Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 46

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 46.1. Zeige, dass im Ring der rationalen Folgen $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ die Teilmenge der Nullfolgen kein Ideal bildet.

Übungsaufgaben

Aufgabe 46.2. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge aller Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Dieser Folgenring wird mit $K^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Aufgabe 46.3. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Menge aller Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) kein Körper ist.

Aufgabe 46.4. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Menge aller konvergenten Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 46.5. Die beiden Zwillingsschwestern Carmen und Conchita Cauchy waren gestern auf einer tollen Party. Beide haben jeweils genau eine Erinnerungslücke, einen Moment, an den sie sich nicht errinnern können. Sie möchten wissen, ob es sich um die gleiche Lücke handelt. Da es sich um eine Lücke handelt, können sie diese nicht direkt adressieren und untereinander vergleichen. Welche Möglichkeiten haben sie, ihre Erinnerungslücken allein mit Hilfe ihrer Erinnerungen zu vergleichen?

Aufgabe 46.6. Wir nennen zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q}$ *Cauchy-äquivalent*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - y_m| \leq \epsilon$$

gilt. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Cauchy-Äquivalenz ist eine symmetrische und transitive Relation auf dem Folgenring $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
(2) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn sie zu sich selbst Cauchy-äquivalent ist.
(3) Auf dem Raum aller Cauchy-Folgen ist die Cauchy-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation.
(4) Auf dem Raum aller Cauchy-Folgen stimmt die Cauchy-Äquivalenz von zwei Folgen mit der Eigenschaft überein, dass ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.
(5) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-äquivalent ist, so ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 46.7. Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert.

(1) Zeige, dass
$$I_k = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_k = 0 \right\}$$
ein Ideal in $K^{\mathbb{N}}$ ist.
(2) Welche Bedeutung hat die durch dieses Ideal gegebene Äquivalenzrelation?
(3) Zeige, dass die Gesamtabbildung
$$K \longrightarrow K^{\mathbb{N}} \longrightarrow K^{\mathbb{N}}/I_k$$
bijektiv ist.

Aufgabe 46.8. Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Zeige, dass durch
$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}},$$
falls sich die beiden Folgen nur in endlich vielen Gliedern unterscheiden, eine Äquivalenzrelation definiert ist. Rührt diese Äquivalenzrelation von einem Ideal her?

Aufgabe 46.9.*

Bildet im Ring aller rationalen Folgen die Teilmenge der in $\mathbb{Q}$ konvergenten Folgen ein Ideal?

Aufgabe 46.10. Bildet im Ring aller rationalen Folgen die Teilmenge der in $\mathbb{R}$ konvergenten Folgen ein Ideal?

Aufgabe 46.11. Es sei $R \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ der Ring, der aus allen in $\mathbb{Q}$ konvergenten, rationalen Folgen besteht.

(1) Zeige, dass die Menge der Nullfolgen ein Ideal in R bildet.
(2) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus
$$\varphi\colon R \longrightarrow \mathbb{Q}$$
gibt.
(3) Zeige, dass es einen bijektiven Ringhomomorphismus
$$\psi\colon R/N \longrightarrow \mathbb{Q}$$
gibt.

Aufgabe 46.12.*

Es sei
$$D = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{R} \right\}$$
und N das Ideal der Nullfolgen in D.

(1) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus
$$\psi\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
gibt.
(2) Zeige, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus
$$\varphi\colon D/N \longrightarrow \mathbb{R}$$
gibt.
(3) Zeige, dass die Gesamtabbildung
$$\mathbb{R} \longrightarrow D \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$
bijektiv ist.

Aufgabe 46.13. Es sei $R = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ der Ring aller rationalen Folgen. Ist die Abbildung
$$\mathbb{Q} \longrightarrow R,$$
die einer rationalen Zahl ihre Dezimalbruchfolge zuordnet, ein Ringhomomorphismus?

Aufgabe 46.14. Wir betrachten die Ringhomomorphismen
$$q\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n)$$
und
$$q\colon C \longrightarrow C/N = \mathbb{R},$$
wobei C den Ring der rationalen Cauchy-Folgen und N das Ideal der Nullfolgen bezeichnet. Zeige, dass es jeweils (über kanonische Repräsentanten) eine natürliche Abbildung s in die andere Richtung mit
$$q \circ s = \mathrm{Id}$$
gibt, die aber kein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 46.15. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei M die Menge der wachsenden Folgen in $K_{\geq 0}$. Zeige, dass M mit der gliedweisen Addition und Multiplikation ein kommutativer Halbring ist.

Aufgabe 46.16. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationale Cauchy-Folgen. Zeige, dass in $\mathbb{R} = C/N$ die Ordnungsbeziehung

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \geq [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

genau dann gilt, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $x_n \geq y_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 46.17. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationale Cauchy-Folgen. Zeige, dass in $\mathbb{R} = C/N$ die Ordnungsbeziehung

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \geq [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

genau dann gilt, wenn es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq y_n$ gibt.

Aufgabe 46.18. Wir betrachten die Folge $\sqrt{\frac{1}{n}}$ in $\mathbb{R}$. Jedes Folgenglied sei selbst durch die Heron-Folge $x_{ni}, i \in \mathbb{N}$, mit dem Startwert $x_{n0} = 1$ repräsentiert. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9.

Aufgabe 46.19. Es sei u_n die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$ mit dem Startwert $u_0 = 1$, also $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{7}{3}$, $u_3 = \frac{47}{21}, \ldots$ Wir betrachten die reelle Folge

$$z_n := \sqrt{u_n}.$$

Zu jedem n sei x_{ni}, $i \in \mathbb{N}$, die Heron-Folge zur Berechnung von $z_n = \sqrt{u_n}$ mit dem Startwert $x_{n0} = 1$. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9. Zeige, dass z_n eine Cauchy-Folge ist und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 46.20. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen. Zeige, dass man die z_n durch rationale Cauchy-Folgen x_{ni}, $i \in \mathbb{N}$, derart repräsentieren kann, dass die Diagonalfolge

$$y_n := x_{nn}$$

(siehe Satz 46.9)

(1) in $\mathbb{R}$ nicht konvergiert,
(2) in $\mathbb{R}$ konvergiert, aber nicht gegen den Grenzwert von z_n,
(3) in $\mathbb{R}$ konvergiert, und zwar gegen den Grenzwert von z_n.

Aufgabe 46.21. Es sei M die Menge aller reellen konvergenten Folgen und

$$\Psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \left(\lim_{n \to \infty} x_n \right),$$

die Abbildung, die einer konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet. Warum ist dies eine (wohldefinierte) Abbildung? Ist Ψ injektiv? Ist Ψ surjektiv?

Aufgabe 46.22. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times,\, z \longmapsto z^n.$$

Aufgabe 46.23. Gibt es Gruppenhomomorphismen

$$(\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0),$$

die nicht $\mathbb{R}$-linear sind?

Aufgabe 46.24.*

Zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 46.25. Es seien $K \subseteq L$ archimedisch angeordnete Körper. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ eine in K konvergente Folge. Zeige, dass diese Folge auch in L konvergiert.

Aufgabe 46.26.*

Man gebe ein Beispiel für eine konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K, die in einem größeren angeordneten Körper

$$K \subseteq L$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 46.27. Zeige, dass das reelle Einheitsintervall $[0, 1]$ unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 46.28. Zeige, dass jedes reelle Intervall mit positiver Intervalllänge unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.29. (2 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Zeige, dass jede Teilfolge davon das gleiche Element im Cauchy-Folgen-Modell definiert.

Aufgabe 46.30. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 46.31. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Menge aller beschränkten Folgen in K (mit gliedweiser Addition und Multiplikation) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 46.32. (5 Punkte)

Wir betrachten die Folge $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ in $\mathbb{R}$. Jedes Folgenglied sei selbst durch die Heron-Folge $x_{ni}, i \in \mathbb{N}_+$, mit dem Startwert $x_{n0} = 1$ repräsentiert. Bestimme die Diagonalfolgenglieder y_1, y_2, y_3, y_4 im Sinne von Satz 46.9.

Aufgabe 46.33. (4 (2+2) Punkte)

Es sei K ein Körper und $K^{\mathbb{N}}$ der zugehörige Folgenring. Es sei $I \subseteq K^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen über K, bei denen nur endlich viele Glieder von 0 verschieden sind.

(1) Zeige, dass I ein Ideal in $K^{\mathbb{N}}$ ist.
(2) Zeige, dass der Restklassenring $K^{\mathbb{N}}/I$ kein Körper ist.

Abbildungsverzeichnis