之一與終結交換,即得原定理之逆定理．例如

$$\text{若}\left.\begin{array}{l}A=D\\B=E\\C=F\end{array}\right\}\text{則 } M=N.$$

其逆理爲

$$\text{若}\left.\begin{array}{r}A=D\\B=E\\M=N\end{array}\right\}\text{則 } C=F,$$

$$\left.\begin{array}{r}A=D\\M=N\\C=F\end{array}\right\}\text{則 } B=E,$$

……………

5. 逆定理之法則.逆定理不常眞,但若原定理中含一羣之定理,而僅一假設爲眞時,不能同時有二終結爲眞.則此一羣定理之逆定理,必均爲眞.例如

若 A 大於 B 則 C 大於 D.

若 A 等於 B 則 C 等於 D.

若 A 小於 B 則 C 小於 D.

如已證明此三定理爲眞,則其各逆定理亦必爲眞.卽

若 C 大於 D 則 A 大於 B.

若 C 等於 D 則 A 等於 B.

若 C 小於 D 則 A 小於 B.

6. 同一法.若僅有 A 及 B 於此,若已知 A 爲 B,則必可斷定 B 爲 A.

例如已知一直線 AB 與其線外一定點 P,由 P 至 AB 之最短線只有一,由 P 至 AB 之垂線亦只有一.則當云最短線爲垂線時,必可由同一法而直接斷定垂線爲最短線.

直 線

●於一直線上之一點,得引一垂線垂直於此直線,唯只限於一.

●由一直線外之一點,得引一垂線垂直於此直線,唯只限於一.

●由一直線外之一點,對於此直線所引之諸線.

(1) 垂線爲最短.

(2) 斜線之趾與垂線之趾成等距離者,則此兩斜線等長.

(3) 斜線之趾與垂趾之距離不等,則距離遠者其線較長.

(4) 前條之逆定理.

(5) 由一直線外之一點,對於此直線可引相等之兩直線,唯只限於二,各在垂線之兩側.

(6) 已知之有限直線得以任意之比內分爲二分,又得以任意之比外分爲二分;惟外分時不能成等比.如斯之分點只限於一點.

角

●由一點引諸直線所生諸隣角之和,等於一周角,卽四直角.

●一直線與他一直線相交,其兩隣角之和等於一平角,卽等於二直角.

此定理之逆定理亦眞.

●對頂角相等.

●若兩隣角之和等於二直角,則其各角之二等分線互相垂直.

●若兩直線相交所成之四角中,有一角爲直角,則其他三角必皆爲直角.

平 行 直 線

●一直線截二直線,若其所成之內錯角相等,則此二直線必平行.

此定理之逆.

●一直線截二直線，若其在截線同側之二內角互爲補角，則此二直線必平行。

此定理之逆。

●一直線截二直線，若其所成之同位角相等，則此二直線必平行。

此定理之逆。

●垂直於同一直線之二直線，必互相平行。

●平行直線有共同之垂線。

●平行於同直線之二直線，必互相平行。

●一橫截線截三平行線，若其所截取之線分相等，則以任意之他橫截線截之時，其所截取之線分亦相等。

●設二直線爲一組之數平行線所截，則其諸相當線分成比例。

三角形

●三角形各內角之和等於二直角。

●三角形之一外角等於其相對二內角之和，故大於二內角之任一角。

●二三角形全等之條件。

(1) 二邊及其夾角相等者。

(2) 二角及其夾邊相等者。

(3) 三邊相等者。

(4) 二邊及其大邊所對之角相等者。

●二三角形之兩意情形。

二邊及其小邊所對之角相等，大邊所對之角相等或互爲補角者。

●三角形之二邊相等，則其所對之角亦相等。其逆定理亦眞。

●二等邊三角形之頂角之二等分線爲其底邊之垂直二等分線。其逆定理亦眞。

●三角形之大邊對大角，又大角對大邊。

●三角形之二邊之和大於其他之一邊。

二邊之差小於其他之一邊。

●由三角形一邊之兩端至三角形內之一點引直線，此二直線之和比其所對他二邊之和小，然其所夾之角，則大於他二邊所夾之角。

●二三角形之二邊相等，若其夾角不相等，則大角之對邊大於他之對邊。其逆定理亦眞。

●三角形之三中線相交於一點〔重心〕。

重心分中線爲 $1:2$ 之比。

●三角形之各邊之垂直二等分線相交於一點〔外心〕。

●由三角形各角之頂點至對邊所引之垂線相交於一點〔垂心〕。

●三角形各角之內二等分線相交於一點〔內心〕。

●三角形一角之內二等分線與他二角之外二等分線相交於一點〔傍心〕。

● $\triangle=\frac{1}{2}$(等底等高之平行四邊形)。

● $\triangle=\frac{1}{2}$底×高。

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

●直角三角形斜邊上之正方形等於他二邊上之正方形之和。〔畢達哥拉斯之定理〕。

●三角形銳角之對邊上之正方形等於他二邊上之正方形之和，減去一邊與他邊在此邊上之正射影所包矩形之二倍。

●鈍角三角形鈍角之對邊上之正方形等於

他二邊上之正方形之和，加一邊與他邊此在邊上之正射影所包矩形之二倍.

●三角形二邊上之正方形之和，等於第三邊之半之正方形之二倍，與第三邊之中線上正方形之二倍之和.

●三角形二邊上之正方形之差，等於第三邊之二倍與第三邊之中線在其邊上之正射影所包之矩形.

●二三角形相似之條件.

(1)　三角各相等者.

(2)　三邊成比例者.

(3)　二邊成比例,且其兩邊之夾角相等者.

(4)　二邊成比例,且其大邊之對角相等者.

●由直角三角形直角之頂點至斜邊引垂線，則所成之二三角形，與原三角形相似,且彼此相似.

●二三角形之彼此二邊成比例，若其小邊所對之角相等，則其大邊所對之角爲相等或互爲補角.

●分三角形之二邊成相等之比之直線，必與第三邊平行.

●三角形同頂內外角之二等分線截其對邊成調和比例.其逆定理亦眞.

●有一角相等之二三角形之比，等於夾此角之二邊所包矩形之比.

●相似三角形之比，等於其對應邊之二乘比.

四邊形

●內接於圓之四邊形，其相對之角互爲補角.其逆定理亦眞.

●圓之外切四邊形，其相對二邊之和等於他相對二邊之和.其逆定理亦眞.

●圓之內接四邊形，其二對角線所包之矩形,等於兩組之兩對邊所包矩形之和.

●在平行四邊形

(1)　相對之邊相等.

(2)　相對之角相等.

(3)　相隣之角互爲補角.

(4)　兩對角線互爲二等分.

(5)　面積等於底與高所包之矩形.

●在一四邊形，若

(1)　二組相對之邊各相等者，

(2)　二組相對之角各相等者，

(3)　一組相對之邊相等且平行者，

則其四邊形爲平行四邊形.

●等底等高之二矩形相等.

●矩形之面積＝底×高.

●梯形之面積$=\frac{1}{2}$×高×兩底之和.

●在同底或相等之底邊上，且在同平行線間所作之平行四邊形,皆互相等.

●沿平行四邊形之對角線之平行四邊形之餘形相等.

●一平行四邊形之相隣兩邊與他平行四邊形之相隣二邊相等,且有一角相等者,則二平行四邊形爲全等.

●等高之矩形與其底成比例.

●等底之矩形與其高成比例.

●命 $X, Y, \cdots$ 爲線分，$XY, XZ, \cdots$ 爲矩形，$X^2, Y^2, \cdots$ 爲正方形,則

(1)　$X(Y+Z)=XY+XZ$.

(2)　$(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$.

(3)　$(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY$.

(4)　$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$.

多角形

〔或多邊形〕

● n 邊多角形內角之和$=(2n-4)\hat{R}$.

● n 邊多角形外角之和$=4\hat{R}$.

●二等分正多角形之各角之直線，皆相交於一點，此點與諸頂點成等距離，且與諸邊等距離.

●正多邊形得內接或外切於一圓.

●分圓之全周爲若干相等之弧，是等之弧之弦必構成一內接正多邊形，又於諸分點作諸切線，必構成一外切正多邊形.

●內接於圓之等邊多邊形恆爲正多邊形.又外切於圓之等邊多邊形，若邊數爲奇數，則爲正多邊形.

●外切於圓之等角多角形恆爲正多角形.又內接於圓之等角多角形，若邊數爲奇數，則爲正多角形.

●正多邊形之面積$=\frac{1}{2}\times$邊心距$\times$周

●同邊數之正多邊形爲相似形.

命相似兩形之對應邊爲 $a, b, c,\cdots\cdots$ 及 $a', b', c',\cdots\cdots$ 外接圓之半徑爲 r, r', 則

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}.$$

●將二相似直線形之各對應邊平行放置之；則連結一形之頂點與他形之頂點之諸直線，必互相平行，或同遇一點，而由點引任意直線與二形之對應邊之交點，其距離之比等於對應邊之比.

●相似多邊形之比，等於其對應邊之二乘比.

●四直線成比例，於第一及第二之上在相似位置作二相似形，又於第三及第四之上亦作二相似形，則是等諸形必成比例其逆定理亦眞.

●直角三角形斜邊上之直線形，等於他二邊上在相似位置所作之相似直線形之和.

圓

●半徑相等之圓爲全相等.

●圓對於中心爲對稱.

●圓對於任意直徑爲對稱.

●命由中心至一點之距離爲 d，圓之半徑爲 r，則

(1)　點在圓內　　$d<r$.

(2)　點在圓周上　$d=r$.

(3)　點在圓外　　$d>r$.

並是等之逆定理亦眞.

●過圓之中心垂直於弦之直線，必二等分此弦.其逆定理亦眞.

●圓之弦之垂直二等分線必過中心.

●圓之弦之垂直二等分線必二等分其弦之共軛弧.

●在同圓或等圓內，相等之弦與中心成等距離.又其逆與中心等距離之弦必等.

●在同圓或等圓內，若二弦不等，則大弦距中心近，小弦距中心遠.又其逆.

●在同圓或等圓內，相等之中心角對相等之弧.又其逆.

●在同圓或等圓內,若中心角不等,則大中心角對大弧.又其逆.

●在同圓或等圓內，相等之弧必對相等之弦. 於不相等之劣弧，則大劣弦必對大弦.又此定理之逆.

●在同弧上之圓周角等於圓心角之半.

●在圓之同弓形內之角相等.又其逆.

●於圓內〔或外〕相交二弦間之角，得以其所截之弧之和〔或差〕之半測度之.

●在弓形內之角,視其弓形大於,或等於,或小於半圓,因而其角爲銳角,或直角,或鈍角.又其逆.

●過圓周上一點所引之諸線中，惟在此點與半徑垂直之直線不再與圓周相交，其他諸線則皆與圓周相交於他一點.

●直線與圓心之距離比半徑小者，則與圓周相交;等於半徑者，則切於圓周;大於半徑者,則全不與圓周相遇.

●圓之切線垂直於過切點之半徑.

●過切點引切線之垂線必過圓心.

●切線及由切點所引之弦,其間之角,等於其角之隣弓形內之角.又其逆.

●由圓外一點引圓之二切線必相等.

●切於不過同一點又不平行之三直線之圓有四,亦只有四.

●相交二圓之聯心線爲其公共弦之垂直二等分線.

●二圓周不於連結其中心之直線上一點相交時，必又於他一點相交，是爲二圓相交,而其中心間之距離比半徑之和小,比其差大.

●二圓周於連結其中心之直線上一點相交時,則此二圓周不再於他點相交,此時二圓爲外切或內切,而其中心間之距離,爲外切時則等於半徑之和，爲內切時則等於半徑之差.

●二圓相切，其切點與二圓之中心在同一直線上.

●圓之弦內分或外分,其二分所包之矩形,等於半徑上之正方形與連結分點與圓心之直線上之正方形之差.

●過一定點引圓之諸割線，由其與圓周相交之二點至該定點之線分所包之矩形必均相等.又其逆.

●由圓外一點引切線及割線，其切線上之正方形等於割線之二分所包之矩形. 又其逆.

●同圓或等圓之圓心角之比，等於其所對之弧之比.

●命圓之半徑爲 r，圓周爲 c，則

$$c=2\pi r.$$

●圓之面積 $=\pi r^2$.

●扇形之面積 $S=\pi r^2\cdot\dfrac{\alpha}{360^\circ}$,

但 α 爲扇形之角度.

軌　跡

●欲確定軌跡,須證明次之二命題.

(1)　在 X 線上之點適合條件 A.

(2)　適合條件 A 之點在 X 線上.

或可證明(3)以代(1),證明(4)以代(2).

(3)　不適合條件 A 之點不在 X 線上.

(4) 不在 X 線上之點不適合條件 A.

●與二定點A,B等距離之點之軌跡,爲AB直線之垂直二等分線.

●與一定點等距離之點之軌跡,爲以其點爲中心之圓周.

●與一直線成一定距離之點之軌跡,爲與此直線平行之二直線.

●三角形之底邊爲一定,其所對之角亦一定,則其頂點之軌跡,爲以其底爲弦之圓之二弧.

●與相交二直線等距離之點之軌跡,爲其角之內外二等分線.

●與相交二直線之距離爲已知之比之點之軌跡,爲過其交點之二直線.

●與已知二點之距離爲已知之比之點之軌跡,爲連結二點之直線以已知之比內分及外分之,以此二分點之距離爲直徑之圓周.

作圖題

●作圖題之目的在成功幾何學之作圖.解作圖題許使用器具,因可使用器具之限制,其範圍愈狹者,則其可解得之作圖題之範圍愈狹,從而其解法亦愈困難.在初等幾何學許使用之器具,不外規矩二物.所謂規者卽兩脚規,用以畫圓及測距離之器具也.所謂矩者卽直線版,用以引直線及延長直線之器具也.

●作圖之公法

(1) 由任意之一點至他之任意一點,可引一直線.

(2) 有限直線得延引爲任意之長.

(3) 以任意之點爲中心,任意之有限直線爲半徑,得畫一圓.

倍量之性質

●就可通約量而言

(1) 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.

(2) 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.

(3) $mA+mB+\cdots=m(A+B+\cdots)$.

(4) $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.

(5) $mA+nA=(m+n)A$.

(6) $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.

(7) $m\cdot nA=mnA=mn\cdot A=n\cdot mA$.

●就不可通約量而言

(1) $A\gtreqless B$, 則 $mA\gtreqless mB$.

(2) $mA\gtreqless mB$, 則 $A\gtreqless B$.

(3) $mA+mB+\cdots=m(A+B+\cdots)$.

(4) $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.

(5) $mA+nA+\cdots=(m+n+\cdots)A$.

(6) $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.

(7) $m\cdot nA=mnA=nm\cdot A=n\cdot mA$.

比 例

●若$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, $\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$,

則$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

●若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$〔反轉之理〕.

●若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$〔更迭之理〕.

●若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $ad=bc$.

●若 $ad=bc$, 則可得次之諸比例:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，

$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

〔合比之理〕。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$，則 $\frac{a\sim b}{b}=\frac{c\sim d}{d}$

〔分比之理〕。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a+b}{a\sim b}=\frac{c+d}{c\sim d}$

〔分合比之理〕。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$，則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$=\frac{e}{f}=\cdots=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$〔加比之理〕。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，則 $b^2=ac$，$\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，則 $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$。

●若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$，則

$\frac{ax}{by}=\frac{cz}{dw}$。

●$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，視 $a\gtreqless c$，而 $b\gtreqless d$。

●若 $a:b=P:Q$，則 $a^2:b^2=P^2:Q^2$，又 $a^3:b^3=P^3:Q^3$。

極限論

●某量有一定之值者曰常數，從某條件而消長變異其值者曰變數。

●變數之值漸漸與常數接近，但其差雖如何微小，而不能恰等於常數，則此常數稱爲此變數之極限，此變數漸近於此常數，稱爲漸近於其極限。

若變數漸漸增大而接近於其極限，則其極限稱曰增極；又若漸漸減小而接近於其極限，則其極限稱曰減極。

●設一點由 A 向 B 運動，第一秒間行 AB 之半至 M，第二秒行 MB 之半至 M′，第三秒間行 M′B 之半至 M″，逐次如斯前進。則此運動點可使漸近於 B，然決不能達至 B。因每次皆行餘距離之半，其至 B 也，雖愈行愈近，然尙有餘距離之半在，終不能恰等於 B 也。

故由 A 至運動點之距離，爲增變數，漸近於一常數 AB，以 AB 爲其極限；由運動點至B之距離，爲損變數，漸近於一常數零，以零爲其極限。

命 AB 之長爲 2 寸，由 A 至運動點之變數爲 x，此變數與其極限之差爲 v，則

第一秒後　$x=1$，　　$v=1$，

第二秒後　$x=1+\frac{1}{2}$，　　$v=\frac{1}{2}$，

第三秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，$v=\frac{1}{4}$，

第四秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$，

$v=\frac{1}{8}$，餘準此。

此級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之和明知其小於 2，然若所取之項數愈多，則其與 2 之差可使爲任何小。故 2 爲該級

數取無窮項時之極限，零爲該級數與 2 之差之極限。

●(1) 變數與其極限之差爲一變數，其極限爲零。

(2) 二以上之變數 v, v', v''，等若其極限各爲零，則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦爲零。

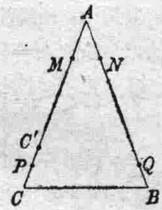
(3) 若變數 v 之極限爲零，則 $a\pm v$ 之極限爲一常數 a，$a\times v$ 之極限亦爲零.

(4) 常數與變數之積爲變數，常數與變數之積之極限爲其變數之極限與常數之積。

(5) 若二變數爲同時俱增之變數，亦爲同時俱減之變數，則其二變數之和或積，亦爲一變數。

(6) 若二變數恆相等，則其極限亦相等。二變數 AM 及 AN 恆相等，而 AC 與 AB 爲其極限，試證明 $AC=AB$。

〔證〕若 $AC>AB$，則取短於 AC 之 AC'，令 $AC'=AB$。AM 之極限接近於 AC，故大於 AC'，假定爲達於 AP。AQ 爲對應於 AP 之 AN 之值。如是則得 $AP=AQ$，$AC'=AB$。然此二相等式不能成立，因 $AP>AC'$，$AQ<AB$。故 AC 不能大於 AB。同理 AB 不能大於 AC，即 AC 不能小於 AB。則 AC 既不能大於 AB，又不能小於 AB，故必等於 AB。



(7) 二變數有一定之比者，則其極限亦有同比。

極限常以 lim 記之，例如 $\lim x$ 即「x 之極限」之謂也。

〔證〕命 x 及 y 爲二變數，r 爲其一定之比，則 $x:y=r$，即 $x=ry$，故

$\lim x=\lim(ry)=r\cdot\lim y$，故

$\lim x:\lim y=r$。

(8) 不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$ 表至同程度精密時，其近似值恆爲同一者，則其比不相等。

(9) 二以上變數之代數和之極限爲其極限之代數和。

命 x, y, z 爲變數，a, b, c 爲其極限，證明 $\lim(x+y+z)=a+b+c$。

〔證〕命 $a-x=v$，$b-y=v'$，$c-z=v''$，則 $x=a-v$，$y=b-v'$，$z=c-v''$，故

$x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$，

$\lim(x+y+z)=\lim(a-v+b-v'+c-v'')$

〔6〕。然 $\lim(a-v+b-v'+c-v'')=a+b+c$〔3〕。故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$。

(10) 二以上變數之積之極限等於其極限之積。

命 x, y, z 爲變數，a, b, c 爲其極限，證明 $\lim(xyz)=abc$。

〔證〕$x=a-v, y=b-v', z=c-v''$，取此各邊之積，則

$xyz=abc\pm$（含 v, v', v'' 之因數之諸項）。此式符號$\pm$以下諸項之極限爲零。〔3〕。故 $\lim(xyz)=\lim\{abc\pm$（極限爲零之諸項）$\}$〔6〕。故 $\lim(xyz)=abc$。

上爲變數漸次增大時之證明，然變數漸次減小時之證明亦同。

幾何學定理

立體部

定平面之條件

●一直線及不在其直線上之一點。

●不在一直線上之三點。

●相交二直線。

●相平行二直線。

二平面之交

●二平面之交爲一直線。

平面之垂線及斜線

●在相交二直線之交點作二線之垂線，必垂直於此二直線所定之平面。

●在一平面上一點〔或由一平面外一點〕可作一直線垂直於此平面，亦僅可作一直線。

●由一平面外一點至此平面所作之諸斜線：

(1) 斜線與平面相交之趾與垂線之趾成等距離者，則其斜線相等。

(2) 若二斜線與平面相交之趾與垂趾之距離不等，則距離遠者其線長。又其逆。

●由平面外一點至此平面所引之諸直線中，以垂線爲最短。

●在一直線上同一點所引之諸垂線，必同在過此點垂直於此直線之平面上。

●過一直線上〔外〕一點，可作一平面垂直於此直線，亦僅限於一。

●由平面上一垂趾，作一直線，與此平面內一直線垂直，則由其交點至垂線上任一點所作之線，必垂直於此平面內之直線。

平行直線及平面

●垂直於同一平面之二直線互相平行。

●若二平行直線中一線垂直於一平面，則他線亦垂直於此平面。

●與同一直線平行之二直線，必互相平行。

●含二平行直線之一之平面，必與他直線平行。

●與二平面之交線平行之直線，必平行於其各平面。

●若一直線與一平面平行，則此平面與含此直線之平面之交線，必與此線平行。

●與同一直線垂直之二平面互相平行。

●相交二直線同與一平面平行，則由是等二直線所定之平面，亦必與前平面平行。

●平行之二平面，與第三平面之交線，必相平行。

●平行之二平面間所夾之平行直線之長相等。

●一直線垂直於二平行平面中之一平面者，亦必垂直於他平面。

●過一點可作一平面，亦僅可作一平面，與一已知平面平行。

●不在同一平面上之二角，若其各邊互相平行，則此二角爲相等或互爲補角。

●過一直線僅可作一平面與不在同一平面上之一直線平行。

●若二直線爲平行三平面所截，則其諸相當線分成比例。

●垂直於不在同一平面上之二直線之垂線有一，亦只有一。

此線爲二直線間之最短線。

軌　跡

●一有限直線之垂直二等分面爲與其兩端等距離之點之軌跡。

●與一圓周上各點等距離之點之軌跡，爲過其圓之中心與其平面垂直之直線。

●與平行二直線等距離之點之軌跡爲其公垂線之垂直二等分面。

●與一平面爲一定距離之點之軌跡，爲與此面平行之二平面。

垂直平面及二面角

●若一直線垂直於一平面，則含此線之諸平面，亦必垂直於前之平面。

●垂直於二面角之稜之平面，亦垂直於其二面。

●過一平面之斜線可作一平面，亦僅可作一平面，垂直於此平面。

●若二平面相垂直，則在一平面所作垂直於其交線之垂線，亦必垂直於其他平面。

●由二面角稜上之二點，在各面上作稜之垂線，其所成之二直線角相等。

●由二面角內一點作各面之垂線，此二線之夾角爲二面角之對應直線角之補角。

射　影

●不垂直於一平面之有限直線在此面上之射影，爲連結其兩端之射影之有限直線。

●一斜線與其在一平面上之射影所成之銳

角，比其與此平面上任何直線所成之角小。

多面角

●三面角之任兩面角之和，大於第三面角．

●凸多面角之各面角之和，小於四直角．

●二三面角若其諸面角同順序相等，則此二三面角爲相等．若逆順序相等，則此二三面角爲對稱．

●命一凸 n 面角之二面角之和爲 s，則有次之關係，

$2n$ 直角 $>s>(2n-4)$ 直角．

多面體

●正多面體不能多於五種．

〔五種者即正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體，正二十面體〕．

●歐拉定理 Euler's theorem．命 E 表凸多面體之稜數，F 表其面數，V 表其頂數，則 $E+2=F+V$．

●過正多面體各面之中心作垂線，必交於一點，此點與各面各稜及各角頂成等距離．

●多面體之諸面角之和，等於以其角頂數減二乘四直角之積．

●平行六面體之各對角線必過同一點，且爲此點所二等分．

●等底等高之兩三角錐之體積相等．

●斜角柱與以其直截面爲底側稜爲高之直角柱爲等積．

●底面相等及高相等之平行六面體爲相等．

●一三角柱得分爲相等之三角錐．

●相似多面體之體積之比，等於其對應邊之三乘比．

旋轉體

●以平面截球，其截口爲圓．

●球之圓之軸過球之中心，而諸平行圓有同軸與同極．

●球之諸大圓均相等，且二等分球及球面．

●球面與球面之交爲圓．

●由球外一點作球之諸切線皆相等，且切點之軌跡爲圓．

●一平面於球之半徑之一端，垂直於其半徑者，爲球之切面．

●垂直於球之半徑之端諸垂線皆切於球．

●一直線爲球之一圓之切線者，則含此直線之平面，必於其切點爲球之切面．

●於球之切面上過切點引任意之直線，此直線必於切點爲球之切線．

●二直線於同點爲球之切線者，則含此二直線之平面，必於此點爲球之切面．

●球之圓之周上諸點，與其極成等距離．

●過球面上之二點〔非對點〕，僅可作一大圓．

●由球面上一點至他一點之最短徑，爲過此二點之大圓弧．

●二對稱球面三角形爲等積．

●球面三角形之各邊小於其他二邊之和．

●球面多角形之任意一邊小於其他各邊之和．

●球面多邊形之諸邊之和小於 $360°$．

●二球面三角形爲他之球面三角形之極三

角形，則後之三角形亦爲前之三角形之極三角形。

●二球面三角形互爲極三角形者，則其一之各角與他一之對邊互爲補角。

●球面三角形之諸角之和，大於二直角而小於六直角。

●球面五角形之諸角之和，大於六直角而小於十直角。

●球之面積及體積見幾何學公式欄內。

●一有限直線以在同一平面上不相交且不垂直之他一有限直線爲軸，繞之旋轉，其所生之表面積，等於以旋轉線之垂直二等線在兩線間之部分爲半徑之圓周，與旋轉線在軸上之射影相乘之積。

●一三角形以在其平面上過其頂點不與三角形相截之一直線爲軸，繞之旋轉，其所生之體積，等於三角形之底所生之表面與其高之積之三分之一。

●圓之弓形以不與之相截之直徑爲軸而旋轉所生之體積，等於以弓形之弦爲底之半徑與其弦在軸上之射影爲高之圓錐之體積之半。

弓形面積之近似數

●若圓之弓形之弦爲 k，自弓形之中點至弦之垂線爲 h，則其面積之近似數

$$S'=\frac{2}{3}hk.$$

附錄二　數學之諸公式及表

代數學公式

公式及因數

● $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

● $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

● $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

● $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

● $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

● $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

● $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

● $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

● $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$.

● $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$
$(-a+b+c)=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+$
$2c^2a^2+2a^2b^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$.
$[s=\frac{1}{2}(a+b+c)]$.

● $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca$
$+2ab$.

● $(a+b+c)^3=\sum a^3+3\sum a^2b+6abc$.

● $(\sum a)^2=\sum a^2+2\sum ab$. 卽 $a+b+c+\cdots$ 式之平方,爲各項之平方,與於諸文字中每取二文字之組合之積之 2 倍之和.

● 二同次式之積或商爲一同次式. 數同次式之積亦然.

● 含 x 之任意有理整式,將 x 以 a 代入之,若其式爲零,則其式得爲 $x-a$ 所整除.

● 剩餘定理.以 $x-a$ 除 x 之有理整式之剩餘,爲將其式中之 x 以 a 代入後之值.

● $a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+$
$a^{m-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1})$.

● $a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b$
$+a^{2m-2}b^2-\cdots\cdots-ab^{2m-1}+b^{2m})$.

● $a^{2m}-b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b$
$+a^{2m-3}b^2-\cdots\cdots+ab^{2m-2}-b^{2m-1})$.

● $a^{2m}+b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b$
$+a^{2m-3}b^2-\cdots\cdots-b^{2m-1})+2b^{2m}$.

● $a^{2m+1}-b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b$
$+a^{2m-2}b^2-\cdots\cdots+b^{2m})-2b^{2m+1}$.

● $\sum(b-c)=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$.

● $\sum a(b-c)=a(b-c)+b(c-a)+c$
$(a-b)=0$.

● $\sum(b^2-c^2)=\sum(b+c)(b-c)=0$.

● $(b-c)(c-a)(a-b)$
$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$=-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$
$=-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b)$.

● $(b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2$
$(c+a)+c^2(a+b)+2abc=bc(b+c)$
$+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
$=\sum a^2b+2abc$.

● $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=bc(c+b)$
$+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3$.

● $(a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)$

$+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$

● $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$-a^3-b^3-c^3-2abc.$

● $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$

● $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$

● $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$

$$\begin{aligned}&=(ax+by+cz+dw)^2\\&+(ay-bx+cw-dz)^2\\&+(az-bw-cx+dy)^2\\&+(aw+bz-cy-dx)^2\end{aligned}$$

此結果少加注意，甚易記憶，即由左之上端至右之下端之對角線，爲x與a,b,c,d之乘積，其符號爲＋－－－．其餘由交叉之理考之，可得同樣之符號及文字之乘積，而發見一定之規律．

●對稱式〔互換的〕．一式其中之二文字互換而其值不變時，此式稱爲該二文字之互換的對稱式．例如 $bc+ca-mabc$ 爲 a,b 之互換的對稱式

●對稱式〔輪換的〕．一式其中之第一文字換爲第二文字，第二文字換爲第三文字，第三文字換爲第一文字，而其式之值不變時，則此式稱爲該三文字之輪換的對稱式．例如 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 爲 a,b,c 之輪換的對稱式．

●二式爲同文字之對稱式時，其和差積商亦均爲對稱式．

●互換的同次對稱式，舉二三例如次：

一次　$A(x+y).$

二次　$A(x^2+y^2)+Bxy.$

三次　$A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2).$

四次　$A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+Cx^2y^2.$

一次　$A(x+y+z).$

二次　$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy).$

三次　$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz.$

●輪換的同次對稱式，舉二三例如次：

就二文字 x,y 之式，與互換的同．

又就三文字 x,y,z 之式，其二次與互換的對稱式同．

三次　$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x)+C(xy^2+yz^2+zx^2)+Dxyz.$

● x,y,z 之互換或輪換的二次不同次對稱式爲

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy)+C(x+y+z)+D.$$

●若干文字之交代式，令是等文字中之任意二文字相等，則其式爲零．

●交代式與交代式之積或商爲對稱式．

●對稱式與交代式之積或商爲交代式．

●最簡交代式． a, b, c 之最簡交代式爲 $\Pi(b-c)=(b-c)(c-a)(a-b).$

●若干文字之交代式能爲其最簡交代式所整除．

級　數

附　錄　二

●命等差級數之首項爲 a，末項爲 l，公差爲 d，項數爲 n，其和爲 s，則

已知	公　　式
adn	$l=a+(n-1)d$.
ads	$l=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$.
ans	$l=\frac{2s}{n}-a$.
dns	$l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$.
adn	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$.
ad$l$	$s=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}$.
an$l$	$s=(l+a)\frac{n}{2}$.
dn$l$	$s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d]$.
dn$l$	$a=l-(n-1)d$.
dns	$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$.
dls	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(l+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}$.
nls	$a=\frac{2s}{n}-l$.
an$l$	$d=\frac{l-a}{n-1}$.
ans	$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$.
als	$d=\frac{l^2-a^2}{2s-l-a}$.
nls	$d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}$.
ad$l$	$n=\frac{l-a}{d}+1$.
ads	$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2d}$.
als	$n=\frac{2s}{l+a}$.
dls	$n=\frac{2l+d\pm\sqrt{[(2l+d)^2-8ds]}}{2d}$.

●命等比級數之首項爲 a，末項爲 l，公比爲 r，項數爲 n，其和爲 s，則

已知	公　　式
arn	$l=ar^{n-1}$.
ars	$l=\frac{a+(r-1)s}{r}$.
ans	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$.
rns	$l=\frac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}$.
arn	$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$.
ar$l$	$s=\frac{rl-a}{r-1}$.
an$l$	$s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$.
rn$l$	$s=\frac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}$.
rn$l$	$a=\frac{l}{r^{n-1}}$.
rns	$a=\frac{(r-1)s}{r^n-1}$.
rls	$a=rl-(r-1)s$.
nls	$a(s-a)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0$.
an$l$	$r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.
ans	$r^n-\frac{s}{a}r+\frac{s-a}{a}=0$.
als	$r=\frac{s-a}{s-l}$.
nls	$r^n-\frac{s}{s-l}r^{n-1}+\frac{l}{s-l}=0$.
ar$l$	$n=\frac{\log l-\log a}{\log r}+1$.
ars	$n=\frac{\log[a+(r-1)s]-\log a}{\log r}$.
als	$n=\frac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}+1$.
rls	$n=\frac{\log l-\log[lr-(r-1)s]}{\log r}+1$.

●於等比級數，若 $-1<r<1$，則當 $n=\infty$，

$s=\frac{a}{1-r}$.

●若 a, b, c 成等差級數，則

$a-b:b-c=a:a$.

●若 a, b, c 成等比級數，則

$a-b:b-c=a:b$.

●若 a, b, c 成調和級數，則

$a-b:b-c=a:c$.

●命二數 a, b 之等差，等比，調和中項為 A, G, H，則 $A=\frac{1}{2}(a+b)$,

$G=\pm\sqrt{ab}$, $H=\frac{2ab}{a+b}$, $G^2=A\cdot H$.

級數之總和法

命第 n 項 $=u_n$. n 項之和 $=S_n$.
無窮級數之總和 $=S_\infty$.

●$u_n=n$，則 $Sn=\frac{1}{2}n(n+1)$.

●$u_n=n^2$，則 $Sn=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

●$u_n=n^3$，則 $Sn=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$.

●$u_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$，則

$Sn=\frac{1}{r+1}n(n+1)\cdots(n+r)$.

●$u_n=n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$〔r 次多角數之第 n 項〕，則

$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2)$.

●$u_n=(a+nb)(a+\overline{n+1}b)(a+\overline{n+2}b)\cdots\times(a+\overline{n+r-1}b)$，則

$S_n=\frac{(a+\overline{n+r}b)u_n-au_1}{(r+1)b}$.

●$u_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-1}b)}$,

則 $S_n=\frac{(a+rb)u_1-(a+nb)u_n}{(r-1)b}$.

●$u_n=\frac{a(a+x)(a+2x)\cdots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)(b+2x)\cdots(b+\overline{n-1}x)}$,

則 $S_n=\frac{a}{a+x-b}\left\{\frac{a(a+x)\cdots(a+nx)}{b(b+x)\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}$.

●$u_{n+1}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$〔二項級數〕，則 $S_\infty=(1+x)^m$〔但 $1>x>-1$〕.

●$u_{n+1}=\frac{1}{n!}$，則 $S_\infty=2.7182818\cdots$.〔納白爾對數之底，通例命為 e.〕

●$u_{n+1}=\frac{x^n}{n!}$〔指數級數〕，則 $S_\infty=e^x$.

●$u_n=(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n!}$〔對數級數〕，則 $S_\infty=\log_e(1+y)$.

利 息，年 金

命本金 $=P$，本利和 $=A$，利率 $=r$，$1+r=R$，時間之數 $=n$。

●單利。 利息 $=Pnr$.

本利和 $=P(1+nr)$.

●複利。 利息 $=P\{(1+r)^n-1\}$.

本利和$=P(1+r)^n$.

● $r=\sqrt[n]{\frac{A}{P}}-1$.　$n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+r)}$.

● n 年後金額 P 之現價 $V=\frac{P}{1+nr}$

〔單利〕

折扣 $D=\frac{P^{nr}}{1+nr}$.

● n 年後金額 P 之現價 $V=P\cdot R^{-n}$〔複利〕

折扣 $D=P(1+R^{-n})$.

●永久年金 a 之現價$=\frac{a}{r}$.

●自 p 年後爲始 n 年間年金 a 圓之現價爲

$\frac{a}{R^{p+n}}\times\frac{R^n-1}{r}$.

●自 P 年後爲始，永久年金 a 之現價爲

$\frac{a}{R^p r}$.

幾何學公式

命 L 爲長之單位.

(I)　任意之長以數小字母 a,b,c,…表之，有時半徑之長以 R 表之.

(II)　任意之面積以數大字母 S, S_1, S_2, …表之，面積之單位爲以長之單位 L 爲一邊之正方形之面積.

(III)　任意之體積以數大字母 V, V_1, V_2,…表之.體積之單位爲以長之單位 L 爲一邊之立方體之體積.

長之公式

〔平面部〕

●不等式的關係.

1. 若 a,b,c 爲三角形之三邊，則 $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$, 因而 $a\sim b<c$, $b\sim c<a$, $c\sim a<b$.

2. 以 r, r' 表二圓之半徑，d 表其中心距離，則二圓相交時，$r+r'>d>r-r'$. 各在外而不相交時，$r+r'<d$. 其一全在他一之內而不相交時，$r-r'>d$.

●等式的關係.

1. 若二圓之半徑爲 r, r'，則中心距離爲 d. 則當二圓外切時，$r+r'=d$. 當二圓內切時，$r-r'=d$.

2. 命 a,b,c 爲三角形 ABC 之三邊，

$\frac{1}{2}(a+b+c)=s$.

(I) 命由 A,B,C 至內切圓之切點之距離各爲 A_i, B_i, C_i; 由 A, B, C 至邊 (b,c),(c,a),(a,b) 之延線上之傍切圓之切點之距離各爲 A_e, B_e, C_e; 由 A,B,C 至邊 (b,c),(c,a),(a,b) 上之傍切圓之切點之距離各爲 (A_b, A_c), (B_c, B_a), (C_a, C_b), 則

$$A_e=B_e=C_e=s.$$

$$A_i=B_c=C_b=s-a.$$

$$B_i=C_a=A_c=s-b.$$

$$C_i=A_b=B_a=s-c.$$

(II)命內切圓之半徑爲 r, 面積爲 S, 外心與內心之距離爲 d, 則

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=\frac{S}{s}=\frac{R^2-d^2}{R}.$$

(III) 命角 BAC 內之傍切圓之半徑爲 r_1, 則

$$r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}=\frac{S}{s-a}.$$

(IV) 命外接圓之半徑爲R,則

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{abc}{4S}=\frac{bc}{2h_a}.$$

但 h_a 爲由 A 至 a 邊之高.

(V) 命由 A 至 a 邊之高爲 h_a, 則

$$h_a=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}.$$

(VI) 命由 A 至 a 邊之中線之長爲 m_a, 則

$$m_a=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2)}.$$

(VII) 命 A 角之二等分由 A 至 a 邊之長爲 w_a, 則

$$w_a=\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}.$$

(VIII) 命垂趾三角形之三邊爲 a', b', c', 則 $a'+b'+c'$

$$=\frac{2S}{R}=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

但 a',b',c' 之中,對原三角形之鈍角者爲負值.

3. 分已知之有限直線 a 爲外中比, 命 x 爲其大部分, 則

(I) 當內分時, $x=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$.

(II) 當外分時, $x=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$.

4. 命 a, b 爲梯形 ABCD 之平行邊 AB,CD;c,d 爲其他二邊 BC,DA, 則

$$BD=\sqrt{\frac{a(c^2-b^2)+b(a^2-d^2)}{a-b}}.$$

$$AC=\sqrt{\frac{a(d^2-b^2)+b(a^2-c^2)}{a-b}}.$$

5. 命圓之內接四邊形 ABCD 之邊 AB, BC, CD, DA 各以 a,b,c,d 表之,其對角線 AC,BD 以 λ, μ 表之,則

$$\lambda=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

$$\mu=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

6. 命 x,y 爲直角三角形夾直角之二邊, z 爲斜邊,則 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. 內接於以 R 爲半徑之圓之

(I) 正三角形之一邊 $=R\sqrt{3}$.

(II) 正方形之一邊 $=R\sqrt{2}$.

(III) 凸正五邊形之一邊

$$=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(IV) 星形正五角形之一邊

$$=\frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

(V) 凸正六邊形之一邊 $=R$.

(VI) 凸正八邊形之一邊 $=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(VII) 星形正八角形之一邊

$$=R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

(VIII) 凸正十邊形之一邊

$$=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1).$$

(IX) 星形正十角形之一邊

$$=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1).$$

(X) 凸正十二邊形之一邊

$$=\frac{1}{2}R(\sqrt{3}-1).$$

(XI) 星形正十二邊形之一邊

$$=\frac{1}{2}R(\sqrt{3}+1).$$

(XII) 凸正十五邊形之一邊

$$=\frac{1}{4}R\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}.$$

(XIII) 第一星形正十五角形之一邊

$$=\frac{1}{4}R\{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\}.$$

(XIV) 第二星形正十五角形之一邊

$$=\frac{1}{4}R\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}.$$

8. 逆之求外接於一邊爲 a 之正多邊形之圓之半徑 R，若正多邊形之邊數爲如 7 所示,則可由 7 容易求得之.

9. 命一邊爲 a 之正多邊形之外接圓之半徑爲 R，內切圓之半徑爲 r，則

$R^2-r^2=\frac{1}{4}a^2$. 故若正多邊形之邊數爲如 7 所示,則由關係 7,8 及上式,凡已知 R,r,a 之任一卽可求得其他.例如以 r_n 表凸正 n 邊形之內切圓之半徑，而記其 r_n 與 a 及 R 之關係於次:

(I) $r_3=\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{1}{2}R.$

(II) $r_4=\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}R.$

(III) $r_5=\frac{a\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}=\frac{R(1+\sqrt{5})}{4}.$

(IV) $r_6=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$

(V) $r_8=\frac{a(\sqrt{2}+1)}{2}=\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$

(VI) $r_{10}=\frac{1}{2}a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$$=\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

10. 命內接及外切於半徑爲 r 之圓之正 n 邊形之一邊之長爲 p, q, 內接及外切於此圓，有二倍之邊數之正 2n 邊形之一邊爲 p', q', 則

(I) $p'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-p^2})}.$

(II) $q'=\frac{2pq}{p+q}.$

(III) $p'=\sqrt{q'p}.$

由公式 (II), (III) 計算內接及外切於圓之正多邊形之周圍，可得次表：

邊數	外切多邊形之周圍	內接多邊形之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

11. 圓周之長 $=2\pi r$. 但 r 爲圓之半徑. $\pi=3.1415926535\cdots\cdots$.

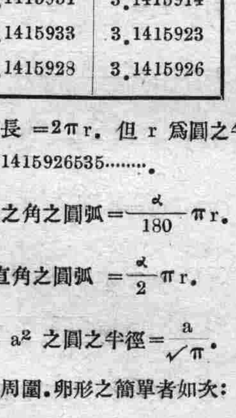
12. 對 α 度之角之圓弧 $=\dfrac{\alpha}{180}\pi r$.

對 α 直角之圓弧 $=\dfrac{\alpha}{2}\pi r$.

13. 面積爲 a^2 之圓之半徑 $=\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}$.

14. 卵形之周圍. 卵形之簡單者如次：

AFBH爲以E爲中心之圓，弧 AD, BC 以 B, A爲中心，



弧 BGC 以 F 爲中心. 今命 AFBH 圓之半徑爲 r，則

周圍之長 $=\pi r\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

長之公式

〔立體部〕

1. 命四面體 SABC 之稜 SA, SB, SC, AB, BC, CA 各爲 a', b', c', a, b, c; 由 S 至底之高爲 h; 三角形 ABC 之面積爲T，則

$$h=\sqrt{\left[\left\{16T^2c'^2-b^2(a^2+c'^2-b'^2)^2-a^2(b^2-c'^2-a'^2)^2-(a^2+b^2-c^2)(a^2+c'^2-b'^2)(b^2+c'^2-a'^2)\right\}\div16T^2\right]}.$$

2. 命一稜爲 a 之正四面體之高爲 h，則

$$h=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. 命三度爲 x, y, z 之直角體〔長方體〕之對角線爲 u，則

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

4. 命一稜爲a之立方體之對角線爲 m，則 $m=a\sqrt{3}$.

5, 命一稜爲 a 之正八面體之對角線爲 m，則 $m=a\sqrt{2}$.

6. 命面積爲 a^2 之球之半徑爲 r，則

$$r=\frac{a}{2\sqrt{\pi}}.$$

面積之公式

〔平面部〕

面積以 S 表之.

1. 二邊爲 a,b 之直角三角形

$$S=\frac{1}{2}ab.$$

2. 底爲 a, 高爲 h 之三角形

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

3. 三邊爲 a,b,c 之三角形

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

又 $S=rs=\frac{abc}{4R}=(s-a)r_1$,

但 r,R 及 r_1, 爲其內切圓,外接圓及對 a 邊之傍切圓之半徑.

4. 二邊爲 a,b 之矩形 $S=ab$.

5. 高爲h,相平行之二邊爲 a,b 之梯形

$$S=\frac{1}{2}h(a+b).$$

6. 相平行之二邊爲 a, b; 其他二邊爲 c, d 之梯形

$$S=\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-b-c)(s-b-d)}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

7. 四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD 爲 m,n; 其順次之邊之長爲 a,b,c,d, 則其面積

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{\{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)\times(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)\}}.$$

8. 內接於圓其四邊爲a,b,c,d 之四邊形

$$S=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

9. 外切於半徑 r 之圓之正多邊形之周圍爲 p, 則 $S=\frac{1}{2}pr$.

10. 內接於半徑 r 之圓之

(I) 正三角形

$$S=\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

(II) 正方形

$$S=2r^2.$$

(III) 凸正五邊形

$$S=\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

(IV) 凸正六邊形

$$S=\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}.$$

(V) 凸正八邊形

$$S=2r^2\sqrt{2}.$$

(VI) 凸正十邊形

$$S=\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(VII) 凸正十二邊形

$$S=3r^2.$$

11. 相似形之面積與其對應邊之平方成比例.

12. 半徑爲 r 之圓之面積 $S=\pi r^2$.

13. 對 α 度之角之扇形

$$S=\frac{\alpha}{360}\pi r.$$

14. 弓形之弧之長爲 l,弦爲 k, 由弧之中點至弦之垂線爲 h, 則其面積

$$S=\frac{\frac{1}{2}k^2(l-k)+h^2(l+k)}{4h}.$$

15. 卵形之面積$=\{\pi(3-\sqrt{2})-1\}r^2$.

16. 橢圓之面積$=\pi ab$. 但 a, b 爲其長短半徑.

17. 以弦截拋物線，其所截取部分之面積爲$\frac{2}{3}ab$，但 a 爲弦，b 爲自拋物線之頂點至弦之垂線.

面積之公式

〔立體部〕

1. 若角柱之直截面之周圍爲 a，側稜爲 h，則其側面積 $S=ah$.

2. 三度爲 a,b,c 之長方體之面積
$S=2(ab+bc+ca)$.

3. 直角錐之底之周圍爲a，斜高爲h，則其側面積 $S=\frac{1}{2}ah$.

4. 若正角臺之兩底之周圍爲 a,b; 斜高爲 h，則其側面積 $S=\frac{1}{2}h(a+b)$.

又若與其兩底等距離之截面之周圍爲 a′，則 $S=ha'$.

5. 二相似形之面積，與其對應之稜之平方成比例.

6. 若直圓柱之底之半徑爲r，基線爲h，則其側面積 $S=2\pi rh$.
全面積 $S'=2\pi r(r+h)$.

7. 若直圓錐之底之半徑爲r，基線爲h，則其側面積 $S=\pi rh$.
全面積 $S'=\pi r(r+h)$.

8. 若正圓臺之兩底之半徑爲r，r′; 斜高爲 h，則其側面積 $S=\pi(r+r')h$.

9. 半徑爲 r 之球之面積 $S=4\pi r^2$.

10. 在半徑爲 r 之球高爲 h 之球帶之側面積 $S=2\pi rh$.

11. 有 α 度之角之月形之面積
$S=\frac{\alpha}{360}\times$球面積$=\frac{\pi r^2\alpha}{90}$.

12. 在半徑爲 r 之球之球面三角形之面積 $S=\frac{\alpha\pi r^2}{180}$.

但 α 爲此球面三角形之球面餘度.

13. 帕帕斯 Pappus 或加爾廷 Guldin 之定理. 一閉平面曲線，以在其平面上不與曲線相截之一直線爲軸而旋轉，其所生之面積，等於以曲線之全長〔周圍〕乘其重心所畫之圓周.

體積之公式

1. 若角柱之底面積爲 S，高爲 h，則其體積 $V=Sh$.

若其直截面之面積爲 S′，側稜爲 l，則 $V=S'l$.

2. 三度爲 a,b,c 之長方體之體積 $V=abc$.

3. 斜三角柱之下底爲 S，由其上底之重心至下底之距離爲 h，則
體積 $V=Sh$.

4. 若以 S′ 表斜角柱之直截面，l 表其兩底之重心之距離，則
體積 $V=S'l$.

5. 若角錐之底爲 S，高爲 h，則
體積 $V=\frac{1}{3}Sh$.

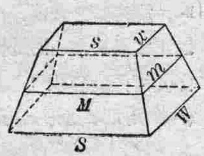
6. 若角臺之兩底爲 B, B'; 高爲 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}h(B+B'+\sqrt{BB'})$.

7. 若第二種角臺之兩底爲 B, B'; 高爲 h, 則體積 $V=\frac{1}{3}h(B+B'-\sqrt{BB'})$.

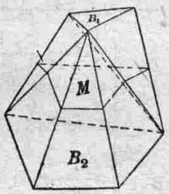
8. 若楔之背爲 L, 廣爲 b, 長爲 l, 高爲 h, 則體積 $V=\frac{1}{6}bh(2L+l)$.

9. 若矩角臺之高爲 h, 上底之二邊爲 s, w; 下底之對應二邊爲 S, W; 與上下兩底等距離之截面之對應二邊爲 M, m; 則



體積 $V=\frac{1}{6}h(WS+ws+4Mm)$.

10. 若三角傍面臺之二底之面積爲 B_1, B_2, 中央之截面面積爲 M; 高爲 h, 則其體積 $V=\frac{1}{6}h$



$\times(B_1+4M+B_2)$.

11. 若四面體之相對之稜各爲 a, a'; b, b'; c, c'; 又 a', b', c' 爲過同頂點者, 則其體積

$$V^2=\frac{1}{144}\{(b^2+c^2-a^2+b'^2+c'^2-a'^2)a^2a'^2+(c^2+a^2-b^2+c'^2+a'^2-b'^2)b^2b'^2+(a^2+b^2-c^2+a'^2+b'^2-c'^2)c^2c'^2-(a^2b^2c^2+a^2b'^2c'^2+b^2c'^2a'^2+c^2a'^2b'^2)\}.$$

12. 若以 a 表正多面體之一稜, 則

(I)　正四面體之體積 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

(II)　正六面體卽立方體之體積 $V=a^3$.

(III)　正八面體之體積 $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

(IV)　正十二面體之體積

$$V=\frac{1}{4}a^3(15-7\sqrt{5}).$$

(V)　正二十面體之體積

$$V=\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}).$$

13. 若圓柱之底及高爲 S 及 h, 則其體積 $V=Sh$.

若底之半徑爲 r, 則 $V=\pi r^2h$.

14. 若圓錐之底及高爲 S 及 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}Sh$.

若底之半徑爲 r, 則

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

15. 若圓臺之兩底及高爲 S, S' 及 h, 則

體積 $V=\frac{1}{3}h(S+S'+\sqrt{SS'})$.

若兩底之半徑各爲 r, r', 則

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2+rr').$$

16. 半徑爲 r 之球之體積 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

若直徑爲 d, 則 $V=\frac{1}{6}\pi d^3$.

17. 若球之半徑爲 r，球帶之高爲 h，球帶之面積爲 Z，則以 Z 爲底之球分之體積 $V=\frac{1}{3}Z\times h=\frac{1}{3}h\cdot 2\pi rh$

$=\frac{2}{3}\pi rh^2$.

18. 在半徑爲 r 之球，有 α 度之角之球劈〔球楔〕之體積 $V=\frac{\alpha}{270}\pi r^2$.

19. 底面積爲 S，球半徑爲 r 之球角錐之體積 $V=\frac{1}{3}Sr$.

20. 在半徑爲 r 之球之球面三角錐之體積 $V=\frac{\alpha\pi r^3}{540}$.

但 α 爲其底之球面三角形之球面餘度.

21. 兩底之半徑爲 r'，r''；高爲 h 之球盤之積體 $V=\pi\left(r'^2\frac{h}{2}+r''^2\frac{h}{2}\right.$

$\left.+\frac{1}{6}h^3\right)$.

22. 單底球盤其底之半徑爲 r，高爲 h 之體積 $V=\pi\left(r^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}h^3\right)$.

23. 帕帕斯及加爾廷之定理．一閉平面曲線，以在其平面上不與曲線相截之一直線爲軸而旋轉，其所生之體積，等於其面積與其重心所畫之圓周之乘積.

24. 旋轉體之體積.

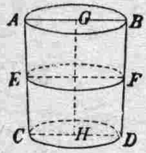
以正多邊形之一邊爲軸而旋轉，其所生之體積，立表於下：

但 R 爲正多邊形之外接圓之半徑，a 爲其一邊.

正多邊形	以 R 表其體積	以 a 表其體積
三角形…………	$\frac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}\pi a^3$
四邊形…………	$2\pi R^3\sqrt{2}$	πa^3
五邊形…………	$\frac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$
六邊形…………	$\frac{9}{2}\pi R^3$	$\frac{9}{2}\pi a^3$
八邊形…………	$2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$
十邊形…………	$\frac{5}{2}\pi R^3\sqrt{5}$	$\frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$
十二邊形………	$\frac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$3\pi a^3(7+4\sqrt{3})$

桶之容量

1．上大下小之桶．可基於求圓臺之體積之公式，以測其容量．如圖，AB為桶之上口之內直徑，CD為其下底之內直徑，EF為其中央截口之內直徑，而 GH 為其深．此桶之中央截口分上下兩部分為兩圓臺，故命 $AB=d$，$CD=d_1$，$EF=d_2$，$GH=h$，則由前求圓臺之體積之公式，而得桶之體積



$$=\frac{\pi}{3}\times\frac{h}{2}\times\frac{d^2+dd_2+d_2^2}{4}+$$

$$\frac{\pi}{3}\times\frac{h}{2}\times\frac{d_1^2+d_1d_2+d_2^2}{4}$$

$$=\frac{h}{2}\{(d+d_2)^2+(d_1+d_2)^2-(d+d_1)d_2\}\frac{\pi}{12}.$$

然 1 公升 =1 立方公寸，

故 1 公石 =0.1 立方公尺．

故若桶之直徑以公尺為單位，則桶之容量$=\frac{h}{2}\{(d+d_2)^2+(d_2+d_1)^2-(d+d_1)d_2\}\times\frac{\pi}{12\times0.1}$公石．

又因 $\pi=3.1416$，故

$$\frac{\pi}{12\times0.1}=2.618$$

於是得次之法則：

〔法則〕命上口之內直徑與中央截口之內直徑之和之平方以 A 表之，中央截口之內直徑與下底之內直徑之和之平方以 B 表之，上口之內直徑與下底之內直徑之和與中央截口內直徑之乘積以 C 表之．由 A，B 之和減去 C，其差以深及 2.618 乘之，以二除之卽得桶之容量．

〔例〕有木桶其上口之內直徑為 7 公尺，中央截口之內直徑為 6.4 公尺，下底之內直徑為 5 公尺，深為 8 公尺，問此桶能容水若干石．

茲 $A=(7+6.4)^2=179.56$，

$B=(6.4+5)^2=129.96$，

$C=(7+5)6.4=76.8$，

$A+B-C=179.56+129.96-76.8$

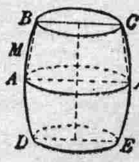
$=232.72$．

故桶之容量$=\frac{232.72\times8\times2.618}{2}$

$=2437.0438\cdots\cdots$公石

卽此桶能容水 2437 公石4公升3公合8公勺．

2．上下較小中央突大之桶．亦可基於求圓臺之體積之公式以測其容量．如圖，命最大截口之內直徑 AA′ 為 2R，其兩底之內直徑為 2r，桶高為h，則桶之體積實等於圓臺 AA′CB 之二倍．故若以公式



$$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)\cdots\cdots(1).$$

以算其體積，則將由AMB所生之體積之

一小部分棄去，故所求得之體積比實際之體積爲小.若於上之公式以 R^2 代 Rr，

則爲 $\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2)$…………(2).

而由此公式所求得之體積，則比實際之體積爲大.

〔例〕有桶深 3 呎，其最大截口之圓周爲 10 呎，兩底之圓周均爲 8 呎，而一唡則含 277.274 立方吋，問此桶之容量如何.

由公式(1)求得之容量爲 121 唡强.

又由公式(2)求得之容量爲 131 唡强.

而由次之公式

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left\{2R^2+r^2-\frac{1}{3}(R^2-r^2)\right\}$$

所求得之容量爲 125 唡，故較前之二公式所求得者爲精密.

三角法公式

平面部

測角法

● 度與法度之比較.

$$D=G-\frac{G}{10},\quad G=D+\frac{D}{9}.$$

● 分與法分之比較， $27\,\mu=50m$.

● 秒與法秒之比較. $81\,\sigma=250s$.

● 度與弧度之比較. $180\theta=\pi x$.

● 法度與弧度之比較. $200\theta=\pi y$.

三角函數之定義

● $\sin A=\frac{垂線}{斜邊}$. ● $\operatorname{cosec} A=\frac{斜邊}{垂線}$.

● $\cos A=\frac{底邊}{斜邊}$. ● $\sec A=\frac{斜邊}{底邊}$.

● $\tan A=\frac{垂線}{底邊}$. ● $\cot A=\frac{底邊}{垂線}$.

● $\operatorname{vers} A=1-\cos A$. ● $\operatorname{covers} A=1-\sin A$.

三角函數之基本關係

● $\sin A\times\operatorname{cosec} A=1$.

● $\cos A\times\sec A=1$.

● $\tan A\times\cot A=1$.

● $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

● $\sec^2 A=1+\tan^2 A$.

● $\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$.

● $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$. $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$.

● $\sin A < \tan A < \sec A$.

● $\cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$.

餘角之三角函數

● $\sin(90^\circ - A) = \cos A$.

● $\cos(90^\circ - A) = \sin A$.

● $\tan(90^\circ - A) = \cot A$.

〔注意〕cosecA, secA, cotA 爲 sinA, cosA, tanA 之倒數，故從略.

補角之三角函數

● $\sin(180^\circ - A) = \sin A$.

● $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$.

● $\tan(180^\circ - A) = -\tan A$.

負角之三角函數

● $\sin(-A) = -\sin A$.

● $\cos(-A) = \cos A$.

● $\tan(-A) = -\tan A$.

90°+A 之三角函數

● $\sin(90^\circ + A) = \cos A$.

● $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.

● $\tan(90^\circ + A) = -\cot A$.

180°+A 之三角函數

● $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$.

● $\cos(180^\circ + A) = -\cos A$.

● $\tan(180^\circ + A) = \tan A$.

270°−A 之三角函數

● $\sin(270^\circ - A) = -\cos A$.

● $\cos(270^\circ - A) = -\sin A$.

● $\tan(270^\circ - A) = \cot A$.

270°+A 之三角函數

● $\sin(270^\circ + A) = -\cos A$.

● $\cos(270^\circ + A) = \sin A$.

● $\tan(270^\circ + A) = -\cot A$.

360°−A 之三角函數

● $\sin(360^\circ - A) = -\sin A$.

● $\cos(360^\circ - A) = \cos A$.

● $\tan(360^\circ - A) = -\tan A$.

二角之三角函數

● $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

● $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$.

● $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$.

● $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$.

● $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$.

● $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$.

● $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B}$.

● $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot A - \cot B}$.

● $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$.

● $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$.

● $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$.

● $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$.

● $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$.

● $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

$$=\cos^2B-\sin^2A.$$

- $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$
- $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$
- $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$
- $\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

三角之三角函數

- $\sin(A+B+C)$
  $=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
  $+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C.$
- $\cos(A+B+C)$
  $=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
  $-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C.$
- $\tan(A+B+C)$
  $=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}.$
- $\cot(A+B+C)$
  $=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A-1}.$
- 若 $A+B+C=90^\circ$，則
  $1=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A.$
  $\cot A\cot B\cot C=\cot A+\cot B+\cot C.$
  若 $A+B+C=180^\circ$，則
  $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$
  $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$

倍角之三角函數

- $\sin 2A=2\sin A\cos A.$
- $\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A=2\cos^2A-1$
  $=1-2\sin^2A.$
- $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}.$
- $\cot 2A=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$
- $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$
- $\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.$
- $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.$
- $\cot 3A=\frac{3\cot A-\cot^3A}{1-3\cot^3A}.$

分角之三角函數

- $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$
- $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.$
- $2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$
- $2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$
- $\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$
- $\sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$
- $\tan\frac{A}{2}=\frac{(-1\pm\sqrt{1+\tan^2A})}{\tan A}$
  $=(-1\pm\sec A)\cot A.$

一般角之三角函數

- $\sin\{n\cdot180^\circ+(-1)^nA\}=\sin A.$
- $\cos(n\cdot360^\circ\pm A)=\cos A.$
- $\tan(n\cdot180^\circ+A)=\tan A.$

三角形四邊形等

● $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ a=b\cos C+c\cos B\\ \bullet\ b=c\cos A+a\cos C\\ \bullet\ c=a\cos B+b\cos A\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ \bullet\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ \bullet\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \bullet\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \bullet\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{array}\right\}.$$

以下命 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \bullet\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \bullet\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}\\ \bullet\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}\\ \bullet\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \bullet\ \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \bullet\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ (b+c)\sin\dfrac{1}{2}A=a\cos\dfrac{1}{2}(B-C)\\ \bullet\ (c+a)\sin\dfrac{1}{2}B=b\cos\dfrac{1}{2}(C-A)\\ \bullet\ (a+b)\sin\dfrac{1}{2}C=c\cos\dfrac{1}{2}(A-B)\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}=\tan\dfrac{B-C}{2}\\ \bullet\ \dfrac{c-a}{c+a}\cot\dfrac{B}{2}=\tan\dfrac{C-A}{2}\\ \bullet\ \dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}=\tan\dfrac{A-B}{2}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \sin A=\dfrac{2\triangle}{bc},\ \sin B=\dfrac{2\triangle}{ca},\ \sin C=\dfrac{2\triangle}{ab}\\ \text{但}\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ r=(s-a)\tan\dfrac{A}{2},\ r_1=s\tan\dfrac{A}{2}\\ \bullet\ r_2=s\tan\dfrac{B}{2},\quad r_3=s\tan\dfrac{C}{2}\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ A\text{ 角之內二等線}=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}\\ \bullet\ A\text{ 角之外二等線}=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b\sim c}\end{array}\right\}.$$

● a 邊之中線 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.

● $\triangle=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$

$=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$

$=\dfrac{1}{2}h_a a=\dfrac{abc}{4R}$.

〔△＝三角形面積〕

● $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}$.

●圓之內接四邊形之面積

$=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}$.

●任意四邊形之面積$=$

$\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\}}$.

●外切四邊形之面積$=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$.

●內接且外切四邊形之面積$=\sqrt{abcd}$.

●正多邊形之邊心距 $r=a\sqrt{2}\tan\frac{\pi}{n}$.

●正多邊形之面積

$=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$.

抹甫耳之定理

De Moivre's theorem

● $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

● $\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots$.

● $\sin\alpha=1-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots$.

三角函數之展開

● $\sin n\theta=n\sin\theta-\frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta\cdots\cdots$.

● $\cos n\theta=\cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{2!}\sin^2\theta+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta-\cdots\cdots\right\}$.

三角函數之指數值

● $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$.

● $\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$.

● $i\tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$.

級數之和

● $\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+2(n-1)\beta\}$

$=\frac{\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}$.

● $\sin\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+2(n-1)\beta\}$

$=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}$.

● $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0$.

● $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0$.

三角函數式之因數分解

● 若 n 爲偶數,則 $x^n-1=(x-1)(x+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1)$

$$\times\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right\}.$$

● 若 n 為奇數，則 $x^n-1=(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1)$

$$\times\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right\}.$$

● 若 n 為偶數，則 $x^n+1=(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1)$

$$(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{n}+1)\times\cdots\cdots(x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1)$$

$$(x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1).$$

● 若 n 為奇數，則 $x^n+1=(x+1)(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1)$

$$\times\cdots(x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1)(x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1).$$

● $x^n-x^{-n}=(x-x^{-1})(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{n})(x+x^{-1}-2\cos\frac{2\pi}{n})$

$$\times\cdots(x+x^{-1}-2\cos\frac{n-1}{n}\pi).$$

● $x^n+x^{-n}=(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{2n})(x+x^{-1}-2\cos\frac{3\pi}{2n})\cdots\cdots(x+x^{-1}-2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi).$

● $x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1=(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+1)$

$$(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1)\times\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-4)\pi+\theta}{n}+1\right\}$$

$$\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\theta}{n}+1\right\}.$$

● $x^n+x^{-n}-2\cos n\theta=(x+x^{-1}-2\cos\theta)\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\times\cdots\cdots$

$$\left\{x+x^{-1}-2\cos(\theta+\frac{2n-2}{n}\pi)\right\}.$$

三角法公式

球面部

基本公式

- $\cos a=\cos b\,\cos c+\sin b\,\sin c\,\cos A.$
- $\cos b=\cos c\,\cos a+\sin c\,\sin a\,\cos B.$
- $\cos c=\cos a\,\cos b+\sin a\,\sin b\,\cos C.$

sinA 之公式

- $\sin A=\{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\,\cos b\,\cos c)}\}\div(\sin b\,\sin c)$

$=\dfrac{2n}{\sin b\,\sin c}.$ 但 $2s=a+b+c$ 及

$n=\{\sin s\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}.$

餘切正弦之公式

- $\cot a\,\sin b=\cot A\sin C+\cos b\,\cos C.$
- $\cot b\,\sin a=\cot B\sin C+\cos a\,\cos C.$
- $\cot b\,\sin c=\cot B\sin A+\cos c\,\cos A.$
- $\cot c\,\sin b=\cot C\sin A+\cos b\,\cos A.$
- $\cot c\,\sin a=\cot C\sin B+\cos a\,\cos B.$
- $\cot a\,\sin c=\cot A\sin B+\cos c\,\cos B.$

正弦比例

- $\dfrac{\sin A}{\sin a}=\dfrac{\sin B}{\sin b}=\dfrac{\sin C}{\sin c}=\dfrac{2n}{\sin a\,\sin b\,\sin c}.$

半角之公式

- $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}.$
- $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin s\,\sin(s-a)}{\sin b\,\sin c}}.$
- $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}.$

半弧之公式

- $\sin\dfrac{a}{2}=\sqrt{-\dfrac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\,\sin C}}.$
- $\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}.$
- $\tan\dfrac{a}{2}=\sqrt{-\dfrac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}.$

〔注意〕$2S=A+B+C.$

B,C 角及 b,c 弧之公式可同樣推得.

納氏比例式

Napier's analogies

- $\tan\dfrac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\dfrac{C}{2}.$
- $\tan\dfrac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\dfrac{C}{2}.$
- $\tan\dfrac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\dfrac{c}{2}.$
- $\tan\dfrac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\dfrac{c}{2}.$

高氏方程式

Gauss's equations

- $\sin\dfrac{1}{2}(A+B)\cos\dfrac{1}{2}c=\cos\dfrac{1}{2}(a-b)\cos\dfrac{1}{2}C.$

● $\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$

● $\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$

● $\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C.$

球面直角三角形

[命C為直角]

● $\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\ \sin c\\ \sin a=\sin A\ \sin c\end{array}\right\}.$

● $\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\ \tan c\\ \tan b=\cos A\ \tan c\end{array}\right\}.$

● $\left.\begin{array}{l}\tan a=\tan A\ \sin b\\ \tan b=\tan B\ \sin a\end{array}\right\}.$

● $\left.\begin{array}{l}\tan A\tan B=\dfrac{1}{\cos c}\\ \cot A\cot B=\cos c\end{array}\right\}.$

內切圓傍切圓外接圓

● $\tan r=\frac{n}{\sin s}=\tan\frac{A}{2}\sin(s-a)$

$=\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$

但 $N=\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}.$

● $\cot r=\frac{1}{2N}\{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}.$

● $\tan r_1=\frac{n}{\sin(s-a)}=\tan\frac{A}{2}\sin s$

$=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$

$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$

● $\cot r_1=\frac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}.$

● $\tan R=-\frac{\cos S}{N}=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c}$

$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\ \sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c}{n}$

$=\frac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}.$

● $\tan R_1=\frac{\cos(S-A)}{N}$

$=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\ \sin\frac{1}{2}c}=-\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos S}$

$=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c}{n}$

$=\frac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}.$

● $(\cot r+\tan R)^2$

$=\frac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1.$

● $(\cot r_1-\tan R)^2$

$=\frac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1.$

面積

●球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2$.

●球面多角形$=\{\Sigma-(n-2)\pi\}r^2$,

但Σ爲多角形之各角之和.

卡格腦之定理 Cagnoli's theorem

● $\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\ \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c}$, 但 $E=A+B+C-\pi$.

幼氏之定理 l' Huilier's theorem

● $\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$.

微積分公式

微分公式

I $$\frac{dc}{dx}=0.$$

II $$\frac{dx}{dx}=1.$$

III $$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}.$$

IV $$\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}.$$

V $$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

VIa $$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}.$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

VIIa $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

VIII $$\frac{d}{dx}(\log_a v)=\log_a e\cdot\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

VIIIa $$\frac{d}{dx}(\log v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

IX $$\frac{d}{dx}(a^v)=a^v\log a\frac{dv}{dx}.$$

IXa $$\frac{d}{dx}(e^v)=e^v\frac{dv}{dx}.$$

X $$\frac{d}{dx}(u^v)=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+\log u\cdot u^v\frac{dv}{dx}.$$

XI $$\frac{d}{dx}(\sin v)=\cos v\frac{dv}{dx}.$$

XII $$\frac{d}{dx}(\cos v)=-\sin v\frac{dv}{dx}.$$

XIII $$\frac{d}{dx}(\tan v)=\sec^2 v\frac{dv}{dx}.$$

XIV $$\frac{d}{dx}(\cot v)=-\csc^2 v\frac{dv}{dx}.$$

XV $$\frac{d}{dx}(\sec v)=\sec v\tan v\frac{dv}{dx}.$$

XVI $$\frac{d}{dx}(\csc v)=-\csc v\cot v\frac{dv}{dx}.$$

XVII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{vers} v)=\sin v\frac{dv}{dx}.$$

XVIII $$\frac{d}{dx}(\arcsin v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

XIX $$\frac{d}{dx}(\arccos v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

XX $$\frac{d}{dx}(\arctan v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

XXI $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

XXII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

XXIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc} v)=-\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

XXIV $\frac{d}{dx}(\text{arc vers } v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v-v^2}}.$

XXV $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$, y 爲 v 之函數.

XXVI $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, y 爲 x 之函數.

積分公式

[基本公式]

1. $\int(du\pm dw\pm\cdots\cdots)=\int du\pm\int dw\pm\cdots\cdots.$

2. $\int a\,dv=a\int dv.$

3. $\int df(x)=\int f'(x)dx=f(x)+C.$

4. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq-1.$

5. $\int\frac{dx}{x}=\log x+C.$

積分式含 a+bx 形式者

6. $\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log(a+bx)+C.$

7. $\int(a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C,\ n\neq-1.$

8. $\int F(x,a+bx)dx$. Try one of the substitutions, $z=a+bx$, $xz=a+bx$.

9. $\int\frac{x\,dx}{a+bx}=\frac{1}{b^2}[a+bx-a\log(a+bx)]+C.$

10. $\int\frac{x^2dx}{a+bx}=\frac{1}{b^3}[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\log(a+bx)]+C.$

11. $\int\frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}+C.$

12. $\int\frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}+C.$

13. $\int\frac{xdx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}[\log(a+bx)+\frac{a}{a+bx}]+C.$

14. $\int\frac{x^2dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^3}[a+bx-2a\log(a+bx)-\frac{a^2}{a+bx}]+C.$

15. $\int\frac{dx}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}+C.$

16. $\int\frac{xdx}{(a+bx)^3}=\frac{1}{b^2}[-\frac{1}{a+bx}+\frac{a}{2(a+bx)^2}]+C.$

含 a^2+x^2, a^2-x^2, $a+bx^n$, $a+bx^2$ 形式者

17. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan-1\frac{x}{a}+C;\int\frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C.$

18. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+C;\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+C.$

19. $\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}x\sqrt{\frac{b}{a}}+C.$

20. $\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\log\frac{a+bx}{a-bx}+C.$

21. $\int x^m(a+bx^n)^pdx$

$$=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^pdx.$$

22. $\int x^m(a+bx^n)^pdx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$

23. $\int\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{(m-n+np-1)b}{(m-1)a}$

$$\int\frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}.$$

24. $\int\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}=\frac{1}{an(p-1)x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}+\frac{m-n+np-1}{an(p-1)}$

$$\int\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p-1}}.$$

25. $\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m}=-\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)x^{m-1}}-\frac{b(m-n-np-1)}{a(m-1)}\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^{m-n}}.$

26. $\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m}=\frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)x^{m-1}}+\frac{anp}{np-m+1}\int\frac{(a+bx^n)^{p-1}dx}{x^m}.$

27. $\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int\frac{x^{m-n}dx}{(a+bx^n)^p}.$

28. $\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{m+n-np+1}{an(p-1)}\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{p-1}}.$

29. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right].$

30. $\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}\right].$

31. $\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^n}$, where $z=x^2$.

32. $\int\frac{x^2dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{-x}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}}+\frac{1}{2b(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}.$

33. $\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}=\frac{1}{an}\log\frac{x^n}{a+bx^n}+C.$

34. $\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^n}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{n-1}}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}.$

35. $\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right)+C.$

36. $\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

37. $\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{a+bx^2}+C.$

38. $\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

39. $\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}.$

含 $\sqrt{a+bx}$ 形式者

40. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C.$

41. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C.$

42. $\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C.$

43. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C.$

44. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C$, for $a>0$.

45. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C$, for $a<0$.

46. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=\frac{-\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

47. $\int\frac{\sqrt{a+bx}dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$

含 $\sqrt{x^2+a^2}$ 形式者

48. $\int(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

49. $\int(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

50. $\int(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1}+\frac{na^2}{n+1}\int(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

51. $\int x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{(x^2+a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+C.$

52. $\int x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}+C.$

53. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

54. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

55. $\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{x^2+a^2}+C.$

56. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

57. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

58. $\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

59. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$

60. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\log\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.$

61. $\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x}=\sqrt{a^2+x^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C.$

62. $\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+\log(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 形式者

63. $\int (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

64. $\int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

65. $\int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1}-\frac{na^2}{n+1}\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

66. $\int x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+C.$

67. $\int x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

68. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

69. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

70. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{x^2-a^2}+C.$

71. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

72. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

73. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+C;\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\sec^{-1}x+C.$

74. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$

75. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\sec^{-1}\frac{x}{a}+C.$

76. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x}=\sqrt{x^2-a^2}-a\cos^{-1}\frac{a}{x}+C.$

77. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 形式者

78. $\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

79. $\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

80. $\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1}+\frac{a^2n}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$

81. $\int x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}dx=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+C.$

82. $\int x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

83. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C;\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x+C.$

84. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

85. $\int \frac{xdx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

86. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

87. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

88. $\int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx.$

89. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

90. $\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C.$

91. $\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C.$

92. $\int \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C.$

93. $\int \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

含 $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$ 形式者

94. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$

95. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\text{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\text{vers}^{-1}x+C.$

96. $\int x^m\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{x^{m-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2}+\frac{(2m+1)a}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

97. $$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{(2m-1)ax^m}+\frac{m-1}{(2m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}.$$

98. $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m}+\frac{(2m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

99. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^m}dx=-\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(2m-3)ax^m}+\frac{m-3}{(2m-3)a}\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{m-1}}dx.$$

100. $$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{3a^2+ax-2x^2}{6}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^3}{2}\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

101. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}+C.$$

102. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

103. $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

104. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx=\sqrt{2ax-x^2}+a\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

105. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx=-\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x}-\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

106. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^3}dx=-\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3}+C.$$

107. $$\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C.$$

108. $$\int\frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}}+C.$$

109. $$\int F(x,\sqrt{2ax-x^2})dx=\int F(z+a,\sqrt{a^2-z^2})dz,\ \text{where } z=x-a.$$

110. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}=\log(x+a+\sqrt{2ax+x^2})+C.$$

111. $$\int F(x,\sqrt{2ax+x^2})dx=\int F(z-a,\sqrt{z^2-a^2})dz,\ \text{where } z=x+a.$$

含 $a+bx\pm cx^2$ 形式者

112. $$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,\ \text{when } b^2<4ac.$$

113. $$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C,\ \text{when } b^2>4ac.$$

114. $$\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\log\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C.$$

115. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C.$$

116. $$\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$-\frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C.$$

117. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

118. $$\int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+\frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

119. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\log\left(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C.$$

120. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\sin^{-1}\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

其他代數形式

121. $$\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}+(a-b)\log\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}\right)+C.$$

122. $$\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C.$$

123. $$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\sin^{-1}\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C.$$

124. $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x+C.$$

125. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + C.$

指數及三角形式

126. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

127. $\int e^x dx = e^x + C.$

128. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

129. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

130. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

131. $\int \tan x dx = \log \sec x = -\log \cos x + C.$

132. $\int \cot x dx = \log \sin x + C.$

133. $\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \log(\sec x + \tan x) = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

134. $\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) = \log \tan\frac{x}{2} + C.$

135. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C.$

136. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C.$

137. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$

138. $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

139. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

140. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

141. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx.$

142. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx.$

143. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}.$

144. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$

145. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1}x \sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x \sin^n x dx.$

146. $\int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2}x dx.$

147. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2}x}.$

148. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x \cos^n x}.$

149. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2}x}.$

150. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2}x dx}{\sin^n x}.$

151. $\int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C.$

152. $\int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1} + C.$

153. $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x dx.$

154. $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x dx.$

155. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

156. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

157. $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

158. $\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$, when $a>b$.

159. $\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}+C$, when $a<b$.

160. $\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C$, when $a>b$.

161. $\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}+C$, when $a<b$.

162. $\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\tan x}{a}\right)+C$.

163. $\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C$;

$\int e^{x}\sin x\,dx=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

164. $\int e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{ax}(n\sin nx+a\cos nx)}{a^2+n^2}+C$;

$\int e^{x}\cos x\,dx=\frac{e^{x}(\sin x+\cos x)}{2}+C$.

165. $\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$.

166. $\int x^ne^{ax}dx=\frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$.

167. $\int a^{mx}x^n dx=\frac{a^{mx}x^n}{m\log a}-\frac{n}{m\log a}\int a^{mx}x^{n-1}dx$.

168. $\int\frac{a^xdx}{x^m}=-\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{\log a}{m-1}\int\frac{a^xdx}{x^{m-1}}$.

169. $\int e^{ax}\cos^nx\,dx=\frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$.

170. $\int x^m\cos ax\,dx=\frac{x^{m-1}}{a^2}(ax\sin ax+m\cos ax)-\frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax\,dx$.

對數形式

171. $\int \log x dx = x \log x - x + C.$

172. $\int \frac{dx}{\log x} = \log(\log x) + \log x + \frac{1}{2^2}\log^2 x + \cdots\cdots.$

173. $\int \frac{dx}{x\log x} = \log(\log x) + C.$

174. $\int x^n \log x dx = x^{n+1}\left[\frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

175. $\int e^{ax}\log x dx = \frac{e^{ax}\log x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx.$

176. $\int x^m \log^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x dx.$

177. $\int \frac{x^m dx}{\log^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{\log^{n-1} x}.$

數字讀法 I.

	Hebrew.	Arabic.	Sanscrit.	Greek.	Latin.	H.German.	A.Saxon.
1	echad	wahad	eka	έις	unus	ein	an
2	shnagim	ethnan	dwi	δὺο	duo	tue	twa
3	shlosha	thalathat	tri	τρεῖς	tres	thri	threo
4	arbba	arbaat	chatur	τίσσαρες	quatuor	fiuuar	feower
5	khamish	khamsat	panchan	πέντε	quinque	finfe	fif
6	shisha	sittat	shash	ἕξ	sex	sehs	six
7	shiva	sabaat	saptan	έπτέ	septem	sibun	sesfan
8	shmona	thamaniat	ashtan	ὀκτὼ	octo	ohto	eahta
9	tisha	tessaat	novan	ἐννέα	novem	uiguni	nigon
10	asara	aaskerat	dasan	δεκα	decem	tehan	tya

數字讀法 II.

	中國		日本		英	法	德
1	一	壹	一	イチ	one	un, une	eins
2	二	貳	二	ニ	two	deux	zwei
3	三	叁	三	サン	three	trois	drei
4	四	肆	四	シ	four	quatre	vier
5	五	伍	五	ゴ	five	cinq	fünf
6	六	陸	六	ロク	six	six	sechs
7	七	柒	七	シチ	seven	sept	sieben
8	八	捌	八	ハチ	eight	huit	acht
9	九	玖	九	ク	nine	neuf	neun
10	十	拾	十	ジウ	ten	dix	zehn

某月與某月間之日數

	由十二月	由十一月	由十月	由九月	由八月	由七月	由六月	由五月	由四月	由三月	由二月	由一月
至二月												31
至三月											28	59
至四月										31	59	90
至五月									30	61	89	120
至六月								31	61	92	120	151
至七月							30	61	91	122	150	181
至八月						31	61	92	122	153	181	212
至九月					31	62	92	123	153	181	212	243
至十月				30	61	92	122	153	183	214	242	273
至十一月			31	61	92	123	153	184	214	245	273	304
至十二月		30	61	91	122	153	183	214	244	275	303	334
至一月	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	334	365
至二月	62	92	123	153	184	215	245	276	306	337	365	
至三月	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365		
至四月	121	151	182	212	243	274	304	335	365			
至五月	151	181	212	242	273	304	334	365				
至六月	182	212	243	273	304	335	365					
至七月	212	242	273	303	334	365						
至八月	243	273	304	334	365							
至九月	274	304	335	365								
至十月	304	334	365									
至十一月	335	365										
至十二月	365											

例 1. 三月十五日與七月十五日之間有幾日?

解. 今欲知此,檢與上端書由三月者同行,及與右側書至七月者同列之方格內之數字,則知爲 122, 是爲所求之日數.

例 2. 四月十日與九月二十五日之間有幾日?

解. 依例 1 之方法知四月十日與九月十日之間有 153 日.而加 $25-10=15$ 於其內得 168, 是爲所求之日數.

例 3. 由九月三十日至翌年五月十日之間有幾日?

解.與上端書由九月者同行,且與右側書至五月者同列之方格內之數字爲 242, 故知由九月三十日至翌年五月三十日之間有 242 日. 然今求至五月十日之日數,故減去 $30-10$ 卽 20 得 222 日,是爲所求之日數.

注意　上表爲依平年所造之表,故若所求之日數之間含閏年之二月時,則必須尙加 1.

時差與經差之關係

由經差求時差						由時差求經差					
經差			時差			時差			經差		
°	′	″	小時	分	秒	小時	分	秒	°	′	″
360			24			24			360		
1				4		1			15		
	30			2			30		7	30	
	1				4		1			15	
		30			2			30		7	30
		1			$\frac{1}{15}$			1			15

素數表

0									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	01	11	07	01	03	01	01	09	07
2	03	23	11	09	09	07	09	11	11
3	07	27	13	19	21	13	19	21	19
5	09	29	17	21	23	17	27	23	29
7	13	33	31	31	41	19	33	27	37
11	27	39	37	33	47	31	39	29	41
13	31	41	47	39	57	41	43	39	47
17	37	51	49	43	63	43	51	53	53
19	39	57	53	49	69	47	57	57	67
23	49	63	59	57	71	53	61	59	71
29	51	69	67	61	77	59	69	63	77
31	57	71	73	63	87	61	73	77	83
37	63	77	79	67	93	73	87	81	91
41	67	81	83	79	99	77	97	83	97
43	73	83	89	87		83		87	
47	79	93	97	91		91			
53	81			99					
59	91								
61	93								
67	97								
71	99								
73									
79									
83									
89									
97									

1									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
09	03	01	01	09	11	01	09	01	01
13	09	13	03	23	23	07	21	11	07
19	17	17	07	27	31	09	23	23	13
21	23	23	19	29	43	13	33	31	31
31	29	29	21	33	49	19	41	47	33
33	51	31	27	39	53	21	47	61	49
39	53	37	61	47	59	27	53	67	51
49	63	49	67	51	67	37	59	71	73
51	71	59	73	53	71	57	77	73	79
61	81	77	81	59	79	63	83	77	87
63	87	79	99	71	83	67	87	79	93
69	93	83		81	97	69	89	89	97
87		89		83		93			99
91		91		87		97			
93		97		89		99			
97				93					
				99					

2									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
03	11	03	09	11	03	09	07	01	03
11	13	07	11	17	21	17	11	03	09
17	29	13	33	23	31	21	13	19	17
27	31	21	39	37	39	33	19	33	27
29	37	37	41	41	43	47	29	37	39
39	41	39	47	47	49	57	31	43	53
53	43	43	51	59	51	59	41	51	57
63	53	51	57	67	57	63	49	57	63
69	61	67	71	73	79	71	53	61	69
81	79	69	77	77	91	77	67	79	71
83		73	81		93	83	77	87	99
87		81	83			87	89	97	
89		87	89			89	91		
99		93	93			93	97		
		97	99			99			

3									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	09	03	01	07	11	07	01	03	07
11	19	09	07	13	17	13	09	21	11
19	21	17	13	33	27	17	19	23	17
23	37	21	19	49	29	23	27	33	19
37	63	29	23	57	33	31	33	47	23
41	67	51	29	61	39	37	39	51	29
49	69	53	31	63	41	43	61	53	31
61	81	57	43	67	47	59	67	63	43
67	87	59	47	69	57	71	69	77	47
79	91	71	59	91	59	73	79	81	67
83		99	61	99	71	77	93	89	89
89			71		81	91	97		
			73		83	97			
			89		93				
			91						

4									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	11	01	27	09	07	03	03	01	03
03	27	11	37	21	13	21	21	13	09
07	29	17	39	23	17	37	23	17	19
13	33	19	49	41	19	39	29	31	31
19	39	29	57	47	23	43	33	61	33
21	53	31	63	51	47	49	51	71	37
27	57	41	91	57	49	51	59	77	43
49	59	43	97	63	61	57	83	89	51
51	77	53		81	67	63	87		57
57		59		83	83	73	89		67
73		61		93	91	79	93		69
79		71			97	91	99		73
91		73							87
93		83							93
99		89							99
		97							

5									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
03	01	09	03	07	01	23	01	01	03
09	07	27	09	13	03	39	11	07	23
11	13	31	23	17	07	41	17	13	27
21	19	33	33	19	19	47	37	21	39
23	47	37	47	31	21	51	41	27	53
39	53	61	51	37	27	53	43	39	81
51	67	73	81	41	31	57	49	43	87
59	71	79	87	43	57	59	79	49	
77	79	81	93	49	63	69	83	51	
81	89	97	99	71	69	83	91	57	
87	97			77	73	89		61	
99				79	81	93		67	
				83	91			69	
								79	
								81	
								97	

6									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
07	01	03	01	21	21	07	01	03	07
11	13	11	11	27	29	19	03	23	11
29	21	17	17	49	47	37	09	27	17
37	31	21	23	51	51	53	19	29	47
43	33	29	29	69	53	59	33	33	49
47	43	47	37	73	63	61	37	41	59
53	51	57	43	81	69	73	61	57	61
67	63	63	53	91	71	79	63	63	67
73	73	69	59		77	89	79	69	71
79	97	71	61		81	91	81	71	77
89	99	77	67		99		91	83	83
91		87	73				93	99	91
		99	79						97
			89						
			97						

7									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	03	07	07	11	07	03	03	17	01
13	09	11	09	17	17	07	17	23	07
19	21	13	21	33	23	21	23	29	19
27	27	19	31	51	29	39	27	41	27
39	29	29	33	57	37	43	41	53	33
43	51	37	49	59	41	49	53	67	37
57	59	43	51	77	47	69	57	73	49
69	77	47	69	81	49	73	59	77	51
79	87	53	93	87	59	81	89	79	63
	93	83		89	61	87	93	83	93
		97		99	73	91			
					77	99			
					83				
					89				
					91				

8									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
09	01	09	11	19	01	09	07	03	23
11	11	19	17	23	13	23	13	07	29
17	17	21	29	29	21	27	19	19	33
39	23	31	53	31	27	29	31	21	41
53	47	33	63	43	37	41	37	31	51
59	61	37	69	47	39	47	41	37	63
69	67	43	77	61	43	63	47	39	69
81	71	63	87	67	63	69	53	49	71
87	79	69	89		73	77	61	61	99
89	91	73			81	81	79	63	
93		87			97	89	83	67	
		91			99	93		87	
		93				99		93	
		97							

9									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	03	03	11	03	11	01	19	03	01
07	09	09	19	13	21	13	21	11	07
11	27	21	23	19	33	19	33	17	23
13	33	27	37	21	39	23	39	29	29
29	37	39	41	31	47	29	43	33	31
41	51	41	43	33	51	31	49	39	41
43	57	57	49	37	87	43	67	51	49
49	61	77	71	39		49	69	57	67
59	73	81	77	61		61	81	59	73
67	81	83	91	63		77	87	71	
91	87	93	97	67		79	91	83	
	99			73		89		87	
				79		97			
				91					
				97					

10									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
07	03	11	01	27	01	01	09	31	03
09	11	23	03	29	13	07	11	37	09
37	33	43	13	33	29	13	23	47	37
39	39	47	21	53	31	27	29	53	39
61	41	53	31	57	59	31	33	59	49
67	51	59	33	59	67	39	39	61	57
69	59	67	37	63	89	51	53	67	73
79	63	71	43	77	97	57	71	83	79
91	69	73	57	87		63	81	89	87
93	77	89	69	99		67	89	91	93
99	81		91			87	99		
	93		99			91			

此表含 1 至 11000 之間諸素數. 用此表之法,先求千位於大字,求百位於大字下之上列,次二位之數則求於各行. 例如求 2633 爲素數否.先檢表中之大字 2, 次求大字 2 下之 6, 而該行內有 33, 故知 2633 爲素數,又如求 8754 爲素數否.先檢表中之大字 8, 次求大字 8 之下之 7, 而該行內無 54, 故知 8754 不爲素數.

逐　乘　表

1×2×3×……×n 之n個因數之積謂之逐乘 n 或階乘 n，以 n! 或 ⌊n 表之.	0! = 1	11! = 39 916 800
	1! = 1	12! = 479 001 600
	2! = 2	13! = 6 227 020 800
	3! = 6	14! = 87 178 291 200
	4! = 24	15! = 1 307 674 368 000
	5! = 120	16! = 20 922 789 888 000
	6! = 720	17! = 355 687 428 096 000
	7! = 5 040	18! = 6 402 373 705 728 000
	8! = 40 320	19! = 121 645 100 408 832 000
	9! = 362 880	20! = 2 432 902 008 176 640 000
	10! = 3 628 800	

非素數之因數70—10000

數	因數				數	因數				數	因數				數	因數			
75	5	5	3		231	11	7	3		392	8	7	7		648	9	9	8	
98	7	7	2		242	11	11	2		396	11	9	4		672	12	8	7	
105	7	5	3		243	9	9	3		405	9	9	5		675	9	5	5	3
112	8	7	2		245	7	7	5		432	12	9	4		686	7	7	7	2
125	5	5	5		252	12	7	3		441	9	7	7		693	11	9	7	
126	9	7	2		256	8	8	4		448	8	8	7		704	11	8	8	
128	8	8	2		264	11	6	4		462	11	7	6		726	11	11	6	
135	9	5	3		275	11	5	5		484	11	11	4		729	9	9	9	
147	7	7	3		288	12	12	2		486	9	9	6		735	7	7	5	3
154	11	7	2		294	7	7	6		495	11	9	5		756	12	9	7	
162	9	9	2		297	11	9	3		504	9	8	7		768	12	8	8	
165	11	5	3		308	11	7	4		512	8	8	8		784	8	7	7	2
168	8	7	3		315	9	7	5		525	7	5	5	3	792	12	11	6	
175	7	5	5		324	9	9	4		528	12	11	4		825	11	5	5	3
176	11	8	2		336	12	7	4		539	11	7	7		847	11	11	7	
189	9	7	3		343	7	7	7		567	9	9	7		864	12	9	8	
192	12	8	2		352	11	8	4		576	12	12	4		875	7	5	5	5
196	7	7	4		363	11	11	3		588	12	7	7		882	9	7	7	2
198	11	9	2		375	5	5	5	3	594	11	9	6		891	11	9	9	
216	12	9	2		378	9	7	6		605	11	11	5		896	8	8	7	2
224	8	7	4		384	8	8	6		616	11	8	7		924	12	11	7	
225	9	5	5		385	11	7	5		625	5	5	5	5	945	9	7	5	3

數	因			數		數	因			數		數	因			數		數	因			數	
968	11	11	8			2048	8	8	8	4		3773	11	7	7	7		6336	11	9	8	8	
972	12	9	9			2058	7	7	7	6		3872	11	11	8	4		6468	12	11	7	7	
1008	12	12	7			2079	11	9	7	3		3888	9	9	8	6		6534	11	11	9	6	
1024	8	8	8	2		2112	11	8	8	3		3969	9	9	7	7		6561	9	9	9	9	
1029	7	7	7	3		2156	11	7	7	4		3993	11	11	11	3		6615	9	7	7	5	3
1056	12	11	8			2178	11	11	9	2		4032	9	8	8	7		6655	11	11	11	5	
1078	11	7	7	2		2187	9	9	9	3		4096	8	8	8	8		6776	11	11	8	7	
1089	11	11	9			2205	9	7	7	5		4116	12	7	7	7		6804	12	9	9	7	
1125	9	5	5	5		2268	9	9	7	4		4125	11	5	5	5	3	6875	11	5	5	5	5
1134	9	9	7	2		2304	9	8	8	4		4158	11	9	7	6		6912	12	9	8	8	
1152	12	12	8			2352	8	7	7	6		4224	11	8	8	6		7056	9	8	7	7	2
1155	11	7	5	3		2376	11	9	8	3		4235	11	11	7	5		7128	11	9	9	8	
1176	8	7	7	3		2401	7	7	7	7		4312	11	8	7	7		7168	8	8	8	7	2
1188	12	11	9			2464	11	8	7	4		4356	11	11	9	4		7203	7	7	7	7	3
1215	9	9	5	3		2475	11	9	5	5		4374	9	9	9	6		7392	12	11	8	7	
1225	7	7	5	5		2541	11	11	7	3		4375	7	5	5	5	5	7425	11	9	5	5	3
1232	11	8	7	2		2592	9	9	8	4		4455	11	9	9	5		7546	11	7	7	7	2
1296	12	12	9			2625	7	5	5	5	3	4536	9	9	8	7		7623	11	11	9	7	
1323	9	7	7	3		2646	9	7	7	6		4608	9	8	8	8		7744	11	11	8	8	
1331	11	11	11			2662	11	11	11	2		4704	12	8	7	7		7776	12	9	9	8	
1344	8	8	7	3		2673	11	9	9	3		4725	9	7	5	5	3	7875	9	7	5	5	5
1372	7	7	7	4		2688	8	8	7	6		4752	11	9	8	6		7938	9	9	7	7	2
1375	11	5	5	5		2695	11	7	7	5		4802	7	7	7	7	2	7986	11	11	11	6	
1386	11	9	7	2		2744	8	7	7	7		4851	11	9	7	7		8019	11	9	9	9	
1408	11	8	8	2		2772	11	9	7	4		4928	11	8	8	7		8064	9	8	8	7	2
1452	12	11	11			2816	11	8	8	4		5082	11	11	7	6		8085	11	7	7	5	3
1458	9	9	9	2		2835	9	9	7	5		5103	9	9	9	7		8192	8	8	8	4	4
1485	11	9	5	3		2904	11	11	8	3		5145	7	7	7	5	3	8232	8	7	7	7	3
1512	9	8	7	3		2916	9	9	9	4		5184	9	9	8	8		8316	12	11	9	7	
1536	8	8	8	3		3024	9	8	7	6		5292	12	9	7	7		8448	12	11	8	8	
1568	8	7	7	4		3025	11	11	5	5		5324	11	11	11	4		8505	9	9	7	5	3
1575	9	7	5	5		3072	8	8	8	6		5346	11	9	9	6		8575	7	7	7	5	5
1584	12	12	11			3087	9	7	7	7		5376	12	8	8	7		8624	11	8	7	7	2
1617	11	7	7	3		3125	5	5	5	5	5	5445	11	11	9	5		8712	11	11	9	8	
1694	11	11	7	2		3136	8	8	7	7		5488	8	7	7	7	2	8748	12	9	9	9	
1701	9	9	7	3		3168	11	9	8	4		5544	11	9	8	7		9072	9	9	8	7	2
1715	7	7	7	5		3234	11	7	7	6		5625	9	5	5	5	5	9075	11	11	5	5	3
1728	12	12	12			3267	11	11	9	3		5632	11	8	8	8		9216	9	8	8	4	4
1764	9	7	7	4		3375	9	5	5	5	3	5775	11	7	5	5	3	9261	9	7	7	7	3
1782	11	9	9	2		3388	11	11	7	4		5808	11	11	8	6		9317	11	11	11	7	
1792	8	8	7	4		3402	9	9	7	6		5832	9	9	9	8		9375	5	5	5	5	5
1815	11	11	5	3		3456	9	8	8	6		5929	11	11	7	7		9408	8	8	7	7	3
1848	11	8	7	3		3465	11	9	7	5		6048	12	9	8	7		9504	12	11	9	8	
1875	5	5	5	5	3	3528	9	8	7	7		6075	9	9	5	5	3	9604	7	7	7	7	4
1925	11	7	5	5		3564	11	9	9	4		6125	7	7	5	5	5	9625	11	7	5	5	5
1936	11	11	4	4		3584	8	8	8	7		6144	12	8	8	8		9702	11	9	7	7	2
1944	9	9	8	3		3645	9	9	9	5		6174	9	7	7	7	2	9801	11	11	9	9	
2016	9	8	7	4		3675	7	7	5	5	3	6237	11	9	9	6		9856	11	8	7	4	4
2025	9	9	5	5		3696	11	8	7	6		6272	8	8	7	7	2						

方，方根及倒數

數	平方	立方	平方根	立方根	平方之立方根	倒數
1	1	1	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.000000000
2	4	8	1.4142136	1.2599210	1.5874011	1.500000000
3	9	27	1.7320508	1.4422496	2.0800837	0.333333333
4	16	64	2.0000000	1.5874011	2.5198421	0.250000000
5	25	125	2.2360680	1.7099759	2.9240177	0.200000000
6	36	216	2.4494897	1.8171206	3.3019272	0.166666667
7	49	343	2.6457513	1.9129312	3.6593057	0.142857143
8	64	512	2.8284271	2.0000000	4.0000000	0.125000000
9	81	729	3.0000000	2.0800873	4.3267487	0.111111111
10	100	1000	3.1622777	2.1544347	4.6415888	0.100000000
11	121	1331	3.3166248	2.2239801	4.9460874	0.090909091
12	144	1728	3.4641016	2.2894286	5.2414828	0.083333333
13	169	2197	3.6056513	2.3513347	5.5287748	0.076923077
14	196	2744	3.7416574	2.4101422	5.8087857	0.071428571
15	225	3375	3.8729833	2.4662121	6.0822020	0.066666667
16	256	4096	4.0000000	2.5198421	6.3496042	0.062500000
17	289	4913	4.1231056	2.5712816	6.6114890	0.058823529
18	324	5832	4.2426407	2.6207414	6.8682855	0.055555556
19	361	6859	4.3588989	2.6684016	7.1203674	0.052631579
20	400	8000	4.4721360	2.7144177	7.3680630	0.050000000
21	441	9261	4.5825757	2.7589243	7.6116266	0.047619048
22	484	10648	4.6904158	2.8020393	7.8514244	0.045454545
23	529	12167	4.7958315	2.8438670	8.0875794	0.043478261
24	576	13824	4.8989795	2.8844991	8.3203359	0.041666667
25	625	15625	5.0000000	2.9240177	8.5498797	0.040000000
26	676	17576	5.0990195	2.9624960	8.7763830	0.038461538
27	729	19683	5.1961524	3.0000000	9.0000000	0.037037037
28	784	21952	5.2915026	3.0365889	9.2208726	0.035714286
29	841	24389	5.3861648	3.0723168	9.4391507	0.034482759
30	900	27000	5.4772256	3.1072325	9.6548938	0.033333333
31	961	29791	5.5677644	3.1413806	9.8682724	0.032258065
32	1024	32768	5.6568542	3.1748021	10.0793084	0.031250000
33	1089	35937	5.7445626	3.2075343	10.2882765	0.030303030
34	1156	39304	5.8309519	3.2396118	10.4950847	0.029411765
35	1225	42875	5.9160798	3.2710663	10.6998748	0.028571429
36	1296	46656	6.0000000	3.3019272	10.9027235	0.027777778
37	1369	50653	6.0827625	3.3322218	11.1037250	0.027027027
38	1444	54872	6.1644140	3.3619754	11.3028786	0.026315789
39	1521	59319	6.2449980	3.3912114	11.5003151	0.025641026
40	1600	64000	6.3245553	3.4199519	11.6960709	0.025000000
41	1681	68921	6.4031242	3.4482172	11.8902022	0.024390244
42	1764	74088	6.4807407	3.4760266	12.0827612	0.023809524
43	1849	79507	6.5574385	3.5033981	12.2737980	0.023255814
44	1936	85184	6.6332496	3.5303483	12.4633594	0.022727273
45	2025	91125	6.7082039	3.5568933	12.6514900	0.022222222
46	2116	97336	6.7823300	3.5830479	12.8382321	0.021739130
47	2209	103823	6.8556546	3.6088261	13.0236256	0.021276600
48	2304	110592	6.9282032	3.6342411	13.2077090	0.020833333
49	2401	117649	7.0000000	3.6593057	13.3905183	0.020408163

數	平方	立方	平方根	立方根	平方之立方根	倒數
50	2500	125000	7.0710678	3.6840314	13.5720880	0.020000000
51	2601	132651	7.1414284	3.7081298	13.7524514	0.019607843
52	2704	140608	7.2111026	3.7325111	13.9316395	0.019230769
53	2809	148877	7.2801099	3.7562858	14.1096827	0.018867925
54	2916	157464	7.3484692	3.7797631	14.2866095	0.018518519
55	3025	166375	7.4161985	3.8029525	14.4624474	0.018181818
56	3136	175616	7.4833148	3.8258624	14.6372228	0.017857143
57	3249	185193	7.5498344	3.8485011	14.8109610	0.017543860
58	3364	195112	7.6157731	3.8708766	14.9836859	0.017241379
59	3481	205379	7.6811457	3.8929965	15.1554212	0.016949153
60	3600	216000	7.7459667	3.9148676	15.3261887	0.016666667
61	3721	226981	7.8102497	3.9364972	15.4960101	0.016393443
62	3844	238328	7.8740079	3.9578915	15.6649060	0.016129032
63	3969	250047	7.9372539	3.9790571	15.8328962	0.015873016
64	4096	262144	8.0000000	4.0000000	16.0000000	0.015625000
65	4225	274625	8.0622577	4.0207256	16.1662356	0.015384615
66	4356	287496	8.1240384	4.0412401	16.3316209	0.015151515
67	4489	300763	8.1853528	4.0615480	16.4961730	0.014925373
68	4624	314432	8.2462113	4.0816551	16.6599083	0.014705882
69	4761	328509	8.3066239	4.1015661	16.8228430	0.014492754
70	4900	343000	8.3666003	4.1212853	16.9849925	0.014285714
71	5041	357911	8.4261498	4.1408178	17.1463716	0.014084507
72	5184	373248	8.4852814	4.1601676	17.3069948	0.013888889
73	5329	389017	8.5440037	4.1793392	17.4668762	0.013698630
74	5476	405224	8.6023253	4.1983364	17.6260690	0.013513514
75	5625	421875	8.6602540	4.2171633	17.7844665	0.013333333
76	5776	438976	8.7177979	4.2358236	17.9422014	0.013157895
77	5929	456533	8.7749644	4.2543210	18.0992460	0.012987013
78	6084	474552	8.8317609	4.2726586	18.2556122	0.012820513
79	6241	493039	8.8881944	4.2908404	18.4113116	0.012658228
80	6400	512000	8.9442719	4.3088695	18.5663553	0.012500000
81	6561	531441	9.0000000	4.3268487	18.7207544	0.012345679
82	6724	551368	9.0553851	4.3444815	18.8745194	0.012195122
83	6889	571787	9.1104336	4.3620707	19.0276606	0.012049193
84	7056	592704	9.1651514	4.3795191	19.1801879	0.011904762
85	7225	614125	9.2195445	4.3968296	19.3321111	0.011764706
86	7396	636056	9.2736185	4.4140049	19.4834398	0.011627907
87	7569	658503	9.3273791	4.4310476	19.6341830	0.011494253
88	7744	681472	9.3808315	4.4479602	19.7843498	0.011363636
89	7921	704969	9.4339811	4.4647451	19.9339487	0.011235955
90	8100	729000	9.4868330	4.4814047	20.0829885	0.011111111
91	8281	753571	9.5393920	4.4979414	20.2314773	0.010989011
92	8464	778688	9.5916630	4.5143574	20.3794231	0.010869565
93	8649	804357	9.6436508	4.5306549	20.5258337	0.010752688
94	8836	830584	9.6953597	4.5468359	20.6737171	0.010638298
95	9025	857375	9.7467943	4.5629026	20.8200805	0.010526316
96	9216	884736	9.7979590	4.5788570	20.9659311	0.010416667
97	9409	912673	9.8488578	4.5947009	21.1112763	0.010309278
98	9604	941192	9.8994949	4.6104363	21.2561227	0.010204082
99	9801	970299	9.9498744	4.6260650	21.4004775	0.010101010
100	10000	1000000	10.0000000	4.6415888	21.5443469	0.010000000

直角三角形之邊及面積

求可表直角三角形之三邊之三整數。

畢達哥拉斯(Pythagoras)之法．命任意奇整數 n 爲一邊，則他邊爲 $\frac{1}{2}(n^2-1)$，斜邊爲 $\frac{1}{2}(n^2+1)$。

歐幾里得(Euclid)之法．設 x,y 俱爲奇數或俱爲偶數，而 xy 爲完全平方，則斜邊爲 $\frac{1}{2}(x+y)$，他二邊爲 $\frac{1}{2}(x-y)$，$\sqrt{xy}$。

柏拉圖(Plato)之法．設以任意偶整數 m 爲一邊，則他邊爲 $\frac{1}{4}m^2-1$，斜邊爲 $\frac{1}{4}m^2+1$。

Moseres 之法．取任意二數 m,n，則其積之 2 倍，即 $2mn$ 及平方差 m^2-n^2 表二邊，平方和 m^2+n^2 表斜邊。

邊			面積	邊			面積	邊			面積
3	4	5	6	19	180	181	1710	60	221	229	6630
5	12	13	30	24	143	145	1716	119	120	169	7140
8	15	17	60	21	220	221	2310	31	480	481	7440
7	24	25	84	65	72	97	2340	84	187	205	7854
9	40	41	180	44	117	125	2574	104	153	185	7956
12	35	37	210	60	91	109	2730	95	168	193	7980
20	21	29	210	28	195	197	2730	40	399	401	7980
11	60	61	330	23	264	265	3036	69	260	269	8970
16	63	65	504	51	140	149	3570	33	544	545	8976
13	84	85	546	25	312	313	3900	68	285	293	9690
28	45	53	630	32	255	257	4080	133	156	205	10374
15	112	113	840	52	165	173	4290	44	483	485	10626
33	56	65	924	88	105	137	4620	35	612	613	10710
20	99	101	990	27	364	365	4914	105	208	233	10920
17	144	145	1224	57	176	185	5016	75	308	317	11550
48	55	73	1320	85	132	157	5610	96	247	265	11856
36	77	85	1386	36	323	325	5814	140	171	221	11970
39	80	89	1560	29	420	421	6090	120	209	241	12540

邊			面積	邊			面積	邊			面積
37	684	685	12654	200	609	641	60900	660	989	1189	326370
76	357	365	13566	279	440	521	61380	612	1075	2237	329950
48	575	577	13800	185	672	697	62160	765	868	1157	332010
115	252	277	14490	336	377	505	63336	705	992	1217	349680
39	760	761	14820	20	1599	1601	63960	832	855	1193	355680
52	675	677	17550	308	435	533	66990	532	1395	1493	371070
87	416	425	18096	195	748	773	72930	799	960	1349	383520
160	231	281	18480	396	403	565	79794	748	1035	1277	389090
136	273	305	18564	259	660	709	85470	893	924	1285	412566
161	240	289	19320	368	465	593	85560	560	1511	1649	434280
56	783	785	21924	336	527	625	88536	884	987	1325	436254
93	476	485	22134	315	572	653	90090	792	1175	1417	465300
207	224	305	23184	273	736	785	100469	684	1363	1525	466146
120	391	409	23460	333	644	725	107226	740	1269	1469	469530
135	352	377	23760	400	561	689	112200	931	1020	1381	474810
92	525	533	24150	364	627	725	114114	833	1056	1345	481474
175	288	337	25200	455	528	697	120120	936	1127	1465	527436
204	253	325	25806	407	624	745	126984	969	1120	1481	542640
152	345	377	26220	301	900	949	135450	720	1519	1681	546840
180	299	349	26910	468	595	757	139230	836	1323	1565	553014
60	899	901	26970	432	665	793	143640	780	1421	1621	554190
145	408	433	29580	369	800	881	147600	1036	1173	1565	607614
225	272	353	30600	429	700	821	150150	988	1275	1613	629850
100	621	629	31050	315	988	1037	155610	880	1479	1721	650760
105	608	617	31920	555	572	797	158730	1113	1184	1625	658896
189	340	389	32130	540	629	829	169830	1140	1219	1669	694830
64	1023	1025	32736	451	780	901	175890	1040	1431	1769	744120
252	275	373	34650	504	703	865	177156	1248	1265	1777	799480
168	425	457	35700	329	1080	1129	177660	1148	1485	1877	852390
155	468	493	36270	420	851	949	178710	1312	1425	1937	863550
228	325	397	37050	464	777	905	180264				
111	680	689	37740	533	756	925	201474				
108	725	733	39150	616	663	905	204204				
68	1155	1157	39270	473	864	985	204336				
203	396	445	40194	580	741	941	214890				
165	532	557	43890	496	897	1025	222456				
297	304	425	45144	615	728	953	223860				
72	1295	1297	46620	559	840	1009	234780				
184	513	545	47196	696	697	985	242556				
116	837	845	48546	660	779	1021	257070				
280	351	449	49140	645	812	1037	261870				
217	456	505	49476	476	1107	1205	263466				
261	380	461	49590	620	861	1061	266910				
76	1443	1445	54834	585	928	1097	271440				
319	360	481	57420	731	780	1069	285090				
124	957	965	59334	504	1247	1345	314244				
231	520	569	60060	704	903	1145	317856				

斜三角形之邊及面積

斜三角形之三邊及面積爲整數者之表如次：

邊			面積	邊			面積	邊			面積
4	13	15	24	21	61	65	420	23	123	130	1380
3	25	26	36	19	60	73	456	46	75	109	1380
9	20	17	36	35	44	75	462	51	74	115	1380
7	15	20	42	25	39	40	468	41	75	97	1584
6	25	29	60	8	123	125	480	35	100	117	1638
11	13	20	60	29	35	48	504	39	85	92	1656
5	29	30	72	51	52	101	510	50	69	73	1656
13	14	15	84	29	60	85	522	41	84	85	1680
8	29	35	84	28	65	89	546	46	61	75	1680
10	17	21	84	25	51	52	624	57	65	68	1710
12	17	25	90	25	52	63	630	39	100	137	1716
19	20	37	114	36	91	125	630	29	150	169	1740
16	25	39	120	26	51	55	660	29	125	136	1740
13	20	21	126	25	92	113	690	52	73	75	1800
15	28	41	126	29	52	69	690	43	259	300	1806
11	25	30	132	17	105	116	714	26	145	153	1836
11	90	97	132	32	53	75	720	51	75	78	1836
13	40	51	156	34	65	93	744	80	91	165	1848
15	26	37	156	25	63	74	756	55	84	125	1848
10	35	39	168	39	41	50	780	45	85	104	1872
13	30	37	180	21	89	100	840	45	91	116	1890
12	55	65	198	35	52	73	840	53	75	88	1980
7	65	68	210	25	84	101	840	65	66	109	1980
17	25	28	210	14	157	165	924	48	85	91	2016
9	73	80	216	35	53	66	924	65	72	119	2016
15	41	52	234	33	56	65	924	17	260	267	2040
13	37	40	240	22	85	91	924	92	117	205	2070
9	65	70	252	40	51	77	924	61	69	100	2070
33	34	65	264	31	156	185	930	65	68	105	2142
15	37	44	264	23	140	159	966	60	73	91	2184
25	51	74	300	34	61	75	1020	61	74	87	2220
20	37	51	306	57	60	111	1026	55	136	183	2244
25	33	52	330	36	61	65	1080	19	289	300	2280
11	100	109	330	31	97	120	1116	68	75	77	2310
17	39	44	330	39	62	85	1116	58	85	117	2340
24	35	53	336	25	101	114	1140	45	133	164	2394
25	29	36	360	38	65	87	1140	29	182	195	2436
13	68	75	390	51	98	145	1176	87	119	200	2436
20	51	65	408	35	78	97	1260	35	174	197	2436
25	39	56	420	16	195	205	1288	41	169	200	2460
21	85	104	420	41	66	85	1320	85	123	202	2460
26	35	51	420	40	111	145	1332	65	89	132	2574

邊			面積	邊			面積	邊			面積
31	193	210	2604	99	113	140	5544	175	221	318	18564
39	145	161	2610	47	250	267	5640	175	221	276	19320
65	87	88	2640	55	244	273	6006	125	312	323	19380
61	91	100	2730	105	116	143	6006	143	296	375	19536
21	340	353	2856	100	217	303	6510	186	221	275	20460
49	200	241	2940	91	145	180	6552	212	225	247	22230
27	275	292	2970	153	185	328	6660	260	287	519	22386
35	197	216	3024	43	520	555	6708	129	377	440	22704
76	85	105	3196	119	150	241	7140	205	286	411	27060
37	195	212	3330	50	369	401	7380	221	346	525	27300
87	112	185	3360	89	170	189	7560	123	595	676	29274
45	164	187	3366	65	297	340	7722	253	260	315	31878
73	95	97	3420	37	525	548	7770	277	304	315	38304
57	122	125	3420	85	234	293	7956	255	407	596	41514
65	109	116	3480	123	133	200	7980	217	404	495	42966
73	102	145	3480	65	272	303	8160	175	527	600	44268
65	126	173	3484	111	200	281	8880	273	425	628	46410
65	119	156	3570	140	143	157	9240				
40	231	257	3696	68	273	275	9240				
69	113	140	3864	111	175	176	9240				
65	119	138	3864	89	208	231	9240				
60	145	161	3864	116	231	325	9240				
89	99	100	3960	111	175	232	9324				
57	148	175	3990	74	277	315	9324				
75	109	136	4080	117	164	175	9450				
85	99	140	4158	116	181	225	10440				
91	100	159	4200	91	253	300	10626				
90	97	119	4284	148	153	175	10710				
40	291	325	4290	113	195	288	10920				
87	100	143	4290	149	156	175	10920				
68	87	145	4350	66	389	425	11220				
39	280	305	4368	123	187	200	11220				
89	117	170	4440	85	293	336	11424				
55	207	244	4554	170	171	305	11628				
66	175	221	4620	130	185	231	12012				
143	168	305	4620	75	403	452	12090				
61	155	156	4650	93	325	388	12090				
37	411	440	4884	157	165	184	12144				
41	337	360	4904	113	225	238	12600				
123	208	325	4920	87	340	385	13398				
105	124	205	5208	164	225	349	14760				
75	176	229	5280	125	253	312	15180				
51	233	260	5304	225	287	496	15624				
65	173	204	5304	195	203	356	15834				
45	296	325	5328	144	221	275	15840				
91	125	174	5460	126	269	325	16380				
104	111	175	5460	190	231	377	17556				

附　錄　二

圓之直徑，圓周及面積

直徑	圓周	面積	直徑	圓周	面積
0.5	1.5708	0.1964	25.5	80.1106	510.7052
1.0	3.1416	0.7854	26.0	81.6814	530.9292
1.5	4.7124	1.7672	26.5	83.2522	551.5459
2.0	6.2832	3.1416	27.0	84.8230	572.5553
2.5	7.8540	4.9084	27.5	86.3939	593.9574
3.0	9.4248	7.0686	28.0	87.9646	615.7522
3.5	10.9956	9.6211	28.5	89.5354	637.9397
4.0	12.5664	12.5664	29.0	91.1062	660.5199
4.5	14.1732	15.9043	29.5	92.6770	683.4928
5.0	15.7080	19.6350	30.0	94.2478	706.8583
5.5	17.2788	23.7583	30.5	95.8186	730.6166
6.0	18.8496	28.2743	31.0	97.3894	754.7676
6.5	20.4204	33.1831	31.5	98.9602	779.3113
7.0	21.9912	38.4845	32.0	100.5310	804.2477
7.5	23.5619	44.1787	32.5	102.1018	829.5768
8.0	25.1327	50.2655	33.0	103.6726	855.2986
8.5	26.7035	56.7450	33.5	105.2434	881.4131
9.0	28.2743	63.6173	34.0	106.8142	907.9203
9.5	29.8451	70.8822	34.5	108.3849	934.8202
10.0	31.4159	78.5398	35.0	109.9557	962.1128
10.5	32.9867	86.5902	35.5	111.5265	989.7980
11.0	34.5575	95.0332	36.0	113.0973	1017.8760
11.5	36.1283	103.8689	36.5	114.6681	1046.3467
12.0	37.6991	113.0973	37.0	116.2389	1075.2101
12.5	39.2699	122.7185	37.5	117.8097	1104.4662
13.0	40.8407	132.7323	38.0	119.3805	1134.1149
13.5	42.4115	143.1338	38.5	120.9513	1164.1564
14.0	43.9823	153.9380	39.0	122.5221	1194.5906
14.5	45.5531	165.1300	39.5	124.0929	1225.4275
15.0	47.1239	176.7146	40.0	125.6637	1256.6371
15.5	48.6947	188.6919	40.5	127·2345	1288.2493
16.0	50.2655	201.0619	41.0	128.8053	1320.2543
16.5	51.8363	213.8246	41.5	130.3761	1352.6520
17.0	53.4071	226.9801	42.0	131.9469	1385.4424
17.5	54.9779	240.5282	42.5	133.5177	1418.6254
18.0	56.5487	254.4690	43.0	135.0885	1452.2012
18.5	58.1195	268.8025	43.5	136.6593	1486.1697
19.0	59.6903	283.5287	44.0	138.2301	1520.5308
19.5	61.2161	298.6477	44.5	139.8009	1555.2847
20.0	62.8319	314.1953	45.0	141.3717	1590.4313
20.5	64.4027	330.0636	45.5	142.9425	1625.9705
21.0	65.9735	346.3606	46.0	144.5133	1661.9025
21.5	67.5442	363.0503	46.5	146.0841	1698.2272
22.0	69.1150	380.1327	47.0	147.6549	1734.9445
22.5	70.6858	397.6078	47.5	149.2257	1772.0546
23.0	72.2566	415.4756	48.0	150.7964	1809.5574
23.5	73.8274	433.7361	48.5	152.3672	1847.7528
24.0	75.3982	452.3893	49.0	153.9380	1885.7410
24.5	76.9690	471.4352	49.5	155.5088	1924.4218
25.0	78.5398	490.8739	50.0	157.0796	1963.4954

直徑	圓周	面積	直徑	圓周	面積
50.5	158.6504	2002.9617	75.5	237.1902	4476.9659
51.0	160.2212	2042.8216	76.0	238.7610	4536.4598
51.5	161.7920	2083.0723	76.5	240.3318	4596.3464
52.0	163.3628	2123.7166	77.0	241.9026	4656.6257
52.5	164.9336	2164.7537	77.5	243.4734	4717.2977
53.0	166.5044	2206.1834	78.0	245.0442	4778.3624
53.5	168.0752	2248.0059	78.5	246.6150	4839.8198
54.0	169.6460	2290.2210	79.0	248.1858	4901.6699
54.5	171.2168	2332.8289	79.5	249.7566	4963.9127
55.0	172.7876	2375.8294	80.0	251.3274	5026.5482
55.5	174.3584	2419.2227	80.5	252.8982	5089.5764
56.0	175.9292	2463.0086	81.0	254.4690	5152.9974
56.5	177.5000	2507.1873	81.5	256.0398	5216.8110
57.0	179.0708	2551.7586	82.0	257.6106	5281.0173
57.5	180.6416	2596.7227	82.5	259.1814	5345.6162
58.0	182.2124	2642.0794	83.0	260.7522	5410.6079
58.5	183.7832	2687.8289	83.5	262.3230	5475.9923
59.0	185.3540	2733.9710	84.0	263.8938	5541.7694
59.5	186.9248	2780.5058	84.5	265.4646	5607.9392
60.0	188.4956	2827.4334	85.0	267.0354	5674.5017
60.5	190.0664	2874.7536	85.5	268.6062	5741.4569
61.0	191.6372	2922.4666	86.0	270.1770	5808.8048
61.5	193.2079	2970.5722	86.5	271.7478	5876.5454
62.0	194.7787	3019.0705	87.0	273.3186	5944.6787
62.5	196.3495	3067.9616	87.5	274.8894	6013.2047
63.0	197.9203	3117.2453	88.0	276.4602	6082.1234
63.5	199.4911	3166.9217	88.5	278.0309	6151.4348
64.0	201.0619	3216.9909	89.0	279.6017	6221.1389
64.5	202.6327	3267.4527	89.5	281.1725	6291.2356
65.0	204.2035	3318.3072	90.0	282.7433	6361.7251
65.5	205.7743	3369.5545	90.5	284.3141	6432.6073
66.0	207.3451	3421.1944	91.0	285.8849	6503.8822
66.5	208.9159	3473.2270	91.5	287.4557	6575.5498
67.0	210.4867	3525.6524	92.0	289.0265	6647.6101
67.5	212.0575	3578.4704	92.5	290.5973	6720.0630
68.0	213.6283	3631.6811	93.0	292.1681	6792.9087
68.5	215.1991	3685.2845	93.5	293.7389	6866.1471
69.0	216.7699	3739.2807	94.0	295.3097	6939.7782
69.5	218.3407	3793.6695	94.5	296.8805	7013.8019
70.0	219.9115	3848.4510	95.0	298.4513	7088.2184
70.5	221.4823	3903.6252	95.5	300.0221	7163.0276
71.0	223.0531	3959.1921	96.0	301.5929	7238.2295
71.5	224.6239	4015.1518	96.5	303.1637	7313.8240
72.0	226.1947	4071.5041	97.0	304.7345	7389.8119
72.5	227.7655	4128.2491	97.5	306.3053	7466.1913
73.0	229.3363	4185.3868	98.0	307.8761	7542.9640
73.5	230.9071	4242.9172	98.5	309.4469	7620.1293
74.0	232.4779	4300.8403	99.0	311.0177	7697.6874
74.5	234.0487	4359.1562	99.5	312.5885	7775.6382
75.0	235.6194	4417.8647	100.0	314.1593	7853.9816

角度與弧度

（設圓之半徑爲 1）

角	弧之長	角	弧之長	角	弧之長	角	弧之長
1°	0.017453292520	1′	0.000290888209	1″	0.000004848137	1gr.	0.015707963268
2	0.034906585040	2	0.000581776417	2	0.000009696274	2	0.031415926536
3	0.052359877560	3	0.000872664626	3	0.000014544410	3	0.047123889804
4	0.069813170080	4	0.001163552835	4	0.000019392547	4	0.062831853072
5	0.087266462600	5	0.001454441043	5	0.000024240684	5	0.078539816340
6	0.104719755120	6	0.001745329252	6	0.000029088821	6	0.094247779608
7	0.122173047640	7	0.002036217461	7	0.000033936958	7	0.109955742876
8	0.139626340160	8	0.002327105669	8	0.000038785094	8	0.125663706144
9	0.157079632679	9	0.002617993878	9	0.000043633231	9	0.141371669412

角	弧之長	角	弧之長
1°	0.0174532925199432957692369	1″	0.0000048481368110953599359
1′	0.0002908882086657215961539	1gr.	0.0157079632679489661923133

弓形之面積

（設圓之直徑爲 1）

高	面積	高	面積	高	面積	高	面積
.005	.000471	.130	.059999	.255	.157891	.380	.273861
.010	.001329	.135	.063389	.260	.162263	.385	.278721
.015	.002438	.140	.066833	.265	.166663	.390	.283593
.020	.003749	.145	.070319	.270	.171090	.395	.288476
.025	.005231	.150	.073875	.275	.175542	.400	.293370
.030	.006866	.155	.077470	.280	.180020	.405	.298274
.035	.008636	.160	.081112	.285	.184522	.410	.303187
.040	.010538	.165	.084801	.290	.189048	.415	.308110
.045	.012555	.170	.088536	.295	.193597	.420	.313042
.050	.014681	.175	.092314	.300	.198168	.425	.317981
.055	.016912	.180	.096135	.305	.202762	.430	.322928
.060	.019239	.185	.099997	.310	.207376	.435	.327883
.065	.021660	.190	.103900	.315	.212011	.440	.332843
.070	.024168	.195	.107843	.320	.216666	.445	.337810
.075	.026761	.200	.111824	.325	.221341	.450	.342783
.080	.029435	.205	.115842	.330	.226034	.455	.347760
.085	.032186	.210	.119898	.335	.230745	.460	.352742
.090	.035012	.215	.123988	.340	.235473	.465	.357728
.095	.037909	.220	.128114	.345	.240219	.470	.362717
.100	.040875	.225	.132273	.350	.244980	.475	.367710
.105	.043908	.230	.136465	.355	.249758	.480	.372704
.110	.047006	.235	.140680	.360	.254551	.485	.377701
.115	.050165	.240	.144945	.365	.259358	.490	.382700
.120	.053385	.245	.149231	.370	.264179	.495	.387699
.125	.056664	.250	.153546	.375	.269014	.500	.392699

正多邊形之半徑,邊心距,面積及邊長

表 I 爲示正多邊形之一邊爲 1 時,表其半徑,邊心距,面積之數;表 II 爲示正多邊形之半徑爲 1,或邊心距爲 1,又或面積爲 1 時表其一邊之數.

多邊形之邊數	I. 邊 c=1.			II. 依下之已知件 c 之值		
	半徑	邊心距	面積	半徑=1	邊心距=1	面積=1
3	0.577350	0.288675	0.4330 3	1.732050	3.404101	1.519671
4	0.707107	0.500000	1.000000	1.4142 4	2.000000	1.000000
5	0.850651	0.688191	1.720477	1.175570	1.453085	0.762387
6	1.000000	0.866025	2.598076	1.000000	1.154701	0.620403
7	1.152382	1.038261	3.633912	0.867767	0.963149	0.524581
8	1.306563	1.207107	3.828428	0.765367	0.828427	0.455090
9	1.461902	1.373739	6.181823	0.684040	0.727940	0.402200
10	1.618034	1.538842	7.694207	0.618034	0.649839	0.360511
11	1.774732	1.702844	9.365640	0.563465	0.587253	0.326762
12	1.931852	1.866025	11.196150	0.517638	0.535898	0.298858
15	2.404867	2.352315	17.642360	0.415823	0.425113	0.238079
18	2.879385	2.835641	25.520770	0.347296	0.352654	0.197949
20	3.196277	3.156876	31.568760	0.312869	0.316769	0.077980

但邊變時,半徑及邊心距以同比而變,而面積因邊之平方而變. 例如作深 3 尺容 36.75 立方尺之八角柱器,底面積爲 $36.75\div3=12.25$ 平方尺. 故由表 II 得

$c^2:0.455092=12.25:1.$　$\therefore c=1.59815.$

正多面體之面積及體積

正多面體之頂數,稜數,面數,及稜爲 1 時表其面積及體積之數.

正多面體	頂數	稜數	面	面積	體積
正四面體	4	6	4個三角形	1.732051	0.117851
正六面體(立方體)	8	12	6個正方形	6.000000	1.000000
正八面體	6	12	8個三角形	3.464102	0.471404
正十二面體	20	30	12個五角形	20.645779	7.663119
正二十面體	12	30	20個三角形	8.660254	2.181695

圓周率之重要諸值

	π	π^2	π^3	$\sqrt{\pi}$	$\sqrt[3]{\pi}$	$\sqrt[3]{\pi^2}$
1	3.1415927	9.8696044	31.0062767	1.7724539	1.4645919	2.1450294
2	6.2831853	19.7392088	62.0125534	3.5449077	2.9291836	4.2900588
3	9.4247780	29.6088132	93.0188300	5.3173616	4.3937756	6.4350882
4	12.5663706	39.4784176	124.0251067	7.0898154	5.8583675	8.5801176
5	15.7079633	49.3480220	155.0313834	8.8622693	7.3229594	10.7251470
6	18.8495559	59.2176264	186.0376601	10.6347231	8.7875513	12.8701764
7	21.9911486	69.0872308	217.0439368	12.4071770	10.2521432	15.0152058
8	25.1327412	78.9568352	248.0502134	14.1796308	11.7167351	17.1602352
9	28.2743339	88.8264396	279.0564901	15.9520847	13.1813269	19.3052646

	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi^2}$	$\frac{1}{\pi^3}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$
1	0.3183099	0.1013210	0.0322515	0.5641896	0.6827841
2	0.6366198	0.2026420	0.0645030	1.1283792	1.3655681
3	0.9549297	0.3039631	0.0967545	1.6925688	2.0483522
4	1.2732395	0.4052841	0.1290060	2.2567583	2.7311363
5	1.5915494	0.5066051	0.1612575	2.8209479	3.4139203
6	1.9098593	0.6079261	0.1935090	3.3851375	4.0967644
7	2.2281692	0.7092471	0.2257605	3.9493271	4.7794885
8	2.5464791	0.8105682	0.2580120	4.5139167	5.4622725
9	2.8647890	0.9118892	0.2902635	5.0777063	6.1450566

π 之重要諸值之對數

$\log\pi=0.4971499$	$\log\sqrt{\pi}=0.2485749$	$\log\frac{1}{\pi}=\bar{1}.5028501$	$\log\frac{1}{\sqrt{\pi}}=\bar{1}.7514251$
$\log\pi^2=0.9942997$	$\log\sqrt[3]{\pi}=0.1657166$	$\log\frac{1}{\pi^2}=\bar{1}.0057003$	$\log\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}=\bar{1}.8342834$
$\log\pi^3=1.4914496$	$\log\sqrt[3]{\pi^2}=0.3314332$	$\log\frac{1}{\pi^3}=\bar{1}.5085504$	

π, e, μ, $\frac{1}{\mu}$ 之最近值

π=3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 49132 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 04315 58817 48815 20920 96982 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07746 23798 34749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912
98336 73362 44193 66430 86021 39501 60924 48077 23094 36235
53096 62027 55693 97986 95022 24749 96206 07497 03041 23668
86199 51100 89202 38377 02131 41694 11902 93858 25446 81639
79990 46597 00081 70029 63123 77381 34208 41307 91451 18398
05709 85.... .... (小數 707 位)

e=2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995
95749 66967 62772 40766 30335 35475 94571 38217 85257 66427
42746 63919 32003 05992 18174 13596 62904 357.... ....

(小數 138 位)

μ=0.43429 44819 03251 82765 11289 18916 60508 22943 97005 80366
65661 14453 78316 58646 49208 87077 47292 24949 33843 17483
18706 10674 47663 03733 64167 92371 58963 90656 92210 64662
81226 58521 27086 56867 03295 93370 86965 88266 88331 16360
77384 90514 28443 48666 76864 65860 85135 56148 21234 87653
43543 43573 17247 48049 05993 55353 05.... .... (小數282位)

$\frac{1}{\mu}$=2.30258 50929 94045 68401 79914 45684 36420 76011 01488 02877
29760 33327 90096 75726 09677 35248 02359 97205 08959 82983
41967 78404 22862 48633 40952 54650 82806 75666 62873 69098
78168 94829 07208 32555 46308 43799 89482 62331 98528 39350
53089 65377 73262 88461 63366 22223 76982 19886 74654 36674
74404 24327 43685 .... (小數265位對的，惟最後二數字不精確) π之值爲 Shanks 所計算，後三者爲 Adams 所計算.

常用對數表

100—140

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775	00817
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072	01115	01157	01199	01242
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912	01953	01995	02036	02078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325	02366	02407	02449	02490
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735	02776	02816	02857	02898
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336	04376	04415	04454	04493
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727	04766	04805	04844	04883
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115	05154	05192	05231	05269
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500	05538	05576	05614	05652
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881	05918	05956	05994	06032
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258	06296	06333	06371	06408
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633	06670	06707	06744	06781
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004	07041	07078	07115	07151
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372	07408	07445	07482	07518
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737	07773	07809	07846	07882
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099	08135	08171	08207	08243
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458	08493	08529	08565	08600
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814	08849	08884	08920	08955
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167	09202	09237	09272	09307
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517	09552	09587	09621	09656
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864	09899	09934	09968	10003
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209	10243	10278	10312	10346
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551	10585	10619	10653	10687
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890	10924	10958	10992	11025
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227	11261	11294	11327	11361
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561	11594	11628	11661	11694
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893	11926	11959	11992	12024
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222	12254	12287	12320	12352
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548	12581	12613	12646	12678
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872	12905	12937	12969	13001
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194	13226	13258	13290	13322
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513	13545	13577	13609	13640
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830	13862	13893	13925	13956
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145	14176	14208	14239	14270
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457	14489	14520	14551	14582
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768	14799	14829	14860	14891
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

100—140

140—180

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768	14799	14829	14860	14891
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076	15106	15137	15168	15128
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381	15412	15442	15473	15503
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685	15715	15746	15776	15806
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987	16017	16047	16077	16107
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286	16316	16346	16376	16406
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584	16613	16643	16673	16702
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879	16909	16938	16967	16997
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173	17202	17231	17260	17289
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464	17493	17522	17551	17580
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754	17782	17811	17840	17869
151	17898	17926	17955	17984	18013	18041	18070	18099	18127	18156
152	18184	18213	18241	18270	18298	18327	18355	18384	18412	18441
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611	18639	18667	18696	18724
154	18752	18780	18808	18837	18865	18893	18921	18949	18977	19005
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173	19201	19229	19257	19285
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451	19479	19507	19535	19562
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728	19756	19783	19811	19838
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003	20030	20058	20085	20112
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276	20303	20330	20358	20385
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548	20575	20602	20629	20656
161	20683	20710	20737	20763	20790	20817	20844	20871	20898	20925
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085	21112	21139	21165	21192
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352	21378	21405	21431	21458
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617	21643	21669	21696	21722
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880	21906	21932	21958	21985
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141	22167	22194	22220	22246
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401	22427	22453	22479	22505
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660	22686	22712	22737	22763
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917	22943	22968	22994	23019
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172	23198	23223	23249	23274
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426	23452	23477	23502	23528
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679	23704	23729	23754	23779
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930	23955	23980	24005	24030
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180	24204	24229	24254	24279
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428	24452	24477	24502	24527
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674	24699	24724	24748	24773
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920	24944	24969	24993	25018
178	25082	25066	25091	25115	25139	25164	25188	25212	25237	25261
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406	25431	25455	25479	25503
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648	25672	25696	25720	25744
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

140—180

180—220

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648	25672	25696	25720	25744
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888	25912	25935	25959	25983
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126	26150	26174	26198	26221
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364	26387	26411	26435	26458
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600	26623	26647	26670	26694
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834	26858	26881	26905	26928
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068	27091	27114	27138	27161
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300	27323	27346	27370	27393
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531	27554	27577	27600	27623
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761	27784	27807	27830	27852
190	27875	27898	27921	27944	27967	27989	28012	28035	28058	28081
191	28103	28126	28149	28171	28194	28217	28240	28262	28285	28307
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443	28466	28488	28511	28533
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668	28691	28713	28735	28758
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892	28914	28937	28959	28981
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115	29137	29159	29181	29203
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336	29358	29380	29403	29425
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557	29579	29601	29623	29645
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776	29798	29820	29842	29863
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994	30016	30038	30060	30081
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211	30233	30255	30276	30298
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428	30449	30471	30492	30514
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643	30664	30685	30707	30728
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856	30878	30899	30920	30942
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069	31091	31112	31133	31154
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281	31302	31323	31345	31366
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492	31513	31534	31555	31576
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702	31723	31744	31765	31785
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911	31931	31952	31973	31994
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118	32139	32160	32181	32201
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325	32346	32366	32387	32408
211	32428	32449	32469	32490	32510	32531	32552	32572	32593	32613
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736	32756	32777	32797	32818
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940	32960	32980	33001	33021
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143	33163	33183	33203	33224
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345	33365	33385	33405	33425
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546	33566	33586	33606	33626
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746	33766	33786	33806	33826
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945	33965	33985	34005	34025
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143	34163	34183	34203	34223
220	34242	34262	34282	34301	34321	34341	34361	34380	34400	34420
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

180—220

220—260

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	34242	34262	34282	34301	34321	34341	34361	34380	34400	34420
221	34439	34459	34479	34498	34518	34537	34557	34577	34596	34616
222	34635	34655	34674	34694	34713	34733	34753	34772	34792	34811
223	34830	34850	34869	34889	34908	34928	34947	34967	34986	35005
224	35025	35044	35064	35083	35102	35122	35141	35160	35180	35199
225	35218	35238	35257	35276	35295	35315	35334	35353	35372	35392
226	35411	35430	35449	35468	35488	35507	35526	35545	35564	35583
227	35603	35622	35641	35660	35679	35698	35717	35736	35755	35774
228	35793	35813	35832	35851	35870	35889	35908	35927	35946	35965
229	35984	36003	36021	36040	36059	36078	36097	36116	36135	36154
230	36173	36192	36211	36229	36248	36267	36286	36305	36324	36342
231	36361	36380	36399	36418	36436	36455	36474	36493	36511	36530
232	36549	36568	36586	36605	36624	36642	36661	36680	36698	36717
233	36736	36754	36773	36791	36810	36829	36847	36866	36884	36903
234	36922	36940	36959	36977	36996	37014	37033	37051	37070	37088
235	37107	37125	37144	37162	37181	37199	37218	37236	37254	37273
236	37291	37310	37328	37346	37365	37383	37401	37420	37438	37457
237	37475	37493	37511	37530	37548	37566	37585	37603	37621	37639
238	37658	37676	37694	37712	37731	37749	37767	37785	37803	37822
239	37840	37858	37876	37894	37912	37931	37949	37967	37985	38003
240	38021	38039	38057	38075	38093	38112	38130	38148	38166	38184
241	38202	38220	38238	38256	38274	38292	38310	38328	38346	38364
242	38382	38399	38417	38435	38453	38471	38489	38507	38525	38543
243	38561	38578	38596	38614	38632	38650	38668	38686	38703	38721
244	38739	38757	38775	38792	38810	38828	38846	38863	38881	38899
245	38917	38934	38952	38970	38987	39005	39023	39041	39058	39076
246	39094	39111	39129	39146	39164	39182	39199	39217	39235	39252
247	39270	39287	39305	39322	39340	39358	39375	39393	39410	39428
248	39445	39463	39480	39498	39515	39533	39550	39568	39585	39602
249	39620	39637	39655	39672	39690	39707	39724	39742	39759	39777
250	39794	39811	39829	39846	39863	39881	39898	39915	39933	39950
251	39967	39985	40002	40019	40037	40054	40071	40088	40106	40123
252	40140	40157	40175	40192	40209	40226	40243	40261	40278	40295
253	40312	40329	40346	40364	40381	40398	40415	40432	40449	40466
254	40483	40500	40518	40535	40552	40569	40586	40603	40620	40637
255	40654	40671	40688	40705	40722	40739	40756	40773	40790	40807
256	40824	40841	40858	40875	40892	40909	40926	40943	40960	40976
257	40993	41010	41027	41044	41061	41078	41095	41111	41128	41145
258	41162	41179	41196	41212	41229	41246	41263	41280	41296	41313
259	41330	41347	41363	41380	41397	41414	41430	41447	41464	41481
260	41497	41514	41531	41547	41564	41581	41597	41614	41631	41647
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

260—300

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
260	41497	41514	41531	41547	41564	41581	41597	41614	41631	41647
261	41664	41681	41697	41714	41731	41747	41764	41780	41797	41814
262	41830	41847	41863	41880	41896	41913	41929	41946	41963	41979
263	41996	42012	42029	42045	42062	42078	[illegible]	42111	42127	42144
264	42160	42177	42193	42210	42226	42243	42259	42275	42292	42308
265	42325	42341	42357	42374	[illegible]	42406	42423	42439	42455	42472
266	42488	42504	42521	42537	42553	42570	42586	42602	42619	42635
267	42651	42667	42684	42700	42716	42732	42749	42765	42781	42797
268	42813	42830	42846	42862	42878	42894	42911	42927	42943	42959
269	42975	42991	43008	43024	43040	43056	43072	43088	43104	43120
270	43136	43152	43169	43185	43201	43217	43233	43249	43265	43281
271	43297	43313	43329	43345	43361	43377	43393	43409	43425	43441
272	43457	43473	43489	43505	43521	43537	43553	43569	43584	43600
273	43616	43632	43648	43664	43680	43696	43712	43727	43743	43759
274	43775	43791	43807	43823	43838	[illegible]	43870	43886	43902	43917
275	43933	43949	43965	43981	43996	44012	44028	44044	44059	44075
276	44091	44107	44122	44138	44154	44170	44185	44201	44217	44232
277	44248	44264	44279	44295	44311	44326	44342	44358	44373	44389
278	44404	44420	44436	44451	44467	44483	44498	44514	44529	44545
279	44560	44576	44592	44607	44623	44638	44654	44669	44685	44700
280	44716	44731	44747	44762	44778	44793	44809	44824	44840	44855
281	44871	44886	44902	44917	44932	44948	44963	44979	44994	45010
282	45025	45040	45056	45071	45086	45102	45117	45133	45148	45163
283	45179	45194	45209	45225	45240	45255	45271	45286	45301	45317
284	45332	45347	45362	45378	45393	45408	45423	45439	45454	45469
285	45484	45500	45515	45530	45545	45561	45576	45591	45606	45621
286	45637	45652	45667	45682	45697	45712	45728	45743	45758	45773
287	45788	45803	45818	45834	45849	45864	45879	45894	45909	45924
288	45939	45954	45969	45984	46000	46015	46030	46045	46060	46075
289	46090	46105	46120	46135	46150	46165	46180	46195	46210	46225
290	46240	46255	46270	46285	46300	46315	46330	46345	46359	46374
291	46389	46404	46419	46434	46449	46464	46479	46494	46509	46523
292	46538	46553	46568	46583	46598	46613	46627	46642	46657	46672
293	46687	46702	46716	46731	46746	46761	46776	46790	46805	46820
294	46835	46850	[illegible]	46879	46894	46909	46923	46938	46953	46967
295	46982	[illegible]	47012	47026	47041	47056	47070	47085	47100	47114
296	47129	47144	47159	47173	47188	47202	47217	47232	47246	47261
297	47276	47290	47305	47319	47334	47349	47363	47378	47392	47407
298	47422	47436	47451	47465	47480	47494	47509	47524	47538	47553
299	47567	47582	47596	47611	47625	47640	47654	47669	47683	47698
300	47712	47727	47741	47756	47770	47784	47799	47813	47828	47842
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

260—300

300—340

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47712	47727	47741	47756	47770	47784	47799	47813	47828	47842
301	47857	47871	47885	47900	47914	47929	47943	47958	47972	47986
302	48001	48015	48029	48044	48058	48073	48087	48101	48116	48130
303	48144	48159	48173	48187	48202	48216	48230	48244	48259	48273
304	48287	48302	48316	48330	48344	48359	48373	48387	48401	48416
305	48430	48444	48458	48473	48487	48501	48515	48530	48544	48558
306	48572	48586	48601	48615	48629	48643	48657	48671	48686	48700
307	48714	48728	48742	48756	48770	48785	48799	48813	48827	48841
308	48855	48869	48883	48897	48911	48926	48940	48954	48968	48982
309	48996	49010	49024	49038	49052	49066	49080	49094	49108	49122
310	49136	49150	49164	49178	49192	49206	49220	49234	49248	49262
311	49276	49290	49304	49318	49332	49346	49360	49374	49388	49402
312	49415	49429	49443	49457	49471	49485	49499	49513	49527	49541
313	49554	49568	49582	49596	49610	49624	49638	49651	49665	49679
314	49693	49707	49721	49734	49748	49762	49776	49790	49803	49817
315	49831	49845	49859	49872	49886	49900	49914	49927	49941	49955
316	49969	49982	49996	50010	50024	50037	50051	50065	50079	50092
317	50106	50120	50133	50147	50161	50174	50188	50202	50215	50229
318	50243	50256	50270	50284	50297	50211	50325	50338	50352	50365
319	50379	50393	50406	50420	50433	50447	50461	50474	50488	50501
320	50515	50529	50542	50556	50569	50583	50596	50610	50623	50637
321	50651	50664	50678	50691	50705	50718	50732	50745	50759	50772
322	50786	50799	50813	50826	50840	50853	50866	50880	50893	50907
323	50920	50934	50947	50961	50974	50987	51001	51014	51028	51041
324	51055	51068	51081	51095	51108	51121	51135	51148	51162	51175
325	51188	51202	51215	51228	51242	51255	51268	51282	51295	51308
326	51322	51335	51348	51362	51375	51388	51402	51415	51428	51441
327	51455	51468	51481	51495	51508	51521	51534	51548	51561	51574
328	51587	51601	51614	51627	51640	51654	51667	51680	51693	51706
329	51720	51733	51746	51759	51772	51786	51799	51812	51825	51838
330	51851	51865	51878	51891	51904	51917	51930	51943	51957	51970
331	51983	51996	52009	52022	52035	52048	52061	52075	52088	52101
332	52114	52127	52140	52153	52166	52179	52192	52205	52218	52231
333	52244	52257	52270	52284	52297	52310	52323	52336	52349	52362
334	52375	52388	52401	52414	52427	52440	52453	52466	52479	52492
335	52504	52517	52530	52543	52556	52569	52582	52595	52608	52621
336	52634	52647	52660	52673	52686	52699	52711	52724	52737	52750
337	52763	52776	52789	52802	52815	52827	52840	52853	52866	52879
338	52892	52905	52917	52930	52943	52956	52969	52982	52994	53007
339	53020	53033	53046	53058	53071	53084	53097	53110	53122	53135
340	53148	53161	53173	53186	53199	53212	53224	53237	53250	53263
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

300—340

340—380

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
340	53148	53161	53173	53186	53199	53212	53224	53237	53250	53263
341	53275	53288	53301	53314	53326	53339	53352	53364	53377	53390
342	53403	53415	53428	53441	53453	53466	53479	53491	53504	53517
343	53529	53542	53555	53567	53580	53593	53605	53618	53631	53643
344	53656	53668	53681	53694	53706	53719	53732	53744	53757	53769
345	53782	53794	53807	53820	53832	53845	53857	53870	53882	53895
346	53908	53920	53933	53945	53958	53970	53983	53995	54008	54020
347	54033	54045	54058	54070	54083	54095	54108	54120	54133	54145
348	54158	54170	54183	54195	54208	54220	54233	54245	54258	54270
349	54283	54295	54307	54320	54332	54345	54357	54370	54382	54394
350	54407	54419	54432	54444	54456	54469	54481	54494	54506	54518
351	54531	54543	54555	54568	54580	54593	54605	54617	54630	54642
352	54654	54667	54679	54691	54704	54716	54728	54741	54753	54765
353	54777	54790	54802	54814	54827	54839	54851	54864	54876	54888
354	54900	54913	54925	54937	54949	54962	54974	54986	54998	55011
355	55023	55035	55047	55060	55072	55084	55096	55108	55121	55133
356	55145	55157	55169	55182	55194	55206	55218	55230	55242	55255
357	55267	55279	55291	55303	55315	55328	55340	55352	55364	55376
358	55388	55400	55413	55425	55437	55449	55461	55473	55485	55497
359	55509	55522	55534	55546	55558	55570	55582	55594	55606	55618
360	55630	55642	55654	55666	55678	55691	55703	55715	55727	55739
361	55751	55763	55775	55787	55799	55811	55863	55835	55847	55859
362	55871	55883	55895	55907	55919	55931	55943	55955	55967	55979
363	55991	56003	56015	56027	56038	56050	56062	56074	56086	56098
364	56110	56122	56134	56146	56158	56170	56182	56194	56205	56217
365	56229	56241	56253	56265	56277	56289	56301	56312	56324	56336
366	56348	56360	56372	56384	56396	56407	56419	56431	56443	56455
367	56467	56478	56490	56502	56514	56526	56538	56549	56561	56573
368	56585	56597	56608	56620	56632	56644	56656	56667	56679	56691
369	56703	56714	56726	56738	56750	56761	56773	56785	56797	56808
370	56820	56832	56844	56855	56867	56879	56891	56902	56914	56926
371	56937	56949	56961	56972	56984	56996	57008	57019	57031	57043
372	57054	57066	57078	57089	57101	57113	57124	57136	57148	57159
373	57171	57183	57194	57206	57217	57229	57241	57252	57264	57276
374	57287	57299	57310	57322	57334	57345	57357	57368	57380	57392
375	57403	57415	57426	57438	57449	57461	57473	57484	57496	57507
376	57519	57530	57542	57553	57565	57576	57588	57600	57611	57623
377	57634	57646	57657	57669	57680	57692	57703	57715	57726	57738
378	57749	57761	57772	57784	57795	57807	57818	57830	57841	57852
379	57864	57875	57887	57898	57910	57921	57933	57944	57955	57967
380	57978	57990	58001	58013	58024	58035	58047	58058	58070	58081
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

340—380

380—420

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
380	57978	57990	58001	58013	58024	58035	58047	58058	58070	58081
381	58092	58104	58115	58127	58138	58149	58161	58172	58184	58195
382	58206	58218	58229	58240	58252	58263	58274	58286	58297	58309
383	58320	58331	58343	58354	58365	58377	58388	58399	58410	58422
384	58433	58444	58456	58467	58478	58490	58501	58512	58524	58535
385	58546	58557	58569	58580	58591	58602	58614	58625	58636	58647
386	58659	58670	58681	58692	58704	58715	58726	58737	58749	58760
387	58771	58782	58794	58805	58816	58827	58838	58850	58861	58872
388	58883	58894	58906	58917	58928	58939	58950	58961	58973	58984
389	58995	59006	59017	59028	59040	59051	59062	59073	59084	59095
390	59106	59118	59129	59140	59151	59162	59173	59184	59195	59207
391	59218	59229	59240	59251	59262	59273	59284	59295	59306	59318
392	59329	59340	59351	59362	59373	59384	59395	59406	59417	59428
393	59439	59450	59461	59472	59483	59494	59506	59517	59528	59539
394	59550	59561	59572	59583	59594	59605	59616	59627	59638	59649
395	59660	59671	59682	59693	59704	59715	59726	59737	59748	59759
396	59770	59780	59791	59802	59813	59824	59835	59846	59857	59868
397	59879	59890	59901	59912	59923	59934	59945	59956	59966	59977
398	59988	59999	60010	60021	60032	60043	60054	60065	60076	60086
399	60097	60108	60119	60130	60141	60152	60163	60173	60184	60195
400	60206	60217	60228	60239	60249	60260	60271	60282	60293	60304
401	60314	60325	60336	60347	60358	60369	60379	60390	60401	60412
402	60423	60433	60444	60455	60466	60477	60487	60498	60509	60520
403	60531	60541	60552	60563	60574	60584	60595	60606	60617	60627
404	60638	60649	60660	60670	60681	60692	60703	60713	60724	60735
405	60746	60756	60767	60778	60788	60799	60810	60821	60831	60842
406	60853	60863	60874	60885	60895	60906	60917	60927	60938	60949
407	60959	60970	60981	60991	61002	61013	61023	61034	61045	61055
408	61066	61077	61087	61098	61109	61119	61130	61140	61151	61162
409	61172	61183	61194	61204	61215	61225	61236	61247	61257	61268
410	61278	61289	61300	61310	61321	61331	61342	61352	61363	61374
411	61384	61395	61405	61416	61426	61437	61448	61458	61469	61479
412	61490	61500	61511	61521	61532	61542	61553	61563	61574	61584
413	61595	61606	61616	61627	61637	6 648	61658	61669	61679	61690
414	61700	61711	61721	61731	61742	61752	61763	61773	61784	61794
415	61805	61815	61826	61836	61847	61857	61868	61878	61888	61899
416	61909	61920	61930	61941	61951	61962	61972	61982	61993	62003
417	62014	62024	62034	62045	62055	62066	62076	62086	62097	62107
418	62118	62128	62138	62149	62159	62170	62180	62190	62201	62211
419	62221	62232	62242	62252	62263	62273	62284	62294	62304	62315
420	62325	62335	62346	62356	62366	62377	62387	62397	62408	62418
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

380—420

420—460

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
420	62325	62335	62346	62356	62366	62377	62387	62397	62408	62418
421	62428	62439	62449	62459	62469	62480	62490	62500	62511	62521
422	62531	62542	62552	62562	62572	62583	62593	62603	62613	62624
423	62634	62644	62655	62665	62675	62685	62696	62706	62716	62726
424	62737	62747	62757	62767	62778	62788	62798	62808	62818	62829
425	62839	62849	62859	62870	62880	62890	62900	62910	62921	62931
426	62941	62951	62961	62972	62982	62992	63002	63012	63022	63033
427	63043	63053	63063	63073	63083	63094	63104	63114	63124	63134
428	63144	63155	63165	63175	63185	63195	63205	63215	63225	63236
429	63246	63256	63266	63276	63286	63296	63306	63317	63327	63337
430	63347	63357	63367	63377	63387	63397	63407	63417	63428	63438
431	63448	63458	63468	63478	63488	63498	63508	63518	63528	63538
432	63548	63558	63568	63579	63589	63599	63609	63619	63629	63639
433	63649	63659	63669	63679	63689	63699	63709	63719	63729	63739
434	63749	63759	63769	63779	63789	63799	63809	63819	63829	63839
435	63849	63859	63869	63879	63889	63899	63909	63919	63929	63939
436	63949	63959	63969	63979	63988	63998	64008	64018	64028	64038
437	64048	64058	64068	64078	64088	64098	64108	64118	64128	64137
438	64147	64157	64167	64177	64187	64197	64207	64217	64227	64237
439	64246	64256	64266	64276	64286	64296	64306	64316	64326	64335
440	64345	64355	64365	64375	64385	64395	64404	64414	64424	64434
441	64444	64454	64464	64473	64483	64493	64503	64513	64523	64532
442	64542	64552	64562	64572	64582	64591	64601	64611	64621	64631
443	64640	64650	64660	64670	64680	64689	64699	64709	64719	64729
444	64738	64748	64758	64768	64777	64787	64797	64807	64816	64826
445	64836	64846	64856	64865	64875	64885	64895	64904	64914	64924
446	64933	64943	64953	64963	64972	64982	64992	65002	65011	65021
447	65031	65040	65050	65060	65070	65079	65089	65099	65108	65118
448	65128	65137	65147	65157	65167	65176	65186	65196	65205	65215
449	65225	65234	65244	65254	65263	65273	65283	65292	65302	65312
450	65321	65331	65341	65350	65360	65369	65379	65389	65398	65408
451	65418	65427	65437	65447	65456	65466	65475	65485	65495	65504
452	65514	65523	65533	65543	65552	65562	65571	65581	65591	65600
453	65610	65619	65629	65639	65648	65658	65667	65677	65686	65696
454	65706	65715	65725	65734	65744	65753	65763	65772	65782	65792
455	65801	65811	65820	65830	65839	65849	65858	65868	65877	65887
456	65896	65906	65916	65925	65935	65944	65954	65963	65973	65982
457	65992	66001	66011	66020	66030	66039	66049	66058	66068	66077
458	66087	66096	66106	66115	66124	66134	66143	66153	66162	66172
459	66181	66191	66200	66210	66219	66229	66238	66247	66257	66266
460	66276	66285	66295	66304	66314	66323	66332	66342	66351	66361
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

420—460

460—500

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
460	66276	66285	66295	66304	66314	66323	66332	66342	66351	66361
461	66370	66380	66389	66398	66408	66417	66427	66436	66445	66455
462	66464	66474	66483	66492	66502	66511	66521	66530	66539	66549
463	66558	66567	66577	66586	66596	66605	66614	66624	66633	66642
464	66652	66661	66671	66680	66689	66699	66708	66717	66727	66736
465	66745	66755	66764	66773	66783	66792	66801	66811	66820	66829
466	66839	66848	66857	66867	66876	66885	66894	66904	66913	66922
467	66932	66941	66950	66960	66969	66978	66987	66997	67006	67015
468	67025	67034	67043	67052	67062	67071	67080	67089	67099	67108
469	67117	67127	67136	67145	67154	67164	67173	67182	67191	67201
470	67210	67219	67228	67237	67247	67256	67265	67274	67284	67293
471	67302	67311	67321	67330	67339	67348	67357	67367	67376	67385
472	67394	67403	67413	67422	67431	67440	67449	67459	67468	67477
473	67486	67495	67504	67514	67523	67532	67541	67550	67560	67569
474	67578	67587	67596	67605	67614	67624	67633	67642	67651	67660
475	67669	67679	67688	67697	67706	67715	67724	67733	67742	67752
476	67761	67770	67779	67788	67797	67806	67815	67825	67834	67843
477	67852	67861	67870	67879	67888	67897	67906	67916	67925	67934
478	67943	67952	67961	67970	67979	67988	67997	68006	68015	68024
479	68034	68043	68052	68061	68070	68079	68088	68097	68106	68115
480	68124	68133	68142	68151	68160	68169	68178	68187	68196	68205
481	68215	68224	68233	68242	68251	68260	68269	68278	68287	68296
482	68305	68314	68323	68332	68341	68350	68359	68368	68377	68386
483	68395	68404	68413	68422	68431	68440	68449	68458	68467	68476
484	68485	68494	68502	68511	68520	68529	68538	68547	68556	68565
485	68574	68583	68592	68601	68610	68619	68628	68637	68646	68655
486	68664	68673	68681	68690	68699	68708	68717	68726	68735	68744
487	68753	68762	68771	68780	68789	68797	68806	68815	68824	68833
488	68842	68851	68860	68869	68878	68886	68895	68904	68913	68922
489	68931	68940	68949	68958	68966	68975	68984	68993	69002	69011
490	69020	69028	69037	69046	69055	69064	69073	69082	69090	69099
491	69108	69117	69126	69135	69144	69152	69161	69170	69179	69188
492	69197	69205	69214	69223	69232	69241	69249	69258	69267	69276
493	69285	69294	69302	69311	69320	69329	69338	69346	69355	69364
494	69373	69381	69390	69399	69408	69417	69425	69434	69443	69452
495	69461	69469	69478	69487	69496	69504	69513	69522	69531	69539
496	69548	69557	69566	69574	69583	69592	69601	69609	69618	69627
497	69636	69644	69653	69662	69671	69679	69688	69697	69705	69714
498	69723	69732	69740	69749	69758	69767	69775	69784	69793	69801
499	69810	69819	69827	69836	69845	69854	69862	69871	69880	69888
500	69897	69906	69914	69923	69932	69940	69949	69958	69966	69975
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

500—540

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	69906	69914	69923	69932	69940	69949	69958	69966	69975
501	69984	69992	70001	70010	70018	70027	70036	70044	70053	70062
502	70070	70079	70088	70096	70105	70114	70122	70131	70140	70148
503	70157	70165	70174	70183	70191	70200	70209	70217	70226	70234
504	70243	70252	70260	70269	70278	70286	70295	70303	70312	70321
505	70329	70338	70346	70355	70364	70372	70381	70389	70398	70406
506	70415	70424	70432	70441	70449	70458	70467	70475	70484	70492
507	70501	70509	70518	70526	70535	70544	70552	70561	70569	70578
208	70586	70595	70603	70612	70621	70629	70638	70646	70655	70663
509	70672	70680	70689	70697	70706	70714	70723	70731	70740	70749
510	70757	70766	70774	70783	70791	70800	70808	70817	70825	70834
511	70842	70851	70859	70868	70876	70885	70893	70902	70910	70919
512	70927	70935	70944	70952	70961	70969	70978	70986	70995	71003
513	71012	71020	71029	71037	71046	71054	71063	71071	71079	71088
514	71096	71105	71113	71122	71130	71139	71147	71155	71164	71172
515	71181	71189	71198	71206	71214	71223	71231	71240	71248	71257
516	71265	71273	71282	71290	71299	71307	71315	71324	71332	71341
517	71349	71357	71366	71374	71383	71391	71399	71408	71416	71425
518	71433	71441	71450	71458	71466	71475	71483	71492	71500	71508
519	71517	71525	71533	71542	71550	71559	71567	71575	71584	71592
520	71600	71609	71617	71625	71634	71642	71650	71659	71667	71675
521	71684	71692	71700	71709	71717	71725	71734	71742	71750	71759
522	71767	71775	71784	71792	71800	71809	71817	71825	71834	71842
523	71850	71858	71867	71875	71883	71892	71900	71908	71917	71925
524	71933	71941	71950	71958	71966	71975	71983	71991	71999	72008
525	72016	72024	72032	72041	72049	72057	72066	72074	72082	72090
526	72099	72107	72115	72123	72132	72140	72148	72156	72165	72173
527	72181	72189	72198	72206	72214	72222	72230	72239	72247	72255
528	72263	72272	72280	72288	72296	72304	72313	72321	72329	72337
529	72346	72354	72362	72370	72378	72387	72395	72403	72411	72419
530	72428	72436	72444	72452	72460	72469	72477	72485	72493	72501
531	72509	72518	72526	72534	72542	72550	72558	72567	72575	72583
532	72591	72599	72607	72616	72624	72632	72640	72648	72656	72665
533	72673	72681	72689	72697	72705	72713	72722	72730	72738	72746
534	72754	72762	72770	72779	72787	72795	72803	72811	72819	72827
535	72835	72843	72852	72860	72868	72876	72884	72892	72900	72908
536	72916	72925	72933	72941	72949	72957	72965	72973	72981	72989
537	72997	73006	73014	73022	73030	73038	73046	73054	73062	73070
538	73078	73086	73094	73102	73111	73119	73127	73135	73143	73151
539	73159	73167	73175	73183	73191	73199	73207	73215	73223	73231
540	73239	73247	73255	73263	73272	73280	73288	73296	73304	73312
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

540—580

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
540	73239	73247	73255	73263	73272	73280	73288	73296	73304	73312
541	73320	73328	73336	73344	73352	73360	73368	73376	73384	73392
542	73400	73408	73416	73424	73432	73440	73448	73456	73464	73472
543	73480	73488	73496	73504	73512	73520	73528	73536	73544	73552
544	73560	73568	73576	73584	73592	73600	73608	73616	73624	73632
545	73640	73648	73656	73664	73672	73679	73687	73695	73703	73711
546	73719	73727	73735	73743	73751	73759	73767	73775	73783	73791
547	73799	73807	73815	73823	73830	73838	73846	73854	73862	73870
548	73878	73886	73894	73902	73910	73918	73926	73933	73941	73949
549	73957	73965	73973	73981	73989	73997	74005	74013	74020	74028
550	74036	74044	74052	74060	74068	74076	74084	74092	74099	74107
551	74115	74123	74131	74139	74147	74155	74162	74170	74178	74186
552	74194	74202	74210	74218	74225	74233	74241	74249	74257	74265
553	74273	74280	74288	74296	74304	74312	74320	74327	74335	74343
554	74351	74359	74367	74374	74382	74390	74398	74406	74414	74421
555	74429	74437	74445	74453	74461	74468	74476	74484	74492	74500
556	74507	74515	74523	74531	74539	74547	74554	74562	74570	74578
557	74586	74593	74601	74609	74617	74624	74632	74640	74648	74656
558	74663	74671	74679	74687	74695	74702	74710	74718	74726	74733
559	74741	74749	74757	74764	74772	74780	74788	74796	74803	74811
560	74819	74827	74834	74842	74850	74858	74865	74873	74881	74889
561	74896	74904	74912	74920	74927	74935	74943	74950	74958	74966
562	74974	74981	74989	74997	75005	75012	75020	75028	75035	75043
563	75051	75059	75066	75074	75082	75089	75097	75105	75113	75120
564	75128	75136	75143	75151	75159	75166	75174	75182	75189	75197
565	75205	75213	75220	75228	75236	75243	75251	75259	75266	75274
566	75282	75289	75297	75305	75312	75320	75328	75335	75343	75351
567	75358	75366	75374	75381	75389	75397	75404	75412	75420	75427
568	75435	75442	75450	75458	75465	75473	75481	75488	75496	75504
569	75511	75519	75526	75534	75542	75549	75557	75565	75572	75580
570	75587	75595	75603	75610	75618	75626	75633	75641	75648	75656
571	75664	75671	75679	75686	75694	75702	75709	75717	75724	75732
572	75740	75747	75755	75762	75770	75778	75785	75793	75800	75808
573	75815	75823	75831	75838	75846	75853	75861	75868	75876	75884
574	75891	75899	75906	75914	75921	75929	75937	75944	75952	75959
575	75967	75974	75982	75989	75997	76005	76012	76020	76027	76035
576	76042	76050	76057	76065	76072	76080	76087	76095	76103	76110
577	76118	76125	76133	76140	76148	76155	76163	76170	76178	76185
578	76193	76200	76208	76215	76223	76230	76238	76245	76253	76260
579	76268	76275	76283	76290	76298	76305	76313	76320	76328	76335
580	76343	76350	76358	76365	76373	76380	76388	76395	76403	76410
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

540—580

580—620

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
580	76343	76350	76358	76365	76373	76380	76388	76395	76403	76410
581	76418	76425	76433	76440	76448	76455	76462	76470	76477	76485
582	76492	76500	76507	76515	76522	76530	76537	76545	76552	76559
583	76567	76574	76582	76589	76597	76604	76612	76619	76626	76634
584	76641	76649	76656	76664	76671	76678	76686	76693	76701	76708
585	76716	76723	76730	76738	76745	76753	76760	76768	76775	76782
586	76790	76797	76805	76812	76819	76827	76834	76842	76849	76856
587	76864	76871	76879	76886	76893	76901	76908	76916	76923	76930
588	76938	76945	76953	76960	76967	76975	76982	76989	76997	77004
589	77012	77019	77026	77034	77041	77048	77056	77063	77070	77078
590	77085	77093	77100	77107	77115	77122	77129	77137	77144	77151
591	77159	77166	77173	77181	77188	77195	77203	77210	77217	77225
592	77232	77240	77247	77254	77262	77269	77276	77283	77291	77298
593	77305	77313	77320	77327	77335	77342	77349	77357	77364	77371
594	77379	77386	77393	77401	77408	77415	77422	77430	77437	77444
595	77452	77459	77466	77474	77481	77488	77495	77503	77510	77517
596	77525	77532	77539	77546	77554	77561	77568	77576	77583	77590
597	77597	77605	77612	77619	77627	77634	77641	77648	77656	77663
598	77670	77677	77685	77692	77699	77706	77714	77721	77728	77735
599	77743	77750	77757	77764	77772	77779	77786	77793	77801	77808
600	77815	77822	77830	77837	77844	77851	77859	77866	77873	77880
601	77887	77895	77902	77909	77916	77924	77931	77938	77945	77952
602	77960	77967	77974	77981	77988	77996	78003	78010	78017	78025
603	78032	78039	78046	78053	78061	78068	78075	78082	78089	78097
604	78104	78111	78118	78125	78132	78140	78147	78154	78161	78168
605	78176	78183	78190	78197	78204	78211	78219	78226	78233	78240
606	78247	78254	78262	78269	78276	78283	78290	78297	78305	78312
607	78319	78326	78333	78340	78347	78355	78362	78369	78376	78383
608	78390	78398	78405	78412	78419	78426	78433	78440	78447	78455
609	78462	78469	78476	78483	78490	78497	78504	78512	78519	78526
610	78533	78540	78547	78554	78561	78569	78576	78583	78590	78597
611	78604	78611	78618	78625	78633	78640	78647	78654	78661	78668
612	78675	78682	78689	78696	78704	78711	78718	78725	78732	78739
613	78746	78753	78760	78767	78774	78781	78789	78796	78803	78810
614	78817	78824	78831	78838	78845	78852	78859	78866	78873	78880
615	78888	78895	78902	78909	78916	78923	78930	78937	78944	78951
616	78958	78965	78972	78979	78986	78993	79000	79007	79014	79021
617	79029	79036	79043	79050	79057	79064	79071	79078	79085	79092
618	79099	79106	79113	79120	79127	79134	79141	79148	79155	79162
619	79169	79176	79183	79190	79197	79204	79211	79218	79225	79232
620	79239	79246	79253	79260	79267	79274	79281	79288	79295	79302
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

580—620

620—660

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
620	79239	79246	79253	79260	79267	79274	79281	79288	79295	79302
621	79309	79316	79323	79330	79337	79344	79351	79358	79365	79372
622	79379	79386	79393	79400	79407	79414	79421	79428	79435	79442
623	79449	79456	79463	79470	79477	79484	79491	79498	79505	79511
624	79518	79525	79532	79539	79546	79553	79560	79567	79574	79581
625	79588	79595	79602	79609	79616	79623	79630	79637	79644	79650
626	79657	79664	79671	79678	79685	79692	79699	79706	79713	79720
627	79727	79734	79741	79748	79754	79761	79768	79775	79782	79789
628	79796	79803	79810	79817	79824	79831	79837	79844	79851	79858
629	79865	79872	79879	79886	79893	79900	79906	79913	79920	79927
630	79934	79941	79948	79955	79962	79969	79975	79982	79989	79996
631	80003	80010	80017	80024	80030	80037	80044	80051	80058	80065
632	80072	80079	80085	80092	80099	80106	80113	80120	80127	80134
633	80140	80147	80154	80161	80168	80175	80182	80188	80195	80202
634	80209	80216	80223	80229	80236	80243	80250	80257	80264	80271
635	80277	80284	80291	80298	80305	80312	80318	80325	80332	80339
636	80346	80353	80359	80366	80373	80380	80387	80393	80400	80407
637	80414	80421	80428	80434	80441	80448	80455	80462	80468	80475
638	80482	80489	80496	80502	80509	80516	80523	80530	80536	80543
639	80550	80557	80564	80570	80577	80584	80591	80598	80604	80611
640	80618	80625	80632	80638	80645	80652	80659	80665	80672	80679
641	80686	80693	80699	80706	80713	80720	80726	80733	80740	80747
642	80754	80760	80767	80774	80781	80787	80794	80801	80808	80814
643	80821	80828	80835	80841	80848	80855	80862	80868	80875	80882
644	80889	80895	80902	80909	80916	80922	80929	80936	80943	80949
645	80956	80963	80969	80976	80983	80990	80996	81003	81010	81017
646	81023	81030	81037	81043	81050	81057	81064	81070	81077	81084
647	81090	81097	81104	81111	81117	81124	81131	81137	81144	81151
648	81158	81164	81171	81178	81184	81191	81198	81204	81211	81218
649	81224	81231	81238	81245	81251	81258	81265	81271	81278	81285
650	81291	81298	81305	81311	81318	81325	81331	81338	81345	81351
651	81358	81365	81371	81378	81385	81391	81398	81405	81411	81418
652	81425	81431	81438	81445	81451	81458	81465	81471	81478	81485
653	81491	81498	81505	81511	81518	81525	81531	81538	81544	81551
654	81558	81564	81571	81578	81584	81591	81598	81604	81611	81617
655	81624	81631	81637	81644	81651	81657	81664	81671	81677	81684
656	81690	81697	81704	81710	81717	81723	81730	81737	81743	81750
657	81757	81763	81770	81776	81783	81790	81796	81803	81809	81816
658	81823	81829	81836	81842	81849	81856	81862	81869	81875	81882
659	81889	81895	81902	81908	81915	81921	81928	81935	81941	81948
660	81954	81961	81968	81974	81981	81987	81994	82000	82007	82014
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

620—660

660—700

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
660	81954	81961	81968	81974	81981	81987	81994	82000	82007	82014
661	82020	82027	82033	82040	82046	82053	82060	82066	82073	82079
662	82086	82092	82099	82105	82112	82119	82125	82132	82138	82145
663	82151	82158	82164	82171	82178	82184	82191	82197	82204	82210
664	82217	82223	82230	82236	82243	82249	82256	82263	82269	82276
665	82282	82289	82295	82302	82308	82315	82321	82328	82334	82341
666	82347	82354	82360	82367	82373	82380	82387	82393	82400	82406
667	82413	82419	82426	82432	82439	82445	82452	82458	82465	82471
668	82478	82484	82491	82497	82504	82510	82517	82523	82530	82536
669	82543	82549	82556	82562	82569	82575	82582	82588	82595	82601
670	82607	82614	82620	82627	82633	82640	82646	82653	82659	82666
671	82672	82679	82685	82692	82698	82705	82711	82718	82724	82730
672	82737	82743	82750	82756	82763	82769	82776	82782	82789	82795
673	82802	82808	82814	82821	82827	82834	82840	82847	82853	82860
674	82866	82872	82879	82885	82892	82898	82905	82911	82918	82924
675	82930	82937	82943	82950	82956	82963	82969	82975	82982	82988
676	82995	83001	83008	83014	83020	83027	83033	83040	83046	83052
677	83059	83065	83072	83078	83085	83091	83097	83104	83110	83117
678	83123	83129	83136	83142	83149	83155	83161	83168	83174	83181
679	83187	83193	83200	83206	83213	83219	83225	83232	83238	83245
680	83251	83257	83264	83270	83276	83283	83289	83296	83302	83308
681	83315	83321	83327	83334	83340	83347	83353	83359	83366	83372
682	83378	83385	83391	83398	83404	83410	83417	83423	83429	83436
683	83442	83448	83455	83461	83467	83474	83480	83487	83493	83499
684	83506	83512	83518	83525	83531	83537	83544	83550	83556	83563
685	83569	83575	83582	83588	83594	83601	83607	83613	83620	83626
686	83632	83639	83645	83651	83658	83664	83670	83677	83683	83689
687	83696	83702	83708	83715	83721	83727	83734	83740	83746	83753
688	83759	83765	83771	83778	83784	83790	83797	83803	83809	83816
689	83822	83828	83835	83841	83847	83853	83860	83866	83872	83879
690	83885	83891	83897	83904	83910	83916	83923	83929	83935	83942
691	83948	83954	83960	83967	83973	83979	83985	83992	83998	84004
692	84011	84017	84023	84029	84036	84042	84048	84055	84061	84067
693	84073	84080	84086	84092	84098	84105	84111	84117	84123	84130
694	84136	84142	84148	84155	84161	84167	84173	84180	84186	84192
695	84198	84205	84211	84217	84223	84230	84236	84242	84248	84255
696	84261	84267	84273	84280	84286	84292	84298	84305	84311	84317
697	84323	84330	84336	84342	84348	84354	84361	84367	84373	84379
698	84386	84392	84398	84404	84410	84417	84423	84429	84435	84442
699	84448	84454	84460	84466	84473	84479	84485	84491	84497	84504
700	84510	84516	84522	84528	84535	84541	84547	84553	84559	84566
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

660—700

700—740

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84510	84516	84522	84528	84535	84541	84547	84553	84559	84566
701	84572	84578	84584	84590	84597	84603	84609	84615	84621	84628
702	84634	84640	84646	84652	84658	84665	84671	84677	84683	84689
703	84696	84702	84708	84714	84720	84726	84733	84739	84745	84751
704	84757	84763	84770	84776	84782	84788	84794	84800	84807	84813
705	84819	84825	84831	84837	84844	84850	84856	84862	84868	84874
706	84880	84887	84893	84899	84905	84911	84917	84924	84930	84936
707	84942	84948	84954	84960	84967	84973	84979	84985	84991	84997
708	85003	85009	85016	85022	85028	85034	85040	85046	85052	85058
709	85065	85071	85077	85083	85089	85095	85101	85107	85114	85120
710	85126	85132	85138	85144	85150	85156	85163	85169	85175	85181
711	85187	85193	85199	85205	85211	85217	85224	85230	85236	85242
712	85248	85254	85260	85266	85272	85278	85285	85291	85297	85303
713	85309	85315	85321	85327	85333	85339	85345	85352	85358	85364
714	85370	85376	85382	85388	85394	85400	85406	85412	85418	85425
715	85431	85437	85443	85449	85455	85461	85467	85473	85479	85485
716	85491	85497	85503	85509	85516	85522	85528	85534	85540	85546
717	85552	85558	85564	85570	85576	85582	85588	85594	85600	85606
718	85612	85618	85625	85631	85637	85643	85649	85655	85661	85667
719	85673	85679	85685	85691	85697	85703	85709	85715	85721	85727
720	85733	85739	85745	85751	85757	85763	85769	85775	85781	85788
721	85794	85800	85806	85812	85818	85824	85830	85836	85842	85848
722	85854	85860	85866	85872	85878	85884	85890	85896	85902	85908
723	85914	85920	85926	85932	85938	85944	85950	85956	85962	85968
724	85974	85980	85986	85992	85998	86004	86010	86016	86022	86028
725	86034	86040	86046	86052	86058	86064	86070	86076	86082	86088
726	86094	86100	86106	86112	86118	86124	86130	86136	86141	86147
727	86153	86159	86165	86171	86177	86183	86189	86195	86201	86207
728	86213	86219	86225	86231	86237	86243	86249	86255	86261	86267
729	86273	86279	86285	86291	86297	86303	86308	86314	86320	86326
730	86332	86338	86344	86350	86356	86362	86368	86374	86380	86386
731	86392	86398	86404	86410	86415	86421	86427	86433	86439	86445
732	86451	86457	86463	86469	86475	86481	86487	86493	86499	86504
733	86510	86516	86522	86528	86534	86540	86546	86552	86558	86564
734	86570	86576	86581	86587	86593	86599	86605	86611	86617	86623
735	86629	86635	86641	86646	86652	86658	86664	86670	86676	86682
736	86688	86694	86700	86705	86711	86717	86723	86729	86735	86741
737	86747	86753	86759	86764	86770	86776	86782	86788	86794	86800
738	86806	86812	86817	86823	86829	86835	86841	86847	86853	86859
739	86864	86870	86876	86882	86888	86894	86900	86906	86911	86917
740	86923	86929	86935	86941	86947	86953	86958	86964	86970	86976
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

700—740

740—780

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
740	86923	86929	86935	86941	86947	86953	86958	86964	86970	86976
741	86982	86988	86994	86999	87005	87011	87017	87023	87029	87035
742	87040	87046	87052	87058	87064	87070	87075	87081	87087	87093
743	87099	87105	87111	87116	87122	87128	87134	87140	87146	87151
744	87157	87163	87169	87175	87181	87186	87192	87198	87204	87210
745	87216	87221	87227	87233	87239	87245	87251	87256	87262	87268
746	87274	87280	87286	87291	87297	87303	87309	87315	87320	87326
747	87332	87338	87344	87349	87355	87361	87367	87373	87379	87384
748	87390	87396	87402	87408	87413	87419	87425	87431	87437	87442
749	87448	87454	87460	87466	87471	87477	87483	87489	87495	87500
750	87506	87512	87518	87523	87529	87535	87541	87547	87552	87558
751	87564	87570	87576	87581	87587	87593	87599	87604	87610	87616
752	87622	87628	87633	87639	87645	87651	87656	87662	87668	87674
753	87679	87685	87691	87697	87703	87708	87714	87720	87726	87731
754	87737	87743	87749	87754	87760	87766	87772	87777	87783	87789
755	87795	87800	87806	87812	87818	87823	87829	87835	87841	87846
756	87852	87858	87864	87869	87875	87881	87887	87892	87898	87904
757	87910	87915	87921	87927	87933	87938	87944	87950	87955	87961
758	87967	87973	87978	87984	87990	87996	88001	88007	88013	88018
759	88024	88030	88036	88041	88047	88053	88058	88064	88070	88076
760	88081	88087	88093	88098	88104	88110	88116	88121	88127	88133
761	88138	88144	88150	88156	88161	88167	88173	88178	88184	88190
762	88195	88201	88207	88213	88218	88224	88230	88235	88241	88247
763	88252	88258	88264	88270	88275	88281	88287	88292	88298	88304
764	88309	88315	88321	88326	88332	88338	88343	88349	88355	88360
765	88366	88372	88377	88383	88389	88395	88400	88406	88412	88417
766	88423	88429	88434	88440	88446	88451	88457	88463	88468	88474
767	88480	88485	88491	88497	88502	88508	88513	88519	88525	88530
768	88536	88542	88547	88553	88559	88564	88570	88576	88581	88587
769	88593	88598	88604	88610	88615	88621	88627	88632	88638	88643
770	88649	88655	88660	88666	88672	88677	88683	88689	88694	88700
771	88705	88711	88717	88722	88728	88734	88739	88745	88750	88756
772	88762	88767	88773	88779	88784	88790	88795	88801	88807	88812
773	88818	88824	88829	88835	88840	88846	88852	88857	88863	88868
774	88874	88880	88885	88891	88897	88902	88908	88913	88919	88925
775	88930	88936	88941	88947	88953	88958	88964	88969	88975	88981
776	88986	88992	88997	89003	89009	89014	89020	89025	89031	89037
777	89042	89048	89053	89059	89064	89070	89076	89081	89087	89092
778	89098	89104	89109	89115	89120	89126	89131	89137	89143	89148
779	89154	89159	89165	89170	89176	89182	89187	89193	89198	89204
780	89209	89215	89221	89226	89232	89237	89243	89248	89254	89260
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

780—820

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
780	89209	89215	89221	89226	89232	89237	89243	89248	89254	89260
781	89265	89271	89276	89282	89287	89293	89298	89304	89310	89315
782	89321	89326	89332	89337	89343	89348	89354	89360	89365	89371
783	89376	89382	89387	89393	89398	89404	89409	89415	89421	89426
784	89432	89437	89443	89448	89454	89459	89465	89470	89476	89481
785	89487	89492	89498	89504	89509	89515	89520	89526	89531	89537
786	89542	89548	89553	89559	89564	89570	89575	89581	89586	89592
787	89597	89603	89609	89614	89620	89625	89631	89636	89642	89647
788	89653	89658	89664	89669	89675	89680	89686	89691	89697	89702
789	89708	89713	89719	89724	89730	89735	89741	89746	89752	89757
790	89763	89768	89774	89779	89785	89790	89796	89801	89807	89812
791	89818	89823	89829	89834	89840	89845	89851	89856	89862	89867
792	89873	89878	89883	89889	89894	89900	89905	89911	89916	89922
793	89927	89933	89938	89944	89949	89955	89960	89966	89971	89977
794	89982	89988	89993	89998	90004	90009	90015	90020	90026	90031
795	90037	90042	90048	90053	90059	90064	90069	90075	90080	90086
796	90091	90097	90102	90108	90115	90119	90124	90129	90135	90140
797	90146	90151	90157	90162	90168	90173	90179	90184	90189	90195
798	90200	90206	90211	90217	90222	90227	90233	90238	90244	90249
799	90255	90260	90266	90271	90276	90282	90287	90293	90298	90304
800	90309	90314	90320	90325	90331	90336	90342	90347	90352	90358
801	90363	90369	90374	90380	90385	90390	90396	90401	90407	90412
802	90417	90423	90428	90434	90439	90445	90450	90455	90461	90466
803	90472	90477	90482	90488	90493	90499	90504	90509	90515	90520
804	90526	90531	90536	90542	90547	90553	90558	90563	90569	90574
805	90580	90585	90590	90596	90601	90607	90612	90617	90623	90628
806	90634	90639	90644	90650	90655	90660	90666	90671	90677	90682
807	90687	90693	90698	90703	90709	90714	90720	90725	90730	90736
808	90741	90747	90752	90757	90763	90768	90773	90779	90784	90789
809	90795	90800	90806	90811	90816	90822	90827	90832	90838	90843
810	90849	90854	90859	90865	90870	90875	90881	90886	90891	90897
811	90902	90907	90913	90918	90924	90929	90934	90940	90945	90950
812	90956	90961	90966	90972	90977	90982	90988	90993	90998	91004
813	91009	91014	91020	91025	91030	91036	91041	91046	91052	91057
814	91062	91068	91073	91078	91084	91089	91094	91100	91105	91110
815	91116	91121	91126	91132	91137	91142	91148	91153	91158	91164
816	91169	91174	91180	91185	91190	91196	91201	91206	91212	91217
817	91222	91228	91233	91238	91243	91249	91254	91259	91265	91270
818	91275	91281	91286	91291	91297	91302	91307	91312	91318	91323
819	91328	91334	91339	91344	91350	91355	91360	91365	91371	91376
820	91381	91387	91392	91397	91403	91408	91413	91418	91424	91429
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

780—820

820—860

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
820	91381	91387	91392	91397	91403	91408	91413	91418	91424	91429
821	91434	91440	91445	91450	91455	91461	91466	91471	91477	91482
822	91487	91492	91498	91503	91508	91514	91519	91524	91529	91535
823	91540	91545	91551	91556	91561	91566	91572	91577	91582	91587
824	91593	91598	91603	91609	91614	91619	91624	91630	91635	91640
825	91645	91651	91656	91661	91666	91672	91677	91682	91687	91693
826	91698	91703	91709	91714	91719	91724	91730	91735	91740	91745
827	91751	91756	91761	91766	91772	91777	91782	91787	91793	91798
828	91803	91808	91814	91819	91824	91829	91834	91840	91845	91850
829	91855	91861	91866	91871	91876	91882	91887	91892	91897	91903
830	91908	91913	91918	91924	91929	91934	91939	91944	91950	91955
831	91960	91965	91971	91976	91981	91986	91991	91997	92002	92007
832	92012	92018	92023	92028	92033	92038	92044	92049	92054	92059
833	92065	92070	92075	92080	92085	92091	92096	92101	92106	92111
834	92117	92122	92127	92132	92137	92143	92148	92153	92158	92163
835	92169	92174	92179	92184	92189	92195	92200	92205	92210	92215
836	92221	92226	92231	92236	92241	92247	92252	92257	92262	92267
837	92273	92278	92283	92288	92293	92298	92304	92309	92314	92319
838	92324	92330	92335	92340	92345	92350	92355	92361	92366	92371
839	92376	92381	92387	92392	92397	92402	92407	92412	92418	92423
840	92428	92433	92438	92443	92449	92454	92459	92464	92469	92474
841	92480	92485	92490	92495	92500	92505	92511	92516	92521	92526
842	92531	92536	92542	92547	92552	92557	92562	92567	92572	92578
843	92583	92588	92593	92598	92603	92609	92614	92619	92624	92629
844	92634	92639	92645	92650	92655	92660	92665	92670	92675	92681
845	92686	92691	92696	92701	92706	92711	92716	92722	92727	92732
846	92737	92742	92747	92752	92758	92763	92768	92773	92778	92783
847	92788	92793	92799	92804	92809	92814	92819	92824	92829	92834
848	92840	92845	92850	92855	92860	92865	92870	92875	92881	92886
849	92891	92896	92901	92909	92911	92916	92921	92927	92932	92937
850	92942	92947	92952	92957	92962	92967	92973	92978	92983	92988
851	92993	92998	93003	93008	93013	93018	93024	93029	93034	93039
852	93044	93049	93054	93059	93064	93069	93075	93080	93085	93090
853	93095	93100	93105	93110	93115	93120	93125	93131	93136	93141
854	93146	93151	93156	93161	93166	93171	93176	93181	93186	93192
855	93197	93202	93207	93212	93217	93222	93227	93232	93237	93242
856	93247	93252	93258	93263	93268	93273	93278	93283	93288	93293
857	93298	93303	93308	93313	93318	93323	93328	93334	93339	93344
858	93349	93354	93359	93364	93369	93374	93379	93384	93389	93394
859	93399	93404	93409	93414	93420	93425	93430	93435	93440	93445
860	93450	93455	93460	93465	93470	93475	93480	93485	93490	93495
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

820—860

860—900

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
860	93450	93455	93460	93465	93470	93475	93480	93485	93490	93495
861	93500	93505	93510	93515	93520	93526	93531	93536	93541	93546
862	93551	93556	93561	93566	93571	93576	93581	93586	93591	93596
863	93601	93606	93611	93616	93621	93626	93631	93636	93641	93646
864	93651	93656	93661	93666	93671	93676	93682	93687	93692	93697
865	93702	93707	93712	93717	93722	93727	93732	93737	93742	93747
866	93752	93757	93762	93767	93772	93777	93782	93787	93792	93797
867	93802	93807	93812	93817	93822	93827	93832	93837	93842	93847
868	93852	93857	93862	93867	93872	93877	93882	93887	93892	93897
869	93902	93907	93912	93917	93922	93927	93932	93937	93942	93947
870	93952	93957	93962	93967	93972	93977	93982	93987	93992	93997
871	94002	94007	94012	94017	94022	94027	94032	94037	94042	94047
872	94052	94057	94062	94067	94072	94077	94082	94086	94091	94096
873	94101	94106	94111	94116	94121	94126	94131	94136	94141	94146
874	94151	94156	94161	94166	94171	94176	94181	94186	94191	94196
875	94201	94206	94211	94216	94221	94226	94231	94236	94240	94245
876	94250	94255	94260	94265	94270	94275	94280	94285	94290	94295
877	94300	94305	94310	94315	94320	94325	94330	94335	94340	94345
878	94349	94354	94359	94364	94369	94374	94379	94384	94389	94394
879	94399	94404	94409	94414	94419	94424	94429	94434	94438	94443
880	94448	94453	94458	94463	94468	94473	94478	94483	94488	94493
881	94498	94503	94507	94512	94517	94522	94527	94532	94537	94542
882	94547	94552	94557	94562	94567	94571	94576	94581	94586	94591
883	94596	94601	94606	94611	94616	94621	94626	94630	94635	94640
884	94645	94650	94655	94660	94665	94670	94675	94680	94685	94689
885	94694	94699	94704	94709	94714	94719	94724	94729	94734	94738
886	94743	94748	94753	94758	94763	94768	94773	94778	94783	94787
887	94792	94797	94802	94807	94812	94817	94822	94827	94832	94836
888	94841	94846	94851	94856	94861	94866	94871	94876	94880	94885
889	94890	94895	94900	94905	94910	94915	94919	94924	94929	94934
890	94939	94944	94949	94954	94959	94963	94968	94973	94978	94983
891	94988	94993	94998	95002	95007	95012	95017	95022	95027	95032
892	95036	95041	95046	95051	95056	95061	95066	95071	95075	95080
893	95085	95090	95095	95100	95105	95109	95114	95119	95124	95129
894	95134	95139	95143	95148	95153	95158	95163	95168	95173	95177
895	95182	95187	95192	95197	95202	95207	95211	95216	95221	95226
896	95231	95236	95240	95245	95250	95255	95260	95265	95270	95274
897	95279	95284	95289	95294	95299	95303	95308	95313	95318	95323
898	95328	95332	95337	95342	95347	95352	95357	95361	95366	95371
899	95376	95381	95386	95390	95395	95400	95405	95410	95415	95419
900	95424	95429	95434	95439	95444	95448	95453	95458	95463	95468
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

900—940

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95424	95429	95434	95439	95444	95448	95453	95458	95463	95468
901	95472	95477	95482	95487	95492	95497	95501	95506	95511	95516
902	95521	95525	95530	95535	95540	95545	95550	95554	95559	95564
903	95569	95574	95578	95583	95588	95593	95598	95602	95607	95612
904	95617	95622	95626	95631	95636	95641	95646	95650	95655	95660
905	95665	95670	95674	95679	95684	95689	95694	95698	95703	95708
906	95713	95718	95722	95727	95732	95737	95742	95746	95751	95756
907	95761	95766	95770	95775	95780	95785	95789	95794	95799	95804
908	95809	95813	95818	95823	95828	95832	95837	95842	95847	95852
909	95856	95861	95866	95871	95875	95880	95885	95890	95895	95899
910	95904	95909	95914	95918	95923	95928	95933	95938	95942	95947
911	95952	95957	95961	95966	95971	95976	95980	95985	95990	95995
912	95999	96004	96009	96014	96019	96023	96028	96033	96038	96042
913	96047	96052	96057	96061	96066	96071	96076	96080	96085	96090
914	96095	96099	96104	96109	96114	96118	96123	96128	96133	96137
915	96142	96147	96152	96156	96161	96166	96171	96175	96180	96185
916	96190	96194	96199	96204	96209	96213	96218	96223	96227	96232
917	96237	96242	96246	96251	96256	96261	96265	96270	96275	96280
918	96284	96289	96294	96298	96303	96308	96313	96317	96322	96327
919	96332	96336	96341	96346	96350	96355	96360	96365	96369	96374
920	96379	96384	96388	96393	96398	96402	96407	96412	96417	96421
921	96426	96431	96435	96440	96445	96450	96454	96459	96464	96468
922	96473	96478	96483	96487	96492	96497	96501	96506	96511	96515
923	96520	96525	96530	96534	96539	96544	96548	96553	96558	96562
924	96567	96572	96577	96581	96586	96591	96595	96600	96605	96609
925	96614	96619	96624	96628	96633	96638	96642	96647	96652	96656
926	96661	96666	96670	96675	96680	96685	96689	96694	96699	96703
927	96708	96713	96717	96722	96727	96731	96736	96741	96745	96750
928	96755	96759	96764	96769	96774	96778	96783	96788	96792	96797
929	96802	96806	96811	96816	96820	96825	96830	96834	96839	96844
930	96848	96853	96858	96862	96867	96872	96876	96881	96886	96890
931	96895	96900	96904	96909	96914	96918	96923	96928	96932	96937
932	96942	96946	96951	96956	96960	96965	96970	96974	96979	96984
933	96988	96993	96997	97002	97007	97011	97016	97021	97025	97030
934	97035	97039	97044	97049	97053	97058	97063	97067	97072	97077
935	97081	97086	97090	97095	97100	97104	97109	97114	97118	97123
936	97128	97132	97137	97142	97146	97151	97155	97160	97165	97169
937	97174	97179	97183	97188	97192	97197	97202	97206	97211	97216
938	97229	97225	97230	97234	97239	97243	97248	97253	97257	97262
939	97267	97271	97276	97280	97285	97290	97294	97299	97304	97308
940	97313	97317	97322	97327	97331	97336	97340	97345	97350	97354
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

900—940

940—980

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
940	97313	97317	97322	97327	97331	97336	97340	97345	97350	97354
941	97359	97364	97368	97373	97377	97382	97387	97391	97396	97400
942	97405	97410	97414	97419	97424	97428	97433	97437	97442	97447
943	97451	97456	97460	97465	97470	97474	97479	97483	97488	97493
944	97497	97502	97506	97511	97516	97520	97525	97529	97534	97539
945	97543	97548	97552	97557	97562	97566	97571	97575	97580	97585
946	97589	97594	97598	97603	97607	97612	97617	97621	97626	97630
947	97635	97640	97644	97649	97653	97658	97663	97667	97672	97676
948	97681	97685	97690	97695	97699	97704	97708	97713	97717	97722
949	97727	97731	97736	97740	97745	97749	97754	97759	97763	97768
950	97772	97777	97782	97786	97791	97795	97800	97804	97809	97813
951	97818	97823	97827	97832	97836	97841	97845	97850	97855	97859
952	97864	97868	97873	97877	97882	97886	97891	97896	97900	97905
953	97909	97914	97918	97923	97928	97932	97937	97941	97946	97950
954	97955	97959	97964	97968	97973	97978	97982	97987	97991	97996
955	98000	98005	98009	98014	98019	98023	98028	98032	98037	98041
956	98046	98050	98055	98059	98064	98068	98073	98078	98082	98067
957	98091	98096	98100	98105	98109	98114	98118	98123	98127	98132
958	98137	98141	98146	98150	98155	98159	98164	98168	98173	98177
959	98182	98186	98191	98195	98200	98204	98209	98214	98218	98223
960	98227	98232	98236	98241	98245	98250	98254	98259	98263	98268
961	98272	98277	98281	98286	98290	98295	98299	98304	98308	98313
962	98318	98322	98327	98331	98336	98340	98345	98349	98354	98358
963	98363	98367	98372	98376	98381	98385	98390	98394	98399	98403
964	98408	98412	98417	98421	98426	98430	98435	98439	98444	98448
965	98453	98457	98462	98466	98471	98475	98480	98484	98489	98493
966	98498	98502	98507	98511	98516	98520	98525	98529	98534	98538
967	98543	98547	98552	98556	98561	98565	98570	98574	98579	98583
968	98588	98592	98597	98601	98605	98610	98614	98619	98623	98628
969	98632	98637	98641	98646	98650	98655	98659	98664	98668	98673
970	98677	98682	98686	98691	98695	98700	98704	98709	98713	98717
971	98722	98726	98731	98735	98740	98744	98749	98753	98758	98762
972	98767	98771	98776	98780	98784	98789	98793	98798	98802	98807
973	98811	98816	98820	98825	98829	98834	98838	98843	98847	98851
974	98856	98860	98865	98869	98874	98878	98883	98887	98892	98896
975	98900	98905	98909	98914	98918	98923	98927	98932	98936	98941
976	98945	98949	98954	98958	98963	98967	98972	98976	98981	98985
977	98989	98994	98998	99003	99007	99012	99016	99021	99025	99029
978	99034	99038	99043	99047	99052	99056	99061	99065	99069	99074
979	99078	99083	99087	99092	99086	99100	99105	99109	99114	99118
980	99123	99127	99131	99136	99140	99145	99149	99154	99158	99162
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

980—1000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
980	99123	99127	99131	99136	99140	99145	99149	99154	99158	99162
981	99167	99171	99176	99180	99185	99189	99193	99198	99202	99207
982	99211	99216	99220	99225	99229	99233	99238	99242	99247	99251
983	99255	99260	99264	99269	99273	99277	99282	99286	99291	99295
984	99300	99304	99308	99313	99317	99322	99326	99330	99335	99339
985	99344	99348	99352	99357	99361	99366	99370	99374	99379	99383
986	99398	99392	99396	99401	99405	99410	99414	99419	99423	99427
987	99432	99436	99441	99445	99449	99454	99458	99463	99467	99471
988	99476	99480	99484	99489	99493	99498	99502	99506	99511	99515
989	99520	99524	99528	99533	99537	99542	99546	99550	99555	99559
990	99564	99568	99572	99577	99581	99585	99590	99594	99599	99603
991	99607	99612	99616	99621	99625	99629	99634	99638	99642	99647
992	99651	99656	99660	99664	99669	99673	99677	99682	99686	99691
993	99695	99699	99704	99708	99712	99717	99721	99726	99730	99734
994	99739	99743	99747	99752	99756	99760	99765	99769	99774	99778
995	99782	99787	99791	99795	99800	99804	99808	99813	99817	99822
996	99826	99830	99835	99839	99843	99848	99852	99856	99861	99865
997	99870	99874	99878	99883	99887	99891	99896	99900	99904	99909
998	99913	99917	99922	99926	99930	99935	99939	99944	99948	99952
999	99957	99961	99965	99970	99974	99978	99983	99987	99991	99996
1000	00000	00004	00009	00013	00017	00022	00026	00030	00035	00039
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

980—1000

三角法諸表

三角函數之值

函數＼度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

特別角之三角函數

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{\pi}{12}=15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi=75°$
$\frac{\pi}{10}=18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}\pi=72°$
$\frac{\pi}{5}=36°$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{10}\pi=54°$
	cos	sin	cot	tan	

特別角之正弦

$\sin(3^\circ = \frac{1}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$\sin(6^\circ = \frac{1}{30}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$
$\sin(9^\circ = \frac{1}{20}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin(12^\circ = \frac{1}{15}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$\sin(15^\circ = \frac{1}{12}\pi)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\sin(18^\circ = \frac{1}{10}\pi)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$\sin(21^\circ = \frac{7}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin(24^\circ = \frac{2}{15}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin(27^\circ = \frac{3}{20}\pi)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$\sin(30^\circ = \frac{1}{6}\pi)$	$\frac{1}{2}$
$\sin(33^\circ = \frac{11}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$\sin(36^\circ = \frac{1}{5}\pi)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sin(39^\circ = \frac{13}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin(42^\circ = \frac{7}{30}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$
$\sin(45^\circ = \frac{1}{4}\pi)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin(48^\circ = \frac{4}{15}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3})$
$\sin(51^\circ = \frac{17}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$\sin(54^\circ = \frac{3}{10}\pi)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$\sin(57^\circ = \frac{19}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$
$\sin(60^\circ = \frac{1}{3}\pi)$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin(63^\circ = \frac{7}{20}\pi)$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$
$\sin(66^\circ = \frac{11}{30}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$
$\sin(69^\circ = \frac{23}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$
$\sin(72^\circ = \frac{2}{5}\pi)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sin(75^\circ = \frac{5}{12}\pi)$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$\sin(78^\circ = \frac{13}{30}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$
$\sin(81^\circ = \frac{9}{20}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$\sin(84^\circ = \frac{14}{30}\pi)$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\sin(87^\circ = \frac{29}{60}\pi)$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$

三角函數之眞數表

角		sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
0°	0′	.0000	.0000	1.000	∞	∞	1.000	0′	90°
	10′	.0029	.0029	1.000	343.8	343.8	1.000	50′	
	20′	.0058	.0058	1.000	171.9	171.9	1.000	40′	
	30′	.0087	.0087	1.000	114.6	114.6	1.000	30′	
	40′	.0116	.0116	1.000	85.95	85.94	.9999	20′	
	50′	.0145	.0145	1.000	68.76	68.75	.9999	10′	
1°	0′	.0175	.0175	1.000	57.30	57.29	.9998	0′	89°
	10′	.0204	.0204	1.000	49.11	49.10	.9998	50′	
	20′	.0233	.0233	1.000	42.98	42.96	.9997	40′	
	30′	.0262	.0262	1.000	38.20	38.19	.9997	30′	
	40′	.0291	.0291	1.000	34.38	34.37	.9996	20′	
	50′	.0320	.0320	1.001	31.26	31.24	.9995	10′	
2°	0′	.0349	.0349	1.001	28.65	28.64	.9994	0′	88°
	10′	.0378	.0378	1.001	26.45	26.43	.9993	50′	
	20′	.0407	.0407	1.001	24.56	24.54	.9992	40′	
	30′	.0436	.0437	1.001	22.93	22.90	.9990	30′	
	40′	.0465	.0466	1.001	21.49	21.47	.9989	20′	
	50′	.0494	.0495	1.001	20.23	20.21	.9988	10′	
3°	0′	.0523	.0524	1.001	19.11	19.08	.9986	0′	87°
	10′	.0552	.0553	1.002	18.10	18.07	.9985	50′	
	20′	.0581	.0582	1.002	17.20	17.17	.9983	40′	
	30′	.0610	.0612	1.002	16.38	16.35	.9981	30′	
	40′	.0640	.0641	1.002	15.64	15.60	.9980	20′	
	50′	.0669	.0670	1.002	14.96	14.92	.9978	10′	
4°	0′	.0698	.0699	1.002	14.34	14.30	.9976	0′	86°
	10′	.0727	.0729	1.003	13.76	13.73	.9974	50′	
	20′	.0756	.0758	1.003	13.23	13.20	.9971	40′	
	30′	.0785	.0787	1.003	12.75	12.71	.9969	30′	
	40′	.0814	.0816	1.003	12.29	12.25	.9967	20′	
	50′	.0843	.0846	1.004	11.87	11.83	.9964	10′	
5°	0′	.0872	.0875	1.004	11.47	11.43	.9962	0′	85°
		cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

三角函數之眞數表

角		sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
5°	0′	.0872	.0875	1.004	11.47	11.43	.9962	0′	85°
	10′	.0901	.0904	1.004	11.10	11.06	.9959	50	
	20′	.0929	.0934	1.004	10.76	10.71	.9957	40′	
	30′	.0958	.0963	1.005	10.43	10.39	.9954	30′	
	40′	.0987	.0992	1.005	10.13	10.08	.9951	20′	
	50′	.1016	.1022	1.005	9.839	9.788	.9948	10′	
6°	0′	.1045	.1051	1.006	9.567	9.514	.9945	0′	84°
	10′	.1074	.1080	1.006	9.309	9.255	.9942	50′	
	20′	.1103	.1110	1.006	9.065	9.010	.9939	40′	
	30′	.1132	.1139	1.006	8.834	8.777	.9936	30′	
	40′	.1161	.1169	1.007	8.614	8.556	.9932	20′	
	50′	.1190	.1198	1.007	8.405	8.345	.9929	10′	
7°	0′	.1219	.1228	1.008	8.206	8.144	.9925	0′	83°
	10′	.1248	.1257	1.008	8.016	7.953	.9922	50′	
	20′	.1276	.1287	1.008	7.834	7.770	.9918	40′	
	30′	.1305	.1317	1.009	7.661	7.596	.9914	30′	
	40′	.1334	.1346	1.009	7.496	7.429	.9911	20′	
	50′	.1363	.1376	1.009	7.337	7.269	.9907	10′	
8°	0′	.1392	.1405	1.010	7.185	7.115	.9903	0′	82°
	10′	.1421	.1435	1.010	7.040	6.968	.9899	50′	
	20′	.1449	.1465	1.011	6.900	6.827	.9894	40′	
	30′	.1478	.1495	1.011	6.765	6.691	.9890	30′	
	40′	.1507	.1524	1.012	6.636	6.561	.9886	20′	
	50′	.1536	.1554	1.012	6.512	6.435	.9881	10′	
9°	0′	.1564	.1584	1.012	6.392	6.314	.9877	0′	81°
	10′	.1593	.1614	1.013	6.277	6.197	.9872	50′	
	20′	.1622	.1644	1.013	6.166	6.084	.9868	40′	
	30′	.1650	.1673	1.014	6.059	5.976	.9863	30′	
	40′	.1679	.1703	1.014	5.955	5.871	.9858	20′	
	50′	.1708	.1733	1.015	5.855	5.769	.9853	10′	
10°	0′	.1736	.1763	1.015	5.759	5.671	.9848	0′	80°
		cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
10° 0′	.1736	.1763	1.015	5.759	5.671	.9848	0′ **80°**
10′	.1765	.1793	1.016	5.665	5.576	.9843	50′
20′	.1794	.1823	1.016	5.575	5.485	.9838	40′
30′	.1822	.1853	1.017	5.487	5.396	.9833	30′
40′	.1851	.1883	1.018	5.403	5.309	.9827	20′
50′	.1880	.1914	1.018	5.320	5.226	.9822	10′
11° 0′	.1908	.1944	1.019	5.241	5.145	.9816	0′ **79°**
10′	.1937	.1974	1.019	5.164	5.066	.9811	50′
20′	.1965	.2004	1.020	5.089	4.989	.9805	40′
30′	.1994	.2035	1.020	5.016	4.915	.9799	30′
40′	.2022	.2065	1.021	4.945	4.843	.9793	20′
50′	.2051	.2095	1.022	4.876	4.773	.9787	10′
12° 0′	.2079	.2126	1.022	4.810	4.705	.9781	0′ **78°**
10	.2108	.2156	1.023	4.745	4.638	.9775	50′
20′	.2136	.2186	1.024	4.682	4.574	.9769	40′
30′	.2164	.2217	1.024	4.620	4.511	.9763	30′
40′	.2193	.2247	1.025	4.560	4.449	.9757	20′
50′	.2221	.2278	1.026	4.502	4.390	.9750	10′
13° 0′	.2250	.2309	1.026	4.445	4.331	.9744	0 **77°**
10′	.2278	.2339	1.027	4.390	4.275	.9737	50′
20′	.2306	.2370	1.028	4.336	4.219	.9730	40′
30′	.2334	.2401	1.028	4.284	4.165	.9724	30′
40′	.2363	.2432	1.029	4.232	4.113	.9717	20′
50′	.2391	.2462	1.030	4.182	4.061	.9710	10′
14° 0′	.2419	.2493	1.031	4.134	4.011	.9703	0′ **76°**
10′	.2447	.2524	1.031	4.086	3.962	.9696	50′
20′	.2476	.2555	1.032	4.039	3.914	.9689	40′
30′	.2504	.2586	1.033	3.994	3.867	.9681	30′
40′	.2532	.2617	1.034	3.950	3.821	.9674	20′
50′	.2560	2648	1.034	3.906	3.776	.9667	10′
15° 0′	.2588	.2679	1.035	3.864	3.732	.9659	0′ **75°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
15° 0′	.2588	.2679	1.035	3.864	3.732	.9659	0′ 75°
10′	.2616	.2711	1.036	3.822	3.689	.9652	50′
20′	.2644	.2742	1.037	3.782	3.647	.9644	40′
30′	.2672	.2773	1.038	3.742	3.606	.9636	30′
40′	.2700	.2805	1.039	3.703	3.566	.9628	20′
50′	.2728	.2836	1.039	3.665	3.526	.9621	10′
16° 0′	.2756	.2867	1.040	3.628	3.487	.9613	0′ 74°
10′	.2784	.2899	1.041	3.592	3.450	.9605	50′
20′	.2812	.2931	1.042	3.556	3.412	.9596	40′
30′	.2840	.2962	1.043	3.521	3.376	.9588	30′
40′	.2868	.2994	1.044	3.487	3.340	.9580	20′
50′	.2896	.3026	1.045	3.453	3.305	.9572	10′
17° 0′	.2924	.3057	1.046	3.420	3.271	.9563	0′ 73°
10′	.2952	.3089	1.047	3.388	3.237	.9555	50′
20′	.2979	.3121	1.048	3.356	3.204	.9546	40′
30′	.3007	.3153	1.049	3.326	3.172	.9537	30′
40′	.3035	.3185	1.049	3.295	3.140	.9528	20′
50′	.3062	.3217	1.050	3.265	3.108	.9520	10′
18° 0′	.3090	.3249	1.051	3.236	3.078	.9511	0′ 72°
10′	.3118	.3281	1.052	3.207	3.047	.9502	50′
20′	.3145	.3314	1.053	3.179	3.018	.9492	40
30′	.3173	.3346	1.054	3.152	2.989	.9483	30′
40′	.3201	.3378	1.056	3.124	2.960	.9474	20′
50′	.3228	.3411	1.057	3.098	2.932	.9465	10′
19° 0	.3256	.3443	1.058	3.072	2.904	.9455	0′ 71°
10′	.3283	.3476	1.059	3.046	2.877	.9446	50′
20′	.3311	.3508	1.060	3.021	2.850	.9436	40′
30′	.3338	.3541	1.061	2.996	2.824	.9426	30′
40′	.3365	.3574	1.062	2.971	2.798	.9417	20′
50′	.3393	.3607	1.063	2.947	2.773	.9407	10′
20° 0′	.3420	.3640	1.064	2.924	2.747	.9397	0′ 70°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角		sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
20°	0′	.3420	.3640	1.064	2.924	2.747	.9397	0′	70°
	10′	.3448	.3673	1.065	2.901	2.723	.9387	50′	
	20′	.3475	.3706	1.066	2.878	2.699	.9377	40′	
	30′	.3502	.3739	1.068	2.855	2.675	.9367	30′	
	40′	.3529	.3772	1.069	2.833	2.651	.9356	20′	
	50′	.3557	.3805	1.070	2.812	2.628	.9346	10′	
21°	0′	.3584	.3839	1.071	2.790	2.605	.9336	0′	69°
	10′	.3611	.3872	1.072	2.769	2.583	.9325	50′	
	20′	.3638	.3906	1.074	2.749	2.560	.9315	40′	
	30′	.3665	.3939	1.075	2.729	2.539	.9304	30′	
	40′	.3692	.3973	1.076	2.709	2.517	.9293	20′	
	50′	.3719	.4006	1.077	2.689	2.496	.9283	10′	
22°	0′	.3746	.4040	1.079	2.669	2.475	.9272	0′	68°
	10′	.3773	.4074	1.080	2.650	2.455	.9261	50′	
	20′	.3800	.4108	1.081	2.632	2.434	.9250	40′	
	30′	.3827	.4142	1.082	2.613	2.414	.9239	30′	
	40′	.3854	.4176	1.084	2.595	2.394	.9228	20′	
	50′	.3881	.4210	1.085	2.577	2.375	.9216	10′	
23°	0′	.3907	.4245	1.086	2.595	2.356	.9205	0′	67°
	10′	.3934	.4279	1.088	2.542	2.337	.9194	50′	
	20′	.3961	.4314	1.089	2.525	2.318	.9182	40′	
	30′	.3987	.4348	1.090	2.508	2.300	.9171	30′	
	40′	.4014	.4383	1.092	2.491	2.282	.9159	20′	
	50′	.4041	.4417	1.093	2.475	2.264	.9147	10′	
24°	0′	.4067	.4452	1.095	2.459	2.246	.9135	0′	66°
	10′	.4094	.4487	1.096	2.443	2.229	.9124	50′	
	20′	.4120	.4522	1.097	2.427	2.211	.9112	40′	
	30′	.4147	.4557	1.099	2.411	2.194	.9100	30′	
	40′	.4173	.4592	1.100	2.396	2.177	.9088	20′	
	50′	.4200	.4628	1.102	2.381	2.161	.9075	10′	
25°	0′	.4226	.4663	1.103	2.366	2.145	.9063	0′	65°
		cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

三角函數之眞數表

角		sin	tan	sec	cosec	cot	cos		
25°	0′	.4226	.4663	1.103	2.366	2.145	.9063	0	65°
	10′	.4253	.4699	1.105	2.352	2.128	.9051	50′	
	20′	.4279	.4734	1.106	2.337	2.112	.9038	40′	
	30′	.4305	.4770	1.108	2.323	2.097	.9026	30′	
	40′	.4331	.4806	1.109	2.309	2.081	.9013	20′	
	50′	.4358	.4841	1.111	2.295	2.066	.9001	10′	
26°	0′	.4384	.4877	1.113	2.281	2.050	.8988	0′	64°
	10′	.4410	.4913	1.114	2.268	2.035	.8975	50′	
	20′	.4436	.4950	1.116	2.254	2.020	.8962	40′	
	30′	.4462	.4986	1.117	2.241	2.006	.8949	30′	
	40′	.4488	.5022	1.119	2.228	1.991	.8936	20′	
	50′	.4514	.5059	1.121	2.215	1.977	.8923	10′	
27°	0′	.4540	.5095	1.122	2.203	1.963	.8910	0′	63°
	10′	.4566	.5132	1.124	2.190	1.949	.8897	50′	
	20′	.4592	.5169	1.126	2.178	1.935	.8884	40′	
	30′	.4617	.5206	1.127	2.166	1.921	.8870	30′	
	40′	.4643	.5243	1.129	2.154	1.907	.8857	20′	
	50′	.4669	.5280	1.131	2.142	1.894	.8843	10′	
28°	0′	.4695	.5317	1.133	2.130	1.881	.8829	0′	62°
	10′	.4720	.5354	1.134	2.118	1.868	.8816	50′	
	20′	.4746	.5392	1.136	2.107	1.855	.8802	40′	
	30′	.4772	.5430	1.138	2.096	1.842	.8788	30′	
	40′	.4797	.5467	1.140	2.085	1.829	.8774	20′	
	50′	.4823	.5505	1.142	2.074	1.816	.8760	10′	
29°	0′	.4848	.5543	1.143	2.063	1.804	.8746	0′	61°
	10′	.4874	.5581	1.145	2.052	1.792	.8732	50′	
	20′	.4899	.5619	1.147	2.041	1.780	.8718	40′	
	30′	.4924	.5658	1.149	2.031	1.767	.8704	30′	
	40′	.4950	.5696	1.151	2.020	1.756	.8689	20′	
	50′	.4975	.5735	1.153	2.010	1.744	.8675	10′	
30°	0′	.5000	.5774	1.155	2.000	1.732	.8660	0′	60°
		cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角	

三角函數之真數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
30° 0′	.5000	.5774	1.155	2.000	1.732	.8660	0′ **60°**
10′	.5025	.5812	1.157	1.990	1.720	.8646	50′
20′	.5050	.5851	1.159	1.980	1.709	.8631	40′
30′	.5075	.5890	1.161	1.970	1.698	.8616	30′
40′	.5100	.5930	1.163	1.961	1.686	.8601	20′
50	.5125	.5969	1.165	1.951	1.675	.8587	10′
31° 0′	.5150	.6009	1.167	1.942	1.664	.8572	0′ **59°**
10′	.5175	.6048	1.169	1.932	1.653	.8557	50′
20′	.5200	.6088	1.171	1.923	1.643	.8542	40′
30′	.5225	.6128	1.173	1.914	1.632	.8526	30′
40′	.5250	.6168	1.175	1.905	1.621	.8511	20′
50′	.5275	.6208	1.177	1.896	1.611	.8496	10′
32° 0′	.5299	.6249	1.179	1.887	1.600	.8480	0′ **58°**
10′	.5324	.6289	1.181	1.878	1.590	.8465	50′
20′	.5348	.6330	1.184	1.870	1.580	.8450	40′
30′	.5373	.6371	1.186	1.861	1.570	.8434	30′
40′	.5398	.6412	1.188	1.853	1.560	.8418	20′
50′	.5422	.6453	1.190	1.844	1.550	.8403	10′
33° 0′	.5446	.6494	1.192	1.836	1.540	.8387	0′ **57°**
10′	.5471	.6536	1.195	1.828	1.530	.8371	50′
20′	.5495	.6577	1.197	1.820	1.520	.8355	40′
30′	.5519	.6619	1.199	1.812	1.511	.8339	30′
40′	.5544	.6661	1.202	1.804	1.501	.8323	20′
50′	.5568	.6703	1.204	1.796	1.492	.8307	10′
34° 0′	.5592	.6745	1.206	1.788	1.483	.8290	0′ **56°**
10′	.5616	.6787	1.209	1.781	1.473	.8274	50′
20′	.5640	.6830	1.211	1.773	1.464	.8258	40′
30′	.5664	.6873	1.213	1.766	1.455	.8241	30′
40′	.5688	.6916	1.216	1.758	1.446	.8225	20′
50′	.5712	.6959	1.218	1.751	1.437	.8208	10′
35° 0′	.5736	.7002	1.221	1.743	1.428	.8192	0′ **55°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
35° 0′	.5736	.7002	1.221	1.743	1.428	.8192	0′ 55°
10′	.5760	.7046	1.223	1.736	1.419	.8175	50′
20′	.5783	.7089	1.226	1.729	1.411	.8158	40′
30′	.5807	.7133	1.228	1.722	1.402	.8141	30′
40′	.5831	.7177	1.231	1.715	1.393	.8124	20′
50′	.5854	.7221	1.233	1.708	1.385	.8107	10′
36° 0′	.5878	.7265	1.236	1.701	1.376	.8090	0′ 54°
10′	.5901	.7310	1.239	1.695	1.368	.8073	50′
20′	.5925	.7355	1.241	1.688	1.360	.8056	40′
30′	.5948	.7400	1.244	1.681	1.351	.8039	30′
40′	.5972	.7445	1.247	1.675	1.343	.8021	20′
50′	.5995	.7490	1.249	1.668	1.335	.8004	10′
37° 0′	.6018	.7536	1.252	1.662	1.327	.7986	0′ 53°
10′	.6041	.7581	1.255	1.655	1.319	.7969	50′
20′	.6065	.7627	1.258	1.649	1.311	.7951	40′
30′	.6088	.7673	1.260	1.643	1.303	.7934	30′
40′	.6111	.7720	1.263	1.636	1.295	.7916	20′
50′	.6134	.7766	1.266	1.630	1.288	.7898	10′
38° 0′	.6157	.7813	1.269	1.624	1.280	.7880	0′ 52°
10′	.6180	.7860	1.272	1.618	1.272	.7862	50′
20′	.6202	.7907	1.275	1.612	1.265	.7844	40′
30′	.6225	.7954	1.278	1.606	1.257	.7826	30′
40′	.6248	.8002	1.281	1.601	1.250	.7808	20′
50′	.6271	.8050	1.284	1.595	1.242	.7790	10′
39° 0′	.6293	.8098	1.287	1.589	1.235	.7771	0′ 51°
10′	.6316	.8116	1.290	1.583	1.228	.7753	50′
20′	.6338	.8195	1.293	1.578	1.220	.7735	40′
30′	.6361	.8243	1.296	1.572	1.213	.7716	30′
40′	.6383	.8292	1.299	1.567	1.206	.7698	20′
50′	.6406	.8342	1.302	1.561	1.199	.7679	10′
40° 0′	.6428	.8391	1.305	1.556	1.192	.7660	0′ 50°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
40° 0′	.6428	.8391	1.305	1.556	1.192	.7660	0′ 50°
10′	.6450	.8441	1.309	1.550	1.185	.7642	50′
20′	.6472	.8491	1.312	1.545	1.178	.7623	40′
30′	.6494	.8541	1.315	1.540	1.171	.7604	30′
40′	.6517	.8591	1.318	1.535	1.164	.7585	20′
50′	.6539	.8642	1.322	1.529	1.157	.7566	10′
41° 0′	.6561	.8693	1.325	1.524	1.150	.7547	0′ 49°
10′	.6583	.8744	1.328	1.519	1.144	.7528	50′
20′	.6604	.8796	1.332	1.514	1.137	.7509	40′
30′	.6626	.8847	1.335	1.509	1.130	.7490	30′
40′	.6648	.8899	1.339	1.504	1.124	.7470	20′
50′	.6670	.8952	1.342	1.499	1.117	.7451	10′
42° 0′	.6691	.9004	1.346	1.494	1.111	.7431	0′ 48°
10′	.6713	.9057	1.349	1.490	1.104	.7412	50′
20′	.6734	.9110	1.353	1.485	1.098	.7392	40′
30′	.6756	.9163	1.356	1.480	1.091	.7373	30′
40′	.6777	.9217	1.360	1.476	1.085	.7353	20′
50′	.6799	.9271	1.364	1.471	1.079	.7333	10′
43° 0′	.6820	.9325	1.367	1.466	1.072	.7314	0′ 47°
10′	.6841	.9380	1.371	1.462	1.066	.7294	50′
20′	.6862	.9435	1.375	1.457	1.060	.7274	40′
30′	.6884	.9490	1.379	1.453	1.054	.7254	30′
40′	.6905	.9545	1.382	1.448	1.048	.7234	20′
50′	.6926	.9601	1.386	1.444	1.042	.7214	10′
44° 0′	.6947	.9657	1.390	1.440	1.036	.7193	0′ 46°
10′	.6967	.9713	1.394	1.435	1.030	.7173	50′
20′	.6988	.9770	1.398	1.431	1.024	.7153	40′
30′	.7009	.9827	1.402	1.427	1.018	.7133	30′
40′	.7030	.9884	1.406	1.423	1.012	.7112	20′
50′	.7050	.9942	1.410	1.418	1.006	.7092	10′
45° 0′	.7071	1.000	1.414	1.414	1.000	.7071	0′ 45°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數相互之關係

	$\sin\theta=x$	$\cos\theta=x$	$\tan\theta=x$	$\cot\theta=x$	$\sec\theta=x$	$\operatorname{cosec}\theta=x$
$\sin\theta=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$
$\tan\theta=$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\cot\theta=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$
$\sec\theta=$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\operatorname{cosec}^{-1}$
$\sin^{-1}x=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan^{-1}x=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\cot^{-1}x=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec^{-1}x=$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}^{-1}x=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

附 錄 二

雙曲線函數相互之關係

	sin hu=x	cos hu=x	tan hu=x	cot hu=x	sec hu=x	cosec hu=x
sin hu=	x	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
cos hu=	$\sqrt{(1+x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
tan hu=	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$
cot hu=	$\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
sec hu=	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
cosec hu=	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	x

三角函數之符號及其變化

函數＼象限	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 −1	負	由 −1 至 0
餘割		由 ∞ 至 1		由 1 至 ∞		由 −∞ 至 −1		由 −1 至 −∞
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 −1	負	由 −1 至 0	正	由 0 至 1
正割		由 1 至 ∞		由 −∞ 至 −1		由 −1 至 −∞		由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 −∞ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 −∞ 至 0
餘切		由 ∞ 至 0		由 0 至 −∞		由 ∞ 至 0		由 0 至 −∞

三角函數之對數表

角	log sin	log tan	log cot	log cos	
0° 0′	$-\infty$	$-\infty$	∞	0.0000	0′ 90°
10′	$\bar{3}.4637$	$\bar{3}.4637$	2.5363	0.0000	50′
20′	$\bar{3}.7648$	$\bar{3}.7648$	2.2352	0.0000	40′
30′	$\bar{3}.9408$	$\bar{3}.9409$	2.0591	0.0000	30′
40′	$\bar{2}.0658$	$\bar{2}.0658$	1.9342	0.0000	20′
50′	$\bar{2}.1627$	$\bar{2}.1627$	1.8373	0.0000	10′
1° 0′	$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.2419$	1.7581	$\bar{1}.9999$	0′ 89°
10′	$\bar{2}.3088$	$\bar{2}.3089$	1.6911	$\bar{1}.9999$	50′
20′	$\bar{2}.3668$	$\bar{2}.3669$	1.6331	$\bar{1}.9999$	40′
30′	$\bar{2}.4179$	$\bar{2}.4181$	1.5819	$\bar{1}.9999$	30′
40′	$\bar{2}.4637$	$\bar{2}.4638$	1.5362	$\bar{1}.9998$	20′
50′	$\bar{2}.5050$	$\bar{2}.5053$	1.4947	$\bar{1}.9998$	10′
2° 0′	$\bar{2}.5428$	$\bar{2}.5431$	1.4569	$\bar{1}.9997$	0′ 88°
10′	$\bar{2}.5776$	$\bar{2}.5779$	1.4221	$\bar{1}.9997$	50′
20′	$\bar{2}.6097$	$\bar{2}.6101$	1.3899	$\bar{1}.9996$	40′
30′	$\bar{2}.6397$	$\bar{2}.6401$	1.3599	$\bar{1}.9996$	30′
40′	$\bar{2}.6677$	$\bar{2}.6682$	1.3318	$\bar{1}.9995$	20′
50′	$\bar{2}.6940$	$\bar{2}.6945$	1.3055	$\bar{1}.9995$	10′
3° 0′	$\bar{2}.7188$	$\bar{2}.7194$	1.2806	$\bar{1}.9994$	0′ 87°
10′	$\bar{2}.7423$	$\bar{2}.7429$	1.2571	$\bar{1}.9993$	50′
20′	$\bar{2}.7645$	$\bar{2}.7652$	1.2348	$\bar{1}.9993$	40′
30′	$\bar{2}.7857$	$\bar{2}.7865$	1.2135	$\bar{1}.9992$	30′
40′	$\bar{2}.8059$	$\bar{2}.8067$	1.1933	$\bar{1}.9991$	20′
50′	$\bar{2}.8251$	$\bar{2}.8261$	1.1739	$\bar{1}.9990$	10′
4° 0′	$\bar{2}.8436$	$\bar{2}.8446$	1.1554	$\bar{1}.9989$	0′ 86°
10′	$\bar{2}.8613$	$\bar{2}.8624$	1.1376	$\bar{1}.9989$	50′
20′	$\bar{2}.8783$	$\bar{2}.8795$	1.1205	$\bar{1}.9988$	40′
30′	$\bar{2}.8946$	$\bar{2}.8960$	1.1040	$\bar{1}.9987$	30′
40′	$\bar{2}.9104$	$\bar{2}.9118$	1.0882	$\bar{1}.9986$	20′
50′	$\bar{2}.9256$	$\bar{2}.9272$	1.0728	$\bar{1}.9985$	10′
5° 0′	$\bar{2}.9403$	$\bar{2}.9420$	1.0580	$\bar{1}.9983$	0′ 85°
	log cos	log cot	log tan	log sin	角

$$\log \sin a' = \log a + \bar{4}.4637 + \tfrac{1}{3}\log \cos a'$$

$$\log \tan a' = \log a + \bar{4}.4637 - \tfrac{2}{3}\log \cos a'$$

$$\log \cos a' = -\log a + 3.5363 + \tfrac{2}{3}\log \cos a'$$

三角函數之對數表

角	log sin	log tan	log cot	log cos	
5° 0′	$\bar{2}.9403$	$\bar{2}.9420$	1.0580	$\bar{1}.9983$	0′ 85°
10′	$\bar{2}.9545$	$\bar{2}.9563$	1.0437	$\bar{1}.9982$	50′
20′	$\bar{2}.9682$	$\bar{2}.9701$	1.0299	$\bar{1}.9981$	40′
30′	$\bar{2}.9816$	$\bar{2}.9836$	1.0164	$\bar{1}.9980$	30′
40′	$\bar{2}.9945$	$\bar{2}.9966$	1.0034	$\bar{1}.9979$	20′
50′	$\bar{1}.0070$	$\bar{1}.0093$	0.9907	$\bar{1}.9977$	10′
6° 0′	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.0216$	0.9784	$\bar{1}.9976$	0′ 84°
10′	$\bar{1}.0311$	$\bar{1}.0336$	0.9664	$\bar{1}.9975$	50′
20′	$\bar{1}.0426$	$\bar{1}.0453$	0.9547	$\bar{1}.9973$	40′
30′	$\bar{1}.0539$	$\bar{1}.0567$	0.9433	$\bar{1}.9972$	30′
40′	$\bar{1}.0648$	$\bar{1}.0678$	0.9322	$\bar{1}.9971$	20′
50′	$\bar{1}.0755$	$\bar{1}.0786$	0.9214	$\bar{1}.9969$	10′
7° 0′	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.0891$	0.9109	$\bar{1}.9968$	0′ 83°
10′	$\bar{1}.0961$	$\bar{1}.0995$	0.9005	$\bar{1}.9966$	50′
20′	$\bar{1}.1060$	$\bar{1}.1096$	0.8904	$\bar{1}.9964$	40′
30′	$\bar{1}.1157$	$\bar{1}.1194$	0.8806	$\bar{1}.9963$	30′
40′	$\bar{1}.1252$	$\bar{1}.1291$	0.8709	$\bar{1}.9961$	20′
50′	$\bar{1}.1345$	$\bar{1}.1385$	0.8615	$\bar{1}.9959$	10′
8° 0′	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.1478$	0.8522	$\bar{1}.9958$	0′ 82°
10′	$\bar{1}.1525$	$\bar{1}.1569$	0.8431	$\bar{1}.9956$	50′
20′	$\bar{1}.1612$	$\bar{1}.1658$	0.8342	$\bar{1}.9954$	40′
30′	$\bar{1}.1697$	$\bar{1}.1745$	0.8255	$\bar{1}.9952$	30′
40′	$\bar{1}.1781$	$\bar{1}.1831$	0.8169	$\bar{1}.9950$	20′
50′	$\bar{1}.1863$	$\bar{1}.1915$	0.8085	$\bar{1}.9948$	10′
9° 0′	$\bar{1}.1943$	$\bar{1}.1997$	0.8003	$\bar{1}.9946$	0′ 81°
10′	$\bar{1}.2022$	$\bar{1}.2078$	0.7922	$\bar{1}.9944$	50′
20′	$\bar{1}.2100$	$\bar{1}.2158$	0.7842	$\bar{1}.9942$	40′
30′	$\bar{1}.2176$	$\bar{1}.2236$	0.7764	$\bar{1}.9940$	30′
40′	$\bar{1}.2251$	$\bar{1}.2313$	0.7687	$\bar{1}.9938$	20′
50′	$\bar{1}.2324$	$\bar{1}.2389$	0.7611	$\bar{1}.9936$	10′
10° 0′	$\bar{1}.2397$	$\bar{1}.2463$	0.7537	$\bar{1}.9934$	0′ 80°
	log cos	log cot	log tan	log sin	角

$$\log \sin a' = \log a + \bar{4}.4637 + \tfrac{1}{3}\log \cos a'$$

$$\log \tan a' = \log a + \bar{4}.4637 - \tfrac{2}{3}\log \cos a'$$

$$\log \cot a' = -\log a + 3.5363 + \tfrac{2}{3}\log \cos a'$$

三角函數之對數表

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
10° 0′	$\bar{1}$.2397		$\bar{1}$.2463		0.7537		$\bar{1}$.9934	0′ 80°
		71		73		3		
10′	$\bar{1}$.2468		$\bar{1}$.2536		0.7464		$\bar{1}$.9931	50′
		70		73		2		
20′	$\bar{1}$.2538		$\bar{1}$.2609		0.7391		$\bar{1}$.9929	40′
		68		71		2		
30′	$\bar{1}$.2606		$\bar{1}$.2680		0.7320		$\bar{1}$.9927	30′
		68		70		3		
40′	$\bar{1}$.2674		$\bar{1}$.2750		0.7250		$\bar{1}$.9924	20′
		66		69		2		
50′	$\bar{1}$.2740		$\bar{1}$.2819		0.7181		$\bar{1}$.9922	10′
		66		68		3		
11° 0′	$\bar{1}$.2806		$\bar{1}$.2887		0.7113		$\bar{1}$.9919	0′ 79°
		64		66		2		
10′	$\bar{1}$.2870		$\bar{1}$.2953		0.7047		$\bar{1}$.9917	50′
		64		67		3		
20′	$\bar{1}$.2934		$\bar{1}$.3020		0.6980		$\bar{1}$.9914	40′
		63		65		2		
30′	$\bar{1}$.2997		$\bar{1}$.3085		0.6915		$\bar{1}$.9912	30′
		61		64		3		
40′	$\bar{1}$.3058		$\bar{1}$.3149		0.6851		$\bar{1}$.9909	20′
		61		63		2		
50′	$\bar{1}$.3119		$\bar{1}$.3212		0.6788		$\bar{1}$.9907	10′
		60		63		3		
12° 0′	$\bar{1}$.3179		$\bar{1}$.3275		0.6725		$\bar{1}$.9904	0′ 78°
		59		61		3		
10′	$\bar{1}$.3238		$\bar{1}$.3336		0.6664		$\bar{1}$.9901	50′
		58		61		2		
20′	$\bar{1}$.3296		$\bar{1}$.3397		0.6603		$\bar{1}$.9899	40′
		57		61		3		
30′	$\bar{1}$.3353		$\bar{1}$.3458		0.6542		$\bar{1}$.9896	30′
		57		59		3		
40′	$\bar{1}$.3410		$\bar{1}$.3517		0.6483		$\bar{1}$.9893	20′
		56		59		3		
50′	$\bar{1}$.3466		$\bar{1}$.3576		0.6424		$\bar{1}$.9890	10′
		55		58		3		
13° 0′	$\bar{1}$.3521		$\bar{1}$.3634		0.6366		$\bar{1}$.9887	0′ 77°
		54		57		3		
10′	$\bar{1}$.3575		$\bar{1}$.3691		0.6309		$\bar{1}$.9884	50′
		54		57		3		
20′	$\bar{1}$.3629		$\bar{1}$.3748		0.6252		$\bar{1}$.9881	40′
		53		56		3		
30′	$\bar{1}$.3682		$\bar{1}$.3804		0.6196		$\bar{1}$.9878	30′
		52		55		3		
40′	$\bar{1}$.3734		$\bar{1}$.3859		0.6141		$\bar{1}$.9875	20′
		52		55		3		
50′	$\bar{1}$.3786		$\bar{1}$.3914		0.6086		$\bar{1}$.9872	10′
		51		54		3		
14° 0′	$\bar{1}$.3837		$\bar{1}$.3968		0.6032		$\bar{1}$.9869	0′ 76°
		50		53		3		
10′	$\bar{1}$.3887		$\bar{1}$.4021		0.5979		$\bar{1}$.9866	50′
		50		53		3		
20′	$\bar{1}$.3937		$\bar{1}$.4074		0.5926		$\bar{1}$.9863	40′
		49		53		4		
30′	$\bar{1}$.3986		$\bar{1}$.4127		0.5873		$\bar{1}$.9859	30′
		49		51		3		
40′	$\bar{1}$.4035		$\bar{1}$.4178		0.5822		$\bar{1}$.9856	20′
		48		52		3		
50′	$\bar{1}$.4083		$\bar{1}$.4230		0.5770		$\bar{1}$.9853	10′
		47		51		4		
15° 0′	$\bar{1}$.4130		$\bar{1}$.4281		0.5719		$\bar{1}$.9849	0′ 75°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

P.P.

	73	71
1	7.3	7.1
2	14.6	14.2
3	21.9	21.3
4	29.2	28.4
5	36.5	35.5
6	43.8	42.6
7	51.1	49.7
8	58.4	56.8
9	65.7	63.9

	65	63
1	6.5	6.3
2	13.0	12.6
3	19.5	18.9
4	26.0	25.2
5	32.5	31.5
6	39.0	37.8
7	45.5	44.1
8	52.0	50.4
9	58.5	56.7

	57	55
1	5.7	5.5
2	11.4	11.0
3	17.1	16.5
4	22.8	22.0
5	28.5	27.5
6	34.2	33.0
7	39.9	38.5
8	45.6	44.0
9	51.3	49.5

	49	47
1	4.9	4.7
2	9.8	9.4
3	14.7	14.1
4	19.6	18.8
5	24.5	23.5
6	29.4	28.2
7	34.3	32.9
8	39.2	37.6
9	44.1	42.3

	41	39
1	4.1	3.9
2	8.2	7.8
3	12.3	11.7
4	16.4	15.6
5	20.5	19.5
6	24.6	23.4
7	28.7	27.3
8	32.8	31.2
9	36.9	35.1

三角函數之對數表

P.P.

	69	67
1	6.9	6.7
2	13.8	13.4
3	20.7	20.1
4	27.6	26.8
5	34.5	33.5
6	41.4	40.2
7	48.3	46.9
8	55.2	53.6
9	62.1	60.3

	61	59
1	6.1	5.9
2	12.2	11.8
3	18.3	17.7
4	24.4	23.6
5	30.5	29.5
6	36.6	35.4
7	42.7	41.3
8	48.8	47.2
9	54.9	53.1

	53	51
1	5.3	5.1
2	10.6	10.2
3	15.9	15.3
4	21.2	20.4
5	26.5	25.5
6	31.8	30.6
7	37.1	35.7
8	42.4	40.8
9	47.7	45.9

	45	43
1	4.5	4.3
2	9.0	8.6
3	13.5	12.9
4	18.0	17.2
5	22.5	21.5
6	27.0	25.8
7	31.5	30.1
8	36.0	34.4
9	40.5	38.7

	37	35
1	3.7	3.5
2	7.4	7.0
3	11.1	10.5
4	14.8	14.0
5	18.5	17.5
6	22.2	21.0
7	25.9	24.5
8	29.6	28.0
9	33.3	31.5

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
15° 0′	$\bar{1}.4130$		$\bar{1}.4281$		0.5719		$\bar{1}.9849$	0′ 75°
		47		50		3		
10′	$\bar{1}.4177$		$\bar{1}.4331$		0.5669		$\bar{1}.9846$	50′
		46		50		3		
20′	$\bar{1}.4223$		$\bar{1}.4381$		0.5619		$\bar{1}.9843$	40′
		46		49		4		
30′	$\bar{1}.4269$		$\bar{1}.4430$		0.5570		$\bar{1}.9839$	30′
		45		49		3		
40′	$\bar{1}.4314$		$\bar{1}.4479$		0.5521		$\bar{1}.9836$	20′
		45		48		4		
50′	$\bar{1}.4359$		$\bar{1}.4527$		0.5473		$\bar{1}.9832$	10′
		44		48		4		
16° 0′	$\bar{1}.4403$		$\bar{1}.4575$		0.5425		$\bar{1}.9828$	0′ 74°
		44		47		3		
10′	$\bar{1}.4447$		$\bar{1}.4622$		0.5378		$\bar{1}.9825$	50′
		44		47		4		
20′	$\bar{1}.4491$		$\bar{1}.4669$		0.5331		$\bar{1}.9821$	40′
		42		47		4		
30′	$\bar{1}.4533$		$\bar{1}.4716$		0.5284		$\bar{1}.9817$	30′
		43		46		3		
40′	$\bar{1}.4576$		$\bar{1}.4762$		0.5238		$\bar{1}.9814$	20′
		42		46		4		
50′	$\bar{1}.4618$		$\bar{1}.4808$		0.5192		$\bar{1}.9810$	10′
		41		45		4		
17° 0′	$\bar{1}.4659$		$\bar{1}.4853$		0.5147		$\bar{1}.9806$	0′ 73°
		41		45		4		
10′	$\bar{1}.4700$		$\bar{1}.4898$		0.5102		$\bar{1}.9802$	50′
		41		45		4		
20′	$\bar{1}.4741$		$\bar{1}.4943$		0.5057		$\bar{1}.9798$	40′
		40		44		4		
30′	$\bar{1}.4781$		$\bar{1}.4987$		0.5013		$\bar{1}.9794$	30′
		40		44		4		
40′	$\bar{1}.4821$		$\bar{1}.5031$		0.4969		$\bar{1}.9790$	20′
		40		44		4		
50′	$\bar{1}.4861$		$\bar{1}.5075$		0.4925		$\bar{1}.9786$	10′
		39		43		4		
18° 0′	$\bar{1}.4900$		$\bar{1}.5118$		0.4882		$\bar{1}.9782$	0′ 72°
		39		43		4		
10′	$\bar{1}.4939$		$\bar{1}.5161$		0.4839		$\bar{1}.9778$	50′
		38		42		4		
20′	$\bar{1}.4977$		$\bar{1}.5203$		0.4797		$\bar{1}.9774$	40′
		38		42		4		
30′	$\bar{1}.5015$		$\bar{1}.5245$		0.4755		$\bar{1}.9770$	30′
		37		42		5		
40′	$\bar{1}.5052$		$\bar{1}.5287$		0.4713		$\bar{1}.9765$	20′
		38		42		4		
50′	$\bar{1}.5090$		$\bar{1}.5329$		0.4671		$\bar{1}.9761$	10′
		36		41		4		
19° 0′	$\bar{1}.5126$		$\bar{1}.5370$		0.4630		$\bar{1}.9757$	0′ 71°
		37		41		5		
10′	$\bar{1}.5163$		$\bar{1}.5411$		0.4589		$\bar{1}.9752$	50′
		36		40		4		
20′	$\bar{1}.5199$		$\bar{1}.5451$		0.4549		$\bar{1}.9748$	40′
		36		40		5		
30′	$\bar{1}.5235$		$\bar{1}.5491$		0.4509		$\bar{1}.9743$	30′
		35		40		4		
40′	$\bar{1}.5270$		$\bar{1}.5531$		0.4469		$\bar{1}.9739$	20′
		36		40		5		
50′	$\bar{1}.5306$		$\bar{1}.5571$		0.4429		$\bar{1}.9734$	10′
		35		40		4		
20° 0′	$\bar{1}.5341$		$\bar{1}.5611$		0.4389		$\bar{1}.9730$	0′ 70°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

三角函數之對數表

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
20° 0′	$\bar{1}.5341$		$\bar{1}.5611$		0.4389		$\bar{1}.9730$	0′ 70°
		34		39		5		
10′	$\bar{1}.5375$		$\bar{1}.5650$		0.4350		$\bar{1}.9725$	50′
		34		39		4		
20′	$\bar{1}.5409$		$\bar{1}.5689$		0.4311		$\bar{1}.9721$	40′
		34		38		5		
30′	$\bar{1}.5443$		$\bar{1}.5727$		0.4273		$\bar{1}.9716$	30′
		34		39		5		
40′	$\bar{1}.5477$		$\bar{1}.5766$		0.4234		$\bar{1}.9711$	20′
		33		38		5		
50′	$\bar{1}.5510$		$\bar{1}.5804$		0.4196		$\bar{1}.9706$	10′
		33		38		4		
21° 0′	$\bar{1}.5543$		$\bar{1}.5842$		0.4158		$\bar{1}.9702$	0′ 69°
		33		37		5		
10′	$\bar{1}.5576$		$\bar{1}.5879$		0.4121		$\bar{1}.9697$	50′
		33		38		5		
20′	$\bar{1}.5609$		$\bar{1}.5917$		0.4083		$\bar{1}.9692$	40′
		32		37		5		
30′	$\bar{1}.5641$		$\bar{1}.5954$		0.4046		$\bar{1}.9687$	30′
		32		37		5		
40′	$\bar{1}.5673$		$\bar{1}.5991$		0.4009		$\bar{1}.9682$	20′
		31		37		5		
50′	$\bar{1}.5704$		$\bar{1}.6028$		0.3972		$\bar{1}.9677$	10′
		32		36		5		
22° 0′	$\bar{1}.5736$		$\bar{1}.6064$		0.3936		$\bar{1}.9672$	0′ 68°
		31		36		5		
10′	$\bar{1}.5767$		$\bar{1}.6100$		0.3900		$\bar{1}.9667$	50′
		31		36		6		
20′	$\bar{1}.5798$		$\bar{1}.6136$		0.3864		$\bar{1}.9661$	40′
		30		36		5		
30′	$\bar{1}.5828$		$\bar{1}.6172$		0.3828		$\bar{1}.9656$	30′
		31		36		5		
40′	$\bar{1}.5859$		$\bar{1}.6208$		0.3792		$\bar{1}.9651$	20′
		30		35		5		
50′	$\bar{1}.5889$		$\bar{1}.6243$		0.3757		$\bar{1}.9646$	10′
		30		36		6		
23° 0′	$\bar{1}.5919$		$\bar{1}.6279$		0.3721		$\bar{1}.9640$	0′ 67°
		29		35		5		
10′	$\bar{1}.5948$		$\bar{1}.6314$		0.3686		$\bar{1}.9635$	50′
		30		34		6		
20′	$\bar{1}.5978$		$\bar{1}.6348$		0.3652		$\bar{1}.9629$	40′
		29		35		5		
30′	$\bar{1}.6007$		$\bar{1}.6383$		0.3617		$\bar{1}.9624$	30′
		29		34		6		
40′	$\bar{1}.6036$		$\bar{1}.6417$		0.3583		$\bar{1}.9618$	20′
		29		35		5		
50′	$\bar{1}.6065$		$\bar{1}.6452$		0.3548		$\bar{1}.9613$	10′
		28		34		6		
24° 0′	$\bar{1}.6093$		$\bar{1}.6486$		0.3514		$\bar{1}.9607$	0′ 66°
		28		34		5		
10′	$\bar{1}.6121$		$\bar{1}.6520$		0.3480		$\bar{1}.9602$	50′
		28		33		6		
20′	$\bar{1}.6149$		$\bar{1}.6553$		0.3447		$\bar{1}.9596$	40′
		28		34		6		
30′	$\bar{1}.6177$		$\bar{1}.6587$		0.3413		$\bar{1}.9590$	30′
		28		33		6		
40′	$\bar{1}.6205$		$\bar{1}.6620$		0.3380		$\bar{1}.9584$	20′
		27		34		5		
50′	$\bar{1}.6232$		$\bar{1}.6654$		0.3346		$\bar{1}.9579$	10′
		27		33		6		
25° 0′	$\bar{1}.6259$		$\bar{1}.6687$		0.3313		$\bar{1}.9573$	0′ 65°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

P.P.

	39	38
1	3.9	3.8
2	7.8	7.6
3	11.7	11.4
4	15.6	15.2
5	19.5	19.0
6	23.4	22.8
7	27.3	26.6
8	31.2	30.4
9	35.1	34.2

	35	34
1	3.5	3.4
2	7.0	6.8
3	10.5	10.2
4	14.0	13.6
5	17.5	17.0
6	21.0	20.4
7	24.5	23.8
8	28.0	27.2
9	31.5	30.6

	31	29
1	3.1	2.9
2	6.2	5.8
3	9.3	8.7
4	12.4	11.6
5	15.5	14.5
6	18.6	17.4
7	21.7	20.3
8	24.8	23.2
9	27.9	26.1

	26	25
1	2.6	2.5
2	5.2	5.0
3	7.8	7.5
4	10.4	10.0
5	13.0	12.5
6	15.6	15.0
7	18.2	17.5
8	20.8	20.0
9	23.4	22.5

	22	8
1	2.2	0.8
2	4.4	1.6
3	6.6	2.4
4	8.8	3.2
5	11.0	4.0
6	13.2	4.8
7	15.4	5.6
8	17.6	6.4
9	19.8	7.2

三角函數之對數表

P.P.

	37	36
1	3.7	3.6
2	7.4	7.2
3	11.1	10.8
4	14.8	14.4
5	18.5	18.0
6	22.2	21.6
7	25.9	25.2
8	29.6	28.8
9	33.3	32.4

	33	32
1	3.3	3.2
2	6.6	6.4
3	9.9	9.6
4	13.2	12.8
5	16.5	16.0
6	19.8	19.2
7	23.1	22.4
8	26.4	25.6
9	29.7	28.8

	28	27
1	2.8	2.7
2	5.6	5.4
3	8.4	8.1
4	11.2	10.8
5	14.0	13.5
6	16.8	16.2
7	19.6	18.9
8	22.4	21.6
9	25.2	24.3

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	6	4
1	0.6	0.4
2	1.2	0.8
3	1.8	1.2
4	2.4	1.6
5	3.0	2.0
6	3.6	2.4
7	4.2	2.8
8	4.8	3.2
9	5.4	3.6

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
25° 0′	$\bar{1}.6259$		$\bar{1}.6687$		0.3313		$\bar{1}.9573$	0′ 65°
		27		33		6		
10′	$\bar{1}.6286$		$\bar{1}.6720$		0.3280		$\bar{1}.9567$	50′
		27		32		6		
20′	$\bar{1}.6313$		$\bar{1}.6752$		0.3248		$\bar{1}.9561$	40′
		27		33		6		
30′	$\bar{1}.6340$		$\bar{1}.6785$		0.3215		$\bar{1}.9555$	30′
		26		32		6		
40′	$\bar{1}.6366$		$\bar{1}.6817$		0.3183		$\bar{1}.9549$	20′
		26		33		6		
50′	$\bar{1}.6392$		$\bar{1}.6850$		0.3150		$\bar{1}.9543$	10′
		26		32		6		
26° 0′	$\bar{1}.6418$		$\bar{1}.6882$		0.3118		$\bar{1}.9537$	0′ 64°
		26		32		7		
10′	$\bar{1}.6444$		$\bar{1}.6914$		0.3086		$\bar{1}.9530$	50′
		26		32		6		
20′	$\bar{1}.6470$		$\bar{1}.6946$		0.3054		$\bar{1}.9524$	40′
		25		31		6		
30′	$\bar{1}.6495$		$\bar{1}.6977$		0.3023		$\bar{1}.9518$	30′
		26		32		6		
40′	$\bar{1}.6521$		$\bar{1}.7009$		0.2991		$\bar{1}.9512$	20′
		25		31		7		
50′	$\bar{1}.6546$		$\bar{1}.7040$		0.2960		$\bar{1}.9505$	10′
		24		32		6		
27° 0′	$\bar{1}.6570$		$\bar{1}.7072$		0.2928		$\bar{1}.9499$	0′ 63°
		25		31		7		
10′	$\bar{1}.6595$		$\bar{1}.7103$		0.2897		$\bar{1}.9492$	50′
		25		31		6		
20′	$\bar{1}.6620$		$\bar{1}.7134$		0.2866		$\bar{1}.9486$	40′
		24		31		7		
30′	$\bar{1}.6644$		$\bar{1}.7165$		0.2835		$\bar{1}.9479$	30′
		24		31		6		
40′	$\bar{1}.6668$		$\bar{1}.7196$		0.2804		$\bar{1}.9473$	20′
		24		30		7		
50′	$\bar{1}.6692$		$\bar{1}.7226$		0.2774		$\bar{1}.9466$	10′
		24		31		7		
28° 0′	$\bar{1}.6716$		$\bar{1}.7257$		0.2743		$\bar{1}.9459$	0′ 62°
		24		30		6		
10′	$\bar{1}.6740$		$\bar{1}.7287$		0.2713		$\bar{1}.9453$	50′
		23		30		7		
20′	$\bar{1}.6763$		$\bar{1}.7317$		0.2683		$\bar{1}.9446$	40′
		24		31		7		
30′	$\bar{1}.6787$		$\bar{1}.7348$		0.2652		$\bar{1}.9439$	30′
		23		30		7		
40′	$\bar{1}.6810$		$\bar{1}.7378$		0.2622		$\bar{1}.9432$	20′
		23		30		7		
50′	$\bar{1}.6833$		$\bar{1}.7408$		0.2592		$\bar{1}.9425$	10′
		23		30		7		
29° 0′	$\bar{1}.6856$		$\bar{1}.7438$		0.2562		$\bar{1}.9418$	0′ 61°
		22		29		7		
10′	$\bar{1}.6878$		$\bar{1}.7467$		0.2533		$\bar{1}.9411$	50′
		23		30		7		
20′	$\bar{1}.6901$		$\bar{1}.7497$		0.2503		$\bar{1}.9404$	40′
		22		29		7		
30′	$\bar{1}.6923$		$\bar{1}.7526$		0.2474		$\bar{1}.9397$	30′
		23		30		7		
40′	$\bar{1}.6946$		$\bar{1}.7556$		0.2444		$\bar{1}.9390$	20′
		22		29		7		
50′	$\bar{1}.6968$		$\bar{1}.7585$		0.2415		$\bar{1}.9383$	10′
		22		29		8		
30° 0′	$\bar{1}.6990$		$\bar{1}.7614$		0.2386		$\bar{1}.9375$	0′ 60°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

三角函數之對數表

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
30° 0′	$\bar{1}.6990$		$\bar{1}.7614$		0.2386		$\bar{1}.9375$	0′ 60°
		22		30		7		
10′	$\bar{1}.7012$		$\bar{1}.7644$		0.2356		$\bar{1}.9368$	50′
		21		29		7		
20′	$\bar{1}.7033$		$\bar{1}.7673$		0.2327		$\bar{1}.9361$	40′
		22		28		8		
30′	$\bar{1}.7055$		$\bar{1}.7701$		0.2299		$\bar{1}.9353$	30′
		21		29		7		
40′	$\bar{1}.7076$		$\bar{1}.7730$		0.2270		$\bar{1}.9346$	20′
		21		29		8		
50′	$\bar{1}.7097$		$\bar{1}.7759$		0.2241		$\bar{1}.9338$	10′
		21		29		7		
31° 0′	$\bar{1}.7118$		$\bar{1}.7788$		0.2212		$\bar{1}.9331$	0′ 59°
		21		28		8		
10′	$\bar{1}.7139$		$\bar{1}.7816$		0.2184		$\bar{1}.9323$	50′
		21		29		8		
20′	$\bar{1}.7160$		$\bar{1}.7845$		0.2155		$\bar{1}.9315$	40′
		21		28		7		
30′	$\bar{1}.7181$		$\bar{1}.7873$		0.2127		$\bar{1}.9308$	30′
		20		29		8		
40′	$\bar{1}.7201$		$\bar{1}.7902$		0.2098		$\bar{1}.9300$	20′
		21		28		8		
50′	$\bar{1}.7222$		$\bar{1}.7930$		0.2070		$\bar{1}.9292$	10′
		20		28		8		
32° 0′	$\bar{1}.7242$		$\bar{1}.7958$		0.2042		$\bar{1}.9284$	0′ 58°
		20		28		8		
10′	$\bar{1}.7262$		$\bar{1}.7986$		0.2014		$\bar{1}.9276$	50′
		20		28		8		
20′	$\bar{1}.7282$		$\bar{1}.8014$		0.1986		$\bar{1}.9268$	40′
		20		28		8		
30′	$\bar{1}.7302$		$\bar{1}.8042$		0.1958		$\bar{1}.9260$	30′
		20		28		8		
40′	$\bar{1}.7322$		$\bar{1}.8070$		0.1930		$\bar{1}.9252$	20′
		20		27		8		
50′	$\bar{1}.7342$		$\bar{1}.8097$		0.1903		$\bar{1}.9244$	10′
		19		28		8		
33° 0′	$\bar{1}.7361$		$\bar{1}.8125$		0.1875		$\bar{1}.9236$	0′ 57°
		19		28		8		
10′	$\bar{1}.7380$		$\bar{1}.8153$		0.1847		$\bar{1}.9228$	50′
		20		27		9		
20′	$\bar{1}.7400$		$\bar{1}.8180$		0.1820		$\bar{1}.9219$	40′
		19		28		8		
30′	$\bar{1}.7419$		$\bar{1}.8208$		0.1792		$\bar{1}.9211$	30′
		19		27		8		
40′	$\bar{1}.7438$		$\bar{1}.8235$		0.1765		$\bar{1}.9203$	20′
		19		28		9		
50′	$\bar{1}.7457$		$\bar{1}.8263$		0.1737		$\bar{1}.9194$	10′
		19		27		8		
34° 0′	$\bar{1}.7476$		$\bar{1}.8290$		0.1710		$\bar{1}.9186$	0′ 56°
		18		27		9		
10′	$\bar{1}.7494$		$\bar{1}.8317$		0.1683		$\bar{1}.9177$	50′
		19		27		8		
20′	$\bar{1}.7513$		$\bar{1}.8344$		0.1656		$\bar{1}.9169$	40′
		18		27		9		
30′	$\bar{1}.7531$		$\bar{1}.8371$		0.1629		$\bar{1}.9160$	30′
		19		27		9		
40′	$\bar{1}.7550$		$\bar{1}.8398$		0.1602		$\bar{1}.9151$	20′
		18		27		9		
50′	$\bar{1}.7568$		$\bar{1}.8425$		0.1575		$\bar{1}.9142$	10′
		18		27		8		
35° 0′	$\bar{1}.7586$		$\bar{1}.8452$		0.1548		$\bar{1}.9134$	0′ 55°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

P.P.

	30	29
1	3.0	2.9
2	6.0	5.8
3	9.0	8.7
4	12.0	11.6
5	15.0	14.5
6	18.0	17.4
7	21.0	20.3
8	24.0	23.2
9	27.0	26.1

	26	25
1	2.6	2.5
2	5.2	5.0
3	7.8	7.5
4	10.4	10.0
5	13.0	12.5
6	15.6	15.0
7	18.2	17.5
8	20.8	20.0
9	23.4	22.5

	20	19
1	2.0	1.9
2	4.0	3.8
3	6.0	5.7
4	8.0	7.6
5	10.0	9.5
6	12.0	11.4
7	14.0	13.3
8	16.0	15.2
9	18.0	17.1

	16	15
1	1.6	1.5
2	3.2	3.0
3	4.8	4.5
4	6.4	6.0
5	8.0	7.5
6	9.6	9.0
7	11.2	10.5
8	12.8	12.0
9	14.4	13.5

	9	8
1	0.9	0.8
2	1.8	1.6
3	2.7	2.4
4	3.6	3.2
5	4.5	4.0
6	5.4	4.8
7	6.3	5.6
8	7.2	6.4
9	8.1	7.2

三角函數之對數表

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
35° 0′	$\bar{1}.7586$		$\bar{1}.8452$		0.1548		$\bar{1}.9134$	0′ 55°
10′	$\bar{1}.7604$	18	$\bar{1}.8479$	27	0.1521	9	$\bar{1}.9125$	50′
20′	$\bar{1}.7622$	18	$\bar{1}.8506$	27	0.1494	9	$\bar{1}.9116$	40′
30′	$\bar{1}.7640$	18	$\bar{1}.8533$	27	0.1467	9	$\bar{1}.9107$	30′
40′	$\bar{1}.7657$	17	$\bar{1}.8559$	26	0.1441	9	$\bar{1}.9098$	20′
50′	$\bar{1}.7675$	18	$\bar{1}.8586$	27	0.1414	9	$\bar{1}.9089$	10′
36° 0′	$\bar{1}.7692$	17	$\bar{1}.8613$	27	0.1387	9	$\bar{1}.9080$	0′ 54°
10′	$\bar{1}.7710$	18	$\bar{1}.8639$	26	0.1361	10	$\bar{1}.9070$	50′
20′	$\bar{1}.7727$	17	$\bar{1}.8666$	27	0.1334	9	$\bar{1}.9061$	40′
30′	$\bar{1}.7744$	17	$\bar{1}.8692$	26	0.1308	9	$\bar{1}.9052$	30′
40′	$\bar{1}.7761$	17	$\bar{1}.8718$	26	0.1282	10	$\bar{1}.9042$	20′
50′	$\bar{1}.7778$	17	$\bar{1}.8745$	27	0.1255	9	$\bar{1}.9033$	10′
37° 0′	$\bar{1}.7795$	17	$\bar{1}.8771$	26	0.1229	10	$\bar{1}.9023$	0′ 53°
10′	$\bar{1}.7811$	16	$\bar{1}.8797$	26	0.1203	9	$\bar{1}.9014$	50′
20′	$\bar{1}.7828$	17	$\bar{1}.8824$	27	0.1176	10	$\bar{1}.9004$	40′
30′	$\bar{1}.7844$	16	$\bar{1}.8850$	26	0.1150	9	$\bar{1}.8995$	30′
40′	$\bar{1}.7861$	17	$\bar{1}.8876$	26	0.1124	10	$\bar{1}.8985$	20′
50′	$\bar{1}.7877$	16	$\bar{1}.8902$	26	0.1098	10	$\bar{1}.8975$	10′
38° 0′	$\bar{1}.7893$	16	$\bar{1}.8928$	26	0.1072	10	$\bar{1}.8965$	0′ 52°
10′	$\bar{1}.7910$	17	$\bar{1}.8954$	26	0.1046	10	$\bar{1}.8955$	50′
20′	$\bar{1}.7926$	16	$\bar{1}.8980$	26	0.1020	10	$\bar{1}.8945$	40′
30′	$\bar{1}.7941$	15	$\bar{1}.9006$	26	0.0994	10	$\bar{1}.8935$	30′
40′	$\bar{1}.7957$	16	$\bar{1}.9032$	26	0.0968	10	$\bar{1}.8925$	20′
50′	$\bar{1}.7973$	16	$\bar{1}.9058$	26	0.0942	10	$\bar{1}.8915$	10′
39° 0′	$\bar{1}.7989$	16	$\bar{1}.9084$	26	0.0916	10	$\bar{1}.8905$	0′ 51°
10′	$\bar{1}.8004$	15	$\bar{1}.9110$	26	0.0890	10	$\bar{1}.8895$	50′
20′	$\bar{1}.8020$	16	$\bar{1}.9135$	25	0.0865	11	$\bar{1}.8884$	40′
30′	$\bar{1}.8035$	15	$\bar{1}.9161$	26	0.0839	10	$\bar{1}.8874$	30′
40′	$\bar{1}.8050$	15	$\bar{1}.9187$	26	0.0813	10	$\bar{1}.8864$	20′
50′	$\bar{1}.8066$	16	$\bar{1}.9212$	25	0.0788	11	$\bar{1}.8853$	10′
40° 0′	$\bar{1}.8081$	15	$\bar{1}.9238$	26	0.0762	10	$\bar{1}.8843$	0′ 50°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

P.P.

	28	27
1	2.8	2.7
2	5.6	5.4
3	8.4	8.1
4	11.2	10.8
5	14.0	13.5
6	16.8	16.2
7	19.6	18.9
8	22.4	21.6
9	25.2	24.3

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	18	17
1	1.8	1.7
2	3.6	3.4
3	5.4	5.1
4	7.2	6.8
5	9.0	8.5
6	10.8	10.2
7	12.6	11.9
8	14.4	13.6
9	16.2	15.3

	11	10
1	1.1	1.0
2	2.2	2.0
3	3.3	3.0
4	4.4	4.0
5	5.5	5.0
6	6.6	6.0
7	7.7	7.0
8	8.8	8.0
9	9.9	9.0

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

三角函數之對數表

角	log sin	差	log tan	通差	log cot	差	log cos	
40° 0′	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0′ 50°
		15		26		11		
10′	$\bar{1}.8096$		$\bar{1}.9264$		0.0736		$\bar{1}.8832$	50′
		15		25		11		
20′	$\bar{1}.8111$		$\bar{1}.9289$		0.0711		$\bar{1}.8821$	40′
		14		26		11		
30′	$\bar{1}.8125$		$\bar{1}.9315$		0.0685		$\bar{1}.8810$	30′
		15		26		10		
40′	$\bar{1}.8140$		$\bar{1}.9341$		0.0659		$\bar{1}.8800$	20′
		15		25		11		
50′	$\bar{1}.8155$		$\bar{1}.9366$		0.0634		$\bar{1}.8789$	10′
		14		26		11		
41° 0′	$\bar{1}.8169$		$\bar{1}.9392$		0.0608		$\bar{1}.8778$	0′ 49°
		15		25		11		
10′	$\bar{1}.8184$		$\bar{1}.9417$		0.0583		$\bar{1}.8767$	50′
		14		26		11		
20′	$\bar{1}.8198$		$\bar{1}.9443$		0.0557		$\bar{1}.8756$	40′
		15		25		11		
30′	$\bar{1}.8213$		$\bar{1}.9468$		0.0532		$\bar{1}.8745$	30′
		14		26		12		
40′	$\bar{1}.8227$		$\bar{1}.9494$		0.0506		$\bar{1}.8733$	20′
		14		25		11		
50′	$\bar{1}.8241$		$\bar{1}.9519$		0.0481		$\bar{1}.8722$	10′
		14		25		11		
42° 0′	$\bar{1}.8255$		$\bar{1}.9544$		0.0456		$\bar{1}.8711$	0′ 48°
		14		26		12		
10′	$\bar{1}.8269$		$\bar{1}.9570$		0.0430		$\bar{1}.8699$	50′
		14		25		11		
20′	$\bar{1}.8283$		$\bar{1}.9595$		0.0405		$\bar{1}.8688$	40′
		14		26		12		
30′	$\bar{1}.8297$		$\bar{1}.9621$		0.0379		$\bar{1}.8676$	30′
		14		25		11		
40′	$\bar{1}.8311$		$\bar{1}.9646$		0.0354		$\bar{1}.8665$	20′
		13		25		12		
50′	$\bar{1}.8324$		$\bar{1}.9671$		0.0329		$\bar{1}.8653$	10′
		14		26		12		
43° 0′	$\bar{1}.8338$		$\bar{1}.9697$		0.0303		$\bar{1}.8641$	0′ 47°
		13		25		12		
10′	$\bar{1}.8351$		$\bar{1}.9722$		0.0278		$\bar{1}.8629$	50′
		14		25		11		
20′	$\bar{1}.8365$		$\bar{1}.9747$		0.0253		$\bar{1}.8618$	40′
		13		25		12		
30′	$\bar{1}.8378$		$\bar{1}.9772$		0.0228		$\bar{1}.8606$	30′
		13		26		12		
40′	$\bar{1}.8391$		$\bar{1}.9798$		0.0202		$\bar{1}.8594$	20′
		14		25		12		
50′	$\bar{1}.8405$		$\bar{1}.9823$		0.0177		$\bar{1}.8582$	10′
		13		25		13		
44° 0′	$\bar{1}.8418$		$\bar{1}.9848$		0.0152		$\bar{1}.8569$	0′ 46°
		13		26		12		
10′	$\bar{1}.8431$		$\bar{1}.9874$		0.0126		$\bar{1}.8557$	50′
		13		25		12		
20′	$\bar{1}.8444$		$\bar{1}.9899$		0.0101		$\bar{1}.8545$	40′
		13		25		13		
30′	$\bar{1}.8457$		$\bar{1}.9924$		0.0076		$\bar{1}.8532$	30′
		12		25		12		
40′	$\bar{1}.8469$		$\bar{1}.9949$		0.0051		$\bar{1}.8520$	20′
		13		26		13		
50′	$\bar{1}.8482$		$\bar{1}.9975$		0.0025		$\bar{1}.8507$	10′
		13		25		12		
45° 0′	$\bar{1}.8495$		0.0000		0.0000		$\bar{1}.8495$	0′ 45°
	log cos	差	log cot	通差	log tan	差	log sin	角

P.P.

	26	25
1	2.6	2.5
2	5.2	5.0
3	7.8	7.5
4	10.4	10.0
5	13.0	12.5
6	15.6	15.0
7	18.2	17.5
8	20.8	20.0
9	23.4	22.5

	15
1	1.5
2	3.0
3	4.5
4	6.0
5	7.5
6	9.0
7	10.5
8	12.0
9	13.5

	14	13
1	1.4	1.3
2	2.8	2.6
3	4.2	3.9
4	5.6	5.2
5	7.0	6.5
6	8.4	7.8
7	9.8	9.1
8	11.2	10.4
9	12.6	11.7

	12	11
1	1.2	1.1
2	2.4	2.2
3	3.6	3.3
4	4.8	4.4
5	6.0	5.5
6	7.2	6.6
7	8.4	7.7
8	9.6	8.8
9	10.8	9.9

用S及T之公式

I. 當α角在0°與2°之間:

$$\log\sin\alpha=\log\alpha''+S.$$
$$\log\tan\alpha=\log\alpha''+T.$$
$$\log\cot\alpha=\operatorname{colog}\tan\alpha.$$

$$\log\alpha''=\log\sin\alpha-S,$$
$$=\log\tan\alpha-T,$$
$$=\operatorname{colog}\cot\alpha-T.$$

II. 當α角在88°與90°之間.

$$\log\cos\alpha=\log(90^\circ-\alpha)''+S.$$
$$\log\cot\alpha=\log(90^\circ-\alpha)''+T.$$
$$\log\tan\alpha=\operatorname{colog}\cot\alpha.$$

$$\log(90^\circ-\alpha)''=\log\cos\alpha-S,$$
$$=\log\cot\alpha-T,$$
$$=\operatorname{colog}\tan\alpha-T;$$

而　$\alpha=90^\circ-(90^\circ-\alpha)$.

S及T之值

α''	S	log sinα	α''	T	log tanα	α	T	log tanα
0		—	0		—	5146		8.39713
	4.68557			4.68557			4.68567	
2409		8.06740	200		6.98660	5424		8.41999
	4.68556			4.68558			4.68568	
3417		8.21920	1726		7.92263	5689		8.44072
	4.68555			4.68559			4.68569	
3823		8.26795	2432		8.07156	5941		8.45955
	4.68555			4.68560			4.68570	
4190		8.30776	2976		8.15924	6184		8.47697
	4.68554			4.68561			4.68571	
4840		8.37038	3434		8.22142	6417		8.49305
	4.68553			4.68562			4.68572	
5414		8.41904	3838		8.26973	6642		8.50802
	4.68552			4.68563			4.68573	
5932		8.45872	4204		8.30930	6859		8.52200
	4.68551			4.68564			4.68574	
6408		8.49223	4540		8.34270	7070		8.53516
	4.68550			4.68565			4.68575	
6633		8.50721	4699		8.35766	7173		8.54145
	4.68550			4.68565			4.68575	
6851		8.52125	4853		8.37167	7274		8.54753
	4.68549			4.68566				
7267		8.54684	5146		8.39713			

用此法較前表所得者精密多矣.

複利諸表

複 利 表

年	2 釐	$2\frac{1}{2}$ 釐	3 釐	$3\frac{1}{2}$ 釐	4 釐	$4\frac{1}{2}$ 釐
1	1.02000000	1.02500000	1.03000000	1.03500000	1.04000000	1.04500000
2	1.04040000	1.05062500	1.06090000	1.07122500	1.08160000	1.09202500
3	1.06120800	1.07689063	1.09272700	1.10871788	1.12486400	1.14116613
4	1.08243216	1.10381289	1.12550881	1.14752300	1.16985856	1.19251860
5	1.10408080	1.13140821	1.15927407	1.18768631	1.21665290	1.24618194
6	1.12616242	1.15969342	1.19405230	1.22925533	1.26531902	1.30226012
7	1.14868567	1.18868575	1.22987387	1.27227926	1.31593178	1.36086183
8	1.17165938	1.21840290	1.26677008	1.31680904	1.36856905	1.42210061
9	1.19509257	1.24886297	1.30477318	1.36289735	1.42331181	1.48609514
10	1.21899442	1.28008454	1.34391638	1.41059876	1.48024428	1.55296942
11	1.24337431	1.31208666	1.38423387	1.45996972	1.53945406	1.62285305
12	1.26824179	1.34488882	1.42576089	1·51106866	1.60103222	1.69588143
13	1.29360663	1.37851104	1.46853371	1.56395606	1.66507351	1.77219610
14	1.31947876	1.41297382	1.51258972	1.61869452	1.73167645	1.85194492
15	1.34586834	1.44829817	1.55796742	1.67534883	1.80094351	1.93528244
16	1.37278571	1.48450562	1.60470644	1.73398604	1.87298125	2.02237015
17	1.40024142	1.52161826	1.65284763	1.79467555	1.94790050	2.11337681
18	1.42824625	1.55965872	1.70243306	1.85748920	2.02581652	2.20847877
19	1.45681117	1.59865019	1.75350605	1.92250132	2.10684918	2.30786031
20	1.48594740	1.63861644	1.80611123	1.98978886	2.19112314	2.41171402
21	1.51566634	1.67958185	1.86029457	2.05943147	2.27876807	2.52024116
22	1.54597967	1.72157140	1.91610341	2.13151158	2.36991879	2.63365201
23	1.57689926	1.76461068	1.97358651	2.20611448	2.46471555	2.75216635
24	1·60843725	1.80872595	2.03279411	2.28332849	2.56330416	2.87631383
25	1.64060599	1.85394410	2.09377793	2 36324498	2.66583633	3.00543446
26	1.67341811	1.90029270	2.15659127	2.44595856	2.77246978	3.14067901
27	1.70688648	1.94780002	2.22128901	2.53156711	2.88336858	3.28200956
28	1.74102421	1.99649502	2.28792768	2.62017196	2.99870332	3.42969999
29	1.77584469	2.04640739	2.35656551	2.71187798	3.11865145	3.58403649
30	1.81136158	2.09756758	2.42726247	2.80679370	3.24339751	3.74531813
31	1.84758882	2.15000677	2.50000000	2.90503148	3.37313341	3.91385745
32	1.88454059	2.20375694	2.57508276	3.00670759	3.50805875	4.08998104
33	1.92223140	2.25885086	2.65233524	3.11194235	3.64838110	4.27403018
34	1.96067603	2.31532213	2.73190530	3.22086033	3.79431634	4.46636154
35	1.99988955	2.37320519	2.81386245	3.33359045	3.94608899	4.66734781
36	2.03988734	2.43253532	2.89827833	3.45026611	4.10393255	4.87737846
37	2.08068509	2.49334870	2.98522668	3.57102543	4.26808986	5.09686049
38	2.12229879	2.55568242	3.07478348	3.69601132	4.43881345	5.32621921
39	2.16474477	2.61957448	3.16702698	3.82537171	4.61636599	5.56589908
40	2.20803966	2.68506384	3.26203779	3.95925972	4.80102063	5.81636454
41	2.25220046	2.75219043	3.35989893	4.09783381	4.99306145	6.07810094
42	2.29724447	2.82099520	3.46069589	4.24125799	5.19278391	6.35161548
43	2.34318936	2.89152008	3.56451677	4.38970202	5.40049527	6.63743818
44	2.39005314	2.96380808	3.67145227	4.54334160	5.61651508	6.93612290
45	2.43785421	3.03790328	3.78159584	4.70235855	5.84117568	7.24824843
46	2.48661129	3.11385086	3.89504372	4.86694110	6.07482271	7.57441961
47	2.53634351	3.19169713	3.01189503	5.03728404	6.31781562	7.91526849
48	2.58707039	3.27148956	3.13225188	5.21358898	6.57052824	8.27145557
49	2.63881179	3.35327680	3.25621944	5.39606459	6.83334937	8.64367107
50	2.69158803	3.43710872	3.38390602	5.58492686	7.10668335	9.03263627

複利表

年	5 釐	6 釐	7 釐	8 釐	9 釐	1 分
1	1.0500000	1.0600000	1.0700000	1.0800000	1.0900000	1.1000000
2	1.1025000	1.1236000	1.1449000	1.1664000	1.1881000	1.2100000
3	1.1576250	1.1910160	1.2250430	1.2597120	1.2950290	1.3310000
4	1.2155063	1.2624770	1.3107960	1.3604890	1.4115816	1.4641000
5	1.2762816	1.3382256	1.4025517	1.4693281	1.5386240	1.6105100
6	1.3400956	1.4185191	1.5007304	1.5868743	1.6771001	1.7715610
7	1.4071004	1.5036303	1.6057815	1.7138243	1.8280391	1.9487171
8	1.4774554	1.5938481	1.7181862	1.8568302	1.9925626	2.1435888
9	1.5513282	1.6894790	1.8384592	1.9990046	2.1718933	2.3579477
10	1.6288946	1.7908477	1.9671514	2.1589250	2.3673637	2.5937425
11	1.7103394	1.8982986	2.1048520	2.3316290	2.5804264	2.8531167
12	1.7958563	2.0121965	2.2521916	2.5181701	2.8126648	3.1384284
13	1.8856491	2.1329283	2.4098450	2.7096237	3.0658046	3.4522712
14	1.9799316	2.2609040	2 5785342	2.9371936	3.3417270	3.7974983
15	2.0789282	2.3965582	2.7590315	3.1721691	3.6424825	4.1772482
16	2.1828746	2.5403517	2.9521638	3.4259426	3.9703059	4.5940730
17	2.2920183	2.6927728	3.1588152	3·7000181	4.3276334	5.0544703
18	2.4066192	2.8543392	3.3799323	3.9960195	4.7171204	5.5599173
19	2.5369502	3.0255995	3.6165275	4.3157011	5.1416613	6.1159090
20	2.6532977	3.2071355	3.8696845	4.6609571	5.6044108	6.7275000
21	2.7859626	3.3995636	4.1405624	5.0338337	6.1088077	7.4002499
22	2.9252607	3.6035374	4.4304017	5.4365404	6.6586004	8.1402749
23	3.0715238	3.8197497	4.7405299	5.8714637	7.2578745	8.9543024
24	3.2250999	4.0489346	5.0723670	6.3411807	7.9110832	9.8497328
25	3.3863549	4.2918707	5.4274326	6.8484752	8.6230807	10.8347059
26	3.5556727	4.5493830	5.8073529	7.3963532	9.3991579	11.9181765
27	3.7334563	4.8223549	6.2138676	7.9880615	10.2450821	13.1099942
28	3.9201291	5.1116867	6.6488384	8.6271064	11.1671395	14.4209936
29	4.1161356	5.4183879	7.1142571	9.3172749	12.1721821	15.8630930
30	4.3219424	5.7434912	7.6122550	10.0626569	13.2676785	17.4494023
31	4.5380398	6.0881006	8.1451129	10.8676694	14.4617695	19.1943425
32	4.7649415	6.4533867	8.7152708	11.7370830	15.7633288	21.1137768
33	5.0031885	6.8405899	9.3253398	12.6760496	17.1820284	23.2251544
34	5.2533480	7.2510253	9.9781135	13.6901336	18.7284109	25.5476699
35	5.5160154	7.6860868	10.6765815	14.7853443	20.4139679	28.1024369
36	5.7918161	8.1472520	11.4239422	15.9681718	22.2512250	30.9126805
37	6.0814069	8.6360871	12.2236188	17.2456256	24.2538358	34.0039486
38	6.3854773	9.1542524	13.0792714	18.6252756	26.4366805	37.4043434
39	6.7047512	9.7035075	13.9948204	20.1152977	28.8159817	41.1447778
40	7.0399887	10.2857179	14.9744578	21.7245215	31.4094201	45.2592556
41	7.3919882	10.9028610	16.0226699	23.4624832	34.2362679	49.7851811
42	7.7615876	11.5570327	17.1442568	25.3394819	37.3175320	54.7636992
43	8.1496669	12.2504546	18.3443548	27.3666404	40.6761098	60.2400692
44	8.5571503	12.9854819	19.6284596	29.5559717	44.3369597	66.2640761
45	8.9850078	13.7646108	21.0024510	31.9204494	48.3272861	72.8904837
46	9.4342582	14.5904875	22.4726234	34.4740853	52.6767419	80.1795321
47	9.9059711	15.4659167	24.0457070	37.2320122	57.4176486	88.1974853
48	10.4012697	16.3938717	25.7289065	40.2105731	62.5852370	97.0172338
49	10.9213331	17.3775040	27.5299300	43.4247190	68.2179083	106.7189572
50	11.4673998	18.4201543	29.4570251	46.9016125	74.3575201	117.3908529

複利現價表

年	2 釐	$2\frac{1}{2}$ 釐	3 釐	$3\frac{1}{2}$ 釐	4 釐	$4\frac{1}{2}$ 釐
1	.98039216	.97560976	.97087379	.96618357	.96153846	.95693780
2	.96116878	.95181440	.94259591	.93351070	.92455621	.91572995
3	.94232233	.92859941	.91514166	.90194271	.88899636	.87629660
4	.92384543	.90595064	.88848705	.87144223	.85480419	.83856134
5	.90573081	.88385429	.86260878	.84197317	.82192711	.80245105
6	.88797138	.86229687	.83748426	.81350064	.79031453	.76789574
7	.87056018	.84126524	.81309151	.78599096	.75991781	.73482846
8	.85349037	.82074657	.78940923	.75941156	.73069021	.70318513
9	.83675527	.80072836	.76641673	.73373097	.70258674	.67290443
10	.82034830	.78119840	.74409391	.70891881	.67556417	.64392769
11	80426304	.76214478	.72242128	.68494571	.64958093	.61619874
12	.78849318	.74356589	.70137988	.66178330	.62459705	.58966386
13	.77303253	.72542038	.68095134	.63940415	.60057409	.56427164
14	.75787502	.70772720	.66111781	61778179	.57747509	.53997286
15	.74301473	.69046556	.64186195	.59689062	.55526450	.51672044
16	.72844581	.67362493	.62316694	.57670591	.53390818	.49446932
17	.71416256	.65719506	.60501645	.55720378	.51337325	.47317639
18	.70015937	.64146591	.58739461	.53836114	.49362812	.45280037
19	.68643076	.62552772	.57028603	.52015569	.47464242	.43330179
20	.67297133	.61027094	.55367575	.50256588	.45638695	.41464286
21	.65977582	.59538629	.53754928	.48557090	.43883360	.39678743
22	.64683904	.58086467	.52189250	.46915063	.42195539	.37970089
23	.63415592	.56669724	.50669175	.45328643	.40572633	.36335013
24	.62172149	.55287535	.49193374	.43795713	.39012147	.34770347
25	.60953087	.53939059	.47760557	.42314699	.37511680	.33273060
26	.59757928	.52623472	.46369473	.40883767	.36068923	.31840248
27	.58586204	.51339973	.45018916	.39501224	.34681657	.30409187
28	.57437455	.50087778	.43707675	.38165434	.33347747	.29157069
29	.56311231	.48866125	.42434636	.36874815	.32065141	.27901502
30	.55207089	.47674269	.41198676	.35627841	.30831867	.26700002
31	.54124597	.46511481	.39998715	.34423035	.29646926	.25550211
32	.53063330	.45377055	.38833703	.33258971	.29505704	.24449991
33	.52022873	.44270298	.37702625	.32134271	.27409417	.23397121
34	.51002817	.43190534	.36604490	.31047605	.26355290	.22389589
35	.50002761	.42137107	.35538340	.29997686	.25341547	.21425444
36	.49022315	.41109372	.34503243	.28983272	.24366872	.20502817
37	.48061093	.40106705	.33498294	.28003161	.23429685	.19619921
38	47118719	.39128492	.32522615	.27056194	.22528543	.18775044
39	.46194822	.38174139	.31575355	.26141250	.21662061	.17966549
40	.45289042	.37243062	.30655684	.25257247	.20828904	.17192870
41	.44401021	.36334695	.29762800	.24403137	.20027793	.16452507
42	.43530413	.35448483	.28895922	.23577910	.19257493	.15744026
43	.42676875	.34583886	.28054294	.22780590	.18516820	.15066054
44	.41840074	.33740376	.27237178	.22010231	.17804635	.14417276
45	.41019680	.32917440	.26443862	.21265924	.17119841	.13796437
46	.40215373	.32114576	.25673653	.20546787	.16481386	.13222332
47	.39426836	.31331294	.24925876	.19851968	.15828256	.12633810
48	.38653761	.30567116	.24199880	.19180645	.15219476	.12086770
49	.37895844	.29821576	.23495029	.18532024	.14634112	.11569158
50	.37152788	.29094221	.22811708	.17905337	.14071262	.11070965

複利現價表

年	5 釐	6 釐	7 釐	8 釐	9 釐	1 分
1	.95238095	.94339623	.93457644	.92592593	.91743119	.90909091
2	.90702948	.88999644	87343873	.85733882	.84167999	.82644628
3	.86383760	.83961928	.81629788	79383224	.77218348	.75131480
4	.82270247	.79209366	.76289521	.73502985	.70842521	.68301346
5	.78352617	.74725817	.71298618	.68058320	.64993139	.62092132
6	.74621540	.70496014	.66634222	.63016963	.59626733	.56447393
7	.71068133	.66505711	.62274974	.58349040	.54703424	.51315812
8	.67683936	.62741237	.58200910	.54026888	.50186628	.46650738
9	.64460892	.59189846	.54393374	.50024897	.46042778	.42409762
10	.61391325	.55839478	.50834929	.46319349	.42241081	.38554329
11	.58467929	.52678753	.47509280	.42888286	.38753285	.35049390
12	.55683742	.49696936	.44401196	.39711376	.35553473	.31863082
13	.53032135	.46883902	.41496445	.36769792	.32617865	.28966438
14	.50506795	.44230096	.38781724	.34046104	.29924647	.26333125
15	.48101710	.41726506	.36244602	.31524170	.27453804	.23939205
16	.45811112	.39364628	.33873460	.29189047	.25186976	.21762914
17	.43629669	.37136442	.31657439	.27029895	.23107318	.19784467
18	.41552065	.35034379	.29586392	.25024903	.21199374	.17985879
19	.39573396	.33051301	.27650832	.23171206	.19448967	.16350799
20	.37688948	.31180473	.25841900	.21454821	.17843089	.14864363
21	.35894236	.29415540	.24151309	.19865575	.16369806	.13513057
22	.34184987	.27750510	.22571317	.18394051	.15018171	.12284597
23	.32557131	.26179726	.21094688	.17031528	.13778139	.11167816
24	.31006791	.24697855	.19714662	.15769934	.12640494	.10152560
25	.29530277	.23299863	.18424918	.14601790	.11596784	.09229600
26	.28124073	.21981003	.17219549	.13520176	.10639251	.08390545
27	.26784832	.20736795	.16093037	.12518682	.09760781	.07627768
28	.25509364	.19563014	.15040221	.11591372	.08954845	.06934335
29	.24294632	.18455674	.14056282	.10732252	.08215454	.06303941
30	.23137745	.17411013	.13136712	.09937733	.07537114	.05730855
31	.22035947	.16425484	.12277301	.09201605	.06914783	.05209868
32	.20986617	.15495740	.11474113	.08520005	.06343838	.04736244
33	.19987254	.14618622	.10723470	.07888893	.05820035	.04305676
34	.19035480	.13791153	.10021934	.07304531	.05339481	.03914251
35	.18129029	.13010522	.09366294	.06763454	.04898607	.03548410
36	.17265741	.12274007	.08753546	.06262458	.04494135	.03234918
37	.16443563	.11579318	.08180884	.05798572	.04123059	.02940835
38	.15660536	.10923885	.07645686	.05369048	.03782623	.02673486
39	.14914797	.10305552	.07145501	.04971341	.03470296	.02430442
40	.14204568	.09722219	.06678038	.04603093	.03183758	.02209493
41	.13528160	.09171905	.06241157	.04262123	.02920879	.02008630
42	.12883962	.08652740	.05832857	.03946411	.02679706	.01826027
43	.12270440	.08162962	.05451268	.03654084	.02458446	.01660025
44	.11686133	.07709080	.05094643	.03383411	.02255455	.01509113
45	.11129651	.07265007	.04761349	.03132788	.02069224	.01371221
46	.10599668	.06853781	.04446859	.02900730	.01898371	.01247201
47	.10094921	.06465831	.04158757	.02685851	.01741625	.01133819
48	.09614211	.06099840	.03886679	.02486908	.01597821	.01030745
49	.09156391	.05754566	.03632440	.02302693	.01465891	.00937041
50	.08720373	.05428836	.03394776	.02132123	.01344854	.00851855

複利年金總和表

年	2 釐	$2\frac{1}{2}$ 釐	3 釐	$3\frac{1}{2}$ 釐	4 釐	$4\frac{1}{2}$ 釐
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
2	2.02000000	2.02500000	2.03000000	2.03500000	2.04000000	2.04500000
3	3.06400000	3.07562500	3.09090000	3.10622500	3.12160000	3.13702500
4	4.12160000	4.15251563	4.18362700	4.21494288	4.24646400	4.27819113
5	5.20404016	5.25632852	5.30913581	5.36246588	5.41632256	5.47070073
6	6.30812096	6.38773673	6.46840988	6.55015218	6.63297546	6.71689160
7	7.43428338	7.54743015	7.66246218	7.77940751	7.89829448	8.01915179
8	8.58296905	8.73611590	8.89233605	9.05168677	9.21422626	9.38001362
9	9.75462843	9.95451880	10.15910613	10.36849581	10.58279531	10.80211423
10	10.94972100	11.20338177	11.46387931	11.73139316	12.00610712	12.28820937
11	12.16871542	12.48346631	12.80779569	13.14199192	13.48635141	13.84117879
12	13.41208973	13.79555297	14.19202956	14.60196164	15.02580546	15.46403184
13	14.68033152	15.14044179	15.61779045	16.11303030	16.62683768	17.15991327
14	15.97393815	16.51895284	17.08632416	17.67698636	18.29191119	18.93210937
15	17.29341692	17.93192666	18.59891389	19.29568088	20.02358764	20.78405429
16	18.63928525	19.38022483	20.15868130	20.97102971	21.82453114	22.71933673
17	20.01207096	20.86473045	21.76158774	22.70501575	23.69751239	24.74170689
18	21.41231238	22.38634871	23.41443537	24.49969130	25.64541288	26.85508370
19	22.84055863	23.94600743	25.11686844	26.35718050	27.67122940	29.06356246
20	24.29736980	25.54465761	26.87037449	28.27968181	29.77807858	31.37142277
21	25.78331719	27.18337405	28.67648572	30.26947068	31.96920172	33.78313680
22	27.29898354	28.86285590	30.53678030	32.32890215	34.24796979	36.30337795
23	28.84496321	30.58442730	32.45288370	34.46041373	36.61788858	38.93702996
24	30.42186247	32.34903798	34.42647022	36.66652821	39.08260412	41.98619631
25	32.03029972	34.15773693	36.45926432	38.94985669	41.64590829	44.56521015
26	33.67090572	36.01170803	38.55304225	41.31310168	44.31174462	47.57064460
27	35.34432383	37.91200073	40.70963352	43.75906024	47.08421440	50.71132361
28	37.05121031	39.85980075	42.93092252	46.29062734	49.96758298	53.99333317
29	38.79223451	41.85629577	45.21885020	48.91079930	52.96628630	57.42303316
30	40.56807921	43.90270316	47.57541571	51.62267728	56.08493775	61.00706966
31	42.37944079	46.00027074	50.00267818	54.42947098	59.32833526	64.75238779
32	44.22702961	48.15027751	52.50275852	57.33450247	62.70146867	68.66624524
33	46.11157020	50.35403445	55.07784128	60.34121005	66.20952742	72.75622628
34	48.03380160	52.61288531	57.73017652	63.45315240	69.85790851	77.03025646
35	49.99447763	54.92820744	60.46208181	56.67401274	73.65222486	81.49661800
36	51.99436719	57.30141263	63.27594427	70.00760318	77.59831385	86.16396581
37	54.03425453	59.73394794	66.17422259	73.45786930	81.70224640	91.04134427
38	56.11493962	62.22729664	69.15944927	77.02889472	85.97033626	96.13820476
39	58.23723841	64.78297906	72.23423275	80.72490604	90.40914971	101.46442398
40	60.40198318	67.40255354	75.40125973	84.55027775	95.02551570	107.03032306
41	62.61002284	70.08761737	78.66329753	88.50953747	99.82653633	112.84668760
42	64.86222330	72.83980781	82.02319645	92.60737128	104.81959778	118.92478854
43	67.15946777	75.66080300	85.48389234	96.84862928	110.01238169	125.27640400
44	69.50265712	78.55232308	89.04840911	101.23833130	115.41287696	131.91384220
45	71.89271027	81.51613116	92.71986139	105.78167290	121.02939204	138.84996510
46	74.33056447	84.55403443	96.50145723	110.48403145	126.87056772	146.09821353
47	76.81717576	87.66788530	100.39650095	115.35097255	132.94539043	153.67263314
48	79.35351927	90.85958243	104.40839598	120.38825659	139.26322604	161.58790163
49	81.94058966	94.13107199	108.54064785	125.60184557	145.83373429	169.85935720
50	84.57940145	97.48434879	112.79686729	130.99791016	152.66708366	178.50302828

複利年金總和表

年	5 釐	6 釐	7 釐	8 釐	9 釐	1 分
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
2	2.05000000	2.06000000	2.07000000	2.08000000	2.09000000	2.10000000
3	3.15250000	3.18360000	3.21490000	3.24640000	3.27810000	3.31000000
4	4.31012500	4.37461600	4.43994300	4.50611200	4.57312900	4.64100000
5	5.52563125	5.63709296	5.75073901	5.86660096	5.98471061	6.10510000
6	6.80191281	6.97531854	7.15329074	7.33592904	7.52333456	7.71561000
7	8.14200845	8.39383765	8.65402109	8.92280336	9.20043468	9.48717100
8	9.54910888	9.89746791	10.25980257	10.63662763	11.02847380	11.43588810
9	11.02656432	11.49131598	11.97798875	12.48755784	13.02103644	13.57947691
10	12.57789254	13.18079494	13.81644796	14.48656247	15.19292972	15.93742460
11	14.20678716	14.97164264	15.78359932	16.64548746	17.56029339	18.53116706
12	15.91712652	16.86994120	17.88845127	18.97712646	20.14071980	21.38428377
13	17.71298285	18.88213767	20.14064286	21.49529658	22.59338458	24.52271214
14	19.59863199	21.01506193	22.55048786	24.21492030	26.01918949	27.97498330
15	21.57856359	23.27596988	25.12902201	27.15211393	29.36061622	31.77248169
16	23.65749177	25.67252808	27.88805355	30.32428304	33.00339868	35.94972986
17	25.84036636	28.21287976	30.84021730	33.75022569	36.97370456	40.54470285
18	28.13238467	30.90565255	33.99903251	37.45024374	41.30133797	45.59917313
19	30.53900391	33.75999170	37.37896479	41.44626324	46.01845839	51.15909045
20	33.06595410	36.78559120	40.99549232	45.76190400	51.16011964	57.27499949
21	35.71925181	39.99272668	44.86517678	50.42292144	56.76453041	64.00249944
22	38.50521440	43.39229028	49.00573916	55.45675516	62.87333815	71.40274939
23	41.43047512	46.99582769	53.43614090	60.89329557	69.53193858	79.54302433
24	44.50199887	50.81557735	58.17667076	66.76475922	76.78981305	88.49732676
25	47.72709882	54.86451200	63.24903772	73.10593995	84.70089623	98.34705943
26	51.11345376	59.15638272	68.67647036	79.95441515	93.32397689	109.18176538
27	54.66912645	63.70576568	74.48382328	87.35076836	102.72313481	121.09994191
28	58.40258277	68.52811162	80.69769091	95.33882983	112.96821694	134.20993691
29	62.32271191	73.63979832	87.34652927	103.96593622	124.13535646	148.63992972
30	66.43884750	79.05818622	94.46078632	113.28321111	136.30753355	164.49402269
31	70.76078988	84.80167739	102.07304137	123.34586800	149.57521701	181.94372496
32	75.29882937	90.88977803	110.21815426	134.21353744	164.03698655	201.13776745
33	80.06377084	97.34316471	118.93342506	145.95062044	179.80031534	222.25154420
34	85.06695938	104.18375460	128.25876481	158.62667007	196.98934372	245.47669862
35	90.32030735	111.43477987	138.23687835	172.31680368	215.71075465	271.02436848
36	95.83632272	119.12086666	148.91345984	187.10214797	236.12472257	299.12680533
37	101.62813886	127.26811866	160.33740202	203.07031981	258.37594760	330.03948586
38	107.70954580	135.96420578	172.56102017	220.31594540	282.62978288	364.04343445
39	114.09502309	145.05845813	185.64029158	238.94122103	309.06646334	401.44777789
40	120.79977424	154.76196562	199.63511199	259.05651871	337.88244504	442.59255568
41	127.83975295	165.04768356	214.60956983	280.78104021	369.29186512	487.85181125
42	135.23172510	175.95054457	230.63223972	304.24352342	403.52813296	537.63699237
43	142.99333866	187.50755521	247.77649650	329.58300530	440.84566492	592.40069161
44	151.14330059	199.75803188	266.12085125	356.94964572	481.52177477	652.64076077
45	159.70015587	212.74351379	285.74931084	386.50561738	525.85873450	718.90483685
46	168.68516366	226.50812462	306.75176260	418.42606677	574.18602060	791.79532054
47	178.11942185	241.09881210	329.22438598	452.90015211	626.86276245	871.97485259
48	188.02539294	256.56452882	353.27009300	490.93216428	684.28041107	960.17233785
49	198.42666259	272.95840055	378.99899951	530.34273742	746.86564807	1057.18957163
50	209.34799572	290.33590458	406.52892947	573.77015642	815.08355640	1163.90852880

複利年金現價表

年	2釐	2½釐	3釐	3½釐	4釐	4½釐
1	0.98039216	0.97560976	0.97087379	0.96618357	0.96153846	0.95693780
2	1.94156094	1.92742415	1.91346970	1.89969428	1.88609467	1.87266775
3	2.88388327	2.85602356	2.82861135	2.80163698	2.77509103	2.74896435
4	3.80772870	3.76197421	3.71709840	3.67307921	3.62989522	3.58752570
5	4.71345951	4.64582850	4.57970719	4.51505238	4.45182233	4.38997674
6	5.60143089	5.50812536	5.41719144	5.52855302	5.24213686	5.15787248
7	6.47199107	6.34939060	6.23028296	6.11454398	6.00205467	5.89270094
8	7.32548144	7.17013717	7.01969219	6.87395554	6.73274487	6.59588607
9	8.16223671	7.97086553	7.78610392	7.60768651	7.43533161	7.26879050
10	8.98258501	8.75206393	8.53020284	8.31660532	8.11089578	7.91271818
11	9.78684805	9.51420871	9.25262411	9.00155104	8.76047671	8.52891692
12	10.57534122	10.25776460	9.95400399	9.66333433	9.38507376	9.11858078
13	11.34837375	10.98318497	10.63499933	10.30273849	9.98564785	9.86285242
14	12.10624877	11.69091217	11.29607314	10.92052028	10.56312293	10.22282528
15	12.84926350	12.38137773	11.93763509	11.51741090	11.11838743	10.73954573
16	13.57770931	13.05500266	12.56110203	12.09411681	11.65229531	11.23401505
17	14.29187188	13.71219772	13.16611847	12.65132059	12.16566885	11.70719143
18	14.99203125	14.35336363	13.75351308	13.18968173	12.65929697	12.15999180
19	15.67846201	14.97889134	14.32379911	13.70983742	13.13393940	12.59329359
20	16.35143334	15.58916229	14.87747486	14.21240330	13.59032634	13.00793645
21	17.01120916	16.18454857	15.41502414	14.69797420	14.02915995	13.40472388
22	17.65804820	16.76541324	15.93691664	15.16712484	14.45111533	13.78442476
23	18.29220412	17.33211048	16.44360839	15.62041047	14.85684197	14.14777489
24	18.91392560	17.88498585	16.93554212	16.05836760	15.24696314	14.49547837
25	19.52345647	18.42437642	17.41314769	16.48151159	15.62207994	14.82820896
26	20.12103576	18.95061114	17.87684242	16.89035226	15.98276918	15.14661145
27	20.70689780	19.46401087	18.32703147	17.28536451	16.32958575	15.45130282
28	21.28127236	19.96488866	18.76410823	17.66701885	16.66306322	15.74287351
29	21.84438466	20.45354991	19.18845459	18.03576700	16.98371463	16.02188853
30	22.39645555	20.93029259	19.60044135	18.39201541	17.29203330	16.28888854
31	22.93770152	21.39540741	20.00042849	18.73627576	17.58849356	16.54439095
32	23.48833482	21.84917796	20.38876553	19.06886547	17.87355150	16.78889086
33	23.98856355	22.29188094	20.76579178	19.39020818	18.14764567	17.02286207
34	24.49859172	22.72378628	21.13183668	19.70063423	18.41119776	17.24675796
35	24.99861933	23.14515734	21.48722007	20.00060110	18.66461323	17.46101240
36	25.48884248	23.55625107	21.83225250	20.29049381	18.90828195	17.66604058
37	25.96945341	23.95731812	22.16723544	20.57052542	19.14257880	17.86223979
38	26.44064060	24.34860304	22.49246159	20.84108736	19.36786423	18.04999023
39	26.90258883	24.73034443	22.80821513	21.10249987	19.58448484	18.22965572
40	27.35547924	25.10277505	23.11477197	21.35507234	19.79277388	18.40158442
41	27.79948945	25.46612200	23.41239997	21.59910371	19.99305181	18.56610946
42	28.23479358	25.82060683	23.70135920	21.83488281	20.18562674	18.72354975
43	28.66156233	25.16644569	23.98190213	22.06268870	20.37079494	18.87421029
44	29.07996307	26.50384945	24.25427392	22.28279102	20.54884129	19.01838305
45	29.49015987	26.83302386	24.51871254	22.49545026	20.72003970	19.15634742
46	29.89231360	27.15416962	24.77544907	22.70091813	20.38465356	19.28837074
47	30.28658196	27.46748255	25.02470783	22.89943780	21.04293612	19.41470884
48	30.67311957	27.77315371	25.26670664	23.09124425	21.19513088	19.53560654
49	31.05207801	28.07136947	25.50165693	23.27656450	21.34147200	19.65129813
50	31.42360589	28.36231168	25.72976401	23.45561787	21.48218462	19.76200778

複利年金現價表

年	5 釐	6 釐	7 釐	8 釐	9 釐	1 分
1	0.95238095	0.94339623	0.93457944	0.92592593	0.91743119	0.90909091
2	1.85941043	1.83339267	1.80801817	1.78326475	1.75911119	1.73553719
3	2.72324803	2.67301195	2.62431604	2.57709699	2.52129467	2.48685199
4	3.54595050	3.46510561	3.38721126	3.31212684	3.23971488	3.16986545
5	4.32947667	4.21236379	4.10019744	3.99271004	3.88965126	3.79078677
6	5.07569206	4.91732433	4.76653966	4.62287966	4.48591859	4.35526070
7	5.78637340	5.58238144	5.38928940	5.20637006	5.03295284	4.89841882
8	6.46321276	6.20979381	5.97129851	5.74663894	5.53481911	5.33492620
9	7.10782168	6.80169227	6.51525225	6.24688791	5.99524689	5.75902382
10	7.72173493	7.36008705	7.02358154	6.71008140	6.41765770	6.14456711
11	8.30641422	7.88687458	7.49867434	7.13896426	6.80519055	6.49506101
12	8.86325164	8.38384394	7.94268630	7.53607802	7.16072528	6.81360182
13	9.39357299	8.85268296	8.35765074	7.90377594	7.48690392	7.10335620
14	9.89864094	9.29498393	8.74546799	8.24423698	7.78615039	7.36668746
15	10.37965804	9.71224899	9.10789801	8.55947869	8.06068843	7.60607951
16	10.83776956	10.10589527	9.44664860	8.85136916	8.31255819	7.82370864
17	11.27406625	10.47725969	9.76322299	9.12163811	8.54363137	8.02155331
18	11.68958690	10.82760348	10.05908691	9.37188714	8.75562511	8.20141210
19	12.08532086	11.15811649	10.33559524	9.60359920	8.95011478	8.36492009
20	12.46221034	11.46992122	10.59401425	9.81814741	9.12854567	8.51355372
21	12.82115271	11.76407662	10.83552733	10.01680316	9.29224373	8.84869429
22	13.16300258	12.04158172	11.06124050	10.20074366	9.44242544	8.77154026
23	13.48857388	12.30337898	11.27218738	10.37105895	9.58020683	8.88321842
24	13.79894179	12.55035753	11.46933400	10.52875828	9.70661177	8.98474402
25	14.09394457	12.78335616	11.65358318	10.67477619	9.82257960	9.07704002
26	14.37518530	13.00316619	11.82577837	10.80997795	9.92897211	9.16094547
27	14.64303362	13.21053414	11.98670904	10.93516477	10.02657992	9.23722316
28	14.89812726	13.40616428	12.13711125	11.05107849	10.11612837	9.30656651
29	15.14107358	13.59072102	12.27767407	11.15840601	10.19828291	9.36960591
30	15.37245103	13.76483115	12.40904118	11.25778334	10.27365404	9.42691447
31	15.59281050	13.92908599	12.53181419	11.34979939	10.34280187	9.47901315
32	15.80267667	14.08404339	12.64655532	11.43499944	10.40624025	9.52637559
33	16.00254921	14.23022961	12.75379002	11.51388827	10.46444060	9.56943236
34	16.19290101	14.36814114	12.85400936	11.58693367	10.51783541	9.60857487
35	16.37419429	14.49824636	12.94767239	11.65456822	10.56682148	9.64415897
36	16.54685171	14.62098713	13.03520776	11.71719279	10.61176282	9.67650816
37	16.71148734	14.73678031	13.11701660	11.77517851	10.65299342	9.70591651
38	16.86789271	14.84601916	13.19347345	11.82886899	10.69081965	9.73265137
39	17.01704067	14.94907468	13.26492846	11.87858240	10.72552261	9.75695579
40	17.15908635	15.04629687	13.33170884	11.92461333	10.75736020	9.77905072
41	17.29436796	15.13801592	13.39412041	11.96723457	10.78656899	9.79913702
42	17.42320758	15.22454332	13.45244898	12.00669867	10.81336604	9.81739729
43	17.54591198	15.30617294	13.50696167	12.04323951	10.83795050	9.83399753
44	17.66727331	15.38318202	13.55790820	12.07707362	10.86050504	9.84908867
45	17.77406982	15.45583209	13.60552159	12.10840150	10.88119729	9.86280788
46	17.88006650	15.52436990	13.65002018	12.13740880	10.90018100	9.87527989
47	17.98101571	15.58902821	13.69160764	12.16426741	10.91759725	9.88661808
48	18.07715782	15.65002661	13.73047443	12.18913649	10.93357545	9.89692553
49	18.16872173	15.70757227	13.76679853	12.21216341	10.94823436	9.90629594
50	18.25592546	15.76186064	13.80074629	12.23348464	10.96168290	9.91481449

複利年金分還表

年	2 釐	2½ 釐	3 釐	3½ 釐	4 釐	4½ 釐
1	1.02000000	1.02500000	1.03000000	1.03500000	1.04000000	1.04500000
2	0.51504950	0.51882716	0.52261084	0.52640049	0.53019608	0.53399756
3	0.34675467	0.35013717	0.35353036	0.35693418	0.36034854	0.36377336
4	0.26262375	0.26581788	0.26902705	0.27225114	0.27549005	0.27874365
5	0.21215839	0.21524686	0.21835457	0.22248137	0.22462711	0.22779164
6	0.17852581	0.18154997	0.18459750	0.18766821	0.19076190	0.19387839
7	0.15451196	0.15749543	0.16050635	0.16354449	0.16660961	0.16970147
8	0.13650980	0.13916735	0.14245639	0.14547665	0.14852783	0.15160965
9	0.12251514	0.12545689	0.12843386	0.13144601	0.13449299	0.13757447
10	0.11132653	0.11425876	0.11723051	0.12024137	0.12329094	0.12637882
11	0.10217794	0.10510596	0.10807745	0.11109197	0.11414904	0.11724818
12	0.09455960	0.09748713	0.10046209	0.10348395	0.10655217	0.10966619
13	0.08811835	0.09104827	0.09402954	0.09706157	0.10014373	0.10327535
14	0.08260197	0.08553653	0.08852634	0.09157073	0.09466897	0.09782032
15	0.07782517	0.08076646	0.08376658	0.08682507	0.08994110	0.09311381
16	0.07365013	0.07659839	0.07961085	0.08268483	0.08582000	0.08901537
17	0.06996984	0.07292777	0.07595253	0.07904313	0.08219852	0.08541758
18	0.06670210	0.06967008	0.07270870	0.07581684	0.07899333	0.08223690
19	0.06378177	0.06676062	0.06981388	0.07294033	0.07613862	0.07940734
20	0.06115672	0.06414613	0.06721571	0.07036108	0.07358175	0.07687614
21	0.05878477	0.06178733	0.06487178	0.06803659	0.07128011	0.07460057
22	0.05663140	0.05964661	0.06274739	0.06593207	0.06919881	0.07254565
23	0.05466810	0.05769638	0.06081390	0.06401880	0.06730906	0.07068249
24	0.05287110	0.05591282	0.05904742	0.06227283	0.06558683	0.06898703
25	0.05122044	0.05427592	0.05742787	0.06067404	0.06401196	0.06743903
26	0.04969923	0.05276875	0.05593829	0.05920540	0.06256738	0.06602137
27	0.04829309	0.05137687	0.05456421	0.05785241	0.06123854	0.06471946
28	0.04698967	0.05008793	0.05329323	0.05660265	0.06001298	0.06352081
29	0.04577836	0.04889127	0.05211467	0.05544538	0.05887993	0.06241461
30	0.04464992	0.04777764	0.05101926	0.05437133	0.05783010	0.06139154
31	0.04359635	0.04673900	0.04999893	0.05337240	0.05685535	0.06044345
32	0.04261061	0.04576831	0.04904662	0.05244150	0.05594859	0.05956320
33	0.04168653	0.04485938	0.04815612	0.05157242	0.05510357	0.05874453
34	0.04081867	0.04400675	0.04732196	0.05075966	0.05431477	0.05798191
35	0.04000221	0.04320558	0.04653929	0.04999835	0.05357731	0.05727045
36	0.03923285	0.04245158	0.04580379	0.04928416	0.05288688	0.05660578
37	0.03850678	0.04174090	0.04511162	0.04861325	0.05223957	0.05598402
38	0.03782057	0.04107012	0.04445934	0.04798214	0.05163192	0.05540169
39	0.03717114	0.04043615	0.04384384	0.04738775	0.05106083	0.05485567
40	0.03655575	0.03983623	0.04326238	0.04682728	0.05052349	0.05434315
41	0.03597188	0.03926786	0.04271241	0.04629822	0.05001738	0.05386158
42	0.03541729	0.03872876	0.04219167	0.04579828	0.04954020	0.05340868
43	0.03488993	0.03821688	0.04169811	0.04532539	0.04908989	0.05298235
44	0.03438794	0.03773037	0.04122985	0.04487798	0.04866454	0.05258071
45	0.03390962	0.03726752	0.04078518	0.04445343	0.04826246	0.05220202
46	0.03345342	0.03682676	0.04036254	0.04405108	0.04788205	0.05184471
47	0.03301792	0.03640669	0.03996051	0.04366919	0.04752189	0.05150734
48	0.03260184	0.03600599	0.03957777	0.04330646	0.04718065	0.05118858
49	0.03220396	0.03562348	0.03921314	0.04296167	0.04685712	0.05088722
50	0.03182321	0.03525806	0.03886550	0.04263371	0.04655020	0.05060215

複利年金分還表

年	5釐	6釐	7釐	8釐	9釐	1分
1	1.05000000	1.06000000	1.07000000	1.08000000	1.09000000	1.10000000
2	0.53780488	0.54543689	0.55309179	0.56076923	0.56846890	0.57619048
3	0.36720856	0.37410981	0.38105166	0.38803351	0.39505476	0.40211480
4	0.28201183	0.38859149	0.29522812	0.30192080	0.30866866	0.31547080
5	0.23097480	0.23739640	0.24389069	0.25045645	0.25709246	0.26379748
6	0.19701747	0.20336263	0.20979580	0.21631539	0.22291978	0.22960738
7	0.17281982	0.17913502	0.18555322	0.19207240	0.19869052	0.20540550
8	0.15472181	0.16103594	0.16746776	0.17401476	0.18067438	0.18744402
9	0.14069008	0.14702224	0.15348647	0.16007971	0.16679880	0.17364054
10	0.12950458	0.13586796	0.14237750	0.14902949	0.15582009	0.16274539
11	0.12038889	0.12676294	0.13335690	0.14007634	0.14694666	0.15396314
12	0.11282541	0.11927703	0.12590199	0.13266502	0.13965066	0.14676332
13	0.10645577	0.11296011	0.11965085	0.12652181	0.13356656	0.14077852
14	0.10102397	0.10758491	0.11434494	0.12129685	0.12843317	0.13574622
15	0.09643229	0.10296276	0.10979462	0.11682954	0.12405888	0.13147378
16	0.09226991	0.09895214	0.10585765	0.11297687	0.12029991	0.12781662
17	0.08869914	0.09544480	0.10242519	0.10962943	0.11704625	0.12466413
18	0.08554622	0.09235654	0.09941260	0.10670210	0.11421229	0.12193022
19	0.08274501	0.08962086	0.09675301	0.10412763	0.11172041	0.11954687
20	0 08024259	0.08718456	0.09439293	0 10185221	0.10954647	0.11745962
21	0.07799611	0.08500455	0.09228900	0.09983225	0.10761663	0.11562439
22	0.07597051	0.08304557	0.09040577	0.09803207	0.10590499	0.11400506
23	0.07413682	0.08127818	0.08871393	0.09642271	0.10438188	0.11257181
24	0.07247090	0.07967900	0.08718902	0.09497796	0.10302256	0.11129978
25	0.07095246	0.07822672	0.08581052	0.09367878	0.10180625	0.11016807
26	0.06956432	0.07690435	0.08456103	0.09250713	0.10071536	0.10915904
27	0.06829186	0.07569717	0.08342573	0.09144809	0.09973491	0.10825764
28	0.06712253	0.07459255	0.08239193	0.09048891	0.09885205	0.10745101
29	0.06604551	0.07357961	0.08144865	0.08961854	0.09805572	0.10672807
30	0.06505144	0.07264891	0.08058640	0.08882743	0.09733635	0.10607925
31	0.06413212	0.07179222	0.07979691	0.08810728	0.09668560	0.10549621
32	0.06328042	0.07100234	0.07907292	0.08745081	0.09609619	0.10497172
33	0.06249004	0.07027293	0.07840807	0.08685163	0.09556173	0.10449941
34	0.06175545	0.06959843	0.07779674	0.08630411	0.09507660	0.10407371
35	0.06107171	0.06897386	0.07723396	0.08580326	0.09463584	0.10368971
36	0.06043446	0.06839483	0.07671531	0.08534467	0.09423505	0.10334306
37	0.05983979	0.06785743	0.07623685	0 08492440	0.09387033	0.10302994
38	0.05928423	0.06735812	0.07579505	0.08453894	0.09353820	0.10274692
39	0.05876462	0.06689377	0.07538676	0.08418573	0.09323555	0.10249098
40	0.05827816	0.06646154	0 07500914	0.08386016	0.09295961	0.10225941
41	0.05782229	0.06605886	0.07465962	0.08356149	0.09277789	0.10204980
42	0.05739471	0.06568342	0.07433591	0.08328684	0.09247814	0.10185999
43	0.05699333	0.06533312	0.07403590	0.08303410	0.09226837	0.10198805
44	0.05661625	0.06500606	0.07375769	0.08280152	0.09207675	0.10153224
45	0.05626173	0.06470050	0.07349957	0.08258728	0.09190165	0.10139100
46	0.05592820	0.06441485	0.07325996	0.08238991	0.09174160	0.10126295
47	0.05561421	0.06414768	0.07303744	0.08220799	0.09159525	0.10114682
48	0.05531843	0.06389766	0.07283070	0.08204027	0.09146139	0.10104148
49	0.05503965	0.06366356	0.07263853	0.08188557	0.09133893	0.10094590
50	0.05477674	0.06344429	0.07245985	0 08174286	0.09122687	0.10085917

日利年利比較表

對於日利之年利				對於年利之日利			
日利	年利	日利	年利	年利	日利	年利	日利
0.55	0.20075	2.10	0.76650	0.200	0.5479	1.050	2.8757
0.60	0.21900	2.20	0.80300	0.225	0.6164	1.100	3.0137
0.65	0.23725	2.30	0.83950	0.250	0.6849	1.150	3.1507
0.70	0.25550	2.40	0.87600	0.275	0.7534	1.200	3.2877
0.75	0.27375	2.50	0.91250	0.300	0.8219	1.250	3.4247
0.80	0.29200	2.60	0.94900	0.325	0.8904	1.300	3.5616
0.85	0.31025	2.70	0.98500	0.350	0.9589	1.350	3.6986
0.90	0.32850	2.80	1.02200	0.400	1.0950	1.400	3.8356
0.95	0.34675	2.90	1.05850	0.450	1.2329	1.450	3.9726
1.00	0.36500	3.00	1.09500	0.500	1.3699	1.500	4.1096
1.10	0.40150	3.10	1.13150	0.550	1.5069	1.550	4.2466
1.20	0.43800	3.20	1.16800	0.600	1.6438	1.600	4.3836
1.30	0.47450	3.30	1.21450	0.650	1.7808	1.650	4.5206
1.40	0.51100	3.40	1.24100	0.700	1.9178	1.700	4.6575
1.50	0.54750	3.50	1.27750	0.750	2.0548	1.750	4.7945
1.60	0.58400	3.60	1.31400	0.800	2.1918	1.800	4.9315
1.70	0.62050	3.70	1.35050	0.850	2.3288	1.850	5.0685
1.80	0.65700	3.80	1.38700	0.900	2.4658	1.900	5.2055
1.90	0.69350	3.90	1.42350	0.950	2.6027	1.950	5.3425
2.00	0.73000	4.00	1.46000	1 000	2.7397	2.000	5.4795

注意 於日利以毫爲單位,於年利以分爲單位.

各國之度量衡及貨幣表

1. 本國之度量衡及貨幣表

I. 長度表(標準制)

法定名稱	公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分	公釐
等	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
		1	10	100	1000	10000	100000
			1	10	100	1000	10000
				1	10	100	1000
					1	10	100
數						1	10

〔說明〕 我國標準制卽法國米突制，參閱本附錄中之法國度量衡諸表。

II. 面積及地積表(標準制)

法定名稱		平方公里	平方公引	平方公丈	平方公尺	平方公寸
	面積	平方公里	平方公引	平方公丈	平方公尺	平方公寸
	地積		公頃	公畝	公釐	
等		1	100	10000	1000000	100000000
			1	100	10000	1000000
				1	100	10000
數					1	100

〔說明〕 平方公寸以下有平方公分、平方公釐等，皆以百進。

III. 體積及容量表(標準制)

法定名稱 體積	立方公丈	立方公尺			立方公寸
容量		公秉	公石	公斗	公升
等	1	1000	10000	100000	1000000
		1	10	100	1000
			1	10	100
數				1	10

〔說明〕 公升以下有公合、公勺、公撮等,皆以十進.容量1公撮＝體積1立方公分.

IV. 重量表(標準制)

法定名稱	公鐓	公擔	公衡	公斤	公兩	公錢	公分
等	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
		1	10	100	1000	10000	100000
			1	10	100	1000	10000
				1	10	100	1000
					1	10	100
數						1	10

〔說明〕 衡制以純水1立方公分,在攝氏4度時之重爲重量之基本單位,曰1公分.公分以下有公釐、公毫、公絲等,皆以十進.

V. 長度表(市用制)

法定名稱	市里	市引	市丈	市尺	市寸
等	1	15	150	1500	15000
		1	10	100	1000
			1	10	100
數				1	10

〔說明〕 市用制爲民國十八年二月十六日國民政府所公布之度量衡新制，一名一二三制，以其不離標準制，故非獨立制，因其近於舊制，故合乎民情. 市寸以下有市分、市釐、市毫等，皆以十進.

VI. 面積及地積表(市用制)

法定名稱	面積	平方市里		平方市引			平方市丈		平方市尺
	地積		市頃		市畝	市分		市釐	
等		1	3.75	225	375	3750	22500	37500	2250000
			1	60	100	1000	6000	10000	600000
				1	1.667	16.667	100	$166\frac{2}{3}$	10000
					1	10	60	100	6000
						1	6	10	600
數							1	$1.\frac{2}{3}$	100
								1	60

VII. 體積及容量表(市用制)

法定名稱	體積	立方市丈		立方市尺				立方市寸
	容量		市石		市斗	市升	市合	
等		1	370.37	1000	3703.7037	37037.037	370370.37	1000000
			1	2.7	10	100	1000	2700
				1	3.7037	37.037	370.37	1000
					1	10	100	270
						1	10	27
數							1	2.7

〔說明〕 市合以下有市勺、市撮等，皆以十進．

VIII. 重量表(市用制)

法定名稱	市擔	市斤	市兩	市錢	市分
等	1	100	1600	16000	160000
		1	16	160	1600
			1	10	100
數				1	10

〔說明〕 純水1立方市寸，在攝氏四度時之重量，爲1.185185市兩，故1市兩＝四度時純水0.84375立方市寸之重．市分以下有市釐、市毫、市絲等，皆以十進．

IX. 貨 幣 表

銀圓……	圓	角	分		銀兩……	兩	錢	分
等	1	10	100		等	1	10	100
數		1	10		數		1	10

〔說明〕 我國貨幣,從前以銀圓與銀兩同爲本位貨幣,自民國二十二年廢兩改圓後,銀兩僅爲一種商品而非貨幣矣.銀圓之外,有一角、二角、五角之小銀幣及當一十文、二十文等之銅幣,此等皆爲輔幣.

X. 本國度量衡之折合表

(A. 標準制折合市用制及舊制)

制別 項別	標準制	市用制	舊營造庫平制
長度	1公尺	3市尺	3.125營造尺
	1公里	2市里	1.7361營造里
面積及地積	1平方公尺	9平方市尺	9.7656平方營造尺
	1平方公里	4平方市里	3.0141平方營造里
	1公畝	0.15市畝	0.1628營造畝
體積及容量	1立方公尺	27立方市尺	30.5176立方營造尺
	1公撮	1市撮	0.0966營造勺
	1公升	1市升	0.9657營造升
重量	1公分	3.2市分	2.6809庫平分
	1公斤	2市斤	1.6756庫平斤
	1公鐓	20市擔	1675.5583庫平斤

XI. 本國度量衡之折合表

(B. 市用制折合標準制及舊制)

項別＼制別	市用制	標準制	舊營造庫平制
長度	1 市尺	0.3333公尺	1.0417營造尺
	1 市里	0.5公里	0.8681營造里
面積及地積	1 平方市尺	0.1111平方公尺	1.0851平方營造尺
	1 平方市里	0.25平方公里	0.7535平方營造里
	1 市畝	6.6667公畝	1.0851營造畝
體積及容量	1 立方市尺	0.0370立方公尺	1.1303立方營造尺
	1 市撮	1公撮	0.0966營造勺
	1 市升	1公升	0.9657營造升
重量	1 市兩	0.3125公兩	0.8378庫平兩
	1 市斤	0.5公斤	0.8378庫平斤
	1 市擔	0.5公擔	83.7779庫平斤

XII. 本國度量衡之折合表

(C. 舊制折合標準制及市用制)

項別＼制別	舊營造庫平制	標準制	市用制
長度	1 營造尺	0.32公尺	0.96市尺
	1 營造里	0.576公里	1.152市里
面積及地積	1 平方營造尺	0.1024平方公尺	0.9216平方市尺
	1 平方營造里	0.3318平方公里	1.3271平方市里
	1 營造畝	6.144公畝	0.9216市畝

體積及容量	1 立方營造尺	0.0328立方公尺	0.8847立方市尺
	1 營造勺	1.0355公勺	1.0355市勺
	1 營造升	1.0355公升	1.0355市升
重量	1 庫平兩	0.37301公兩	1.1936市兩
	1 庫平斤	0.5968公斤	1.1936市斤

XIII. 我國度量衡折合英制表

項別	制別	我國之單位	折合英國之數
長度	標準制	1 公寸	3.937吋
		1 公尺	3.2808呎
		1 公里	0.6214哩
	市用制	1 市寸	1.312吋
		1 市尺	1.0936呎
		1 市里	0.3107哩
	舊制	1 營造寸	1.2600吋
		1 營造尺	1.0499呎
		1 營造里	0.3579哩
面積及地	標準制	1 平方公尺	10.7636平方呎
		1 平方公里	0.3861平方哩
		1 公畝	0·0247英畝
	市用制	1 平方市尺	1.1960平方呎
		1 平方市里	0.0965平方哩
		1 市畝	0.1644英畝

積	舊制	1 平方營造尺	1.1023平方呎
		1 平方營造里	0.1281平方哩
		1 營造畝	0.1520英畝
體積及容量	標準制	1 立方公尺	35.3166立方呎
		1 公升	0.2200加倫
	市用制	1 立方市尺	1.3078立方呎
		1 市升	0.2200加倫
	舊制	1 立方營造尺	1.1572立方呎
		1 營造升	0.2278加倫
重量	標準制	1 公分	15.4324克冷
		1 公斤	2.2046常磅
		1 公鐓	0.9842英噸
	市用制	1 市兩	1.1023常衡溫司
		1 市斤	1.1023常磅
		1 市擔	0.9842英擔
	舊制	1 庫平兩	1.3158常衡溫司
		1 庫平斤	1.3158常磅

〔註〕法國之度量衡卽係標準制；故我國之度量衡折合法國之數，此表並未列入。參閱以上數表。1公鐓＝1.1023美噸。

2. 法國之度量衡及貨幣表

〔說明〕公尺制創自法國，爲萬國所通用，自我國加入萬國度量衡同盟會後，命名爲標準制。其制以地球子午周四千萬分之一爲長度之基本單位，卽一公尺，我國昔譯爲米突，邁當或密達。以十公尺之平方，爲面積之基本單位，曰一公畝。以十分之一公尺之立方爲體積之基本單位，曰一公升。以百分之一公尺之立方體所容攝氏4度之純水之重，爲重量之基本單位，曰一公分。此制互相貫串，且皆以十進，故其法最善，今列諸表於後。

I. 長 度 表

原 名	我國定名	略 號		舊 譯 名	進位
Millimètre	公 釐	mm.	糎	密理邁當,密理米突,粍	各位皆以十進
Centimètre	公 分	cm.	粉	生的邁當，生的米突，生的密達,糎	
Décimètre	公 寸	dm.	籿	特西米突,底西邁當,粉	
Mètre	公 尺	m.	粎	邁當,米突,密達,咪,米,粎	
Décamètre	公 丈	Dm.	粀	特克邁當,特克米突,籵	
Hectomètre	公 引	Hm.	粌	海克邁當,海克米突,粨	
Kilomètre	公 里	Km.	粴	基羅邁當,啓羅米突,粁	

II. 面積及地積表

原 名	我國定名	略 號		舊 譯 名	進位
Millimètre carré	平方公釐	mm^2	方糎	密理米突街害,方粍	各位皆以百進
Centimètre carré	平方公分	cm^2	方粉	生的米突街害,方糎	
Décimètre carré	平方公寸	dm^2	方籿	特西米突街害,方粉	
Mètre carré (Centiare)	平方公尺 (公釐)	m^2 (ca.)	方粎 (糎)	米突街害,方米,方粎 (生的阿爾,娌)	
Décamètre carré (Are)	平方公丈 (公畝)	Dm^2 (a.)	方粀 (畝)	特克米突街害,方籵 (阿爾,愛爾,安)	
Hectomètre carré (Hectare)	平方公引 (公頃)	Hm^2 (Ha.)	方粌 (頃)	海克米突街害,方粨 (海克脫阿爾,婄)	
Kilomètre carré	平方公里	Km^2	方粴	啓羅米突街害,方粁	

〔註〕 公頃,公畝,公釐三者,爲測地積時所用.1平方公尺=1公釐,餘準此.

III. 體積表

原名	我國定名	略號		舊譯名	進位
Millimètre cube	立方公釐	mm^3	立方粍	密理米突朱勃，立粍	各位皆以千進
Centimètre cube	立方公分	cm^3, c.c.	立方粉	生的米突朱勃，立粍	
Décimètre cube	立方公寸	dm^3	立方粉	特西米突朱勃，立粉	
Mètre cube	立方公尺	m^3	立方米	米突朱勃，立米	
Décamètre cube	立方公丈	Dm^3	立方籵	特克米突朱勃，立籵	

IV. 容量表

原名	我國定名	略號		舊譯名	進位
Millilitre	公撮(立方公分)	ml.	竓	密理立脫爾，竓	各位皆以十進
Centilitre	公勺	cl.	竰	生的立脫爾，竰	
Décilitre	公合	dl.	竕	特西立脫爾，竕	
Litre	公升(立方公寸)	l.	竔	立脫爾，立脫耳，立突，竔	
Décalitre	公斗	Dl.	竍	特卡立脫爾，竍	
Hectolitre	公石	Hl.	竡	海克脫立脫爾，竡	
Kilolitre	公秉(立方公尺)	Kl.	竏	基羅立脫爾，啓羅立脫爾，竏	

V. 重量表

原名	我國定名	略號		舊譯名	進位
Milligramme	公絲	mg.	⿺走⿱公絲	密理格蘭姆,密理克蘭姆,⿺走毛,瓱	各位皆以十進
Centigramme	公毫	cg.	⿺走⿱公毫	生的格蘭姆,生的克蘭姆,⿺走厘,甅	
Décigramme	公釐	dg.	⿺走⿱公釐	特西格蘭姆,特西克蘭姆,⿺走分,瓰	
Gramme	公分	g.	⿺走⿱公分	格蘭姆,克蘭姆,克郎姆,克,瓦	
Décagramme	公錢	Dg.	⿺走⿱公錢	特卡格蘭姆,特卡克蘭姆,⿺走十,瓧	
Hectogramme	公兩	Hg.	⿺走⿱公兩	海克脫格蘭姆,海克脫克蘭姆,⿺走百,瓸	
Kilogramme	公斤	Kg.	⿺走⿱公斤	基羅格蘭姆,啓羅克蘭姆,⿺走千,瓩	
Myriagramme	公衡	Myg.	⿺走⿱公衡	邁里格蘭姆	
Quintal	公擔	Q.	⿺走⿱公擔	貴里特,法擔	
Tonne	公鐓	T.	⿺走⿱公鐓	脫因,法噸	

VI. 貨幣表

原名	譯名	略號	進位
Franc	佛郎	佛	1佛 =100 參
Centime	生丁	參	

3. 英美之度量衡及貨幣表

I. 長度表

原名	Mile	Furlong	Chain	Pole	Fathom	Yard	Foot	Link	Inch
譯名	埋爾	富呵浪	奢因	布耳	花當	依亞	幅脫	令克	因制
略號	哩	浪	鎖	桿	噚	碼	呎	令	吋
等	1	8	80	320	880	1760	5280	8000	63360
		1	10	40	110	220	660	1000	7920
			1	4	11	22	66	100	792
				1	2.75	5.5	16.5	25	198
					1	2	6	$9\frac{1}{11}$	72
						1	3	$4\frac{6}{11}$	36
							1	$1\frac{17}{33}$	12
數								1	7.92

又水程之長度如下:

1 海里(浬, Nautical mile)=10鏈(Cable)=1000濤(Nautical fathom).

惟英 1 浬=6080 呎.

美 1 浬=6086 呎.

II. 面積表 A.

原名	Square mile	Square yard	Square foot	Square inch
略號	方哩	方碼	方呎	方吋
等	1	3097600	27878400	4014489600
		1	9	1296
數			1	144

III. 面積表 B.

原名	Square mile	Acre	Rood	Square chain	Square pole	Square link
譯名		愛克	路得			
略號	方哩	英畝		方鏈	方桿	方令
等數	1	640	2560	6400	102400	64000000
		1	4	10	160	100000
			1	2.5	40	25000
				1	16	10000
					1	625

〔註〕 1 英畝=43560 方呎.

IV. 體積表

原名	Cubic yard	Cubic foot	Cubic inch
略號	立方碼	立方尺	立方寸
等數	1	27	46656
		1	1728

V. 容量表 (A. 液量)

原名	Gallon	Quart	Pint	Gill	Ounce
譯名	加倫	瓜脫	品脫	及耳	溫司
略號	嗧	呏	哈	吋	
等數	1	4	8	32	160
		1	2	8	40
			1	4	20
				1	5

〔註〕 英1加倫＝277.274 立方吋，　美1加倫＝231 立方吋。

VI. 容量表(B. 乾量)

原名	Bushel	Peck	Gallon	Quart	Pint
譯名	蒲式耳	潑克	加倫	瓜脫	品脫
略號	嘝	呌	嗧	呏	哈
等	1	4	8	32	64
·		1	2	8	16
			1	4	8
數				1	2

〔註〕 英1蒲式耳＝1.283676 立方呎，　美1蒲式耳＝1.244458 立方呎。
英乾量1加倫與液量1加倫同，　美乾量1加倫＝268.803 立方吋。

VII. 重量表(A. 常衡)

原名	Ton	Hundred weight	Pound	Ounce	Dram	Grain
譯名		漢厥懷脫		溫司	打蘭	克冷
略號	噸(長噸)	擔	磅	啢		喱
等	1	20	2240	35840	573440	15680000
		1	112	1792	28672	784000
			1	16	256	7000
				1	16	437.5
數					1	27.34375

〔註〕 此係英制。 美1擔＝100 磅， 美1噸(短噸)＝20 擔＝2000 磅。
1溫司＝純水1溫司(液量)在華氏62度時之重。

VIII. 重量表（B. 金衡）

原名	Pound	Ounce	Pennyweight	Grain
譯名		溫司	本尼懷脫	克冷
略號	磅	啢	英錢	喱
等數	1	12	240	5760
		1	20	480
			1	24

IX. 重量表（C. 藥衡）

原名	Pound	Ounce	Dram	Scruple	Grain
譯名		溫司	打蘭	司克路步	克冷
略號	磅	啢			喱
等數	1	12	96	288	5760
		1	8	24	480
			1	3	60
				1	20

〔註〕 金藥衡 1 磅＝常衡 0.82285714……………………磅.
金藥衡 1 溫司＝常衡 1.0971428……………溫司.
常衡 1 磅＝金藥衡 1.2152777…………………磅.
常衡 1 溫司＝金藥衡 0.91145833……………溫司.

X. 貨幣表

國別	英幣			美幣	
原名	Sovereign	Shilling	Pence	Dollar	Cent
譯名	索佛令	先令	辨士	他賴	生脫
略號	鎊	先	片	弗	仙
等數	1	20	240	1	100
		1	12		

XI. 英美度量衡折合我國標準制市用制及舊營造庫平制

〔說明〕 英美制度最爲繁複，茲取其我國所常用者，列其折合表於下.

項別＼制別	英制	標準制	市用制	舊營造庫平制
長度	1 英寸	25.4公釐	0.762市寸	0.7937營造寸
	1 英尺	0.3048公尺	0.9144市尺	0.9525營造尺
	1 英碼	0.9144公尺	2.7432市尺	2.8575營造尺
	1 英里	1.6093公里	3.2187市里	2.7940營造里
	1 英海里	1.8532公里	3.7064市里	3.2173營造里
面積及地積	1 平方英寸	6.4514平方公分	0.5806平方市寸	0.6301平方營造寸
	1 平方英尺	0.0929平方公尺	0.8361平方市尺	0.9073平方營造尺
	1 平方英碼	0.8361平方公尺	7.5249平方市尺	8.1657平方營造尺
	1 平方英里	2.5900平方公里	10.3600平方市里	7.8064平方營造里
	1 英畝	40.468公畝	6.0702市畝	6.5867營造畝
體積及容量	1 立方英寸	16.386立方公分	0.4424立方市寸	0.5001立方營造寸
	1 立方英尺	0.0283立方公尺	0.7645立方市尺	0.8642立方營造尺
	1 立方英碼	0.7645立方公尺	20.6415立方市尺	23.3334立方營造尺
	1 英溫司	2.8413公勺	2.8413市勺	2.7439營造勺
	1 英品脫	5.6825公合	5.6825市合	5.4878營造合
	1 英加倫	4.5460公升	4.5460市升	4.3902營造升
	1 英蒲式耳	3.6368公斗	3.6368市斗	3.5122營造斗
常衡制	1 英溫司	28.3496公分	0.9072市兩	0.7600庫平兩
	1 英磅	0.4536公斤	0.9072市斤	0.7600庫平斤
	1 英擔	50.8024公斤	101.6047市斤	85.1223庫平斤
	1 英噸	1.0160公鐓 1016.0470公斤	2032.0941市斤	1702.4460庫平斤

〔註一〕 上表係由英制計算，茲將美制與英制不同者，另列下表：

1. 美1浬＝1854.98公尺＝5564.94市尺＝5796.81舊營造尺。

2. 美液量1加倫＝231立方吋＝3.7853公升＝3.7853市升＝3.6555舊營造升。

3. 美乾量1加倫＝268.803立方吋＝4.4046公升＝4.4046市升＝4.2538舊營造升。

4. 美1蒲式耳＝2150.42立方吋＝3.5238公斗＝3.5238市斗＝3.4029舊營造斗。

5. 美1噸＝2000磅＝907.1849公斤＝1814.3697市斤＝1520.0427舊庫平斤。

〔註二〕 1. 金衡1磅＝373.2418公分＝11.9436市兩＝10.0062舊庫平兩。

2. 藥衡1磅＝金衡1磅。

〔註三〕 英美貨幣與法之比較如下。

A.

國別 幣名	英(片)	法 (佛)
片	1	0 1050896
先	12	1.261076
磅	240	25.2215157

B.

國別 幣名	美(仙)	法 (佛)
仙	1	.051826
弗	100	5.1826

4. 日本之度量衡表

I. 長度表

名稱	里	町	丈	間	鯨尺	尺	寸
等	1	36	1296	2160	10368	12960	129600
		1	36	60	288	360	3600
			1	$1\frac{2}{3}$	8	10	100
				1	$4\frac{4}{5}$	6	60
數					1	1.25	12.5
						1	10

II. 面積及地積表

A. 尺制，普通所用.

名稱	方丈	方間	方尺	方寸
等	1	$2\frac{7}{9}$	100	10000
		1	36	3600
數			1	100

B. 畝制，測地積用.

名稱	町	段	畝	步或坪	合	勺
等	1	10	100	3000	30000	300000
		1	10	300	3000	30000
			1	30	300	3000
				1	10	100
數					1	10

〔註〕 步或坪＝方間.

III. 體積及容量表

A. 體積

名稱	立方坪	立方尺	立方寸
等	1	216	216000
數		1	1000

B. 容量

名稱	石	斗	升	合	勺
等	1	10	100	1000	10000
		1	10	100	1000
			1	10	100
數				1	10

〔註〕 一立方坪＝33.31945 石，　一石＝6.4827 立方尺.

IV. 重　量　表

名稱	貫	斤	匁	分	厘	毛
等	1	6.25	1000	10000	100000	1000000
		1	160	1600	16000	160000
			1	10	100	1000
				1	10	100
數					1	10

V. 幣　　制

〔說明〕 日本現亦用金本位，以 1 圓爲單位，而以 100 錢爲 1 圓，其貨幣有金銀二種，金幣分 5 圓 20 圓，銀幣 1 枚爲 50 錢，其一圓之幣，則爲紙幣而已.

VI. 日本度量衡折合標準制市用制及舊營造庫平制

項別＼制別	日制	標準制	市用制	舊營造庫平制
長度	1 日尺	0.3030公尺	0.9091市尺	0.94697營造尺
	1 日里	3.9273公里	7.8545市里	6.8182營造里
面積及地積	1 平方日尺	0.0918平方公尺	0.8264平方市尺	0.8968平方營造尺
	1 平方日里	15.4237平方公里	61.6947平方市里	46.4877平方營造里
	1 日畝	0.9917公畝	0.1488市畝	0.1615營造畝
體積及容量	1 立方日尺	0.0278立方公尺	0.7513立方市尺	0.8492立方營造尺
	1 日升	1.8039公升	1.8039市升	1.7421營造升
	1 日石	1.8039公石	1.8039市石	1.7421營造石
重量	1 日匁	3.75公分	12市分	10.0534庫平分
	1 日斤	0.6公斤	1.2市斤	1.0053庫平斤
	1 日貫	3.75公斤	7.5市斤	6.2834庫平斤

5. 俄國之度量衡及貨幣表

I. 長度表

原名	Verst	Sajen	Arshine	Foot	Vershock
譯名	維爾斯他	哂射	阿耳申	福脫	維爾索克
略號	俄里	哂	阿	俄尺	
等數	1	500	1500	3500	24000
		1	3	7	48
			1	$2\frac{1}{3}$	16
				1	$6\frac{6}{7}$

II. 面積表

原名	Square Verst	Dessiatina	Square Sajen	Square Arshine	Square foot
譯名	·	節斜齊納			
略號	方俄里	俄頃	方哂	方阿	方俄尺
等	1	$104\frac{1}{6}$	250000	2250000	12250000
		1	2400	21600	117600
			1	9	49
數				1	$5\frac{4}{9}$

III. 容量表 (A. 乾量)

原名	Tchet Vert	Osmina	Pajok	Tchet Veric	Tchet Verka	Garnts
譯名	赤特維脫	哇司密那	排雅克	赤特維里克	赤特維卡	格爾蒜次
略號	俄石			俄斗		俄升
等	1	2	4	8	32	64
		1	2	4	16	32
			1	2	8	16
				1	4	8
數					1	2

B. 液量

原名	Bochka	Vedro	Shtoff	Krunshka	Tcharka
譯名	薄卡	維得羅	司多夫	克郎齊卡	楷爾卡
等	1	40	320	400	4000
		1	8	10	100
			1	1.25	12.5
數				1	10

IV. 重 量 表

原名	Berkovets	Pood	Pound	Lot	Zolotnic
譯名	倍可惠士	潑特	分特(俄磅)	羅脫	若羅臬克
等數	1	10	400	12800	38400
		1	40	1280	3840
			1	32	96
				1	3

V. 貨 幣 表

原名	Rouble	Kopeck
譯名	盧布	戈比
略號	留	哥
等數	1	100

VI. 俄國度量衡折合標準制市用制及舊營造庫平制

俄制	標準制	市用制	舊營造庫平制
1 俄尺	0.3048公尺	0.9144市尺	0.9525營造尺
1 阿耳申	0.7112公尺	2.1336市尺	2.2225營造尺
1 俄里	1.0668公里	2.1336市里	1.8521營造里
1 平方俄尺	0.0929平方公尺	0.8361平方市尺	0.9073平方營造尺
1 平方俄里	1.1381平方公里	4.5522平方市里	3.4303平方營造里
1 俄升	3.2798公升	3.2798市升	3.1673營造升
1 維得羅	12.2993公升	12.2993市升	11.8774營造升
1俄磅(常衡)	0.4095公斤	0.8190市斤	0.6862庫平斤

〔註〕 1俄藥衡磅=0.3583公斤=0.6004舊庫平斤.

其他各國如德意志,意大利,荷蘭,葡萄牙等之度量衡制,均與法國同,惟幣制則各異,茲分述如下:

1. 德意志——以 100 分尼(略稱布,Pfennig)爲 1 馬克(略稱馬,Mark,合法 1.234569 佛.)
2. 意大利——以 10 賴(Lira,與佛郎等)爲 1 西袞(Soquin).
3. 荷蘭——以 100 生式(Cent)爲 1 福鹿林(Florin).
4. 葡萄牙——以 1000 而雷(Rei)爲 1 密而司(Milreis),10 密而司爲 1 克倫(Crown).

附錄三　數學家事略

本國數學家*

二　畫

丁　巨　元人，著有算法八卷，見知不足齋叢書.

丁取忠　清同治時人，刋白芙堂算學十七種，又刋白芙堂算學叢書三十一種.

四　畫

毛　晉　明末常熟人，精通中算.

王　蕃　三國時人，於圓率有所貢獻.

王元啓　字宋賢，清乾隆時嘉興人.於勾股形有所研究.著書已刋者爲星齋雜著.

王孝通　唐太宗時人，著有緝古算經一卷.

王眞儒　唐貞觀時人.

王裕之　宋元間絳人，撰細草.

王錫闡　字寅旭，號曉菴，淸初吳江人，著曉菴新法六卷.

五　畫

石信道　宋元間鹿泉人.撰鈐經.

六　畫

任弘濟　宋人，有一法算法問答一卷.

安心齋　元人，與何平子有詳明算法二卷.

安淸翹　淸乾嘉時人(1759－1803).著推步惟是四卷，學算存略三卷，一線表用六卷，矩線原本四卷，樂律新得二卷，號爲數學五書.

年希堯　淸初人，有測算刀圭三卷.

朱　鴻　淸嘉慶時人；計算圓率至三十九位.

朱元濬　明萬曆時人，著有庸章算法.

朱世傑　字漢卿，號松庭，元時著名數學家.發明四元.於堆積，級數亦有所推進.

朱載堉　明人，著有算學新說.

朱駿聲　淸道光時人，著有天算瑣記四卷，數度衍約四卷.

江　本　唐人，有一位算法二卷.

江　永　字愼修，康熙時婺源人.作數學八卷.又續數學一卷，曰正弧三角疏義.又有推步法解五卷.

七　畫

何平子　元人，與安心齋著有詳明算法二卷.

何國宗　淸初人，與梅瑴成共主輯律歷淵源.

何夢瑤　淸康熙時人，著有算法迪十二卷.

余　進　明人，著有九章詳通算法.

余　楷　明人，著有一鴻算法.

* 以姓之筆畫爲序.

吳　烺　字樹亭，清乾隆時全椒人，著有周髀算經圖注。

吳信民　明人，著九章比類算法。

宋泉之　唐人，有九章術疏九卷。

宋景昌　清人，有開方之分還原術一卷。

李　治　字仁卿，號敬齋，眞定欒城人，宋末著名數學家，著有測圓海鏡(1248)及益古演段(1258)二書，皆闡明天元一之術。

李　銳　清乾隆時人，與阮元共著疇人傳．校測圓海鏡，推算立天元一細草，又校益古演段．自著方程新術草一卷，勾股算術細草一卷，弧矢算術細草一卷．校楊輝算法若干卷．復因秦九韶之法作開方說三卷，甫成上中二卷而卒，其徒黎應南續成之．

李之藻　明末人，與西人利瑪竇共成圜容較義一卷(1609)，同文算指前編二卷，通編八卷．

李子金　清康熙時人，著有算法通義五卷，幾何易簡集，天弧象限集．

李天經　明人，繼徐光啓督修歷法，成歷書六十一卷．

李文一　宋元間博陵人，撰照膽．

李光地　字晉卿，號厚庵，福建安溪人，康熙庚戌進士，所著有記四分術，記太初術，記渾儀三篇．

李淳風　唐太宗時岐州雍人，爲太史令．與梁述王眞儒同正五曹孫子九章算術等書．又自撰麟德術．

李紹穀　宋人，有求一指蒙一卷．

李善蘭　字壬叔，號秋紉，海寧人，生於嘉慶己卯正月，卒於光緒壬午十月．咸豐壬子至滬，與西士偉烈亞歷山大(Alexander Wylie)共譯幾何原本後九卷，閱四年而成．又與偉烈共譯侯失勒天文十八卷(Herschel's Outline of Astronomy)，棣麼甘(Augustus De Morgan)代數學十三卷，羅密士(Elias Loomis)代微積拾級十八卷，胡威立重學十八卷(Whewell's Mechanics)，曲線說一卷，牛頓數理若干卷(Newton's Principle)．其自著則古昔齋算學，凡十三種，共二十四卷，同治乙卯彙刋行世．歲戊辰入北京同文館爲算學總教習，又著測圓海鏡解一卷，考數根法三卷，造整數勾股級數二卷．

李德載　宋元間平陽人，撰兩儀羣英集臻，兼有地元．

李遵義　南北朝人，疏九章算術一卷．

杜　忠　漢初人，著有算術．

杜　高　明人，訂正算法．

杜知耕　清康熙時人，著有數學鑰六卷，幾何論約七卷．

沈　括　字存中，號夢溪，宋末錢塘人．學術浩博，文藝深長，兼通天文，方志，律歷，算數，醫卜之說．著夢溪筆談二十六卷，補筆談二卷，續筆談一卷，修城法式二卷．夢溪筆談卷十八有隙積術，隙積卽堆垛積．又有會圓術，自謂此二類皆造微之術．

沈欽裴　清嘉慶時人，校正李潢九章算術細草九卷，補演海島算經一卷，又校數學九章，補四元玉鑑細草．

汪　萊　清乾嘉間人，於二次式三次式之根及堆垛，皆有所研究.

汪曰楨　清嘉道時人，有如積引蒙八卷.

邢雲路　明人，著有古今律歷考七十二卷. 謂 $\pi=3.126$. 又 $\pi=3.12132034$.

阮　元　字伯元，號雲臺. 清乾嘉時 (1764—1849) 儀徵人. 與李銳周治平共著疇人傳四十六卷.

八　畫

周　公　文王之子，名旦. 相傳周髀算經爲周公商高二人問答之辭. 又有謂九章算術爲周公遺書.

明安圖　清康熙時人，何國宗梅瑴成輯律歷淵源時，安圖亦與焉. 著割圜密率捷法四卷，未成而卒. 其子新，其弟子陳際新完成之.

易之瀚　清人，有四元釋例一卷，增例一卷.

九　畫

信都芳　南北朝人，傳祖暅之學. 王延明鈔集五經算學，芳爲之注，且自著重差勾股及四術周髀宗.

保其壽　清人. 著有游戲算術一卷，又增補算法渾圓.

馬　傑　明人，改正算法.

十　畫

唐順之　字應德，明 (1507—1560) 武進人，著有勾股測望論，勾股容方圓論，弧矢論，分法論，六分論.

夏侯陽　晉人，有算經.

夏源澤　明人，有指明算法.

夏鸞翔　清道咸時人，著有少廣縋鑿一卷，洞方術圖解二卷，致曲術圖解一卷，萬象一原九卷.

徐　岳　漢末人，著數學記遺一卷.

徐仁美　宋人，增成玄一算經三卷.

徐光啓　字子先，號玄扈，明季 (1562—1634) 上海人. 從利瑪竇學天文算法火器，與意人龍華民 (Nicolao Langobardi) 羅雅谷 (Jiacomo Rho) 德人湯若望(Adam Schaal)鄧玉函(Jean Terenz) 等修正歷法，先後成書七十餘卷. 譯著甚多，其所譯幾何原本前六卷，爲尤著名者.

徐有壬　字君青，又字鈞卿，清烏程人，精數術，著務民義齋算學.

祖　暅　或作暅之，又作亘，冲之之子，少傳家學，亦以善算稱.

祖冲之　晉范陽人(429—500)，得約率 $\pi=\dfrac{22}{7}$ 及密率 $\pi=\dfrac{355}{113}$. 又注九章，造綴術數十篇.

秦九韶　字道古，宋人，寓居湖州. 嘗從隱君子受數學. 數書九章，即其傑作，凡十八卷.

耿壽昌　漢初人，刪補九章.

十 一 畫

張　崣　南北朝人，撰九章推圖經法一卷.

張　蒼　漢初人，刪補九章.

張　衡　字平子，後漢西鄂人，以圓率 $\pi=\sqrt{10}$，又 $\pi=\frac{92}{29}$。

張　爵　明人，著有正明算法。

張　纘　南北朝人，撰算經異義一卷。

張丘建　三國時人，著有算經。

張去斤　南北朝人，撰算疏一卷。

張作楠　清嘉道時人，著翠微山房算學十五種。

張敦仁　清乾嘉時人，著輯古算經細草三卷，求一算術三卷，開方補記八卷，附通論一卷。

梅文鼎　字定九，號勿庵，清初（1633－1721）宣城人。師事竹冠道士倪觀湖受數學。弟文鼐，文鼏，子以燕，孫瑴成，曾孫鈖，鈁，鉁，鈁，鏐，鉞均通數學，而以瑴成爲尤著。文鼎著書七十餘種。今所傳者以承學堂所刻梅氏叢書輯要二十九種爲最完備。其關於算數者，有籌算二卷，平三角舉要五卷，弧三角舉要五卷，方程論六卷，勾股舉隅一卷，幾何通解一卷，幾何補編四卷，少廣拾遺一卷，筆算五卷，環中黍尺五卷，塹堵測量二卷，方圓冪積一卷。

梅瑴成　字玉汝，號循齋，又號柳下居士，文鼎之孫。嘗與修律歷淵源一百卷，增刪算法統宗十一卷，重編梅氏叢書六十二卷，顏曰梅氏叢書輯要，卷末附錄自著赤水遺珍，操縵卮言各一卷。又著柳下舊聞十六卷。

梁　述　唐貞觀初人，與李淳風等同正五曹孫子等書。

莊亨陽　清初人(1685－1746)，著有莊氏算學八卷。

許　商　漢初人，著有算術。

許　榮　明人，有九章詳註算法。

許桂林　清乾嘉時人，著立天元一導窾三卷。

郭守敬　字若思，元順德邢臺人，大父榮，精算術。守敬承其業，又嘗學於劉秉忠，元世祖命之治歷。

陳　杰　清嘉道時人，著有輯古算經細草一卷，圖解三卷，音義一卷，算法大成上編十卷。

陳　𬣙　清康熙時人，有勾股引蒙五卷，又勾股述二卷。

陳世仁　字元之，海寧人，康熙乙未入翰林。著有少廣補遺一卷。

陳必智　明人，有算理明解。

陳尙德　元人，撰石塘算書四卷。

陳厚耀　字泗源，號曙峯，清康熙時泰州人，著有續增新法比例四十卷。

陳從運　唐人，著有得一算法七卷。

陳萬策　字對初，又字謙季，晉江人，康熙戊戌進士。受算學於梅文鼎，作中西算法異同論。

陳藎謨　明人，有度測三卷。

陳鶴齡　清康熙時人，著有算法正宗。

陸　績　三國時吳人，以圓率

$$\pi=\frac{142}{45}=3.15。$$

陰景愉　唐人，著有七經算術通義七卷。

十　二　畫

彭 絲 元人,撰算經圖釋九卷.

揭 暄 字子宣,清江西廣昌人,著璇璣遺述七卷.

惠士奇 字天牧,一字仲儒,清康熙時吳縣人,著有交食舉隅二卷.

焦 循 清乾嘉時人(1763－1820),著加減乘除釋八卷,天元一釋二卷,釋弧三卷,釋輪二卷,釋橢一卷,補衡齋算學第三册一卷,又開方通釋一册.

程大位 字汝思,號賓渠,明新安人.著算法統宗十三卷.

華蘅芳 字若汀,清季(1830－1902)江蘇金匱人.與西士傅蘭雅共譯英華里司代數學二十五卷,及微積溯源八卷,英海麻士三角數理十二卷,英倫德代數難題十六卷,決疑數學十卷,又英白爾尼合數術十一卷.自著有開方別術一卷,數根術解一卷,開方古義二卷,積較術演三卷,學算筆談十二卷,算草叢存四卷,號行素軒算稿,已刋世.又有算學須知一卷,西算初階,刋入藝經齋算學叢書.此外又有未完成之稿四種.

華世芳 字若溪,蘅芳之弟.嘗主講湖北自强學堂,上海南洋公學等處.著恆河沙館算草二種,又有專術舉隅,今有術,雙套勾股,三角新理等稿存於家.

項名達 清嘉道時人(1789－1850),著有勾股術,三角和較術,象數一原七卷.

馮桂芳 清道同間人(1809－1874),著有弧矢算術細草圖解一卷,西算新法直解八卷.

黃宗羲 字太冲,號黎洲,明末(1610－1695)餘姚人.著有大統歷法辨四卷,時憲書法解新推交食法一卷,圖解一卷,割圓八線解一卷,授時歷法假如一卷,西歷回歷假如各一卷等書.

十 三 畫

楊 淑 隋人,撰九九算術二卷.

楊 溥 明人,著有算林拔萃.

楊 楷 宋人,著有明微算經一卷,法算機要賦一卷,法算口訣一卷,算法祕訣一卷,算術玄要一卷.

楊 輝 字謙光,宋錢塘人.作詳解九章算法十二卷,日用算法二卷,乘除通變本末三卷,田畝比類乘除捷法二卷,續古摘奇算法二卷.

楊雲翼 金人,著有勾股機要,象數雜說等書.

董祐誠 清嘉道時人(1791－1823),著有割圜連比例三卷,橢圓求周術一卷,斜弧三邊求角補術一卷,堆垜求積術一卷.

賈 亨 元人,著有算法全能集二卷.

鄒伯奇 清道同間人(1819－1869),著有粟布演草,對數尺記一卷,乘方捷術三卷,又存稿一卷.

十 四 畫

僧一行 唐人,著有心機算術括一卷.

甄 鸞 南北朝人,嘗註周髀算經,數術記遺,五曹,孫子等書.又自撰五經算術二卷.

趙 爽 一名嬰,漢人,銓釋周髀.

趙 歐 南北朝人,著有算經一卷.

鄭高昇　明人，著有啓蒙發明算法。

十五畫

劉　洪　明人，著有算學通詮。

劉　祐　南北朝人，著有九章雜算文二卷。

劉　益　宋人，著議古根源。

劉　歆　漢宗室，名秀，字子駿，與父向集六藝叢書。以圓率 $\pi=\frac{3927}{1250}$，號稱歆率。

劉　衡　清嘉慶時人，著尺算日晷新義二卷，勾股測量法，籌表開諸方捷法二卷，借根方淺說，四率淺說，共五種，號六九軒算書。

劉　徽　三國時魏人，以 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$，號稱徽率。又著重差一卷，今名海島算經。

劉士隆　明人，著有通明算法。

劉大鑑　字潤夫，宋末人，撰乾坤括囊，末有人元二問。

劉汝諧　宋元間平水人，撰如積釋鎖。

劉湘煃　字允恭，清江夏人，受業梅文鼎，著五星法象編五卷。

潘聖樟　一名檉，字力田，清吳江人，與王錫闡友善，著辛丑歷辨。

蔣　周　宋元間平陽人，撰益古。

蔣維鍾　近時數學家。

談　泰　清人，著測量周徑正誤，周髀算經四極南北遊法，操縵卮言正誤，圓壺周徑積實，祖冲之綴法辨，綴內方非十尺辨。又著明算津梁四卷，平方立方表六卷，周徑說一卷，疇人傳三卷。

駱騰鳳　清乾嘉時人，著開方釋例四卷，藝遊錄二卷。

魯　靖　南北朝人，新集五曹時要術三卷。

十六畫

錢　塘　字學淵，一字禹美，號溉亭。清乾隆時嘉定人。論方圓周徑，獨以 $\pi=3.16$。著有淮南天文訓補注三卷。

閻若璩　字百詩，清淮安山陽人，通時憲及授時法，嘗據算術以證古文尚書之僞。

龍　受　唐德宗貞元時人，著有算法二卷。

龍受益　宋人，著算範要訣二卷，明算指掌三卷等書，見宋史藝文志。

十七畫

謝家禾　清嘉道時人。著有演元要義一卷，弧田問率一卷，直積回求一卷。

謝察微　南北朝人。著有算經三卷。

隸　首　黃帝時，始作算數，得下籌之法。

十八畫

戴　煦　清嘉道間人，著有重差圓說一卷，勾股和較集成一卷，對數簡法二卷，又續一卷，外切密率四卷，假數測圓二卷。

戴　震　字東原，清休寧人，少善算數，著有策算一卷。乾隆壬辰開四庫全書館，

震以薦入館充校理，於永樂大典中輯出海島算經五經算術二種。又以梅文鼎三角法擧要，塹堵測量，環中黍尺三書之法，易以新名，飾以古義，爲勾股割圜記三篇。

瞿曇悉達 唐人，開元戊午歲受詔譯九執述，其術出自梵天，爲梵天寫算輸入中國之始。

十九畫

羅士琳 號茗香，甘泉人，出阮元門下。於嘉慶戊寅刋所著比例匯通四卷，又著勾股容三事拾遺三卷，附例一卷，演元九式一卷，四元玉鑑細草二十四卷，釋例二卷，臺錐積演一卷，三角和較算例一卷，續疇人傳六卷等書，刋入觀我生室彙稿。

二十畫

嚴 恭 明人，有通原算法一卷。

二十一畫

顧應祥 明人，著有勾股算術二卷，測圓海鏡釋述十二卷，又著弧矢算術。

顧觀光 清嘉道間人，著有九數存古一卷，九數外錄一卷，周髀算經校勘記一卷，算賸初編續編若干卷。

外國數學家*

Abel, Niels Henrik. 1802 年 8 月 5 日，生於挪威 Findöe; 死於 1829 年 4 月 6 日。求學於 Christiania，又求學於柏林及巴黎，惟爲時甚暫。證明五次方程式代數解法之不能；改良橢圓函數論；手創 Abel 函數論。

Abul Jud, Mohammed ibn al Last al Shanni. 約 1050 年時人，甚專心研究僅用圓規及直線尺所不能解之幾何學問題。

Abul Wefa, al Buzjani. 940 年 6 月 10 日，生於波斯 Buzjan; 998 年 7 月 1 日死於 Bagdad。阿剌伯之天文家。譯希臘數學家之著作甚多；改良三角法，且計算若干之表；用圓規之惟一開度以爲幾何學之作圖，爲有興趣。

Adelard. 約 1120 年時人。英之僧侶。嘗遊行於小亞細亞，西班牙，埃及及阿剌伯。首將歐幾里得之書由阿剌伯語譯成拉丁語。且譯 Al Khowarizmi 之著作之一部分。

Al Battani (Albategnius). Mohammed ibn Sinan Abu Abdallah al Battani. 850 年頃，生於米薩波打米亞 (Mesopotamia) 之 Battani; 929 年死於 Da-

*此係譯自 Fink 之數學史，數學家不依年代之先後而按英文字母排之，以其便於查考也。又此處之數學家皆係西人，故所用之年月日，皆係指西歷紀元後。

mascus. 阿剌伯之皇族,敍利亞之管理者;當時最大之天文家兼數學家.改良三角法,且始計算餘切之表.

Alberti, Leon Battista. 1404年至1472年間人.建築師,畫家,兼雕刻師.

Albertus Magnus, Count Albrecht von Bollstädt. 1193年或云1205年生於Bavaria之Lauingen; 1280年11月15日死於Cologne. 著名神學家,化學家,物理學家兼數學家.

Al Biruni, Abul Rihan Mohammed ibn Ahmed. 出自印度河流域之Birum; 死於1038年. 阿剌伯人,然居住及遊歷印度,且關於印度數學有所著述,發展球面三角法.

Alcuin. 736年生於York; 804年5月19日死於Hesse之Hersfeld.始爲York之僧侶學校之敎員,後於法國助Charlemagne設立諸學校.

Alhazen, ibn al Haitam. 950年生於Bassora; 1038年死於Cairo. 關係光學爲最重要之阿剌伯著作者.

Al Kalsadi, Abul Hasan Ali ibn Mohammed. 死於1486年或1477年. 出自Andalusia或Granada算術家.

Al Karkhi, Abu Bekr Mohammed ibn al Hosain. 約1010年時人.在Bagdad之阿剌伯數學家. 有關於算術,代數學,幾何學之著作.

Al Khojandi, Abu Mohammed. 出自Khorassan之Khojand; 992年尙生存. 阿剌伯天文家.

Al Khowarizmi, Abu Jafar Mohammed ibn Musa. 第九世紀初葉人. Khowarizm (Khiva) 人.阿剌伯數學家及天文家.其著作之著名者爲代數學.譯有數種希臘語之著作.

Al Kindi, Jacob ibn Ishak, Abu Yusuf. 生於813年頃;死於873年. 阿剌伯哲學家,物理學家,天文家及星學家.

Al Kuhi, Vaijan ibn Rustam Abu Sahl. 約975年時人. 在Bagdad之阿剌伯天文家兼幾何學家.

Al Nasawi, Abul Hasan Ali ibn Ahmed. 約1000年時人. 出自Khorassan之Nasa.算術家也.

Al Sagani, Ahmed ibn Mohammed al Sagani Abu Hamid al Usturlabi. 出自Khorassa之Sagan; 死於990年. Bagdad之天文家.

Anaxagoras. 紀元前499年生於Ionic之Clazomene; 紀元前428年死於Lampsacus. Ionic學校之最後而最著名之哲學家.講授於雅典.爲Euripides及Pericles之師.

Apianus (Apian), Petrus. 1495年生於撒克遜(Saxony)之Leisnig; 死於1552年.著有算術及三角法.

Apollonius of Perga, in Pamphylia. 於紀元前250年至200年之間, Ptolemy Philopator在位時,講授於亞歷山大因著圓錐曲線論八卷,而成大幾何學家之名.尙著有他書甚多.又用圓錐曲線解普

通二次方程式.

Arbogast, Louis François Antoine. 1759 年生於 Mutizg; 死於 1803 年.著有微分學,級數, gamma 函數,微分方程式.

Archimedes. 紀元前 287 (?) 年生於 Syracuse; 紀元前 212 年,被羅馬兵士殺害於彼. 爲工程師, 建築師, 幾何學家及物理學家. 曾遊歷西班牙及埃及. Hiero 王之友. 大發展幾何體之求積法及某數種曲線形面積之求積法. 其於物理學上以關於重心,槓杆,滑車, 螺旋及比重等而著名.

Archytas. 紀元前 430 年生於 Tarentum; 死於紀元前 365 年.爲柏拉圖之友, Pythagoras 派之學者,政治家且爲長官. 關於比例,有理數與無理數,罅隙面與截口及重學有所著述.

Argand, Jean Robert. 1768 年生於 Geneva; 約死於 1825 年.其傳記不詳.爲現今複虛數之幾何學的表示方法發明者之一 (1806).

Aristotle. 紀元前384年生於 Macedonia 之 Stageira; 紀元前 322 年死於 Euboea 之 Chalcis. 哲學中逍遙學派之元祖; 亞歷山大帝之師傅. 以文字表未知量;區別幾何學與測地學;關於物理有所著述;發組合理論之端緒.

Aryabhatta. 476 年生於恆河上流之 Pataliputra. 印度數學家.所著多爲代數學,其中含二次方程式,排列, 不定方程式及幻方.

August, Ernst Firdinand. 1795 年生於 Prenzlau; 死於 1870, 是時氏爲柏林 Kölnisch 高等學校之管理者.

Autolykus of Pitane, Asia Minor. 約紀元前 330 年頃人. 希臘天文家; 球面幾何學之最古著作者.

Avicenna, Abu Ali Hosain ibn Sina. 978 年生於 Bokhara 附近之 Charmatin; 1036 年死於波斯之 Hamadam. 阿剌伯之醫學家兼博物學家. 發行亞里斯多德, 歐幾里得等之數學及物理學之著作數種.有算術及幾何學之著作.

Babbage, Charles. 1792 年 12 月 26 日生於 Totnes; 1871 年 10 月 18 日死於倫敦. 於劍橋爲數學之 Lucasian 教授. 以其計算器,人皆知之.於英國提高數學程度甚有力.

Bachet. 見 Méziriac 條.

Bacon, Roger. 1214 年生於 Somersetshire 之 Ilchester; 1294 年 6 月 11 日死於牛津. 學於牛津及巴黎; 曾於牛津爲教授;數學家兼物理學家.

Balbus. 約 100 年時人.羅馬測量師.

Baldi, Bernardino. 1553年生於Urbins; 1617 年死於該處.數學家又爲普通之學者.於數學史有所貢獻.

Baltzer, Heinrich Richard. 1818 年生於 Meissen; 1887 年死於 Giessen. 於 Giessen 爲數學教授.

Barlaam, Bernard. 十四世紀初葉人.爲著述天文學及幾何學之僧侶.

Barozzi, Francesco. 意大利數學家.

1537年至1604年時人。

Barrow, Issac. 1630年生於倫敦；1677年5月4日死於劍橋。於劍橋爲希臘語及數學之教授。學者，數學家，科學家，又爲傳教者。牛頓有爲其弟子及繼承者。

Beda, the Venerable. 672年生於Northumberland之Yarrow附近之Monkton；735年5月26日死於Yarrow。著有年代學及算術。

Bellavitis, Giusto. 1803年11月22日生於Padua附近之Bassano；死於1880年11月6日。以其射影幾何學及平衡論之著作而著名。

Bernelinus. 約1020年時人。於巴黎爲Gerbert之弟子。著有算術。

Bernoulli. 著名數學家家族。其人如次：

Jacob (英人常稱爲James), 1654年12月27日生於Basel；1705年8月16日死於該處。爲首先承認微積分學之一人。其De Arte Conjectandi一書爲適遇法之大著作。研究曲線之拔萃者，在Basel刻對數螺線於其紀念物上。

John (Johann), 爲Jacob之弟；1667年8月7日生於Basel；1748年1月1日死於該處。首先試作積分學及指數函數之微積分。又爲物理學家之拔萃者，而其才不過一教員而已。

Nicholas (Nikolaus), 爲John之姪；1687年10月10日生於Basel；1759年11月29日死於該處。教授於聖彼得堡，Basel及Padua。於微分方程式之研究有所貢獻。

Daniel, 爲John之子；1700年2月9日生於Groningen；1782年死於Basel。於聖彼得堡爲數學教授。其重要之著作爲液體動力學。

John, the younger, 爲John之子。1710年至1790年間人，教授於Basel。

Bézout, Étienne. 1730年生於Nemours；1783年死於巴黎。爲代數學者，而於對稱函數及行列式之研究甚著名。

Bhaskara Acharya. 生於1114年。印度數學家兼天文家。爲Lilavati及Vijaganita之著作者，其書含有算術及代數學之大綱。爲當代最著名數學家之一。

Biot, Jean Baptiste. 1774年4月21日生於巴黎。1862年2月3日死於該處。物理學，數學，天文學之教授，著書甚多。

Boëthius, Anicius Manlius Torquatus Severinus. 480年生於羅馬；524年受刑於Pavia。爲中古煩瑣學說之元祖。翻譯希臘語數學，重學，物理學甚多，且加以校訂。著有算術。哲學之慰藉(Consolations of Philosophy)即其在獄時之著作也。

Bolyai: **Wolfgang** Bolyai de Bolya. 1775年生於Bolya；死於1856年。爲Gauss之友。

Johann Bolyai de Bolya, 爲Bolyai之子。1802年生於Klausenburg；1860年死於Maros-Vàsàrhely。爲所謂非歐幾里得幾何學發明者之一。

Bolzano, Bernhard. 1781年至1848年

間人。於級數之研究有所貢獻。

Bombelli, Rafaelle。意大利人。約生於1530年。其代數學(1572年)網羅當時所知關於代數學之問題。於三次方程式之研究有所貢獻。

Boncompagni, Baldassare。意大利之富裕皇族。1821年5月10日生於羅馬；1894年4月12日死於同地。Boncompagni's Bulletins 之出版者。

Boole, George。1815年生於Lincoln；1864年死於Cork。於Cork之Queen's College 爲數學教授。Invariants 及 Covariants 之理論，可謂氏發其端緒(1841年)。

Booth, James。1806年至1878年間人。教士且爲橢圓積分之著作者。

Borchardt, Karl Wilhelm。生於1817年；1880年死於柏林。教授於柏林。

Boschi, Pietro。1833年生於羅馬；死於1887年。教授於Bologna。

Bouquet, Jean Claude。1819年生於Morteau；1885年死於巴黎。

Bour, Jacques Edmond Émile。生於1832年；1866年死於巴黎爲多藝學校(École Polytechnique，法國之大學)之教授。

Bradwardin, Thomas de。1290年生於Chichester附近之Hardfield；1348年8月26日死於Lambeth。初於牛津爲神學教授，後爲Canterburg之大僧正。著有關於算術及幾何學之書。

Brahmagupta。 生於598年。印度數學家，而於幾何學及三角法有所貢獻。

Brasseur, Jean Baptiste。1802年至1868年間人。教授於Liège。

Bretschneider, Carl Anton。1808年5月27日生於Schneeberg；1878年11月6日死於Gotha。

Brianchon, Charles Julien。1785年生於Sèvres；死於1864年。因其關於巴斯噶之神祕六邊形之逆之論文而著名。

Briggs, Henry。1560年2月生於Yorkshire之Halifax附近之Watery Wood；1630年1月26日死於牛津。於牛津爲幾何學之Savilian教授。最初認對數之價值之一人；以10爲底之對數，實爲氏所首創。

Briot, Charles August Albert。1817年生於Sainte-Hippolyte；死於1882年。教授於巴黎之Sorbonne。

Brouncker, William, Lord。生於1620(?)年；1684年死於Westminister。皇家學會之最初會長。於級數之理論有所貢獻。

Brunelleschi, Filippo。1379年生於Florence；1446年4月16日死於該處。有名之意大利建築家。

Bürgi, Joost(Jobst)。1552年生於瑞士St. Gall之Lichtensteig；1632年死於Cassal。最初提出對數之一種之一人。且爲最初承認方程式之第二邊等於零之價值之人。

Caporali, Ettore。1855年生於Perugia；1886年死於Naples。數學教授，而著

有幾何學.

Cardan, Jerome(Hieronymus, Girolamo). 1501 年生於 Pavia; 1576 年死於羅馬.於 Bologna 及 Padua 爲數學教授,數學家,物理學家,兼星學家,其對於代數學及外擺線之理論之貢獻,爲其主要者也.

Carnot, Lazare Nicolas Marguerite. 1753 年生於 Nolay, Côte d'Or; 1823 年於流徒中死於 Magdeburg. 於近世幾何有所貢獻.

Cassini, Giovanni Domenico. 1625 年生於 Nice 附近之 Perinaldo; 1712 年死於巴黎. Bologna 之天文教授,且四代間保持巴黎天文臺長之地位之家族之第一人.

Castigliano, Carlo Alberto. 1847 年至 1884 年間人.意大利工程師.

Catalan, Eugène Charles. 1814 年 5 月 30 日生於比利時之 Bruges; 死於 1894 年 4 月 14 日.於巴黎及 Liège 爲數學教授.

Cataldi, Pietro Antonio. 意大利數學家.生於 1548 年; 1626 年死於 Bologna. Florence, Perugia 及 Bologna 之數學教授.曾應用連分數以開方者.

Cattaneo, Francesco. 1811 年至 1875 年間人. Pavia 之大學之物理學及重學教授.

Cauchy, Augustin Louis. 1789 年生於巴黎; 1857 年死於 Sceaux. 於巴黎爲數學教授.爲當時最卓越之數學家之一.於函數論,行列式,微分方程式,剩餘之理論,橢圓函數,收斂級數等皆有所貢獻.

Cavalieri, Bonaventura. 1598 年生於 Milan; 1647 年死於 Bologna. 以其微量之法開拓微分學(1629).

Cayley, Arthur. 1821 年 8 月 16 日生於 Surrey 之 Richmond; 1895年 1 月 26 日死於劍橋. 劍橋大學數學之 Sadlerian 教授.數學上之重要著作者.

Ceva, Giovanni. 1648 年約至 1737 年間人.關於橫截線之理論有所貢獻.

Chasles, Michel. 1793 年 11 月 15 日生於 Chartres; 1880 年 12 月 12 日死於巴黎.貢獻於近世幾何學之理論甚大.

Chelini, Domenico. 生於 1802 年;死於 1878 年 11 月 16 日. 意大利數學家; 於解析幾何學及重學有所貢獻.

Chuquet, Nicolas. 來自 Lyons; 約死於 1500 年. 住居巴黎,於代數學及算術有所貢獻.

Clairaut, Alexis Claude. 1713 年生於巴黎; 1765 年死於同地. 物理學家,天文家,數學家. 於曲線之研究之卓越者.

Clausberg, Christlieb von, 1689 年生於 Danzig; 1751 年死於 Copenhagen.

Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred. 生於 1833 年 1 月 19 日.死於 1872 年 11 月 7 日. Carlsruhe, Giessen 及 Göttingen 之數學教授.

Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas. 1743年生於 Aisne 之 St. Quentin 附近之 Ribemont, 1794年死於 Bourgla-Reine. Académic des Sciences 之書記.於適遇法之理論有所貢獻.

Cotes, Roger. 1682 年 7 月 10 日生於 Leicester 附近之 Burbage; 1716 年 6 月 5 日死於劍橋. 劍橋之天文學教授. 氏之名附於幾何學，代數學及解析法中之許多定理. 牛頓曰: "Cotes 若在，吾人必有所學".

Cramer, Gabriel. 1704 年生於 Geneva. 1752 年死於 Bagnols. 增補方程式論，再興行列式之研究 (自 Leibnitz 始).著曲線論.

Crelle, August Leopold. 1780 年生於 Eichwerder (Wriezen a. d. Oder);死於 1855 年. Journal für reine und angewandte Mathematick (1826年)之創立者.

D'Alembert, Jean le Rond. 1717 年生於巴黎. 1783年死於同地.物理學家，數學家，天文家.於方程式論有所貢獻.

De Beaune, Florimond. 1601 年至 1652 年間人. Descartes 之幾何學之註釋者.

De la Gournerie, Jules Antoine René Maillard. 生於 1814 年; 1883 年死於巴黎.貢獻於畫法幾何學.

Del Monte, Guidobaldo. 1545 年至 1607 年間人.著有重學及配景論.

Democritus. 紀元前 460 年生於Thrace 之 Abdera; 約死於紀元前 370 年.遊學於埃及及波斯.著有數論及幾何學，提示無窮小數之觀念.

De Moivre, Abraham. 1667 年生於 Champagne 之 Vitry, 1754 年死於倫敦.貢獻於複虛數及適遇法.

De Morgan, Augustus. 1806 年 6 月生於 Madras 之 Madura; 死於 1871 年 3 月 18 日.倫敦大學之最初之數學教授 (1828年).氏爲有名之教員，而於代數學及適遇法亦有所貢獻.

Desargues, Girard. 1593年生於 Lyons, 死於 1662 年. 近世幾何學之創立者之一.

Descartes, Renè du Perron. 1596 年生於 Touraine 之 La Haye; 1650年死於 Stockhoim. 解析幾何學之發明者. 貢獻於代數學者甚多.

Dinostratus. 約紀元前 335 年時人，希臘幾何學家 Menaechmus 之弟. 其名與圓積線有密切之關係.

Diocles. 約紀元前 180 年頃人.希臘幾何學家.氏發明蔓葉線 (Cissoid), 而用之以解第里安問題.

Diophantus of Alexandria. 約 275 年時人.希臘代數學家中之最卓越者，特貢獻於不定方程式.

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune. 1805 生於 Düren; 1859 年死於 Göttingen. 於 Göttingen 繼 Guass 爲教授. 於數論之拔萃之貢獻者.

Dodson, James. 死於 1757 年 11 月 23 日.De Morgan 之曾祖父. 特以其浩大之逆對數表(1742年)而著名.

Donatello. 1386 年至 1468 年間人.

意大利雕刻師。

Du Bois-Reymond, Paul David Gustav. 1831 年 12 月 2 日生於柏林; 1889 年 4 月 7 日死於Freiburg. Heidelberg, Freiburg 及 Tübingen 之數學教授。

Duhamel, Jean Maire Constant. 1797 年生於 Saint-Malo; 1872 年死於巴黎。始記述於數學關於類別之一人。

Dupin, François Pierre Charles. 1784 年生於 Varzy; 1873 年死於巴黎。

Dürer, Albrecht. 1471 年生於 Nuremberg; 1528 年死於該處.有名美術家.近世曲線論創立者之一人。

Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max. 1823 年生於柏林; 1852 年死於該處.於 invariant 及 covariant 方面之最早研究者之一人。

Enneper, Alfred. 1830 年至 1885 年間人。Göttingen 之教授。

Epaphroditus. 約 200 年時人.羅馬測量師.關於測量,數論,求積有所著述。

Eratosthenes. 紀元前 276 年生於非洲之 Cyrene; 紀元前 194 年死於亞歷山大.拔萃之地理學家.以其求素數之「篩」而著名。

Euclid. 紀元前 300 年頃人. Ptolemy Soter 在位時,教授亞歷山大。自來最有名之幾何學教本卽其所著之 Elements, 是書凡十三卷。

Eudoxus of Cnidus. 紀元前 408 年至紀元前 355 年間人. Archytes 及柏拉圖之弟子.拔萃之幾何學家,特貢獻於比例論,相似論,及「黃金分割」。

Euler, Leonhard. 1707 年生於 Basel; 1783 年死於聖彼得堡.十八世紀最大物理學家,天文學家及數學家之一。Keliand 曰:——"於其繁卷浩籍中,……代數學及重學之各分門可謂研究之完善寶庫"。

Eutocius. 480 年生於 Ascalon 幾何學者。註釋阿基米得,阿波羅尼阿斯,托勒密之著作。

Fagnano, Giulio Carlo, Count de. 1682 年生於 Sinigaglia, 死於 1766 年.於曲線之研究有所貢獻。歐拉稱揚橢圓函數之著作,以氏爲嚆矢。

Faulhaber, Johann. 1580年至 1635 年間人.貢獻於級數之理論。

Fermat, Pierre de. 1601 年生於Montauban 附近之 Beaumont-de-Lomagne. 1665 年 1 月 12 日死於 Castres. 爲當時最多才之數學家之一; 其關於數論之著作,從未有能與之匹敵者。

Ferrari, Ludovico. 1522 年生於 Bologna; 死於 1562 年.得四次方程式之解法。

Ferro, Scipione del. 約 1465 年生於 Bologna; 死於 1526 年 10 月 29 日與 11 月 16 日之間. Bologna 之數學教授.研究單用圓規之幾何學,又爲解決特別三次方程式 $x^3+px=q$ 之最初之人。

Feuerbach, Karl Wilhelm. 1800 年生於 Jena; 死於 1834 年.貢獻於近世初等幾何。

Fibonacci. 見 Legneardo of Pisa.

Fourier, Jean Baptiste Joseph, Baron, 1768 年生於 Auxerre; 1830 年死於巴黎.物理學家及數學家.於方程式論及級數論有所貢獻.

Frénicle, Bernhard Frénicle de Bessy. 1605 年至 1675 年間人.斐馬之友.

Frézier, Amédée François. 1682 年生於 Chambery; 1773 年死於 Brest. 畫法幾何學之創立者之一.

Friedlein, Johann Gottfried. 1828 年生於 Regensburg; 死於 1875 年.

Frontinus, Sextus Julius. 40 年至 103 年間人.羅馬測量師及工程師.

Galois, Évariste 1811 年生於巴黎;1832 年死於該處.羣論之創立者.

Gauss, Karl Friedrich. 1777 年生於 Brunswick; 1855 年死於 Göttingen. 爲近世最大數學家. 物理家及天文學家之卓著者.舉凡數論,函數論,方程式論,行列式,複虛數,雙曲線幾何學, 其非常之才所負者甚多.

Geber, Jabir ben Aflah. 約 1085 年時人. Seville 之天文學家;著有球面三角法.

Gellibrand, Henry. 1597 年至 1637 年間人. Gresham 高等學校之天文學教授.

Geminus. 紀元前 100 年生於 Rhodes; 紀元前 40 年,死於羅馬. 著有天文學及歐幾里得以前之數學史.

Gerbert. 法王 Sylvoster 第二. 940 年生於 Auvergne; 1003 年 5 月 13 日死於羅馬.有名教師; 999 年選爲法王.關於算術有所著作.

Gerhard of Cremona. 出自 Cremona (或云出自 Andalusia 之 Carmona).生於 1114 年; 1187 年死於 Toledo. 物理學家,數學家兼星學家.將希臘及阿剌伯之若干著作, 由阿剌伯文譯成拉丁文.

Germain, Sophie. 1776 年至 1831 年間人.關於彈性面有所著述.

Girard, Albert. 約 1590 年至 1633 年間人. 貢獻於方程式論,普通多邊形,及記號法.

Göpel, Gustav Adolf. 1812 年至 1847 年間人. 以其雙曲線的橢圓函數之研究而著名.

Grammateus, Henricus. (德文名爲 Heinrich Schreiber) 約 1476 年生於 Erfurt. 算術家.

Grassmann, Hermann Günther. 1809 年 4 月 15 日生於 Stettin. 1877 年 9 月 26 日死於該處.特以其 Ausdehnungslehre (1844 年)而著名.又關於算術,三角法,物理學有所著作.

Grebe, Ernst Wilhelm. 1804 年 8 月 30 日生於 Oberhesse 之 Marbach 附近. 1874 年 1 月 14 日死於 Cassel. 於近世初等幾何學有所貢獻.

Gregory, James. 1638 年 11 月生於 Aberdeenshire 之 Drumoak; 1675 年死於愛丁堡.於 St. Andrew 及愛丁堡爲數學教授.證明 π 之爲不通約數;於級數

論有所貢獻.

Grunert, Johann August. 1797 年生於 Halle A. S.; 死於 1872 年. Greifswald 之敎授, 而爲 Grunert's Archiv 之出版者.

Gua, Jean Paul de Gua de Malves. 1713 年生於 Carcassonne; 1785 年 6 月 2 日死於巴黎. 始與笛卡兒之符號法則嚴密之證明.

Gudermann, Christoph. 1798 年 3 月 28 日生於 Winneburg; 1852 年 9 月 25 日死於 Münster. 引導雙曲線函數於近世解析法, 氏與有力焉.

Guldin, Habakkak (Paul). 1577 年生於 St. Gall; 1643 年死於 Grätz. 特以其取自 Pappus 之旋轉體之定理而著名.

Hachette, Jean Nicolas Pierre. 1769 年生於 Mézières; 1834 年死於巴黎. 代數學家及幾何學家.

Halley, Edmund. 1656 年 11 月 8 日生於倫敦附近之 Haggerston; 1742 年 1 月 14 日死於格林維基. 特以其關於物理學及天文學之貴重之貢獻而著名.

Halphen, George Henri. 1844 年 10 月 30 日生於 Rouen; 1889 年死於 Versailles. 巴黎多藝學校之敎授. 貢獻於微分方程式論及橢圓函數論.

Hamilton, Sir William Rowan. 1805 年 8 月 3 日或 4 日生於 Dublin. 1865 年 9 月 2 日死於該處. Dublin 之天文敎授. 關於光學, 力學大有所貢獻, 而普通以其四元論之發明而著名.

Hankel, Hermann. 1839 年 2 月 14 日生於 Halle. 1873 年 8 月 29 日死於 Schramberg. 以貢獻於複虛數論及數學史爲多.

Harnack, Karl Gustav Axel. 1851 年生於 Dorpat; 1888 年死於 Dresden. Dresden 之多藝學校之敎授.

Harriot, Thomas. 1560 年生於牛津; 1621 年 7 月 2 日死於 Isleworth 附近之 Sion House. 當時最有名之英國代數學家.

Heron of Alexanderia. 約紀元前 110 年時人. 有名測量師及機器師. 貢獻於求積.

Hesse, Ludwig Otto. 1811 年 4 月 22 日生於 Königsberg; 1874 年 8 月 4 日死於 Munich. 於曲線論及行列式論有所貢獻.

Hipparchus. 紀元前 180 年生於 Bithynia 之 Nicaea; 紀元前 125 年, 死於 Rhodes. 有名天文學家. 球面三角法之最早著者之一.

Hippias of Elis. 約生於紀元前 460 年. 數學家, 天文學家, 自然科學家. 發明圓積線.

Hippocrates of Chios. 約紀元前 440 年頃人. 著最初希臘語之數學初等敎科書.

Horner, William George. 生於 1786 年; 1837 年 9 月 22 日死於 Bath. 特以其數字方程式實根之近似法(1819年)而

著名。

Hrabanus Maurus. 788 年至 856 年間人.數學教師. Mainz 之大僧正.

Huddle, Johann. 1633 年生於 Amsterdam; 1704 年死於該處.貢獻於方程式論及級數論.

Hunain, ibn Ishak.死於 873 年.阿剌伯物理學家.翻譯數種希臘語科學書.

Huygens, Christian, van Zuylichem. 1629 年生於海牙; 1695 年死於該處.著名物理學家及天文學家.其於數學,於曲線之研究有所貢獻.

Hyginus. 約 100 年頃人.羅馬測量師.

Hypatia, Alexandria 之 Theon 之女. 375 年至 415 年時人.著有若干數學之著作.見 Charles Kingsley's Hypatia.

Hypsicles of Alexanderia. 約紀元前 190 年時人.著有立體幾何學及數論,且解法某數不定方程式.

Iamblichus. 約 325 年時人. 出自 Chalcis. 數學之各分科皆有所著述.

Ibn Albanna, Abul Abbas Ahmed ibn Mohammed ibn Otman al Azdi al Marrakushi ibn all Banna Algarnati. 1252 年或云 1257 年生於摩洛哥. 西阿剌伯代數學家;有益於世之著作家.

Ibn Yunus, Abul Hasan Ali ibn Abi Said Abderrahman. 960 年至 1008 年間人.阿剌伯天文學家;作 Hakimitic 表.

Isidorus Hispalensis. 570 年生於 Carthagena; 636 年死於 Seville. Seville 之大僧正.其所著之 Origines 載有關於數學之論文.

Ivory, James. 1765 年生於 Dundee; 1842 年 9 月 21 日死於倫敦.概知爲物理學家.

Jacobi, Karl Gustav Jacob. 1804 年 12 月 10 日生於 Potsdam; 1851 年 2 月 18 日死於柏林.橢圓函數及 theta 函數論及函數行列式論之重要貢獻者.

Jamin, Jules Celestin. 生於 1818 年; 1886 年死於巴黎.物理學教授.

Joannes de Praga (Jnhannes Schindel). 1370 或謂 1375 年生於 Königgrätz, 約 1450 年死於 Prag. 天文學家兼數學家.

Johannes of Seville (Johannes von Luna, Johannes Hispalensias). 約 1140 年時人屬於西班牙之猶太人;著有算術及代數學.

Johann von Gmünden, 1375 年與 1385 年之間生於 Gmunden am Traunsee. 1442 年 2 月 23 日死於 Vienna. Vienna 之數學及天文學教授; Teutonic 大學之第一博學之數學教授.

Kästner, Abraham Gotthelf. 1719 年生於 Leipzig; 1800 年死於 Göttingen. 著有數學史.

Kepler, Johann. 1571 年生於 Stuttgart 附近之 Würtemberg; 1630 年死於 Regensburg. 天文學家(當年少時爲 Tycho Brahe 之助手); Proctor 曰: "Kepler 可謂造宇宙之大眞".擴張對數

之用之拔萃者.述"連續之原理"(1604年);有功於立微積分學之基礎.

Khayyam, Omar. 1123年死於 Nishapur. 天文學家,幾何學家,代數學家. 普通以隔句押韻四行之詩集而著名.

Köbel, Jacob. 1470年生於 Heidelberg; 1533年死於 Oppenheim. 關於算術拔萃之著作者(1514年,1520年).

Lacroix, Sylvestre François. 1765年生於巴黎; 1843年5月25日死於該處.著有關於數學之最難方面之書.

Laguerre, Edmond Nicolas. 1834年4月9日生於Bar-le-Duc; 1886年8月14日死於該處. 貢獻於高等解析法.

Lagrange, Joseph Louis Comte. 1736年1月25日生於 Turin; 1813年4月10日死於巴黎.當時第一等數學家之一. 關於變分學,數論,行列式,微分方程式,有限微差法,方程式論,橢圓函數有所貢獻.解析重學之著者.又為有名之天文學家.

Lahire, Philippe de. 1640年3月18日生於巴黎; 1718年4月21日死於該處. 於曲線之研究及幻方有所貢獻.

Laloubère, Antoine de. 1600年生於 Languedoc. 1664年死於 Toulouse. 貢獻於曲線之研究.

Lambert, Johann Heinrich. 1728年生於上部 Alsace 之 Mühlhausen; 1777年死於柏林.雙曲線三角法之創立者.

Lame, Gabriel. 1795年生於 Tours; 1870年死於巴黎.關於彈性及直交面有所著述.

Landen, John. 1719年生於 Peterborough 附近之 Peakirk; 1790年死於 Milton. 其一定理(1755年)與 Euler 及 Lagrange 以橢圓積分之研究之端緒.

Laplace, Pierre Simon, Marquis de. 1749年3月23日生於 Normandy 之 Beaumont-en-Auge; 1827年3月5日死於巴黎.有名天文學家,物理學家及數學家.於最小二乘法,行列式,方程式,級數,適遇法及微分方程式之理論有所增補.

Legendre, Adrien Marie. 1752年9月18日生於 Toulouse; 1833年1月10日死於巴黎.有名數學家,特有貢獻於橢圓函數論,數論,最小二乘法,及幾何學.發見"law of quadratic reciprocity", Gauss 謂之"算術之寶玉".

Leibnitz, Gottfried Wilhelm. 1646年生於 Leipzig; 1716年死於 Hanover. 近世博學之士之一; 卓越之哲學家及數學家.為微分學之發明者之一,又為今日所行其記法之發明者.

Leonardo of Pisa, Fibonacci (filius Bonacli, Bonacius 之子). 1180年生於 Pisa; 約死於 1250年. 遊歷甚廣,得關於印度數字及阿剌伯普通學術之知識,歸國後,載於其所著之 Liber Abaci, Practica geometriae 及 Flos 而出版.

L'Hospital, Guillaume François Antoine de, Marquis de St. Mesme. 1661

年生於巴黎；1704 年死於該處.為最初承認微分學之價值之一人.

Lhuilier, Simon Antoine Jean. 1750 年生於 Geneva; 死於 1840 年.幾何學家.

Libri, Carucci dalla Sommaja, Guglielmo Brutus Icilius Timoleon. 1803 年 1 月 2 日生於Florence; 1869 年 9 月 28 日死於 Villa Fiesole. 著有意大利數學史.

Lie, Marius Sophus. 生於 1842 年 12 月 12 日; 死於 1899 年 2 月 18 日. 於 Christiania 及 Leipzi 以應用其 Continuous groups of transformations, 於微分方程式而特著名.

Liouville, Joseph. 1809 年生於 St. Omer; 死於 1882 年.所謂 Liouville 雜誌之創立者.

Lobachevsky, Nicolai Ivanovich. 1793 年生於 Makarief; 1856 年 2 月 12 日至 24 日死於 Kasan. 所謂非歐幾里得幾何學之創立者之一.

Ludolph van Ceulen. 見 Van Ceulen 條.

Mac Cullagh, James. 1809 年生於 Strabane 附近; 1846 年死於 Dublin. 爲 Dublin 之 Trinity College 數學及物理學教授.

Maclaurin, Colin. 1698 年生於 Argyllshire 之 Kilmodan. 1746 年 6 月 14 日死於 York. 愛丁堡之數學教授. 於圓錐曲線及級數有所貢獻.

Malfatti, Giovanni Francesco Giuseppe. 1731 年 9 月 26 日生於 Ala; 1807 年 10 月 9 日死於 Ferrara. 以其名冠於幾何學之問題而有名.

Malus, Étienne Louis. 1775 年 6 月 23 日生於巴黎; 1812 年 2 月 24 日死於該處.物理學家.

Mascheroni, Lorenzo. 1750 年生於 Castagneta; 1800 年死於巴黎.集僅用圓規之幾何學之大成(1795年).

Maurolico, Francesco. 1494 年 9 月 16 日生於 Messina; 死於 1575 年 7 月 21 日.當時出類之幾何學家.又關於三角法有所著述.

Maximus, Planudes. 約 1330 年頃人. 出自 Nicomedia. 在君士坦丁堡之希臘數學家.關於 Diophantus 之註釋及算術有所著述.

Menaechmus. 約紀元前 350 年頃人. 柏拉圖之弟子.圓錐曲線之發明者.

Menelaus of Alexandria. 約 100 年頃人. 希臘數學家及天文學家著有幾何學及三角法.

Mercator, Gerhard. 1512 年生於 Flanders 之 Rupelmonde, 1594 年死於 Duisburg. 地理學家.

Mercator, Nicholas. (德文名爲 Kaufmann), 約 1620 年生於 Cismar 附近; 1687 年死於巴黎.發明 $\log(1+x)$ 之級數.

Metius, Adriaen. 1571年生於Alkmaar; 1635 年死於 Franeker. 誘出 π 之近似

數，實爲其父所得。

Meusnier de la Place, Jean Baptiste Marie Charles. 1754 年生於巴黎；1793 年死於 Cassel. 發見關於曲面之曲率之一定理。

Mêziriac, Claude Gaspard Bachet de. 1581 年生於 Bourg-en-Bresse；死於 1638 年。以其 Problèms plaisants 等 (1624年) 及 Diophantus 之繙譯而著名。

Möbius, August Ferdinand. 1790 年 11 月 17 日生於 Schulpforta；1868 年 9 月 26 日死於 Leipzig. 於近世幾何學之先進者。Der Barycentrische Calcül (1827 年) 之著者。

Mohammed, ibn Musa. 見 Al Khowarizmi 條。

Moivre. 見 De Moivre 條。

Mollweide, Karl Brandan. 1774 年 2 月 3 日生於 Wolfenbüttel；1825 年 3 月 10 日死於 Leipzig. 關於天文學及數學有所著述。

Monge, Gaspard, Comte de Péluse. 1746 年生於 Beaune；1818 年死於巴黎. 畫法幾何之發見者. 於曲線及曲面之研究，及微分方程式有所貢獻。

Montmort, Pierre Raymond de. 1678 年生於巴黎；1719 年死於同地。貢獻於適遇法之理論及級數之總和法。

Moschopulus, Manuel. 約 1300 年時人. Byzant 之數學家。以其關於幻方之著作而著名。

Mydorge, Claude. 1585 年生於巴黎；1647 年死於該處。最先法文之圓錐曲線論之著作者。

Napier, John. 1550 年生於蒲加斯德，後卽居住於愛丁堡之郊外；1617 年死於其地。對數之發明者。貢獻於三角法。

Newton, Sir Issac. 1642 年 12 月 25 日生於 Lincolnshire 之 Woolsthorpe；1727 年 3 月 20 日死於 Kensington. 繼 Barrow 爲劍橋大學之數學之 Lucasian 教授 (1669年)。世界大數學物理學家。發明微積分(約1666年)。貢獻於級數論，方程式論，曲線論以及當時所知數學之各分科甚多。

Nicole, François. 1683 年生於巴黎. 1758 年死於其地。作有限微差法之論文之最初之人。

Nicomachus of Girasa Arabia. 100 年時人。著有算術。

Nicomedes of Girasa. 紀元前 180 年時人。發明冠其名之蚌線 (Conchoid)。

Nicolaus von Cusa. 1401 年生於 Mosel 河畔之 Cuss；1464 年 8 月 11 日死於 Todi. 神學家，物理學家，天文學家及幾何學家。

Odo of Clung. 879 年生於 Tours；942 年或云 943 年死於 Clung. 關於算術有所著作。

Oenopides of Chies. 紀元前 465 年時人。遊學於埃及。幾何學家也。

Olivier, Théodore. 1793 年 1 月 21 日生於里昂；1853 年 8 月 5 日死於同地。

著有畫法幾何學。

Oresme, Nicole. 約 1320 年生於 Normandy; 1382 年死於 Lisieux. 著有算術及幾何學。

Oughtred, William. 1574 年生於 Eton; 1660 年死於 Albury 著有算術及三角法。

Pacioli, Luca. Era Luca di Borgo di Santi Sepulchri. 約於 1445 年生於 Tuscany 之 Borgo San Sepolcro; 約 1509年死於 Florence. 掌教鞭於意大利之數市.其所著之 Summa de Arithmetica, Geometria 等,實爲數學界大著作之嚆矢(1494).

Pappus of Alexanderia. 約300年頃人. 編纂一書網羅當時數學之知識。

Parent, Antoine. 1666年生於巴黎; 1716 年死於其地.對於三坐標而論表面之最初之人(1700年).

Pascal, Blaise. 1623 年生於 Clermont; 1662年死於巴黎. 物理學家,哲學家,數學家.貢獻於數論,適遇法及幾何學.

Peirce, Charles S. 1839 年 9 月 10 日生於 Mass 之劍橋.關於論理學有所著述.

Pell, John. 1610 年3月1日生於 Sussex; 1685 年 12 月 10 日死於倫敦.翻譯 Rahn 之代數學.

Perseus. 紀元前 150 年時人.希臘幾何學家;研究螺線.

Peuerbach, Georg von. 1423 年 5 月 30日生於上部澳洲之 Peuerbach; 1461 年 4 月 8 日死於維也納. 著名教師且著有算術,三角法及天文學.

Pfaff, Johann Friedrich. 1765 年生於 Stuttgart; 1825 年死於 Halle. 天文學家及數學家.

Pitiscus, Bartholomaeus. 生於 1561 年 8 月 24 日; 1613 年7月2日死於 Heidelberg. 著有算術, 且爲最初用現今之小數點者(1612年).

Plana, Giovanni Antonio Amaedo. 1781 年 11 月 8 日生於 Voghera; 1864 年 1 月 2 日死於 Turin. 數學的天文學家及物理學家.

Planudes. 見 Maximus Planudes 條.

Plateau, Joseph Antoine Ferdinand. 1801 年 10 月 14 日生於 Brussels; 1883 年 9 月 15 日死於 Ghent. 於 Ghent 爲物理學教授.

Plato. 紀元前 429 年生於雅典; 死於紀元前 348 年. Academy 之創立者.貢獻於數學的哲學.

Plato of Tivoli. 1120 年時人. 翻譯 Al Battani 之三角法及其他著作.

Plücker, Johann. 1801 年 7 月 16 日生於 Elberfeld; 1868 年 5 月 22 日死於 Bonn. 於 Bonn 及 Halle 爲數學教授. 爲此世紀中第一等幾何學家之一.

Poisson, Siméon Denis. 1781 年生於 Loiret 之 Pithiviers; 1840 年死於巴黎.概知其爲物理學家.於定積分之研究及級數有所貢獻.

Poncelet, Jean Victor. 1788 年生於 Metz; 1867 年死於巴黎. 射影幾何學

之創作者之一.

Pothenot, Laurent. 1732 年死於巴黎. 法國之 College Royale 之數學教授.

Proclus. 412 年生於 Byzatium; 死於 485 年. 作歐幾里得之註解. 研究高等平面曲線.

Ptolemy, (Ptolemaeus Claudius). 87 年生於 Ptolemais; 165 年死於亞歷山大.最大希臘天文家之一.

Pythagoras. 紀元前580年生於 Samos; 紀元前 501 年死於 Megapontum. 遊學於埃及及東方. 於南意大利之 Croton 創立 Pythagoras 學校.發數論之端緒. 有名幾何學家.

Quêtelet, Lambert Adolph Jacques. 1796 年 2 月 22 日生於 Ghent; 1874 年 2 月 7 日死於 Brussels. 比利時之皇立天文臺之管理者. 貢獻於幾何學, 天文學,及統計學.

Ramus, Peter (Pierre de la Ramée). 1515 年生於 Picardy 之 Cuth; 1572 年 8 月 24 日至 25 日巴黎 St. Bartholomew 之殺戮之際被害.哲學家,然又爲數學界之卓越之著作者.

Recorde, Bobert. 1510 年生於 Wales 之 Tenby; 1558 年死於倫敦之獄中. 於牛津爲數學及修辭學教授. 始用符號 "=" 以表相等.

Regiomontanus, Johannes Müller. 1436 年 6 月 6 日生於 Königsberg 附近; 1476 年 7 月 6 日死於羅馬.數學家, 天文學兼地理學家.翻譯希臘數學書者.最初三角法教科書之著者.

Remigius of Auxerre. 約死於 908 年. 爲 Alcuin 之弟子.著有算術.

Rhaeticus, Georg Joachim. 1514 年生於 Feldkirch; 1576 年死於 Kaschau. Wittenberg 之數學教授; Copernicus 之弟子,而爲其書之出版者.於三角法有所貢獻.

Riccati, Count Jacopo Francesco. 1676 年生於 Venice; 1754 年死於 Trèves.於物理學及微方程式有所貢獻.

Richelot, Friedrich Julius. 1808 年 11月6日生於 Königsberg; 1875年3月 31 日死於同地.於橢圓函數及 Abel 函數有所著作.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard. 1826 年 9 月 17 日生於 Breselenz; 1866 年 7 月 20 日死於 Selasca. 貢獻於函數論及曲面之研究.

Riese, Adam. 1492 年生於 Lichtenfels 附近之 Staffelstein; 1559 年死於 Annaberg.十六世紀關於算術最有勢力之教師及著作者.

Roberval, Giles Persone de. 1602 年生於 Roberval; 1675 年死於巴黎.於巴黎爲數學教授. 著關於切線及擺線之幾何學.

Rolle, Michel. 1652 年 4 月 22 日生於 Ambert; 1719 年 11 月 8 日死於巴黎. 於方程式論發明冠其名之定理.

Rudolff, Christoff. 十六世紀前葉人. 德國代數學家.

Sacro-Bosco, Johannes de. 1200 年(?)生於 Yorkshire 之 Holywood (Halifax); 1256 年死於巴黎。於巴黎爲數學及天文學教授。特以其所著之 Tractatus de sphaere mundi 而著名。

Saint-Venant, Adhémar Jean Claude Barré de. 生於 1797 年; 1886 年死於 Vendôme。關於彈性及扭性之著者。

Saint-Vincent, Gregoire de. 1584 年生於 Bruges; 1667 年死於 Ghent。以求與圓等積之正方形失敗而有名。

Saurin, Joseph. 1659 年生於 Conrtaison; 1737 年死於巴黎。著切線之幾何學。

Scheffer, Ludwig. 1859 年生於 Königsberg; 1885 年死於 Munich。函數論之著者。

Schindel, Johannes. 見 Johannes de Praga 條。

Schwenter, Daniel 1585 年生於 Nuremberg; 死於 1636 年。於 Altdorf 爲東方言語及數學教授。

Serenus of Antissa. 約 350 年時人。幾何學家。

Serret, Joseph Alfred. 1819 年 8 月 30 日生於巴黎; 1885 年 3 月 2 日死於 Versailles。關於代數學及微分積分有名教科書之著者。

Sextus Julius Africanus, 約 220 年頃人。著有數學史。

impson, Thomas. 1710 年 8 月 20 日生於 Bosworth; 1761 年 5 月 14 日死於 Woolwich。代數學,幾何學,三角法,及流數術教科書之著者。

Sluze, René François Walter de. 1622 年生於 Maas 河畔之 Visé; 1685 年死於 Liège。貢獻於微積分之記法及幾何學。

Smith, Henry John Stephen. 1826 年生於 Dublin; 死於 1883 年 2 月 9 日。關於數論爲英國之第一等著者。

Snell, Willebrord, Van Royen. 1581 年生於 Leyden; 1626 年死於該處。物理學家,天文家,又爲三角法之貢獻者。

Spottiswoode, William. 1825 年 1 月 11 日生於倫敦; 1883 年 6 月 27 日死於該處。皇家學會會長。代數學及幾何之著者。

Staudt, Karl Georg Christian von. 1798年1月24日生於 Rothenburg a. d. Tauber; 1867 年 6 月 1 日死於 Erlangen。近世幾何學之拔萃貢獻者, Geometrie der Lage 卽爲其所著之書。

Steiner, Jacob. 1796 年 3 月 18 日生於 Utzendorf; 1863 年4月1日死於 Pern。有名幾何學家。

Stevin, Simon. 1548 年生於 Bruges; 1620 年死於 Leyden (或謂海牙)。物理學家及算術家。

Stewart, Matthew. 1717 年生於 Bute 島之 Rothsay; 1785 年死於愛丁堡。於愛丁堡繼 Maclaurin 爲數學教授,貢獻於近世初等幾何學。

Stifel, Michael. 1486年或謂1487年生於 Esslingen; 1567年死於 Jena. 特以其所著之 Arithmatica integra (1544年) 而著名.

Sturm, Jacques Charles François. 1803年生於 Geneva; 死於 1855年. 於巴黎之多藝學校爲敎授. Sturm 定理之發明者.

Sylvester, James Joseph. 1814年9月3日生於倫敦; 1897年3月15日死於同地. 於牛津大學爲純正幾何學之 Savilian 敎授.

Tabit ibn Korra. 833年生於米薩波打米亞; 902年死於 Bagdad. 數學家及天文學家. 翻譯希臘數學家之著作, 著數論.

Tartaglia, Nicolo. (Nicolas the Stammerer. 眞名爲 Nicolo Fontana). 約1500年生於 Brescia; 約1557年死於 Venice. 物理學家及算術家. 其關於三次方程式之著作最著名.

Taylor, Brook. 1685年生於 Edmonton; 1731年死於倫敦. 物理學家及數學家. 概以其關於級數之著作而著名.

Thales. 紀元前640年生於 Miletus; 紀元前548年死於雅典. 希臘七賢之一. 創設 Ionia 學校. 遊歷埃及, 學天文學及幾何學. 希臘發起科學的幾何學之第一人.

Theaetetus of Heraclea. 紀元前390年時人. 蘇格洛底之弟子. 關於無理數及幾何學有所著作.

Theodorus of Cyrene. 紀元前410年時人, 柏拉圖之數學敎師. 著有無理數.

Theon of Alexandria. 370年時人. 於亞歷山大爲敎師. 出版希臘數學家之著作.

Theon of Smyrna. 130年時人. 柏拉圖派之哲學家. 著有算術, 幾何學, 數學史, 及天文學.

Thymaridas of Paros. 紀元前390年時人. 畢達哥拉斯派學者. 關於算術及方程式有所著作.

Torricelli, Evangelista. 1608年生於 Faënza; 死於 1647年. 著名物理學家.

Tortolini, Barnaba. 1808年11月19日生於羅馬; 死於 1874年8月24日. 負其名之 Annali 之發行者.

Tremblay, Jean. 1749年生於 Geneva; 死於 1811年. 著有微分方程式.

Tschirnhausen, Ehrenfried Walter, Graf von. 1651年生於 Kiesslingswalde; 1708年死於 Dresden. 創立 Catacaustics 之理論.

Ubaldi, Guido. 見 Del Monte 條.

Unger, Ephraim Solomon. 1788年生於 Coswig; 死於 1870年.

Urcinus, Benjamin. 1587年至1633年間人, 著三角法及計算表.

Van Ceulen, Ludolph. 1540年1月18日(或謂28日)生於 Hildesheim; 1610年12月31日死於荷蘭. 以其 π 之計算而著名.

Vandermonde, Charles Auguste. 1735

年生於巴黎；1796 年死於該處. Conservatoire pour les arts et metiers 之會長.

Van Eyck, Jan. 1385 年至1440 年間人.荷蘭畫家.

Van Schooten, Franciscus (年幼者). 生於 1615 年;死於 1660 年.笛卡兒及 Vieta 之書之發行者.

Viete(Vieta), François, Seigneur de la Bigotière. 1540 年生於 Fontenay-la-Comte; 1603 年死於巴黎. 當時著名之代數學家.又著三角法及幾何學.

Vincent. 見 Saint-Vincent 條.

Vitruvius, Marcus Vitruvius Pollio.紀元前 15 年生存之人.羅馬建築家. 關於應用數學有所著作.

Viviani, Vincenzo. 1622 年生於 Florence; 1703 年死於該處. Galileo 及 Torricelli 之弟子.貢獻於初等幾何學.

Wallace, William. 生於 1768 年;死於 1843 年.愛丁堡之數學教授.

Wallis, John. 1616 年生於 Ashford; 1703 年死於牛津. 於牛津爲幾何學之 Savilian教授.出版數學書甚多.與虛數之近世圖解的說明之端緒.

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm. 1815 年 10 月 13 日生於 Ostenfelde; 1897 年 2 月 19 日死於柏林. 該世紀中多能之數學家之一.

Werner, Johann. 1486 年生於 Nuremberg; 死於 1528 年.著有數學,地理學,天文學.

Widmann, Johann von Eger. 1498 尙生存之人. 編來布尼茲代數學之講義. 德文代數學之創作者. 又著算術及幾何學.

Witt, Johann de. 生於 1625 年;死於 1672 年.笛卡兒之友及助手.

Wolf, Johann Christian von. 1679 年生於 Breslau; 1754 年死於 Halle. 於 Halle 及 Marburg 爲數學及物理學教授.

Woepcke, Franz. 1826 年 5 月 6 日生於 Dessau; 1864 年 3 月 25 日死於巴黎.研究阿剌伯數學發達史.

Wren, Sir Christopher. 1632 年生於東 Knoyle; 1723 年死於倫敦.於 Gresham College 爲天文學教授;於牛津爲 Savilian 教授;皇家學會會長. 然氏全以建築家之大著作而著名.

附錄四　英漢名詞對照表

A

B

C

E

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

T

U

V

W

Y

Z

附錄五　數學用字略

A. or ans. Answer; 答.

A. C. *ante Christum*=Before Christ; 耶穌紀元前.

A. D. *anno Domini*=In the year of our Lord; 耶穌紀元.

Ad. inf. *ad infinitum*=To infinity; 無窮.

adj. Adjacent; 相鄰.

alg. Algebra; 代數學.

alt. Alternate; 錯. Altitude; 高.

ans. Answer; 答.

A. P. Arithmetic progression; 算術級數,等差級數.

arith. Arithmetic or Arithmetical; 算術或算術的.

art. Article; 節.

Avoir., Avdp. Avoirdupois; 藥衡.

Ax. Axiom; 公理.

B. C. Before Christ; 耶穌紀元前.

C. Centigrade; 百度.

C., Cap., Ch. *Caput*=Chapter; 章.

c., ct., cent. *Centum*=A hundred; 百.

cen. Central; 中心的. Century; 世紀.

cg. Centigram; 公毫,兣.

C. G. S. Centimetre, Gramme, Second; 長,質量,時之單位.

Ch., Chap. Chapter; 章.

cm. Centimetre; 公分,粉.

com. Common; 公,共通.

comp. Compare; 比較. Compound or Compounded; 複.

con. Conclusion; 終結.

con. sec. Conic sections; 圓錐曲線,圓錐曲線法.

const. Construction; 作圖.

contr. Contracted; 省略的.
Contraction; 省略.

cor. Corollary; 系,推論.

cos. Cosine; 餘弦.

cot. Cotangent; 餘切.

cover. Coversed sine; 餘矢.

csc. Cosecant; 餘割.

cu., cub. Cubic; 立方的.

cwt. A hundredweight; 一百二十磅.

d., deg. Degree; 度.

d. *denarius*=A penny; 辨士.

def. Definition; 定義.

demon. Demonstrative; 證明.

der. Derivation; 誘求.

diam. Diameter; 徑,直徑.

dist. Distance; 距離.

div. Divide; 除.

dols. Dollars; 銀圓.

doz. Dozen; 打

E. East; 東.

e. g., ex. gr. *exampli gratia*=For example; 例.

E. N. E. East-north-east; 東北東.

eq. Equal; 相等.

E. S. E. East-south-east; 東南東.

etc. *et ceteri or cetra*=And others, and so forth; 等.

ex. Example; 例. Exerise; 例題.

ext. Exterior; 在外.

f. Foot; 英尺.

fig. Figure; 圖形.

ft. Foot, Feet; 英尺.

fth.,fthm. Fathom; 尋(六英尺)

fur. Furlong; 長度名(一英里八尺之一).

g. Gramme; 瓰,公分.

G. C. M. Greatest common measure; 最大公約數.

geom. Geometry; 幾何學.

gm. Gramme; 瓰,公分.

G. M. T. Greenwich mean time; 格林維基平均時.

G. P. Geometrical progression; 幾何級數,等比級數.

guin. Guinea; 貨幣名(值二十一先令).

H. C. F. Highest common factor; 最高公因數.

hf. Half; 半.

hr. Hour; 小時.

hyp. Hypothesis; 假設.

iden. Identical; 全等, 恆等.

i. e. *id est*=That is; 卽,卽是.

in. Inch, Inches; 英寸.

indef. Indefinite; 無限,不定.

int. Interest; 利息. Interior; 在內.

kilo. Kilogramme; 公斤,瓩.

km. Kilometre; 公里,粁.

l. Napierian logarithm; 納白爾對數.

lat. Latitude; 緯度.

lb. *libra*=Pound; 磅.

L. C. M. Least common multiple; 最小公倍數. Lowest common multiple; 最低公倍數.

lit. Liter, Litre; 公升,竔.

Log. Tabular logarithm; 表對數.

Log. Common logarithm; 常用對數.

lon., long. Longitude; 經度.

M. *mille*=A thousand; 千.

m. Metre; 公尺. Minute; 分.

Math. Mathematics; 數學.

mo. Month; 月.

mos. Months; 月.

mth. Month; 月.

N. North; 北. Northern; 北方的.

N. B. *Nota bene*=Note well or take notice; 注意.

N. E. North-east; 北東.

N. N. E. North-north-east; 北北東.

N. N. W. North-north-west; 北北西

No. *Numero*=Number; 數.

Nos. Numbers; 數.

N. W. North-west; 北西.

oz. Ounce; 溫司.

P. Page; 頁.

par. Parallel; 平行.

perp. Perpendicular; 垂直,正交.

p. p. Pages; 頁.

p. p. Proportional parts; 比例部.

q. e. d. *quod erat domonstrandum*=

Which was to be demonstrated; 所證明者.

q. e. f. *quod erat faciendum*=Which was to be done; 所作者.

q. e. i. *quod erat invenien*=Which was to be found out; 所求者.

qr. Quarter; 刻, 四分之一.

qt. Quantity; 量. Quart; 容量名.

qts. Quarts; 容量名.

Rad. Radical; 根的.

rad. *ratix*=Root; 根,底.

s. Second; 秒.

S. South; 南.

S. E. South-east; 南東.

sec. Secant; 正割.

sh. Shilling; 先令.

sin. Sine; 正弦.

sol. Solution; 解法,解答.

sq. Square; 平方, 正方.

S. S. E. South-south-east; 南南東.

S. S. W. South-south-west; 南南西.

subst. Substitute; 代入.

suf., suff. Suffix; 添數.

supp. Supplement; 補.

S. W. South-west; 南西.

T. Ton; 噸.

tan. Tangent; 正切.

th.,theor. Theorem; 定理.

trig. Trigonometry; 三角法.

V. Volume; 體積.

vers. Versed sine; 正矢.

vg. *Verbi gratia*=For example; 例如.

viz. *Videlicet*=Namely; 名爲.

vol. Volume; 卷.

W. West; 西.

wk. Week; 一禮拜.

W. N. W. West-north-west; 西北西.

W. S. W. West-south-west; 西南西.

wt. Weight; 重量.

X. Unknown number; 未知數.

Y., Yd. Yard; 碼.

Y., Yr. Year; 年.

&. *et*=And; 與,及,且.

&c. *et Cetera*=And so forth; 等.

附錄六　數學用符號

+ Plus. 加號,加;正號.

− Minus. 減號,減;負號.

± or ∓ Plus or minus. 加減之複符號.

∻ Plus or difference. 加差.

× Multiplied by; times into. 乘號,乘.

÷ Divided by. 除號,除.

= Is equal to; equals. 等號,等於.

≒ Appromiximately equal. 接近於.

≠ Is not equal to. 不等於.

> Is greater than. 大於.

< Is less than. 小於.

≧ Greater or equal. 大於或等於.

≦ Less or equal. 小於或等於.

≷ Greater or less. 大於或小於.

≯ Is not greater than. 不大於.

≮ Is not less than. 不小於.

≡ Is identical. 全等,恆等.

≌ Congruous. 相合.

⇼ Denoting equivalence in area or volume in geometry. 全等.

∼ The difference between. 差.

∝ Varies as; is proportional to. 變;與之成比例.

: Is to; the ratio of. 比之記號.

:: As; equals. 若;等於.

∴ Hence; therefore. 所以;故.

∵ Because. 因.

∞ Infinity; Indefinitely great. 無窮;無窮大.

0 Infinitesimal; indifinitely small; zero. 無窮小;零.

∠ or ∧ Angle. 角. ∡ Angles. 諸角.

∟ or $\hat{R}$ Right angle. 直角.

⊥ The perpendicular; perpendicular to. 垂線;垂直. ⊥s Perpendiculars. 諸垂線.

∥ Parallel; is parallel to. 平行線;平行於. ∥s Parallels. 諸平行線.

⌒ Arc of a circle. 弧.

⊙ Circle. 圓. Ⓢ Circles. 諸圓.

△ Triangle. 三角形. ⚠ Triangles. 諸三角形.

□ Square. 正方形.

▭ Rectangle. 矩形.

▱ Parallelogram. 平行四邊形.

∽ Is similar. 相似.

⊻ Equiangular figure or Isogon. 等角形.

⊥ Equilateral figure. 等邊形.

√ or $\sqrt{\quad}$ Radical. 根號,平方根.

∛ Cubic root. 立方根.

$\sqrt[n]{\ }$ Nth root. n 乘根.

—— Vinculum. 括線.

( ) Parenthesis; [ ] Brackets;

{ } Braces. 括弧.

f, ϕ, ψ, F Function or function of. 函數之符號.

d, D, δ Differential. 微分之符號.

$\int$ Integral, integral of. 積分之符號.

Σ Sigma; Sum; algebraic sum. 和.

M The modulus of logarithm. 對數率.

π The number 3.14159265+.... 圓周率.

° Degrees of arc. 度.

′ Minutes of arc. 分.

″ Seconds of arc. 秒.