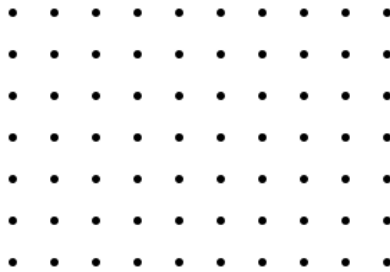


Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 3



Ein Gittermaß weist nur den Gitterpunkten ein positives Maß zu. Wenn der Gitterabstand hinreichend klein ist, liefert das Gittermaß eine gute Approximation für den Inhalt für Figuren, die nicht allzu kompliziert sind.

Gittermaße

Als weiteres diskretes Maß besprechen wir Gittermaße.

DEFINITION 3.1. Es sei $\epsilon > 0$ Die Menge

$$\Gamma_\epsilon = \{\epsilon(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nennt man das *Gitter* zum Gitterpunkt Abstand ϵ . Das durch

$$\mu_\epsilon(T) = \epsilon^n \cdot \#(T \cap \Gamma_\epsilon)$$

für $T \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte Maß heißt das *Gittermaß* zum Gitterabstand ϵ .



Pointillismus: Der Flächeninhalt (auf dem Bild) der hellgrünen Rasenfläche entspricht in etwa der Anzahl der hellgrünen Farbtupfer, der Anzahl der hellgrünen Pixels und der Anzahl der hellgrünen Synapsen.

Ausschöpfungseigenschaften

DEFINITION 3.2. Es sei M eine Menge und sei T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \subseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Ausschöpfung* von T bildet (oder T ausschöpft), und schreibt dafür $T_n \uparrow T$.

Der \mathbb{R}^k wird beispielsweise durch die Bälle $B(0, n)$ oder die Würfel $[-n, n]^k$ ausgeschöpft.

DEFINITION 3.3. Es sei M eine Menge und sei T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \supseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Schrumpfung* von T bildet (oder gegen T schrumpft), und schreibt dafür $T_n \downarrow T$.

Beispielsweise ist eine reelle Intervallschachtelung eine Schrumpfung, bei der der Durchschnitt über alle beteiligten Mengen nur aus einem einzigen Punkt besteht.

Bei einer σ -Algebra \mathcal{A} gehört mit einer jeden solchen auf- oder absteigenden Folge von Teilmengen T_n auch die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zu \mathcal{A} . Bei einem Prämaß auf einen Präring setzen wir, wenn wir von Ausschöpfung bzw. Schrumpfung sprechen, voraus, dass die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zum Präring gehören.

Wir fassen einige Rechenregeln für Prämaße zusammen.

LEMMA 3.4. *Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M und μ ein Prämaß auf \mathcal{P} . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist $\mu(\emptyset) = 0$.*
- (2) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \subseteq T$ gilt $\mu(T) = \mu(S) + \mu(T \setminus S)$. Insbesondere ist ein Prämaß monoton.*
- (3) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ gilt $\mu(T \cup S) = \mu(S) + \mu(T) - \mu(S \cap T)$.*
- (4) *Seien T_n , $n \in \mathbb{N}$, und T aus \mathcal{P} mit $T \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ ¹. Dann gilt*

$$\mu(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n).$$

- (5) *Es sei $T_n \uparrow T$ eine Ausschöpfung in \mathcal{P} . Dann ist*

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton wachsend ist.

- (6) *Es sei $T_n \downarrow T$ eine Schrumpfung in \mathcal{P} und sei $\mu(T_0) < \infty$ vorausgesetzt. Dann ist*

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton fallend ist.

¹Man sagt, dass die T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine *Überpflasterung* von T bilden.

Beweis. (1) ist in der Definition von Prämaß enthalten, da die leere Summe als 0 definiert ist.² (2) folgt direkt aus der Definition, da T die disjunkte Vereinigung aus S und $T \setminus S$ ist. (3) folgt daraus, dass $S \cup T$ die disjunkte Vereinigung aus den drei Mengen $S \setminus T$, $T \setminus S$ und $S \cap T$ ist. (4). Wir verwenden den folgenden Standardtrick: Wir schreiben $S_n = T_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i\right)$. Dann gilt offensichtlich $\bigcup_{i=0}^n T_i = \bigcup_{i=0}^n S_i$ für alle n , wobei die Vereinigungen der S_i jeweils disjunkt sind. Entsprechend Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n\right)\right) \\ &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T \cap S_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T \cap S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T_n). \end{aligned}$$

(5). Wir schreiben die einzelnen Teilmengen T_n als disjunkte Vereinigung mittels $S_0 = T_0$ und $S_n = T_n \setminus T_{n-1}$. Damit ist

$$T_n = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n,$$

und da dies eine disjunkte Vereinigung ist, gilt $\mu(T_n) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i)$. Entsprechend gilt

$$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

und daher

$$\mu(T) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \mu(S_i)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n).$$

(6) Wir setzen $S_0 = T_0 \setminus T_n$. Da T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine absteigende Folge ist, ist S_n , $n \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Folge, und zwar gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T_0 \setminus T_n) = T_0 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) = T_0 \setminus T.$$

²Man kann auch, sobald es eine messbare Menge T mit endlichem Maß gibt, mittels $\mu(T) = \mu(T \cup \emptyset) = \mu(T) + \mu(\emptyset)$ argumentieren, woraus aus $\mu(T) < \infty$ direkt $\mu(\emptyset) = 0$ folgt.

Daher gilt

$$\mu(T_0 \setminus T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_0 \setminus T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(T_0) - \mu(T_n)) = \mu(T_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n)$$

nach Teil (5). Somit ist (da $\mu(T_0) < \infty$ ist)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = \mu(T_0) - \mu(T_0 \setminus T) = \mu(T).$$

□

DEFINITION 3.5. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M . Dann heißt μ endlich, wenn

$$\mu(T) < \infty$$

für alle $T \in \mathcal{P}$ ist.

Wenn die Gesamtmenge M zu \mathcal{P} gehört, so ergibt sich die Endlichkeit des Prämaßes sofort aus der Bedingung $\mu(M) < \infty$ aufgrund der Monotonie.

Für die Maßtheorie des euklidischen Raumes ist dieser Begriff zu stark, da ja der \mathbb{R}^n kein endliches Volumen hat. Aber immerhin kann man den \mathbb{R}^n durch die abzählbar vielen Kugeln $B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}$, die selbst endliches Volumen haben, ausschöpfen. Diese Eigenschaft wird durch folgende Definition präzisiert.

DEFINITION 3.6. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M . Dann heißt μ σ -endlich, wenn man M als eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen M_i aus \mathcal{P} mit

$$\mu(M_i) < \infty$$

schreiben kann.

Der Eindeutigkeitsatz für Maße

Der folgende Satz ist der *Eindeutigkeitsatz für Maße*. Im Wesentlichen besagt er, dass unter gewissen Bedingungen ein Maß auf einem Erzeugendensystem der σ -Algebra schon eindeutig bestimmt ist.

SATZ 3.7. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es sei \mathcal{E} ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für \mathcal{A} . Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf (M, \mathcal{A}) , die auf \mathcal{E} übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $M_n \in \mathcal{E}$ und mit*

$$\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty.$$

Dann ist

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Für jede messbare Menge $T \in \mathcal{A}$ ist $(T \cap M_n) \uparrow T$ eine Ausschöpfung von T , so dass es nach Lemma 3.4 (5) genügt, die Gleichheit

$$\mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Es sei n fixiert. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{D}_n = \{T \in \mathcal{A} \mid \mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)\}$$

und wir wollen zeigen, dass dies ganz \mathcal{A} ist. Da \mathcal{E} durchschnittstabil ist, gehört nach Voraussetzung jede Menge $E \in \mathcal{E}$ zu \mathcal{D}_n . Wir behaupten, dass \mathcal{D}_n ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $M \in \mathcal{D}_n$. Seien $S \subseteq T$ Teilmengen, die zu \mathcal{D}_n gehören. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1((T \setminus S) \cap M_n) &= \mu_1((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_1(T \cap M_n) - \mu_1(S \cap M_n) \\ &= \mu_2(T \cap M_n) - \mu_2(S \cap M_n) \\ &= \mu_2((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_2((T \setminus S) \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch $T \setminus S$ zu \mathcal{D}_n gehört. Es sei schließlich $T_i, i \in I$, eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Teilmengen aus \mathcal{D}_n , und sei

$$T = \bigcup_{i \in I} T_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1(T \cap M_n) &= \mu_1\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_1(T_i \cap M_n) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_2(T_i \cap M_n) \\ &= \mu_2\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \mu_2(T \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch T zu \mathcal{D}_n gehört. Damit ist \mathcal{D}_n ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem \mathcal{E} enthält. Nach Lemma 1.13 ist daher $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_n$, und es gilt Gleichheit. \square

Bildmaße

DEFINITION 3.8. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, (N, \mathcal{B}) ein Messraum und

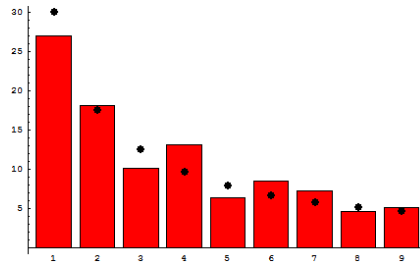
$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Dann nennt man das durch

$$\nu(T) := \mu(\varphi^{-1}(T))$$

definierte Maß auf N das *Bildmaß* von μ unter φ . Es wird mit $\varphi_*\mu$ bezeichnet.

Das Bildmaß ist in der Tat ein Maß, siehe Aufgabe 3.11.



Die Verteilung der Anfangsziffern der Bevölkerungsgröße der Länder der Erde.

BEISPIEL 3.9. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto 10^x,$$

die Exponentialfunktion zur Basis 10 und ν das Bildmaß zum eindimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^1 (das wir zwar noch nicht eingeführt haben, von dem wir hier aber nur verwenden, dass es einem Intervall die Intervalllänge zuordnet). Für ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ ist

$$\nu([a, b]) = \lambda^1(\varphi^{-1}([a, b])) = \lambda^1([\log_{10}(a), \log_{10}(b)]) = \log_{10}(b) - \log_{10}(a).$$

Insbesondere haben die Intervalle

$$\dots, \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{10}, 1\right], [1, 10], [10, 100], [100, 1000], \dots$$

unter ν alle das Maß 1. Das Maß ν ist also „unter Berücksichtigung der Größenordnung gleichverteilt“.

Wenn man zur Menge aller Städte (auf der Erde oder in Deutschland) die Einwohnerzahl nimmt und davon die erste Ziffer, so kann man beobachten, dass die Ziffer 1 deutlich häufiger vorkommt als die Ziffern 2, 3, ... Beispielsweise gibt es in Deutschland relativ viele Städte mit zwischen 100000 und 200000 Einwohnern, aber keine mit zwischen 800000 und 900000 Einwohnern. Diese Beobachtung kann man in sehr vielen verschiedenen Situationen machen, und zwar genügt die erste Ziffer dem sogenannten *Benfordschen Gesetz*. Wenn man davon ausgeht, dass Städte zu unterschiedlichen Zeitpunkten gegründet werden, dass sie exponentiell wachsen (mit einer kleinen Basis), und dass die Verteilung der Stadtgründungen mit der Zeit gleichverteilt ist (in einem endlichen Zeitintervall), so kann man die Stadtgründungen durch λ^1 modellieren und erhält für die Verteilung der Stadtgrößen das Maß ν (bis auf einen Streckungsfaktor mit der Zeit). Es ist dann beispielsweise

$$\nu([1, 2]) = \log_{10}(2) = 0,301\dots$$

und

$$\nu([8, 9]) = \log_{10}(2) = 0,051\dots$$

und entsprechend für die Intervalle $[10, 20]$, $[100, 200]$, etc., was das Benford'sche Gesetz erklärt.

LEMMA 3.10. *Es seien (M, \mathcal{A}) , (N, \mathcal{B}) und (S, \mathcal{C}) Messräume und*

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

und

$$\psi: N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ ein Maß auf M . Dann gilt für die Bildmaße

$$(\psi \circ \varphi)_*\mu = \psi_*(\varphi_*\mu).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.12. □

DEFINITION 3.11. Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) Maßräume. Eine messbare Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

heißt *maßtreu*, wenn für jede messbare Menge $T \subseteq N$ die Beziehung

$$\nu(T) = \mu(\varphi^{-1}(T))$$

gilt.

Eine messbare Abbildung $\varphi: (M, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (N, \mathcal{B}, \nu)$ ist genau dann maßtreu, wenn ν das Bildmaß von μ unter φ ist.

Produkt von topologischen Räumen

DEFINITION 3.12. Unter dem *Produkt der topologischen Räume* X und Y versteht man die Produktmenge $X \times Y$ zusammen mit derjenigen Topologie (genannt *Produkttopologie*), bei der eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ genau dann offen ist, wenn man sie als Vereinigung von Produktmengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ schreiben kann.



Eine Zylinderoberfläche ist der Produktraum aus einer Kreislinie und einem Intervall.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = SquareLattice.svg , Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = Georges Seurat - Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte.jpg , Autor = Georges Seurat (hochgeladen von Benutzer Oxag auf Commons), Lizenz = PD	2
Quelle = Benfords law illustrated by world's countries population.png , Autor = Benutzer Jakob.scholbach auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	6
Quelle = Cylinder (PSF).png , Autor = Benutzer Pearson Scott Foresman auf Commons, Lizenz = PD	8
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9