

x を $1, 2, 3, \dots, n$ とおけば

$$\frac{1}{1+1^2+1^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1 \cdot 2} \right\}$$

$$\frac{2}{1+2^2+2^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+2 \cdot 1} - \frac{1}{1+2 \cdot 3} \right\}$$

$$\frac{3}{1+3^2+3^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+3 \cdot 2} - \frac{1}{1+3 \cdot 4} \right\}$$

.....

$$\frac{n}{1+n^2+n^4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+n(n-1)} - \frac{1}{1+n(n+1)} \right\}$$

依つて所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{1+n(n+1)} \right\} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

46. $n > 3$ ナルトキ次ノ三ツノ級數ノ和ハ a, b, c ノ如何ニ拘ラズ皆 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。

i) $a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3) + \dots$
 $+ (-1)^n(a-n),$

ii) $ab - n(a-1)(b-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2) - \dots$
 $+ (-1)^n(a-n)(b-n),$

iii) $abc - n(a-1)(b-1)(c-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)(c-2) - \dots$
 $+ (-1)^n(a-n)(b-n)(c-n),$

[解] 二項定理ニヨリ

$$(1-1)^n = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + (-1)^n = 0 \quad (1)$$

$n > 3$ ナル故ニ n ナ $n-1$ トおけば (1) ヨリ

$$1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} = 0 \quad (2)$$

(1) = a, (2) = n ナ掛ケテ邊々相加フレバ

$$a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3) + \dots$$

$$+ (-1)^n(a-n) = 0, \quad (3)$$

コレ即チ (i) ナリ,

次ニ (3) ニ於テ a ハ任意ノ數ニシテ又 $n > 3$ ナル故ニ a ナ $a-1, n$ ナ $n-1$ トおけば

$$a-1 - (n-1)(a-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3) - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(a-4)$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1}(a-n) = 0, \quad (4)$$

(3) = b, (4) = n ナカケテ相加フレバ

$$ab - n(a-1)(b-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3)(b-3)$$

$$+ \dots + (-1)^n(a-n)(b-n) = 0 \quad (5)$$

コレ即チ (ii) ナリ,

最後ニ (5) ニ於テ a ナ $a-1, b$ ナ $b-1, n$ ナ $n-1$ トおけば

$$(a-1)(b-1) - (n-1)(a-2)(b-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3)(b-3) - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1}(a-n)(b-n) = 0 \quad (6)$$

(5) = c, (6) = n ナカケテ相加フレバ

$$abc - n(a-1)(b-1)(c-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)(c-2) - \dots$$

$$+ (-1)^n(a-n)(b-n)(c-n) = 0$$

コレ即チ (iii) ナリ。

[注意] (i) ハ $n > 1$ ナルトキ (ii) ハ $n > 2$ ナルトキ成立ス。

47. m, n ガ正ノ整數ナルトキ級數

$$a^m - n(a-1)^m + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^m - \dots + (-1)^n(a-n)^m$$

ハ $m < n$ ナラバ 0 ニ等シク $m = n$ ナラバ $n!$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

[解] m ガ任意ノ正ノ整數 m ニ等シキトキノ所題ノ級數ノ和ヲ S_m ニテ表ハセバ前問

(i) ニヨリ $n > 1$ ナルトキ

$$S_1 = a - n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2) + \dots + (-1)^n(a-n) = 0,$$

依つて今 $m = p < n$ ナルトキ $S_p = 0$ ナリト假定スレバ

$$a^p - n(a-1)^p + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^p - \dots + (-1)^n(a-n)^p = 0 \quad (1)$$

(1) に於ケル a の任意ノ數ニシテ且ツ $n > 1$ ナル故ニ a ヲ $a-1$, n ヲ $n-1$ トオケバ

$$(a-1)^p - (n-1)(a-2)^p + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3)^p - \dots + (-1)^{n-1}(a-n)^p = 0 \quad (2)$$

(1) ニ a , (2) ニ n ヲカケテ相加フレバ

$$a^{p+1} - n(a-1)^{p+1} + \frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^{p+1} - \dots + (-1)^n(a-n)^{p+1} = 0$$

即チ $S_p = 0$ ($p < n$) ナリト假定スレバ S_{p+1} モ亦 0 ナルコトヲ知ル故ニ $m < n$ ナルトキ所題ノ級數ハ常ニ 0 ナリ,

次ニ $m = n = 1$ ナラバ $S_1 = a - (a-1) = 1 = 1!$

故ニ今 $m = n = p$ ナルトキ $S_p = p!$ ナリト假定スレバ

$$a^p - p(a-1)^p + \frac{p(p-1)}{2!}(a-2)^p - \dots + (-1)^p(a-p)^p = p!$$

a ヲ $a-1$ トオケバ

$$(a-1)^p - p(a-2)^p + \frac{p(p-1)}{2!}(a-3)^p - \dots + (-1)^p(a-p-1)^p = p! \quad (3)$$

又 (1) に於テ $n = p+1$ トオケバ

$$a^p - (p+1)(a-1)^p + \frac{(p+1)p}{2!}(a-2)^p - \dots + (-1)^{p+1}(a-p-1)^p = 0 \quad (4)$$

(3) ニ $p+1$, (4) ニ a ヲ乗シテ相加フレバ

$$a^{p+1} - (p+1)(a-1)^{p+1} + \frac{(p+1)p}{2!}(a-2)^{p+1} - \dots + (-1)^{p+1}(a-p-1)^{p+1} = (p+1)!$$

即チ $m = n = p$ ノトキ $S_p = p!$ ナリト假定スレバ $m = n = p+1$ ノトキモ亦 $(p+1)!$ トナル, 故ニ $m = n$ ナルトキ所題ノ級數ハ常ニ $n!$ ニ等シ。

第 七 章 確 率

- 基本定理 I.** 互ニ相排斥スル n 個ノ事柄ノ各ノ起ル確率ヲ夫々 p_1, p_2, \dots, p_n トスルトキ是等ノ事柄ノ何レカ一ツ方起ル確率ハ $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ ナリ。
- II.** 互ニ獨立セル n 個ノ事柄ノ各ノ起ル確率ヲ夫々 p_1, p_2, \dots, p_n トスルトキ是等ノ事柄ガ悉ク起ル確率ハ $p_1 p_2 \dots p_n$ ナリ。
- III.** 互ニ相從屬セル n 個ノ事柄ニ於テ第一ノ事柄ノ起ル確率ヲ p_1 トシ, 第一方起リタルトキノ第二ノ起ル確率ヲ p_2 , 第一, 第二方起リタルトキノ第三ノ起ル確率ヲ p_3 等順次斯クノ如クスルトキ是等ノ事柄ガ相次テ悉ク起ル確率ハ $p_1 p_2 \dots p_n$ ナリ。
- IV.** 一回ノ實驗ニ於テ起ル確率ガ p , 起ラザル確率ガ $1-p=q$ ナル如キ或事柄ニ就テ n 回ノ實驗ヲ施ストキ丁度 r 回其事柄ノ起ル確率ハ ${}_n C_r p^r q^{n-r}$ ナリ。
- V.** 互ニ相排斥スル n 個ノ原因ノ事前確率ヲ夫々 q_1, q_2, \dots, q_n トシ, 是等ノ各原因ヨリ或事柄ノ起ル確率ガ夫々 p_1, p_2, \dots, p_n トスルトキ其事柄ノ起リタルコトヨリ推定スル各原因ノ事後確率ハ夫々

$$\frac{q_i p_i}{q_1 p_1 + q_2 p_2 + \dots + q_n p_n}, \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

ナリ。

演習問題

1. 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ 1, 2 ナル目ノ出ル確率如何。

[解] 一方ノ骰子ノ各ノ目ニ對シテ他方ニ6通りノ目ノ顯ハレ方アル故ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハレル場合ノ總數ハ 6^2 ナリ、此中 1, 2 ノ顯ハレル場合ハ 1, 2; 2, 1 ノニツナリ、依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ 、

2. 白球 3 個、黒球 5 個ヲ入レタル袋ノ中ヨリ一球ヲ取り出シテソレガ白ナル確率如何、又二球ヲ同時ニ取り出シテソレガ共ニ白ナル確率如何。

[解] 球ノ總數 8 ナル故ニ一球ヲ取り出ストキノ場合ノ數ハ 8 ニシテソノ中白ナル場合ノ數ハ 3、依ツテ取り出シタル一球ガ白ナル確率ハ $\frac{3}{8}$ 、次ニ同時ニ二球ヲ取り出ス場合ノ總數ハ ${}_8C_2$ 、ソノ中ニツ共ニ白ナル場合ノ數ハ ${}_3C_2$ 、故ニ取り出シタル二球ガ共ニ白ナル確率ハ

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

3. 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハレル目ノ和ガ 7 トナル確率如何。

[解] 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ色々ノ目ノ顯ハレル場合ノ總數ハ 6^2 、其中ニツノ目ノ和ガ 7 トナル場合ノ數ハ 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1 ノ 6、依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ 、

4. 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル、目ノ和ガ 10 トナル確率ヲ求ム。

[解] 4 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハル、場合ノ總數ハ 6^4 其中目ノ和ガ 10 トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$$

ノ展開式ニ於ケル x^{10} ノ係數ニ等シ、然ルニ上ノ式ハ

$$\begin{aligned} x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 &= x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4} \\ &= x^4(1-4x^6+\dots)\left(1+4x+\frac{4.5}{2!}x^2+\frac{4.5.6}{3!}x^3+\dots+\frac{4.5.6.7.8.9}{6!}x^6+\dots\right) \end{aligned}$$

故ニ x^{10} ノ係數ハ

$$\frac{4.5.6.7.8.9}{6!} - 4 = 80$$

依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{80}{6^4} = \frac{5}{81}$

5. 1, 1, 1, 2, 2, 3 ナル目ヲ盛リタル骰子ト 1, 2, 2, 3, 3, 3 ナル目ヲ盛リタル骰子トヲ同時ニ投ゲテ顯ハル、目ノ和ガ 4 トナル確率ヲ求ム。

[解] 骰子ハ 2 個ナル故ニ色々ノ目ノ顯ハル、總テノ場合ノ數ハ 6^2 ニシテ其中ニツノ目ノ和ガ 4 トナル場合ノ數ハ前問ト同様ニ乗積

$$(3x+2x^2+x^3)(x+2x^2+3x^3) = 3x^2+8x^3+14x^4+8x^5+3x^6$$

ノ x^4 ノ係數 14 ナリ、何ントナレバ第一ノ骰子ハ 1 ノ目ガ三ツ 2 ノ目ガ二ツ 3 ノ目ガ一ツ、第二ノ骰子ハ 1 ノ目ガ一ツ、2 ノ目ガ二ツ、3 ノ目ガ三ツアレバナリ、依ツテ其確率ハ

$$\frac{14}{6^2} = \frac{7}{18}$$

6. 夫々 1, 2, 3, …… n ナル番號ヲ付ケタル同ジ大サノ n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ 5 個ヲ取り出シソノ中ニ 1, 2, 3 ナル番號ノ球ノアル確率如何、又取り出シタル 5 個ノ中ニ 1, 2, 3 ノ何レカ只一ツダケ入り居ル確率如何。

[解] 1, 2, 3, …… n ナル番號ノ n 個ノ球ヨリ 5 個ヲ取り出ス場合ノ總數ハ ${}_nC_5$ 、其中 1, 2, 3 ナル三球ヲ含ム場合ハ n 個ノ中ヨリ其三個ヲ除キタル残りノ n-3 個ヨリ 2 個ヲ取り出ス場合ノ數 ${}_{n-3}C_2$ ニ等シ、依ツテ 5 個ヲ取り出シテ其中ニ 1, 2, 3 ノ含マル、確率ハ

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_5} = \frac{60}{n(n-1)(n-2)}$$

次ニ 5 個ヲ取り出ス場合ノ數 ${}_nC_5$ ノ中 1, 2, 3 ノ中ノ 1 ノミガ含マレ居ル場合ノ數ハ n 個ノ中ヨリ 1, 2, 3 ヲ除キタル残りノ n-3 個ヨリ 4 個ヲ、取りタル組合セ ${}_{n-3}C_4$ ニ等シ、同様ニ 1, 2, 3 中ノ 2 ノミガ含マレ居ル場合ノ數モ ${}_{n-3}C_4$ ニシテ 3 ノミガ含マレ居ル場合ノ數モ ${}_{n-3}C_4$ ナリ、即チ場合ノ總數 ${}_nC_5$ ノ中ノ 1, 2, 3 ノ何レカ只 1 ヲダケ含マレ居ル場合ノ數ハ $3 {}_{n-3}C_4$ 、依ツテ其確率ハ

$$\frac{3 {}_{n-3}C_4}{{}_nC_5} = \frac{15(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}$$

n 枚ノ札ヲ入レタル袋ヨリ無心ニ若干枚ノ札ヲ取り出シタルトキ其數ガ何ナルコトノ確率ハ奇數ナルコトノ確率ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 n 枚ノ中ヨリ 1 枚, 2 枚, 3 枚, …… n 枚ヲ取り出す場合ノ總數ハ

$${}_n C_1 + {}_n C_2 + {}_n C_3 + \dots + {}_n C_n$$

$$\text{然ルニ } (1+x)^n = 1 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_n x^n$$

$$\therefore (1+1)^n = 1 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n$$

$$\therefore {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1,$$

此中偶數枚ヲ取り出す場合ノ數ハ

$${}_n C_2 + {}_n C_4 + {}_n C_6 + \dots$$

$$\text{然ルニ } (1+x)^n + (1-x)^n = 2 + 2{}_n C_2 x^2 + 2{}_n C_4 x^4 + \dots$$

$$\therefore (1+1)^n + (1-1)^n = 2 + 2({}_n C_2 + {}_n C_4 + \dots)$$

$$\therefore {}_n C_2 + {}_n C_4 + {}_n C_6 + \dots = \frac{1}{2} \{ (1+1)^n + (1-1)^n - 2 \} = 2^{n-1} - 1$$

依ツテ取り出す球ノ數ガ偶數ナルコトノ確率ハ

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$$

從ツテ 奇數ナルコトノ確率ハ

$$1 - \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$$

即チ偶數ナルコトノ確率ハ奇數ナルコトノ確率ヨリ $\frac{1}{2^n - 1}$ ダケ少ナシ,

8. n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ p 個ヲ取り出し之ヲ元ニ戻シテ更ニ q 個ヲ取り出すトキ此兩回ノ取り出しニ丁度 r 個ノ球ガ共通ナル確率如何。

〔解〕 初メニ取り出す球 p 個ノ中ヨリ r 個ヲ選ブ方法ハ ${}_p C_r$ 通りアリ, 此各ニ對シテ初メニ取り出す球 p 個以外ノモノヨリ $q-r$ 個ヲ選ブ仕方ハ ${}_{n-p} C_{q-r}$ 通りアリ, 故ニ初メニ取り出す球 p 個中ノ或 r 個ダケガ第二回ニ取り出す球 q 個中ニ含マル、場合ノ數ハ

$${}_p C_r \cdot {}_{n-p} C_{q-r}$$

ナリ, 而シテ n 個中ヨリ任意ノ q 個ヲ取り出す仕方ハ ${}_n C_q$ 通りナル故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{{}_p C_r \cdot {}_{n-p} C_{q-r}}{{}_n C_q} = \frac{p!}{r!(p-r)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(q-r)!(n-p-q+r)!} \cdot \frac{q!(n-q)!}{n!}$$

9. 和ガ 100 ニ等シキ二ツノ正ノ整數ヲ取ルトキ 其二ツノ整數ノ積ガ 1000 ヨリ大ナル確率ヲ求ム。

〔解〕 二數ノ中ノ一ツハ 1 ヨリ 99 マテノ 99 通りノ値アリ, 其中積ガ 1000 ヨリ大ナル場合ヲ考フルニ一ツヲ x トスレバ他ハ $100-x$

$$\therefore x(100-x) > 1000 \quad \therefore x^2 - 100x + 1000 < 0$$

$$\text{故ニ } x^2 - 100x + 1000 = 0 \text{ ノ二根ヲ } \alpha, \beta \text{ トスレバ}$$

$$\alpha < x < \beta \quad (\text{但シ } \alpha < \beta \text{ トス})$$

$$\text{然ルニ } \alpha = 11.3\dots\dots, \quad \beta = 88.7\dots\dots$$

故ニ x ハ 12 ヨリ 88 マテナリ, 即チ積ガ 1000 ヨリ大ナルタメニハ二數ノ中ノ一ツハ 12 乃至 88 ナル 77 個ノ値ナルヲ要ス, 依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{77}{99} = \frac{7}{9}$ ナリ。

10. 和ガ一定ナル二ツノ正ノ數ヲ取ルトキ, 其積ガ其最大値ノ半分ヨリ小ナル確率ハ $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 一定ノ和ヲ $2a$ トスレバ其積ノ最大値ハ a^2 ナリ(第三章基本定理 III) 今一數ヲ x トスレバ他ハ $2a-x$ ニシテ $x(2a-x) < \frac{a^2}{2}$

$$\text{ナルタメニハ } x^2 - 2ax + \frac{a^2}{2} > 0$$

$$\therefore \left\{ x - a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \left\{ x - a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} > 0$$

$$\therefore x < a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{及ビ} \quad x > a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

即チ 2 數ノ積ガ最大積ノ半分ヨリ小ナルタメニハ x ハ 0 ヨリ $a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ マデノ値ト $a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ヨリ $2a$ マテノ値トヲトラザルベカラズ, 即チ x ノ取り得ル値ハ $a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left\{ 2a - a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} = 2a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 通りナリト考フルコトヲ得, 斯ク考フルトキハ和ガ $2a$ ナルタメニ x ノ取り得ル總テノ値ハ $2a$

通りアルコトナル故ニ所要ノ確率ハ $\frac{2a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナリ。

11. 長サ a ナル線分 AB 上ニ任意ノ一点ヲトルトキ其点ガ B ヨリモ A ニ近キ確率如何。

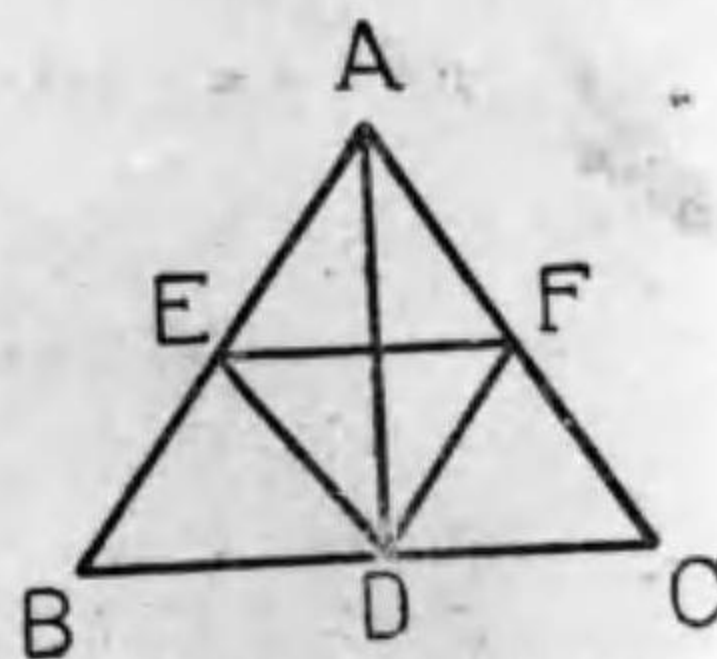
[解] AB 上ニ一点ヲ取り得ル總テノ場合ノ數ハ其長サ a ニテ表ハサルベシ其中其一点ガ B ヨリモ A ニ近キタメニハ A ト AB ノ中点トノ間ニアラザルベカラザルガ故ニ其場合ノ數ハ A ト AB ノ中点トノ間ノ長サ $\frac{a}{2}$ ニテ表ハサルベシ、依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$ ナリ。

12. 長サ a ナル線分 AB 上ニ任意ノ二点ヲトルトキ二点トモ A ヨリ b 以内ノ距離ニアル確率如何。

[解] AB 上ニ任意ノ一点ヲトル場合ノ總數ハ a ニシテ其各ニ對シテ第二ノ点ヲ取ル場合ノ數モ亦 a ナル故ニ AB 上ニ二点ヲ任意ニトル場合ノ總數ハ a^2 ニテ表ハサル、其中一点ガ A ヨリ b 以内ノ距離ニアル場合ノ數ハ b ニテ表ハサル其各ニ對シテ第二ノ点モ A ヨリ b 以内ニアル場合ノ數ハ b ナル故ニ二点トモ A ヨリ b 以内ニアル場合ノ數ハ b^2 ニテ表ハサル、依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{b^2}{a^2}$ ナリ。

13. 一線分ヲ三ツニ分ツトキ其何レノ一ツモ他ノ二ツノ和ヨリ小ナル確率ハニ等シキコトヲ証セヨ。

[解] AD ヲ所題ノ線分ノ長サトシ AD ヲ高サトスル正三角形 ABC ヲ作ルトキハ此正三角形内ノ任意ノ一点ヨリ三邊ニ下ス三ツノ垂線ノ和ハ常ニ AD ニ等シキコトハ初等幾何學ニヨツテ知ル處ナリ。



今 AB, AC ノ中点ヲ夫々 E, F トシ EF, FD, DE ヲ結ブ、然ルトキハ梯形 $BEFC$ 中ノ任意ノ一点ヨリ BC ニ下ス垂線ハ AD ノ半分ヨリ小ナル故ニ AB, AC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ナリ、同様ニ梯形 $ABDF$ 内ノ一点ヨリ AB ニ下ス垂線ハ AC, BC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ニシテ梯形 $AEDC$ 内ノ一点ヨリ AC ニ下ス垂線ハ AB, BC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ナリ、故ニ $\triangle DEF$ 内ノ一点ヨリ AB, BC, AC ニ下ス垂線ノ何レノ一ツモ他ノ二ツノ和ヨリ小ナリ。

即チ $\triangle ABC$ 内ノ總テノ点ヨリ三邊 AB, BC, CA ニ下ス垂線ノ和ハ所題ノ線分 AD ニ等シク、其中 $\triangle DEF$ 内ノ總テノ点ヨリ AB, BC, CA ニ下ス三垂線ノ一ツハ常ニ他ノ二ツノ和ヨリ小ナリ、故ニ AD ニ等シキ線分ヲ任意ノ三ツニ分ツ方法ノ總數ヲ $\triangle ABC$ ノ面積ニテ表ハストキハ其一ツガ他ノ二ツノ和ヨリ小ナル場合ノ數ハ $\triangle DEF$ ノ面積ニテ表ハサルベシ、依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \text{ ナリ。}$$

14. 一定ノ正ノ整數 N ヨリ大ナラザル任意ノ整數ヲ選ブトキ其數ガ N ノ因數トナル確率ヲ求ム。

[解] N ヲ素因數ニ分解シタルトキ $N = \alpha^p \beta^q \gamma^r \dots$ トナリタリトセヨ、但シ α, β, γ ハ素因數ニシテ p, q, r ハ正ノ整數ナリ、然ルトキハ N ノ因數ハ

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^p)(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^q)(1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^r) \dots$$

ノ展開式中ノ各項ナルコト明カナリ、故ニ其因數ノ個數ハ

$$(1+p)(1+q)(1+r) \dots$$

ナリ、而シテ N ヨリ大ナラザル整數ノ個數ハ N ナルガ故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{(1+p)(1+q)(1+r) \dots}{N} \text{ ナリ。}$$

15. n 個ノ任意ノ奇數ノ相乘積ヲ作ルトキ末位數字ガ 5 トナル確率ハ $\frac{n}{n+4}$ ナルコトヲ証セヨ。

[解] 若干ノ整數ノ相乘積ノ末位ノ數字ハ相乘ズベキ整數ノ末位ノ數字ニテ定マル、故ニ本問ハ 1, 3, 5, 7, 9 ナル五個ノ奇數ヲ重複テ許シテ n 回相乘セル積ニ於テ末位數字ガ 5 トナル確率ヲ求ムレバ可ナリ、然ルニ五數字ヲ n 回相乘セル總テノ積ノ個數ハ $5H_n$ ニシテ此中末位ガ 5 ナラザル數ハ 5 ヲ除キタル残りノ 4 數字ヲ n 回相乘シタル積ニシテ其數ハ $4H_n$ ナリ從ツテ末位數字ガ 5 ナル積ハ $5H_n - 4H_n$ 個アリ、依ツテ所要ノ確率ハ

$$\begin{aligned} \frac{5H_n - 4H_n}{5H_n} &= 1 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4+n-1)}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (5+n-1)} && \text{(第四章基本定理 V)} \\ &= 1 - \frac{4}{5+n-1} = \frac{n}{n+4} \end{aligned}$$

16. 或事件が n 年間ニ m 回起リタリトイフ、然ラバ其 n 年間ノ或特別ナル一年間ニ其事件ノ一回モ起ラザリシ確率ハ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 m 回ノ事件ノ各ハ n 年ノ中ノ何レノ年ニ起リテモ可ナル故ニ各ノ事件ノ起ル場合ハ n 通りアリ從ツテ m 回ノ總テノ起ル場合ノ總數ハ n^m 通りアリ、同様ニ n 年中ノ或特別ナル一年ヲ除キタル $n-1$ 年内ニ m 回ノ總テガ起ル場合ノ總數ハ $(n-1)^m$ 通りアリ、故ニ或特別ノ一年内ニ其事件ガ一回モ起ラザリシ確率ハ

$$\frac{(n-1)^m}{n^m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

ナリ。

17. 當年 20 オノ人ガ 50 オニ於テ受取ルベキ 10000 圓ノ生存所得ヲ契約セリ公正ナル契約金如何、但シ生殘表ニヨレバ 20 オノ人 93268 人ハ 50 オニ於テ 69517 人トナル、又年利率ヲ 5 分トス。

〔解〕 生存所得トハ契約ト同時ニ若干ノ掛金ヲ拂ヒキ契約年令ニ達シタルトキ受取ルベキ金額ニシテ若シ其年令以前ニ死亡スレバ何等ノ所得モナキモノナリ、然ルニ生殘表ニヨレバ 20 オノ人ガ 50 オマテ生存スル確率ハ $\frac{69517}{93268}$ ナル故ニ 50 オマテ生存シテ 10000 圓ヲ得ルコトハ今ヨリ 30 年後ニ無條件ニ $10000 \times \frac{69517}{93268}$ 圓ヲ得ルコトニ同シト考ヘルコトヲ得、即チ此人ノ期望金額ハ 30 年後ノ $10000 \times \frac{69517}{93268}$ 圓ナリ、故ニ此金額ノ今日ノ現價ガ即チ契約ノ際ノ公正ナル掛金ナリ、依ツテ所要ノ掛金ヲ a トスレバ

$$a = 10000 \times \frac{69517}{93268} \times \frac{1}{(1.05)^{30}}$$

$$\therefore \log a = \log 10000 + \log 69517 - \log 93268 - 30 \log 1.05$$

$$= 4 + 4.8421 - 4.9697 - 0.6360$$

$$= 3.2364$$

$$\therefore a = 1724 \text{ 圓弱}$$

18. 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ何レカ一方ニ 1 ノ目ノ出ル確率如何。

〔解〕 一個ノ骰子ニツキ 1 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{6}$ ニシテ出デザル確率ハ $\frac{5}{6}$ ナリ、又一方ノ骰子ニ 1 ノ目ノ出ルコトト他ノ骰子ニ 1 ノ目ノ出デザルコトハ互ニ獨立セル事柄ナル故ニ一方ニ 1 ノ目ノ出ルコト、他ニ 1 ノ目ノ出デザルコト、ガ同時ニ起ル確率ハ $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ 、同様ニ一方ニ 1 ノ目ガ出デズニシテ他ニ 1 ノ目ノ出ツル確率モ $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ 、而シテ此二ツノ場合ニ互ニ相排斥スル事柄ナル故ニ此二ツノ場合ノ何レカガ起ル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

19. 3 白球、4 黒球ヲ入レタル甲袋ト 5 白球、2 黒球ヲ入レタル乙袋トアリ、今無心ニ何レカノ袋ニ手ヲ入レテ一球ヲ取り出シソレガ白ナル確率ヲ求ム。

〔解〕 甲袋ニ手ヲ入レル確率ハ $\frac{1}{2}$ 、手が甲ニ入りタルトキ白ヲ得ル確率ハ $\frac{3}{7}$ 、而シテ此二ツノ事柄ハ互ニ從屬セルガ故ニ此二ツガ引續イテ起ル確率即チ手が甲袋ニ入ツテ白ヲ取り出ス確率ハ $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$ 、同様ニ手が乙ニ入ツテ白ヲ取り出ス確率ハ $\frac{1}{2} \times \frac{5}{7}$ 、而シテ手が甲ニ入ルコト、乙ニ入ルコトハ互ニ相排斥スルガ故ニ甲、乙ノ何レカヨリ白ヲ取り出ス確率ハ

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{4}{7}$$

20. 白球 2 個、黒球 10 個ヲ 2 個ノ袋ニ分配シ、其何レカノ袋ヨリ 1 球ヲ取り出シテソレガ白球ナルコトノ確率ヲ最大又ハ最小ナラシメントス、如何ニ分配スベキカ。

〔解〕 第一ノ袋ノ白球ノ數ヲ x 、黒球ノ數ヲ y トスレバ第二ノ袋ノ白球ノ數ハ $2-x$ 黒球ノ數ハ $10-y$ ナリ、今此二ツノ袋ノ何レカヨリ 1 球ヲ取り出シテソレガ白ナル確率ヲ p トスレバ前問ト同様ニ

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{x}{x+y} + \frac{1}{2} \times \frac{2-x}{2-x+10-y} = \frac{6x - (x+y)(x-1)}{(x+y)(12-x-y)}$$

球ハ 2 個ノ袋ニ分配スルモノナル故ニ x, y ハ同時ニ 0 ナラズ又 x, y ハ同時ニ 2 及ビ 10 ナラズ故ニ

$x=0$ ナラバ y ハ 1 乃至 10 ナル故ニ

$$p = \frac{1}{12-y} \text{ ノ最大及ビ最小値ハ } \frac{1}{2} \text{ 及ビ } \frac{1}{11}$$

$x=1$ ナラバ y ハ 0 乃至 10 ニシテ

$$p = \frac{6}{(1+y)(11-y)} \text{ ノ最大及ビ最小値ハ } \frac{6}{11} \text{ 及ビ } \frac{1}{6}$$

$x=2$ ナラバ y ハ 0 乃至 9 ニシテ

$$p = \frac{1}{2+y} \text{ ノ最大及ビ最小値ハ } \frac{1}{2} \text{ 及ビ } \frac{1}{11}$$

是等ノ最大及ビ最小値ヲ比較スレバ

$$p \text{ ノ最大値ハ } \frac{6}{11} \text{ ニシテ、ソノトキ } x=1, y=0 \text{ 或ハ } 10$$

$$p \text{ ノ最小値ハ } \frac{1}{11} \text{ ニシテ、ソノトキ } x=0, y=1 \text{ 或ハ } x=2, y=9$$

依ツテ p ノ最大ナラシムル分配法ハ白 1 個; 白 1 個黒 10 個, p ノ最小ナラシムル分配法ハ黒 1 個; 白 2 個黒 9 個, ナリ。

21. 3 白球, 2 黒球ヲ入レタル袋アリ, 先ツ甲ヨリ始メテ甲, 乙交互ニ一球ヲ取り出シテ初メテ白ヲ取り出シタル方ヲ勝トス, 甲, 乙ノ勝ツ確率ノ割合如何, 但シ取り出シタル球ハ元ニ戻サルモノトス。

[解] 甲ガ第一回ニ勝ツ確率即チ第一回ニ白ヲ取り出ス確率ハ $\frac{3}{5}$, 次ニ第一回ニハ失敗スルモ第二回ニ勝ツタメニハ甲ハ第一回ニ失敗シ次ニ乙モ失敗シ次ニ甲ガ白ヲ取り出ササルベカラズ, 而シテ取り出シタル球ハ元ニ戻サルガ故ニソレ等ノ確率ハ夫々 $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{3}$ ニシテ且ツ互ニ從屬ス, 故ニソレ等三ツノ事柄ノ相次デ起ル確率即チ甲ガ第二回ニ勝ツ確率ハ $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$, 而シテ黒球ハ 2 個ニシテ取り出シタル球ハ元ニ戻サルガ故ニ甲ハ第一回ニ勝ツカ第二回ニ勝ツカノ外ナク且ツ此二ツノ事柄ハ互ニ排斥スルガ故ニ此二ツノ事柄ノ何レカノ起ル確率, 即チ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

乙ノ勝ツ確率モ同様ニシテ求ムルコトヲ得ベキモ元來此勝負ハ甲ガ勝ツカ然ラザ

レバ乙ガ勝ツカナル故ニ甲ノ勝ツ確率ト乙ノ勝ツ確率トノ和ハ 1 ニ等シ, 從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

依ツテ其割合ハ 7:3

22. 前問ニ於テ取り出シタル球ヲ元ニ戻ストスレバ如何。

[解] 甲ガ第一回ニ勝ツ確率ハ前ト同様ニ $\frac{3}{5}$, 次ニ第二回ニ勝ツタメニ甲ガ第一回ニ失敗シ, 次ニ乙モ失敗シ, 次ニ甲ガ成功スルコトノ確率ハ前問ト異ナリ取り出シタル球ヲ元ニ戻スガタメニ袋ノ中ニハ常ニ白球 3 個, 黒球 2 個アル故ニ, 夫々 $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ニシテ此三ツノ事柄ハ互ニ獨立ス, 從ツテ此三ツノ事柄ガ悉ク起ル確率, 即チ第二回ニ甲ガ勝ツ確率ハ

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)$$

同様ニ第一回, 第二回ニ失敗スルモ其間乙モ亦失敗シテ第三回目ニ甲ガ勝ツ確率ハ

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right),$$

取り出シタル球ヲ元ニ戻スガタメニ此勝負ハ無限ニ續ケ得ベシ, 從ツテ一般ニ第 n 回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)} \left(\frac{3}{5}\right),$$

而シテ甲ガ第一回ニ成功スルコト, 第一回ニハ失敗スルモ第二回目ニ成功スルコト第一第二回ニ失敗スルモ第三回目ニ成功スルコト等ハ皆兩立シ得ザル互ニ相排斥スル事柄ナル故ニ是等ノ事柄ノ何レカノ起ル確率即チ甲ガイツカ勝ツ確率ハ

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{3}{5} + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)} \frac{3}{5} + \dots \\ & = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{5}{7}, \end{aligned}$$

從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$,

依ツテ其割合ハ 5:2,

23. 甲乙兩人が順次ニ骰子ヲ投ゲテ最初ニ 1 ノ目ヲ出シタル方ヲ勝トス先ツ
甲ヨリ初ムルトキ兩人ノ勝ツ確率如何。

〔解〕 前問ト同様ニ第一回ニ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{1}{6}$, 第一回ニ甲ガ失敗シ次ニ乙モ失敗シ
次ニ甲ガ成功スル確率即チ甲ガ第二回目ニ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

同様ニ第三回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$$

一般ニ第 n 回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} \left(\frac{1}{6}\right)$$

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} \frac{1}{6} + \dots \\ & = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

従ツテ乙ノ勝ツ確率ハ $1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$,

或ハ又次ノ如ク考フルモ可ナリ,

甲ノ勝ツ確率ヲ p , 乙ノ勝ツ確率ヲ q トスレバ

$$p + q = 1, \quad (1)$$

然ルニ第一回ニ甲ガ失敗スレバ次ニ乙ノ番トナリ, 此時乙ノ勝ツ確率ハ最初甲ノ有
セシ確率 p トナルベシ, 即チ最初甲ガ失敗スレバ乙ノ勝ツ確率ハ p トナル故ニ乙
ガ勝ツ確率 q ハ最初甲ガ失敗スルコト、, 甲ガ勝ツトイフコト、ガ同時ニ起ル確
率ニ等シ, 而シテ此二ツガ同時ニ起ル確率ハ $\frac{5}{6} \cdot p$, 故ニ

$$q = \frac{5}{6} p, \quad (2)$$

(1), (2) ヨリ $p = \frac{6}{11}$, $q = \frac{5}{11}$,

或ハ甲ガ第一回ニ失敗スレバ次ハ乙ノ番ニシテ其次ガ甲ノ番ナル故ニ第一回ニ甲

ガ失敗スレバ甲ノ勝ツ確率ハ初メ乙ノ有セシ確率 q トナルベシ, 故ニ甲ガ勝ツト
イフコトハ第一回ニ成功スルカ然ラザレバ第一回ニ失敗スルコト、乙ガ勝ツトイ
フコトガ同時ニ起ルカノ何レカナリト考フルコトヲ得, 従ツテ

$$p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} q \quad (3)$$

(2) ニ代ヘルニ (3) ナテスルモ同様ナリ。

24. 甲, 乙, 丙三人が順次ニ 1 個ノ骰子ヲ投ゲテ最初ニ 1 ノ目ヲ出シタルモ
ノヲ勝トス, 甲, 乙, 丙ノ順ニ投グルモノトスレバ各ノ勝ツ確率ノ割合如何。

〔解〕 前問ト同様ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{36}{91}$$

乙ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \frac{1}{6} + \dots = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{91}$$

丙ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 \frac{1}{6} + \dots = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{25}{91}$$

依ツテ其割合ハ

$$36 : 30 : 25$$

或ハ又前問別解ノ如ク考ヘ甲, 乙, 丙ノ勝ツ確率ヲ p, q, r トスレバ

$$p + q + r = 1,$$

甲ガ最初ニ 1 ノ目ヲ出サレバ次ニ乙ノ勝ツ確率ハ甲ノ確率 p トナル,

依ツテ $q = \frac{5}{6} p$,

甲, 乙兩人トモ 1 ノ目ヲ出サレバ次ニ丙ノ勝ツ確率ハ又甲ノ確率 p トナル,

依ツテ $r = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} p$

コノ三方程式ヨリ

$$p = \frac{36}{91}, \quad q = \frac{30}{91}, \quad r = \frac{25}{91}$$

25. 甲乙丙ノ3人ガ交互ニ3個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル、目ノ和ガ6トナルモノヲ勝チトス、甲乙丙ノ順ニ投ゲルトキ各ノ勝ツ確率如何。

〔解〕 3個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ色々ノ目ノ顯ハル、場合ノ總數ハ 6^3 其中 3ツノ目

ノ和ガ6トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 \quad 6^3$$

ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ係數ニ等シク而シテ其係數ハ 10 ナリ、故ニ 3ツノ骰子ヲ

同時ニ投ゲテ顯ハル、目ノ和ガ6トナル確率ハ

$$\frac{10}{6^3} \quad \text{從ツテ 6トナラザル確率ハ } 1 - \frac{10}{6^3},$$

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ前問ト同様ニ

$$\begin{aligned} & \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^3 \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^6 \frac{10}{6^3} + \dots \\ &= \frac{10}{6^3} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^3} = \frac{11664}{33397} \end{aligned}$$

乙ノ勝ツ確率ハ

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{10}{6^3}\right) \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^4 \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^7 \frac{10}{6^3} + \dots \\ &= \frac{10}{6^3} \left(1 - \frac{10}{6^3}\right) \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^3} = \frac{11124}{33397} \end{aligned}$$

丙ノ勝ツ確率ハ

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^2 \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^5 \frac{10}{6^3} + \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^8 \frac{10}{6^3} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^2 \frac{10}{6^3} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{10}{6^3}\right)^3} = \frac{10609}{33397} \end{aligned}$$

26. 甲乙兩人各2個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル、目ノ和ガ兩人トモ相等シクナル確率何程ナルカ。

〔解〕 2個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハル、場合ノ總數ハ 6^2 、其中ニツ

ノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… 12 トナル場合ノ數ハ

$$\begin{aligned} (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 &= x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8 \\ &+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}, \end{aligned}$$

ノ右邊ニ於ケル $x^2, x^3, x^4, \dots, x^{12}$ ノ係數

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

ニ等シ、從ツテニツノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… 12 トナル確率ハ夫々

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \dots, \frac{1}{36},$$

ニ等シ、依ツテ甲乙兩人トモニツノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… トナル確率ハ夫々

$$\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}, \frac{2}{36} \times \frac{2}{36}, \frac{3}{36} \times \frac{3}{36}, \dots$$

ニ等シ、依ツテ顯ハル、目ノ和ガ兩人トモ相等シクナル確率ハ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{36}\right)^2 + \left(\frac{2}{36}\right)^2 + \left(\frac{3}{36}\right)^2 + \left(\frac{4}{36}\right)^2 + \left(\frac{5}{36}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{36}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(36)^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2) = \frac{73}{648} \end{aligned}$$

27. 甲乙二人順次ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ乙ガ7点ヲ得ル前ニ甲ガ6点ヲ得レバ甲ノ勝トシ、甲ガ6点ヲ得ル前ニ乙ガ7点ヲ得レバ乙ノ勝トス、甲ヨリ投ゲ始ムルトキ甲乙ノ勝ツ確率如何。

〔解〕 2個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ7点ヲ得ル確率ハ前問ト同様ニ $\frac{6}{36}$ 、6点ヲ得ル確

率ハ $\frac{5}{36}$ 、故ニ甲ガ第一回ニ勝ツ確率ハ $\frac{5}{36}$ 、第二回ニ勝ツ確率ハ $\frac{31}{36}$

$\times \frac{30}{36} \times \frac{5}{36}$ 、第三回ニ勝ツ確率ハ $\frac{31}{36} \times \frac{30}{36} \times \frac{31}{36} \times \frac{30}{36} \times \frac{5}{36}$ 等追ツテ斯

クノ如クナル故ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\begin{aligned} & \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{5}{36} + \left(\frac{31}{36} \cdot \frac{30}{36}\right)^2 \frac{5}{36} + \dots \\ &= \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{30}{36}} = \frac{30}{61} \end{aligned}$$

從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ

$$1 - \frac{30}{61} = \frac{31}{61}$$

28. 1個ノ骰子ヲ何回投ズルトキ1ノ目ノ出ル確率ガ $\frac{1}{2}$ ニ達スルカ。

〔解〕 1ノ目ノ出テザル確率ハ $\frac{5}{6}$ ナル故ニ x 回投ズルトキ 1ノ目が一回モ出テザル

確率ハ $(\frac{5}{6})^x$ ナリ、從ツテ x 回ノ中 1ノ目が少クとも 1 回顯ハル、確率ハ $1 -$

$(\frac{5}{6})^x$ ナリ、依ツテ次ノ方程式ヲ得

$$1 - (\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2} \quad \therefore (\frac{5}{6})^x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5} \approx 3.8$$

故ニ 3 回ニテハ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{2}$ ニ及バザルモ 4 回投ズレバ $\frac{1}{2}$ ヨリ多クナル。

29. 10 本ノ福引中ニ當リ籤 1 本アリ最初ニ引ク人ト次ニ引ク人トノ損益如何、若シ當リ籤 3 本アラバ如何。

〔解〕 福引ヲ引ク場合ノ損益ハ當リ籤ヲ引ク確率ノ多少ニ由ツテ定マル。10 本ノ福引中ニ當リ籤 1 本アル場合ニハ最初ニ引ク人が當リ籤ヲ引ク確率ハ明カニ $\frac{1}{10}$ ニシテ

第二ニ引ク人が當リ籤ヲ引クタメニハ最初ノ人が空籤ヲ引クコト、次ニ自分が當リ籤ヲ引クコト、ノ二ツノ事柄ガ相次テ起ラザルベカラズ、而シテ此二ツノ事柄ノ確率ハ夫々 $\frac{9}{10}$ 及ビ $\frac{1}{9}$ ナル故ニ次ニ引ク人が當リ籤ヲ引ク確率ハ $\frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ ナリ、即チ最初ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率ト次ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率トハ相等シ、依ツテ最初ニ引ク人モ次ニ引ク人モ損益ニ於テ變ルコトナシ、

若シ 10 本ノ中當リ籤 3 本アル場合ニハ最初ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率ハ $\frac{3}{10}$ ニシテ第二ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク場合ハ (1) 第一ノ人が當リ籤ヲ引キテ自分モ當リ籤ヲ引クカ或ハ (2) 第一ノ人が空籤ヲ引キテ自分が當リ籤ヲ引クカノ何レカナリ、然ルニ (1) ノ確率ハ $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$ ニシテ (2) ノ確率ハ $\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}$ ナリ、故ニ第二ノ人が當リ籤ヲ引ク確率ハ

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10},$$

即チ此場合ニモ福引ノ順序ニ由ツテ當リ籤ヲ引ク確率ニ相違アルコトナシ、即チ福引ノ順序ハ何等損益ニ關係ナシ。

一般ニ n 本中 r 本ノ當リ籤アル場合ニモ當リ籤ヲ引ク確率ハ福引ノ順序ノ如何ニ拘ラズ常ニ $\frac{r}{n}$ ナルコトハ上ト同様ニシテ算出スルコトヲ得。

30. 一個ノ骰ヲ n 回投ゲテ奇數回 1 ノ目ノ顯ハル、確率ヲ求ム。

〔解〕 1 ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$ 、出テザル確率 $\frac{5}{6}$ ナル故ニ基本定理 IV ニヨリ

$$n \text{ 回中只一回ダケ 1 ノ目ノ出ル確率ハ } {}_n C_1 (\frac{1}{6}) (\frac{5}{6})^{n-1}$$

$$\text{丁度 3 回ダケ 1 ノ目ノ出ル確率ハ } {}_n C_3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{n-3},$$

$$\text{丁度 5 回ダケ 1 ノ目ノ出ル確率ハ } {}_n C_5 (\frac{1}{6})^5 (\frac{5}{6})^{n-5}$$

.....

而シテ是等ノ場合ハ互ニ相排斥スル故ニ所要ノ確率ヲ p トスレバ

$$p = {}_n C_1 (\frac{1}{6}) (\frac{5}{6})^{n-1} + {}_n C_3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{n-3} + {}_n C_5 (\frac{1}{6})^5 (\frac{5}{6})^{n-5} + \dots$$

$$= \frac{1}{6^n} \{ {}_n C_1 \cdot 5^{n-1} + {}_n C_3 \cdot 5^{n-3} + {}_n C_5 \cdot 5^{n-5} + \dots \},$$

然ルニ

$$(5+1)^n = 5^n + {}_n C_1 5^{n-1} + {}_n C_2 5^{n-2} + {}_n C_3 5^{n-3} + \dots + {}_n C_{n-1} 5 + {}_n C_n$$

$$(5-1)^n = 5^n - {}_n C_1 5^{n-1} + {}_n C_2 5^{n-2} - {}_n C_3 5^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} {}_n C_{n-1} 5 + {}_n C_n (-1)^n$$

$$\therefore {}_n C_1 5^{n-1} + {}_n C_3 5^{n-3} + {}_n C_5 5^{n-5} + \dots = \frac{1}{2} \{ (5+1)^n - (5-1)^n \}$$

$$= \frac{1}{2} (6^n - 4^n)$$

$$\therefore p = \frac{1}{6^n} \cdot \frac{1}{2} (6^n - 4^n) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\},$$

31. 甲乙二人ノ碁打チアリ五回ノ中甲ハ三回、乙ハ二回勝ツダケノ技倆ヲ有ス、然ラバ乙ガ二回勝ツ前ニ甲ガ三回勝ツ確率如何。

〔解〕 一回ノ勝負ニ於テ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{3}{5}$ 、負ケル確率ハ $\frac{2}{5}$ ナリ、而シテ乙ガ二

回勝ツ前ニ甲ガ三回勝ツタメニハ最初ヨリ三回トモ引續キ甲ガ勝ツカ或ハ四回ノ中一回ダケ(但シ最後ナラザル)甲ガ負ケルカ何レカナラザルベカラズ、而シテ前者

ノ確率ハ ${}_3 C_3 (\frac{3}{5})^3$ 、後者ノ確率ハ $({}_4 C_1 - 1) (\frac{3}{5})^3 (\frac{2}{5})$ 、依ツテ所要ノ確率ハ

$${}_3 C_3 (\frac{3}{5})^3 + ({}_4 C_1 - 1) (\frac{3}{5})^3 (\frac{2}{5}) = \frac{297}{625},$$



32 或試合ニ於テ甲乙ノ技倆ハ 7 回中甲ハ 4 回乙ハ 3 回勝ツ割合ナリトイフ、五回勝負ニ於テ甲ノ勝ツ確率如何。

〔解〕 1 回ノ試合ニ於テ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{4}{7}$ 、負ケル確率ハ $\frac{3}{7}$ 、5 回勝負ニ於テ甲ガ勝ツ場合ハ (1) 三回引續イテ甲ガ勝ツカ (2) 四回試合シテ最後ニアラザル一回甲ガ負ケルカ (3) 5 回試合シテ最後ニアラザル一return 其他ノ一回ト合セテ二回甲ガ負ケルカノ何レカナリ (1) ノ確率ハ明カニ $(\frac{4}{7})^5$ 、(2) ノ確率ハ甲ノ負ケル一return 第一、第二、第三回ノ試合ノ何レニテモヨキ故ニ ${}_3C_1(\frac{4}{7})^3(\frac{3}{7})$ 、(3) ノ確率ハ甲ノ負ケル 2 回ハ第一、第二、第三、第四回ノ試合ノ何レノ 2 回ニテモ可ナル故ニ ${}_4C_2(\frac{4}{7})^3(\frac{3}{7})^2$ 、依ツテ所要ノ確率ハ

$$(\frac{4}{7})^5 + {}_3C_1(\frac{4}{7})^3(\frac{3}{7}) + {}_4C_2(\frac{4}{7})^3(\frac{3}{7})^2 = \frac{10624}{16807}$$

33 1, 2, 2, 4, 4, 6 ナル目ヲ盛りタル骰子ヲ 8 回投ゲテ 1 ノ目ヲ 3 回、2 ノ目ヲ 2 回、4 ノ目ヲ 3 回出ダス確率如何。

〔解〕 1 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{6}$ 、故ニ 3 回 1 ノ目ノ出ル確率ハ $(\frac{1}{6})^3$ 而シテ其 3 回ハ 8 回ノ中任意ノ 3 回ナル故ニ其場合ノ數ハ ${}_8C_3$ 故ニ 8 回中ニ 1 ノ目ガ出ルニ角 3 回顯ハレル確率ハ ${}_8C_3(\frac{1}{6})^3$ 次ニ 2 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{2}{6}$ 、故ニ 2 回 2 ノ目ノ出ル確率ハ $(\frac{2}{6})^2$ 、而シテ其 2 回ハ 8 回中 1 ノ目ノ出ル 3 回ヲ除キタル残り 5 回中ノ任意ノ 2 回ナル故ニ其場合ノ數ハ ${}_5C_2$ 故ニ残り 5 回中ニ 2 ノ目ガ 2 回出ル確率ハ ${}_5C_2(\frac{2}{6})^2$ 、最後ニ 4 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{2}{6}$ 、故ニ 8 回中 1 ノ目ト 2 ノ目ト出テタル 5 回ヲ除キタル残り 3 回トモ皆 4 ノ目ノ出ル確率ハ $(\frac{2}{6})^3$ 、從ツテ所要ノ確率ハ

$${}_8C_3(\frac{1}{6})^3 \cdot {}_5C_2(\frac{2}{6})^2 \cdot (\frac{2}{6})^3 = \frac{70}{6561}$$

34 1 個ノ骰子ヲ 50 回投ズルトキ 1 ノ目ノ出ル回数ノ最モ確實ナルハ何回ナルカ。

〔解〕 1 回投ズルトキ 1 ノ目ノ出ルノ確率 $\frac{1}{6}$ 、出テザル確率 $\frac{5}{6}$ 、故ニ 50 回投ズルトキ 1 ノ目ガ 0, 1, 2, 3, ……50 回出ヅル確率ハ

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^{50}$$

ノ展開式ニ於ケル各項ノ値ナリ、依ツテ所要ノ回数ハ此展開式ニ於ケル最大項ノ $\frac{1}{6}$ ノ指數ナリ、今其最大項ヲ $r+1$ 番目トスレバ其項ノ $\frac{1}{6}$ ノ指數ハ r ニシテ且ツ第五章問 22 ト同様ニ r ハ

$$\frac{50-r+1}{r} \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} > 1 \quad \text{即チ} \quad r < 8\frac{1}{2}$$

ヲ満足セシムル最大整数ナリ、依ツテ $r=8$ 。

依ツテ 1 ノ目ハ 8 回出ルコトガ最モ確實ナリ。

35 1 個ノ骰子ヲ 5 回投ゲテ 3 回引續キテ同シ目ノ出ル確率如何。

〔解〕 5 回ノ中引續キテ 3 回同シ目ノ出ル場合ハ

(1) 第一、第二、第三回、(2) 第二、第三、第四回、(3) 第三、第四、第五回ノ三種ナリ、(1) ノ場合ハ第一回ニ出ル目ハ何ニテモヨク第二、第三回ハ第一回ニ出テタルト同シ目ガ出デザルベカラザル故ニ其確率ハ $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 、(2) ノ場合ハ第一回ニ出ル目ハ何ニテモヨク第二回ハ第一回ト異ナルモノ第三、第四回ハ第二回ト同シ目ノ出デザルベカラザル故ニ其確率ハ $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ 、(3) ノ場合ハ第一回、第二回ハ同シ目ニテ第三、第四、第五回ハ第二回ト異ナル同シ目ノ出ル場合ト三通リアリ、而シテ前ノ場合ノ確率ハ $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ニシテ後ノ場合ノ確率ハ $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ナル故ニ (3) ノ場合ノ確率ハ此二ツノ和ニ等シ、依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$$

30. n 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ 4 ノ倍数個 (0 ヲ含ム) ダケ 1 ノ目ノ出ズル確率ハ方程式 $(6x-5)^4=1$ ノ四根ノ n 乗ノ和ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 所要ノ確率ヲ p トスレバ

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_n C_4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + {}_n C_8 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 \\ + {}_n C_{12} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-12} \left(\frac{1}{6}\right)^{12} + \dots$$

$$\text{然ルニ } \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_n C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) + {}_n C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \dots$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n - {}_n C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) + {}_n C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \dots$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)^n \\ = 2 \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_n C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_n C_4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \dots \right\}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6} + i\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6} - i\frac{1}{6}\right)^n \\ = 2 \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n - {}_n C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_n C_4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 - \dots \right\}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6} + i\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6} - i\frac{1}{6}\right)^n \\ = 4 \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^n + {}_n C_4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + {}_n C_8 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 + \dots \right\} = 4p,$$

故ニ此左邊ノ括弧内ノ四數ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$p = \frac{\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n}{4},$$

$$\text{然ルニ } \alpha - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}, \quad \beta - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}, \quad \gamma - \frac{5}{6} = i\frac{1}{6}, \quad \delta - \frac{5}{6} = -i\frac{1}{6}$$

$$\text{即チ } 6\alpha - 5 = 1, \quad 6\beta - 5 = -1, \quad 6\gamma - 5 = i, \quad 6\delta - 5 = -i$$

$$\therefore (6\alpha - 5)^4 = 1, \quad (6\beta - 5)^4 = 1, \quad (6\gamma - 5)^4 = 1, \quad (6\delta - 5)^4 = 1$$

故ニ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ方程式 $(6x-5)^4=1$ ノ四根ナリ、即チ p ハ所題ノ四次方程式ノ四根ノ n 乗ノ和ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シ。

37. 100 本ノ福引中 1 等 50 圓 3 本, 2 等 10 圓 20 本, 残り空籤ナリトイフ、此福引ヲ引カントスル人幾何ノ料金ヲ拂フガ至當ナルカ。

〔解〕 福引ヲ引カントスル人ノ支拂フ料金ハ其人ノ期望金額ニ等シキトキ公正ナリ、

然ルニ所題ノ場合ニ於テハ一等ヲ引ク確率即チ 50 圓ヲ得ル確率ハ $\frac{3}{100}$, 2 等ヲ

引ク確率即チ 10 圓ヲ得ル確率 $\frac{20}{100}$, 依ツテ福引ヲ引ク人ノ期望金額ハ

$$50 \times \frac{3}{100} + 10 \times \frac{20}{100} = 3.5 \text{ 圓}$$

即チ至當ナル料金ハ 3 圓 50 錢 ナリ。

38. 甲ハ 10 錢銀貨 5 枚ヲ出シ乙ハ同ジク 3 枚ヲ出シ各自分ノ銀貨ヲ投ゲテ顯ハル、表ノ數ノ多キ方ヲ勝トシ 勝チタル方ハ他ノ銀貨ヲ取ルコトハス、甲乙何レガ有利ナルカ。

〔解〕 先ツ甲ノ勝ツ確率ヲ求メニ甲ガ只 1 ツノ表ヲ顯ハストキ甲ガ勝ツメニハ乙

ハ總テ裏ヲ顯ハサルベカラズ、此確率ハ

$${}_5 C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^8}$$

甲ガ 2 ツノ表ヲ顯ハストキ甲ガ勝ツメニハ乙ハ多クトモ 1 ツノ表ヲ顯ハサルベカラズ、其確率ハ

$${}_5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3 C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{5}{2^5}$$

同様ニ甲ガ 3 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ

$${}_5 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3 C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{35}{2^7}$$

甲ガ 4 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ ${}_5 C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2^5}$

甲ガ 5 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}$

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{5}{2^8} + \frac{5}{2^5} + \frac{35}{2^7} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{163}{2^8}$

從ツテ甲ノ期望金額ハ $30 \text{ 錢} \times \frac{163}{2^8} = \frac{4890}{2^8} \text{ 錢}$

次ニ乙ノ勝ツ確率ハ甲ノ場合ト同様ニ

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\} \\ + \left(\frac{1}{2}\right)^3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{37}{2^8}$$

依ツテ乙ノ期望金額ハ $50 \text{ 銭} \times \frac{37}{2^8} = \frac{1850}{2^8} \text{ 銭}$

即チ甲ノ期望金額ハ乙ヨリ多シ故ニ甲ハ有利ナリ。

39. 50 銭, 10 銭, 5 銭ナル 3 種ノ貨幣ヲ各 5 枚ツ、入レタルツノ袋ヨリ無心ニ 3 枚ヲ取り出ストキノ期望金額如何。

〔解〕 3 種ノ貨幣合計 15 枚ヨリ 3 枚ヲ取り出ス場合ノ總數ハ ${}_{15}C_3=455$, 次ニ 3 個ノ貨幣ノ配合ヲ考フルニ今 50 銭, 10 銭, 5 銭ヲ夫々 A, B, C ニテ表ハセバ其配合ハ

$$(3A), (3B), (3C), (2A, B), (2A, C), (2B, A), (2B, C), \\ (2C, A), (2C, B), (A, B, C)$$

ナル 10 通りナリ, 是等ノ各配合ノ確率及期望金額ヲ計算スレバ

配合ノ種類	其場合ノ數	確率	期望金額
(3A)	${}_5C_3=10$	$\frac{10}{455}$	$150 \times \frac{10}{455}$
(3B)	"	"	$30 \times "$
(3C)	"	"	$15 \times "$
(2A, B)	${}_5C_2 \times {}_5C_1=50$	$\frac{50}{455}$	$110 \times \frac{50}{455}$
(2A, C)	"	"	$105 \times "$
(2B, A)	"	"	$70 \times "$
(2B, C)	"	"	$25 \times "$
(2C, A)	"	"	$60 \times "$
(2C, B)	"	"	$20 \times "$
(A, B, C)	$({}_5C_1)^3=125$	$\frac{125}{455}$	$65 \times \frac{125}{455}$

依ツテ所要ノ期望金額ハ

$$\frac{1}{455} (1500 + 300 + 150 + 5500 + 5250 + 3500 + 1250 + 3000 + 1000 + 8125) \\ = \frac{29575}{455} = 65 \text{ 銭}$$

(注意) 3 種ノ貨幣ノ平均價格ハ

$$\frac{50 \times 5 + 10 \times 5 + 5 \times 5}{15} = \frac{325}{15}$$

故ニ取り出シタル 3 枚ノ平均價格ハ $\frac{325}{15} \times 3 = 65 \text{ 銭}$

即チ上ノ期望金額ハ平均價格ニ當ル。

40. 1 ヨリ n マデノ番號ヲ付シタル n 枚ノ札ヲ入レタル箱ヨリ任意ノ 2 枚ヲ取り出シテ其 2 枚ノ番號ノ積ニ等シキ金額ヲ得ベキコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額如何。

〔解〕 p, q ヲ 1 ヨリ n マデノ中ノ任意ノ二ツノ番號トス, n 枚ヨリ 2 枚ヲ取り出ス場合ノ數ハ ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$, 其中 p 號, q 號ノ 2 枚ヲ取り出ス場合ハ只一ツ, 依ツテ pq 圓ヲ得ベキ確率ハ $\frac{2}{n(n-1)}$, 從ツテ其期望金額ハ $\frac{2pq}{n(n-1)}$ 圓, 故ニ p, q ノ 1 ヨリ n ニ至ルアラユル値ニ對スル斯ル期望金額ノ總和ガ即チ此人ノ總期望金額ナリ, 但シ $p \neq q$ ナルヲ要スルコト勿論ナリ, 依ツテ所要ノ期望金額ヲ S トスレバ

$$S = \sum \frac{2pq}{n(n-1)} = \frac{2 \sum pq}{n(n-1)}$$

然ルニ $2 \sum pq = (1+2+3+\dots+n)^2 - (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

$$\therefore S = \frac{1}{12}(n+1)(3n+2),$$

41. 同シ技術ノ棋士甲乙ガ試合ヲナシ先キニ 三回勝チタルモノハ相手ヨリ a 圓ヲ受取ルコトヲ約束セリ, 然ルニ甲ガ二回勝チ乙ガ一回勝チタルトキ都合ニヨリ試合ヲ中止セリトイフ, 乙ハ何程ヲ甲ニ支拂フガ正當ナルカ。

【解】 既ニ甲ハ二回乙ハ一回勝タルガ故ニ此試合ヲ經横シテ甲乙ノ勝敗ヲ決スルモノトスレバ次ノ試合ニ勝チ得ルモノハ

(1) 甲 (2) 乙, 甲 (3) 乙, 乙

ナル三ツノ場合ナリ (1), (2) ハ甲ノ勝利ニシテ乙ハ甲ニ a 圓ヲ拂ハザルベカラズ, (3) ハ乙ノ勝利ニシテ乙ハ甲ヨリ a 圓ヲ受取ラザルベカラズ, 然ルニ技倆

ハ同ジキガ故ニ一回ノ試合ニ於テ甲, 乙ノ勝ツ確率ハ夫々 $\frac{1}{2}$, 従ツテ (1), (2),

(3) ノ確率ハ夫々 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$,

依ツテ乙ハ甲ニ a 圓ヲ支拂フ確率 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, 従ツテ甲ノ期望金額ハ

$a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$, 又甲ヨリ a 圓ヲ受取ルベキ確率 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, 従ツテ乙ノ期望金額

ハ $a\left(\frac{1}{4}\right)$, 故ニ乙ヨリ甲ニ支拂フベキ正當ナル金額ハ

$$a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - a\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{a}{2} \text{ 圓}$$

42/1 ヨリ n マデノ番號ヲ付シタル n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ツ、
回取り出シ第 r 番目ニ第 r ノ球ヲ取り出ス毎ニ 1 圓ヲ得ルコトヲ約束セラレ
タル人ノ期望金額ハ幾何ナルカ。

【解】 第一回ニ 1 番, 第二回ニ 2 番, 第三回ニ 3 番等, 取り出ス回数ト取り出シタル球ノ番號ト一致スル毎ニ 1 圓ヲ得ル約束ナル故ニ 1 圓ヲ得ル確率ハ取り出ス回数ト取り出シタル球ノ番號ト一致スル確率ナリ, 然ルニ球ノ出ズル順序ノ總テノ場合ノ數ハ $n!$ ニシテ其中第一回ニ 1 番ノ出ル場合ノ數ハ $(n-1)!$, 第二回目ニ 2 番ノ出ル場合ノ數モ $(n-1)!$, 第三回ニ 3 番ノ出ル場合ノ數モ $(n-1)!$ 等ナル故ニ第 r 番目ニ第 r 球ノ出ル確率ハ總テ

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

ナリ, 依ツテ所要ノ期望金額ハ

$$1 \times \frac{1}{n} + 1 \times \frac{1}{n} + \dots + 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times n = 1 \text{ 圓}$$

43. A, B, C, D, E ノ五人ガ各 1 圓ヲ出シ, 各人順番ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ最大得点者ニ賭金ヲ與ヘントス, 若シ最高点者ガ 2 人以上アルトキハ賭金ヲ其人々ニ等分スルモノトス, 最初ニ投ジテ 6 点ヲ得タル A ノ期望金額如何。

【解】 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ツテ 2, 3, 4, 5, ..., 12 点ノ顯ハル、場合ノ數ハ

$$(x+x^2+\dots+x^6)^2 = x^2+2x^3+3x^4+\dots+x^{12}$$

ノ各次ノ係數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ニ等シ, 故ニ 5 点以下ヲ得ル確率ハ

$$\frac{1+2+3+4}{36} = \frac{10}{36}, \text{ 6 点ヲ得ル確率ハ } \frac{5}{36}, \text{ 7 点以上ヲ得ル確率ハ}$$

$$\frac{6+5+\dots+2+1}{36} = \frac{21}{36},$$

最初ニ投ケテ 6 点ヲ得タル A ガ勝ツタメハ殘ル 4 人が皆 6 点以下ヲ取ラザルベカラズ, 然ルニ各人が 6 点又ハ 5 点以下ヲトル確率ハ $\frac{10}{36} + \frac{5}{36}$ ナル故ニ

$$4 \text{ 人が皆 6 点以下ヲトル確率ハ } \left(\frac{10}{36} + \frac{5}{36}\right)^4 = \left(\frac{15}{36}\right)^4$$

4 人が皆 6 点以下ヲトルトシタル場合ニ各人が 6 点ヲトル確率ヲ p , 5 点以下ヲ

トル確率ヲ q トスレバ p, q ハ無論 $\frac{5}{36} \cdot \frac{10}{36}$ ニ比例セザルベカラズシテ,

$$\text{且ツ其和ハ 1 ナラザルベカラズ, 依ツテ } p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

故ニ 6 点ヲ取りタル A ガ勝ツトシテ殘ル 4 人が皆 5 点以下ナル確率ハ $\left(\frac{2}{3}\right)^4$,

従ツテ此場合ノ期望金額ハ $5\left(\frac{2}{3}\right)^4$, 1 人が 6 点 3 人が 5 点以下ナル確率ハ

$${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3, \text{ 従ツテ此場合ノ期望金額ハ } \frac{5}{2}{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3, \text{ 追ツテ斯クノ}$$

如クナル故ニ所要ノ期望金額ハ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{15}{36}\right)^4 \left\{ 5\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{5}{2}{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{5}{3}{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{5}{4}{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{5}{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4 \right\} \\ & = \frac{\left(\frac{15}{36}\right)^4}{\frac{1}{3}} \left\{ {}_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) + {}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right. \\ & \quad \left. + {}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot 15^4}{36^4} \left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right)^5 - \left(\frac{2}{3} \right)^5 \right\} = \left(\frac{5}{36} \right)^4 (3^5 - 2^5),$$

或ハ次ノ如ク考フルモ可ナリ

A が 6 点ヲトリタルトキ殘ル 4 人が皆 5 点以下ヲトル確率ハ $\left(\frac{10}{36} \right)^4$ 從ツ

テ此場合ノ期望金額ハ $5 \left(\frac{10}{36} \right)^4$, 1 人が 6 点 3 人が 5 点以下ナル確率ハ

${}_4C_1 \left(\frac{5}{36} \right) \left(\frac{10}{36} \right)^3$, 從ツテ此場合ノ期望金額ハ $\frac{5}{2} {}_4C_1 \left(\frac{5}{36} \right) \left(\frac{10}{36} \right)^3$, 等迫ツテ

斯クノ如クナル故ニ所要ノ期望金額ハ

$$\begin{aligned} & 5 \left(\frac{10}{36} \right)^4 + \frac{5}{2} {}_4C_1 \left(\frac{5}{36} \right) \left(\frac{10}{36} \right)^3 + \frac{5}{3} {}_4C_2 \left(\frac{5}{36} \right)^2 \left(\frac{10}{36} \right)^2 \\ & \quad + \frac{5}{4} {}_4C_3 \left(\frac{5}{36} \right)^3 \left(\frac{10}{36} \right) + \frac{5}{5} {}_4C_4 \left(\frac{5}{36} \right)^4 \\ & = \frac{1}{36} \left\{ {}_5C_1 \left(\frac{10}{36} \right)^4 \left(\frac{5}{36} \right) + {}_5C_2 \left(\frac{10}{36} \right)^3 \left(\frac{5}{36} \right)^2 + {}_5C_3 \left(\frac{10}{36} \right)^2 \left(\frac{5}{36} \right)^3 \right. \\ & \quad \left. + {}_5C_4 \left(\frac{10}{36} \right) \left(\frac{5}{36} \right)^4 + {}_5C_5 \left(\frac{5}{36} \right)^5 \right\} \\ & = \frac{36}{5} \left\{ \left(\frac{10}{36} + \frac{5}{36} \right)^5 - \left(\frac{10}{36} \right)^5 \right\} \\ & = \left(\frac{5}{36} \right)^4 (3^5 - 2^5), \end{aligned}$$

44. 同形ノ三個ノ箱アリ, 甲箱ハ 2 白 3 黒, 乙ハ 4 白 1 黒, 丙ハ 3 白 7 黒ヲ容ル, 今無心ニ一球ヲ取り出シタルニ黒ナリトイフ, 然ラバ其黒球ガ丙箱ヨリ出デシ確率如何。

〔解〕 黒球ヲ取り出シタル原因ハ甲乙丙ノ三個ノ箱ナリ, 然ルニ甲乙丙ハ皆同形ナル

故ニ其事前確率ハ皆 $\frac{1}{3}$, 又甲乙丙ヨリ一黒球ヲ取り出ス確率ハ夫々 $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}$, 故ニ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{10}} = \frac{7}{15},$$

45. 4 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ一球ヲ取り出シタルニ白ナリトイフ, 袋ノ中ニ 3 個ノ白球アル確率如何。

〔解〕 袋ノ中ニ 4 球アル故ニ 1 白球ヲ取り出シタルコトノ原因ハ次ノ 4 種アリ,

1. 袋ノ中ノ 4 球皆白ナルコト
2. 3 球白ニシテ 1 球白ナラザルコト
3. 2 球白ニシテ 2 球白ナラザルコト
4. 1 球白ニシテ 3 球白ナラザルコト

而シテ是等 4 種ノ原因ハ一般ニ平等ナラズ, 何ントナレバ球ハ白ナルカ, 白ナラザルカノ何レカナル故ニ一球ガ白ナル確率ハ $\frac{1}{2}$, 從ツテ 4 球皆白ナル確率即チ

原因 (1) ノ事前確率ハ $\left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$ ニシテ同様ニ原因 (2) ノ事前確率ハ

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4},$$

(3), (4) ノ事前確率ハソレゾレ

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}, \quad {}_4C_1 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4},$$

ナレバナリ, 次ニ原因 (1), (2), (3), (4) ヨリ 1 白球ヲ取り出ス確率ハ夫々 $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$, 故ニ基本定理 V ニヨリ原因 (2) ノ事後確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{16} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{3}{8},$$

(注意) 若シ原因 (1) (2) (3) (4) ノ事前確率が皆相等シク $\frac{1}{4}$ ニ等シトスレバ, 所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{3}{10}$$

トナル。

46. 上等中等各 5 本下等 10 本合計 20 本ノ福引ノ中當リ籤上等 1 本, 中等 3 本, 下等 7 本アリ, 今 1 本ノ當り籤ヲ引キタルコトヲ告ゲテレタルトキソレガ上等ナルコトノ確率如何。

【解】 引キタル 1 本ノ當リ籤ハ上中下 3 種ノ中ノ何レカ大リ、然ルニ上中下 3 種ノ籤ノ事前確率ハ題意ニヨリ夫々 $\frac{5}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{10}{20}$ ニシテ、ソレヨリ當リ籤ヲ引ク確率ハ夫々 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ ナリ、依ツテ引キタル當リ籤ガ上等ナル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{5}{20} \times \frac{1}{5}}{\frac{5}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{10}{20} \times \frac{7}{10}} = \frac{1}{11}$$

17. 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヅ、3 回取り出シテ毎回元ニ戻シタルニ 2 回白ヲ得タリトイフ、然ラバ其袋ノ中ニ 3 個ノ白球アル確率如何。

【解】 3 回ノ中 2 回白ヲ得、1 回白ナラザルモノヲ得タル故ニ原因ハ次ノ 3 種ナリ、

- (1) 白 3 個 非白 1 個
 (2) 白 2 個 非白 2 個
 (3) 白 1 個 非白 3 個

是等ノ原因ノ事前確率ハ前々問ト同様ニ夫々

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \quad {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

次ニ原因 (1), (2), (3) ヨリ 3 回中或順序ニ 2 回白ヲ得、一回非白ヲ得ル確率ハ

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}, \quad \left(\frac{2}{4}\right)^2 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}$$

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{9}{64}}{\frac{1}{4} \times \frac{9}{64} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{64}} = \frac{3}{8}$$

若シ原因 (1), (2), (3) ノ事前確率ヲ相等シク皆 $\frac{1}{3}$ ナリトスレバ

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{9}{64}}{\frac{1}{3} \times \frac{9}{64} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{64}} = \frac{9}{20}$$

18. とらんぶ 52 枚中一枚ヲ紛失セリ、残りノ 51 枚中ヨリ二枚ヲ取り出シタルニ二枚トモはーとナリトイフ、紛失シタル一枚ガはーとナル確率及ビたいやナル確率各如何。

【解】 紛失シタル一枚ハ (1) はーとナルカ、(2) だいやナルカ、(3) すべーとナルカ、(4) くろばーナルカナリ、而シテ此四種類ノ事前確率ハ相等シクシテ皆 $\frac{1}{4}$ ナリ、又 51 枚中ヨリ任意ノ二枚ヲ取り出ス仕方ハ ${}_{51}C_2$ 通りアル故ニ取り出シタル二枚ガはーとナル確率ハ (1) ナラバ $\frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}$, (2) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, (3) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, (4) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, 依ツテ (1) ナルコトノ事後確率即チ紛失シタル一枚ガはーとナルコトノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}} = \frac{{}_{12}C_2}{{}_{12}C_2 + 3 \cdot {}_{13}C_2}} = \frac{11}{50}$$

同様ニ (2) ノ事後確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}} = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{12}C_2 + 3 \cdot {}_{13}C_2}} = \frac{13}{50}$$

19. 或手紙ガ London, 或ハ Washington ヨリ來レルコトヲ知ル、而シテ消印中ニ相隣レル二字 on ダケ認め得タリ、London ヨリ來レル確率如何。

【解】 London ヨリ來レルコト、Washington ヨリ來レルコトノ事前確率ハ相等シク何レモ $\frac{1}{2}$ ナリトセン、London ナル文字ニハ相隣レル二文字ガ 5 組アリテソフ中 on ハ二組アリ、故ニ London ヨリナラバ on ノ字ノ表ハル、確率 $\frac{2}{5}$ 、次ニ Washington ナル文字ニハ相隣レル二文字ハ 9 組アリテ其中 on ハ 1 組アルノミ故ニ Washington ヨリナラバ on ノ表ハル、確率ハ $\frac{1}{9}$ 、依ツテ London ヨリ來レル確率ハ

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9}} = \frac{18}{23}$$

50. 10 圓紙幣 3 枚ト 5 圓紙幣 3 枚トヲ入レタル財布ヨリ無心ニ 4 枚ヲ取
リ出シテ他ノ空財布ニ入レ其 4 枚ノ中ヨリ又無心ニ 2 枚ヲ取り出シタルニ 2 枚
トモ 10 圓紙幣ナリシトイフ、始め取り出シタル 4 枚ノ中尙残ル 2 枚ノ紙幣ニ
對スル期望價格ハ何程ナルカ。

〔解〕 取り出シタル二枚が共ニ 10 圓紙幣ナリシコト、10 圓、5 圓トモ 3 枚ナリシ
コト、ヨリ空財布ニ入レタル 4 枚ハ

(1) 10 圓 2 枚、5 圓 2 枚ナリシカ

(2) 10 圓 3 枚、5 圓 1 枚ナリシカ

ノ何レカナリ、然ルニ 10 圓 3 枚、5 圓 3 枚合セテ 6 枚ヨリ 4 枚ヲ取ル總テノ
場合ハ ${}_6C_4=15$ ニシテ、ソノ中 10 圓 2 枚、5 圓 2 枚ヲ取ル方法ハ ${}_3C_2 \times {}_3C_2=9$ 、
10 圓 3 枚、5 圓 1 枚ヲ取ル方法ハ ${}_3C_3 \times {}_3C_1=3$ ナル故ニ (1) (2) ノ事前確率ハ
夫々 $\frac{9}{15}$ 及ビ $\frac{3}{15}$

又 (1) ノ場合ニ 2 枚取り出シテ共ニ 10 圓紙幣ナル確率ハ $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$ 、(2) ノ

場合ニ 2 枚トモ 10 圓ナル確率ハ $\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}$

故ニ空財布ニ入レタル 4 枚ガ (1) ナリシ確率ハ

$$\frac{\frac{9}{15} \times \frac{1}{6}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{3}{6}} = \frac{1}{2}$$

(2) ナリシ確率ハ

$$\frac{\frac{3}{15} \times \frac{3}{6}}{\frac{9}{15} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{15} \times \frac{3}{6}} = \frac{1}{2}$$

故ニ後ニ残レル 2 枚ガ 5 圓ノミナル確率ハ $\frac{1}{2}$ 、從ツテ其期望價格ハ

10 圓 $\times \frac{1}{2} = 5$ 圓、後ニ残リシ 2 枚ガ 10 圓、5 圓各 1 枚ナル確率ハ $\frac{1}{2}$ 、從ツテ

其期望價格ハ 15 圓 $\times \frac{1}{2} = 7.5$ 圓

依ツテ所要ノ期望價格ハ

$$5 \text{ 圓} + 7.5 = 12.5 \text{ 圓}$$

51. 黑白合セテ 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取り出シタルニ白ナリトイフ、
其 1 球ヲ元ニ戻シテ次ニ又 1 球ヲ取り出シテ再ビ白ヲ得ル確率如何。

〔解〕 黑白合セテ 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取り出シタルトイフ事實ノ原因ハ

(1) 4 白、(2) 3 白、1 黒、(3) 2 白、2 黒、(4) 1 白、3 黒

ノ四種ニシテ且ツ 1 球ヲ取り出シタルトイフ事實ヨリ推定スル是等ノ原因ノ事
後確率ヲ夫々 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 トスレバ問. 45 ニ於テ述ベタルト同様ニ (事前確率ヲ
等シカラズトスレバ)

$$Q_1 = \frac{1}{8}, \quad Q_2 = \frac{3}{8}, \quad Q_3 = \frac{3}{8}, \quad Q_4 = \frac{1}{8}$$

ニシテ而シテ各原因ヨリ 1 球ヲ取り出ス確率ハ夫々

$$1, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{1}{4}$$

ナル故ニ次ニ 1 球ヲ取り出シテソレガ白ナル確率ハ原因 (1) ヨリハ $\frac{1}{8} \times 1$ 、

(2) ヨリハ $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$ 、(3) ヨリハ $\frac{3}{8} \times \frac{2}{4}$ 、(4) ヨリハ $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$ ナリ、故ニ

原因ノ如何ヲ問ハズ兎ニ角次ニ白ノ出ヅル確率即チ所要ノ確率ハ是等ノ和

$$\frac{1}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

ナリ、若シ各原因ノ事前確率ヲ相等シト考フレバ

$$Q_1 = \frac{2}{5}, \quad Q_2 = \frac{3}{10}, \quad Q_3 = \frac{2}{10}, \quad Q_4 = \frac{1}{10}$$

ナル故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

トナル。

52. 黑白合セテ 5 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取り出シタルニ黒ナリトイフ、
之ヲ元ニ戻シテ再ビ 1 球ヲ取り出シタルニ今度ハ白ナリトイフ、然ラバソレ
ヲ元ニ戻シテ第三回目ニ 1 球ヲ取り出シテ黒ヲ得ル確率如何。

〔解〕 1 黒、1 白ヲ取り出シタル事實ヨリ原因ハ次ノ 4 種ナルヲ知ル

(1) 1 白、4 黒、(2) 2 白、3 黒、(3) 3 白、2 黒、(4) 4 白、1 黒

Handwritten calculations and notes on the right side of page 223, including a circled '5' and various fractions like $\frac{5-4}{2}$ and $\frac{121}{2501}$.

各原因ノ事前確率ヲ q_1, q_2, q_3, q_4 トスレバ

$$q_1 = {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}, \quad q_2 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32},$$

$$q_3 = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}, \quad q_4 = {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32},$$

各原因ヨリ 1 黒 1 白ヲ取り出ス確率ヲ p_1, p_2, p_3, p_4 トスレバ

$$p_1 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}, \quad p_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25},$$

$$p_3 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}, \quad p_4 = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25},$$

$$\text{故ニ} \quad q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4 = \frac{1}{5},$$

従ツテ各原因ノ事後確率ヲ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 トスレバ

$$Q_1 = \frac{5}{32} \times \frac{4}{25} \div \frac{1}{5} = \frac{1}{8}, \quad Q_2 = \frac{10}{32} \times \frac{6}{25} \div \frac{1}{5} = \frac{3}{8},$$

$$Q_3 = \frac{3}{8}, \quad Q_4 = \frac{1}{8}$$

各原因ヨリ黒ヲ取り出ス確率ハ夫々 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$

故ニ第三回目ニ黒ヲ取り出スコトノ確率ハ

$$\frac{1}{8} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2},$$

53. 5 球ヲ入レタル袋ヨリ 2 球ヲ取り出シタルニニツ共白ナリシトイフ、之ヲ元ニ戻シテ更ニ 2 球ヲ取り出シテ白ト白ナラザルモノト一ツツ、得ル確率如何。

〔解〕 2 白球ヲ取り出シタルコトヨリ原因ハ次ノ 4 種ナルヲ知ル

- (1) 2 白, (2) 3 白, (3) 4 白, (4) 5 白

各原因ノ事前確率 q ハ皆相等シク何レモ $\frac{1}{4}$ ナリト見做ス,

各原因ヨリ 2 白球ヲ得ル確率 p ハ夫々

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}, \quad \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}, \quad \frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}, \quad \frac{{}_5C_2}{{}_5C_2} = 1,$$

$$\text{故ニ} \quad \Sigma qp = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

故ニ各原因ノ事後確率 Q ハ夫々

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{20},$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{6}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{20}, \quad \frac{1}{4} \times 1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

最後ニ各原因ヨリ白ト白ナラザルモノトヲ取り出ス確率ハ夫々

$$\frac{2 \times 3}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}, \quad \frac{3 \times 2}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}, \quad \frac{4 \times 1}{{}_5C_2} = \frac{4}{10}, \quad \frac{5 \times 0}{{}_5C_2} = 0$$

依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{20} \times \frac{6}{10} + \frac{3}{20} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{20} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{6}{25}$$

54. 黒白合セテ 20 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ順次ニ 1 球ツ、10 回取り出シタルニ白球 6 個、黒球 4 個ヲ得タリトイフ、次ニ取り出ス球ガ白ナル確率如何、但シ取り出シタル球ハ總テ元ニ戻サザルモノトス。

〔解〕 球ノ總數 20 ニシテ白球 6 個、黒球 4 個ヲ得タルコトヨリ其原因ハ次ノ 11 通りアルベシ

原因	A_1	A_2	A_3	A_{10}	A_{11}
白球	6,	7,	8,		15,	16,
黒球	14,	13,	12,		5,	4,

各原因ヨリ或順序ニ白球 6 個、黒球 4 個ヲ得ル確率ヲ p_1, p_2, \dots, p_{11} トスレバ

$$p_1 = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{2}{16} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{14} \cdot \frac{13}{13} \cdot \frac{12}{12} \cdot \frac{11}{11}$$

$$p_2 = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{11}$$

$$p_{11} = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}$$

- 今 $M_1 = 1.2.3.4.5.6$ $N_1 = 11.12.13.14$
 $M_2 = 2.3.4.5.6.7$ $N_2 = 10.11.12.13$
.....
 $M_{11} = 11.12.13.14.15.16$ $N_{11} = 1.2.3.4$

トオキ、且ツ各原因ノ事前確率ヲ皆相等シト考ヘ各原因ノ事後確率ヲ Q_1, Q_2, \dots, Q_{11}

トスレバ

$$Q_1 = \frac{M_1 N_1}{M_1 N_1 + M_2 N_2 + \dots + M_{11} N_{11}} = \frac{M_1 N_1}{\Sigma MN}$$

$$Q_2 = \frac{M_2 N_2}{\Sigma MN}, \dots, Q_{11} = \frac{M_{11} N_{11}}{\Sigma MN}$$

各原因ヨリ次ニ白球ヲ取り出ス確率ハ夫々

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{10}{10}$$

依ツテ所要ノ確率ヲ P トスレバ

$$P = \frac{1}{10 \cdot \Sigma MN} (M_2 N_2 + 2 \cdot M_3 N_3 + 3 \cdot M_4 N_4 + \dots + 10 \cdot M_{11} N_{11})$$

$$\text{然ルニ } (1-x)^{-7} = 1 + 7x + \frac{7 \cdot 8}{2!} x^2 + \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{6!} (M_1 + M_2 x + M_3 x^2 + \dots + M_{11} x^{10} + \dots)$$

$\frac{p+1}{3+0+1} = \frac{1}{4}$

$$(1-x)^{-5} = 1 + 5x + \frac{5 \cdot 6}{2!} x^2 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{4!} (N_1 + N_2 x + N_3 x^2 + \dots + N_{11} x^{10} + \dots)$$

$$\text{故ニ } (1-x)^{-7} \cdot (1-x)^{-5} = (1-x)^{-12} \text{ ノ展開式ニ於ケル } x^{10} \text{ ノ係數ハ } \frac{\Sigma MN}{6! 4!}$$

$$\text{ニ等シ、依ツテ } \frac{\Sigma MN}{6! 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 21}{10!}$$

$$\therefore \Sigma MN = \frac{6! 4!}{10!} (12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 21)$$

$$\text{又 } (1-x)^{-8} = 1 + 8x + \frac{8 \cdot 9}{2!} x^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{7!} (M_2 + 2 M_3 x + 3 M_4 x^2 + \dots + 10 M_{11} x^9 + \dots)$$

$$\text{故ニ } (1-x)^{-8} \cdot (1-x)^{-5} = (1-x)^{-13} \text{ ノ展開式ニ於ケル } x^9 \text{ ノ係數ハ } P \text{ ノ分子}$$

$$= \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{7!} \text{ ヲ乘ツタルモノニ等シ、}$$

$$\text{依ツテ } M_2 N_2 + 2 M_3 N_3 + \dots + 10 M_{11} N_{11} = \frac{4! 7!}{9!} (13 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 21),$$

$\frac{1}{10} \cdot \frac{4! 7!}{9!} (13 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 21) \div \frac{6! 4!}{10!} (2 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 21) = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{8+0+1} = \frac{1}{9}$

(注意) 一般ニ黑白兩種ノ球ノ總數 n ナルトキ 1 球ヲ、 $p+q$ 回取出シテ p 個ノ白ト q 個ノ黒トヲ得タル場合ニ次ニ白ヲ得ル確率ハ

$$\frac{p+1}{p+q+2}$$

ニシテ總數 n = 關係セズ本問ハ $p=6, q=4$ ナル特別ノ場合ナリ。

55. 太陽ハ今日マデ 2000000 日間毎朝東天ヨリ登ルヲ知ル、然ラバ明日モ亦東天ヨリ登ル確率如何。

[解] 前問ノ注意ニ於テ $p=2000000, q=0$ トセバ可ナリ、即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{2000000+1}{2000000+2} = \frac{2000001}{2000002} \approx 1$$

56. 5 男 4 女ヲ生ミタル婦人ガ次ニ男兒ヲ生ム確率如何。

[解] 前問ト同様ニ $p=5, q=4$ トスレバ所要ノ確率ハ

$$\frac{5+1}{5+4+2} = \frac{6}{11}$$

57. 10 發ノ射撃中 9 發命中セル射手ノ第 11 發ガ命中スル確率如何。

[解] 前問ト同様ニ $p=9, q=1$ トスレバ所要ノ確率ハ

$$\frac{9+1}{9+1+2} = \frac{5}{6}$$

58. 甲ガ眞ライフ確率 $\frac{4}{5}$ 、乙ガ眞ライフ確率 $\frac{5}{7}$ ナルトキ甲、乙共ニ眞ナリトイフコトノ信用ノ程度如何、又甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ事柄ノ眞ナル確率如何。

[解] 甲、乙ガ眞ナリ或ハ眞ナラズナドト証言スルコトノ原因ハ (1) 其事ガ眞ナルコト、

(2) 其事ガ眞ナラザルコト、ノ二ツニ外ナラズ、此二ツノ原因ノ事前確率ハ事柄其者ノ性質ニ由ツテ定マルベキモノナルモ所題ノ如キ場合ニハソノ性質不明ナレバ事前確率ハ相等シク共ニ $\frac{1}{2}$ ナリト考フルノ外ナシ、次ニ原因 (1) ヨリ

甲、乙共ニ眞ナリトイフ証言ノ出ズル確率即チ甲、乙共ニ眞ライフ確率ハ $\frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$

ニシテ原因 (2) ヨリ甲、乙共ニ眞ナリトイフ証言ノ出ズル確率、即チ甲乙共ニ偽ライフ確率ハ $\frac{1}{5} \times \frac{2}{7}$ ナル故ニ甲乙共ニ眞ナリトイフ場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ其事ノ信用ノ程度ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{7}} = \frac{10}{11}$$

次ニ原因 (1) ヨリ甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ証言ノ出ヅル確率即チ甲ハ眞トイヒ乙ハ偽トイフ確率ハ $\frac{4}{5} \times \frac{2}{7}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ証言ノ出ヅル確率ハ $\frac{1}{5} \times \frac{5}{7}$ ナル故ニ甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ其事ノ眞ナル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{7}} = \frac{8}{13}$$

59. 甲ガ眞トイフ確率 $\frac{7}{10}$, 乙ガ眞トイフ確率 $\frac{9}{10}$ ナリトシ 3 白, 7 黒ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取り出シタルニ甲乙共ニ白ナリトイフ, 實際ソレガ白ナル確率如何。

[解] 甲乙共ニ白ナリト証言スルコトノ原因ハ (1) 實際白ナルコト, (2) 實際ハ白ナラズシテ黒ナルコトノ二ツナリ, 然ルニ 3 白, 7 黒ナル故ニ原因 (1), (2) ノ事前確率ハソレソレ $\frac{3}{10}$ 及ビ $\frac{7}{10}$ 又原因 (1) ヨリ甲, 乙共ニ白ナリトノ証言ノ出ヅル確率即チ甲乙共ニ眞トイフ確率ハ $\frac{7}{10} \times \frac{9}{10}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ証言ノ出ヅル確率即チ甲乙共ニ偽トイフ確率ハ $\frac{3}{10} \times \frac{1}{10}$, 從ツテ基本定理 V ニヨリ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10}}{\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{10}} = \frac{9}{10}$$

ナリ。
60. 1, 2, 3, 4, 5 ナル番號ヲ付シタル 5 枚ノ札ヲ入レタル袋ヨリ 1 枚ヲ取り出シテ甲乙共ニ 1 ナリト証言ストイフ, 實際ソレガ 1 ナルコトノ確率如何, 但シ甲ノ眞トイフ確率 $\frac{4}{5}$, 乙ノ眞トイフ確率ハ $\frac{5}{7}$ トス。

[解] 甲乙共ニ 1 ナリト証言セシ原因ハ (1) 實際ソレガ 1 ナルコト, (2) 實際ハソレガ 1 ナラザルコトノ二ツナリ, 而シテ札ハ 5 枚ナル故ニ原因 (1) ノ事前確率ハ $\frac{1}{5}$, (2) ノ事前確率ハ $\frac{4}{5}$ ナリ, 又原因 (1) ヨリ所題ノ証言ノ出ヅル確率ハ即チ甲乙共ニ眞トイフ確率 $\frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$ ナルモ原因 (2) ヨリ同ジ証言ノ出ヅル確率ハ甲乙共ニ偽トイヒ而モ其偽リハ實際顯ハレタル番號以外ノ 4 種ノ中特ニ 1 ナリトイフガ故ニ甲, 乙各ガ斯ル証言ヲナス確率ハ夫々 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$ 及ビ $\frac{2}{7} \times \frac{1}{4}$ ニシテ從ツテ題意ノ如ク兩人トモ斯ル同ジ証言ヲナス確率ハ $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{4}$ ナリ, 即チ原因 (1), (2) ノ事前確率ハ $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ ニシテ又コレヨリ所題ノ証言ノ出ヅル確率ハ $\frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$, $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{4}$ ナリ, 依ツテ此場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ基本定理 V ヨリ

$$\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7}}{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{4}} = \frac{40}{41}$$

61. 事前確率 $\frac{1}{5^9+1}$ ナル或事件アリ, 眞トイフ確率 $\frac{5}{6}$ ナル人 10 人ガ一致シテ此事件ノ起レルコトヲ証言スルトキ眞ニ此事件ノ起レル確率如何。

[解] 10 人ガ一致シテ起レルコトヲ証言セシ原因ハ (1) 此事件ガ起レルコト, (2) 實際ハ此事件ガ起ラザルコトノ二ツナリ, 原因 (1) ノ事前確率ハ題意ニヨリ $\frac{1}{5^9+1}$ ニシテ從ツテ原因 (2) ノ事前確率ハ $1 - \frac{1}{5^9+1} = \frac{5^9}{5^9+1}$ ナリ, 又原因 (1) ヨリ 10 人ガ一致シテ此事件ノ起レルコトヲ証言スル確率即チ 10 人ガ一致シテ眞トイフ確率ハ題意ニヨリ $(\frac{5}{6})^{10}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ証言ノ出ヅル確率即チ 10 人ガ一致シテ偽トイフ確率ハ $(\frac{1}{6})^{10}$ ナリ, 依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{5^9+1} \times (\frac{5}{6})^{10}}{\frac{1}{5^9+1} \times (\frac{5}{6})^{10} + \frac{5^9}{5^9+1} \times (\frac{1}{6})^{10}} = \frac{5^{10}}{5^{10}+5^9} = \frac{5^{10}}{5^9(5+1)} = \frac{5}{6}$$

62. 銀貨ノ表面ヲ投ゲ出サレタリト甲ガ言ヒシト乙ガ言ヒシト丙ガ言ヒシト丁ガ言フトキ實際表面ノ出デシ確率ハ

$$\frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

ナルコトヲ証セヨ、但シ各人ノ眞ライフ確率ヲ $\frac{a}{a+b}$ トス。

〔解〕 原因ハ (1) 實際表面ガ投ゲ出サレタルコト、(2) 實際ハ裏面ガ投ゲ出サレタルコトノ二ツニシテ各ノ事前確率ハ $\frac{1}{2}$ 、又原因 (1) ヨリ所題ノ如キ証言ノ出ズル場合ヲ考フルニ甲乙丙丁皆眞ヲ言ヒシガタメカ或ハ内二人ガ偽ヲイヒ殘ル二人ガ眞ヲイヒシガタメカ、或ハ四人皆偽ヲイヒシガタメカノ三ツノ場合アリ、而シテ此等三ツノ場合ノ確率ハ夫々 $\left(\frac{a}{a+b}\right)^4$ 、 ${}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$ 、 $\left(\frac{b}{a+b}\right)^4$ ナル故ニ原因 (1) ヨリ所題ノ証言ノ出ズル確率ハ

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + {}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4$$

同様ニ原因 (2) ヨリ所題ノ証言ノ出ズル確率ハ

$${}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\left(\frac{b}{a+b}\right) + {}_4C_3\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^3$$

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + {}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\left(\frac{b}{a+b}\right) + {}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 + {}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^4\right\}} = \frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

63. 信用ノ確率 p ナル人ガ生起ノ事前確率 q ナル或事柄ノ生起シタルコトヲ証言スルトキ其事柄ノ生起シタル事後確率 Q ヲ求メ、之ヲ事前確率 q ト比較セヨ。

〔解〕 此証言ノ生セシ原因ハ (1) 此事柄ノ生起シタルコト、(2) 此事柄ノ生起セザルコトノ二ツニシテ (1) ノ事前確率ハ q 、(2) ノ事前確率 $1-q$ 、又証人ノ信用ノ確率 p ナル故ニ原因 (1) ヨリ所題ノ証言ノ生ズル確率 p 、原因 (2) ヨリ所題ノ証言ノ生ズル確率 $1-p$ 、

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率 Q ハ基本定理 $V_1 = \text{ヨリ}$

$$Q = \frac{qp}{qp + (1-q)(1-p)}$$

今 q ト Q トヲ比較スルニ

$$Q - q = \frac{qp - q^2p - q(1-q)(1-p)}{qp + (1-q)(1-p)} = \frac{q(1-q)(2p-1)}{qp + (1-q)(1-p)}$$

$p, q, 1-q, 1-p$ ハ皆正ナル故ニ $p \geq \frac{1}{2}$ ナルニ從ツテ $Q \geq q$ ナルヲ知ル、即チ証人ノ信用ノ確率が $\frac{1}{2}$ ヨリ大ナルカ等シキカ或ハ小ナルカニ從ツテ其証人ノ主張ノ正シキコトノ確率ハ其事自身ノ固有ノ確率ヨリ大トナリ或ハ等シクナリ或ハ却ツテ小トナル。

64. 信用ノ確率 $\frac{1}{2}$ 以上ノ証人ニアラザレバ証人ノ數ヲ増スモ其事ノ眞ナル確率ハ増加セザルコトヲ証セヨ。

〔解〕 n 人ノ信用ノ確率ヲソレゾレ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ トシ生起ノ事前確率 q ナル事柄ノ生起セルコトヲ此 n 人ガ一齊ニ証言スルトキノ此事柄ノ實際生起シタル確率ヲ Q_n トスレバ

$$Q_n = \frac{p_1 p_2 \dots p_n q}{p_1 p_2 \dots p_n q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_n)(1-q)}$$

同様ニ $n+1$ 人ガ証言スルトキノ此事柄ノ生起セル確率ヲ Q_{n+1} トスレバ

$$Q_{n+1} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} q}{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_{n+1})(1-q)}$$

故ニ $Q_{n+1} > Q_n$ ナルタメニハ

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} q}{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_{n+1})(1-q)}$$

$$> \frac{p_1 p_2 \dots p_n q}{p_1 p_2 \dots p_n q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_n)(1-q)}$$

$$\therefore p_{n+1} \{p_1 p_2 \dots p_n q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_n)(1-q)\}$$

$$> p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1} q + (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_{n+1})(1-q)$$

$$\therefore p_{n+1} > 1 - p_{n+1} \quad \therefore p_{n+1} > \frac{1}{2}$$

即チ第 $n+1$ 人ノ信用ノ確率 P_{n+1} ガ $\frac{1}{2}$ コリ大ナラザレバ $n+1$ 人ガ証言シタルトキノ其事柄ノ生起ノ確率 Q_{n+1} ハ n 人ガ証言シタルトキノ確率 Q_n コリ大ナラズ。

65. 生起ノ事前確率 $\frac{1}{2}$ ナル或事柄ニ關シテ信用ノ確率大ナル人ノ主張ノ正シキ確率ハ信用ノ確率小ナル人ノ主張ノ正シキ確率ヨリ大ニシテ其差ハ兩人ノ信用ノ確率ノ差ヨリ大ナルコトヲ証セヨ。

[解] 甲ノ信用ノ確率ヲ p , 乙ノ信用ノ確率ヲ q トシ甲ハ生起ノ事前確率 $\frac{1}{2}$ ナル或事柄ノ生起ヲ主張シ乙ハ其不生起ヲ主張スルモノトセン, 甲ノ主張ノ正シキ確率即チ其事柄ノ實際生起セル確率ヲ P , 乙ノ主張ノ正シキ確率即チ其事柄ノ實際生起セザル確率ヲ Q トスレバ

$$P = \frac{\frac{1}{2}p(1-q)}{\frac{1}{2}p(1-q) + \frac{1}{2}(1-p)q} = \frac{p(1-q)}{p(1-q) + (1-p)q}$$

$$Q = \frac{\frac{1}{2}(1-p)q}{\frac{1}{2}p(1-q) + \frac{1}{2}(1-p)q} = \frac{(1-p)q}{p(1-q) + (1-p)q}$$

$$\therefore P - Q = \frac{p(1-q) - (1-p)q}{p(1-q) + (1-p)q} = \frac{p-q}{p(1-q) + (1-p)q}$$

$\therefore p > q$ ナラバ $P > Q$ ナリ

$$\begin{aligned} \text{又 } P - Q - (p - q) &= \frac{(p-q)\{1-p(1-q) - (1-p)q\}}{p(1-q) + (1-p)q} \\ &= \frac{(p-q)\{(1-p) - q(1-2p)\}}{p(1-q) + (1-p)q} \end{aligned}$$

然ルニ $p - q > 0, 1 - p > q(1 - 2p)$

$\therefore P - Q > p - q,$

即チ兩人ノ主張ノ正シキコトノ確率ノ差ハ兩人ノ信用ノ確率ノ差ヨリ大ナリ。

66. 甲ハ a 個, 乙ハ b 個ノ碁石ヲ有ス或試合ヲナシテ負ケタルモノハ勝チタルモノニ 1 個ノ碁石ヲ與ヘ一人ガ他ノ碁石ヲ 取り盡ストキ全体ノ勝ヲ得タルモ

ノトス, 毎回ノ試合ニ於テ甲ノ勝ツ確率ヲ p , 乙ノ勝ツ確率ヲ $q = 1 - p$ トスルトキ甲乙ノ全勝スル確率如何。

[解] 試合ノ途中ニ於テ甲ガ n 個ノ碁石ヲ持チタルトキ甲ノ全勝スベキ確率ヲ u_n トスレバ甲ガ次ニ勝ツ確率ハ p ニシテ然ルトキハ碁石ハ $n+1$ 個トナル故ニ次ニ全勝スル確率ハ u_{n+1} , 然ルニ甲ガ次ニ負ケル確率ハ q ニシテ然ルトキハ碁石ハ $n-1$ 個トナル故ニ次ニ全勝スル確率ハ u_{n-1} ナリ, 故ニ

$$u_n = p u_{n+1} + q u_{n-1}$$

$$\text{即チ } p u_{n+1} - u_n + q u_{n-1} = 0$$

此關係ヨリ u_n ヲ求ムレバソレハ即チ所要ノ甲ノ全勝スル確率ニシテ u_0 ハ乙ノ全勝スル確率ナリ, 然ルニ今

$$\frac{A+Bx}{p-x+qx^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

トスレバ

$$\begin{aligned} A+Bx &= (p-x+qx^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots) \\ &= a_0p + (a_1p-a_0)x + (a_2p-a_1+a_0q)x^2 + (a_3p-a_2+a_1q)x^3 + \dots \\ &\quad + (a_np-a_{n-1}+a_{n-2}q)x^n + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore a_0p = A, \quad a_1p - a_0 = B, \quad a_2p - a_1 + a_0q = 0, \quad a_3p - a_2 + a_1q = 0$$

$$\dots \dots \dots a_np - a_{n-1} + a_{n-2}q = 0,$$

故ニ $u_n = a_n,$

然ルニ $p+q=1$ ナル故ニ

$$\begin{aligned} \frac{A+Bx}{p-x+qx^2} &= \frac{A+Bx}{(p-qx)(1-x)} = \frac{C}{p-qx} + \frac{D}{1-x} = \frac{C}{p} \left(1 - \frac{q}{p}x\right)^{-1} + D(1-x)^{-1} \\ &= \frac{C}{p} \left(1 + \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{p^2}x^2 + \dots\right) + D(1+x+x^2+\dots) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{C}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^n + D = u_n$$

然ルニ $u_0 = 0, u_{a+b} = 1$

$$\therefore \frac{C}{p} + D = 0, \quad \frac{C}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} + D = 1,$$

$$\therefore D = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \quad C = \frac{-p}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},$$

$$\therefore u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} - \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},$$

$$\therefore u_a = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

同様 =

$$u_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^b}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

第 八 章 複 素 數

基本定理 I. $a+bi=0$ ナルトキハ $a=0, b=0,$ II. $(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

III. $a+bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r\{\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)\},$ 但シ $r = \sqrt{a^2+b^2}, \tan \theta = \frac{b}{a}, k \text{ ハ } 0 \text{ 或ハ任意ノ整数}$.IV. $(a+bi)^n = r^n \{\cos n(\theta + 2k\pi) + i \sin n(\theta + 2k\pi)\}$ 但シ $n \text{ ハ任意ノ實數, } k \text{ ハ } 0 \text{ 或ハ正負ノ整数 (De Moivreノ定理)}.$

演習問題

1. $a+bi=c+di$ ナルトキハ $a=c, b=d$ ナルコトヲ証セヨ, 逆ニ $a=c, b=d$ ナルトキハ $a+bi=c+di$ ナルコトヲ証セヨ。〔解〕 實數ノ場合ト同シクニツノ複素數ガ相等シトハ 其二ツノ複素數ノ差ガ 0 ナルコトナリ, 故ニ $a+bi=c+di$ ナラヌ

$$(a+bi) - (c+di) = 0$$

故ニ基本定理 II ニヨリ

$$(a-c) + (b-d)i = 0$$

故ニ基本定理 I ニヨリ

$$a-c=0, \quad b-d=0$$

$$\therefore a=c, \quad b=d$$

逆ニ $a=c, b=d$ ナルトキハ $(a-c) + (b-d)i = (a+bi) - (c+di) = 0$

$$\therefore a+bi=c+di,$$

2. $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, z_3 = a_3 + b_3i$ トスルトキ

(1) $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + z_3 + z_2 = z_2 + z_1 + z_3 = \dots$

(2) $z_1 z_2 z_3 = z_1 z_3 z_2 = z_2 z_1 z_3 = \dots$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] 基本定理 II = ヨリ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + a_3 + b_3i = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i \\ &= (a_1 + a_3 + a_2) + (b_1 + b_3 + b_2)i = (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)i + a_2 + b_2i \\ &= a_1 + b_1i + a_3 + b_3i + a_2 + b_2i = z_1 + z_3 + z_2 \end{aligned}$$

同様 = $z_1 + z_2 + z_3 = z_2 + z_1 + z_3 = z_3 + z_1 + z_2 = z_3 + z_2 + z_1 = z_2 + z_3 + z_1$

又 $z_1 z_2 z_3 = \{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i\}(a_3 + b_3i)$
 $= \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)a_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)b_3\} + \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)a_3\}i$
 $= \{(a_1 a_3 - b_1 b_3)a_2 - (a_1 b_3 + a_3 b_1)b_2\} + \{(a_1 a_3 - b_1 b_3)b_2 + (a_1 b_3 + a_3 b_1)a_2\}i$
 $= \{(a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i\}(a_2 + b_2i) = z_1 z_3 z_2$

同様 = $z_1 z_2 z_3 = z_2 z_1 z_3 = z_3 z_1 z_2 = z_3 z_2 z_1 = z_2 z_3 z_1$

即チ複素數ニ就テモ交換ノ法則ハ成立ス。

3. 同上,

$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), z_1 z_2 z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

ヲ証セヨ。

[解] 基本定理 II = ヨリ

$z_1 + z_2 + z_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (a_3 + b_3i) = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i$

$z_1 + (z_2 + z_3) = a_1 + b_1i + (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i$

故 = 問題 1 = ヨリ

$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

次 = $z_1 z_2 z_3 = \{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i\}(a_3 + b_3i)$
 $= \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)a_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)b_3\} + \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)a_3\}i$
 $z_1(z_2 z_3) = (a_1 + b_1i)\{(a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)i\}$

$$\begin{aligned} &= \{(a_1(a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1(a_2 b_3 + a_3 b_2)) + (a_1(a_2 b_3 + a_3 b_2) + b_1(a_2 a_3 - b_2 b_3))\}i \\ &= \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)a_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)b_3\} + \{(a_1 a_2 - b_1 b_2)b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)a_3\}i \end{aligned}$$

故 = 問題 1 = ヨリ

$z_1 z_2 z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

即チ複素數ニ就テモ結合ノ法則ハ成立ス。

4. 同上,

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3, \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$

ヲ証セヨ。

[解] 基本定理 II = ヨリ

$(z_1 + z_2)z_3 = \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\}(a_3 + b_3i)$

$= \{(a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3\} + \{(a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\}i$

$z_1 z_3 + z_2 z_3 = (a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i + (a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)i$

$= (a_1 a_3 - b_1 b_3 + a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2)i$

$= \{(a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3\} + \{(a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\}i$

故 = 問題 1 = ヨリ

$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

次 = $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}{a_3 + b_3i} = \frac{(a_1 + a_2)a_3 + (b_1 + b_2)b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{(b_1 + b_2)a_3 - (a_1 + a_2)b_3}{a_3^2 + b_3^2}i$

$\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2}i + \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2}i$

$= \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3 + a_2 a_3 + b_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2}i$

$= \frac{(a_1 + a_2)a_3 + (b_1 + b_2)b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{(b_1 + b_2)a_3 - (a_1 + a_2)b_3}{a_3^2 + b_3^2}i$

故 = 問題 1 = ヨリ

$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}$

即チ複素數ニ就テモ分配ノ法則ハ成立ス。

5. 同上, 若シ $z_1 = z_2$ ナルトキハ $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$, $z_1 z_3 = z_2 z_3$, 及ビ $\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_3}$ ナルコト及ビ逆ニ $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$ 或ハ $z_1 z_3 = z_2 z_3$ 或ハ $\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_3}$ ナルトキハ $z_1 = z_2$ ナルコトヲ証セヨ, 但シ $z \neq 0$ トス。

[解] 基本定理 II = ヨリ

$$z_1 + z_3 = (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)i, \quad z_2 + z_3 = (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i$$

然ルニ $z_1 = z_2$ 故ニ問題 I = ヨリ $a_1 = a_2, b_1 = b_2$

$$\therefore a_1 + a_3 = a_2 + a_3, \quad b_1 + b_3 = b_2 + b_3$$

$$\therefore (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)i = (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i$$

$$\therefore z_1 + z_3 = z_2 + z_3$$

$$\text{次ニ } z_1 z_3 = (a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i,$$

$$z_2 z_3 = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)i$$

然ルニ $a_1 = a_2, b_1 = b_2 \therefore a_1 a_3 - b_1 b_3 = a_2 a_3 - b_2 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1 = a_2 b_3 + a_3 b_2$

$$\therefore (a_1 a_3 - b_1 b_3) + (a_1 b_3 + a_3 b_1)i = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + (a_2 b_3 + a_3 b_2)i$$

$$\therefore z_1 z_3 = z_2 z_3$$

$$\text{次ニ } \frac{z_1}{z_3} = \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2} i, \quad \frac{z_2}{z_3} = \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} i$$

然ルニ $a_1 = a_2, b_1 = b_2 \therefore a_1 a_3 + b_1 b_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3, b_1 a_3 - a_1 b_3 = b_2 a_3 - a_2 b_3$

$$\therefore \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{a_3^2 + b_3^2} i = \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} + \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{a_3^2 + b_3^2} i$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_3}$$

逆ニ $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$ ナラバ $(a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)i = (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i$

$$\therefore a_1 + a_3 = a_2 + a_3, \quad b_1 + b_3 = b_2 + b_3 \quad \therefore a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

$$\therefore a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \quad \therefore z_1 = z_2$$

次ニ $z_1 z_3 = z_2 z_3$ ナラバ $a_1 a_3 - b_1 b_3 = a_2 a_3 - b_2 b_3, a_1 b_3 + a_3 b_1 = a_2 b_3 + a_3 b_2$

$$\therefore a_3(a_1 - a_2) = b_3(b_1 - b_2), \quad b_3(a_1 - a_2) = a_3(b_2 - b_1)$$

$$\therefore a_3 b_3 (a_1 - a_2)^2 = -a_3 b_3 (b_1 - b_2)^2$$

然ルニ $a_3, b_3 \neq 0$ ナラザル故ニ $(a_1 - a_2)^2 = -(b_1 - b_2)^2$

$$z_1 = a_2, \quad b_1 = b_2 \quad \therefore z_1 = z_2$$

同様に $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_3}$ ナラバ $z_1 = z_2$ ナ証明スルコトヲ得。

6. $(i)^n$ ヲ求メヨ, 但シ n ヲ正ノ整数トス。

[解] $(i)^1 = i, (i)^2 = -1, (i)^3 = -i, (i)^4 = 1$ ナル故ニ m ヲ正ノ整数トシ

$$n = 4m \quad \text{ナラバ} \quad (i)^n = ((i)^4)^m = 1$$

$$n = 4m + 1 \quad \text{ナラバ} \quad (i)^n = (i)^{4m} (i) = i$$

$$n = 4m + 2 \quad \text{ナラバ} \quad (i)^n = (i)^{4m} (i)^2 = -1$$

$$n = 4m + 3 \quad \text{ナラバ} \quad (i)^n = (i)^{4m} (i)^3 = -i$$

7. $\frac{(1+i)^3 - (1-i)^3}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$ ヲ簡單ニセヨ。

[解] 基本定理 I, II, 及ビ問題 1-5 = ヨリ複素数モ實際ト同様ニ計算シ得ルガ故ニ

所題ノ分數ノ分母, 分子ヲ因數ニ分解シテ簡單ニスレバ

$$\frac{\{(1+i) - (1-i)\} \{(1+i)^2 + (1+i)(1-i) + (1-i)^2\}}{\{(1+i) - (1-i)\} \{(1+i) + (1-i)\}} \\ = \frac{(1+i)^2 + (1+i)(1-i) + (1-i)^2}{(1+i) + (1-i)} = \frac{1+2i-1+1+1-2i-1}{2} \\ = \frac{2}{2} = 1$$

8. $7+24i$ ノ平方根ヲ求ム。

[解] x, y ヲ實數トシ所要ノ平方根ヲ $x+yi$ トスレバ

$$\pm \sqrt{7+24i} = x+yi \quad \therefore 7+24i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 7, \quad xy = 12, \quad \therefore (x^2 + y^2)^2 = 7^2 + 4(12)^2 = (25)^2$$

然ルニ x, y ハ實數ナル故ニ $x^2 + y^2 = 25$

$$\therefore x^2 = 16, \quad y^2 = 9,$$

然ルニ又 $xy = 12$ ヨリ x, y ハ同符號ナルヲ要ス, 故ニ

$$\left. \begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix} \right) \quad \text{或ハ} \quad \left. \begin{matrix} x=-4 \\ y=-3 \end{matrix} \right)$$

依ツテ所要ノ平方根ハ $4+3i$ 或ハ $-4-3i$,

9. i の立方根ヲ求メヨ。

【解】 x, y ヲ實數トシ所要ノ立方根ヲ $x+yi$ トスレバ

$$i = (x+yi)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$$

$$\therefore x^3 - 3xy^2 = 0, \quad (1) \quad 3x^2y - y^3 = 1, \quad (2)$$

(1) ヨリ $x=0$ 又 $x^2 - 3y^2 = 0$

$x=0$ ナラバ (2) ヨリ $y^3 = -1, y$ ハ實數ナル故ニ $y = -1,$

$x^2 - 3y^2 = 0$ ナラバ (2) ヨリ $8y^3 = 1, y$ ハ實數ナル故ニ $y = \frac{1}{2}$

從ツテ $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$ 即チ x, y ノ價ハ次ノ三組アリ

$$(0, -1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

依ツテ所要ノ立方根ハ

$$-i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

10. 1 の 5 乗根ヲ求メヨ。

【解】 1 の 5 乗根ヲ x トスレバ

$$x^5 = 1 \quad \therefore (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{又ハ} \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$x \neq 0$ ナラザル故ニ第二式ヲ x^2 ニテワレバ

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \text{トオケバ} \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2\right) \text{ ナル故}$$

$$\therefore y^2 - 2 + y + 1 = 0 \quad \therefore y^2 + y - 1 = 0 \quad \therefore y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{トスレバ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow y$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{トスレバ} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow y$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

即チ所要ノ 5 乗根ハ

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i,$$

11. 次ノ諸數ヲ $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ナル形ニテ表ハセ,

$$a, \quad bi, \quad a+bi$$

但シ a, b ヲ實數トス。

【解】 前ノ表示法ニヨリ r ハ其數ノ絶對値ニシテ θ ハ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ニヨリテ定メ

ラルル故ニ $b=0$ ナルトキハ $r=|a|, \tan \theta = 0,$ 故ニ $a > 0$ ナラバ $\theta = 2n\pi$

$a < 0$ ナラバ $\theta = (2n+1)\pi,$

$$\therefore a = a(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) \quad a > 0,$$

$$\text{又ハ} \quad a = -a(\cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi) \quad a < 0,$$

$$a=0 \quad \text{ナルトキハ} \quad r=|b|, \quad \tan \theta = \infty$$

$$\text{故ニ} \quad b > 0 \quad \text{ナラバ} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad b < 0 \quad \text{ナラバ} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

$$\therefore bi = b \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right\} \quad b > 0$$

$$\text{又ハ} \quad bi = -b \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \right\} \quad b < 0$$

$a \neq 0, b \neq 0$ ナルトキハ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ニシテ θ ハ $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ニヨリ一般ニ三角

函數表ト a, b ノ符號トニヨリ最小正角 α ヲ定ム, 然ルトキハ $\theta = \alpha + 2n\pi,$

$$\therefore a+bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \cos(\alpha + 2n\pi) + i \sin(\alpha + 2n\pi) \right\},$$

12. $(\sqrt{3} + i)^4$ ヲ求メヨ。

【解】 $\sqrt{3} + i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ トスレバ

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

$$\therefore \sqrt{3} + i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \right\}$$

故ニ基本定理 IV ニヨリ

$$(\sqrt{3}+i)^4 = 2^4 \left\{ \cos 4\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) + i \sin 4\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) \right\}$$

$$= 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -8 + 8\sqrt{3}i$$

或ハ二項定理ニヨリ

$$(\sqrt{3}+i)^4 = (\sqrt{3})^4 + 4(\sqrt{3})^3 i + 6(\sqrt{3})^2 (i)^2 + 4\sqrt{3} (i)^3 + (i)^4$$

$$= 9 + 12\sqrt{3}i - 18 - 4\sqrt{3}i + 1$$

$$= -8 + 8\sqrt{3}i,$$

13. $1+\sqrt{3}i$ ノ 5 乗根ヲ求メヨ。

〔解〕 前問ト同様ニ

$$1+\sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) \right\},$$

故ニ基本定理 IV ニヨリ

$$(1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \left\{ \cos \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) + i \sin \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right) \right\},$$

$$= \sqrt[5]{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5}\right) \right\},$$

故ニ所要ノ 5 乗根ハ次ノ五ツナリ,

$$n=0 \text{ トシテ } \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$$

$$n=1 \text{ トシテ } \sqrt[5]{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}\right) \right\}$$

$$n=2 \text{ トシテ } \sqrt[5]{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{5}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{5}\right) \right\}$$

$$n=3 \text{ トシテ } \sqrt[5]{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{6\pi}{5}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{6\pi}{5}\right) \right\}$$

$$n=4 \text{ トシテ } \sqrt[5]{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{15} + \frac{8\pi}{5}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{15} + \frac{8\pi}{5}\right) \right\},$$

但シ n ナ 5 以上トスルモ 0 乃至 4 ノ場合ノ値ヲ繰リ返スニ過ギザルコト明カ
ナリ、而シテコレ等ノ値ノ近似値ハ一般ニ三角函數表ニヨリテ求ムルヲ得ベシ。

14. i ノ 4 乗根ヲ求メヨ。

〔解〕 $i = \cos \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right).$

$$\therefore i^{\frac{1}{4}} = \cos \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) + i \sin \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

然ルニ $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ナル故ニ所要ノ 4 乗根

ハ次ノ 4 ツナリ,

$$n=0, \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i$$

$$n=1, \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i$$

$$n=2, \cos \left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i$$

$$n=3, \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i$$

15. 1 ノ 6 乗根及ビ -1 ノ 6 乗根ヲ求メヨ。

〔解〕 $1 = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi), \quad -1 = \cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi$

$$\therefore 1^{\frac{1}{6}} = \cos \frac{2n\pi}{6} + i \sin \frac{2n\pi}{6} = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3},$$

$$(-1)^{\frac{1}{6}} = \cos \frac{2n+1}{6} \pi + i \sin \frac{2n+1}{6} \pi$$

然ルニ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ナル故ニ所要ノ 6 乗根ハ次ノ如シ

1 ノ 6 乗根

-1 ノ 6 乗根

$$n=0, \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$n=1, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$n=2, \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$n=3, \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$(a+bi)^n = r^n \left\{ \cos n(\theta+2k\pi) + i \sin n(\theta+2k\pi) \right\}$$

$$n=4, \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$n=5, \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

16. a を任意ノ實數トスルトキ a ノ 6 乗根ヲ求メヨ。

[解] $a = a(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) \quad a > 0,$

又ハ $a = -a\{\cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi\} \quad a < 0$

$$\therefore a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{2n\pi}{6} + i \sin \frac{2n\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{a} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \quad a > 0$$

$$\text{又ハ} \quad = (-a)^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{2n+1}{6}\pi + i \sin \frac{2n+1}{6}\pi \right) \quad a < 0$$

依ツテ前問ニヨリ所要ノ 6 乗根ハ次ノ如シ

$a > 0$ ナル場合

$a < 0$ ナル場合

$$\sqrt[6]{a}$$

$$\sqrt[6]{-a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sqrt[6]{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\sqrt[6]{-a} i$$

$$\sqrt[6]{a} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\sqrt[6]{-a} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$-\sqrt[6]{a}$$

$$\sqrt[6]{-a} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sqrt[6]{a} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$-\sqrt[6]{-a} i$$

$$\sqrt[6]{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\sqrt[6]{-a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

一般ニ任意ノ實數ノ n 乗根ハ $|a|$ ノ n 乗根ノ實數値ニ 1 或ハ -1 ノ n 乗根ヲ乘シタルモノニ等シ。

17. 複素數 $a+bi$ ノ n 乗根モ實數ト同様ニ其 n 乗根ノーツニ 1 ノ n 乗根ノ總テヲ乘シタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

[解] $a+bi = r(\cos(\theta+2k\pi) + i \sin(\theta+2k\pi)), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}, \quad k \text{ ハ } 0$

又ハ任意ノ整數, トオケバ $a+bi$ ノ n 乗根ノ總テハ次ノ如シ

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right)$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \quad (\text{基本定理 IV})$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots, (n-1),$$

然ルニ $r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$ ハ $a+bi$ ノ n 乗根ノーツニシテ

$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ ハ 1 ノ n 乗根ノ總テナリ, 故ニ複素數ノ n 乗根モ實數ト同様ニ其ノーツノ n 乗根ニ 1 ノ n 乗根ノ總テヲ乘シタルモノニ等シ。

18. 1 ノ n 乗根ノ虚數ノーツヲ ω トスレバ n 乗根ノ總テハ

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}$$

ニ由ツテ表ハサレ, 且ツ

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

ナルコトヲ証セヨ。但シ n ヲ素數トス。

[解] $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 中ノ任意ノーツヲ m トスレバ

$$(\omega^m)^n = \omega^{mn} = (\omega^n)^m = 1^m = 1,$$

故ニ ω^m ハ 1 ノ n 乗根ナリ, 従ツテ $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ ハ皆 1 ノ n 乗根ナリ, 而シテ何レノ二ツモ相等シカラズ, 何ントナレバ n ハ素數ニシテ, ω ハ

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \text{ニ於テ } k \text{ ヲ } 1, 2, \dots, n-1 \text{ ノ何レカトシタルモノナル}$$

$$\text{故ニ} \quad \omega^p = \cos \frac{2pk\pi}{n} + i \sin \frac{2pk\pi}{n}, \quad \omega^q = \cos \frac{2qk\pi}{n} + i \sin \frac{2qk\pi}{n},$$

$$p, q \text{ 及ビ } k \text{ ハ共ニ } n-1 \text{ 以下ナル故ニ} \quad \frac{2pk\pi}{n} \text{ ト } \frac{2qk\pi}{n} \text{ トノ差ハ } 2\pi$$

トナリ得ザレバナリ, 依ツテ $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ ハ 1 ノ n 乗根ノ n 個ノ總テナリ, 次ニ ω ハ 1 ノ n 乗根ナル故ニ

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{即チ} \quad (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0$$

ノ根ナリ, 而シテ ω ハ虚數ナル故ニ 1 ニ等シカラズ, 故ニ ω ハ

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$$

ノ根ナリ、故ニ

$$\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1 = 0$$

即チ $\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + \omega^0 = 0$,

19. 1ノn乗根ヲ $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ トスレバ

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\dots(1-\omega^{n-1}) = n$$

ナルコトヲ証セヨ。但シnヲ素数トス。

[解] $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ ハ1ノn乗根ノ總テナル故ニ方程式

$$x^n - 1 = 0$$

ノ根ノ總テナリ、故ニ次ノ恒等式ヲ得

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\dots(x-\omega^{n-1}),$$

兩邊テ $x-1$ ニテ割レバ

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x-\omega)(x-\omega^2)\dots(x-\omega^{n-1}),$$

$x=1$ トオケバ

$$n = (1-\omega)(1-\omega^2)\dots(1-\omega^{n-1}),$$

20. 1ノ7乗根ノ虚数ノーツヲ x トシ $\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6}$ ノ値ヲ計算セヨ。

[解] $x^7=1 \therefore \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^5}{1+x^3} + \frac{1}{1+x}$

又 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ (前問),

$$\therefore (1+x)(1+x^2+x^4)+x^6=0 \quad \therefore \frac{x^4}{1+x} = -\frac{1+x^2+x^4}{x^2}$$

$$(1+x^2)(1+x+x^4)+x^5=0 \quad \therefore \frac{x}{1+x^2} = -\frac{1+x+x^4}{x^4}$$

$$(1+x^3)(1+x+x^2)+x^6=0 \quad \therefore \frac{x^6}{1+x^3} = -\frac{1+x+x^2}{x}$$

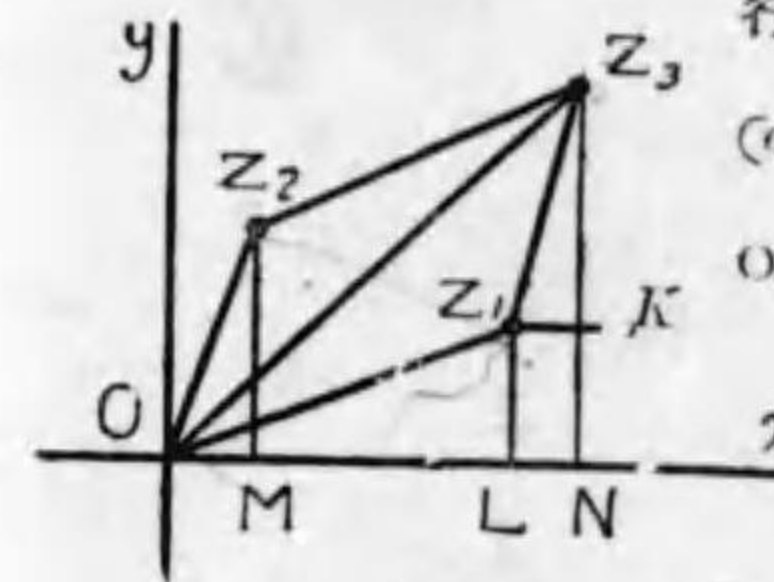
$$\begin{aligned} \therefore \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} &= -\frac{1+x^2+x^4}{x^2} - \frac{1+x+x^4}{x^4} - \frac{1+x+x^2}{x} \\ &= -x^5(1+x^2+x^4) - x^3(1+x+x^4) - x^6(1+x+x^2) \\ &= -(x^5+x^7+x^9+x^3+x^4+x^7+x^6+x^7+x^8) \end{aligned}$$

$$= -(x^5+1+x^2+x^3+x^4+1+x^6+1+x)$$

$$= -(2+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) = -2,$$

21. ニツノ複素數ヲ表ハス点ト原点トヲ三ツノ頂点トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ハ其ニツノ複素數ノ和又ハ差ヲ表ハスコトヲ証セヨ。

[解] z_1, z_2 ナニツノ複素數 a_1+b_1i, a_2+b_2i ナ表ハス点トシ Oz_1, Oz_2 ナ二邊トスル平



行四邊形ノ第四ノ頂点ヲ z_3 トスレバ z_3 ハニツノ複素數ノ和

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ ナ表ハスベシ、何シトナレバ z_1, z_2, z_3 ヨリ

Ox = 下ス垂線ノ足ヲ L, M, N , トシ z_1 ヨリ z_3N = 下ス垂線ノ

足ヲ K トスレバ

$$ON = OL + z_1K = a_1 + OM = a_1 + a_2,$$

$$Nz_3 = Lz_1 + Kz_2 = b_1 + Mz_2 = b_1 + b_2$$

ナレバナリ、

次ニ Oz_1, z_1z_2 ナ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ヲ z_4 トスレバ z_4 ハ z_2, z_1 ノ

表ハス複素數 a_2+b_2i ト a_1+b_1i トノ差 $(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i$ ナ表ハスベシ、何シ

トナレバ此平行四邊形ノ O ナ過ル對角線ハ Cz_2 ナル故ニ上ト同様ニ z_2 ノ表ハス

複素數ハ z_1, z_3 ノ表ハス複素數ノ和ニ等シケレバナリ、同様ニ Oz_2, z_2z_1 ナ二邊ト

スル平行四邊形ノ第四ノ頂点ハ z_1, z_2 ノ表ハス複素數ノ差即チ $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

ヲ表ハス。

22. ニツノ複素數ヲ表ハス点 z_1, z_2 ガ與ヘラレタルトキ其ニツノ複素數ノ積及ビ商ヲ表ハス点ヲ作圖セヨ。

[解] z_1, z_2 ノ表ハス複素數ヲ

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

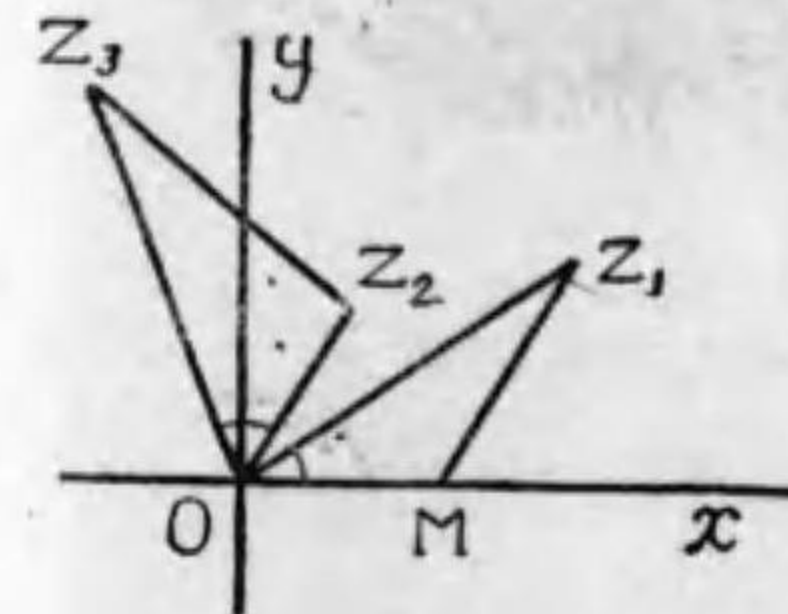
トシ其積ヲ表ハス点ヲ z_3 トスレバ基本定理 IV ニヨリ z_3

ノ表ハス複素數ハ

$$\frac{r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}}{r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}}$$

$$\therefore Oz_3 = r_1, \quad Oz_4 = r_2, \quad Oz_5 = r_1 r_2 = Oz_1 \cdot Oz_2,$$

故ニ今 Ox 上ニ $OM=1$ ナトレバ



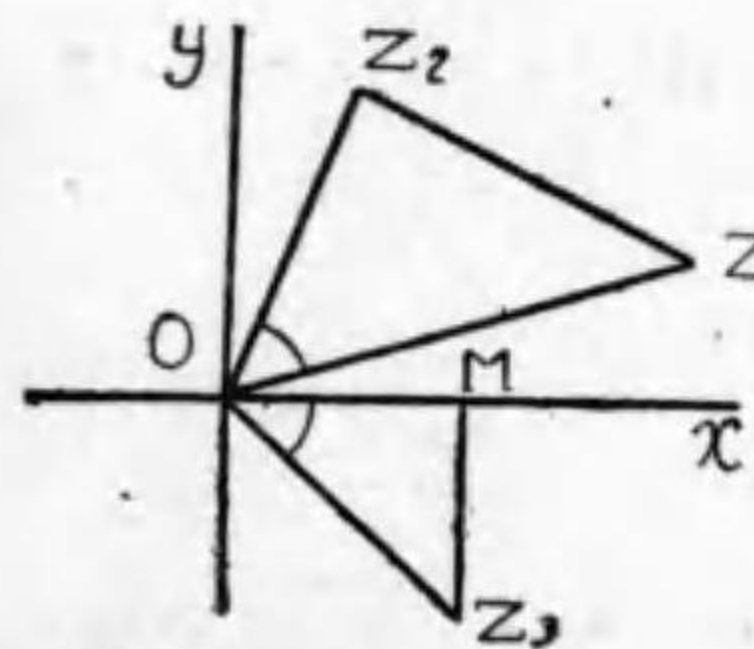
$$OM : Oz_1 = Oz_2 : Oz_3$$

$$\text{又 } \angle xOz_1 = \theta_1, \angle xOz_2 = \theta_2, \angle xOz_3 = \theta_1 + \theta_2 = \angle xOz_1 + \angle xOz_2$$

$$\therefore \angle xOz_3 - \angle xOz_2 = \angle xOz_1$$

$$\therefore \angle z_2Oz_3 = \angle MOz_1 \quad \therefore \triangle OMz_1 \sim \triangle Oz_2z_3$$

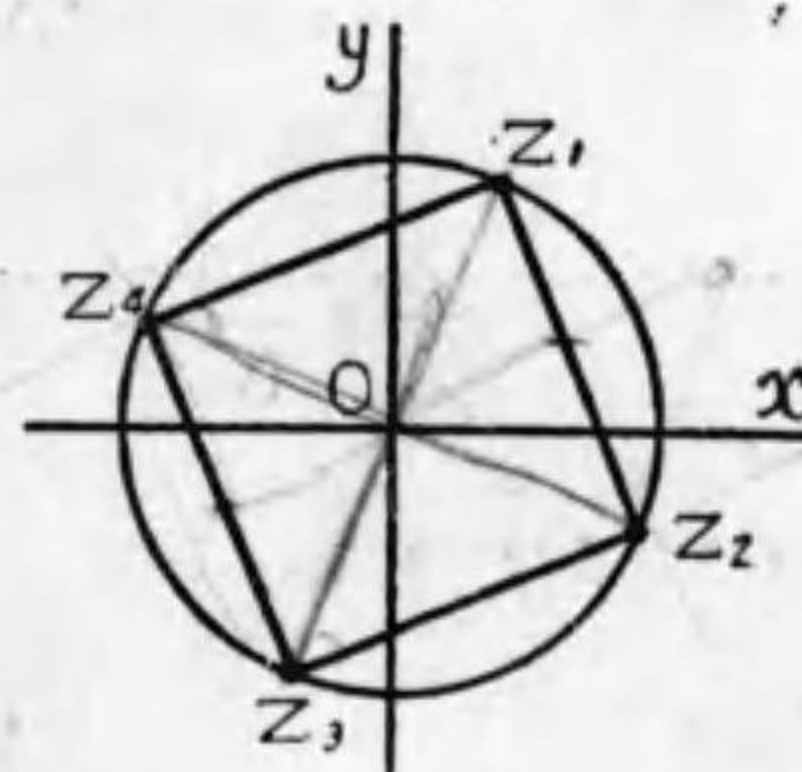
故 = OM 上ノ三角形 OMz_1 = 相似ナル三角形 Oz_2z_3 ヲ Oz_2 ノ上 = 同シ向キニ作
レバ其第三頂点 z_3 ハ所要ノ積ヲ表ハス点ナリ、



次ニ z_1 ノ表ハス複素数ヲ z_2 ノ表ハス複素数ニテ割リタル商
ヲ表ハス点ヲ z_3 トスレバ z_1 ノ表ハス複素数ハ z_2, z_3 ノ表ハス
複素数ノ積ニ等シ、依ツテ上ト同様ニ次ノ作圖法ヲ得、即チ Oz_2
ノ上ノ三角形 Oz_2z_1 ト相似ナル三角 OMz_3 ヲ OM ノ上 = 同シ
向キニ作レバ其第三ノ頂点 z_3 ハ z_1 ノ表ハス複素数ヲ z_2 ノ
表ハス複素数ニテ割リタル商ヲ表ハス。

23. 四邊形 $z_1 z_2 z_3 z_4$ ノ各頂点ノ表ハス四ツノ複素数ノ和ガ O ニシテ且ツ
各ノ絶対値ガ皆 1 ニ等シキトキハ此四邊形ハ矩形ナルコトヲ証セヨ。

[解] 各頂点ノ記號 z_1, z_2, z_3, z_4 ヲ以テ複素数ツノモノヲ表ハスコト、セン



$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ ナル故 = 四ツノ頂点ハ原
点ヲ中心トシ 1 ヲ半径トスル圓周ニアリ、

$$\text{又 } z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \quad \therefore \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_3 + z_4}{2} = 0$$

然ルニ問 21 = ヨリ $\frac{z_1 + z_2}{2}$ 及ビ $\frac{z_3 + z_4}{2}$ ハ夫々 $z_1 z_2$

及ビ $z_3 z_4$ ノ中点トナルコト明カニシテ其和ガ 0 ナル
コトハ此二ツノ中点ガ何レモ原点ナルカ然ラザレバ原

点ニ關シテ對稱ナルコトヲ示ス、共ニ原点ナル場合ニハ對角線 $z_1 z_3, z_2 z_4$ ガ圓ノ直
徑トナル故ニ $z_1 z_2 z_3 z_4$ ハ矩形ナリ、原点ニ關シテ對稱ナル場合ニハ相對スル二邊
 $z_1 z_2, z_3 z_4$ ガ平行ニシテ且ツ相等シキコトヲ容易ニ証明シ得ル故ニ $z_1 z_2 z_3 z_4$ ハ矢
張り矩形ナルヲ知ル。

24. $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_1' - z_2'}{z_3' - z_2'}$ ナルトキハ三ツノ複素數 z_1, z_2, z_3 ヲ表ハス点 $z_1, z_2,$
 z_3 ノ頂点トスル三角形ハ他ノ三ツノ複素數 z_1', z_2', z_3' ヲ表ハス点 z_1', z_2', z_3'
ヲ頂点トスル三角形ニ相似ナルコトヲ証セヨ。

[解] 今線分 $\vec{z_1 z_2}, \vec{z_2 z_3}, \vec{z_3 z_1}$ ガ Ox トナス角ヲ夫々 $\theta_{21}, \theta_{23}, \theta_{31}$ ト
シ各ノ長サヲ r_{21}, r_{23}, r_{31} トスレバ問 21 = ヨリ

$$z_1 - z_2 = r_{21} (\cos \theta_{21} + i \sin \theta_{21}), \quad z_3 - z_2 = r_{23} (\cos \theta_{23} + i \sin \theta_{23})$$

$$z_1' - z_2' = r_{21}' (\cos \theta_{21}' + i \sin \theta_{21}'), \quad z_3' - z_2' = r_{23}' (\cos \theta_{23}' + i \sin \theta_{23}')$$

ナルコト明カナリ、

$$\therefore \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{r_{21}' (\cos \theta_{21}' + i \sin \theta_{21}')}{r_{23}' (\cos \theta_{23}' + i \sin \theta_{23}')} = \frac{r_{21}}{r_{23}} (\cos \theta_{21} + i \sin \theta_{21}) (\cos \theta_{23} + i \sin \theta_{23})^{-1}$$

$$= \frac{r_{21}}{r_{23}} (\cos \theta_{21} + i \sin \theta_{21}) \{ \cos(-\theta_{23}) + i \sin(-\theta_{23}) \}$$

$$= \frac{r_{21}}{r_{23}} \{ \cos(\theta_{21} - \theta_{23}) + i \sin(\theta_{21} - \theta_{23}) \}$$

同様ニ $\frac{z_1' - z_2'}{z_3' - z_2'} = \frac{r_{21}'}{r_{23}'} \{ \cos(\theta_{21}' - \theta_{23}') + i \sin(\theta_{21}' - \theta_{23}') \}$

然ルニ $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_1' - z_2'}{z_3' - z_2'}$ $\therefore \left| \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \right| = \left| \frac{z_1' - z_2'}{z_3' - z_2'} \right| \quad \therefore \frac{r_{21}}{r_{23}} = \frac{r_{21}'}{r_{23}'}$

$\therefore \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} = \frac{z_1' z_2'}{z_2' z_3'}$

從ツテ $\theta_{21} - \theta_{23} = \theta_{21}' - \theta_{23}'$ $\therefore \angle z_1 z_2 z_3 = \angle z_1' z_2' z_3'$

故ニ $\triangle z_1 z_2 z_3$ ト $\triangle z_1' z_2' z_3'$ トハ互ニ相似形ナリ。

25. $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ ト $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ トノ比ノ値ガ實數ナルトキハ四ツノ複數 z_1, z_2, z_3, z_4
ヲ表ハス四点 z_1, z_2, z_3, z_4 ハ同一圓周ニアルコトヲ証セヨ。

[解] 前問ノ如ク $\vec{z_1 z_3}, \vec{z_2 z_3}, \vec{z_1 z_4}, \vec{z_2 z_4}$ ガ Ox トナス角ヲ $\theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{14}, \theta_{24}$ トシ各
ノ長サヲ $r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}$ トスレバ前問ト同様ニ

$$z_3 - z_1 = r_{13} (\cos \theta_{13} + i \sin \theta_{13}), \quad z_3 - z_2 = r_{23} (\cos \theta_{23} + i \sin \theta_{23})$$

$$z_4 - z_1 = r_{14} (\cos \theta_{14} + i \sin \theta_{14}), \quad z_4 - z_2 = r_{24} (\cos \theta_{24} + i \sin \theta_{24})$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} &= \frac{r_{13}}{r_{23}} \{ \cos(\theta_{13} - \theta_{23}) + i \sin(\theta_{13} - \theta_{23}) \}, \\ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} &= \frac{r_{14}}{r_{24}} \{ \cos(\theta_{14} - \theta_{24}) + i \sin(\theta_{14} - \theta_{24}) \}, \\ \therefore \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} &= \frac{r_{13} r_{24}}{r_{23} r_{14}} \{ \cos(\theta_{13} - \theta_{23} - \theta_{14} + \theta_{24}) + i \sin(\theta_{13} - \theta_{23} - \theta_{14} + \theta_{24}) \}. \end{aligned}$$

故 = 此比ノ値ガ實數ナルトキハ

$$\sin(\theta_{13} - \theta_{23} - \theta_{14} + \theta_{24}) = 0 \quad \therefore \theta_{13} - \theta_{23} - \theta_{14} + \theta_{24} = 0 \text{ 又ハ } \pi$$

即チ $(\theta_{13} - \theta_{23}) - (\theta_{14} - \theta_{24}) = 0$ 又ハ π

$$\therefore \angle z_1 z_3 z_2 - \angle z_1 z_4 z_2 = 0 \text{ 又ハ } \pi$$

$$\therefore \angle z_1 z_3 z_2 = \angle z_1 z_4 z_2 = 0 \text{ 又ハ } \angle z_1 z_3 z_2 + \angle z_2 z_4 z_1 = \pi$$

故 = $z_1 z_2 z_3 z_4$ ハ同一圓周上ニアリ。

26. 複素數 z_1, z_2, z_3, z_4 ヲ表ハス四ツノ点ガ同一圓周上ニアラバ

$$z'_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}, \quad k=1, 2, 3, 4,$$

ニ由ツテ定メラル、四ツノ複素數 z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 ヲ表ハス四点モ亦同一圓周上ニアルコトヲ証セヨ。

[證] z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 ガ同一圓周上ニアルタメニハ前問ニヨリ

$$\frac{z'_3 - z'_1}{z'_3 - z'_2} : \frac{z'_4 - z'_1}{z'_4 - z'_2} = \text{實數},$$

ナレバ可ナリ,

然ルニ

$$z'_3 - z'_1 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(az_3 + b)(cz_1 + d) - (az_1 + b)(cz_3 + d)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)} = \frac{(ad - bc)(z_3 - z_1)}{(cz_3 + d)(cz_1 + d)}$$

同様ニ

$$z'_3 - z'_2 = \frac{(ad - bc)(z_3 - z_2)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}, \quad z'_4 - z'_1 = \frac{(ad - bc)(z_4 - z_1)}{(cz_4 + d)(cz_1 + d)}, \quad z'_4 - z'_2 = \frac{(ad - bc)(z_4 - z_2)}{(cz_4 + d)(cz_2 + d)}$$

$$\therefore \frac{z'_3 - z'_1}{z'_3 - z'_2} : \frac{z'_4 - z'_1}{z'_4 - z'_2} = \frac{(z_3 - z_1)(cz_2 + d)}{(cz_1 + d)(z_3 - z_2)} : \frac{(z_4 - z_1)(cz_2 + d)}{(cz_1 + d)(z_4 - z_2)} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

然ルニ $z_1 z_2 z_3 z_4$ ハ同一圓周上ニアル故ニ前問ノ逆ニヨリ上ノ右邊ノ値ハ實數ナリ,

從ツテ左邊ノ比ノ値モ亦實數ナリ, 依ツテ z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 モ亦同一圓周上ニアリ。

27. 三ツノ複素數 α, β, γ ヲ表ハス三点ガ正三角形ヲ作ルトキハ

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$$

ナルコト及ビ其逆ヲ証セヨ, 但シ α, β, γ ハ悉クハ相等シカラサルコト勿論ナリトス。

[解] α, β, γ ノ表ハス点ヲ A, B, C トスレバ問 24 ト同様ニ $\alpha - \beta, \gamma - \beta$ ノ絶対値ハ

夫々 BA, BC = 等シク, 其偏角ハ BA, BC ガ OX トナス角 = 等シキガ故ニ $\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$

ノ絶対値ハ $\frac{BA}{BC}$ = シテ其偏角ハ $\angle CBA$ = 等シ

同様ニ $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ ノ絶対値ハ $\frac{AC}{AB}$ = シテ其偏角ハ $\angle BAC$ = 等シ,

然ルニ $\triangle ABC$ ガ正三角形ナルトキハ $\frac{BA}{BC} = \frac{AC}{AB} = 1, \angle CBA = \angle BAC = \frac{\pi}{3}$,

$$\therefore \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

分母ヲ去リ整理スレバ

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0 \tag{1}$$

逆ニ (1) ガ成立スレバ

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \quad \therefore \frac{BA}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{CB}{CA} = 1$$

$$\therefore BA = BC = AC$$

即チ $\triangle ABC$ ハ正三角形トナル。

28. 任意ノ三角形 ABC ノ重心ヲ O トシ, OB, OC ヲ O ヲ中心トシテ夫々 $-\frac{2\pi}{3}$ 及ビ $\frac{2\pi}{3}$ 回轉シテ OB', OC' ノ位置ニ移ストキ $\triangle ABC'$ ハ正三角形ナルコトヲ証セヨ。

[解] 重心 O ヲ原点トシ, A, B, C, B', C' ノ表ハス複素數ヲ夫々 $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$ トスレ

バ β', γ' ハ其絶対値ハ夫々 β, γ ノ絶対値 = 等シク, 偏角ハ β, γ ノ偏角 = 夫々

$-\frac{2\pi}{3}$ 及ビ $\frac{2\pi}{3}$ 加ハタルモノニ等シ, 依ツテ今 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トスレ

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \omega^2 = \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$$

∴ β' = ω²β, γ' = ωγ, (基本定理 IV)

∴ 1/3(α + ωβ' + ω²γ') = 1/3(α + β + γ),

然ルニ問 21 ニヨリ 1/3(α + β + γ) ハ △ABC ノ重心ヲ表ハスコトヲ容易ニ證明スルコトヲ得、而シテ其重心ヲ原點トシタル故ニ

1/3(α + β + γ) = 0 ∴ α + ωβ' + ω²γ' = 0

∴ α² + β² + γ² - αβ' - β'γ' - γ'α = (α + ωβ' + ω²γ')(α + ω²β' + ωγ') = 0 (問. 34).

依ツテ前問ニヨリ △AB'C' ハ正三角形ナリ。

29. 次ノニツノ方程式ノ根ヲ表ハス点ヲ作圖セヨ。

a) x⁹ + x⁷ + x⁵ + x³ + x + 1 = 0,

b) x⁹ - x⁷ + x⁵ - x³ + x - 1 = 0.

[解] (a) ノ兩邊 = x-1 乘ズレバ x⁹ - 1 = 0 トナル故ニ (a) ノ根ハ 1 ノ 9 乗根ノ

ハツノ虚数ナリ、故ニ基本定理 III, IV ニヨリ其絶対値ハ皆 1 ニシテ偏角ハ夫々

2π/9, 4π/9, 6π/9, ..., 16π/9

ニ等シ、依ツテ原點ヲ中心トスル圓周ト Ox トノ交リテーツノ頂點トスル内接正 9 角形ノ他ノ 8 ツノ頂點ガ所要ノ根ヲ表ハス点ナリ、次ニ (b) ノ兩邊ニ x+1 ヲ乘

ズレバ x⁹ + 1 = 0 トナル故ニ (b) ノ根ハ -1 ノ 9 乗根ノ 8 ツノ虚数ナリ、故ニ

基本定理 III, IV ニヨリ其絶対値ハ皆 1 ニシテ偏角ハ夫々

π/9, 3π/9, 5π/9, ..., 17π/9 (但シ 9π/9 ヲ除ク)

ニ等シ、依ツテ原點ヲ中心トスル圓ト Ox ノ左方ヘノ延長 Ox' トノ交リテーツノ頂點トスル内接正 9 角形ノ他ノ 8 ツノ頂點ガ所要ノ根ヲ表ハス点ナリ。

30. x = cos α + i sin α, y = cos β + i sin β, z = cos γ + i sin γ

ナルトキ次ノ式ヲ証セヨ,

(y+z)(z+x)(x+y) = 8xyz cos(β-γ)/2 cos(γ-α)/2 cos(α-β)/2,

[解] y+z = (cos β + cos γ) + i(sin β + sin γ) = r(cos θ + i sin θ) トキキバ

r = |y+z| = √(cos β + cos γ)² + (sin β + sin γ)² = √2 + 2 cos(β-γ) = 2 cos(β-γ)/2,

Handwritten derivation: 4 cos²(β-γ)/4 = 2 cos(β-γ)/2

又問 21 ニヨリ θ = (β+γ)/2,

∴ y+z = 2 cos(β-γ)/2 (cos(β+γ)/2 + i sin(β+γ)/2)

同様ニ z+x = 2 cos(γ-α)/2 (cos(γ+α)/2 + i sin(γ+α)/2)

x+y = 2 cos(α-β)/2 (cos(α+β)/2 + i sin(α+β)/2)

又基本定理 IV ニヨリ

(cos(β+γ)/2 + i sin(β+γ)/2)(cos(γ+α)/2 + i sin(γ+α)/2)(cos(α+β)/2 + i sin(α+β)/2)

= cos((β+γ)/2 + (γ+α)/2 + (α+β)/2) + i sin((β+γ)/2 + (γ+α)/2 + (α+β)/2)

= cos(α+β+γ) + i sin(α+β+γ)

= (cos α + i sin α)(cos β + i sin β)(cos γ + i sin γ) = xyz,

∴ (y+z)(z+x)(x+y) = 8xyz cos(β-γ)/2 cos(γ-α)/2 cos(α-β)/2,

31. 次ノ式ヲ証セヨ。

{cos θ + cos φ + i(sin θ + sin φ)}ⁿ + {cos θ + cos φ - i(sin θ + sin φ)}ⁿ

= 2ⁿ⁺¹ (cos(θ-φ)/2)ⁿ cos(n(θ+φ)/2)

[解] 前問ト同様ニ cos θ + cos φ + i(sin θ + sin φ) ノ絶対値ハ 2 cos(θ-φ)/2, 偏角ハ

(θ+φ)/2, 故ニ

{cos θ + cos φ + i(sin θ + sin φ)}ⁿ = {2 cos(θ-φ)/2 (cos(θ+φ)/2 + i sin(θ+φ)/2)}ⁿ

= 2ⁿ (cos(θ-φ)/2)ⁿ {cos(n(θ+φ)/2) + i sin(n(θ+φ)/2)}

同様ニ

{cos θ + cos φ - i(sin θ + sin φ)}ⁿ = {2 cos(θ-φ)/2 (cos(θ+φ)/2 - i sin(θ+φ)/2)}ⁿ

= 2ⁿ (cos(θ-φ)/2)ⁿ {cos(n(θ+φ)/2) - i sin(n(θ+φ)/2)}

∴ {cos θ + cos φ + i(sin θ + sin φ)}ⁿ + {cos θ + cos φ - i(sin θ + sin φ)}ⁿ

= 2ⁿ (cos(θ-φ)/2)ⁿ 2 cos(n(θ+φ)/2) = 2ⁿ⁺¹ (cos(θ-φ)/2)ⁿ cos(n(θ+φ)/2),

32. $(\cos a + x \sin a)^m + a \cos m a + b x \sin m a$ が $x^2 + 1$ ニテ割り切レルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ, 但シ m ハ正ノ整数ニシテ $\cos m a, \sin m a$ ハ 0 ニ等シカラズトス。

[解] m ハ正ノ整数ナル故ニ所題ノ式ガ $x^2 + 1$ ニテ割り切レルタメニハ $x = i$ トオキタルトキ 0 トナレバヨシ, 即チ

$$(\cos a + i \sin a)^m + a \cos m a + i b \sin m a = 0$$

$$\therefore \cos m a + i \sin m a + a \cos m a + i b \sin m a = 0$$

$$\therefore (1+a)\cos m a + i(1+b)\sin m a = 0$$

$$\therefore (1+a)\cos m a = 0, \quad (1+b)\sin m a = 0$$

$$\text{然ルニ } \cos m a \neq 0, \quad \sin m a \neq 0 \quad \therefore a = -1, \quad b = -1,$$

33. a, b, c, d ガ實數ニシテ虚數係數ノ二次方程式

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

ガーツノ實數根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $abd = d^2 + b^2c$ ナルコトヲ証セヨ, 又此方程式ハ二根トモ實數トナリ得ルカ如何。

[解] x ヲ實數トスルトキ

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

ナルタメニハ

$$(x^2 + ax + c) + (bx + d)i = 0$$

ナラザルベカラズ, コレガタメニハ

$$x^2 + ax + c = 0, \quad bx + d = 0$$

ナラザルベカラズ, コレヨリ x ヲ消去スレバ $abd = d^2 + b^2c$

逆ニ此關係ガ成立スレバ $x^2 + ax + c = 0$ ノ一根ハ $-\frac{-a}{b}$ ニシテ x ノ其値ニ由ツテ所題ノ方程式ハ満足セラル, 依ツテ此關係ハ一根ガ實數ナルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ,

次ニ所題ノ方程式ヲ満足セシムル x ノ實數値ハ $bx + d = 0$ 即チ $x = -\frac{d}{b}$ 以外ニナシ, 依ツテ二根トモ實數値トナルコト能ハズ。

34. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$ ヲ証セヨ, 但シ ω ハ 1 ノ立方根ノ虚數トス。

[解] $a + b + c$ ハ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ノ一因數ナルコト明カナリ, 從ツテ $a + \omega b + \omega^2 c$ ハ $a^3 + (\omega b)^3 + (\omega^2 c)^3 - 3a(\omega b)(\omega^2 c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ノ一因數ナリ, 何ントナレバ $\omega^3 = 1, \omega^6 = 1$ ナレバナリ, 同様ニ $a + \omega^2 b + \omega c$ モ亦所題ノ式ノ一因數ナリ, 而シテ所題ノ式ハ a, b, c ニツキ 3 次ノ同次式ニシテ ω^2 ノ係數ハ 1 ナリ, 依ツテ

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c),$$

35. n ガ 3 ノ倍數ナラザル奇數ナルトキ $(x + y)^n - x^n - y^n$ ハ $x^2 + xy + y^2$ ニテ割り切レルコトヲ証セヨ。

[解] 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トスレバ $x^2 + xy + y^2 = (x - \omega y)(x - \omega^2 y)$

所題ノ式ニ於テ $x = \omega y$ トオキタルトキノ値ヲ P トスレバ

$$P = (\omega y + y)^n - (\omega y)^n - y^n = y^n \{(1 + \omega)^n - \omega^n - 1\},$$

$$\text{然ルニ } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \quad (\text{問. 18}) \quad \therefore 1 + \omega = -\omega^2$$

$$\therefore (1 + \omega)^n - \omega^n - 1 = (-\omega^2)^n - \omega^n - 1$$

n ハ奇數ナル故ニ

$$P = y^n \{-\omega^{2n} - \omega^n - 1\}$$

$$\text{故ニ } n = 3m + 1 \text{ ナラバ } P = y^n \{-\omega^2 - \omega - 1\} = 0$$

$$n = 3m + 2 \text{ ,, } P = y^n \{-\omega - \omega^2 - 1\} = 0$$

故ニ n ガ 3 ノ倍數ナラザル奇數ナルトキハ所題ノ式ハ $x - \omega y$ ナル因數ヲ有ス, 同様ニ $x - \omega^2 y$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル, 依ツテ $(x - \omega y)(x - \omega^2 y)$ 則チ $x^2 + xy + y^2$ ナル因數ヲ有ス。

36. $x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}$

$$= \left\{ x^2 - 2ax \cos \theta + a^2 \right\} \left\{ x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) + a^2 \right\}$$

$$\dots \left\{ x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + a^2 \right\}$$

ヲ証セヨ。

〔解〕 今 $x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} = 0$ トオケバ

$$(x^n - a^n \cos n\theta)^2 + a^{2n} \sin^2 n\theta = 0$$

$$\therefore x^n - a^n \cos n\theta = \pm i a^n \sin n\theta$$

$$\therefore x^n = a^n (\cos n\theta \pm i \sin n\theta) = a^n \{ \cos(n\theta + 2k\pi) \pm i \sin(n\theta + 2k\pi) \}$$

$$\therefore x = a \left\{ \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\}$$

$$\text{但し } k=0, 1, 2, \dots, (n-1),$$

$$\therefore x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} = \{x - a \cos \theta - i a \sin \theta\} \{x - a \cos \theta + i a \sin \theta\}$$

$$\left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) - i a \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \right\} \left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + i a \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \right\}$$

$$\left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}\right) - i a \sin\left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}\right) \right\} \left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}\right) + i a \sin\left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n}\right) \right\}$$

.....

$$\left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) - i a \sin\left(\theta + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) \right\}$$

$$\left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) + i a \sin\left(\theta + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) \right\},$$

然ルニ

$$\left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - i a \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\} \left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + i a \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\}$$

$$= \left\{ x - a \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) \right\}^2 + a^2 \sin^2\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = x^2 - 2ax \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + a^2,$$

$$\therefore x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} = \left\{ x^2 - 2ax \cos \theta + a^2 \right\} \left\{ x^2 - 2ax \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + a^2 \right\}$$

$$\dots \left\{ x^2 - 2ax \cos\left(\theta + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) + a^2 \right\},$$

37. $x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1$ ヲ因数ニ分解セヨ。

〔解〕 $x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1 = x^{10} - 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)x^5 + 1 = x^{10} - 2x^5 \cos \frac{5\pi}{6} + 1$

依ツテ前問ニ於テ

$$n=5, \quad a=1, \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{トスレバ}$$

$$x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1 = \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{6} + 1 \right\} \left\{ x^2 - 2x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}\right) + 1 \right\} \\ \left\{ x^2 - 2x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}\right) + 1 \right\} \left\{ x^2 - 2x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}\right) + 1 \right\} \\ \left\{ x^2 - 2x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}\right) + 1 \right\},$$

38. n ガ 3 ノ 倍 数 ヲリ 1 少 ナ キ 正 ノ 整 数 ナ ル ト キ ハ

$(y-z)^n + (z-x)^n + (x-y)^n$ ハ $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$ ニテ割リ切レ, 其平方ニテハ割リ切レザルコトヲ証セヨ。

〔解〕 1 ノ立方根ノ虚数ヲ ω トスレバ

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = (x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z),$$

今所題ノ式ニ $x = -(\omega y + \omega^2 z)$ トオキタルトキノ値ヲ P トスレバ

$$P = (y-z)^n + \{(1+\omega^2)z + \omega y\}^n + \{-(1+\omega)y - \omega^2 z\}^n \\ = (y-z)^n + (-\omega z + \omega y)^n + (\omega^2 y - \omega^2 z)^n = (y-z)^n (1 + \omega^n + \omega^{2n})$$

然ルニ $n = 3m + 2$

$$\therefore 1 + \omega^n + \omega^{2n} = 1 + \omega^2 + \omega^4 = 1 + \omega^2 + \omega = 0 \quad \therefore P = 0,$$

故ニ所題ノ式ハ $x + \omega y + \omega^2 z$ ナル因数ヲ有ス, 同様ニ所題ノ式ハ $x + \omega^2 y + \omega z$ ナ

ル因数ヲ有ス, 従ツテ $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$ ナル因数ヲ有ス, 次ニ

$$f(x) = (x-y)^n + (z-x)^n + (y-z)^n$$

トオクトキ $f(x)$ ガ $(x + \omega y + \omega^2 z)^2$ ナル因数ヲ有スルヌメニハ

$$f'(x) = n(x-y)^{n-1} - n(z-x)^{n-1}$$

ガ $x + \omega y + \omega^2 z$ ナル因数ヲ有セザルベカラズ (第十章基本定理 II),

然ルニ $f'(x) = 0$ 於テ $x = -(\omega y + \omega^2 z)$ トオケバ

$$n\{-(1+\omega)y - \omega^2 z\}^{n-1} - n\{(1+\omega^2)z + \omega y\}^{n-1} \\ = n(\omega^2 y - \omega^2 z)^{n-1} - n(\omega y - \omega z)^{n-1} = n(y-z)^{n-1}(\omega^{2(n-1)} - \omega^{n-1}) \\ = n(y-z)^{n-1}(\omega^{2(3m+1)} - \omega^{3m+1}) = n(y-z)^{n-1}(\omega^2 - \omega) \neq 0$$

故ニ $f'(x)$ ハ $x + \omega y + \omega^2 z$ ナル因数ヲ有セズ, 従ツテ所題ノ式ハ $(x + \omega y + \omega^2 z)^2$

ナル因数ヲ有セズ, 従ツテ $(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)^2$ ニテ割リ切レズ。

39. (1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + + a_{2n}x^{2n}

トスレバ

a_0 + a_3 + a_6 + = a_1 + a_4 + a_7 + = a_2 + a_5 + a_8 + = 3^{n-1}

ナルコトヲ証セヨ。

[解] 1ノ立方根ヲ 1, ω, ω^2 トシ所題ノ式ノ兩邊ニ於ケル xノ代リニソレゾレ ω,

ω^2 ヲ以テスレバ

(1+ω+ω^2)^n = a_0 + a_1ω + a_2ω^2 + a_3 + a_4ω + a_5ω^2 + (1)

(1+ω^2+ω)^n = a_0 + a_1ω^2 + a_2ω + a_3 + a_4ω^2 + a_5ω + (2)

又 x=1 トオケバ

3^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + (3)

(1), (2), (3) ヲ加フレバ 1+ω+ω^2=0 ナル故ニ

3^n = 3(a_0 + a_3 + a_6 +)

∴ a_0 + a_3 + a_6 + = 3^{n-1},

又 (1) = ω^2, (2) = ω ヲカケテ (3) ト加フレバ

3^n = 3(a_1 + a_4 + a_7 +)

∴ a_1 + a_4 + a_7 + = 3^{n-1}

同様ニ (1) = ω, (2) = ω^2 ヲカケテ (3) ト加フレバ

3^n = 3(a_2 + a_5 + a_8 +)

∴ a_2 + a_5 + a_8 + = 3^{n-1},

40. 次ノ關係ヲ証セヨ。

1/n!1! - 1/(n-2)!3! + 1/(n-4)!5! - = 2^{n+1}/(n+1)! sin((n+1)π/4)

1/(n+1)!0! - 1/(n-1)!2! + 1/(n-3)!4! - = 2^{n+1}/(n+1)! cos((n+1)π/4)

[解] 1+i = √2 (cos π/4 + i sin π/4)

故ニ De Moivre ノ定理(基本定理 IV) 及ビ二項定理ニヨリ

(1+i)^{n+1} = 2^{(n+1)/2} (cos π/4 + i sin π/4)^{n+1} = 2^{(n+1)/2} {cos((n+1)π/4 + i sin((n+1)π/4)}

= 1 + (n+1)i + (n+1)n/2! i^2 + (n+1)n(n-1)/3! i^3 +

= 1 - (n+1)n/2! + (n+1)n(n-1)(n-2)/4! - +

+ i { (n+1) - (n+1)n(n-1)/3! + (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)/5! - +

= 1 - (n+1)!/2!(n-1)! + (n+1)!/4!(n-3)! - +

+ i { (n+1)!/n!1! - (n+1)!/3!(n-2)! + (n+1)!/5!(n-4)! - +

∴ 2^{(n+1)/2} cos((n+1)π/4) = 1 - (n+1)!/2!(n-1)! + (n+1)!/4!(n-3)! - +

2^{(n+1)/2} sin((n+1)π/4) = (n+1)!/n!1! - (n+1)!/3!(n-2)! + (n+1)!/5!(n-4)! - +

即チ 2^{(n+1)/2} cos((n+1)π/4) = 1/(n+1)!0! - 1/(n-1)!2! + 1/(n-3)!4! - +

2^{(n+1)/2} sin((n+1)π/4) = 1/n!1! - 1/(n-2)!3! + 1/(n-4)!5! - +

41. Euler ノ公式 e^{ix} = cos x + i sin x (微分學演習第十一章)ニ由ツテ複素数ノ自然對數ハ又複素数ナルコトヲ証セヨ。

[解] a+bi = e^{x+iy} = e^x · e^{iy}

トオケバ Euler ノ公式ニヨリ

a+bi = e^x (cos y + i sin y)

∴ a = e^x cos y, b = e^x sin y, ∴ a^2 + b^2 = e^{2x} ∴ x = log √(a^2 + b^2),

又 tan y = b/a, ∴ y = tan^{-1} b/a,

∴ log(a+bi) = x + iy = log √(a^2 + b^2) + i tan^{-1} b/a,

但シ tan^{-1} b/a ハ -πヨリ πニ至ル間ノ或一ツノ値ニシテ, a, b ノ符號ニヨツテ

定マルモノトス, 若シ一般ノ値ヲ要スル場合ニハ

$$\log(a+bi) = \log \sqrt{a^2+b^2} + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right),$$

但し n は 0 或は正負ノ整数、從ツテ任意ノ複素數ヲ $r(\cos \theta + i \sin \theta) = z$ 表ハセバ $\log \{ r(\cos \theta + i \sin \theta) \} = \log r + i(2n\pi + \theta)$,

即チコレニ由ツテ任意ノ複素數ノ自然對數ハ又他ノ複素數ナルヲ知ル。

42. 次ノ諸對數ノ一般ノ値ヲ書ケ。

$$\log 2, \quad \log(-2), \quad \log i, \quad \log(-i)$$

【解】 $2 = 2(\cos 0 + i \sin 0) \therefore \log 2 = \log 2 + i(2n\pi),$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) \therefore \log(-2) = \log 2 + i(2n+1)\pi$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \therefore \log i = \log 1 + i \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = i(4n+1) \frac{\pi}{2},$$

$$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \therefore \log(-i) = \log 1 + i \left(2n\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = i(4n-1) \frac{\pi}{2}.$$

43. $\log(1 + \cos \theta + i \sin \theta) = \log 2 + \log \cos \frac{\theta}{2} + i \left(\frac{\theta}{2} + 2n\pi \right)$ ヲ証セヨ。

【解】 前々問ニヨリ

$$\log(1 + \cos \theta + i \sin \theta) = \log \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right)$$

$$= \log \sqrt{2 + 2 \cos \theta} + i \left(2n\pi + \tan^{-1} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \log \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) + i \left(2n\pi + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \log 2 + \log \cos \frac{\theta}{2} + i \left(2n\pi + \frac{\theta}{2} \right),$$

44. 複素數ノ複素數冪ハ又複素數ナルコトヲ証セヨ。

【解】 $(a+bi)^{x+yi} = e^z$ トキニ兩邊ノ自然對數ヲトレバ

$$z = (x+yi) \log(a+bi)$$

$$a+bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{トキケバ前問ニヨリ}$$

$$\log(a+bi) = \log r + i(2n\pi + \theta),$$

$$\therefore (a+bi)^{x+yi} = e^{(x+yi)\{\log r + i(2n\pi + \theta)\}}$$

$$= e^{\{x \log r - y(2n\pi + \theta)\}} + i \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\}$$

$$= e^{x \log r} \cdot e^{-y(2n\pi + \theta)} \cdot e^{i \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\}}$$

然ルニ $e^{x \log r} = r^x$, 又 Euler ノ公式(問 41)ニヨリ

$$e^{i \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\}} = \cos \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\} + i \sin \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\},$$

$$\therefore (a+bi)^{x+yi} = r^x e^{-y(2n\pi + \theta)} [\cos \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\} + i \sin \{y \log r + x(2n\pi + \theta)\}],$$

n は 0 或は正負ノ種々ノ整数値ヲ與フレバ此右邊ハ一般ニ如何ナル値トモナリ得ル故ニ $n=0$ ノトキノ値ヲ以テ $(a+bi)^{x+yi}$ ノ値ナリト定ム、然ルトキハ

$$(a+bi)^{x+yi} = r^x e^{-y\theta} \{ \cos(y \log r + x\theta) + i \sin(y \log r + x\theta) \},$$

$$\text{但シ } r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad -\pi \leq \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \leq \pi,$$

之ニ由ツテ複素數ノ複素數冪ハ又一ツノ複素數ナルヲ知ル。

45. 次ノ諸數ヲ一ツノ複素數ニテ表ハセ。

$$2^{1+i}, \quad 1^i, \quad i^i, \quad (\sqrt{i})^{\sqrt{i}}$$

【解】 前問ニ於テ $a=2, b=0, x=y=1$ トスレバ $r=2, \theta=0,$

$$\therefore 2^{1+i} = 2 \{ \cos(\log 2) + i \sin(\log 2) \},$$

$$\text{同様ニ } 1^i = 1, \quad i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

$$(\sqrt{i})^{\sqrt{i}} = (\sqrt{i})^{\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} = (i)^{\frac{1}{2\sqrt{2}} + i \frac{1}{2\sqrt{2}}} = e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + i \sin \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \right),$$

46. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1 + x \cos \theta + x^2 \cos 2\theta + \dots + x^{n-1} \cos(n-1)\theta.$$

【解】 今 $A = 1 + x \cos \theta + x^2 \cos 2\theta + \dots + x^{n-1} \cos(n-1)\theta$

$$B = x \sin \theta + x^2 \sin 2\theta + \dots + x^{n-1} \sin(n-1)\theta$$

トオケバ

$$A+iB = 1 + x(\cos \theta + i \sin \theta) + x^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots$$

$$+ x^{n-1} \{ \cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta \}$$

然ルニ Euler ノ公式ニヨリ

$$\cos k\theta + i \sin k\theta = e^{ik\theta},$$

$$\therefore A+iB = 1 + x e^{i\theta} + x^2 e^{i2\theta} + \dots + x^{n-1} e^{i(n-1)\theta},$$

コノ右邊ハ初項 1 , 公比 $x e^{i\theta}$ ナル等比級數ナル故ニ

比

$$\begin{aligned}
 A+iB &= \frac{1-x^n e^{in\theta}}{1-x e^{i\theta}} = \frac{(1-x^n e^{in\theta})(1-x e^{-i\theta})}{(1-x e^{i\theta})(1-x e^{-i\theta})} \\
 &= \frac{1-x e^{-i\theta} - x^n e^{in\theta} + x^{n+1} e^{i(n-1)\theta}}{1+x^2-x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} \\
 &= \frac{1-x(\cos\theta-i\sin\theta) - x^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) + x^{n+1}\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta\}}{1+x^2-2x\cos\theta} \\
 &= \frac{1-x\cos\theta-x^n\cos n\theta+x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} + i \frac{x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} \\
 \therefore A &= \frac{1-x\cos\theta-x^n\cos n\theta+x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},
 \end{aligned}$$

コレ即チ所題ノ級数 \$n\$ 項ノ和ナリ、同時ニ又

$$B = \frac{x\sin\theta - x^n\sin n\theta + x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

ナルヲ知ル。

47. 複素数ノ三角函数ヲ定義シ次ノ諸公式ヲ証セヨ。

$$\sin^2(a+bi) + \cos^2(a+bi) = 1, \quad 1 + \tan^2(a+bi) = \sec^2(a+bi),$$

$$1 + \cot^2(a+bi) = \operatorname{cosec}^2(a+bi),$$

$$\sin(a+bi+c+di) = \sin(a+bi)\cos(c+di) + \cos(a+bi)\sin(c+di),$$

〔解〕 Euler ノ公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ニ於テ \$x\$ チ \$-x\$ トオケバ

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \therefore \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

之レト同様ニ今 \$z = a+bi\$ トスルトキ

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

ト定義ス、然ルトキハ

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^0 = 1$$

$$1 + \tan^2 z = (1 + i \tan z)(1 - i \tan z) = \frac{2e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \times \frac{2e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \left(\frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z,$$

$$\text{同様ニ } 1 + \cot^2 z = \operatorname{cosec}^2 z,$$

$$\text{次ニ } a+bi=z, \quad c+di=u \quad \text{トスレバ}$$

$$\begin{aligned}
 \sin z \cos u + \cos z \sin u &= \frac{1}{4i}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iu} + e^{-iu}) + \frac{1}{4i}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iu} - e^{-iu}) \\
 &= \frac{1}{2i}(e^{i(z+u)} - e^{-i(z+u)}) = \sin(z+u),
 \end{aligned}$$

$$\text{同様ニ } \cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u.$$

48. $\{\cos(a+bi) + i \sin(a+bi)\}^{c+di} = \cos\{(c+di)(a+bi)\} + i \sin\{(c+di)(a+bi)\}$ ナルコトヲ証セヨ。

$$\text{〔解〕 } a+bi=z, \quad c+di=u \quad \text{トスレバ}$$

$$(\cos z + i \sin z)^u = \left\{ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} i \right\}^u = (e^{iz})^u = e^{izu},$$

$$\cos(uz) + i \sin(uz) = \frac{e^{iuz} + e^{-iuz}}{2} + \frac{e^{iuz} - e^{-iuz}}{2} i = e^{iuz},$$

$$\therefore (\cos z + i \sin z)_u = \cos uz + i \sin uz,$$

即チ De Moivre ノ定理(基本定理 IV)ハ、\$0, n\$ ガ複素数ナル場合ニモ成立ス。

$$\begin{aligned} \text{次} &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) \\ &= \alpha_1 + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1} + \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2} + \alpha_3 + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3} \end{aligned}$$

故一般ニ

$$(\sum \alpha_i^2) \left(\sum \frac{1}{\alpha_i} \right) = \sum \alpha_i + \sum \frac{\alpha_j^2}{\alpha_i}$$

$$\text{然ルニ } \sum \alpha_i^2 = (\sum \alpha_i)^2 - 2 \sum \alpha_i \alpha_j = (-p_1)^2 - 2p_2 = p_1^2 - 2p_2$$

$$\sum \frac{1}{\alpha_i} = -\frac{p_{n-1}}{p_n} \quad (\text{前問})$$

$$\therefore \sum \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i} = (p_1^2 - 2p_2) \left[-\frac{p_{n-1}}{p_n} \right] + p_1 = \frac{p_1 p_n - (p_1^2 - 2p_2) p_{n-1}}{p_n}$$

④ 聯立方程式 $x+ay+a^2z+a^3=0$, $x+by+b^2z+b^3=0$, $x+cy+c^2z+c^3=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 今所題ノ聯立方程式ノ根ヲ x, y, z トシ t ノ三次方程式

$$t^3 + zt^2 + yt + x = 0$$

ヲ考フレバ係數 x, y, z ハ所題ノ聯立方程式ヲ満足セシムル故ニ t ノ三根ハ a, b, c

ナルヲ知ル, 然ルトキハ基本定理 II ニヨリ

$$a+b+c=-z, \quad ab+bc+ca=y, \quad abc=-x$$

$$\therefore x=-abc, \quad y=ab+bc+ca, \quad z=-(a+b+c),$$

5. 聯立方程式

$$x+ay+a^2z+a^3u+a^4=0, \quad x+by+b^2z+b^3u+b^4=0$$

$$x+cy+c^2z+c^3u+c^4=0, \quad x+dy+d^2z+d^3u+d^4=0 \quad \text{ヲ解ケ。}$$

〔解〕 前問ト同様ニ所要ノ根ヲ x, y, z, u トスレバ t ノ四次方程式

$$t^4 + ut^3 + zt^2 + yt + x = 0$$

ノ四根ハ a, b, c, d ナリ, 依ツテ基本定理 II ニヨリ

$$a+b+c+d=-u, \quad ab+ac+ad+bc+bd+cd=z$$

$$abc+abd+acd+bcd=-y, \quad abcd=x,$$

$$\text{即チ } x=abcd, \quad y=-(abc+abd+acd+bcd)$$

$$z=ab+ac+ad+bc+bd+cd, \quad u=-(a+b+c+d),$$

6. 聯立方程式

$$x+y+z=9, \quad x^2+y^2+z^2=41, \quad x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=180$$

ヲ解ケ。

$$〔解〕 41 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 81 - 2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx=20,$$

$$\text{又 } 180 = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = x^2(9-x) + y^2(9-y) + z^2(9-z)$$

$$= 9(x^2+y^2+z^2) - (x^3+y^3+z^3) = 9 \times 41 - (x^3+y^3+z^3 - 3xyz + 3xyz)$$

$$= 369 - \{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz\}$$

$$= 369 - \{9(41-20) + 3xyz\},$$

$$\therefore xyz=0$$

故ニ基本定理 II ニヨリ x, y, z ハ三次方程式ノ根ナリ

$$t^3 - 9t^2 + 20t = 0 \quad \therefore t=0, 4, 5$$

t ノ何レノ値ガ x, y, z ノ何レニシテモ可ナル故ニ所要ノ根ハ次ノ 6 組ナリ

$$\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \\ z=5 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 5 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 0 \\ 5 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 4 \\ 0 \end{array}$$

7. 四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ二根ノ和方他ノ二根ノ和ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 四根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p \quad (1)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q \quad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r \quad (3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=s \quad (4)$$

今 $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ ナリトスレバ (1) ニヨリ

$$2(\alpha+\beta)=2(\gamma+\delta)=-p \quad (5)$$

又 (2), (3) ニヨリ

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta=q, \quad \alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-r,$$

(5) 代入スレバ

$$\frac{p^2}{4} + \alpha\beta + \gamma\delta = q, \quad -\frac{p}{2}(\alpha\beta + \gamma\delta) = -r,$$

コレヨリ $\alpha\beta + \gamma\delta$ ヲ消去スレバ

$$\frac{p}{2}\left[q - \frac{p^2}{4}\right] = r, \quad \therefore p^3 - 4pq + 8r = 0 \quad (6)$$

コレ即チ必要ナル條件ニシテ $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ 或ハ $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ ナル場合モ同様ナリ逆ニ (6) ノ左邊ヲ F トシ F ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ニテ表ハセバ

$$F = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^3 + 4(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) - 8(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$$

茲ニ於テ $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ トオケバ

$$F = -8(\alpha + \beta)^3 + 8(\alpha + \beta)\{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha\beta + \gamma\delta)\} - 8(\alpha + \beta)(\alpha\beta + \gamma\delta) = 0$$

トナル、故ニ F ハ $\alpha + \beta - \gamma - \delta$ ナル因數ヲ有ス、然ルニ F ハ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ノ對稱式ナル故ニ從ツテ上ノ因數ヨリ β, γ 及ビ β, δ ヲ交換シテ得ベキ $\alpha + \gamma - \beta - \delta, \alpha + \delta - \beta - \gamma$ ナル因數ヲモ有ス

$$\therefore F = k(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \gamma - \beta - \delta)(\alpha + \delta - \beta - \gamma)$$

然ルニ F ハ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ニツキテ三次ナル故ニ k ハ定數ナリ、故ニ (6) ガ成立スルトキ即チ $F=0$ ナルトキ何レカ二根ノ和ハ他ノ二根ノ和ニ等シ 故ニ (6) ハ又十分ナル條件ナリ、即チ所要ノ條件ハ (6) ナリ。8. 三次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ノ二根ノ積ガ他ノ一根ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

[解] 三根ヲ α, β, γ トシ前問ト同様ニ根ト係數トノ關係ト $\alpha\beta = \gamma$ トヨリ α, β ヲ消去スレバ可ナルコト勿論ナルモ今次ニ根ノ對稱式(根ノ對稱式ハ常ニ係數ノ整式ニテ表ハサル、問題 57 參照) ヲ利用シテ所要ノ條件ヲ求メントス、即チ $\alpha\beta = \gamma$ ナル因數トスル α, β, γ ノ最低次ノ對稱式

$$F = (\alpha\beta - \gamma)(\alpha\gamma - \beta)(\beta\gamma - \alpha)$$

ヲ考フ、二根ノ積ガ他ノ一根ニ等シキトキハ明カニ $F=0$ ニシテ逆ニ $F=0$ ナルトキハ何レカ二根ノ積ハ殘ル一根ニ等シ、故ニ $F=0$ ハ題意ニ適スルタメニ必要

ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ、依ツテ F ヲ係數ニテ表ハセバ所要ノ條件ヲ得ニシ、即チ

$$F = \alpha^2\beta^2\gamma^2 - \alpha\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 - \alpha\beta\gamma \\ = r^2 + r(p^2 - 2q) + (q^2 - 2pr) + r = r^2 + r(p^2 - 2p - 2q + 1) + q^2$$

故ニ所要ノ條件ハ

$$r^2 + r(p^2 - 2p - 2q + 1) + q^2 = 0,$$

9. 三次方程式 $x^3 + qx + r = 0$ ノ二根ノ和ガ二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ ノ一根ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

[解] 三次方程式ノ根ヲ α, β, γ 、二次方程式ノ根ヲ ω, θ トシ、前問ト同様ニ $\alpha + \beta = \omega$ ナル因數トシ α, β, γ 及ビ ω, θ ニツキテ最低次ノ對稱式

$$F = (\alpha + \beta - \omega)(\beta + \gamma - \omega)(\gamma + \alpha - \omega)(\alpha + \beta - \theta)(\beta + \gamma - \theta)(\gamma + \alpha - \theta)$$

ヲ考フ、 α, β, γ 中ノ任意ノ二ツノ和ガ ω, θ ノ何レカニ等シキトキハ $F=0$ トナリ、逆ニ $F=0$ ナルトキハ α, β, γ 中ノ何レカ二ツノ和ハ ω, θ ノ何レカニ等シクナル故ニ $F=0$ ヲ係數 q, r, b, c ニテ表ハシタルモノガ所要ノ條件ナリ、然ルニ

$$(\alpha + \beta - \omega)(\beta + \gamma - \omega)(\gamma + \alpha - \omega) = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \\ - \{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) + (\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)\}\omega + 2(\alpha + \beta + \gamma)\omega^2 - \omega^3 \\ = r - q\omega - \omega^3,$$

$$\therefore F = (r - q\omega - \omega^3)(r - q\theta - \theta^3) \\ = r^2 - rq(\omega + \theta) - r(\omega^3 + \theta^3) + \omega\theta\{q^2 + q(\omega^2 + \theta^2) + \omega^2\theta^2\} \\ = r^2 + brq + br(b^2 - 3c) + c\{q^2 + q(b^2 - 2c) + c^2\}$$

故ニ所要ノ條件ハ

$$r^2 + br(q + b^2 - 3c) + c(c^2 - 2cq + b^2q + q^2) = 0$$

10. $(n-1)p_1^2 < 2np_2$ ナルトキハ方程式 $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ ハ必ず虚數根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 所題ノ方程式ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トシ、アラユル二根ノ差ノ平方ノ和ヲ P トスレバ $P = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \dots + (\alpha_1 - \alpha_n)^2$

$$\begin{aligned}
& +(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2 \\
& \dots \dots \dots \\
& +(\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2 \\
& = (n-1)\Sigma \alpha_i^2 - 2\Sigma \alpha_i \alpha_j = (n-1)(-p_1)^2 - 2p_2 = (n-1)p_1^2 - 2np_2
\end{aligned}$$

然ルニ假設ニヨリ

$$(n-1)p_1^2 < 2np_2 \quad \therefore P < 0$$

故ニ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ノ總テハ實數ナル能ハズ, 即チ所題ノ方程式ハ若干個ノ虛數根ヲ有ス。

11. 方程式 $1000x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ ハ a, b ノ如何ニ係ラズ絶對値ガ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナラザル一根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 所題ノ方程式ノ根ヲ α, β, γ トスルベ

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{1000} \quad \therefore |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma| = \frac{1}{1000}$$

故ニ $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ ハ悉クハ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナル能ハズ, 即チ少クトモ一ハ $\frac{1}{10}$ ニ等シキカ或ハ $\frac{1}{10}$ ヨリ小ナラザルベカラズ, 故ニ所題ノ方程式ハ a, b ノ如何ニ係ハラズ絶對値ガ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナラザル一根ヲ有ス。

12. 方程式

$$x^{n+3} = a^{n+3} \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^{n+3} \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^{n+3} \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \quad (1)$$

ノ根ノ中 a, b, c 以外ノ n 個ハ次ノ方程式ノ根ナルコトヲ証セヨ,

$$x^n + H_1 x^{n-1} + H_2 x^{n-2} + \dots + H_{n-1} x + H_n = 0 \quad (2)$$

但シ H_r ハ a, b, c ヨリ作ル r 次ノ同次積ノ和ヲ表ハスモノトス。

[解] a, b, c 三文字ヨリ作ル r 次ノ同次積ノ和 H_r ハ次ノ關係式ニ於ケル x ノ係數

ニ等シ

$$\begin{aligned}
& (1+ax+a^2x^2+\dots)(1+bx+b^2x^2+\dots)(1+cx+c^2x^2+\dots) \\
& = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{1-ax} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} \cdot \frac{1}{1-bx} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{1-cx} \\
& = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} (1+ax+a^2x^2+\dots) + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} (1+bx+b^2x^2+\dots) \\
& \quad + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} (1+cx+c^2x^2+\dots)
\end{aligned}$$

$$\therefore H_r = \frac{ar^{+2}(b-c) + br^{+2}(c-a) + cr^{+2}(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

故ニ今 $D = -(a-b)(b-c)(c-a)$ トオケル (2) ハ次ノ如クナル

$$\begin{aligned}
Dx^n + \{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)\}x^{n-1} + \{a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)\}x^{n-2} \\
+ \dots + \{a^{n+2}(b-c) + b^{n+2}(c-a) + c^{n+2}(a-b)\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore Dx^n + (b-c)(a^3x^{n-1} + a^4x^{n-2} + \dots + a^{n+1}x + a^{n+2}) \\
+ (c-a)(b^3x^{n-1} + b^4x^{n-2} + \dots + b^{n+1}x + b^{n+2}) \\
+ (a-b)(c^3x^{n-1} + c^4x^{n-2} + \dots + c^{n+1}x + c^{n+2}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore Dx^n + (b-c) \frac{a^3x^{n-1} \left(1 - \frac{a^n}{x^n}\right)}{1 - \frac{a}{x}} + (c-a) \frac{b^3x^{n-1} \left(1 - \frac{b^n}{x^n}\right)}{1 - \frac{b}{x}} \\
+ (a-b) \frac{c^3x^{n-1} \left(1 - \frac{c^n}{x^n}\right)}{1 - \frac{c}{x}} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore x^n + \frac{a^3(x^n - a^n)}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^3(x^n - b^n)}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \frac{c^3(x^n - c^n)}{(c-a)(c-b)(x-c)} = 0$$

兩邊ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ乘ズルベ

$$\begin{aligned}
x^n(x-a)(x-b)(x-c) + \frac{a^3(x^n - a^n)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(x^n - b^n)(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \\
+ \frac{c^3(x^n - c^n)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore x^n \left\{ (x-a)(x-b)(x-c) + \frac{a^3(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \right\} \\
= a^{n+3} \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^{n+3} \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^{n+3} \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}
\end{aligned}$$

左邊ノ括弧内ハ x^3 トナルコト明カナリ, 之ニ由ツテ (2) ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$

ヲ乗ズレバ (1) トナルヲ知ル、故ニ (1) ノ根ヨリ a, b, c ヲ除キタル残りノ n 個ノ根ハ總テ (2) ノ根ナリ。

13. 與ヘラレタル方程式ノ根ノ (1) 逆數ヲ根トスル方程式 (2) 符號ヲ變ジタルモノヲ根トスル方程式 (3) k 倍ヲ根トスル方程式及ビ (4) 與ヘラレタル方程式ノ根ヨリ m ダケ大ナル根ヲ有スル方程式ヲ作レ。

〔解〕 與ヘラレタル方程式ヲ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0 \quad (A)$$

トシ、此方程式ノ任意ノ一ノ根ヲ x トス

(1) (A) ニ於テ $y = \frac{1}{x}$ 即チ $x = \frac{1}{y}$ トオケバ y 即チ $\frac{1}{x}$ ヲ根トスル方程式ヲ得、即チ

$$\left(\frac{1}{y}\right)^n + p_1 \left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + p_2 \left(\frac{1}{y}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1} \left(\frac{1}{y}\right) + p_n = 0$$

$$\therefore p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \dots + p_1 y + 1 = 0$$

(2), (A) ニ於テ $y = -x$ 、即チ $x = -y$ トオケバ y 即チ $-x$ ヲ根トスル方程式ヲ得、即チ

$$(-y)^n + p_1 (-y)^{n-1} + p_2 (-y)^{n-2} + \dots + p_{n-1} (-y) + p_n = 0$$

$$\therefore (-1)^n \{y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} p_{n-1} y + (-1)^n p_n\} = 0$$

$$\therefore y^n - p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n = 0$$

(3), (A) ニ於テ $y = kx$ 、即チ $x = \frac{y}{k}$ トオケバ y 即チ kx ヲ根トスル方程式ヲ得、

$$\text{即チ } \left(\frac{y}{k}\right)^n + p_1 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + p_2 \left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1} \left(\frac{y}{k}\right) + p_n = 0$$

$$\therefore y^n + p_1 k y^{n-1} + p_2 k^2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} k^{n-1} y + p_n k^n = 0,$$

(4), (A) ニ於テ $y = x+m$ 、即チ $x = y-m$ トオケバ y 即チ $x+m$ ヲ根トスル方程式ヲ得、即チ

$$(y-m)^n + p_1 (y-m)^{n-1} + p_2 (y-m)^{n-2} + \dots + p_{n-1} (y-m) + p_n = 0.$$

14. $x^3 - px^2 + r = 0$ ノ三根ヲ a, β, γ トシ $\frac{\beta+\gamma}{a}, \frac{\gamma+a}{\beta}, \frac{a+\beta}{\gamma}$ ヲ三根トスル方程式ヲ作レ。

〔解〕 所要ノ方程式ハ

$$\left(x - \frac{\beta+\gamma}{a}\right) \left(x - \frac{\gamma+a}{\beta}\right) \left(x - \frac{a+\beta}{\gamma}\right) = x^3 - \left(\frac{\beta+\gamma}{a} + \frac{\gamma+a}{\beta} + \frac{a+\beta}{\gamma}\right) x^2 + \left\{ \frac{(\beta+\gamma)(\gamma+a)}{\alpha\beta} + \frac{(\gamma+a)(\alpha+\beta)}{\beta\gamma} + \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{\gamma\alpha} \right\} x - \frac{(\beta+\gamma)(\gamma+a)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (1)$$

$$\text{然ルニ } \frac{\beta+\gamma}{a} + \frac{\gamma+a}{\beta} + \frac{a+\beta}{\gamma} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+a)}{\alpha\beta} + \frac{(\gamma+a)(\alpha+\beta)}{\beta\gamma} + \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{\gamma\alpha} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+a)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + 2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

而シテ $\alpha+\beta+\gamma=p, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0, \alpha\beta\gamma=-r,$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = p^2,$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma = p^3 - 3r$$

是等ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ所要ノ方程式ハ次ノ如クナル、

$$x^3 - \frac{p^3 - (p^3 - 3r)}{-r} x^2 + \frac{p^3 - 3r}{-r} x - \frac{p^3 - (p^3 - 3r) - 2r}{-r} = 0,$$

$$\text{即チ } rx^3 + 3rx^2 + (3r - p^3)x + r = 0,$$

或ハ又次ノ如ク方程式ノ變更ヲ行フモ可ナリ

$$\alpha+\beta+\gamma=p \quad \therefore \frac{\beta+\gamma}{a} = \frac{p-\alpha}{a} = \frac{p}{a} - 1,$$

$$\text{同様ニ } \frac{\gamma+a}{\beta} = \frac{p}{\beta} - 1, \quad \frac{a+\beta}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - 1,$$

依ツテ所要ノ方程式ノ根ヲ y トシ所題ノ方程式ノ根ヲ x トスレバ

$$y = \frac{p}{x} - 1 \quad \therefore x = \frac{p}{y+1},$$

$$\text{然ルニ } x^3 - px^2 + r = 0 \quad \therefore \left(\frac{p}{y+1}\right)^3 - p\left(\frac{p}{y+1}\right)^2 + r = 0$$

$$\therefore ry^3 + 3ry^2 + (3r - p^3)y + r = 0.$$

15. 方程式 $x^3 + px + q = 0$ ノ三根ヲ a, β, γ シ $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-a)^2, (a-\beta)^2$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

$$[\text{解}] \quad (\beta-\gamma)^2 = (\beta+\gamma)^2 - 4\beta\gamma$$

$$\text{然ルニ} \quad \alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$$

$$\therefore \beta+\gamma=-\alpha, \quad \beta\gamma=p-\alpha(\beta+\gamma)=p+\alpha^2$$

$$\therefore (\beta-\gamma)^2 = \alpha^2 - 4(p+\alpha^2) = -(3\alpha^2+4p)$$

$$\text{同様ニ} \quad (\gamma-\alpha)^2 = -(3\beta^2+4p), \quad (\alpha-\beta)^2 = -(3\gamma^2+4p)$$

故ニ所要ノ方程式ノ根ヲ y , 所題ノ方程式ノ根ヲ x トスレバ

$$y = -(3x^2+4p) \quad \text{即チ} \quad x^2 = -\frac{y+4p}{3}$$

之ト所題ノ方程式トヨリ x ヲ消去スレバ所要ノ方程式ヲ得,

然ルニ所題ノ方程式ヨリ

$$x(x^2+p) = -q \quad \therefore x^2(x^2+p) = -q^2$$

$$\therefore -\frac{y+4p}{3} \left(-\frac{y+4p}{3} + p \right)^2 = -q^2$$

$$\text{即チ} \quad (y+4p)(y+p)^2 + 27q^2 = 0$$

16. 方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トシ $\beta^2+\gamma^2+\delta^2, \gamma^2+\delta^2+\alpha^2, \delta^2+\alpha^2+\beta^2, \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

$$[\text{解}] \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q$$

$$\therefore \beta^2+\gamma^2+\delta^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 - 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta) - \alpha^2 \\ = p^2 - 2q - \alpha^2$$

$$\text{同様ニ} \quad \gamma^2+\delta^2+\alpha^2 = p^2 - 2q - \beta^2, \quad \delta^2+\alpha^2+\beta^2 = p^2 - 2q - \gamma^2, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = p^2 - 2q - \delta^2,$$

故ニ所要ノ方程式ノ根ヲ y トスレバ

$$y = p^2 - 2q - x^2, \quad \text{即チ} \quad x^2 = p^2 - 2q - y,$$

然ルニ所題ノ方程式ヨリ

$$x^2(x^2+q)+s = -x(p x^2+r),$$

$$\therefore \{x^2(x^2+q)+s\}^2 = x^2(p x^2+r)^2$$

$$\therefore \{(p^2-2q-y)(p^2-q-y)+s\}^2 = (p^2-2q-y)\{p(p^2-2q-y)+r\}^2$$

コレ即チ所要ノ方程式ナリ。

17. 方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ根ヲ α, β, γ トスルトキ $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$ ヲ根トスル六次方程式ハ $r^2(x^2+x+1)^3+q^2x^2(x+1)^2=0$ ナルコトヲ証セヨ。

$$[\text{解}] \quad \frac{\alpha}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ヲ三根トスル三次方程式ハ所題ノ方程式ニ於テ} \quad \frac{x}{\alpha} = y \quad \text{即チ}$$

$$x = \alpha y \quad \text{トキテ}$$

$$\alpha^3 y^3 + \alpha q y + r = 0$$

$$\text{同様ニ} \quad \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{及ビ} \quad \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\gamma} \quad \text{ヲ三根トスル方程式ハ}$$

$$\beta^3 y^3 + \beta q y + r = 0, \quad \gamma^3 y^3 + \gamma q y + r = 0$$

$$\text{故ニ} \quad 1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}, 1, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1 \quad \text{ヲ根トスル方程式ハ次ノ如シ}$$

$$(\alpha^3 y^3 + \alpha q y + r)(\beta^3 y^3 + \beta q y + r)(\gamma^3 y^3 + \gamma q y + r) = 0$$

即チ

$$(\alpha\beta\gamma)^3 y^9 + \alpha\beta\gamma(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)qy^7 + (\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3)ry^6 + \alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)q^2y^5 \\ + \{\alpha^3(\beta+\gamma)+\beta^3(\gamma+\alpha)+\gamma^3(\alpha+\beta)\}qry^4 + \{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)r^2+\alpha\beta\gamma q^3\}y^3 \\ + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)q^2ry^2 + (\alpha+\beta+\gamma)qr^2y + r^3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{然ルニ} \quad \alpha\beta\gamma = -r, \quad \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = q^2,$$

$$\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 - \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\} + 3\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ = q^3 + 3r^2,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = -2q$$

$$\alpha^3(\beta+\gamma)+\beta^3(\gamma+\alpha)+\gamma^3(\alpha+\beta) = -\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

$$= -\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\} = -(4q^2 - 2q^2) = -2q^2,$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3 - 3\alpha^2(\beta+\gamma) - 3\alpha(\beta+\gamma)^2 - 3\beta\gamma(\beta+\gamma) = 3\alpha\beta\gamma = -3r$$

故ニ (1) ハ次ノ如クナル

$$-r^3y^9 - rq^3y^7 + (q^3+3r^2)ry^6 + 2q^3ry^5 - 2q^3ry^4 - (3r^3+rq^3)y^3 + q^3ry^2 + r^3 = 0$$

$$\text{即チ} \quad r^2(y^3-1)^3 + q^3y^2(y^2-1)^2(y-1) = 0$$

コレヨリ $1, 1, 1$ ナル三根ヲ除クヌメニ $(y-1)^3 = 0$ テ割レバ

$$r^2(y^2+y+1)^3+q^2y^2(y+1)^2=0$$

或ハ次ノ如クスルモ可ナリ

$$\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} \text{ ヲ二根トスル二次方程式ハ } x^2 - \frac{\beta+\gamma}{\alpha}x + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} = 0 \text{ 即チ } x^2 + x + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} = 0$$

$$\text{同様ニ } \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} \text{ ヲ二根トスル二次方程式ハ } x^2 + x + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} = 0,$$

$$x^2 + x + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = 0, \text{ 故ニ所要ノ方程式ハ}$$

$$\left(x^2 + x + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)\left(x^2 + x + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\right)\left(x^2 + x + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (x^2+x)^3 + \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)(x^2+x)^2 \\ + \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \cdot \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} \cdot \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)(x^2+x) + 1 = 0 \end{aligned}$$

コレヨリ $(x^2+x)^2, (x^2+x)$ ノ係數ヲ q, r ニテ表ハセバ所要ノ結果ヲ得。

18. 1ノ11根乗ノ虚數ノーツヲ a トシ

$$a+a^{10}, a^2+a^9, a^3+a^8, a^4+a^7, a^5+a^6$$

ヲ根トスル五次方程式ヲ作レ。

〔解〕 $a^{11}=1$ ナル故ニ

$$a+a^{10} = a + \frac{1}{a}, \quad a^2+a^9 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad a^3+a^8 = a^3 + \frac{1}{a^3}, \quad a^4+a^7 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

$$a^5+a^6 = a^5 + \frac{1}{a^5}$$

而シテ a, a^2, a^3, a^4, a^5 ハ皆 1ノ11乗根ノ虚數ニシテ (第八章問. 18)

即チ何レモ

$$x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \quad (1)$$

$$\text{ノ根ナリ, 依ツテ今 } y = x + \frac{1}{x} \quad (2)$$

トオキ (1), (2) ヲリ x ヲ消去スレバ所要ノ方程式ヲ得ベシ, (1) ヲ $x^5 =$ テ割

$$\text{レズ } x^5 + \frac{1}{x^5} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$$

$$(2) \text{ ヲリ } x + \frac{1}{x} = y, \quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = (y^2 - 2)^2 - 2$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = y(y^2 - 3),$$

$$\begin{aligned} x^5 + \frac{1}{x^5} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = y\{(y^2 - 2)^2 - 2 - (y^2 - 2) + 1\} \\ &= y(y^4 - 5y^2 + 5) \end{aligned}$$

$$\therefore y(y^4 - 5y^2 + 5) + (y^2 - 2)^2 - 2 + y(y^2 - 3) + y^2 - 2 + y + 1 = 0$$

$$\text{即チ } y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0,$$

19. 方程式 $x^n + x + 1 = 0$ (1), ノ根ヲ a_1, a_2, \dots, a_n トスレバ

$$(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) - (a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{及ビ } \left(\frac{1}{a_1^{n-1}} + \frac{1}{a_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \dots + \frac{1}{a_n^n}\right) \\ = n + (-1)^{n+1}2 \end{aligned}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式 (1) ヲリ

$$x(x^{n-1} + 1) = -1, \quad \therefore x^{n-1}(x^{n-1} + 1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

$$y = x^{n-1} \text{ トオケバ } y(y+1)^{n-1} = (-1)^{n-1}, \text{ 即チ}$$

$$y^n + (n-1)y^{n-1} + \dots = (-1)^{n-1} \quad (2)$$

(2) ノ根ハ $a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \dots, a_n^{n-1}$ ナルコト明カナリ, 故ニ

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} = -(n-1)$$

次ニ (1) ヲリ

$$x^n + 1 = -x \quad \therefore (x^n + 1)^n = (-x)^n$$

$$y = x^n \text{ トオケバ } (y+1)^n = (-1)^n y \text{ 即チ}$$

$$y^n + ny^{n-1} + \dots = (-1)^n y \quad (3)$$

(3) ノ根ハ $a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n$ ナル故ニ

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n = -n,$$

$$\therefore (a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) - (a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) = -(n-1) + n = 1$$

$$\text{及ニ } y = \frac{1}{x^{n-1}} \text{ ト (1) ヲリ } x \text{ ヲ消去スレバ}$$

$$\frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} + 1 \right)^{n-1} = (-1)^{n-1} \quad \therefore (1+y)^{n-1} = (-1)^{n-1} y^{n-1}$$

$$\therefore y^n + (-1)^n y^{n-1} + \dots = 0 \quad (4)$$

(4)ノ根ハ $\frac{1}{\alpha_1^{n-1}}, \frac{1}{\alpha_2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{\alpha_n^{n-1}}$ ナル故ニ

$$\frac{1}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{1}{\alpha_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^{n-1}} = (-1)^{n+1}$$

次ニ $y = \frac{1}{x^n}$ ト (1) トヨリ x ヲ消去スレバ

$$\left(\frac{1}{y} + 1 \right)^n = \frac{(-1)^n}{y} \quad \therefore (1+y)^n = (-1)^n y^{n-1}$$

$$\therefore y^n + (n+(-1)^{n+1})y^{n-1} + \dots = 0 \quad (5)$$

(5)ノ根ハ $\frac{1}{\alpha_1^n}, \frac{1}{\alpha_2^n}, \dots, \frac{1}{\alpha_n^n}$ ナル故ニ

$$\frac{1}{\alpha_1^n} + \frac{1}{\alpha_2^n} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^n} = -(n+(-1)^{n+1})$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{1}{\alpha_2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^{n-1}} \right) - \left(\frac{1}{\alpha_1^n} + \frac{1}{\alpha_2^n} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^n} \right) = n + (-1)^{n+1}$$

20. 外接圓ノ半徑 R , 内接圓ノ半徑 r , 周圍 $2s$ ナル三角形ノミツノ高サハ
來ノ三次方程式ノ根ナルコトヲ証セヨ。

$$2Rx^3 - (s^2 + r^2 + 4Rr)x^2 + 4rs^2x - 4r^2s^2 = 0$$

[解] 三邊ヲ a, b, c トシ對應スル高サヲ α, β, γ トスレバ初等幾何學ニヨリ

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = 2rs \quad (1)$$

$$\frac{bc}{\alpha} = \frac{ac}{\beta} = \frac{ab}{\gamma} = 2R \quad (2)$$

$$r^2s = (s-a)(s-b)(s-c) \quad (3)$$

(1), (2) ヲヨリ

$$(2R\alpha)(\beta\gamma) = (bc)(\beta\gamma) = (b\beta)(c\gamma) = 4r^2s^2, \quad \therefore 2R\alpha\beta\gamma = 4r^2s^2$$

$$\text{又 } (2R\alpha)(b\beta) = bc(2rs) \quad \therefore 2R\alpha\beta = 2crs$$

$$\text{同様ニ } 2R\beta\gamma = 2ars, \quad 2R\gamma\alpha = 2brs$$

$$\therefore 2R(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2(a+b+c)rs = 4rs^2$$

又 (3) ヲヨリ

$$r^2s = s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc = -s^3 + 2Rs(\alpha+\beta+\gamma) - 4Rrs$$

$$\therefore 2R(\alpha+\beta+\gamma) = r^2 + s^2 + 4Rr,$$

依ツテ α, β, γ ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ

$$x^3 - \frac{r^2+s^2+4Rr}{2R}x^2 + \frac{4rs^2}{2R}x - \frac{4r^2s^2}{2R} = 0$$

即チ $2Rx^3 - (r^2+s^2+4Rr)x^2 + 4rs^2x - 4r^2s^2 = 0,$

21. 一根ガ $\sqrt{2}+i$ ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ,

$$2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 27x + 81 = 0,$$

[解] 基本定理 III ニヨリ所題ノ方程式ハ又 $\sqrt{2}-i$ ナル根ヲ有ス, 且ツ各係數ハ有理數ナル故ニ尙 $-\sqrt{2}+i, -\sqrt{2}-i$ ナル根ヲ有ス, 即チ所題ノ方程式ハ $\sqrt{2}+i, \sqrt{2}-i, -\sqrt{2}+i, -\sqrt{2}-i$ ナル四ツノ根ヲ有ス, 從ツテ其左邊ハ

$$\begin{aligned} & (x-\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}-i)(x+\sqrt{2}+i) \\ &= (x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3) = (x^2+3)^2 - 8x^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 9 \end{aligned}$$

ニテ整除セラル, 實際割リ算ヲ行ヘバ其商トシテ $2x^2-3x+9$ ヲ得, 故ニ殘ル

$$2x^2-3x+9=0 \quad \text{ヨリ } x = \frac{3}{4}(1 \pm i\sqrt{7})$$

22. 二根ガ $a+bi$ 及ビ $a+2bi$ ナル形ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ,

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = 0,$$

[解] 二根ガ $a+bi, a+2bi$ ナラバ他ノ二根ハ基本定理 III ニヨリ $a-bi, a-2bi$ ナリ, 然ルニ基本定理 II ニヨリ

$$(a+bi) + (a+2bi) + (a-bi) + (a-2bi) = 4 \quad (1)$$

$$(a+bi)(a+2bi)(a-bi)(a-2bi) = 10 \quad (2)$$

$$(1) \text{ ヲヨリ } a=1, \quad (2) \text{ ヲヨリ } (a^2+b^2)(a^2+4b^2) = (1+b^2)(1+4b^2) = 10$$

$$\therefore b^2=1 \quad \text{又ハ } -\frac{9}{4}$$

然ルニ b ハ實數ナルコト勿論ナル故ニ $b = \pm 1,$

依ツテ所要ノ四根ハ $1 \pm i, 1 \pm 2i$ ナリ。

23. 二根ノ和ガ 0 ナルコトヲ知りテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 8x + 6 = 0,$$

【解】 和ガ 0 ナル二根ヲ $\alpha, -\alpha$ トスレバ

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 - 5\alpha^2 - 8\alpha + 6 = 0,$$

$$\alpha^4 - 4\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha + 6 = 0$$

$$\therefore 8\alpha^3 - 16\alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 0 \quad \text{又ハ} \pm\sqrt{2},$$

然ルニ $\alpha = 0$ ハ所題ノ方程式ヲ満足セシメズ, 依ツテ $\alpha = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$,

殘ル二根ハ $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$ ニテ所題ノ方程式ノ左邊ヲ割リテ得

ベキ $x^2 + 4x - 3 = 0$ ヲ $x = -2 \pm \sqrt{7}$ ナルヲ知ル。

24. 三根ガ等差級數ヲナスコトヲ知りテ $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ ヲ解ケ。

【解】 三根ハ等差級數ヲナス故ニ中項ヲ α , 公差ヲ δ トスレバ三根ハ $\alpha - \delta, \alpha, \alpha + \delta$

ニテ表ハサル, 然ルトキハ

$$(\alpha - \delta) + \alpha + (\alpha + \delta) = 15, \quad \therefore \alpha = 5,$$

所題ノ方程式ノ左邊ヲ $x - 5$ ニテ割レバ

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \quad \therefore (x - 3)(x - 7) = 0$$

故ニ所要ノ三根ハ 3, 5, 7 ナリ。

25. 三根ガ等比級數ヲナスコトヲ知りテ $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ ヲ解ケ。

【解】 三根ハ等比級數ヲナス故ニ中項ヲ α , 公比ヲ r トスレバ三根ハ $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ =

テ表ハサル, 然ルトキハ

$$\frac{\alpha}{r} \cdot \alpha \cdot \alpha r = 8 \quad \therefore \alpha = 2,$$

所題ノ方程式ノ左邊ヲ $x - 2$ ニテ割レバ

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \therefore (x - 1)(x - 4) = 0$$

故ニ所要ノ根ハ 1, 2, 4 ナリ。

26. 一根ガ他ノ一根ノ 2 倍ニ等シキコトヲ知りテ $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ ヲ解ケ。

【解】 一根ガ他ノ一根ノ 2 倍ニ等シキ故ニ三根ヲ $\alpha, 2\alpha, \beta$ トスレバ

$$\alpha + 2\alpha + \beta = 3, \quad 2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha\beta = -10$$

$$\text{即チ} \quad \beta = 3(1 - \alpha), \quad 2\alpha^2 + 3\alpha\beta = -10$$

$$\therefore 2\alpha^2 + 9\alpha(1 - \alpha) = -10$$

$$\therefore 7\alpha^2 - 9\alpha - 10 = 0 \quad \therefore \alpha = 2 \quad \text{又} \quad \frac{5}{7}$$

$$\alpha = 2 \quad \text{ナラバ} \quad \beta = -3, \quad \alpha = -\frac{5}{7} \quad \text{ナラバ} \quad \beta = \frac{36}{7}$$

然ルニ $2\alpha^2\beta = -24$ ナルヲ要スル故ニ $\alpha = 2, \beta = -3$, 依ツテ所要ノ根

ナリ, 或ハ又次ノ如クスルモ可シ,

所題ノ方程式ニ於テ $y = 2x$ 即チ $x = \frac{y}{2}$ トオケバ

$$y^3 - 6y^2 - 40y + 192 = 0$$

y ハ x ノ 2 倍ナル故ニ原方程式ト此方程式ハ共通ノ一根ヲ有ス, 即チ

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 - 40x + 192 = 0$$

ハ共通ノ一根ヲ有シ其共通根ガ原方程式ノ題意ニイフ處ノ一根ナリ, 然ルニ此兩

方程式ノ左邊ノ最大公約數ヲ求ムレバ $x - 4$, 故ニ原方程式ノ一根ハ 4 ナリ, 從ツ

テ他ノ一根ハ 2, 從ツテ殘ル一根ハ根ト係數トノ關係ヨリ -3 ナルヲ知ル。

27. 二根ノ積ガ 2 ニ等シキコトヲ知りテ $3x^4 - 20x^3 + 27x^2 + 26x - 24 = 0$ ヲ解ケ。

【解】 四根ノ積ハ $\frac{-24}{3} = -8$ ナル故ニ他ノ二根ノ積ハ -4 ナリ, 故ニ

$$x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 9x^2 + \frac{26}{3}x - 8 = (x^2 + px + 2)(x^2 + qx - 4)$$

トオキ x^3 , 及 x ノ係數ヲ等シトオケバ

$$p + q = -\frac{20}{3}, \quad -4p + 2q = \frac{26}{3} \quad \therefore p = -\frac{11}{3}, \quad q = -3$$

\therefore 所題ノ方程式ハ次ノ如クナル

$$3\left(x^2 - \frac{11}{3}x + 2\right)(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$\therefore (3x^2 - 11x + 6)(x^2 - 3x - 4) = 0$$

∴ (3x-2)(x-3)(x-4)(x+1)=0

∴ x = 2/3, 3, 4, -1,

28. 三根方調和級數ヲナスコトヲ知りテ 15x^3-13x^2-3x+1=0 ヲ解ケ。

【解】 所題ノ方程式ニ於テ y=1/x 即チ x=1/y トオケバ

15/y^3 - 15/y^2 - 3/y + 1 = 0

即チ y^3 - 3y^2 - 13y + 15 = 0 (1)

(1)ノ原方程式ノ根ノ逆數ヲ根トスルガ故ニ(1)ノ三根ハ題意ニヨリ等差級數ヲナス、故ニ其中項ヲα、公差ヲdトスレバ三根ハα-d, α, α+dニシテ

(α-d)+α+(α+d)=3 ∴ α=1,

又 (α-d)α(α+d)=-15 ∴ d=±4

故ニ(1)ノ三根ハ -3, 1, 5 ナリ、從ツテ原方程式ノ三根ハ -1/3, 1, 1/5 ナリ。

29. 一根本他ノ一根本ヨリ 2ダケ大ナルコトヲ知りテ次ノ方程式ヲ解ケ、

x^3-4x^2-x+4=0 (1)

【解】 (1)ノ根ヲ 2ダケ増スヌメニ y=x+2 即チ x=y-2 トオケバ

(y-2)^3-4(y-2)^2-(y-2)+4=0

即チ y^3-10y^2+27y-18=0 (2)

(1), (2)ハ共通ノ一根本有シ其共通根ハ(1)ノ大ナル方ノ根ナリ、依ツテ

x^3-4x^2-x+4, x^3-10x^2+27x-18

ノ最大公約數ヲ求ムレバ x-1, 故ニ(1)ノ大ナル方ノ根ハ 1, 從ツテ小ナル方ノ根ハ -1, 從ツテ根ト係數トノ關係ヨリ殘ル一根本ハ 4ナルヲ知ル。

30. 第二項ヲ消去スルコトニ由ツテ次ノ方程式ヲ解ケ、

x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0 (1)

【解】 第二項ヲ消去スルヌメニ x=y+m トオケバ

(y+m)^4-12(y+m)^3+49(y+m)^2-78(y+m)+40=0 (2)

Handwritten notes: 4 2/3, 4 28/n

第二項即チ y^3ノ係數ヲ求ムレバ 4m-12, 故ニ第二項ガ消失スルヌメニハ

4m-12=0 ∴ m=3,

故ニ(2)ハ次ノ如クナル

(y+3)^4-12(y+3)^3+49(y+3)^2-78(y+3)+40=0

整頓スレバ

y^4-5y^2+4=0, ∴ y^2=1 又ハ 4 ∴ y=±1, ±2,

∴ x=y+m=y+3 即チ x=1, 2, 4, 5,

31. 方程式 x^n+npnx^{n-1}+n(n-1)/2! qx^{n-2}+...=0 ノ根ガ等差級數ヲナ

ストキハ各根ハ nガ偶數ナルトキハ k√{3(p^2-q)/(n+1)}-p ニ於テ k=1, 3, 5, ... トオキタルモノニ等シク. nガ奇數ナルトキハ k=2, 4, 6, ... トオキタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

【解】 各根ヲ a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d トスレバ基本定理 IIニヨリ

n/2(2a+(n-1)d)=-np, ∴ d=-2(p+a)/(n-1),

又各二根ノ積ノ和ヲ Pトスレバ

P=n(n-1)q/2! = 1/2{(-np)^2-[a^2+(a+d)^2+...+(a+(n-1)d)^2]},

然ルニ a^2+(a+d)^2+...+(a+(n-1)d)^2

=na^2+2ad(1+2+3+...+n-1)+d^2{1^2+2^2+...+(n-1)^2}

=na^2+n(n-1)ad+(n-1)n(2n-1)/6 d^2,

∴ n^2p^2-n(n-1)q=na^2+n(n-1)ad+(n-1)n(2n-1)/6 d^2

=na^2-2n(p+a)a+(2n(2n-1)(p+a)^2)/3(n-1)

∴ np^2-(n-1)q=p^2-(p+a)^2+(2(2n-1)(p+a)^2)/3(n-1)

∴ (p+a)^2=3(n-1)^2(p^2-q)/(n+1), ∴ p+a=±(n-1)√{3(p^2-q)/(n+1)},

∴ d=±2√{3(p^2-q)/(n+1)},

今 $\sqrt{\frac{3(p^2-q)}{n+1}}=R$ トキ $a=-p+(n-1)R, d=-2R$ トスレバ所要ノ根ノ
 $-p+(n-1)R, -p+(n-3)R, -p+(n-5)R, \dots$

ニシテ即チ n ガ偶數ナラバ $kR-p$ ニ於テ $k=1, 3, 5, \dots$ トオキタルモノニ
 等シク n ガ奇數ナラバ $k=2, 4, 6, \dots$ トオキタルモノニ等シ,

$a=-p-(n-1)R, d=2R$ ヲ取ルモ同様ナリ。

32. 方程式 $x^2-3x-1=0$ ノ一根ヲ α トスレバ他ノ二根ハ $2-\alpha^2$, 及ビ
 $\alpha^2-\alpha-2$ ナルコトヲ証セヨ。

[解] 題意ニヨリ $\alpha^2-3\alpha-1=0, \therefore \alpha(\alpha^2-3)=1, \therefore \alpha^2(\alpha^2-3)^2=1$

今 $\beta=2-\alpha^2$ トオケバ $\alpha^2=2-\beta,$

$$\therefore (2-\beta)((2-\beta)-3)^2=1, \therefore (2-\beta)(1+\beta)^2=1$$

$$\therefore \beta^2-3\beta-1=0,$$

故ニ β ハ又所題ノ方程式ノ一ツノ根ナリ, 次ニ殘ル一根ヲ γ トスレバ

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \therefore \gamma=\alpha-\beta=\alpha^2-\alpha-2,$$

33. $x^4+px^3-6x^2-px+1=0$ ノ一根ガ α ナルトキハ他ノ三根ハ $-\frac{1}{\alpha},$
 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ ナルコトヲ証セヨ。

[解] $\alpha^4+p\alpha^3-6\alpha^2-p\alpha+1=0$ ニ於テ $\beta=-\frac{1}{\alpha}$ 即チ $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ トオケバ

$$\frac{1}{\beta^4}-p\frac{1}{\beta^3}-6\frac{1}{\beta^2}+p\frac{1}{\beta}+1=0 \therefore 1-p\beta-6\beta^2+p\beta^3+\beta^4=0$$

即チ β モ亦所題ノ方程式ヲ満足セシム,

次ニ $\gamma=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ 即チ $\alpha=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ トオケバ

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^4+p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^3-6\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2-p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+1=0$$

$$\therefore (\gamma-1)^4+p(\gamma-1)^3(\gamma+1)-6(\gamma-1)^2(\gamma+1)^2-p(\gamma-1)(\gamma+1)^3+(\gamma+1)^4=0$$

$$\therefore \gamma^4+p\gamma^3-6\gamma^2-p\gamma+1=0$$

即チ γ モ亦所題ノ方程式ヲ満足セシム, 從ツテ又 $-\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ モ亦所題ノ方
 程式ノ根ナリ。

34. a, b, c, d ガ等シカラザル正數ニシテ a, β, γ, δ ガ方程式

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} + \frac{x}{x-c} + x+d=0$$

ノ根ナルトキ

$$\frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)} = 0$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] 所題ノ方程式ノ分母ヲ去レバ

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+d(x-a)(x-b)(x-c)+3x^3-2(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x=0$$

a, β, γ, δ ハ此方程式ノ根ナリ故ニ上ノ左邊ハ x ノ如何ニ拘ラズ

$$(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

ニ等シ, 依ツテ $x=a$ トオケバ

$$3a^3-2(a+b+c)a^2+(bc+ca+ab)a=(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)$$

然ルニ此左邊ハ

$$a^3-a^2b-a^2c+abc=a(a-b)(a-c)$$

ニ等シ, 故ニ

$$\frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} = \frac{a}{(a-b)(a-c)}$$

同様ニ

$$\frac{b^2}{(b-a)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)} = \frac{b}{(b-c)(b-a)}$$

$$\frac{c^2}{(c-a)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)} = \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore \frac{a^2}{(a-a)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}$$

$$= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{a(b-c)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0,$$

35. $a, b, c, \dots; p, q, r, \dots$, 及 n が皆實數ナルトキハ m ノ如何ニ係ラズ方程式

$$\frac{p^2}{x-a} + \frac{q^2}{x-b} + \frac{r^2}{x-c} + \dots = m + n^2 x$$

ノ根ハ總テ實數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $\beta \neq 0$ = 等シカラザル實數トシ $x = \alpha + \beta i$ ナル根ヲ有ストスレバ

$$\frac{p^2}{(\alpha-a) + \beta i} + \frac{q^2}{(\alpha-b) + \beta i} + \frac{r^2}{(\alpha-c) + \beta i} + \dots = m + n^2(\alpha + \beta i)$$

從ツテ又基本定理 III ニヨリ

$$\frac{p^2}{(\alpha-a) - \beta i} + \frac{q^2}{(\alpha-b) - \beta i} + \frac{r^2}{(\alpha-c) - \beta i} + \dots = m + n^2(\alpha - \beta i)$$

此兩式ヲ邊々相減ズレバ

$$2\beta i \left\{ \frac{p^2}{(\alpha-a)^2 + \beta^2} + \frac{q^2}{(\alpha-b)^2 + \beta^2} + \frac{r^2}{(\alpha-c)^2 + \beta^2} + \dots + n^2 \right\} = 0$$

然ルニ $\beta \neq 0$ ニシテ且ツ括弧内ハ正ニシテ $0 =$ アラズ故ニ上ノ式ハ成立セズ、

依ツテ $\alpha + \beta i$ ナル根ヲ有セズ、從ツテ總テノ根ハ實數ナリ。

36. 次ノ方程式ノ根ハ總テ實數ナルコトヲ証セヨ、

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^{n-4} - \dots = 0, \quad (1)$$

〔解〕 n ガ偶數ナルトキハ所題ノ方程式 (1) ハ次ノ如クナル

$$x^{2n} - \frac{2n(2n-1)}{2!} x^{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!} x^{2n-4} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2n(2n-1)\dots 4, 3}{(2n-2)!} x^2 + (-1)^n = 0$$

即チ $1 - \frac{2n(2n-1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!} x^4 - \dots$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2n(2n-1)\dots 4, 3}{(2n-2)!} x^{2n-2} + (-1)^n x^{2n} = 0$$

然ルニ $(1+x)^{2n} = 1 + 2nx + \frac{2n(2n-1)}{2!} x^2 + \dots + x^{2n}$,

$$(1-x)^{2n} = 1 - 2nx + \frac{2n(2n-1)}{2!} x^2 - \dots + x^{2n}$$

$$\therefore (1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2 \left\{ 1 + \frac{2n(2n-1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!} x^4 + \dots + x^{2n} \right\}$$

$$\therefore (1+ix)^{2n} + (1-ix)^{2n} = 2 \left\{ 1 - \frac{2n(2n-1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} \right\}$$

故ニ (1) ハ次ノ方程式ト等値ナリ

$$(1+ix)^{2n} + (1-ix)^{2n} = 0 \quad (2)$$

同様ニ n ガ奇數ナルトキハ (1) ハ次ノ如クナル

$$x^{2n+1} - \frac{(2n+1)2n}{2!} x^{2n-1} + \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{4!} x^{2n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)2n\dots 4}{(2n-2)!} x^3 + (-1)^n (2n+1)x = 0,$$

即チ

$$(2n+1)x - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} x^3 + \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} x^5$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)2n\dots 3}{(2n-1)!} x^{2n-1} + (-1)^n x^{2n+1} = 0,$$

故ニ n ガ奇數ナルトキハ上ト同様ニ (1) ハ次ノ (3) ト等値ナリ、

$$(1+ix)^{2n+1} - (1-ix)^{2n+1} = 0, \quad (3)$$

依ツテ (2) 及ビ (3) ガ總テ實根ヲ有スルコトヲ証スレバヨシ、

今 α, β ヲ實數トシ (2) = $x = \alpha \pm \beta i$ ヲ代入スレバ

$$(1-\beta+\alpha i)^{2n} + (1+\beta-\alpha i)^{2n} = 0,$$

$$(1+\beta+\alpha i)^{2n} + (1-\beta-\alpha i)^{2n} = 0$$

$$\therefore \{(1-\beta)^2 + \alpha^2\}^{2n} = \{(1+\beta)^2 + \alpha^2\}^{2n} \quad (4)$$

(4) ガ成立スルタメニハ $\beta = 0$ ナラザルベカラザルコトハ容易ニ証明スルコトヲ

得、即チ (2) ヲ満足セシムル x ノ虚數根ナシ、

同様ニ (3) ヲ満足セシムル x ノ虚數根ナシ、

依ツテ所題ノ方程式 (1) ハ虚根ヲ有セズ。

或ハ又次ノ如ク考フルモ可ナリ,

De Moivre ノ定理ニヨリ

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \cos^n \theta + i n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos n\theta &= \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\cos n\theta}{\sin^n \theta} &= \cot^n \theta - \frac{n(n-1)}{2!} \cot^{n-2} \theta \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cot^{n-4} \theta - \dots \end{aligned}$$

故ニ所題ノ方程式ニ於テ $x = \cot \theta$ トオケバ所題ノ方程式ハ

$$\frac{\cos n\theta}{\sin^n \theta} = 0 \tag{5}$$

トナル故ニ

$$\cos n\theta = 0, \quad \sin \theta \neq 0, \quad \therefore n\theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{2k\pi}{n} \pm \frac{\pi}{2n}, \quad k=0, 1, 2, \dots, (n-1),$$

然ルニ n ガ偶數ナラバ

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n} \pm \frac{\pi}{2n}\right) = \cot\left(\frac{2k'\pi}{n} \pm \frac{\pi}{2n}\right), \quad k-k' = \frac{n}{2}$$

n ガ奇數ナラバ

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) = \cot\left(\frac{2k'\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right), \quad k-k' = \frac{n-1}{2}$$

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) = \cot\left(\frac{2k'\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right), \quad k-k' = \frac{n+1}{2}$$

故ニ(5)ヲ満足セシムル θ ノ總テノ値ニツキ $\cot \theta$ ノ異ナル値ハ丁度 n 個アリ,

從ツテ所題ノ方程式(1)ハ n 個ノ實根ヲ有ス, 從ツテ虚根ヲ有セズ。

37. n 個ノ虚數 $a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, \dots, a_n + b_n i$ ニ於テ b_1, b_2, \dots, b_n ガ同符號ニシテ且ツ

$$(x - \overline{a_1 + b_1 i})(x - \overline{a_2 + b_2 i}) \dots (x - \overline{a_n + b_n i}) = f(x) + i\varphi(x)$$

トスレバ方程式 $f(x) + k\varphi(x) = 0$ ハ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ, 但シ k ハ任意ノ實數ナリ。

(解) $f(x) + i\varphi(x) = (x - \overline{a_1 + b_1 i})(x - \overline{a_2 + b_2 i}) \dots (x - \overline{a_n + b_n i})$

i ノ符號ヲ變ズレバ

$$f(x) - i\varphi(x) = (x - \overline{a_1 - b_1 i})(x - \overline{a_2 - b_2 i}) \dots (x - \overline{a_n - b_n i})$$

然ルニ k ヲ任意ノ實數トスレバ

$$(1 - ki)(f(x) + i\varphi(x)) + (1 + ki)(f(x) - i\varphi(x)) = 2(f(x) + k\varphi(x))$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) + k\varphi(x) &= \frac{1 - ki}{2} \{f(x) + i\varphi(x)\} + \frac{1 + ki}{2} \{f(x) - i\varphi(x)\} \\ &= \frac{1 - ki}{2} (x - \overline{a_1 + b_1 i})(x - \overline{a_2 + b_2 i}) \dots (x - \overline{a_n + b_n i}) \\ &\quad + \frac{1 + ki}{2} (x - \overline{a_1 - b_1 i})(x - \overline{a_2 - b_2 i}) \dots (x - \overline{a_n - b_n i}) \end{aligned}$$

今 $f(x) + k\varphi(x) = 0$ ガ $x = \alpha + \beta i$ ナル虚根ヲ有ストスレバ

$$\begin{aligned} &\frac{1 - ki}{2} \{\alpha - a_1 + i(\beta - b_1)\} \{\alpha - a_2 + i(\beta - b_2)\} \dots \{\alpha - a_n + i(\beta - b_n)\} \\ &+ \frac{1 + ki}{2} \{\alpha_1 - a + i(\beta + b_1)\} \{\alpha - a_2 + i(\beta + b_2)\} \dots \{\alpha - a_n + i(\beta + b_n)\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又ハ } (1 - ki) \{\alpha - a_1 + i(\beta - b_1)\} \{\alpha - a_2 + i(\beta - b_2)\} \dots \{\alpha - a_n + i(\beta - b_n)\} \\ = -(1 + ki) \{\alpha - a_1 + i(\beta + b_1)\} \{\alpha - a_2 + i(\beta + b_2)\} \dots \{\alpha - a_n + i(\beta + b_n)\}, \end{aligned}$$

ナラザルベカラズ, 兩邊ノ絶對値ヲ求ムレバ

$$\begin{aligned} &\{(\alpha - a_1)^2 + (\beta - b_1)^2\} \{(\alpha - a_2)^2 + (\beta - b_2)^2\} \dots \{(\alpha - a_n)^2 + (\beta - b_n)^2\} \\ &= \{(\alpha - a_1)^2 + (\beta + b_1)^2\} \{(\alpha - a_2)^2 + (\beta + b_2)^2\} \dots \{(\alpha - a_n)^2 + (\beta + b_n)^2\}, \end{aligned}$$

然ルニ b_1, b_2, \dots, b_n ハ同符號ナル故ニ $\beta \neq 0$ ナル限リ m ノ如何ニ係ラズ

$$(\beta - b_m)^2 > (\beta + b_m)^2$$

ナルカ, 或ハ $(\beta - b_m)^2 < (\beta + b_m)^2$

ナリ, 從ツテ m ノ如何ニ係ラズ

$$(\alpha - a_m)^2 + (\beta - b_m)^2 > (\alpha - a_m)^2 + (\beta + b_m)^2$$

ナルカ, 或ハ $(\alpha - a_m)^2 + (\beta - b_m)^2 < (\alpha - a_m)^2 + (\beta + b_m)^2$

ナリ、何レニシテモ $\beta \neq 0$ ナル限り上ノ等式ハ成立セズ即チ $f(x) + k\varphi(x) = 0$ ハ
虚根ヲ有スルコト能ハズ。

38. 有理整方程式 $p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ ノ總テノ根ノ
絶対値ハ $1, \left| \frac{p_1}{p_0} \right|, \left| \frac{p_2}{p_0} \right|, \dots, \left| \frac{p_n}{p_0} \right|$

中ノ最大ノモノニ 1 ヲ加ヘタルモノヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 任意ノ一根ヲ α トスレバ

$$p_0 \alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

$$\therefore \alpha^n = -\frac{p_1}{p_0} \alpha^{n-1} - \frac{p_2}{p_0} \alpha^{n-2} - \dots - \frac{p_{n-1}}{p_0} \alpha - \frac{p_n}{p_0}$$

$$\therefore |\alpha|^n = \left| -\frac{p_1}{p_0} \alpha^{n-1} - \dots - \frac{p_{n-1}}{p_0} \alpha - \frac{p_n}{p_0} \right|$$

$$\leq \left| \frac{p_1}{p_0} \right| \cdot |\alpha|^{n-1} + \left| \frac{p_2}{p_0} \right| \cdot |\alpha|^{n-2} + \dots + \left| \frac{p_{n-1}}{p_0} \right| |\alpha| + \left| \frac{p_n}{p_0} \right|$$

今 $1, \left| \frac{p_1}{p_0} \right|, \left| \frac{p_2}{p_0} \right|, \dots, \left| \frac{p_n}{p_0} \right|$ 中ノ最大ノモノヲ P トスレバ

$$|\alpha|^n \leq P \{ |\alpha|^{n-1} + |\alpha|^{n-2} + \dots + |\alpha| + 1 \} = \frac{P(|\alpha|^n - 1)}{|\alpha| - 1}$$

若シ $|\alpha| \leq 1$ ナラバ $|\alpha|$ ハ當然 $P+1$ ヨリ小ニシテ本題ハ成立スル故ニ $|\alpha| > 1$
ナル場合ヲ考フルニ此場合ニハ上ノ不等式ヨリ

$$|\alpha|^n < \frac{P|\alpha|^n}{|\alpha| - 1} \quad \therefore 1 < \frac{P}{|\alpha| - 1} \quad \therefore |\alpha| < P+1,$$

即チ任意ノ根ノ絶対値ハ $P+1$ ヨリ小ナリ。

39. 方程式 $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ ニ於テ絶対値ノ最大ナル
負ノ係數ヲ $-P$ トスレバ此方程式ノ正根ハ $P+1$ ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $x > 0$ ナルトキハ x^n, x^{n-1}, \dots, x ハ皆正ナル故ニ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n \geq x^n - P(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{然ルニ } x^n - P(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - \frac{P(x^n - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - (P+1)x^n + P}{x - 1}$$

若シ $x \geq P+1$ ナラバコノ兩邊ニ x^n ヲ乘ズレバ $x^{n+1} \geq (P+1)x^n$

$$\therefore x^{n+1} - (P+1)x^n \geq 0$$

$$\therefore x^{n+1} - (P+1)x^n + P > 0$$

$$\therefore \frac{x^{n+1} - (P+1)x^n + P}{x - 1} > 0$$

$$\therefore x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n > 0$$

即チ $P+1$ ヨリ小ナラザル x ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ノ左邊ハ常ニ正ニシテ
0 トナラズ、依ツテ所題ノ方程式ニ正根アリトスレバソレハ $P+1$ ヨリ小ナラザ
ルベカラズ。

40. 方程式 $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ ニ於テ

$$p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_{r-1} > 0, p_r < 0$$

ニシテ絶対値ノ最大ナル負ノ係數ヲ $-P$ トスレバ此方程式ノ正根ハ $\sqrt{P+1}$
ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 前問ト同様ニ $x > 0$ ナルトキハ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n > x^n - P(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \dots + x + 1)$$

$$\text{然ルニ } x^n - P(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \dots + x + 1) = x^n - \frac{P(x^{n-r+1} - 1)}{x - 1}$$

若シ $x \geq \sqrt{P+1}$ ナラバ

$$(x-1)^r \geq P, \quad \therefore (x-1)^{r-1}(x^{n-r+1} - 1) \geq \frac{P(x^{n-r+1} - 1)}{x - 1}$$

$$\text{然ルニ } (x-1)^{r-1}(x^{n-r+1} - 1) < x^{r-1}(x^{n-r+1} - 1) = x^n - x^{r-1}$$

$$\therefore x^n - x^{r-1} > \frac{P(x^{n-r+1} - 1)}{x - 1}$$

$$\therefore x^n - \frac{P(x^{n-r+1} - 1)}{x - 1} > x^{r-1} > 0,$$

$$\therefore x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n > 0$$

即チ $\sqrt{P+1}$ ヨリ小ナラザル x ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ノ左邊ハ常ニ正ニ
シテ 0 トナラズ、依ツテ正根アリトスレバソレハ $\sqrt{P+1}$ ヨリ小ナラザルベカ
ラズ。

41. $p_0=1$ ニシテ且ツ p_1, p_2, \dots, p_n ガ皆整数ナル有理整方程式

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

ノ有理數ノ根ハ皆整数ニシテ而モ p_n ノ因數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 今 $\frac{h}{k}$ ヲ既約分數トシ $x = \frac{h}{k}$ トオケバ

$$p_0\left(\frac{h}{k}\right)^n + p_1\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1} + \dots + p_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right) + p_n = 0$$

然ルニ $p_0=1$,

$$\therefore -\left(\frac{h}{k}\right)^n = p_1\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{h}{k}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right) + p_n$$

$$\therefore -\frac{h^n}{k^n} = p_1h^{n-1} + p_2h^{n-2}k + \dots + p_{n-1}h^{n-2}k^{n-1} + p_nk^{n-1}$$

右邊ハ整数ナル故ニ左邊モ亦整数ナラザルベカラズ、然ルニ h, k ハ公約數ヲ有セズ、故ニ $k=1$ ナラザルベカラズ、即チ有理數ノ根ガアラバソレハ整数ナラザルベカラズ、次ニ $k=1$ ナル故ニ

$$h^n + p_1h^{n-1} + p_2h^{n-2} + \dots + p_{n-1}h + p_n = 0$$

$$\therefore h^{n-1} + p_1h^{n-2} + p_2h^{n-3} + \dots + p_{n-1} = -\frac{p_n}{h}$$

左邊ハ整数ナル故ニ右邊モ整数ナラザルベカラズ、即チ h ハ p_n ノ因數ナラザルベカラズ。

〔注意〕 p_0 ガ 1 ナラザル整数ナル場合ニモ若シ整数根ガアラバ其根ハ p_0 ノ因數ナルコトハ上ノ証明ヨリ明カナリ。

42. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$ ヲ解ケ。

〔解〕 若シ有理根アリトスレバ 24 ノ因數 $-1, -2, -3, -4, -6, -8, -12, -24$ ノ中ナリ、依ツテ簡單ナルモノヨリ實際試メシテ行フコトニ由ツテ $x=1$ 、及ビ 2 ハ其根ナルヲ知ル、依ツテ殘ル二根ヲ α, β トスレバ根ト係數トノ關係ヨリ

$$1+2+\alpha+\beta=2, \quad 1 \cdot 2 \cdot \alpha\beta = -24$$

$$\text{即チ } \alpha+\beta=-1, \quad \alpha\beta=-12 \quad \therefore \alpha=3, \quad \beta=-4,$$

故ニ所題ノ方程式ノ根ハ 1, 2, 3, -4 ナリ。

43. $x^3 - 11x - 20 = 0$ ノ虚數根ヲ求メヨ。

〔解〕 $x = \alpha + \beta i$ トオケバ

$$(\alpha + \beta i)^3 - 11(\alpha + \beta i) - 20 = 0$$

$$\text{即チ } \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - 11\alpha - 20 + i(3\alpha^2\beta - \beta^3 - 11\beta) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - 11\alpha - 20 = 0 \quad (1)$$

$$3\alpha^2\beta - \beta^3 - 11\beta = 0 \quad (2)$$

$\beta \neq 0$ ナル故ニ (2) ヲリ

$$\beta^2 = 3\alpha^2 - 11$$

$$(1) \text{ニ代入スレバ } \alpha^3 - 3\alpha(3\alpha^2 - 11) - 11\alpha - 20 = 0$$

$$\therefore 4\alpha^3 - 11\alpha + 10 = 0 \quad (3)$$

(3) ガ整数ノ根ヲ有スレバソレハ 10 ノ約數 1, 2, 5, 10 ノ何レカナル故ニ簡單ナルモノヨリ試メシテ行ヒ $\alpha = -2$ ヲ得、從ツテ

$$\beta^2 = 1 \quad \therefore \beta = \pm 1,$$

故ニ所要ノ虚數根ハ次ノニツナリ、 $-2 \pm i$ 、

44. 聯立方程式 $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=36$ ヲ解ケ。

〔解〕 $14 = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 6^2 - 2(xy+yz+zx)$

$$\therefore xy+yz+zx = 11,$$

$$\text{又 } 36 = x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3xyz$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz = 6(14-11) + 3xyz = 18 + 3xyz$$

$$\therefore xyz = 6.$$

故ニ x, y, z ハ三次方程式

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$$

ノ三根ニ等シ、6 ノ因數ハ 1, 2, 3, 6 ナル故ニ實際試メシテ行ツテ $t=1, 2$ 、從ツテ 3 ヲ得、依ツテ所要ノ根ハ次ノ 6 組ナリ。

$$\begin{pmatrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

45. 有理整方程式 $f(x)=0$ ノ係數ガ皆整數ニシテ且ツ $f(0)$ 及ビ $f(1)$ ガ共ニ奇數ナラバ此方程式ハ整數ノ根ヲ有シ得ザルコトヲ証セヨ。

$$[解] f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

$$\text{トスレバ } f(0) = p_n, \quad f(1) = p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} + p_n$$

ガ共ニ奇數ナル故ニ

$$p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1} = \text{偶數},$$

故ニ p_0, p_1, \dots, p_{n-1} 中ノ奇數ハ偶數個ナリ,

次ニ各係數ハ整數ナル故ニ若シ $f(x)=0$ ガ整數根 h ヲ有ストスレバ h ハ p_n ノ因數ニシテ(問. 41) p_n ハ奇數ナル故ニ h モ亦奇數ナリ, 從ツテ h^n, h^{n-1}, \dots, h ハ皆奇數ナリ, 故ニ又 $p_k h^{n-k}$ ハ p_k ガ奇數ナラバ奇數ニシテ p_k ガ偶數ナラバ偶數ナリ, 故ニ

$$p_0 h^n, \quad p_1 h^{n-1}, \quad \dots, \quad p_{n-1} h$$

ノ中ノ奇數ノ個數ハ

$$p_0, \quad p_1, \quad \dots, \quad p_{n-1}$$

中ノ奇數ノ個數ニ等シ, 然ルニ後者ノ數ハ偶數個ナリ, 從ツテ前者ノ奇數ノ個數モ偶數ナリ, 故ニ

$$p_0 h^n + p_1 h^{n-1} + \dots + p_{n-1} h$$

ハ偶數ナリ, 而シテ p_n ハ奇數ナリ, 故ニ $p_0 h^n + p_1 h^{n-1} + \dots + p_{n-1} h + p_n \neq 0$,

即チ $f(x)=0$ ハ整數根ヲ有スルコト能ハズ。

46. $p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ ガ逆數方程式ナルトキハ

$$p_0 = p_n, \quad p_1 = p_{n-1}, \quad p_2 = p_{n-2}, \dots$$

ナルカ, 或ハ

$$p_0 = -p_n, \quad p_1 = -p_{n-1}, \quad p_2 = -p_{n-2}, \dots$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] 逆數方程式トハ任意ノ一根ノ逆數ガ又其方程式ノ根トナルモノナル故ニ所題ノ

$$\text{方程式 } p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0 \quad (1)$$

ガ逆數方程式ナルトキハ任意ノ一根 x ニ對シテ又 $\frac{1}{x}$ ナル根ヲ有セザルベカラズ, 即 (1) ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ハ (1) ノノモノナラザルベカラズ, 然ルニ (1) ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ハ問. 13 ニヨリ

$$p_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + p_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + p_n = 0$$

$$\text{即チ } p_nx^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_1x + p_0 = 0 \quad (2)$$

(1), (2) ガ同ジ根ヲ有スル方程式ナルタメニハ

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{p_1}{p_{n-1}} = \frac{p_2}{p_{n-2}} = \dots = \frac{p_{n-1}}{p_1} = \frac{p_n}{p_0} \quad (3)$$

ナラザルベカラズ, 即チ

$$p_0^2 = p_n^2, \quad p_1^2 = p_{n-1}^2, \quad p_2^2 = p_{n-2}^2, \dots$$

$$\therefore p_0 = \pm p_n, \quad p_1 = \pm p_{n-1}, \quad p_2 = \pm p_{n-2}, \dots$$

若シ $p_0 = p_n$ ナラバ (3) ヲヨリ

$$p_0 = p_n, \quad p_1 = p_{n-1}, \quad p_2 = p_{n-2}, \dots \quad (4)$$

$p_0 = -p_n$ ナラバ

$$p_0 = -p_n, \quad p_1 = -p_{n-1}, \quad p_2 = -p_{n-2}, \dots \quad (5)$$

逆ニ (4) 或ハ (5) ガ成立スルトキハ (3) ハ成立シ, 從ツテ方程式 (2) 及ビ (1) ハ同ジ根ヲ有スルコトナル故ニ (1) ハ逆數方程式トナル。

47. 逆數方程式ノ解法ハ常ニ $p_0x^{2n} + p_1x^{2n-1} + \dots + p_{n-1}x^2 + p_nx + p_0 = 0$ ノ解法ニ歸シ得ベキコトヲ証セヨ。

[解] 前問ニヨリ總テノ逆數方程式ハ次ノ四種ニ分類セラレ

$$p_0x^{2n} + p_1x^{2n-1} + \dots + p_{n-1}x^2 + p_nx + p_0 = 0 \quad (A)$$

$$p_0x^{2n+1} + p_1x^{2n} + \dots + p_{n-1}x^2 + p_nx + p_0 = 0 \quad (B)$$

$$p_0x^{2n-1} + p_1x^{2n} + \dots + p_{n-1}x^2 - p_nx - p_0 = 0 \quad (C)$$

$$p_0x^{2n} + p_1x^{2n-1} + \dots + p_{n-1}x^2 - p_nx - p_0 = 0 \quad (D)$$

(B) ハ -1 ナル根ヲ有スルコト明カニシテ -1 ハソレ自身ノ逆數ナル故ニ (B) ノ左邊ヲ $x+1$ ニテ割リタル方程式ハ矢張り逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ $p_0^2x^n$, 最後ノ項ハ $+p_0$ トナル 故ニ (A) 類ノモノトナル,

(C) は 1 ナル根ヲ有スルコト明カニシテ -1 ハソレ自身ノ逆數ナル故ニ (C) ノ左邊ヲ $x-1$ ニテ割リタル方程式ハ矢張り逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ p_0x^{2n} 、最後ノ項ハ $+p_0$ トナル故ニ矢張り又 (A) 類ノモノトナル、最後ニ (D) ハ

$$p_0(x^{2n}-1)+p_1x(x^{2n-2}-1)+\dots+p_{n-1}x^{n-1}(x^2-1)=0$$

ナル故ニ $x^2=1$ 即チ ± 1 ナル根ヲ有ス、依ツテ (D) ノ左邊ヲ x^2-1 ニテ割リタル方程式ハ又逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ p_0x^{2n-2} 、最後ノ項ハ $+p_0$ トナル故ニ矢張り又 (A) 類ノモノトナル

以上ニ由ツテ總テノ逆數方程式ノ解法ハ結局 (A) 類ノ解法ニ歸スルコトヲ知ル。

48. 前問 (A) 類ノ逆數方程式ハ $x+\frac{1}{x}=y$ トオクコトニ由ツテ其次數ヲ半減シ得ルコトヲ証セヨ。

[解] (A) 類ノ逆數方程式ノ各項ハ中央項 $p_n x^n$ ノ外ハ皆前後一對ヲナス故ニ x^n ニテ割リテ各一對ヲ一纏メニスレバ

$$p_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+p_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\dots+p_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+p_n=0$$

茲ニ於テ $x+\frac{1}{x}=y$ トオケバ

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

今一般ニ $x^k+\frac{1}{x^k}=Y_k$ トオケバ

$$yY_{k-1}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)=x^k+x^{-k}+x^2+\frac{1}{x^{k-2}}=Y_k+Y_{k-2}$$

$$\therefore Y_k=yY_{k-1}-Y_{k-2},$$

故ニ若シ Y_{k-1}, Y_{k-2} ガソレソレ y ニツキ $(k-1)$ 次及ビ $(k-2)$ 次ナラ

バ Y_k ハ y ニツキ k 次トナル、然ルニ $Y_1=\left(x+\frac{1}{x}\right)=y,$

$Y_2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=y^2-2$ ハ夫々 y ニツキ 1 次及ビ 2 次ナリ、依ツテ Y_k ハ y

ニツキ k 次ナリ、從ツテ $x^n+\frac{1}{x^n}=Y_n$ ハ y ニツキ n 次ナリ、即チ原方程式ハ

$x+\frac{1}{x}=y$ トオクコトニ由ツテ y ノ n 次方程式トナル即チ次數ガ半分ニ低下ス。

49. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ根ヲ a_1, a_2, \dots, a_n トスレバ

$$(1-p_2+p_4-\dots)^2+(p_1-p_3+p_5-\dots)^2=(1+a_1^2)(1+a_2^2)\dots(1+a_n^2)$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] $x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_{n-1}x+p_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

$$\therefore 1+\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\frac{p_3}{x^3}+\dots+\frac{p_n}{x^n}=\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha_n}{x}\right)$$

$x=i$ トオケバ

$$1+\frac{p_1}{i}+\frac{p_2}{i^2}+\frac{p_3}{i^3}+\frac{p_4}{i^4}+\dots=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore 1-ip_1-p_2+ip_3+p_4-ip_5-p_6+\dots=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore (1-p_2+p_4-p_6+\dots)-i(p_1-p_3+p_5-\dots)$$

$$=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

同様ニ $x=-i$ トオケバ

$$(1-p_2+p_4-p_6+\dots)+i(p_1-p_3+p_5-\dots)$$

$$=\left(1+\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1+\frac{\alpha_2}{i}\right)\dots\left(1+\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore (1-p_2+p_4-\dots)^2+(p_1-p_3+p_5-\dots)^2=(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\dots(1+\alpha_n^2),$$

50. 同上, $A=1+p_3+p_6+\dots, B=p_1+p_4+p_7+\dots, C=p_2+p_5+p_8+\dots$

トスレバ $A^3+B^3+C^3-3ABC=(1-a_1^3)(1-a_2^3)\dots(1-a_n^3)$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_{n-1}x+p_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$

$x=1$ トオケバ

$$A+B+C=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n) \tag{1}$$

次ニ 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トシ $x=\frac{1}{\omega}$ トオケバ

$$\frac{1}{\omega^n}+\frac{p_1}{\omega^{n-1}}+\frac{p_2}{\omega^{n-2}}+\frac{p_3}{\omega^{n-3}}+\frac{p_4}{\omega^{n-4}}+\dots$$

$$=\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_2\right)\dots\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_n\right)$$

$$\therefore 1 + \omega p_1 + \omega^2 p_2 + p_3 + \omega p_4 + \omega^2 p_5 + \dots = (1 - \omega \alpha_1)(1 - \omega \alpha_2) \dots (1 - \omega \alpha_n)$$

$$\therefore A + \omega B + \omega^2 C = (1 - \omega \alpha_1)(1 - \omega \alpha_2) \dots (1 - \omega \alpha_n) \quad (2)$$

同様 = $x = \frac{1}{\omega^2}$ トオケバ

$$A + \omega^2 B + \omega C = (1 - \omega^2 \alpha_1)(1 - \omega^2 \alpha_2) \dots (1 - \omega^2 \alpha_n) \quad (3)$$

(1), (2), (3) を邊々相乗スレバ

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (1 - \alpha_1^3)(1 - \alpha_2^3) \dots (1 - \alpha_n^3)$$

51. 三次方程式 $x^3 + px + q = 0$ を解ケ。

〔解〕 今 $x = u + v$ トオケバ

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v), \quad px = p(u+v),$$

$$\therefore u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

$$\therefore u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0,$$

茲ニ於テ $3uv + p = 0$ トスレバ上ノ方程式ハ $u^3 + v^3 + q = 0$ トナル, 即チ $u + v$

ガ所題ノ方程式ノ根ナルヌメニハ

$$3uv + p = 0 \quad (1)$$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad (2)$$

ナラザルベカラズ, 逆ニ (1), (2) を満足セシムル u, v ノ値ニ對シ $u + v$ ハ所題

ノ方程式ノ根トナルヤ明カナリ, (1), (2) ヨリ

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q$$

$$\therefore u^3 - v^3 = \pm \sqrt{(u^3 + v^3)^2 - 4u^3 v^3} = \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

右邊ノ \pm ハ只 u, v を交換セシムルノミニシテ $u + v$ ニハ無關係ナル故ニ

$$u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

トスルコトヲ得, 然ルトキハ (2) ヨリ

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

コレヨリ (1) を満足セシムル u, v ノ値即チ積ガ實數トナル u, v ノ値ヲ定ムレバ

$u + v$ ハ所要ノ根ナリ, 然ルニ

1. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ ナルトキハ u^3, v^3 ハ實數ナル故ニ

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

トシ, H.ツ 1 ノ立方根ノ虛數ヲ ω トスレバ

$$x = u + v, \quad x = \omega u + \omega^2 v, \quad x = \omega^2 u + \omega v$$

ハ所要ノ三根ニシテ其中一ツハ實數他ノ二ツハ複素數ナリ。

2. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ ナルトキ u^3, v^3 ハ實數ナル故ニ $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ トスレバ

$$x = 2u, \quad x = (\omega + \omega^2)u = -u, \quad x = (\omega^2 + \omega)u = -u$$

ガ所要ノ三根ニシテ, 三根トモ實數ニシテ其中二根相等シ。

3. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ナルトキハ u^3, v^3 ハ共軛複素數トナル故ニ今ソレヲ

$r(\cos \theta \pm i \sin \theta)$ ニテ表ハセバ

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\therefore u = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right), \quad r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{3} \right),$$

$$r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3} \right),$$

$$v = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right), \quad r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{3} - i \sin \frac{\theta + 2\pi}{3} \right),$$

$$r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 4\pi}{3} - i \sin \frac{\theta + 4\pi}{3} \right),$$

コノ中積ガ實數トナルモノヲ取りテ加フレバ 所要ノ三根トシテ

$$x = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3}, \quad x = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi}{3}, \quad x = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 4\pi}{3}$$

ヲ得, 即チ此場合ニハ三根トモ實數ニシテ而モ不等ナリ。

52. 三次方程式 $x^3 + px + q = 0$ ノ判別式ヲ作りコレニ由ツテ根ノ性質ヲ判別スル方法ヲ述ベヨ, 但シ p, q ヲ實數トス。

〔解〕 方程式ノ判別式トハ其方程式ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ナルガ故ニ所要ノ

判別式ヲ D トシ三根ヲ α, β, γ トスレバ

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2,$$

然ルニ所題ノ方程式ニ於テハ

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=p,$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 4\{p-\gamma(\alpha+\beta)\} = \gamma^2 - 4(p+\gamma^2) \\ &= -3\left(\gamma^2 + \frac{4}{3}p\right) \end{aligned}$$

$$\text{同様ニ } (\beta-\gamma)^2 = -3\left(\alpha^2 + \frac{4}{3}p\right), \quad (\gamma-\alpha)^2 = -3\left(\beta^2 + \frac{4}{3}p\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore D &= -27\left(\gamma^2 + \frac{4}{3}p\right)\left(\alpha^2 + \frac{4}{3}p\right)\left(\beta^2 + \frac{4}{3}p\right) \\ &= -27\left\{\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \frac{4}{3}p(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + \frac{16}{9}p^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{64}{27}p^3\right\} \end{aligned}$$

$$\text{然ルニ } \alpha^2\beta^2\gamma^2 = q^2, \quad \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = p^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = -2p$$

$$\begin{aligned} \therefore D &= -27\left\{q^2 + \frac{4}{3}p^3 - \frac{32}{9}p^3 + \frac{64}{27}p^3\right\} = -27\left(q^2 + \frac{4}{27}p^3\right) \\ &= -(4p^3 + 27q^2) \end{aligned}$$

次ニ判別式ニ由ツテ根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ考フルニ係數ガ實數ナル方程式ノ
虚數根ハ常ニ一對ヲナス故ニ p, q ガ實數ナル場合ノ三次方程式ノ根ハ

- (1) 三根皆實數ニシテ其中少クモ二ツガ相等シキカ
- (2) 三根皆實數ニシテ悉ク相等シカラザルカ
- (3) 一根實數ニシテ他ノ二根ハ互ニ共軛ナル虚數ナルカ

ノ三ツノ場合ニ限ル、(1)ノ場合ニハ明カニ $D=0$ 、(2)ノ場合ニハ $D>0$ 、

(3)ノ場合ニハ $\alpha=a, \beta=b+ci, \gamma=b-ci$ トスレバ

$$\begin{aligned} D &= (a-b-ci)^2(2ci)^2(b-a-ci)^2 = -4c^2(a-b-ci)^2(a-b+ci)^2 \\ &= -4c^2\{(a-b)^2 + c^2\}^2 < 0 \end{aligned}$$

此假設ハ總テノ場合ヲ盡シ終結ハ互ニ相容レズ依ツテ其逆モ亦眞ナリ、即チ

$D=0$ ナラバ三根ノ中少クモ二根相等シク

$D>0$ ナラバ三根實數ニシテ皆等シカラズ

$D<0$ ナラバ二根虚數一根實數ナリ。

(注意) 若シ初メノ方程式ガ $x^3+px^2+qx+r=0$ ナラバ

$$D=18pqr+p^2q^2-4p^3r-4q^3-27r^2,$$

53. 四次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ ヲ解ケ。

(解) 令 $2x=u+v+w, \quad s=u^2+v^2+w^2, \quad t=u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2$ トスル、

$$\text{然ルトキハ } 4x^2=s+2(uv+vw+wu)$$

$$\therefore 16x^4=s^2+4(uv+vw+wu)s+4t+8uvw(u+v+w)$$

$$16px^2=4ps+8p(uv+vw+wu)$$

$$16qx=8q(u+v+w)$$

$$16r=16r,$$

邊々相加フレバ

$$0=s^2+4t+4ps+16r+8(u+v+w)(uvw+q)+4(s+2p)(uv+vw+wu)$$

茲ニ於テ $uvw+q=0, \quad s+2p=0$ トスレバ上ノ方程式ヨリ

$$4t^2+4t-8p^2+16r=0 \quad \therefore t=p^2-4r,$$

故ニ $2x=u+v+w$ ガ所題ノ四次方程式ノ根ナルタメニハ

$$u^2+v^2+w^2=-2p, \tag{1}$$

$$u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2=p^2-4r, \tag{2}$$

$$u^2v^2w^2=q^2, \tag{3}$$

ナラザルベカラズ、逆ニ u, v, w ガ此三ツノ關係ヲ満足セシムルトキハ

$2x=u+v+w$ ハ所題ノ方程式ノ根トナルヤ明カナリ

然ルニ (1), (2), (3) ヲ満足セシムル u^2, v^2, w^2 ハ三次方程式

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0 \tag{4}$$

ノ根ナリ、

(4)ノ三根ヲ α, β, γ トスレバ

$$u=\pm\sqrt{\alpha}, \quad v=\pm\sqrt{\beta}, \quad w=\pm\sqrt{\gamma}$$

然ルニ $2x=u+v+w$ ガ所要ノ根ナルタメニハ $uvw=-q$

ナルヲ要スル故ニコノ關係ヲ満足セシムル u, v, w ノ値ヲ $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$ トスレバ

所要ノ四根ハ

$$\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{2}, \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{2}, \frac{-\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{2},$$

$$\frac{-\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{2},$$

或ハ $u = \sqrt{\alpha}, v = \sqrt{\beta}, w = \sqrt{\gamma}$ トスレバ

$$\frac{u+v+w}{2}, \frac{u-v-w}{2}, \frac{-u+v-w}{2}, \frac{-u-v+w}{2}$$

ナリ。

54. 四次方程式 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ノ判別式ヲ作り且ツコレニ由ツテ根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ述ベヨ、但シ p, q, r ヲ實數トス。

〔解〕 判別式ヲ D , 四根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$D = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \delta)^2(\alpha - \gamma)^2(\delta - \beta)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2,$$

$$\alpha = \frac{u+v+w}{2}, \beta = \frac{u-v-w}{2}, \gamma = \frac{-u+v-w}{2}, \delta = \frac{-u-v+w}{2}, \quad (A)$$

$$\therefore \alpha - \beta = v + w, \quad \gamma - \delta = v - w, \quad \alpha - \gamma = w + u, \quad \delta - \beta = w - u$$

$$\alpha - \delta = u + v, \quad \beta - \gamma = u - v,$$

$$\therefore D = (v^2 - w^2)^2(u^2 - w^2)^2(u^2 - v^2)^2$$

然ルニ前問ニヨリ u^2, v^2, w^2 ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0, \quad (1)$$

故ニ D ハ三次方程式 (1) ノ判別式ナリ

(1) ニ於テ $z = y - \frac{2p}{3}$ トキテ z^2 ノ項ヲ消去シタル結果ヲ

$$y^3 + Hy + G = 0 \quad (2)$$

$$\text{トスレバ } H = -\frac{p^2 + 12r}{3}, \quad G = \frac{-2p^3 + 72pr - 27q^2}{27},$$

(2) ノ三根ハ (1) ノ三根ヨリソレゾレ $\frac{2p}{3}$ ヲ増加シタルニ過ギザル故ニ双方ノ各二根ノ差ハ變ラズ、依ツテ所要ノ判定式 D ハ (2) ノ判別式ナリ、依ツテ前々問ニヨリ

$$D = -(4H^3 + 27G^2) = \frac{1}{27} \{4(p^2 + 12r)^3 - (2p^3 - 72pr + 27q^2)^2\}$$

次ニ此ノ判別式ニ由ツテ四根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ考フルニ

1. $D=0$ ナラバ四根ノ中少クモ二根ハ相等シク、若シコノトキ $H=G=0$ ナラバ (2) ノ三根ハ 0 トナリ從ツテ (1) ノ三根ハ皆相等シク、從ツテ (A) コリ $\beta = \gamma = \delta$ トナル、即チ $H=G=0$ ナルトキハ四根ノ中三根ガ相等シクナル。

2. $D < 0$ ナラバ二根ハ實數ニシテ不等、他ノ二根ハ複素數トナル何ントナレバ今 α, β ヲ實數、 γ, δ ヲ互ニ共軛ナル複素數トスレバ

$$(\alpha - \beta)^2 > 0, \quad (\gamma - \delta)^2 < 0, \quad (\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2 > 0, \quad (\delta - \beta)^2(\gamma - \beta)^2 > 0$$

ナリ、而シテ其他ノ場合ニハ $D < 0$ トナラザルコトハ同様ニ証明スルコトヲ得レバナリ。

3. $D > 0$ ナラバ四根皆實數ニシテ不等ナルカ、或ハ四根皆複素數ナルカノ何レカナリ。

55. 三次方程式 $px^3 + 3qx^2 + 3rx + s = 0$ ノ三根ヲ α, β, γ トスルトキ三次式 $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ ガ $l(x-\alpha)^3 + m(x-\beta)^3 + n(x-\gamma)^3$ ナル形ニ變換セラル、タメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 x ノ如何ニ係ラズ

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = l(x-\alpha)^3 + m(x-\beta)^3 + n(x-\gamma)^3$$

ナルタメニハ

$$\left. \begin{aligned} a &= l + m + n \\ -b &= l\alpha + m\beta + n\gamma \\ c &= l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 \\ -d &= l\alpha^3 + m\beta^3 + n\gamma^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

然ルニ α, β, γ ハ $px^3 + 3qx^2 + 3rx + s = 0$ ノ根ナル故ニ

$$\left. \begin{aligned} p\alpha^3 + 3q\alpha^2 + 3r\alpha + s &= 0 \\ p\beta^3 + 3q\beta^2 + 3r\beta + s &= 0 \\ p\gamma^3 + 3q\gamma^2 + 3r\gamma + s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

故ニ (1) ノ各式ニソレゾレ $s, 3r, 3q, p$ ヲ乘シテ加フレバ

$$as - 3br + 3cq - dp = 0 \quad (3)$$

コレ即チ必要ナル條件ナリ、逆ニ (3) ガ成立スルトキハ (1) ニ於ケル四ツノ關係式中ノ任意ノ三ツヲ満足セシムル l, m, n ノ値ニ對シテ (2) 及ビ (3) ヲリ

(1) ノ殘ル關係モ亦成立スルコトハ容易ニ証明セラル、故ニ所題ノ變形ハ可能ナリ、故ニ(3)ハ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

46
32

56. 二次方程式 $x^2+ax+b=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ α, β ノ有理整對稱式ハ係數 a, b ノ整式ニテ表ハサル、コトヲ証セヨ。

[解] α, β ノ任意ノ整對稱式ヲ $S(\alpha, \beta)$ トス $\alpha \neq \beta$ ナルトキハ $S(\alpha, \beta)$ ハ α ノ多項式ニシテ且ツ $\alpha = -\frac{a}{2}$ ナル故ニ本題ハ明カニ成立ス、 $\alpha \neq \beta$ ナルトキハ $\beta = -a - \alpha$ ナル故ニ今

$$S(\alpha\beta) = S(\alpha, -a-\alpha) = A_0\alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + \dots + A_m \quad (1)$$

トオケバ S ハ α, β ノ整式ナル故ニ右邊ノ總テノ A ハ係數 a ノ整式ナリ、又 S ハ α, β = 關シテ對稱ナル故ニ α, β ノ交換スルモ何等變化セズ、故ニ

$$S(\alpha\beta) = A_0\beta^m + A_1\beta^{m-1} + \dots + A_m \quad (2)$$

今別ニ

$$F(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m \quad (3)$$

ヲ考ヘ $F(x)$ ヲ x^2+ax+b ニテ割リタルトキノ商ヲ $Q(x)$ 、剩餘ヲ $A+Bx$ トス即チ $F(x) = Q(x)(x^2+ax+b) + A+Bx$ 、

x^2 ノ係數ハ 1 ニシテ A_0, A_1, \dots ハ a ノ整式ナル故ニ A, B ハ a, b ノ整式ナリ

(4) ニ於テ $x=\alpha$ 及ビ $x=\beta$ トスレバ

$$F(\alpha) = A+B\alpha, \quad F(\beta) = A+B\beta,$$

然ルニ (1), (2), (3) ヲヨリ

$$F(\alpha) = S(\alpha, \beta) = F(\beta) \quad \therefore A+B\alpha = A+B\beta$$

而シテ $\alpha \neq \beta$ 、 $\therefore B=0$ 、

$$\therefore F(\alpha) = S(\alpha\beta) = A,$$

然ルニ A ハ a, b ノ整式ナリ、依ツテ $S(\alpha\beta)$ ハ a, b ノ整式ナリ、即チ二根ノ任意ノ整對稱式ハ係數 a, b ノ整式ニテ表ハサル。

57. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トスルトキ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ノ有理整對稱式ハ係數 p_1, p_2, \dots, p_n ノ整式ニテ表ハサル、コトヲ証セヨ。

[解] 前問ニ於テ証シタル二次方程式ノ場合ヲ基礎トシ、數學的歸納法ニ由ツテ本問ヲ証セントス、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ノ任意ノ整對稱式ヲ $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ トシ

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = S_0\alpha_1^n + S_1\alpha_1^{n-1} + \dots + S_{n-1}\alpha_1 + S_n$$

トオケバ S_0, S_1, \dots, S_n ハ何レモ皆 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ノ整對稱式ナルコト明カナリ、

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

ヲ $x-\alpha_1$ ニテ割リタル方程式即チ $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ノ根トスル方程式ヲ

$$\varphi(x) = x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \dots + q_{n-1}x + q_n = 0$$

トスレバ

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 + p_1 \\ q_2 &= \alpha_1^2 + p_1\alpha_1 + p_2 \\ q_3 &= \alpha_1^3 + p_1\alpha_1^2 + p_2\alpha_1 + p_3 \\ &\dots\dots\dots \\ q_{n-1} &= \alpha_1^{n-1} + p_1\alpha_1^{n-2} + \dots + p_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

今 $\varphi(x)=0$ ノ根 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ノ整對稱式 S_0, S_1, \dots, S_n ハ $\varphi(x)=0$ ノ係數

q_1, q_2, \dots, q_{n-1} ノ整式ニテ表ハサル、モトノ假定スレバ q_1, q_2, \dots, q_{n-1} ハ (1)

ヨリ $\alpha_1, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ ノ整式ナル故ニ S_0, S_1, \dots, S_n ハ又 $\alpha_1, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$

ノ整式ニテ表ハサル、依ツテ

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A_0\alpha_1^n + A_1\alpha_1^{n-1} + \dots + A_{n-1}\alpha_1 + A_n \quad (2)$$

トオケバ A_0, A_1, \dots, A_n ハ總テ皆 p_1, p_2, \dots, p_{n-1} ノ整式ナリ

$$F(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n \quad (3)$$

ヲ考ヘ之ヲ $f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$

ニテ割リタル商ヲ $Q(x)$ 、剩餘ヲ $g(x)$ トスレバ

$$F(x) = Q(x) \cdot f(x) + g(x) \quad (4)$$

$g(x)$ ハ $(n-1)$ 次以下ナル故ニ

$$g(x) = C_0x^{n-1} + C_1x^{n-2} + \dots + C_{n-1}$$

トスレバ $f(x)$ ノ最高次ノ係數ハ 1 ナル故ニ C_0, C_1, \dots, C_{n-1} ハ總テ皆 $p_1, p_2,$

\dots, p_n ノ整式ナリ、(4)ニ於テ $x=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トオケバ

$$F(\alpha_1)=g(\alpha_1), F(\alpha_2)=g(\alpha_2), \dots, F(\alpha_n)=g(\alpha_n), \quad (5)$$

又 (2) (3) より

$$S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = F(\alpha_1)$$

然ルニ $S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ ハ $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ニ關シテ對稱ナル故ニ從ツテ又

$$S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = F(\alpha_2) = \dots = F(\alpha_n)$$

故ニ (5) より

$$S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = \dots = g(\alpha_n)$$

$$\text{故ニ } g(x) - S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} - S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 0$$

ナル $n-1$ 次ノ方程式ハ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ナル n 個ノ根ヲ有ス

$$\text{故ニ } C_0 = C_1 = \dots = C_{n-2} = 0,$$

$$S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = C_{n-1}$$

然ルニ C_{n-1} ハ $p_1 p_2 \dots p_n$ ノ整式ナリ、即チ $(n-1)$ 次ノ方程式 $\varphi(x)=0$ ノ根ノ整對稱式 $s_0 s_1 \dots$ ガ其係數 $q_1 q_2 \dots$ ノ整式ニテ表ハサル、モノト假定スレバ n 次ノ方程式 $f(x)=0$ ノ根ノ整對稱式 $S(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ ガ其係數 $p_1 p_2 \dots p_n$ ノ整式ニテ表ハサル、コト、ナル、然ルニ二次方程式ノ場合ニ此假定ノ成立スルコトハ前問ニ於テ之ヲ証セリ、依ツテ n ノ如何ニ係ラズ一般ニ最高次ノ係數ガ 1 ナル方程式ノ根ノ整對稱式ハ常ニ其係數ノ整式ニテ表ハサル、コトヲ知ル。

第 十 章 方 程 式 (其ノ二)

基本定理 I. x ガ連続的ニ變化スルトキ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

モ亦連続的ニ變化ス、即チ $y=f(x)$ ノぐらふハ連續曲線ナリ、

(微分學演習第二章參照)。

II. $f(x)=0$ ノ k 重根ハ $f'(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ナリ、

(微分學演習第三章參照)。

III. $f'(x) > 0$ ナル x ノ値ノ範圍内ニ於テハ x ガ増スニ從ツテ $f(x)$ ハ増シ $f'(x) < 0$ ナル x ノ値ノ範圍内ニ於テハ x ガ増スニ從ツテ $f(x)$ ハ減ズ、 $f'(x) = 0$ ナル x ノ値ニ於テ $f(x)$ ハ極大又ハ極小トナル、(微分學演習第六章參照)。

演習問題

1. $y=x^3$ ノぐらふヲ描ケ。

[解] $x=0$ ノトキ $y=0$ 、故ニ曲線ハ原点ヲ過ル又

$$y' = 3x^2$$

y' ノ常ニ正ナル故ニ x ガ増ストキ y ハ常ニ増ス又

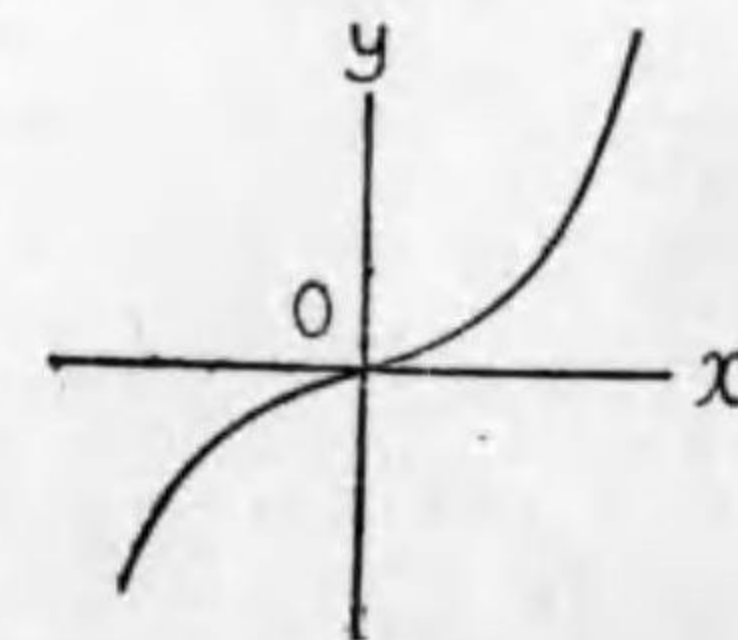
$$x \rightarrow -\infty \text{ ノトキ } y \rightarrow -\infty,$$

$$x \rightarrow \infty \text{ ノトキ } y \rightarrow \infty$$

而シテ x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ連續的ニ變化

スルトキ y モ亦連續的ニ變化ス。

依ツテぐらふハ圖ノ如クナルベシ。



2. $y=4x^3-8x^2-x+2$ ノぐらふヲ描ケ。

[解] $x=0$ ノトキ $y=2$, $y=0$ ノトキ $4x^3-8x^2-x+2=0 \Rightarrow x=2, x=\pm\frac{1}{2}$

故ニ曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 2 ナル距離ニ於テ, x 軸ト原点ヨリ $2, \pm\frac{1}{2}$ ナル
 三点ニ於テ交ル,

又 $y'=12x^2-16x-1=12\left(x-\frac{4-\sqrt{19}}{6}\right)\left(x-\frac{4+\sqrt{19}}{6}\right)=0$

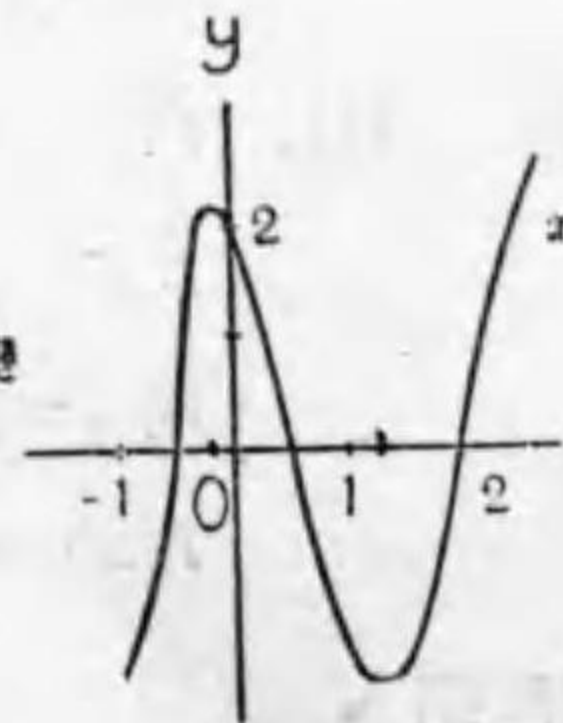
故ニ $x < \frac{4-\sqrt{19}}{6}$ 或ハ $x > \frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ナルトキハ $y' > 0$ ナル故ニ此範
 圍内ニテ x ガ増ストキ y ハ常ニ増シ $\frac{4-\sqrt{19}}{6} < x < \frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ナルトキ
 $y' < 0$ ナル故ニ此範圍内ニテ x ガ増ストキ y ハ常ニ減ズ, 従ツテ $x = \frac{4-\sqrt{19}}{6}$

ニ於テ y ハ極大トナリ $x = \frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ニ於テ y ハ
 極小トナル

又 $x \rightarrow -\infty$ ノトキ $y \rightarrow -\infty$,

$x \rightarrow \infty$ ノトキ $y \rightarrow \infty$

而シテ x ガ連続的ニ變化スルトキ y モ亦連続的ニ變
 化ス, 依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如クナル。



3. $y = \frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ ノぐらふヲ描ケ。

[解] $x=0$ ノトキ $y=5$, $y=0$ ノトキ x = 虚数, 故ニ曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 5 ナ
 ル距離ニ於テ交リ, x 軸トハ交ラズ

又 $y' = \frac{(2x+3)(x^2+1) - 2x(x^2+3x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{-(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2}$

故ニ $x < -3$ 或ハ $x > \frac{1}{3}$ ナルトキハ $y' < 0$,

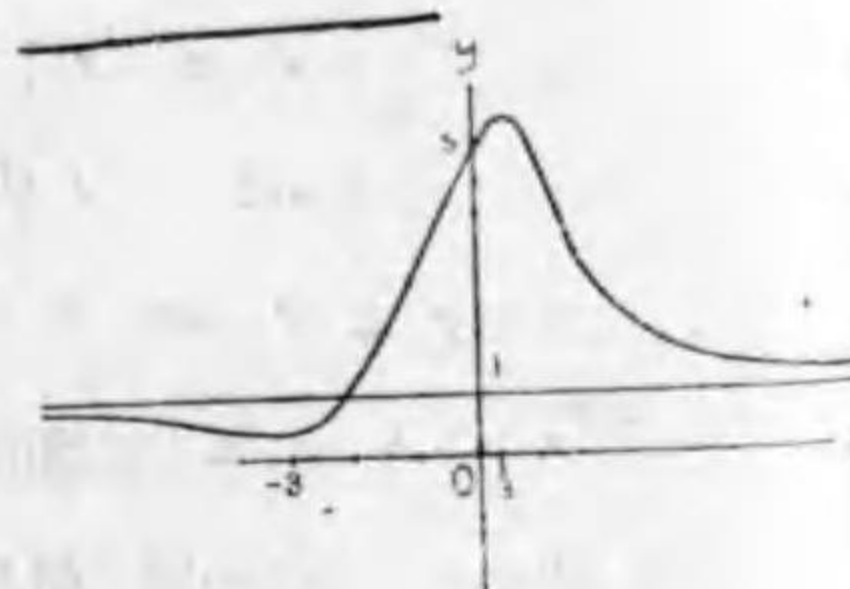
ナル故ニ此範圍内ニテ x ガ増ストキ y ハ減シ

$-3 < x < \frac{1}{3}$ ナルトキハ $y' > 0$ ナル故ニ此範

圍内ニテ x ガ増ストキ y ハ増ス, 従ツテ

$x = -3$ ノトキ $y = \frac{1}{2}$ ハ y ノ極小値ニシテ

$x = \frac{1}{3}$ ノトキ $y = \frac{11}{2}$ ハ y ノ極大値トナル



又 $x \rightarrow \pm\infty$ ノトキ $y = \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$,

而シテ分母ガ 0 ナラザル範圍ニ於テ x ガ連続的ニ變化スルトキ y モ亦連続的ニ
 變化ス, 依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如クナル。

4. $y = x + \sqrt{x-2}$ ノぐらふヲ描ケ。

[解] $x < 2$ ナラバ y ハ虚数トナル故ニ曲線ハ $x \geq 2$ ナル範圍ニ存在ス, 而シテ $x=2$
 ノトキ $y=2$, 又 $x > 2$ ナル故ニ y ハ常ニ正ニシテ 0 トナラズ

又 $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

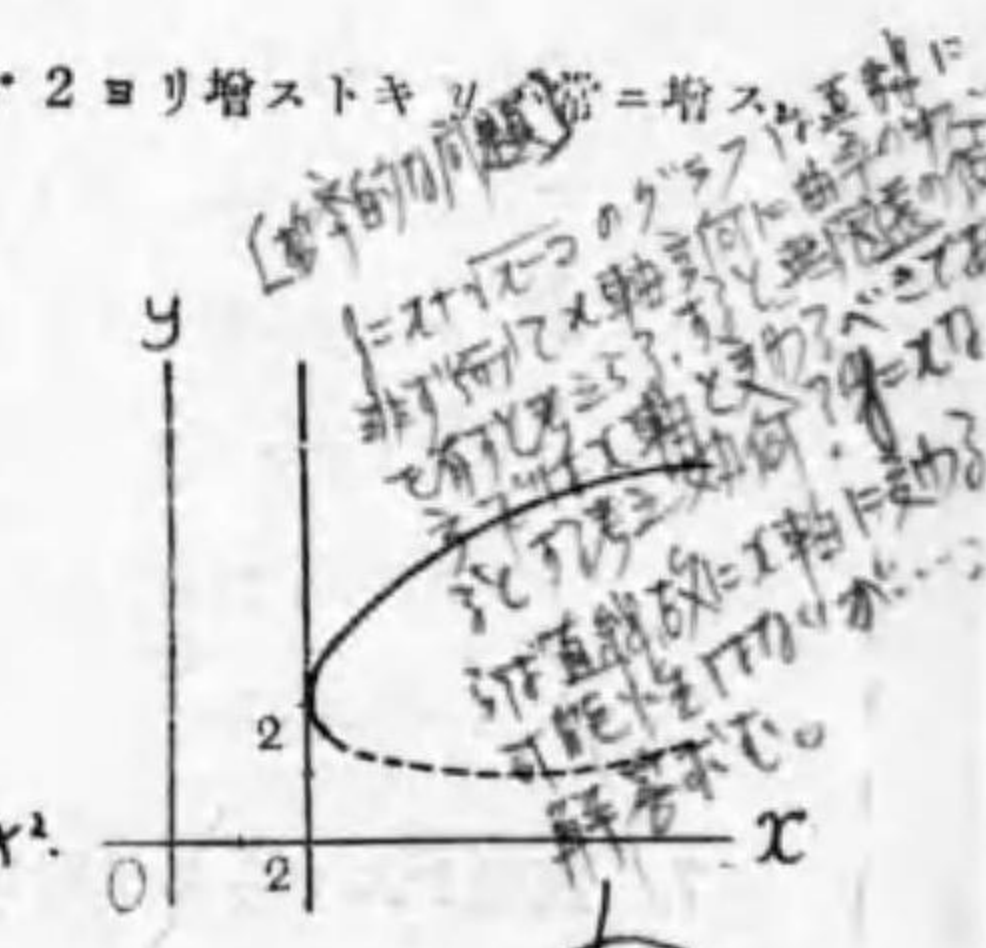
x ガ 2 ヨリ大ナルトキ y' ハ常ニ正ナル故ニ x ガ 2 ヨリ増ストキ y ハ常ニ増ス

又 $x \rightarrow \infty$ ノトキ $y \rightarrow \infty$,

而シテ x ガ 2 ヨリ大ナル値ヲ取りテ連続的ニ
 變化スルトキ本問ノ y モ亦連続的ニ變化スル故
 ニ所要ノぐらふハ圖ノ如クナルベシ,

若シ $y = x - \sqrt{x-2}$ トスレバぐらふハ点線ノ

部分トナル。 $(x+1)(4-x) > 0$ $-x^2$



5. $y = x + \sqrt{(x+1)(4-x)}$ ノぐらふヲ描ケ。

[解] $x < -1$ 又ハ $x > 4$ ナラバ y ハ虚数トナル故ニ曲線ハ $-1 \leq x \leq 4$ ナル範圍内
 ニアリ, 而シテ $x = -1$ ノトキ $y = -1$, $x = 4$ ノトキ $y = 4$, 又 $x = 0$ ノトキ

$y = 2$, 故ニ曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 2 ナル距離ニ於テ交ル,

又 $y' = 1 + \frac{3-2x}{2\sqrt{(x+1)(4-x)}}$

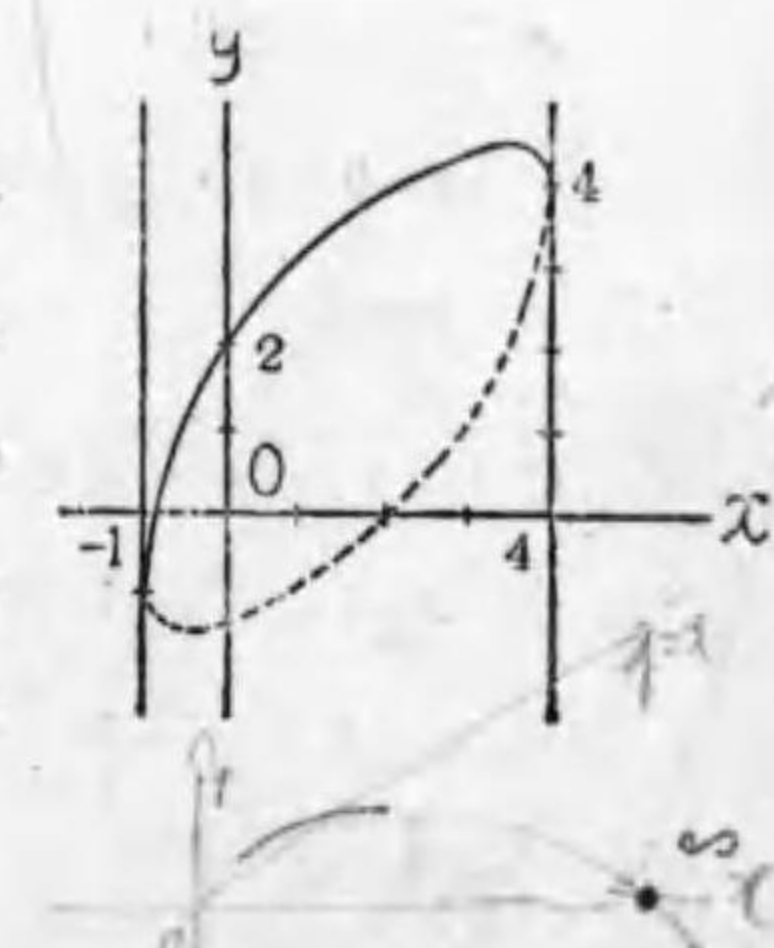
故ニ $-1 < x < \frac{6+\sqrt{22}}{4}$ ナルトキ $y' > 0$ ナル

コトヲ容易ニ知ル故ニ此範圍内ニテ x ガ増ストキ

y ハ増シ又 $\frac{6+\sqrt{22}}{4} < x < 4$ ナルトキ $y' < 0$

ナルコトヲ容易ニ知ル故ニ此範圍内ニテ x ガ増ス

トキ y ハ減ズ, 従ツテ $x = \frac{6+\sqrt{22}}{4}$ ノトキ



y は極大トナル又 x が -1 より 4 マテ連続的ニ變化スルトキ y モ亦連続的ニ變化ス、依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如シ、

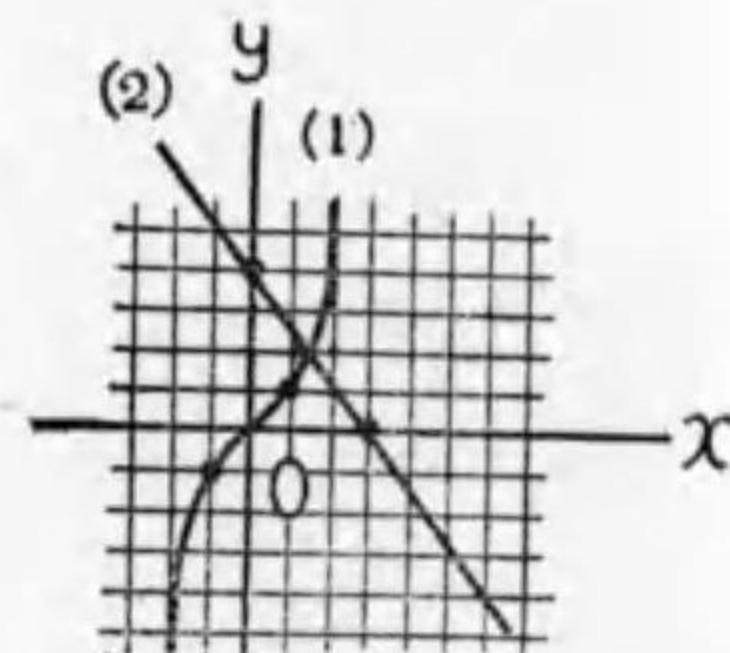
若シ $y = x - \sqrt{(x+1)(4-x)}$ トスレバぐらふハ点線ノ部分トナル。

6. ぐらふヲ利用シテ方程式 $3x^3 + 4x - 12 = 0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

[解] 所題ノ方程式ヲ變形スレバ $x^3 = -\frac{4}{3}(x-3)$ トナル故ニ其實根ハ

$$y = x^3 \quad (1) \quad y = -\frac{4}{3}(x-3) \quad (2)$$

ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ、然ルニ (1) ノぐらふハ問 1. ニヨリテ圖ノ如クニシテ (2) ノぐらふハ x 軸、 y 軸トソレゾレ原点ヨリ 3 及ビ 4 ナル距離ニ於テ交ル直線ナルガ故ニ其交点ハ只一ツニシテ其点ノ x ノ値ハ圖ノ如ク大略 1.3 ナルヲ見ル、依ツテ所要ノ實根ハ只一ツニシテ近似値ハ大略 1.3 ナリ。



7. 適當ナルぐらふヲ用ヒテ方程式 $x^3 + 6x^2 - x - 20 = 0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

[解] 所題ノ方程式ヲ變形スレバ $\frac{1}{5}(x^2 + 6x - 1) = \frac{4}{x}$ トナル故ニ其實根ハ

$$y = \frac{1}{5}(x^2 + 6x - 1) \quad (1) \quad y = \frac{4}{x} \quad (2)$$

ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ、然ルニ (1) チ満足セシムル x, y ノ値ハ

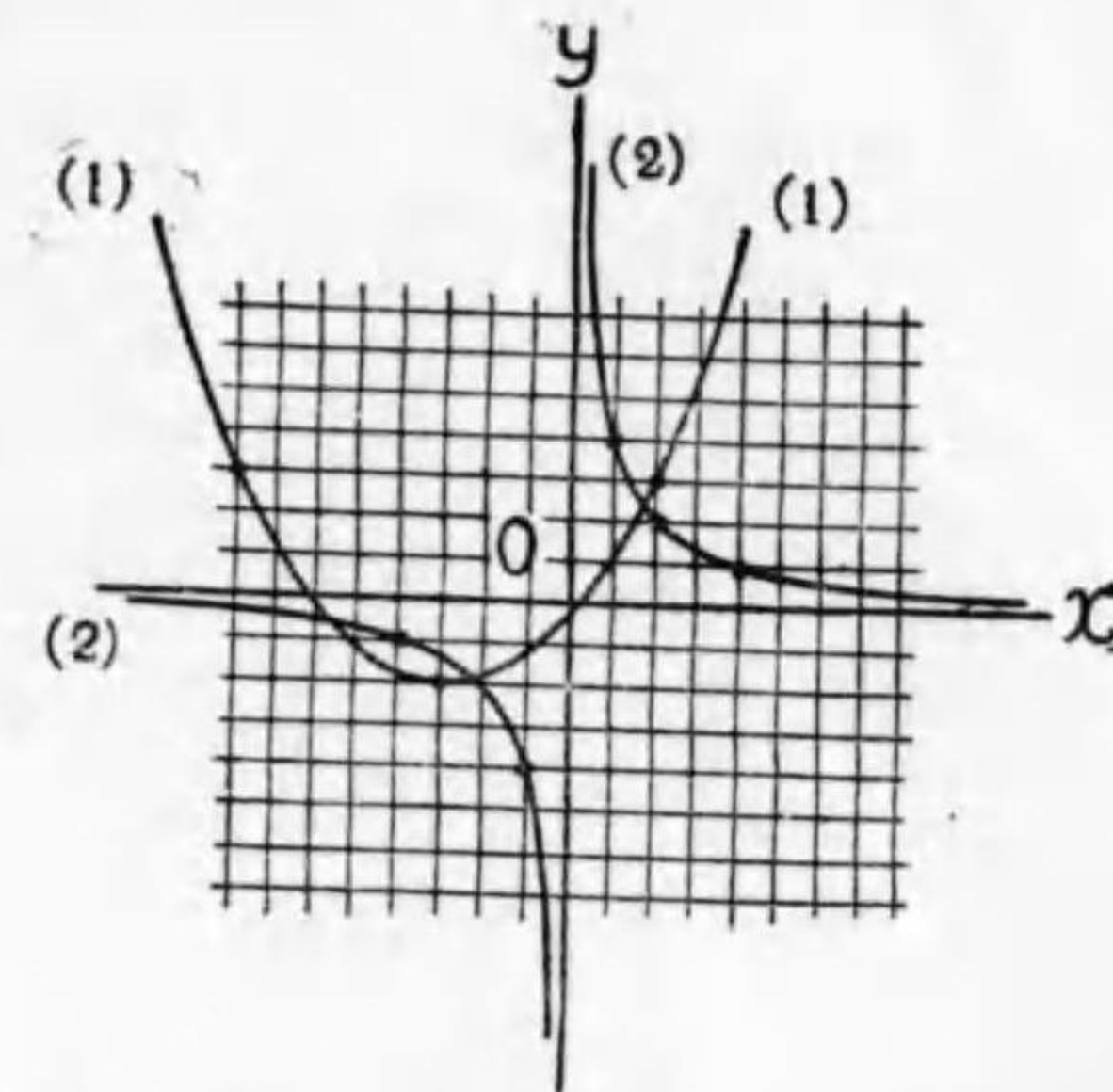
$x=0$	$-3 \pm \sqrt{10}$	-3	2	$\pm \infty$
$y = -\frac{1}{5}$	0	-2	3	∞

等ニシテ (2) チ満足セシムル x, y ノ値ハ

$x=1$	-1	4	-4	2	$-\frac{3}{5}$	$\pm \infty$	0
$y=4$	-4	1	-1	2	$-\frac{4}{3}$	0	$\pm \infty$

等ナルガ故ニ (1) (2) ノぐらふハ圖ノ如クニシテ交点ハ

三ツアリテ其各ノ x ノ値ハ大略 $-5.5, -2.2$ 及ビ 1.7 ナルヲ見ル、依ツテ所要ノ實根ハ三ツアリテ其近似値ハ大略 $-5.5, -2.2, 1.7$ ナリ。



8. 適當ナルぐらふヲ用ヒテ方程式 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 7x - 28 = 0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

[解] 所題ノ方程式ヲ $\frac{1}{7}(x^2 - 4x + 7) = \frac{4-x}{x^2}$ ト變形スレバ其實根ハ

$$y = \frac{1}{7}(x^2 - 4x + 7) \quad (1), \quad y = \frac{4-x}{x^2} \quad (2)$$

ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ、然ルニ (1) ニ於テハ

$$y' = \frac{1}{7}(2x - 4) = \frac{2}{7}(x - 2)$$

故ニ $x < 2$ ナラバ $y' < 0$ ニシテ y ハ x ガ増ストキ減ジ $x > 2$ ナラバ $y' > 0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増シ、從ツテ $x=2$ ノトキ $y = \frac{3}{7}$ ハソノ極小値トナル、而シテ

$x=0$	1	-1	2	$\pm \infty$
$y=1$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{7}$	∞

又 (2) ニ於テハ

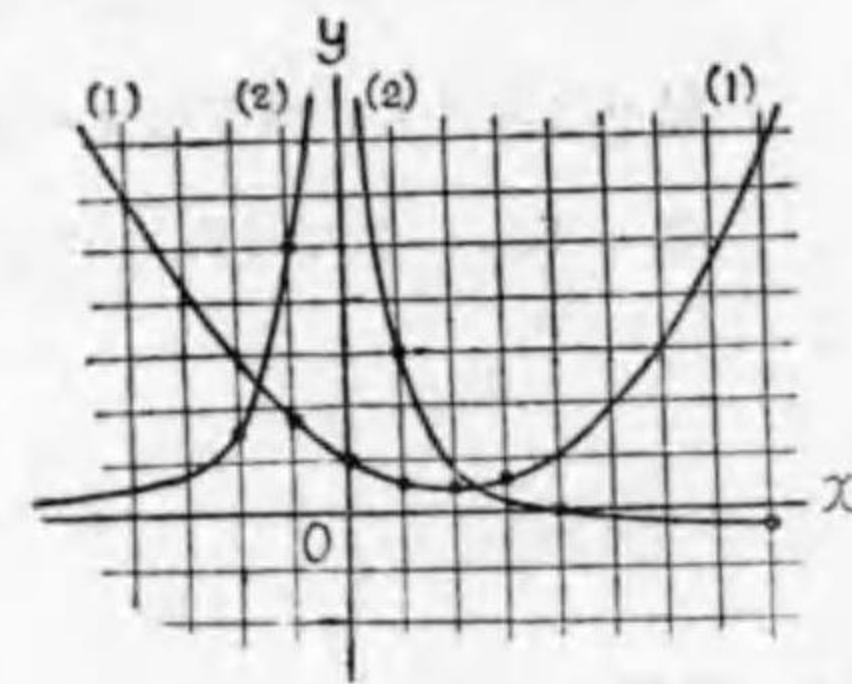
$$y' = \frac{-x^2 - 2x(4-x)}{x^4} = \frac{x-8}{x^3}$$

故ニ $x < 0$ ナルトキ $y' > 0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増シ $x=0$ ノトキ y ハ ∞ トナリ $0 < x < 8$ ナルトキ $y' < 0$ ニシテ y ハ x ガ増ストキ減ジ、 $x > 8$

ナルトキ $y' > 0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増ス即チ (2) ハ $x=0$ ニ於テ不連続ニシテ $x=8$ ニ於テ極小値 $y = -\frac{1}{16}$ トナル, 而シテ

$x=1$	-1	2	-2	3	4	$\pm\infty$
$y=3$	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{9}$	0	0

故ニ (1) (2) ノぐらふハ圖ノ如クニシテ
 交点ハ二ツアリテ 其各ノ x ノ値ハ大略
 2.1 及ビ -1.6 ナルヲ見ル, 依ツテ所要
 ノ實根ハ二ツアリテ 其近似値ハ大略 2.1,
 -1.6 ナリ。

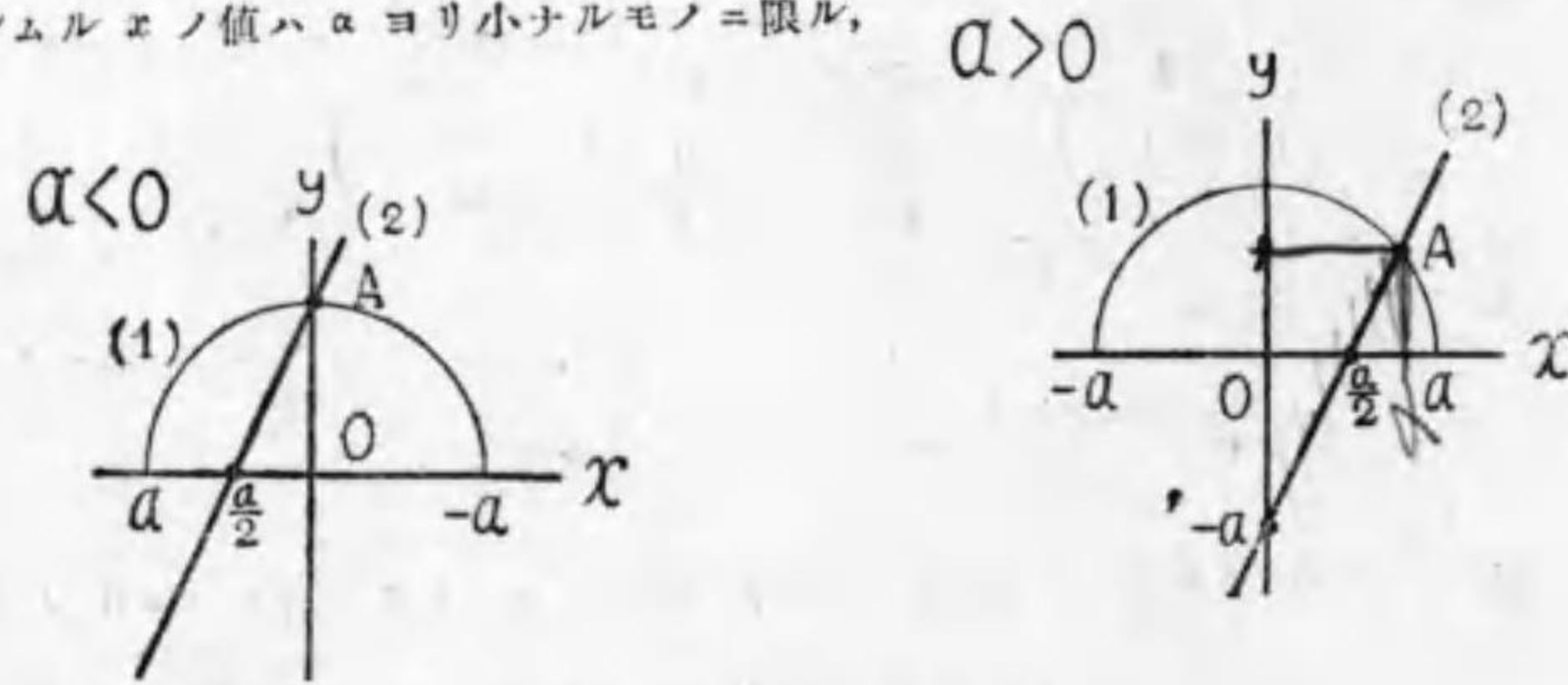


9. ぐらふヲ利用シテ不等式 $\sqrt{a^2-x^2} > 2x-a$ ヲ解ケ。

[解] $a=0$ ナラバ所題ノ不等式ハ明カニ成立セズ故ニ $a \neq 0$ トス, 而シテ

$$y = \sqrt{a^2-x^2} \quad (1) \qquad y = 2x-a \quad (2)$$

ナルニツノぐらふヲ考フ, (1) ハ原点ヲ中心トシ a ノ絶対値ヲ半徑トスル圓ノ如キ半圓ニシテ, (2) ハ x 軸, y 軸ヲ原点ヨリ $\frac{a}{2}$ 及 $-a$ ナル距離ニ於テ切ル直線ナリ, 即チ $a > 0$ ナルカ $a < 0$ ナルカニ從ツテぐらふノ關係ハ圖ノ如クナル。ニツノぐらふノ交点ヲ A トシ A ノ x ノ値ヲ α トスレバ α ヨリ小ナル x ノ値ニ對スル (1) ノ y ノ値ハ (2) ノ y ノ値ヨリ大ニシテ其他ノ場合ニハ (1) ノ y ハ (2) ノ y ニ等シキカ或ハ (2) ノ y ヨリ小ナリ即チ所題ノ不等式ヲ満足セシムル x ノ値ハ α ヨリ小ナルモノニ限ル,



但シ x ガ $-|a|$ ヨリ小トナリ得ザルコト勿論ナル故ニ所題ノ不等式ヲ満足セシムル x ノ値ハ

$$-|a| \leq x < \alpha$$

ナリ, 然ルニ x ハ (1), (2) ノ交点ノ x ノ値ナル故ニ

$$\sqrt{a^2-x^2} = 2x-a$$

ノ根ナリ, 即チ此方程式ヲ解キテ

$$a > 0 \quad \text{ナラバ} \quad x = \frac{4a}{5},$$

$$a < 0 \quad \text{ナラバ} \quad x = 0,$$

故ニ所要ノ解ハ

$$a > 0 \quad \text{ナラバ} \quad -a \leq x < \frac{4a}{5},$$

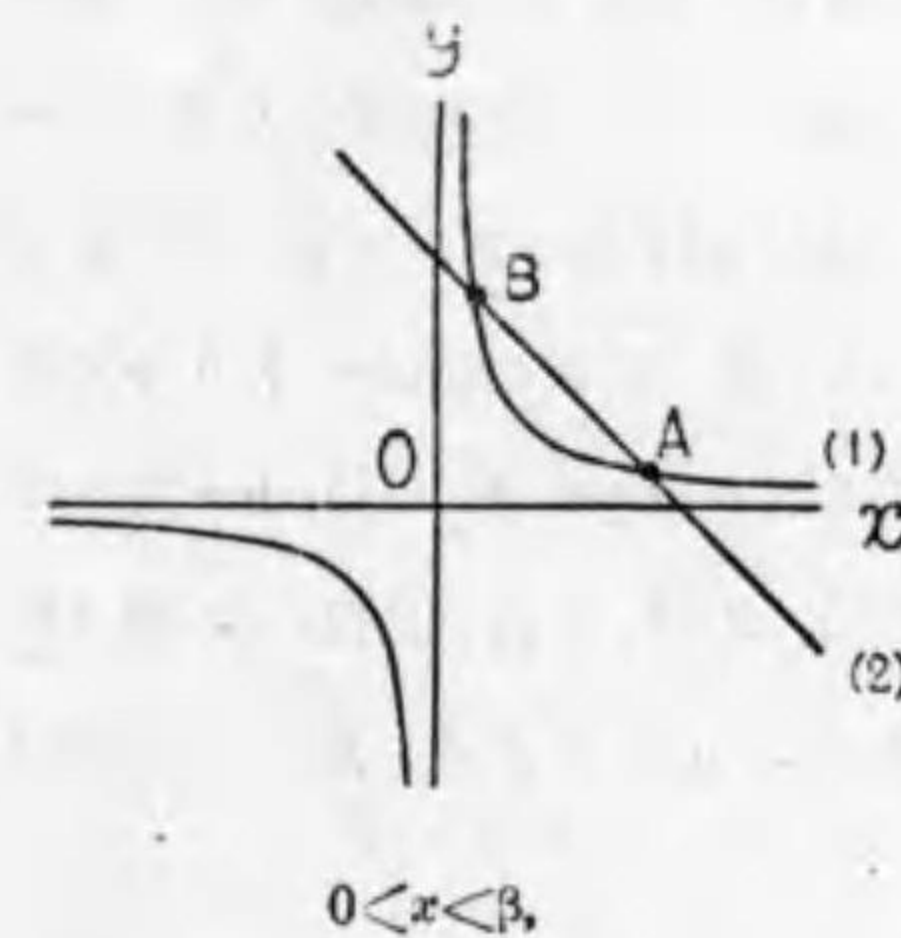
$$a < 0 \quad \text{ナラバ} \quad a \leq x < 0,$$

10. ぐらふヲ利用シテ不等式 $x + \frac{1}{ax} > 1 + \frac{1}{a}$ ($a > 0$) ヲ解ケ。

[解] 所題ノ不等式ヲ變形シテ $\frac{1}{ax} > 1 + \frac{1}{a} - x$ トシニツノぐらふ

$$y = \frac{1}{ax} \quad (1) \qquad y = 1 + \frac{1}{a} - x \quad (2)$$

ヲ描ク $a > 0$ ナル故ニ (1) ハ圖ノ如キ双曲線ニシテ (2) ハ x 軸, y 軸ト等角ヲナス直線ナリ,



ニ限ル,

(1), (2) ノ交リテ圖ノ A, B トシ A, B ノ x ノ値ヲ α, β ($\beta < \alpha$) トスレバ $0 < x < \beta$ 及ビ $\alpha < x$ ナル x ノ値ニ對スル (1) ノ y ハ (2) ノ y ヨリ大ニシテ其他ノ場合ニハ (1) ノ y ハ (2) ノ y ヨリ小ナルカ又ハ (2) ノ y ニ等シ, 即チ所題ノ不等式ヲ満足セシムル x ノ値ハ

$$\alpha < x,$$

然ルニ α, β ハ (1), (2) ノ交点ノ x ノ値ナル故ニ方程式

$$\frac{1}{ax} = 1 + \frac{1}{a} - x$$

ノ根ナリ, 然ルニ此方程式ヲ解キテ

$$x=1 \text{ 又ハ } \frac{1}{a}$$

ヲ得, 依ツテ

$0 < a < 1$ ナラバ $\alpha = \frac{1}{a}, \beta = 1$ 故ニ所要ノ解ハ

$$0 < x < 1, \quad \frac{1}{a} < x,$$

$1 < a$ ナラバ $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{a}$ 故ニ所要ノ解ハ

$$1 < x < \frac{1}{a}, \quad 1 < x,$$

11. a, b ヲ二ツノ實數トシ有理整方程式 $f(x)=0$ ガ a ト b トノ間ニ全然實根ヲ有セザルカ, 若シクハ偶數個ノ實根ヲ有スルトキハ $f(a)$ ト $f(b)$ トハ同符號ヲ有シ, a ト b トノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有スルトキハ $f(a)$ ト $f(b)$ トハ異符號ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 方程式 $f(x)=0$ ノ實根ハ函数 $y=f(x)$ ノぐらふガ x 軸ト交ル点ノ x ノ値ナリ, 故ニ a ト b トノ間ニ全然根ヲ有セザルカ若シクハ偶數個ノ實根ヲ有スルトキハ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ全然 x 軸ト交ラサルカ若シクハ偶數個ノ点ニ於テ x 軸ト交ルベシ, 而シテ此ぐらふハ連續曲線ナル故ニ何レノ場合ニ於テモ $x=a, x=b$ ニ於テ曲線ハ x 軸ノ同側ニアルベシ, 從ツテ $x=a, x=b$ ニ對應スル y ノ値ハ同符號ヲ有スベシ, 之ニ反シテ若シ a ト b トノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有スルトキハ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ x 軸ト奇數個ノ点ヲ於テ交ルベク從ツテ $x=a, x=b$ ニ於テ曲線ハ x 軸ノ反對ノ側ニアルベシ, 從ツテ $x=a, x=b$ ニ對應スル y ノ値 $f(a), f(b)$ ハ異符號ヲ有スベシ。

12. a, b ヲ二ツノ實數トスルトキ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ同符號ヲ有スルカ,

異符號ヲ有スルカニ從ツテ方程式 $f(x)=0$ ハ ab 間ニ偶數個(0ヲ含ム)又ハ奇數個ノ實根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] $f(a)$ ト $f(b)$ トガ同符號ナルカ又ハ異符號ナルニ從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふノ $x=a, x=b$ ニ對應スル点ハ x 軸ノ同側ニアルカ又ハ反對ノ側ニアリ, 而シテ此ぐらふハ連續曲線ナル故ニ $x=a, x=b$ ニ對應スル点ガ x 軸ノ同側ニアルカ又ハ反對ノ側ニアルカニ從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a, x=b$ ノ間ニ於テ x 軸ト偶數個(0ヲ含ム)ノ点ニ於テ交ルカ又ハ奇數個ノ点ニ於テ交ルベシ, 從ツテ a, b 間ニ偶數個(0ヲ含ム)又ハ奇數個ノ實根ヲ有スベシ。

13. 方程式 $2x^3-4x-1=0$ ノ根ヲ分離セヨ。

[解] $f(x)=2x^3-4x-1$ トスレバ $f(x)=2x(x^2-2)+4x-1$

故ニ $x > 2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正,

故ニ $f(x)=0$ ハ 2 ヨリ大ナル實根ヲ有セズ

又 $f(x)=2x(x^2-2)-1$

故ニ $x < -2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ負

故ニ $f(x)=0$ ハ -2 ヨリ小ナル實根ヲ有セズ,

依ツテ今 $x=-2$ ヨリ $x=2$ マデノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ次ノ如シ

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-	+	-	-	+

故ニ前問ニヨリ $(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$ 間ニ各一ツノ根ヲ有スルヲ知ル。

14. 方程式 $x^4-4x^3-2x^2+3x+1=0$ ノ根ヲ分離セヨ。

[解] $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+3x+1$ トスレバ

$$f(x)=x^2(x^2-4x-2)+3x+1=x^2(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})+3x+1$$

然ルニ $2+\sqrt{6} < 5$ 故ニ $x > 5$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正

故ニ $f(x)=0$ ハ 5 以上ノ實根ヲ有セズ,

$$\text{又 } f(x)=x^4+1-x(4x^2+2x-3)=x^4+1-x\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right)$$

然ルニ $\frac{-1-\sqrt{13}}{4} > -2$ 故ニ $x < -2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正、

故ニ $f(x)=0$ ハ -2 以下ノ實根ヲ有セズ、

依ツテ今 -2 ヨリ 5 マデノ間ノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ次ノ如クナル

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

故ニ $(0, 1), (4, 5)$ 間ニ 1 ツ或ハ 3 ツノ實根ヲ有シ $(-2, -1), (-1, 0)$ 等

ノ間ニハ實根ヲ有セザルカ或ハ 2 ツノ實根ヲ有スルカナルヲ知ル、

依ツテ $(-1, 0)$ 間ヲ吟味センニ $x = -\frac{1}{2}$ トオケバ $f(x)$ ノ符號ハ一トナル、

故ニ $(-1, 0)$ 間ニ 2 ツノ實根アリテ其一ツハ $(-1, -\frac{1}{2})$ 間ニ他ノ一ツハ

$(-\frac{1}{2}, 0)$ 間ニアルヲ知ル、從ツテ所題ノ方程式ノ四根ハ皆實數ニシテソレゾレ

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, 1), (4, 5)$$

ノ間ニアルヲ知ル。

15. $f(x)$ ハ x ノ有理整式ニシテ $f(x)+7$ ハ $(x+1)^4$ ニテ割り切れ、
 $f(x)-2$ ハ $(x-1)^4$ ニテ割り切れ、 $f(x)+5$ ハ $(x-2)^4$ ニテ割り切レルトキ
 ハ方程式 $f(x)=0$ ハ少クトモ二ツノ相異なる實根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 題意ニヨリ

$$f(x) = g_1(x)(x+1)^4 - 7 = g_2(x)(x-1)^4 + 2 = g_3(x)(x-2)^4 - 5$$

但シ $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ ハ $f(x)$ ヲソレゾレ $(x+1)^4, (x-1)^4, (x-2)^4$ ニテ
 割りヌルトキノ商ヲ表ハスモノトス、

從ツテ $x = -1, x = 1, x = 2$ ノトキノ $f(x)$ ノ符號ハ夫々 $-, +, -$ トナル、

故ニ $f(x)=0$ ハ $(-1, 1), (1, 2)$ 間ニ少クトモ一ツツノ實根ヲ有ス、從ツテ
 少クトモ二ツノ相異なる實根ヲ有ス。

16. x ノ或値ニ對スル $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ノ値ハ x ガ
 正ニシテ適當ニ大ナルトキハ a_0 ト同符號トナリ、又 x ガ負ニシテ其絶對値ガ
 適當ニ大ナルトキハ $(-1)^n a_0$ ト同符號トナルコトヲ証セヨ。

[解] 方程式 $f(x)=0$ ノ實根ヲ k_1, k_2, \dots, k_m 虛數ヲ $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \alpha_2 \pm \beta_2 i, \dots, \alpha_p \pm \beta_p i$
 トスレバ

$$f(x) = a_0(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_m)\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\} \dots \{(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\}$$

但シ $m+2p=n$,

x = 實根 k_1, k_2, \dots, k_m 中ノ最大ナルモノヨリ大ナル値ヲ與フルトキ

$$(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_m) > 0,$$

又 x ノ如何ニ係ラズ

$$\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\}\dots\{(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\} > 0$$

故ニ $x = k_1, k_2, \dots, k_m$ 中ノ最大ノモノヨリ大ナル正ノ値ヲ與フレバ $f(x)$ ハ a_0
 ト同符號トナル、

次ニ x ノ符號ヲ變ズレバ

$$f(-x) = (-1)^n a_0 x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n$$

$f(-x)$ ハ x = 正ノ適當ニ大ナル値ヲ與フレバ上ノ証明ニヨリ $(-1)^n a_0$ ト同符
 號トナル、從ツテ $f(x)$ ハ x ノ負ニシテ絶對値ノ適當ニ大ナル値ニ對シテ
 $(-1)^n a_0$ ト同符號トナル。

17. 方程式 $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ ハ n ガ奇數ナラバ p_n ト
 反對ノ符號ヲ有スル少クトモ一ツノ實數ヲ有シ、 n ガ偶數ニシテ $p_n < 0$ ナラバ
 少クトモ一ツノ正根及ビ一ツノ負根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] $f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$ トスレバ

n ガ奇數ナラバ $x = -\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ $(-1)^n = -1$ ト同符號即チ負(前問)

$x = 0$ ノトキ $f(x) = p_n$

$x = \infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正(前問)

故ニ $p_n > 0$ ナラバ $(-\infty, 0)$ 間ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有シ

$p_n < 0$ ナラバ $(0, \infty)$ 間ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有ス

即チ n ガ奇數ナラバ常ニ p_n ト反對ノ符號ヲ有スル少クトモ一ツノ實根ヲ有ス、

次 = n が偶数 = シテ $p_n < 0$ ナラバ

- $x = -\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ $(-1)^n = 1$ ト同符號, 即チ正
- $x = 0$ ノトキ $f(x) = p_n < 0$,
- $x = \infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正

故 = $(-\infty, 0), (0, \infty)$ 間ニ少クトモ一ツツ、ノ實根ヲ有ス, 即チ少クモ一ツノ實根ト一ツノ正根トヲ有ス。

18. 方程式 $x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$ ハ m 方實數ナルトキハ常ニ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] $f(x) = x^3 - 9x - m(x^2 - 1)$ トオケバ

- $x = -\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ負,
- $x = -1$ ノトキ $f(x)$ ハ正,
- $x = 0$ ノトキ $f(x) = m$,
- $x = 1$ ノトキ $f(x)$ ハ負,
- $x = \infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正,

故 = m ノ如何ニ係ラズ $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ 間ニ夫々一ツノ實根アリ, 即チ m ノ如何ニ係ラズ實根ノミヲ有ス。

19. α ノ如何ニ係ラズ方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x - 4\sin^2\alpha = 0$ ハ常ニ三ツノ正根 (0ヲ含ム)ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4\sin^2\alpha$ トオケ

$\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$ ナルトキ即チ $\sin\alpha = 0$ ナルトキハ $f(x) = 0$ ハ $0, 3, 3$ ナル三ツノ正根ヲ有スルコト明カナル故 = $\sin\alpha \neq 0$ ナル場合ヲ考フ, 然ルニ

$$f(x) = x(x-3)^2 - 4\sin^2\alpha$$

$\sin\alpha$ ハ 1 ヨリ大ナラザル故ニ $x > 4$ ナルトキハ $f(x)$ ハ常ニ正, 故ニ $f(x)$ ハ 4 ヨリ大ナル正根ヲ有セズ, 依ツテ今 0 ヨリ 4 マデノ間ノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-	$4\cos^2\alpha$	$2\cos 2\alpha$	-	$4\cos^2\alpha$

故 = $\cos\alpha = 0$ ナルトキハ 1 , 及ビ 4 ハ二根ニシテ從ツテ殘ル一ノ根ハ又 1 トナル故ニ $f(x) = 0$ ハ三ツノ正根ヲ有シ $\cos\alpha \neq 0$ ナルトキハ上ノ符號ノ變化ヨリ $(0, 1), (1, 3), (3, 4)$ 間ニ夫々一ノ根ヲ有スルコトヲ知ル, 故ニ矢張り三ツノ正根ヲ有ス, 即チ α ノ如何ニ係ラズ所題ノ方程式ハ常ニ三ツノ正根ヲ有シ且ツ夫等ノ正根ハ 4 ヨリ大ナラズ。

20. x 方連續的ニ變化スルトキ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ ノ變化スル状態ヲ考究シ, 由ツテ以テ方程式 $f(x) = 0$ ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ。

[解] $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$

x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マテ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ノ符號ノ變化ト $f(x)$ ノ増減ノ状態トヲ表示スレバ次ノ如クナル

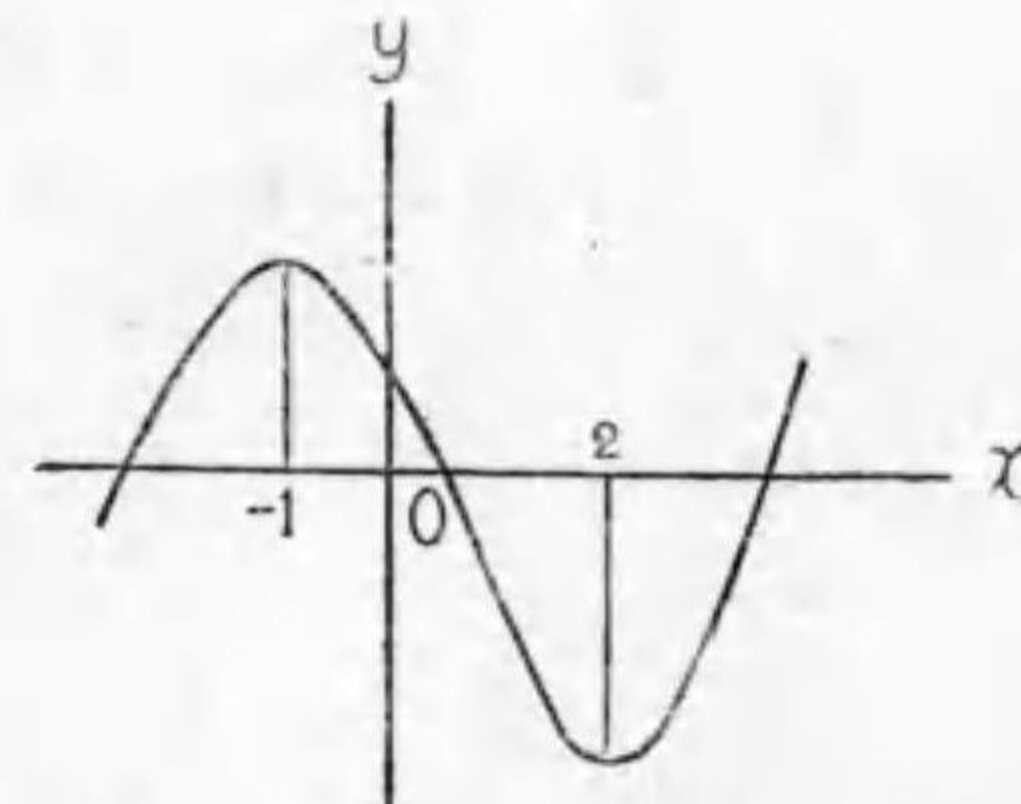
x	$-\infty$	-1	0	2	∞				
$f'(x)$		正	0	負	0	正			
$f(x)$	-	増	13	減	6	減	-14	増	+
			(極大)			(極小)			

依ツテ $y = f(x)$ ノぐらふハ圖ノ如シ,

故ニ方程式 $f(x) = 0$ ハ -1 ヨリ

小ナル負根一ツ 2 ヨリ小ナル正根

一ツ 2 ヨリ大ナル正根一ツヲ有ス。



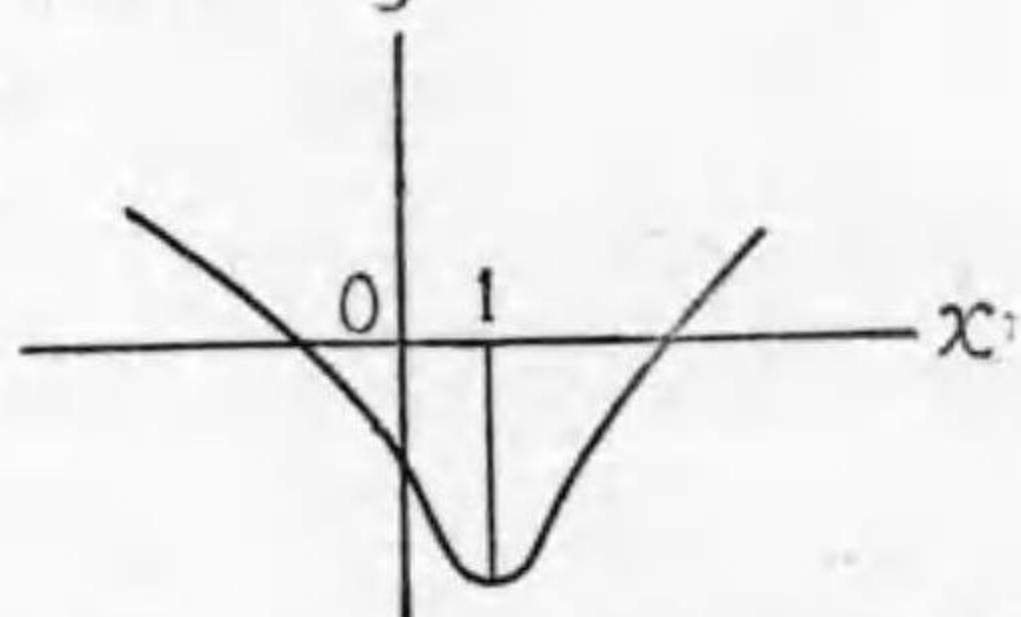
21. x 方連續的ニ變化スルトキ $f(x) = x^4 + 3x^3 - 10x - 5$ ノ變化スル状態ヲ考究シ, 由ツテ以テ方程式 $f(x) = 0$ ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ。

[解] $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$

x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マテ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ノ符號及ビ $f(x)$ ノ増減ハ次ノ如シ

x	$-\infty$	0	1	∞
$f'(x)$		負	負 0 正	
$f(x)$	+	減 -5	減 -11 増 (極小)	+

依ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ圖ノ如シ、
故ニ方程式 $f(x)=0$ ハ正根、負根各
一ツヲ有ス。



22. x 方連続ニ變化スルトキ $f(x)=x^3+px+q$ ノ増減スル状態ヲ考究
スルコトニ由ツテ三次方程式 $f(x)=0$ 方三ツノ相異なる實根ヲ有スルタメニ
必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

[解] $f'(x)=3x^2+p$

故ニ $p>0$ ナルトキハ $f'(x)$ ハ常ニ正ナル故ニ $f(x)$ ハ x ト共ニ常ニ増シ、
從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ x 軸ト一回ヨリ多ク交ルコト能ハズ、即チ $f(x)=0$
ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スル能ハズ、 $p=0$ ナルトキモ同様ナルコト明カナリ、
故ニ三ツノ相異なる實根ヲ有スルタメニハ

$$p < 0 \tag{1}$$

ナラザルベカラズ、 $p < 0$ ナル場合ニ $-\frac{p}{3}=k^2$ トキ $f(x)$ ノ増減ヲ表示ス
レバ

x	$-\infty$	$-k$	k	∞
$f'(x)$		正	0 負 0 正	
$f(x)$	-	増 $2k^3+q$	減 $-2k^3+q$	増 +

即チ $x=-\infty$ ノトキ $f(x)<0$ ニシテ $x=-k$ ノトキ $f(x)=2k^3+q$ ハ極大ト
ナリ $x=k$ ノトキ $f(x)=-2k^3+q$ ハ極小トナリ $x=\infty$ ノトキ $f(x)>0$ トナ
ル故ニ $y=f(x)$ ノぐらふハ x 軸ト三度交ルタメニハ極大値ハ正ニシテ極小値ハ
負ナラザルベカラズ、即チ $f(x)=0$ ガ三ツノ實根ヲ有スルタメニハ

$$2k^3+q > 0, \quad -2k^3+q < 0 \tag{2}$$

ナラザルベカラズ、逆ニ (1), (2) ガ成立スルトキハ $f(x)$ ハ正ノ極大値ト負ノ
極小値トヲ有スルコト、ナル故ニ $y=f(x)$ ノぐらふハ x 軸ト三ツノ相異なる点
ニテ交リ從ツテ $f(x)=0$ ハ三ツノ相異なる實根ヲ有スルコト、ナル、依ツテ所要
ノ條件ハ (1) 及ビ (2) ナリ、然ルニ (2) ヲリ

$$-2k^3 < q < 2k^3 \quad \therefore q^2 < 4k^6 = 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\text{即チ } 27q^2 + 4p^3 < 0 \tag{3}$$

(3) ガ成立スルトキハ p ハ當然負ナラザルベカラザルガ故ニ所要ノ條件ハ結局
(3) トナル。

23. 次ノ方程式ハ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ、

$$(x-a)(x-b)(x-c) - p^2(x-a) - q^2(x-b) - r^2(x-c) - 2pqr = 0, \tag{1}$$

[解] (1) ヲ變形スレバ

$$(x-a)\{(x-b)(x-c) - p^2\} - q^2(x-b) - r^2(x-c) - 2pqr = 0$$

今二次方程式

$$(x-b)(x-c) - p^2 = 0 \tag{2}$$

ノ二根ヲ α, β トスレバ α, β ハ實數ニシテ不等ナリ、何ントナレバ $x=-\infty, k$
(k ハ b, c 間ノ或値) ∞ トオケバ (2) ノ左邊ハ正負正トナレバナリ、
又 $(x-b)(x-c) = p^2 > 0$ ナル故ニ α, β ノ中ノ一ツハ b, c ノ双方ヨリ大ニシテ
他ハ双方ヨリ小ナリ、故ニ今 $\alpha < \beta, b \leq c$ トスレバ

$$\alpha < b \leq c < \beta$$

茲ニ於テ (1) ノ左邊ヲ $f(x)$ トシ $f(-\infty), f(\alpha), f(\beta), f(\infty)$ ノ符號ヲ考フルニ

$$f(-\infty) < 0$$

$$f(\alpha) = -q^2(\alpha-b) - r^2(\alpha-c) - 2pqr = q^2(b-\alpha) + r^2(c-\alpha) - 2pqr$$

$$\text{然ルニ } p = \pm \sqrt{(a-b)(a-c)}$$

$$\therefore f(\alpha) = \{q\sqrt{b-\alpha} \pm r\sqrt{c-\alpha}\}^2 > 0$$

$$f(\beta) = -q^2(\beta-b) - r^2(\beta-c) - 2pqr = -\{q\sqrt{\beta-b} \pm r\sqrt{\beta-c}\}^2 < 0$$

$$f(\infty) > 0$$

故に (1) は $(-\infty, \alpha)$, (α, β) , (β, ∞) 間ニ各一根ヲ有ス, 即チ實根ノミヲ有ス。

24. a ノ絶対値ガ 2 ヨリ小ナラザルトキ $x = -1$ ヨリ $x = 1$ ニ至ル間ニ於テ

$$|x^2 + ax + b| < 2$$

ヲ満足セシメザル x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ証セヨ。

[解] 若シ $x = -1$ コリ $x = 1$ ニ至ル總テノ値ニ對シテ所題ノ不等式ガ常ニ成立スル

モノトスレバ其区域内ニ於テ

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

ノ最大値ハ 2 ヨリ小ニシテ最小値ハ -2 ヨリ大ナラザルベカラズ, 從ツテ最大値ト

最小値トノ差ハ 4 ヨリ小ナラザルベカラズ, 換言スレバ $(-1, 1)$ ナル区域内ニ

於ケル $f(x)$ ノ最大値ト最小値トノ差ガ 4 ヨリ小ナラザルトキハ此区域内ニ於テ

所題ノ不等式ヲ満足セシメザル x ノ値ハ少クトモ一ツアルナリ

然ルニ $f'(x) = 2x + a$

故ニ $a \geq 2$ ナラバ $f'(x)$ ハ $(-1, 1)$ 内ニテ常ニ正或ハ 0 ニシテ從ツテ $f(x)$

ハ x ト共ニ常ニ増ス故ニ其最小値ハ $f(-1)$ ニシテ其最大値ハ $f(1)$ ナリ, 之レニ

反シテ $a \leq -2$ ナルトキハ $(-1, 1)$ 内ニ於テ $f'(x)$ ハ常ニ負或ハ 0 ニシテ, 從

ツテ $f(x)$ ハ x ガ増ストキ常ニ減少スル故ニ其最大値ハ $f(-1)$ ニシテ最小

値ハ $f(1)$ ナリ, 而シテ

$$f(-1) = 1 - a + b, \quad f(1) = 1 + a + b,$$

故ニ $a \geq 2$ ナルモ又 $a \leq -2$ ナルモ其最大値ト最小値トノ差ハ $2|a|$ ニシテ 4

ヨリ小ナラズ故ニ $|a| \geq 2$ ナルトキハ $(-1, 1)$ 内ニ於テ所題ノ不等式ヲ満足セシ

メザル x ノ値ハ少クトモ一ツアルベシ。

25. 方程式 $4x^4 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$ ハ等根ヲ有スルカ否カラ吟味セヨ。

[解] 基本定理 II ニヨリ $f(x) = 0$ ノ重根ハ又 $f'(x) = 0$ ノ根ナル故ニ $f(x) = 0$ ノ

等根ヲ求ムルニハ $f(x) = 0$ ト $f'(x) = 0$ トノ共通ノ根ヲ求ムレバ可ナリ, 即チ

$f(x), f'(x)$ ノ最大公約數ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ求ムレバ可ナリ, 依ツテ

$$f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 7x + 2 \quad \text{トオケバ}$$

$$f'(x) = 16x^3 + 10x - 7,$$

此二式ノ最大公約數ヲ求ムレバ $2x - 1$,

故ニ所要ノ等根ハ $\frac{1}{2}$ ナリ, 而シテ $x = \frac{1}{2}$ ハ

$$f''(x) = 48x^2 + 10 = 0$$

ノ根ナラザル故ニ是レハ所題ノ方程式ノ二重根ナリ。

26. 方程式 $x^n - np x + (n-1)q = 0$ ($p > 0$) ガ等根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

[解] $f(x) = x^n - np x + (n-1)q = 0$

トスレバ $f(x) = 0$ ガ等根ヲ有スルタメニハ $f(x) = 0, f'(x) = 0$ ガ共通ノ根ヲ有

セザルベカラズ, 然ルニ

$$f'(x) = nx^{n-1} - np = n(x^{n-1} - p)$$

故ニ $f'(x) = 0$ ノ一ツノ根ヲ $x = p^{\frac{1}{n-1}} \omega$ (ω ハ 1 ノ $n-1$ 乗根ノ虚數ノ一ツ) ト

シ $f(x) = 0$ ニ代入スレバ

$$p^n = q^{n-1}$$

コレ即チ必要ナル條件ナリ, 逆ニ此關係ガ成立スレバ $f(x) = 0, f'(x) = 0$ ハ共通

根ヲ有スルコトヲ容易ニ証明シ得ル故ニ所題ノ方程式ハ等根ヲ有スルコトナル,

依ツテ所要ノ條件ハ $p^n = q^{n-1}$ ナリ。

27. 方程式 $x^{n+1} - x^n - x + 1 = 0$ ノ判別式ハ 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。

[解] 一ツノ方程式ノ判別式トハ其方程式ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ナル故ニ其

方程式ガ等根ヲ有スルトキハ判別式ハ當然 0 トナル, 依ツテ今所題ノ方程式ヲ

$f(x) = 0$ トシコレト $f'(x) = 0$ トガ共通根ヲ有スルカ否カラ吟味センニ

$$f'(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} - 1$$

然ルニ $f(x) = 0$ ハ $x = 1$ ナル根ヲ有スルコト明カニシテ $x = 1$ ハ又 $f'(x) = 0$

ノ根ナルコト明カナリ, 故ニ $f(x) = 0$ ハ $x = 1$ ナル等根ヲ有ス, 依ツテ其判別式

ハ 0 ナリ。

28. 五次方程式 $x^5 + qx^3 + rx^2 + t = 0$ ($t \neq 0$) 方等根ヲ有スルトキハ其等根ハ
又二次方程式 $15rx^2 - 6q^2x + 25t - 4qr = 0$ ノ根ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 α ヲ等根トスレバ α ハ $f(x) = x^5 + qx^3 + rx^2 + t = 0$ 及ビ $f'(x) = 5x^4 + 3qx^2 + 2rx = 0$
ノ根ナリ、即チ

$$\alpha^5 + q\alpha^3 + r\alpha^2 + t = 0 \quad (1)$$

$$5\alpha^4 + 3q\alpha^2 + 2r\alpha = 0 \quad (2)$$

$t \neq 0$ ナル故ニ $\alpha \neq 0$ 、故ニ (2) ヲリ

$$\alpha^3 = -\frac{3qx + 2r}{5}, \quad \alpha^5 = -\frac{3qx^3 + 2rx^2}{5}$$

(1) ニ代入シテ整理スレバ

$$15r\alpha^2 - 6q^2\alpha + 25t - 4qr = 0$$

即チ α ハ又所題ノ二次方程式ノ根ナリ。

29. 方程式 $f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ ノ k 重根ハ其各項
ニ等差級數 $a + nd, a + (n-1)d, \dots, a + d, a$ ノ各項ヲ乗ジタル方程式ノ $k-1$
重根ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 今 $f(x)$ ノ各項ニ等差級數ノ各項ヲ乗シテ得ル方程式ヲ $F(x) = 0$ トスレバ

$$F(x) = (a + nd)x^n + (a + n-1d)p_1x^{n-1} + (a + n-2d)p_2x^{n-2} + \dots$$

$$+ (a + d)p_{n-1}x + ap_n$$

$$= a(x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n)$$

$$+ d\{nx^n + (n-1)p_1x^{n-1} + (n-2)p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x\}$$

$$= a f(x) + d \cdot x f'(x) = 0,$$

然ルニ $f(x) = 0$ ノ k 重根ハ $f'(x) = 0$ ノ $k-1$ 重根ナル故ニ (基本定理 II)

$$f(x) = (x - \alpha)^k \cdot g(x)$$

トスレバ

$$f'(x) = (x - \alpha)^{k-1} h(x)$$

但シ $g(x), h(x)$ ハ夫々 x ノ $n-k$ 次ノ多項式ニシテ $(x - \alpha)$ ナル因數ヲ有セ
ザルモノナリ、

$$\therefore F(x) = (x - \alpha)^{k-1} \{a(x - \alpha)g(x) + dxh(x)\} = 0$$

$h(x)$ ハ $(x - \alpha)$ ナル因數ヲ有セザル故ニ $a(x - \alpha)g(x) + dxh(x)$ ハ $(x - \alpha)$ ナル
因數ヲ有セズ、故ニ α ハ $F(x) = 0$ ノ $k-1$ 重根ナリ、即チ $f(x) = 0$ ノ k 重根
ハ $F(x) = 0$ ノ $k-1$ 重根トナル。

30. 方程式 $f(x) = 0$ ノ各ノ根ノ m 乗ノ和ヲ求メヨ、但シ m 正ノ整數
トス。

〔解〕 $f(x) = 0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トスレバ

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

$$\therefore \log f(x) = \log(x - \alpha_1) + \log(x - \alpha_2) + \dots + \log(x - \alpha_n)$$

兩邊ヲ x ニ關シテ微分スレバ (微分學演習第三章參照)、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{x - \alpha_n}$$

$$\therefore \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x - \alpha_1} + \frac{x}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{x}{x - \alpha_n}$$

$$= \left(\frac{x - \alpha_1}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{x - \alpha_2}{x}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{x - \alpha_n}{x}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha_1}{x}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{\alpha_2}{x}\right)^{-1} + \dots + \left(1 - \frac{\alpha_n}{x}\right)^{-1}$$

二項定理ニ由ツテ展開スレバ

$$= 1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_1^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_1^m}{x^m} + \dots$$

$$+ 1 + \frac{\alpha_2}{x} + \frac{\alpha_2^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_2^m}{x^m} + \dots$$

.....

$$+ 1 + \frac{\alpha_n}{x} + \frac{\alpha_n^2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_n^m}{x^m} + \dots$$

故ニ各ノ根ノ m 乗ノ和ヲ u_m トスレバ

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = n + \frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \dots + \frac{u_m}{x^m} + \dots$$

是ヲ所求ノ u_m ハ左邊ノ式ヲ $\frac{1}{x}$ ノ冪ニ展開シタルトキノ $\frac{1}{x^m}$ ノ係數ニ等シ。

31. 四次方程式 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ ノ四根ノ五乗ノ和ヲ求メヨ。

〔解〕 前問ノ結果ニヨリ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{4x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 12x}{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 4}$$

ヲ $\frac{1}{x}$ ノ羅ニ展開スルヌメニ普通ノ割り算ヲ施セバ

$$4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{18}{x^3} + \frac{79}{x^4} + \frac{123}{x^5} + \dots$$

トナルガ故ニ各根ノ五乗ノ和ハ 123 ナルヲ知ル。

32. 1 ノ n 乗根ヲ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ トシ $\Sigma(\theta_1^m \theta_2^p)$ ヲ求メヨ, 但シ m, p ハ互ニ異ナル正ノ整数トス。

〔解〕 $u_m = \theta_1^m + \theta_2^m + \dots + \theta_n^m$

$u_p = \theta_1^p + \theta_2^p + \dots + \theta_n^p$ トスレバ

$$\begin{aligned} \therefore u_m u_p &= \theta_1^{m+p} + \theta_2^{m+p} + \dots + \theta_n^{m+p} \\ &\quad + \theta_1^m \theta_2^p + \theta_1^m \theta_3^p + \dots + \theta_1^p \theta_2^m + \dots \\ &= u_{m+p} + \Sigma(\theta_1^m \theta_2^p) \end{aligned}$$

茲ニ於テ u_m, u_p, u_{m+p} ヲ求メシニ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ハ $f(x) = x^n - 1 = 0$ ノ根ナルガ故ニ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = n + \frac{n}{x^n} + \frac{n}{x^{2n}} + \dots + \frac{n}{x^{(n-1)n}} + \dots$$

故ニ m ガ n ノ倍数ナルトキハ $u_m = n$, 然ラザル場合ニハ $u_m = 0$,

依ツテ次ノ結果ヲ得

(1) m, p ノ双方ガ n ノ倍数ナル場合 ($m+p$ モ亦 n ノ倍数)

$$\Sigma(\theta_1^m \theta_2^p) = n^2 - n,$$

(2) m, p ノ何カ一ツガ n ノ倍数ニシテ他ガ n ノ倍数ナラザル場合

$$\Sigma(\theta_1^m \theta_2^p) = 0$$

(3) m, p ノ双方ガ n ノ倍数ナラザルモ $m+p$ ガ n ノ倍数ナル場合

$$\Sigma(\theta_1^m \theta_2^p) = -n,$$

33. 或四次方程式ノ四根ノ 1 乗, 2 乗, 3 乗, 4 乗ノ和方夫々 u_1, u_2, u_3, u_4 ナリトイフ其方程式如何。

〔解〕 求メントスル四次方程式ヲ

$$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

トスレバ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{4x^4 + 3px^3 + 2qx^2 + rx}{x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s}$$

普通ノ割り算ヲ施セバ

$$4 - \frac{p}{x} + \frac{p^2 - 2q}{x^2} + \frac{3pq - 3r - p^3}{x^3} + \frac{4pr + 2q^2 - 4p^2q + p^4 - 4s}{x^4} + \dots$$

$$\therefore u_1 = -p$$

$$\therefore p = -u_1$$

$$u_2 = p^2 - 2q$$

$$q = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2)$$

$$u_3 = 3pq - 3r - p^3$$

$$r = \frac{1}{6}(3u_1u_2 - u_1^3 - 2u_3)$$

$$u_4 = 4pr + 2q^2 - 4p^2q + p^4 - 4s$$

$$s = \frac{1}{24}(16u_1u_3 + 6u_2^2 - u_1^4 - 9u_4)$$

34. 方程式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ ノ正根ノ數ハ係數 a_0, a_1, \dots, a_n 間ノ符號ノ變化ノ數ヨリ多カラズシテ其差ハ偶數ナルコトヲ証セヨ, 之ヲ Descartes ノ符號ノ法則トイフ。

〔解〕 $f(x) = 0$ ノ正根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ トシ負根ヲ $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_m$ 複素數根ヲ

$$\gamma_1 \pm \delta_1 i, \gamma_2 \pm \delta_2 i, \dots, \gamma_k \pm \delta_k i \quad (r+m+2k=n) \text{ トスレバ}$$

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_r) F(x),$$

$$F(x) = a_0(x + \beta_1)(x + \beta_2) \dots (x + \beta_m) \{(x - \gamma_1)^2 + \delta_1^2\} \dots \{(x - \gamma_k)^2 + \delta_k^2\},$$

$F(x)$ ノ最高次ノ係數ハ a_0 ニシテ a_0 ハ常ニ正トスルコトヲ得, 又 $F(x)$ ノ最

後ノ項ハ $a_0\beta_1\beta_2 \dots \beta_m(\gamma_1^2 + \delta_1^2) \dots (\gamma_k^2 + \delta_k^2)$ ニシテ其符號ハ正, 即チ $F(x)$

ハ正ヨリ始マリ正ニ終ル, 故ニ係數間ノ符號ノ變化ノ數ハ偶數ナリ,

次ニ $(x - \alpha)F(x)$ ノ符號ノ變化ヲ考フルニ今假リニ $F(x)$ ノ符號ヲ

$$+ - + + - - - - + - + +$$

ナリトスレバ之ニ $x-\alpha_1$ ヲ乗ズル場合ノ符號ノミヲ記セバ

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + \\ - & + & - & - & + & + & - & + & - & - & - & - \\ \hline + & - & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + \\ + & - & + & + & - & - & - & + & - & + & + & + \end{array}$$

但シ複符號 士 又ハ 干 ハ α_1 ト $F(x)$ ノ係數トヲ定メザレバ正負何レトモ決定シガタキモノナリ、然レドモ斯ル複符號ハ常ニ $F(x)$ ノ同符號ノ連續セル所ニ起リ且ツ其前後ハ常ニ異符號ナリ、故ニ斯ル複符號ハ正負何レニテモ符號ノ變化ハ $F(x)$ ノ之ニ對應スル變化ニ等シキカ或ハソレヨリ偶數個多クナルコトハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ、而シテ $(x-\alpha_1)F(x)$ ハ $F(x)$ ヨリ一項多ク而モ其増加シタル最後ノ一項ハ $F(x)$ ノ最後ノ項ト異符號ヲ有ス、從ツテ $(x-\alpha_1)F(x)$ ハ最後ニ於テ符號ノ變化チ一ツ或ハ奇數個増スベシ、即チ $(x-\alpha_1)F(x)$ ノ符號ノ變化ノ數ハ中間ニ於テハ $F(x)$ ノソレニ等シキカ或ハソレヨリ偶數個多ク最後ニ於テ常ニ一ツ或ハ奇數個増スガ故ニ $F(x) = (x-\alpha_1)$ ヲ乗ズレバ符號ノ變化ハ奇數個増スコトナル、 $(x-\alpha_2)$ 、 $(x-\alpha_3)$ 等ヲ乗ズル場合モ同様ナリ又此關係ハ $F(x)$ ノ各項ノ符號ガ如何ナル場合ニモ同様ニ成立ス、

依ツテ今ソレ等ノ増加スル奇數ヲ $2p_1+1, 2p_2+1, \dots$ トスレバ

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)F(x)$$

ノ符號ノ變化ハ $F(x)$ ノソレヨリ

$$(2p_1+1) + (2p_2+1) + \dots + (2p_r+1) = 2(p_1+p_2+\dots+p_r) + r,$$

個多ク、而シテ $F(x)$ ノ符號ノ變化ハ偶數ナルコト上ニイヘル如クナル故ニ其偶數ヲ $2p_0$ トスレバ結局 $f(x)$ ノ符號ノ變化ノ數ハ

$$2(p_0+p_1+\dots+p_r) + r$$

ニシテ正根ノ數 r ヨリ偶數個多シ、

從ツテ逆ニ符號ノ變化ノ數ガ s ナルトキ正根ノ數チ r トスレバ r ハ s ヨリ大ナルコト能ハズ又 $r=s-1$ 奇數、ナル能ハザルガ故ニ $r=s$ 或ハ $s-2$ 偶數ナラザルベカラズ、即チ正根ノ數ハ係數間ノ符號ノ變化ノ數ヨリ一般ニ偶數個少ナシ。

35. 方程式 $x^4+2x^2+3x-1=0$ ノ根ノ性質ヲ判定セヨ。

[解] 偶數次ニシテ絶對項負ナル故ニ少クトモ正負二ツノ實根ヲ有ス(問. 17) 然ルニ係數間ノ符號ノ變化ハ只一ツナル故ニ正根ハ一ツヨリ多カラズ、又 x ノ符號ヲ換ヘレバ $x^4+2x^2-3x-1=0$ トナリテ符號ノ變化ハ矢張り一ツ、故ニ此方程式ノ正根即チ原方程式ノ負根ハ一ツヨリ多カラズ、之ニ由ツテ所題ノ方程式ハ正負各一ツ、ノ實根ヲ有スルコトヲ知ル、從ツテ殘ル二根ハ虛數ナリ、即チ二ツノ實根ト二ツノ虛根ヲ有ス。

36. 方程式 $x^{2n}-x^4+x^3-x^2+1=0$ ハ少クトモ $2n-6$ 個ノ虛根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 係數間ノ符號ノ變化ハ四ツ、故ニ正根ハ多クトモ四ツ

次ニ x チ $-x$ トオケバ符號ノ變化ハ二ツ、故ニ負根ハ多クトモ二ツ、即チ所題ノ方程式ノ實根ハ 6 個ヨリ多カラズ、從ツテ虛根ハ $2n-6$ ヨリ少ナカラズ、即チ少クトモ $2n-6$ 個ノ虛根ヲ有ス。

37. 三次方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三根ヲ表ハス長サガーツノ三角形ヲ作ルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

[解] 三根ヲ a, b, c トスレバ a, b, c ハ實數ナルヲ要スル故ニ判別式ハ正或ハ 0 ナラザルベカラズ(第九章問. 52) 即チ

$$18pqr - 4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 - 27r^2 \geq 0 \tag{1}$$

又 a, b, c ハ皆正ナルヲ要スル故ニ Descartes ノ符號ノ法則(問. 34) ニヨリ

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0 \tag{2}$$

ナルヲ要ス、又 a, b, c ヲ三邊トスル三角形ノ面積チ S トスレバ

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a \right) \left(\frac{p}{2} - b \right) \left(\frac{p}{2} - c \right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{p(p^3 - 2(a+b+c)p^2 + 4(ab+bc+ca)p - 8abc)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{p(4p^2 - p^3 - 8r)}, \end{aligned}$$

a, b, c が三角形ヲ依リ得ルタメニハ S ハ正ノ實數ナルヲ要ス、即チ

$$4pq - p^3 - 8r > 0 \quad (3)$$

逆ニ (1), (2), (3) ナル條件ガ成立スレバ所題ノ方程式ノ三根ハ皆正ノ實數ニシテ且ツ二ツノ三角形ヲ作ル

依ツテ所要ノ條件ハ (1) (2) (3) ナリ。

38. m, n ガ正ノ整數ニシテ且ツ $(m+n)b > na, a > b$ ナルトキハ方程式

$$(x+a-b)^{m+n} = (x+a)^m x^n$$

ハ只一ツノ正根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] 二項定理ニヨツテ兩邊ヲ展開シ整理スレバ

$$\begin{aligned} & \{(m+n)(a-b) - ma\}x^{m+n-1} \\ & + \frac{1}{2!} \{(m+n)(m+n-1)(a-b)^2 - m(m-1)a^2\}x^{m+n-2} + \dots \\ & + \frac{1}{m!} \{(m+n)(m+n-1)\dots(n+1)(a-b)^m - m!a^m\}x^1 \\ & + \frac{(m+n)(m+n-1)\dots n}{(m+1)!} (a-b)^{m+1}x^{n-1} + \dots + (a-b)^{m+n} = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

然ルニ $(m+n)b > na \quad \therefore (m+n)(a-b) < ma$ 故ニ x^{m+n-1} ノ係數ハ負、次ニ x^{m+n-2} ノ係數ハ $(m+n)(a-b) < ma$ ナル故ニ $(m+n-1)(a-b) < (m-1)a$ ナラバ負、然ラザレバ不明ナリ、然レドモ $(m+n-1)(a-b) > (m-1)a$ ニシテ x^{m+n-2} ノ係數 $(m+n)(a-b)(m+n-1)(a-b) - ma(m-1)a$ ガ正トナラバ k ノ 2 以上ノ總テノ値ニ對シテ $(m+n-k)(a-b) > (m-k)a$ ナル故ニ其以後ノ各次ノ係數ハ皆正トナル、但シ $a > b$ ナル故ニ x^{n-1} 以下ノ係數ハ總テ正ナルコト勿論ナリ、故ニ方程式 (1) ノ係數ハ最初ノ若干ハ總テ負ニシテ其以下ハ總テ正ナリ、即チ符號ノ變化ハ只一ツアルノミ依ツテ正根ハ一ツヨリ多カラズ

然ルニ $x=0$ トスレバ (1) ノ左邊ハ $(a-b)^{m+n}$ ニシテ正

$x=\infty$ トスレバ最高次ノ係數負ナル故ニ負

故ニ (1) ハ少クトモ一ツノ正根ヲ有ス

之ニ由ツテ (1) ハ只一ツノ正根ヲ有スルコトヲ知ル。

39. 實數係數ノ整方程式 $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根 α, β ノ間ニハ $f'(x)=0$ ノ實根ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ証セヨ。

[解] α, β ハ $f(x)=0$ ノ根ナル故ニ $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 故ニ今 $\beta > \alpha$ トシ x ガ α ヨリ β マテ連續的ニ變化スルトキ函数 $f(x)$ ハ 0 ヨリ連續的ニ或値マテ増加シ次ニ其値ヨリ減少シテ 0 トナルカ、或ハ反對ニ 0 ヨリ連續的ニ或値マテ減少シ次ニ其値ヨリ増加シテ 0 トナルカ、或ハ斯ノ如キ連續的ノ増減ヲ偶數回繰リ返スカノ何レカナリ、然ルニ $f(x)$ ガ増ストキ $f'(x) > 0$ ニシテ $f(x)$ ガ減ズルトキ $f'(x) < 0$ ナリ (基本定理 III) 故ニ x ガ α ヨリ β マテ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ハ正ヨリ負或ハ負ヨリ正ニ移ルコト少クトモ一回一般ニ奇數回アルベシ、然ルニ $f(x)$ ガ整式ナルトキ $f'(x)$ モ整式ニシテ從ツテ x ガ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ モ亦連續的ニ變化ス、故ニ $f'(x)$ ガ正ヨリ負或ハ負ヨリ正ニ移ル境目ニ於テ $f'(x)=0$ トナル、故ニ x ガ α ヨリ β マテ總テノ實數値ヲトリテ變化スル間ニ $f'(x)=0$ トナルコトハ少クトモ一回、一般ニ奇數回アルベシ、即チ α, β ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ實根ハ少クトモ一ツ、一般ニ奇數個アルベシ。

40. 方程式 $f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルトキハ $f'(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ。

[解] $f(x)=0$ ノ n 次トスレバ $f'(x)=0$ ハ $(n-1)$ 次ナリ、 $f(x)=0$ ノ n 個ノ實根ガ皆相異ナルトキハ相隣レル二根ハ $(n-1)$ 組アリ、其各組ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ實根ガ少クトモ一ツアラザルベカラザルガ故ニ (前問) $f'(x)=0$ ハ少クトモ $(n-1)$ 個ノ實根ヲ有セザルベカラズ、而シテ $f'(x)=0$ ハ $(n-1)$ 次ナル、故ニ $f'(x)=0$ ハ實根ノミヲ有ス、

若シ $f(x)=0$ ガ一ツノ k 重根 α ヲ有スレバ α ハ $f'(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ニシテ且ツ $f(x)=0$ ノ相隣レル二根ハ $(n-k)$ 組アリテ其各組ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ根ハ少クトモ一ツ、アル故ニ此場合ニモ $f'(x)=0$ ノ實根ハ丁度

$$k-1+n-k=n-1$$

アルコトナル、二重以上ノ根ガ二ツ以上アル場合モ同様ナリ。

41. 方程式 $f(x)=0$ が相等シカラザル實根ノミヲ有スルトキハ方程式 $f(x)-f'(x)=0$ モ亦相等シカラザル實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根ヲ α, β ($\alpha < \beta$) トスレバ $f(\alpha)=f(\beta)=0$

$$\therefore f(\alpha)-f'(\alpha)=-f'(\alpha), \quad f(\beta)-f'(\beta)=-f'(\beta),$$

然ルニ $f(\alpha)=f(\beta)=0$ ナル故ニ x ガ α ヨリ β マデ連続的ニ變化スルトキ $f(x)$ ハ 0 ヨリ連続的ニ或値マテ増加シ次ニ其値ヨリ減少シテ 0 トナルカ或ハ反對ニ 0 ヨリ連続的ニ或値マテ減少シ次ニ其値ヨリ増加シテ 0 トナルカ、或ハ斯ノ如キ連続的ノ増減ヲ偶數回繰リ返スカノ何レカナリ、即チ何レニシテモ $f(x)$ ハ x ニ於テ増加ノ状態ニアラバ $x=\beta$ ニ於テ減少ノ状態ニアルベク、 $x=\alpha$ ニ於テ減少ノ状態ニアラバ $x=\beta$ ニ於テ増加ノ状態ニアルベシ、然ルニ $f(x)$ ガ増加ノ状態ニアルトキ $f'(x)$ ハ正ニシテ減少ノ状態ニアルトキ $f'(x)$ ハ負ナリ、故ニ $f'(\alpha)$ $f'(\beta)$ ハ異符號ヲ有ス、故ニ $f(\alpha)-f'(\alpha)$ ト $f(\beta)-f'(\beta)$ トハ異符號ヲ有ス、從ツテ $f(x)-f'(x)=0$ ハ α, β 間ニ少クトモ一ツ一般ニ奇數個ノ實根ヲ有ス、即チ $f(x)-f'(x)=0$ ハ $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根ノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有ス、故ニ今 $f(x)=0$ ノ次數ヲ n トシ $f(x)=0$ ガ n 個ノ相異ナル實根ヲ有ストスレバ $f(x)-f'(x)=0$ モ n 次ニシテ且ツ少クトモ $n-1$ 個ノ相異ナル實根ヲ有セザルベカラズ、從ツテ殘ル一根本實數ニシテ且ツ其實根ハ他ノ $n-1$ 個ノ何レトモ相等シキヲ得ズ (α, β 間ニ二個アルヲ得ザレバ) 故ニ $f(x)-f'(x)=0$ モ亦相等シカラザル實根ノミヲ有ス。

42. 方程式 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=0$ ハ n 方偶數ナラバ實根ヲ有セズ、 n 方奇數ナラバ只一ツノ實根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 二次方程式 $f_2(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}=0$ ハ判別式ガ負ニシテ x^2 ノ係數ガ正ナル故ニ x ノ總テノ實數値ニ對シテ正ナリ、依ツテ今 x ノ總テノ實數値ニ對シテ

$$f_{2n}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0$$

ナリト假定シ、ソレヨリ $f_{2n+2}(x)$ モ亦常ニ正ナルコトヲ証セントス、然ルニ

$$f'_{2n+1}(x)=f_{2n}(x)$$

故ニ $f'_{2n+1}(x)$ モ亦假定ニヨリ常ニ正ナリ、從ツテ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スル能ハズ、何ントナレバ若シ二ツノ實根ヲ有スレバ其間ノ一ツノ値ニ於テ $f'_{2n+1}(x)$ ハ 0 トナレバナリ、然ルニ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ奇數次ナル故ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有ス、故ニ $f_{2n}(x)$ ガ常ニ正ナリト假定スレバ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ只一ツノ實根ヲ有ス (A)、而シテ又

$$f'_{2n+2}(x)=f_{2n+1}(x)$$

$f_{2n+1}(x)=0$ 即チ $f'_{2n+2}(x)=0$ ガ只一ツノ實根ヲ有スル故ニ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコト能ハズ、何ントナレバ若シ三ツ以上ノ實根ヲ有スレバ $f'_{2n+2}(x)=0$ ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコトナレバナリ、依ツテ今 $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツノ實根 α, β ヲ有ストスレバ $f'_{2n+2}(x)=0$ 即チ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ α, β 間ニ一根本 γ ヲ有ス、然ルニ

$$f_{2n+2}(x)=f_{2n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad f_{2n+1}(\gamma)=0$$

$$\therefore f_{2n+2}(\gamma)=\frac{\gamma^{2n+2}}{(2n+2)!}>0,$$

又 $f_{2n+2}(x)$ ハ偶數次ナル故ニ $x=\pm\infty$ ニ於テ正ナリ、故ニ α, β ナル二實根ヲ有ストスレバ $f_{2n+2}(x)$ ノ符號ノ變化ハ次ノ如シ

x	$-\infty$	α	γ	β	∞
$f_{2n+2}(x)$	+	0,	+	0,	+

而シテ $f_{2n+2}(x)$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナル故ニ上ノ符號ノ變化ヨリ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ α, β ノ外ニ尙偶數個ノ實根ヲ有スルカ然ラザレバ α, β ハ共ニ重根トナラザルベカラズ、何レニシテモ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコトナル之レ不合理ナリ、故ニ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツノ實根ヲ有スル能ハズ、又偶數次ナル故ニ只一ツノ實根ヲ有スル能ハズ、即チ $f_{2n+2}(x)$ ハ決シテ 0 トナラズ、而シテ $x=\pm\infty$ ノトキ正ニシテ且ツ x ノ總テノ實數値ニ對シテ連續ナル故ニ結局 $f_{2n+2}(x)$ ハ常ニ正ナリ、即チ $f_{2n}(x)>0$ ナリト假定スレバ $f_{2n+2}(x)$ モ亦常ニ正ナリ、 $f_{2n}(x)=f_2(x)>0$

故ニ $f_{2n+2}(x)$ ハ n ノ如何ニ係ラズ常ニ正ニシテ 0 トナラズ即チ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ實根ヲ有セズ、從ツテ又 (A) ヨリ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ只一ツノ實根ヲ有ス。

43. n 次方程式 $f(x)=x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\dots\pm a_n=0$ 方正根ノミヲ有スルトキハ

$$\frac{a_1}{nC_1} \geq \sqrt{\frac{a_2}{nC_2}} \geq \sqrt[3]{\frac{a_3}{nC_3}} \geq \dots \geq \sqrt[n]{\frac{a_n}{nC_n}}$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] 所題ノ方程式ハ正根ノミヲ有スル故ニ Descartes ノ符號ノ法則 (問. 34) ニヨリ

a_1, a_2, \dots, a_n ハ皆正ナリ、依ツテ今

$$a_1 = nC_1 b_1, \quad a_2 = nC_2 b_2, \quad \dots, \quad a_n = nC_n b_n$$

トオケバ b_1, b_2, \dots, b_n モ亦皆正ニシテ且ツ證明スベキ式ハ

$$b_1 \geq \sqrt{b_2} \geq \sqrt[3]{b_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{b_n}$$

トナル、

然ルニ $f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルトキハ $f'(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有シ (問. 40)

$f'(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スレバ $f''(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有スル等以下同様ナル

故ニ $f(x)=0$ ヲ $(n-2)$ 回微分シテ得ベキ二次方程式

$$x^2 - 2b_1x + b_2 = 0$$

モ亦實根ヲ有ス、故ニ其判別式ハ正或ハ 0 ナリ、即チ

$$b_1^2 - b_2 \geq 0 \quad \therefore b_1 \geq \sqrt{b_2} \quad (1)$$

又 $f(x)=0$ ヲ $(n-3)$ 回微分シテ得ベキ

$$x^3 - 3b_1x^2 + 3b_2x - b_3 = 0$$

モ實根ノミヲ有シ、從ツテ x ヲ $\frac{1}{x} = X$ トオキタル

$$b_3X^3 - 3b_2X^2 + 3b_1X - 1 = 0$$

モ實根ノミヲ有ス、故ニ之ヲ微分シタル

$$b_3X^2 - 2b_2X + b_1 = 0$$

モ亦實根ヲ有ス、故ニ

$$b_2^2 - b_1b_3 \geq 0$$

$$\text{故ニ (1) ヨリ } b_2^2 - b_3 \sqrt{b_2} \geq 0 \quad \therefore b_2^{\frac{3}{2}} \geq b_3 \quad \therefore b_2^{\frac{1}{2}} \geq b_3^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

同様ニ $(x)=0$ ヲ $(n-4)$ 回微分シテ得ベキ

$$x^4 - 4b_1x^3 + 6b_2x^2 - 4b_3x + b_4 = 0$$

モ實根ノミヲ有シ、從ツテ x ヲ $\frac{1}{x} = X$ トオキタル

$$b_4X^4 - 4b_3X^3 + 6b_2X^2 - 4b_1X + 1 = 0$$

モ亦實根ノミヲ有ス、故ニ之ヲ二回微分シタル

$$b_4X^2 - 2b_3X + b_2 = 0$$

モ實根ヲ有ス、故ニ

$$b_3^2 - b_2b_4 \geq 0$$

故ニ (2) ヨリ

$$b_3^2 \geq b_2^{\frac{3}{2}} b_4 \quad \therefore b_3^{\frac{4}{3}} \geq b_4 \quad \therefore b_3^{\frac{1}{3}} \geq b_4^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

以下同様ニ

$$b_4^{\frac{1}{4}} \geq b_5^{\frac{1}{5}} \geq b_6^{\frac{1}{6}} \geq \dots \geq b_n^{\frac{1}{n}}$$

トナル。

44. x ガ連続的ニ増加シテ $f(x)=0$ ノ一ツノ實根 α ヲ通過スルトキ其通過ノ途端ニ於テ $f(x)$ ト $f'(x)$ トハ異符號ヨリ同符號ニ變化スルコトヲ証セヨ。

[解] 今 α ヲ一般ニ k 重根トシ

$$f(x) = (x-\alpha)^k F(x), \quad F(\alpha) \neq 0, \quad (1)$$

トオケバ

$$f'(x) = (x-\alpha)^{k-1} \{(x-\alpha)F'(x) + kF(x)\}, \quad (2)$$

然ルニ $x=\alpha$ ノトキ $(x-\alpha)F'(x) + kF(x)$ ハ $kF(\alpha)$ トナリ且ツ k ハ正ノ整数

ナル故ニ $x=\alpha$ ノトキ $(x-\alpha)F'(x) + kF(x)$ ト $F(x)$ トハ同符號ヲ有ス、而シテ

x ガ連続的ニ變化スルトキ此兩式モ亦連続的ニ變化スル故ニ $x=\alpha$ ニ於テ同符號

ナラバ $x=\alpha$ ト極メテ接近セル其前後ニ於テモ此兩式ハ同符號ナリ、然ルニ

$(x-\alpha)^k$ ト $(x-\alpha)^{k-1}$ トハ $x < \alpha$ ナラバ異符號ニシテ $x > \alpha$ ナラバ共ニ正ナリ、

故ニ (1), (2) ヨリ $f(x), f'(x)$ ハ x ガ α ヨリ少シク小ナルトキハ異符號ニシテ

α より少シク大ナルトキハ同符號トナルコトヲ知ル、即チ x が α を通過スル途端ニ於テ $f(x), f'(x)$ ハ異符號ヨリ同符號トナル、
 $k=1$ ナル場合ニモ上ノ所論ハ同様ニ成立スルコト明カナリ。

45. $a, b (a < b)$ を任意ノ二ツノ實數トスルトキ方程式 $f(x)=0$ ノ ab 間ニアル實根ノ數ハ Sturm ノ函數列ニ於テ $x=a$ トオキタルトキノ符號ノ變化ノ數ヨリ $x=b$ トオキタルトキノ符號ノ變化ノ數ヲ引キタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

[解] Sturm ノ函數列ヲ $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ トスレバ之等ノ函數ハ $f(x)$ ト $f_1(x)=f'(x)$ トニ最大公約數ヲ求ムル普通ノ運算ヲ施シタルトキノ各次ノ剩餘ノ符號ヲ換ヘタルモノナル故ニ今各次ノ商ヲ q_1, q_2, \dots, q_{n-1} トスレバ

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1 f_1(x) - f_2(x), \\ f_1(x) &= q_2 f_2(x) - f_3(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{m-1}(x) &= q_m f_m(x) - f_{m+1}(x) \\ &\dots\dots\dots \\ f_{n-2}(x) &= q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x) \end{aligned}$$

ナル關係アリ、

又 $f(x)=0$ ノ重根ハ $f(x)$ チ $f(x)$ ト $f'(x)$ トノ最大公約數ニテ割ルコトニ由ツテ總テ單根トナシ得ル故ニ $f(x)=0$ ハ最初ヨリ重根ヲ有セザルモノトスルコトヲ得、然ルトキハ $f_n(x)$ ハ定數ニシテ 0 ニアラズ、

又 $f(x)$ ガ重根ヲ有セザルトキハ函數列ノ相隣レル任意ノ二ツハ公約數ヲ有セザル故ニ x ノ同ジ値ニヨツテ同時ニ 0 トナルコトナシ

茲ニ於テ x ヲ a ヨリ b マテ連續的ニ變化セシムルトキ Sturm ノ函數列ノ符號ノ變化ヲ考フルニコレ等ノ函數列ノ符號ノ變化ヲ生セシムルハ x が (1) $f(x)=0$ ノ實根 α ヲ通過スルカ或ハ (2) $f_m(x)=0 (m \neq n)$ ノ實根 β ヲ通過スルカノ何レノカノ場合ニ限ル

(1) ノ場合ニハ前問ニヨリ $f(x), f_1(x)$ ノ間ニ異符號ノ消失一ツアリ、即チ $f(x),$

間ニ符號ノ變化ハ一ツ消失ス、而シテ $f(x), f_1(x)$ ハ同時ニ 0 トナリ得ザル故ニ $f_1(x) \neq 0$ 、故ニ x が α を通過スルトキ $f_1(x)$ ノ符號ハ變ラズ、從ツテ (同時ニ (2) ガ起ラザレバ) 其以下ノ符號ノ變化ニ影響セズ、即チ x が α を通過スルトキ函數列ノ符號ノ變化ハ只一ツ減少ス、

(2) ノ場合ニ於テハ $f_m(\beta)=0 \quad \therefore f_{m-1}(\beta) = -f_{m+1}(\beta) \neq 0,$

故ニ x が β を通過スル前後ニ於テ

$$f_{m-1}(x), \quad f_m(x), \quad f_{m+1}(x)$$

間ノ符號ノ變化ハ依然トシテ一ツニシテ増減ナシ (1), (2) ガ同時ニ起ル場合或ハ (2) ノ場合ガ各所ニ起ル場合ナドニツイテモ同様ナリ、即チ x が $f(x)=0$ ノ一ツノ實根ヲ通過スルトキニ限り函數列ノ符號ノ變化ハ $f(x), f_1(x)$ 間ニ於テ常ニ只一ツ消失シ其他ノ場合ニ於テハ函數列全體ノ符號ノ變化ハ増減セズ

之ニ由ツテ Sturm ノ函數列ニ於テ $x=a$ ナルトキノ符號ノ變化ノ數ヨリ $x=b$ ナルトキノ變化ノ數ヲ減シタルモノハ ab 間ニアル $f(x)=0$ ノ實根ノ數ニ等シキヲ知ル。

46. 次ノ方程式ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ、

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 18 = 0$$

[解] 先ヅ $F(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 18, \quad F'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 26x - 24$

ノ最大公約數ヲ求メンニ

$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 24x + 18$	$x+1$	$2x^3 + 3x^2 - 13x - 12$
$2x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 48x + 36$		29
$2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 12x$		$58x^3 + 87x^2 - 377x - 348$
$x^3 - 13x^2 - 36x + 36$		$58x^3 + 118x^2 - 168x$
$2x^3 - 26x^2 - 72x + 72$		$-31x^2 - 209x - 348$
$2x^3 + 3x^2 - 13x - 12$		- 58
$-29x^2 - 59x + 84$	$x+31$	$1798x^2 + 12122x + 20184$
$58x^2 + 118x - 168$		$1798x^2 + 3658x - 5208$
$58x^2 + 174x$		
$-56x - 168$	$58x$	$8464 \quad 8464x + 25392$
$-56x - 168$	-56	$x+3$

即チ $F(x), F'(x)$ ノ最大公約數ハ $x+3$, 故ニ $F(x)=0$ ハ $x=-3$ ナル二重根ヲ有ス, 依ツテ此二重根ヲ單根トスルタメニ $F(x)$ ヲ $x+3$ ニテ割レバ $sturm$ ノ函數列ノ $f(x)$ トシテ $x^3-x^2-10x+6$ ヲ得,

即チ $f(x)=x^3-x^2-10x+6$

$f'(x)=3x^2-2x-10=f_1(x)$,

$f_2(x)$ 以下ヲ求ムルタメニ $f(x), f_1(x)$ ノ最大公約數ヲ求ムル運算ヲ行フ, 但シ $sturm$ ノ函數列ハ正ノ定數ヲ乗除スルモ差支ナキコト明カナル故ニ之ニ由ツテ分數ノ計算ヲ避クルヲコト、スベシ

$f(x) \dots\dots x^3 - x^2 - 10x + 6$	$x-1$	$3x^2 - 2x - 10 \dots\dots f_1(x)$
$3x^3 - 3x^2 - 30x + 18$		31
$3x^3 - 2x^2 - 10x$		$93x^2 - 62x - 310$
		$93x^2 - 66x$
$-x^2 - 20x + 18$		$4x - 310$
$-3x^2 - 60x + 54$		31
$-3x^2 + 2x + 10$		$124x - 9610$
$-2) -62x + 44$		$124x - 88$
$f_2(x) \dots\dots\dots 31x - 22$	$3x+4$	$9522 \dots\dots f_3(x)$

即チ $f(x)=x^3-x^2-10x+6, f_1(x)=3x^2-2x-10,$
 $f_2(x)=31x-22, f_3(x)=9522$

故ニ $x=-\infty, 0, \infty$ ニ對スル函數列ノ符號ハ次ノ如シ

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	符號ノ變化ノ數
$-\infty$	-	+	-	+	3
0	+	-	-	+	2
∞	+	+	+	+	0

故ニ負根ノ數ハ $3-2=1$, 正根ノ數ハ $2-0=2$, 但シ負根 -3 ハ二重根ナル故ニ 所題ノ方程式 $F(x)=0$ ハ二重根 -3 ト正根二ツト有ス。

47. Sturm ノ函數列ニヨリテ方程式 $x^5+5px^3+5p^2x+q=0$ ガ實根ノミヲ有スル條件ヲ求メヨ。

[解] $f(x)=x^5+5px^3+5p^2x+q, f'(x)=5(x^4+3px^2+p^2)$ ヲ $sturm$ ノ函數列ヲ作ル, 但シ p, q ハ正負不明ナル故ニ運算ノ途中乗除スルコトヲ得ズ

$f(x) \dots\dots x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q$	x	$x^4 + 3px^2 + p^2 \dots\dots f_1(x)$
$5x^4 + 3px^3 + p^2x$		
$2px^3 + 4p^2x + q$		
$f_2(x) \dots\dots -2px^3 - 4p^2x - q$	$-\frac{x}{2p}$	$x^4 + 2px^2 + \frac{q}{2p}x$
$-2px^3 + \frac{q}{p}x^2 - 2p^2x$		
$-\frac{q}{p}x^2 - 2p^2x - q$	$2x + \frac{q}{p^2}$	$px^2 - \frac{q}{2p}x + p^2$
$-\frac{q}{p}x^2 + \frac{q^2}{2p^3}x - q$		$-px^2 + \frac{q}{2p}x - p^2 \dots\dots f_3(x)$
$-(2p^2 + \frac{q^2}{2p^3})x$	$-\frac{px}{(2p^2 + \frac{q^2}{2p^3})}$	$-px^2 + \frac{q}{2p}x$
$f_4(x) \dots\dots (2p^2 + \frac{q^2}{2p^3})x$	$\frac{q}{2(2p^2 + \frac{q^2}{2p^3})p}$	$-p^2$
		$p^2 \dots\dots f_5(x)$

即チ $f(x)=x^5+5px^3+5p^2x+q, f_1(x)=x^4+3px^2+p^2$

$f_2(x)=-2px^3-4p^2x-q, f_3(x)=-px^2+\frac{q}{2p}x-p^2$

$f_4(x)=(2p^2+\frac{q^2}{2p^3})x, f_5(x)=p^2,$

$f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルタメニハ $x=-\infty$ ノトキ上ノ函數列ノ符號ハ

- + - + - +

トナリ, $x=\infty$ ノトキ

+ + + + + +

トナラザルベカラズ, ソレガタメニハ $p < 0, (2p^2 + \frac{q^2}{2p^3}) > 0$ ナルヲ要ス

逆ニ此二ツノ關係アラバ $f(x)=0$ ハ實根ノミヲ有ス, 故ニ所要ノ條件ハ

$$p < 0, \quad 2p^2 + \frac{q^2}{2p^3} > 0,$$

之ヲ一ツニマトメテ $4p^5 + q^2 < 0,$

48. Horner ノ方法ニヨツテ方程式 $x^3 - 2x - 7 = 0$ ノ 2 ト 3 トノ間ノ根ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

[解]

$f(x)$	1	0	-2	-7	2.258	
		2	4	4		
		2	2	-3		
		2	8			
	4		10			
	2					
$f(x+2) = f_1(x)$	1	6	10	-3		
$f_1\left(\frac{x}{10}\right) = f_2(x)$	1	60	1000	-3000	$f_2(2) = -752$	
		2	124	2248	$f_2(3) = +567$	
		62	1124	-752		
		2	128			
	64		1252			
	2					
$f_2(x+2) = f_3(x)$	1	66	1252	-752		
$f_3\left(\frac{x}{10}\right) = f_4(x)$	1	660	125200	-752000	$\frac{752000}{125200} = 6+$	
		5	3325	642625	$f_4(6) = 3176, f_4(5) = -109375$	
		665	128525	-109375		
		5	3350			
	670		131875			
	5					
$f_4(x+5) = f_5(x)$	1	675	131875	-109375		
$f_5\left(\frac{x}{10}\right) = f_6(x)$	1	6750	13187500	-109375000	$\frac{10937500}{131875} = 8+$	
					$f_6(8) = -3442488,$	

49. 方程式 $x^3 + x^2 + 12x - 24 = 0$ ノ正根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

[解] 正根ノ數及ビ其位置ヲ知ランガタメニ Sturm ノ函數列ヲ作レバ

$$f(x) = x^3 + x^2 + 12x - 24, \quad f_1(x) = 3x^2 + 2x + 12,$$

$$f_2(x) = -35x + 114, \quad f_3(x) = -61668,$$

故ニ $x=0$ トスレバ $-+ +-$ 符號ノ變化 2,

$x=\infty$ トスレバ $++ --$ 符號ノ變化 1

故ニ正根ハ 2-1=1,

次ニ $x=1$ トスレバ $-+ +-$ 符號ノ變化 2,

$x=2$ トスレバ $++ +-$ 符號ノ變化 1

故ニ只一ツノ正根ハ 1, 2 ノ間ニアリ, 依ツテ Horner ノ方法ニヨリ次ノ運算ヲ施ス

$f(x)$	1	1	12	-24	1.517	
	1	1	2	14		
		2	14	-10		
		1	3			
	3		17			
	1					
$f(x+1) = f_1(x)$	1	4	17	-10		
$f_1\left(\frac{x}{10}\right) = f_2(x)$	1	40	1700	-10000	$\frac{100}{17} = 5+$	
		5	225	9625	$f_2(5) = -375, f_2(6) = 1856$	
		45	1925	-375		
		5	250			
	50		2175			
	5					
$f_2(x+5) = f_3(x)$	1	55	2175	-375		
$f_3\left(\frac{x}{10}\right) = f_4(x)$	1	550	217500	-375000	$\frac{3750}{2175} = 1+$	
		1	551	218051	$f_4(1) = -156949, f_4(2) = 62208,$	
		551	218051	-156949		
		1	552			
	552		218603			
	1					
$f_4(x+1) = f_5(x)$	1	553	218603	-156949		
$f_5\left(\frac{x}{10}\right) = f_6(x)$	1	5530	21860300	-156949000	$\frac{1569490}{218603} = 7+$	
		7	38759	153293413	$f_6(7) = -3655587, f_6(8) > 0,$	
		5537	21899059	-3655587		

依ツテ所要ノ正根ハ 1.517.

レ50. Horner ノ方法ニ由ツテ次ノ方程式ノ -2 ト -3 トノ間ニアル根ヲ小
數第二位マテ求メ第三位以下省略法ニヨツテ第五位マテ計算セヨ、

$x^3 + 6x^2 - x - 20 = 0,$

【解】 先ツ x ノ符號ヲ變ズレバ $x^3 - 6x^2 - x + 20 = 0,$ 依ツテ次ノ運算ヲ施ス

$f(x) \dots\dots\dots$	1	-6	-1	20	2.15412
		2	-8	-18	
		-4	-9	2	
		2	-4		
		-2	-13		
		2			
$f(x+2) = f_1(x) \dots\dots$	1	0	-13	2	$f_2(1) = 701, f_2(2) = -592$
$f_1(x/10) = f_2(x)$	1	0	-1300	2000	
		1	1	-1299	
		1	-1299	701	
		1	2		
		2	-1297		
		1			
$f_2(x+1) = f_3(x) \dots\dots$	1	3	-1297	701	$\frac{7010}{1297} = 5+$
$f_3(x/10) = f_4(x) \dots\dots$	1	30	-129700	701000	
		5	175	-647625	
		35	-129525	53375	$f_4(5) = 53375, f_4(6) = -75904$
		5	200		
		40	-129325		
		5			
$f_4(x+5) = f_5(x) \dots\dots$	1	45	-129325	53375	$\frac{533750}{129325} = 4+$
$f_5(x/10) = f_6(x) \dots\dots$	1	450	-12932500	53375000	
之ヨリ省略算 $F(x) \dots\dots$	1	-12933	53375		$f_6(4) = 1652264, f_6(5) < 0,$
		4	-51716		
		-12929	1659		
		4			
$F(x+4) = F_1(x) \dots\dots$	1	-12925	1659		$\frac{16590}{12925} = 1+,$
$F_1(x/10) = F_2(x)$	1	-129250	165900		
$\phi(x) \dots\dots\dots$		-1293	1659		$F_2(1) = 36651, F_2(2) < 0,$
			-1293		
$\phi(x+1) = \phi_1(x) \dots\dots$		-1293	366		
$\phi_1(x/10) = \phi_2(x)$		-1293	3660		
		-129	366		$\frac{366}{129} = 2+$
			-258		
			108		

依ツテ所要ノ根ノ近似値ハ -2.15412 ナルヲ知ル。

51. Horner ノ方法ニヨリテ 5 ノ四乗根ヲ小數第二位マテ求メ第三位以下
省略法ニヨリテ第五位マテ計算セヨ。

【解】 $f(x) = x^4 - 5 = 0$ ノ實根ヲ求ムレバ可ナリ。依ツテ次ノ運算ヲナス、

$f(x) \dots\dots$	1	0	0	0	-5	1.49534
		1	1	1	1	
		1	1	1	-4	
		1	2	3		
		2	3	4		
		1	3			
		3	6			
		1				
$f_1(x) \dots\dots$	1	4	6	4	-4	$f_2(4) = -11584$
$f_2(x) \dots\dots$	1	40	600	4000	-40000	$f_2(5) = 625$
		4	176	3104	28416	
		44	776	7104	-11584	
		4	192	3872		
		48	968	10976		
		4	208			
		52	1176			
		4				
$f_3(x) \dots\dots$	1	56	1176	10976	-11584	
$f_4(x) \dots\dots$	1	560	117600	10976000	-115840000	$f_4(9) = -7115599$
		9	5121	1104489	108724401	
		569	122721	12080489	-7115599	
		9	5202	1151307		
		578	127923	13231796		
		9	5283			
		587	133206			
		9				
		1	-596	133206	13231796	-7115599
$F(x) \dots\dots$	1	1332	1323180	-7115599		$\frac{7115599}{1323180} = 5+$
		5	6685	6649325		
		1337	1329865	-466274		
		5	6710			
		1342	1336575			
		5				
$F_1(x) \dots\dots$	1	1347	1336575	-466274		$\frac{466274}{133658} = 3+$
$\phi(x) \dots\dots$		14	133658	-466274		
			42	401100		
			133700	-65174		
			42			
$\phi_1(x) \dots\dots$		14	133742	-65174		$\frac{65174}{13374} = 4+$
			13374	-65174		
				53496		
				-11678		

第 十 一 章

行 列 式

基本定理 I. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$,

行列式の値は、
行と列とを
入れ替えても
変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_2 - a_1 b_1 c_3$$

II. 行列式ノ行ト列トヲソノマ、取り換エルモ行列式ノ値ハ變ラズ。

III. 行列式ノ或一列(又ハ一行)中ノ總テノ元素ヲ k 倍スレバ行列式モ亦 k 倍セラル。

IV. 行列式ノ二列(又ハ二行)ヲ取り換エレバ行列式ハ其符號ノミ變ズ。

$$V. \begin{vmatrix} a_1 + a_1' & a_2 + a_2' & a_3 + a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

VI. 行列式ノ或一列(又ハ一行)ノ各元素ニ各ノ餘因數ヲ乘ジテ加ヘタルモノハ其行列式ニ等シ。

演習問題

1. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 第一列ニ 12, 第二列ニ 6, 第三列ニ 3 ヲ乘ジテ分母ヲ去レバ基本定理 III 及ビ

$I = 0$ リ

$$\Delta = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12 \cdot 6 \cdot 3} (-18 + 72 + 36 - 27 - 16 + 108) = \frac{155}{216}$$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 4 & 6 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 基本定理 III ニヨリ第一列ヨリ 3, 第二列ヨリ 2 ヲ括リ出シ, 次ニ尙第一行ヨリ 2 ヲ括リ出セバ

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12(3 + 7 + 5 - 15 + 1 + 7) = 96$$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ。

〔解〕 左邊ノ第二行ヨリ 2 ヲ括リ出シ右邊ノ第三列ヨリ 2 ヲ括リ出セバ兩邊ノ行列式ハ行ト列トヲソノマ、取り換ヘタルモノトナル故ニ基本定理 II ニヨリ等シ。

4. 二列(又ハ二行)ガ全ク相等シキ行列式ノ値ハ 0 ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ Δ トシ $\Delta = 0$ 於テ其相等シキ二列又ハ二行ヲ取り替ヘテ基本定理 IV ニヨリテ $-\Delta$ トナル, 然ルニ其二列又ハ二行ハ全ク相等シキ故ニ之ヲ取り換ヘルモ行列式ニハ何等ノ變化ナキ筈ナリ, 故ニ

$$-\Delta = \Delta \quad \therefore \Delta = 0$$

5. 二列(又ハ二行)ノ對應元素ガ比例ヲナス行列式ノ値ハ 0 ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 對應元素ノ比ノ値ヲ k トシ一方ノ列(又ハ行)ノ各元素ヨリ共通ノ因數 k ヲ括リ出セバ所題ノ行列式ハ二列(又ハ二行)ノ相等シキ行列式ト k トノ積ニ等シク、而シテ其行列式ハ前問ニヨリ 0 ナル故ニ所題ノ行列式モ亦 0 ナリ。

6. 或列(又ハ行)ノ元素ニ同一ノ數ヲ乘ジテ他ノ列(又ハ行)ノ對應元素ニ加フルモ行列式ノ値ハ變ラザルコトヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 V、及ビ前問ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

此關係ハ行列式ノ次數ト k ノ如何ニ係ラズ成立ス、故ニ任意ノ行列式ニ於テ或列又ハ或行ノ元素ニ同一ノ數 k ヲ乘ジテ他ノ列又ハ行ノ對應元素ニ加フルモ行列式ノ値ハ變ラズ。

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 前問ニヨリ第一行ノ各元素ヲ第二、第三、第四行ノ對應元素ヨリ引キ基本定理 VI ニヨリ第一列ニツキテ展開スレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz$$

8. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 基本定理 VI ニヨリ第一列ニツキテ展開スレバ

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

然ルニ右邊ノ第三行列式ノ第一、第二列ヲ交換スレバ第二ノ行列式トナリ又第四ノ行列式ノ第三列ヲ第二列ト交換シ再ビ第一列ト交換スレバ矢張り第二ノ行列式トナル、故ニ

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

次ニ第一行列式ノ第三列ノ各元素ヲ第一、第二列ノ對應元素ヨリ引キ第二行列式ノ第一列ノ各元素ヲ第二、第三列ノ各元素ヨリ引キ且ツ第一列ヨリ 2 ヲ括リ出セバ

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(3+2+2) - 12(1) = 9$$

前問 6 ニヨリ Δ ノ第二、第三、第四行ノ各元素ヲ第一行ノ對應元素ニ加フレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ノ第一行ノ 2 倍ヲ第二、第三、第四行ヨリ引ケバ

$$\Delta = 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

9. $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 20 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 第三列ニツキ展開シ次ニ第一行列式ノ第一列ヨリ第三列ノ7倍、第二列ヨリ第三列ヲ引キ又第二行列式ニツイテモ同シク第一列ヨリ第三列ノ7倍、第二列ヨリ第三列ヲ引ケバ

$$\Delta = 5 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 20 & +11 \\ 1 & 4 & 7 & \\ 1 & 0 & 6 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 7 & 20 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -22 & +11 \\ 0 & 4 & 1 & \\ 1 & 0 & 6 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -48 & 0 & -22 \\ -5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

右邊ノ第一行列式ヲ第一行ニツキ第二行列式ヲ第二行ニツキ展開スレバ

$$\Delta = 5 \begin{vmatrix} 2 & -22 & -11 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -48 & -22 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5(2+88)+11(48+110)=2188,$$

10. $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 第一列ノ3倍ヲ第二列ニ加ヘ第三列ヨリ第一列ヲ引キ第四列ニ第一列ヲ加ヘ第二行ニツキ展開スレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 12 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ニ於テ第二行ノ4倍ヲ第一行ヨリ、第二行ノ3倍ヲ第三行ヨリ引キ第三列ニツキ展開スレバ

$$\Delta = 6 \begin{vmatrix} 27 & -2 & 23 \\ -27 & 5 & -17 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 27 & 23 \\ -27 & -17 \end{vmatrix} = 6 \times 27 \begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 27 \times (-6) = -972,$$

11. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$

ヲ証セヨ。

〔解〕 第一行ヲ第二、第三、第四行ヨリ引キ第一行ニツキ展開スレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (1+a) \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)bcd + acd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - abd \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)bcd + acd + abd + abc = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

12. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 $a=b$ トナケルニ第二列ハ相等シクナル故ニ所題ノ行列式ハ0トナル、故ニ剰餘定理(第一列ヨリ) Δ ハ $a-b$ ナル因數ヲ有ス、同様ニ Δ ハ $(a-c)$, $(a-d)$, $(b-c)$, $(b-d)$, $(c-d)$ ナル因數ヲ有ス

$$\therefore \Delta = K(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

然ルニ Δ は a, b, c, d ニツイテ 6 次ナル故ニ k は a, b, c, d チ含マズ, 依ツテ
主項 bc^2d^3 ノ係數ヲ比較シテ $k=1$ ヲ得

$$\therefore \Delta = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 第三列ヨリ第二列ヲ, 第四列ヨリ第一列ヲ引ケバ第三, 第四列ハ比例ヲナス故ニ
問. $5 = 0$ ヲリ $\Delta = 0$, 即チ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 0,$$

14. $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ ヲ証セヨ。

〔解〕 第一列ヲ第二, 第三列ニ加ヘテ 2 ヲ括リ出セバ

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = 4(a^2(b+c) - ac(a-b) - ab(a-c)) = 8abc,$$

15. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \text{ ヲ証セヨ。}$$

〔解〕 左邊ノ行列式ヲ Δ トシ Δ ノ第二, 第三, 第四列ニソレソレ bc, ca, ab チ乗ジ
次ニ第一行ヨリ abc , 第二, 第三, 第四行ヨリ夫々 a, b, c チ括リ出セバ

$$a^2b^2c^2\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & b^2c \\ abc & c^2a & 0 & ca^2 \\ abc & a^2b & a^2c & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

次ニ Δ ノ第二列以下ヲ第一列ニ加フレバ第一列ハ $a+b+c$ ナル共通ノ因數ヲ有
スルコトナル, 故ニ Δ ハ $a+b+c$ ナル因數ヲ有ス, 又 Δ ノ第一列ニ第二列ヲ
加ヘ第三, 第四列ヲ引ケバ第一列ハ $-a+b+c$ ナル共通ノ因數ヲ有スルコト、
ナル, 故ニ Δ ハ $-a+b+c$ ナル因數ヲ有ス, 同様ニ Δ ハ又 $a-b+c, a+b-c$
ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル

$$\therefore \Delta = k(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

Δ ハ a, b, c ニツイテ 4 次ナル故ニ k は a, b, c チ含マズ, 依ツテ $a=b=c=1$
トキケバ $-3=3k \therefore k=-1,$

$$\therefore \Delta = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

16. $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^2$ ヲ証セヨ。

〔解〕 第三行ヲ第一, 第二行ヨリ引キ第一, 第二行ヨリ $(a+b+c)$ チ括リ出セバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \\ = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

第一, 第二列ノ和ヲ第三列ヨリ引キ第一行ニ a , 第二行ニ b チ乗ズレバ

$$\Delta = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & b(c+a-b) & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix}$$

第三行ヲ第一, 第二行ニ加ヘ, 第三列ニツイテ展開スルバ

$$\Delta = \frac{(a+b+c)^2}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 & a^2 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 \\ b^2 & b(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^2 \{ab(b+c)(c+a) - a^2b^2\} = 2abc(a+b+c)^3,$$

17. $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ ヲ a, b, c ノ一次式ノ積ニテ表ハセ。

〔解〕 第二行ニ ω (1ノ立方根ノ虚数) 第三行ニ ω^2 ヲカケテ第一行ニ加ヘ第一行ヨリ

$a+\omega b+\omega^2 c$ ヲ括リ出セバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+\omega b+\omega^2 c & b & c \\ c+\omega a+\omega^2 b & a & b \\ b+\omega c+\omega^2 a & c & a \end{vmatrix} = (a+\omega b+\omega^2 c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ノ第二, 第三列ヲ第一列ニ加ヘ $a+b+c$ ヲ括リ出セバ

$$\Delta = (a+\omega b+\omega^2 c) \begin{vmatrix} 0 & b+a+c & c+b+a \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c)(\omega^2 b+\omega c-\omega^2 a-\omega a)$$

$$= (a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c)(a+\omega^2 b+\omega c),$$

18. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$ ヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 V ニヨリ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

第二行列式ヲ Δ' トシ, Δ' ノ各列ニ a, b, c, d ヲ乗ジ, 然ル後第四行ヨリ $abcd$ ヲ括リ出セバ

$$\Delta' = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & abcd \\ b & b^2 & b^3 & bcda \\ c & c^2 & c^3 & cdab \\ d & d^2 & d^3 & dabc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \quad (\text{基本定理 VI}),$$

$\therefore \Delta = 0,$

19. a, b, c ガ何レノニツモ相等シカラズシテ

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix} = 0$$

ナルトキハ $abc(ab+bc+ca) = a+b+c$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 假設ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4 \\ b & b^3 & b^4 \\ c & c^3 & c^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ハ a, b, c ニツキ五次ノ同次交代式ニシテ右邊ハ四次ノ同次交代式ナリ, 依ツテ

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \{L(a^2+b^2+c^2) + M(ab+bc+ca)\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)N(a+b+c)$$

トオキ兩邊ノ係數ヲ比較スレバ $L=0, M=1, N=1$ ヲ得, 而シテ

$$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0,$$

$$\therefore ab(ab+bc+ca) = a+b+c,$$

20. $\Delta = \begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda+a^2+b^2+c^2) \text{ ヲ証セヨ。}$

【解】 各列ヨリ a, b, c, d ヲ括リ出シ, 然ル後第四列ヨリ 第三列ヲ引キ第三列ヨリ

第二列ヲ, 第二列ヨリ 第一列ヲ引ケバ

$$\Delta = abcd \begin{vmatrix} a+\frac{\lambda}{a} & b & c & d \\ a & b+\frac{\lambda}{b} & c & d \\ a & b & c+\frac{\lambda}{c} & d \\ a & b & c & d+\frac{\lambda}{d} \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} a+\frac{\lambda}{a} & b & c & d \\ -\frac{\lambda}{a} & \frac{\lambda}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{b} & \frac{\lambda}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{c} & \frac{\lambda}{d} \end{vmatrix}$$

第二, 第三, 第四列ヨリ λ ヲ括リ出シ第一, 第二, 第三, 第四行ニ a, b, c, d ヲ乗ズレバ

$$\Delta = \lambda^3 \begin{vmatrix} a^2+\lambda & b^2 & c^2 & d^2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

第二列ニツキテ展開スレバ

$$\Delta = \lambda^3 \left\{ \begin{vmatrix} b^2 & c^2 & d^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2+\lambda & c^2 & d^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \lambda^3 (b^2+d^2+c^2+a^2+\lambda) = \lambda^3 (\lambda+a^2+b^2+c^2+d^2),$$

21. $\Delta = \begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix} \rightarrow$

$$= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz) \text{ ヲ証セヨ。}$$

【解】 各行ニ順次 a, b, c ヲ乗ジ各列ニ順次 x, y, z ヲ乗ジ第一行ニ第二, 第三行ヲ加

ヘ然ル後第一列ニ第二, 第三列ヲ加フレバ

$$\Delta = \frac{1}{abcxyz} \begin{vmatrix} (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) & b^2(x^2+y^2+z^2) & c^2(x^2+y^2+z^2) \\ (a^2+b^2+c^2)y^2 & b(by-cz-ax)y & c(bz+cy)y \\ (a^2+b^2+c^2)z^2 & b(bz+cy)z & c(cz-ax-by)z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{abcxyz} \begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ y^2 & b(by-cz-ax)y & c(bz+cy)y \\ z^2 & b(bz+cy)z & c(cz-ax-by)z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{ax} \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by-cz-ax & bz+cy \\ z & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

然ルニ右邊ノ行列式ヲ Δ' トスレバ

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by & bz+cy \\ z & bz & cz-ax-by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ y & -cz-ax & bz+cy \\ z & cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

右邊ノ第一行列式ノ第一、第二行ハ比例ヲナス 故ニ其値ハ 0, 第二行列式ヲ Δ'' トスレバ同様ニ

$$\begin{aligned} \Delta'' &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ y & -cz-ax & cy \\ z & cy & cz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & -cz-ax & bz \\ z & cy & -ax-by \end{vmatrix} \\ &= 0 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & -cz-ax & bz \\ z & cy & -ax-by \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -cz-ax & bz \\ cy & -ax-by \end{vmatrix} \\ &= ax(ax+by+cz), \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz),$$

22. 方程式 $\begin{vmatrix} 3-2x & 4 & 5 \\ 1+x & 6 & -4 \\ 3x & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ヲ解ケ。

〔解〕 所題ノ方程式ヨリ

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-65}{-163} = \frac{65}{163}$$

23. 方程式 $\begin{vmatrix} a & b & x \\ b & 2a+b & 2x \\ x & 2x & 3(a+b) \end{vmatrix} = 0$ ヲ解ケ。

〔解〕 左邊ヲ Δ トシ Δ ノ第二、第三列ヲ第一列ニ加フレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+x & 2(a+b+x) & 3(a+b+x) \\ b & 2a+b & 2x \\ x & 2x & 3(a+b) \end{vmatrix} = (a+b+x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 2a+b & 2x \\ x & 2x & 3(a+b) \end{vmatrix}$$

第一行ノ 2 倍及ビ 3 倍ヲ第二行及ビ第三行ヨリ引ケル

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2a-b & 2x-3b \\ x & 0 & 3(a+b-x) \end{vmatrix} = (a+b+x) \begin{vmatrix} 2a-b & 2x-3b \\ 0 & 3(a+b-x) \end{vmatrix} \\ &= 3(a+b+x)(2a-b)(a+b-x) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore 2a-b \neq 0$ ナラバ $x=a+b$ 又ハ $-(a+b)$

$\downarrow 2a-b=0$ ナラバ 不定。

24. $\begin{vmatrix} u_1+a^2x & w_2+abx & v_2+acx \\ w_2+abx & v_1+b^2x & u_2+bcx \\ v_2+acx & u_2+bcx & w_1+c^2x \end{vmatrix} = 0$ ナルトキハ

$$\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 & a \\ w_2 & v_1 & u_2 & b \\ v_2 & u_2 & w_1 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ w_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \end{vmatrix} \text{ ナルトコトヲ証セヨ。}$$

〔解〕 所題ノ行列式ヲ基本定理 V ニヨリ八個ノ行列式ノ和ニテ表ハセズ

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ w_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & w_2 & acx \\ w_2 & v_1 & bcx \\ v_2 & u_2 & c^2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & abx & v_2 \\ w_2 & b^2x & u_2 \\ v_2 & bcx & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & abx & acx \\ w_2 & b^2x & bcx \\ v_2 & bcx & c^2x \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a^2x & w_2 & v_2 \\ abx & v_1 & u_2 \\ acx & u_2 & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2x & w_2 & acx \\ abx & v_1 & bcx \\ acx & u_2 & c^2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2x & abx & v_2 \\ abx & b^2x & u_2 \\ acx & bcx & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2x & abx & acx \\ abx & b^2x & bcx \\ acx & bcx & c^2x \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

然ルニ此第四、第六、第七、第八行列式ハ明カニ 0 ナリ、故ニ

$$\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ w_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & w_2 & a \\ w_2 & v_1 & b \\ v_2 & u_2 & c \end{vmatrix} cx + \begin{vmatrix} u_1 & a & v_2 \\ w_2 & b & u_2 \\ v_2 & c & w_1 \end{vmatrix} bx + \begin{vmatrix} a & w_2 & v_2 \\ b & v_1 & u_2 \\ c & u_2 & w_1 \end{vmatrix} ax = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} u_1 & v_2 & v_2 \\ v_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & v_1 \end{vmatrix} = x \left\{ -a \begin{vmatrix} v_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & v_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} u_1 & v_2 & v_2 \\ v_2 & u_2 & v_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} u_1 & v_2 & v_2 \\ v_2 & v_1 & u_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right\}$$

$$= x \begin{vmatrix} u_1 & v_2 & v_2 & a \\ v_2 & v_1 & u_2 & b \\ v_2 & u_2 & v_1 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

25. 方程式 $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & x & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & x & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0$ を解け。

〔解〕 1 の (n+1) 乗根ノ任意ノ一ツヲ ω トシ第二列, 第三列, ……第 n+1 列ニ夫々 $\omega, \omega^2, \dots, \omega^n$ ヲ乗ジテ第一列ニ加ヘタルトキノ第一列ノ元素ヲ $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n+1}$ トスレバ

$$c_1 = x + a_n \omega + a_{n-1} \omega^2 + \dots + a_1 \omega^n$$

$$c_2 = a_1 + x \omega + a_n \omega^2 + \dots + a_2 \omega^n$$

$$c_3 = a_2 + a_1 \omega + x \omega^2 + \dots + a_3 \omega^n$$

$$\dots$$

$$c_{n+1} = a_n + a_{n-1} \omega + a_{n-2} \omega^2 + \dots + x \omega^n$$

然ルニ $c_2 = c_1 \omega, c_3 = c_1 \omega^2, c_4 = c_1 \omega^3, \dots, c_{n+1} = c_1 \omega^n$

故ニ c_1 ハ所題ノ方程式ノ一ツノ因数ナリ, 故ニ $c_1 = 0$ ヲ得ベキ

$$x = -(a_n \omega + a_{n-1} \omega^2 + \dots + a_1 \omega^n)$$

ハ一ツノ根ナリ, 故ニ 1 ノ (n+1) 乗根ヲ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ トスレバ所題ノ方程式ノ根ハ次ノ如シ

$$-(a_n \omega_1 + a_{n-1} \omega_1^2 + \dots + a_1 \omega_1^n)$$

$$-(a_n \omega_2 + a_{n-1} \omega_2^2 + \dots + a_1 \omega_2^n)$$

$$\dots$$

$$-(a_n \omega_{n+1} + a_{n-1} \omega_{n+1}^2 + \dots + a_1 \omega_{n+1}^n),$$

5. 24

26. 一ツノ行列式ノ或一行(又ハ一行)ノ元素ニ他ノ一行(又ハ一行)ノ對應元素ノ餘因数ヲ乗ジテ加ヘタルモノハ 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 一ツノ行列式 Δ ノ或一行ノ元素ヲ b_1, b_2, \dots, b_n トシ他ノ一行ノ對應元素ヲ c_1, c_2, \dots, c_n , 其各ノ餘因数ヲ C_1, C_2, \dots, C_n トスレバ

$$b_1 C_1 + b_2 C_2 + \dots + b_n C_n = 0 \tag{1}$$

ナルコトヲ証セントスルニ基本定理 VI ニヨリ

$$c_1 C_1 + c_2 C_2 + \dots + c_n C_n = \Delta \tag{2}$$

(1) ノ左邊ハ (2) ノ左邊ニ於テ c_1, c_2, \dots, c_n ヲ b_1, b_2, \dots, b_n ニテ置キ代ヘタルモノニ等シ, 從ツテ (1) ノ左邊ハ Δ ニ於テ c ノ列ヲ b ノ列ニテ置キ代ヘタルモノニ等シ, 依ツテ問. 4 ニヨリ (1) ノ左邊ノ値ハ 0 ナリ。

27. $\Delta = 0$ ナルトキハ其任意ノ一行(又ハ一行)ノ元素ノ餘因数ハ他ノ任意ノ一行(又ハ一行)ノ對應元素ノ餘因数ニ比例ヲナスコトヲ証セヨ, 但シ餘因数ハ總テ 0 ナラザルモノトス。

〔解〕 今 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_n \end{vmatrix}$ トシ, 任意ノ二列ヲ $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ 及ビ $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ トシ各ノ餘因数ヲ $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$ 及ビ $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ トスレバ基本定理 VI 及ビ前問ニヨリ

$$\left. \begin{aligned} a_1 L_1 + a_2 L_2 + \dots + a_n L_n &= 0 \\ b_1 L_1 + b_2 L_2 + \dots + b_n L_n &= 0 \\ \dots & \dots \\ l_1 L_1 + l_2 L_2 + \dots + l_n L_n &= \Delta = 0 \\ \dots & \dots \\ m_1 L_1 + m_2 L_2 + \dots + m_n L_n &= 0 \\ \dots & \dots \\ h_1 L_1 + h_2 L_2 + \dots + h_n L_n &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n &= 0 \\ b_1 M_1 + b_2 M_2 + \dots + b_n M_n &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ l_1 M_1 + l_2 M_2 + \dots + l_n M_n &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ m_1 M_1 + m_2 M_2 + \dots + m_n M_n &= \Delta = 0 \\ \dots\dots\dots \\ h_1 M_1 + h_2 M_2 + \dots + h_n M_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\Delta = 0$ = シテ且ツ餘因数ハ總テ 0 ナラザル故ニ (1), (2) ヨリ $L_1: L_2: L_3: \dots$ L_n 及ビ $M_1: M_2: \dots: M_n$ ノ値ハ只一通リ定マル(問. 31) 即チ (1), (2) ヨリ定マル L_1, L_2, \dots, L_n ノ比ト M_1, M_2, \dots, M_n ノ比トハ相等シ, 故ニ

$$\frac{L_1}{M_1} = \frac{L_2}{M_2} = \dots = \frac{L_n}{M_n}$$

28. 行列式ヲ利用シテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \quad (3)$$

(解) (1), (2), (3) ヲ満足セシムル x, y, z ノ値ヲ夫々 x, y, z ニテ表ハセバ

$$\begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ノ第二行ニ $-y$, 第三行ニ $-z$ ヲ乗ジテ第一行ニ加フレバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ヲ Δ ニテ表ハシ右邊ノ行列式ヲ $a\Delta d$ ニテ表ハセバ

$$\Delta x = a\Delta d$$

同様ニ $\Delta y = b\Delta d, \Delta z = c\Delta d,$

故ニ $\Delta \neq 0$ ナラバ

$$x = \frac{a\Delta d}{\Delta}, \quad y = \frac{b\Delta d}{\Delta}, \quad z = \frac{c\Delta d}{\Delta} \quad (4)$$

逆ニ (4) ハ (1), (2), (3) ヲ満足セシム, 何ントナレバ今 Δ ノ元素 a_1, b_1 等ノ餘因数ヲ A_1, B_1 等ニテ表ハセバ (4) ヨリ

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{\Delta}, \quad y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\Delta}, \quad z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\Delta}$$

各式ニ a_1, b_1, c_1 ヲカケテ加フレバ

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= \frac{d_1}{\Delta} (a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1) + \frac{d_2}{\Delta} (a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2) \\ &+ \frac{d_3}{\Delta} (a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3) = d_1 \end{aligned} \quad (\text{問. 26})$$

即チ (1) ハ成立ス, 全ク同様ニ (4) ニ對シテ (2), (3) ガ成立スルコトヲ証明シ得レバナリ。

(注意) 四元以上ノ場合ニツイテモ全ク同様ナリ。

29. 前問ニ於テ $\Delta = 0$ ナル場合ヲ吟味セヨ。

(解) 聯立方程式 (1), (2), (3) ハ $\Delta \neq 0$ ナラバ常ニ只一組ノ根ヲ有スルコトハ前問ニ於テ解キタル如クナルモ $\Delta = 0$ ナラバ然ラズ, 今各種ノ場合ニツキテ吟味センニ

1. $\Delta = 0$ = シテ $a\Delta d, b\Delta d, c\Delta d$ ノ中ニ 0 ナラザルモノアル場合, 此場合ニハ (1), (2), (3) ハ聯立セズ即チ不能ナリ, 何ントナレバ今假リニ $\Delta = 0, a\Delta d \neq 0$ ナリトシ (1), (2), (3) ガ聯立ストスレバ

$$\begin{aligned} a\Delta d &= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z & b_1 & c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & b_2 & c_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = 0 \end{aligned}$$

トナリテ矛盾スレバナリ, $b\Delta d \neq 0$ 又ハ $c\Delta d \neq 0$ トスルモ同様ナリ。

2. $\Delta = a\Delta a = b\Delta a = c\Delta a = 0$ ニシテ Δ ノ各元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアル場合、

此場合ニハ (1), (2), (3) ノ何レカハ他ノ二ツヨリ誘導スルコトヲ得、即チ (1), (2), (3) ハ不定ナリ、何ントナレバ今假リニ a_1 ノ餘因數 A_1 が 0 ナラズトスレバ

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故ニ (2), (3) ヨリ y, z テ x ニテ表ハスコトヲ得其 y, z 及ビ x ニ對シ

$$\begin{aligned} (a_1x + b_1y + c_1z - d_1) \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y \\ &+ \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$$

即チ (2), (3) ヨリ x ニテ表ハシタル y, z ハ (1) ヲ満足セシム、即チ (1) ハ (2), (3) ヨリ誘導セラル、 Δ ノ他ノ餘因數ガ 0 ナラザル場合モ同様ナリ、即チ此場合ニハ三ツノ方程式ハ二ツニ歸シ三ツノ未知數中ノ一ツハ全ク不定ナリ。

3. $\Delta = a\Delta a = b\Delta a = c\Delta a = 0$ 、 Δ ノ各元素ノ餘因數モ皆 0 ニ等シキモ $a\Delta a$ 、 $b\Delta a$ 、 $c\Delta a$ ノ元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ニ等シカラザルモノアル場合、

此場合ニハ (1), (2), (3) ハ聯立セズ即チ不能ナリ、何ントナレバ今假リニ

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

トシ (2), (3) ヲ同時ニ満足セシムル x, y, z ノ値アリトスレバ

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3 & a_3x + b_3y + c_3z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} z = 0 \end{aligned}$$

トナリテ矛盾スレバナリ。

4. Δ 、 $a\Delta a$ 、 $b\Delta a$ 、 $c\Delta a$ 及ビ各元素ノ餘因數皆 0 ナルモ Δ ノ元素中ニ 0 ナラザルモノアル場合、

此場合ニハ (1), (2), (3) ノ中ノ二ツハ殘ルーツヨリ誘導セラル即チ三ツノ方程式ハ只一ツノ方程式ニ歸シ x, y, z ノ中二ツハ全ク不定ナリ、何ントナレバ今假リニ $a_1 \neq 0$ トスレバ (1) ヨリ

$$x = \frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1}$$

コノ y, z 及ビ x ニ對シテ

$$\begin{aligned} (a_2x + b_2y + c_2z - d_2)a_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_2x + b_2y + c_2z - d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x + b_1y + c_1z - d_1 \\ a_2 & a_2x + b_2y + c_2z - d_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \therefore a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

$$\text{同様ニ} \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

トナル、即チ (1) ヨリ y, z ニテ表ハシタル x ハ (2), (3) ヲ満足セシム、即チ (2), (3) ハ (1) ヨリ誘導セラル、 Δ ノ其他ノ元表ガ 0 ナラザル場合モ同様ナリ、

5. Δ ノ元表ガ總テ 0 ナルモ d_1, d_2, d_3 中ニ 0 ナラザルモノアル場合、

此場合ハ (1), (2), (3) ハ明カニ不能ナリ。

30. 次ノ三ツノ方程式ガ同時ニ成立スル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム、

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0,$$

[解] x, y ノ同シ値ニテ所題ノ三方程式ガ同時ニ成立スルトキハ其 x, y ナ次ノ行列式ノ第一第二行ニカケテ第三行ニ加フレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

故に $\Delta=0$ は必要ナル條件ナリ、サレド之ハ十分ナル條件ナラズ、何ントナレバ $x+y+1=0$, $x+y+2=0$, $x+y+3=0$ ノ如キハ $\Delta=0$ ナルモ同時ニ成立セザレバナリ、然レドモ $\Delta=0$ ノ外ニ尙 x, y ノ係數ヨリ作ル二次ノ行列式ノ中ニ 0 ナラザルモノアラバ所題ノ方程式ハ同時ニ成立ス、何ントナレバ今假リニ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta=0$$

トスレバ第一、第二ノ方程式ヨリ x, y ノ値ハ只一組定マル、ソノ値ニ對シテ

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (a_3x + b_3y + c_3) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & | & a_1 & b_1 & b_1 & | & y + & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & | & a_2 & b_2 & b_2 & | & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & | & a_3 & b_3 & b_3 & | & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

トナレバナリ、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{又ハ} \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ナル場合モ同様ナリ、即チ此場合ニハ三ツノ方程式ハ他ノ二ツヨリ誘導セラル、若シ x, y ノ係數ヨリ作ル二次ノ行列式ガ悉ク 0 ナルトキハ之レト同時ニ x 又ハ y ノ係數ト c_1, c_2, c_3 ヨリ作ル總テノ二次ノ行列式モ亦 0 ナラバ、換言スレバ Δ ノ各元素ノ餘因ガ悉ク 0 ナラバ所題ノ三ツノ方程式ハ只一ツニ歸スルガ故ニ x, y ノ同シ値ニテ成立スルコト明カナリ、故ニ十分ナル條件ハ $\Delta=0$ ニシテ x, y ノ

係數ヨリ作ル二次ノ行列式中ニ 0 ナラザルモノアルカ、或ハ Δ ノ總テノ餘因數ガ 0 ナルカノ何レカナリ。

(注意) 三元以上ノ場合ニモ同様ニ証明スルコトヲ得。

31. 次ノ三ツノ方程式ヨリ x, y, z ノ比ガ只一組定マルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム、

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3z = 0,$$

[解] x, y, z ノ比ガ定マルタメニハ x, y, z ハ悉クハ 0 ナルヲ得ズ、今假リニ $z \neq 0$ トスレバ

$$a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} + c_1 = 0, \quad a_2 \frac{x}{z} + b_2 \frac{y}{z} + c_2 = 0, \quad a_3 \frac{x}{z} + b_3 \frac{y}{z} + c_3 = 0$$

ガ $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ ノ同シ値ニテ成立セザルベカラズ、故ニ前問ニヨリ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ハ必要ナル條件ナリ、

次ニ $\Delta=0$ ニシテ且ツ Δ ノ各元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアラバ所題ノ方程式ヨリ x, y, z ノ比ハ只一組定マル、何ントナレバ今假リニ

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

トスレバ第一、第二方程式ヨリ

$$C_3x = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z, \quad C_3y = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

ヲ得、 x, y, z ノ此ノ値ニ對シテ前問ト同様ニ

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

トナル故ニ 0 ナラザル z ノ任意ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ヲ満足セシムル $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ ノ只一組ノ値ガ定マレバナリ、故ニ $\Delta=0$ ニシテ Δ ノ元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアルコトガ十分ナル條件ナリ。

(注意) 若シ只一組トイフコトヲ除ケバ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\Delta=0$ ナリ,
 何トナレバ各元素ノ餘因數が皆 0 ナラバ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3}$
 ニシテ三ツノ方程式ハ只一ツニ歸シ x, y, z ノ比が不定トナルノミナレバナリ。

32. 方程式 $lx+my+nz=0$ ガ x, y, z ノ三組ノ値 $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ ニテ満足セラル、タメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

[解] 題意ニ適スルタメニハ

$$la_1+mb_1+nc_1=0, la_2+mb_2+nc_2=0, la_3+mb_3+nc_3=0 \quad (1)$$

ガ l, m, n ノ同ジ値ニ對シテ同時ニ成立セザルベカラズ、 l, m, n ハ悉クハ 0 ナラザルコト勿論ナル故ニ (1) ガ成立スルタメニハ前問ト同様ニ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ナルヲ要ス、逆ニ $\Delta=0$ ナラバ l, m, n ノ或定マル値ニ對シテ (1) ガ成立スルヤウニ a_1, b_1, c_1 等ヲ定ムルコトヲ得、何ントナレバ此時若シ Δ ノ各元素ノ餘因數モ亦皆 0 ナラバ

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3}$$

ナル故ニ $la_1+mb_1+nc_1=0$ ニ適スル任意ノ a_1, b_1, c_1 ニ對シ $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ ヲ定メ得ベク若シ又餘因數ノ中例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ナラバ (1) ノ第一、第二方程式ヨリ第三ガ誘導セラル、故ニ(前々問) 第一、第二ヲ満足セシムル a_1, a_2 等ヨリ a_3, b_3, c_3 ヲ定メ得レバナリ、故ニ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\Delta=0$ ナリ。

33. $x+y+z+u=1, \quad ax+by+cz+du=k,$

$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2u=k^2, \quad a^3x+b^3y+c^3z+d^3u=k^3$$

ヲ解ケ、但シ a, b, c, d ハ皆相異なるモノトス。

[解] $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \quad a\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & b & c & d \\ k^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

トスレバ問. 28 ト同様ニ

$$x = \frac{a\Delta_k}{\Delta}, \quad y = \frac{b\Delta_k}{\Delta}, \quad z = \frac{c\Delta_k}{\Delta}, \quad u = \frac{d\Delta_k}{\Delta}$$

然ルニ問. 12 ニヨリ

$$\Delta = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

a ト k トヲ交換スレバ

$$a\Delta_k = (k-b)(k-c)(k-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

同様ニ

$$b\Delta_k = (a-k)(a-c)(a-d)(k-c)(k-d)(c-d)$$

$$c\Delta_k = (a-b)(a-k)(a-d)(b-k)(b-d)(k-d)$$

$$d\Delta_k = (a-b)(a-c)(a-k)(b-c)(b-k)(c-k)$$

$$\therefore x = \frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad y = \frac{(a-k)(k-c)(k-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)},$$

$$z = \frac{(a-k)(b-k)(k-d)}{(a-c)(b-c)(c-d)}, \quad u = \frac{(a-k)(b-k)(c-k)}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$

34. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1a'_1+a_2a'_2+a_3a'_3 & a_1b'_1+a_2b'_2+a_3b'_3 & a_1c'_1+a_2c'_2+a_3c'_3 \\ b_1a'_1+b_2a'_2+b_3a'_3 & b_1b'_1+b_2b'_2+b_3b'_3 & b_1c'_1+b_2c'_2+b_3c'_3 \\ c_1a'_1+c_2a'_2+c_3a'_3 & c_1b'_1+c_2b'_2+c_3b'_3 & c_1c'_1+c_2c'_2+c_3c'_3 \end{vmatrix}$$

ヲ証セヨ。

[解] 右邊ノ行列式ヲ D ニテ表ハシ、之ヲ基本定理 V ニヨリ 27 個ノ行列式ノ和トシテ表ハストキハ

$$D = \sum \begin{vmatrix} a_l a_l' & a_m b_m' & a_n c_n' \\ b_l a_l' & b_m b_m' & b_n c_n' \\ c_l a_l' & c_m b_m' & c_n c_n' \end{vmatrix} = \sum a_l' b_m' c_n' \begin{vmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & c_n \end{vmatrix}$$

但シ Σ ハ $l=1, 2, 3; m=1, 2, 3; n=1, 2, 3$ 二對スル總テノ和ヲ表ハス。

然ルニ若シ l, m, n ノ中何レカニツガ相等シケレバ問 4 ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & c_n \end{vmatrix} = 0$$

故ニ上ノ Σ ノ中ニ含まル、27 個ノ行列式ノ中 0 ナラザルモノハ l, m, n ガ皆相異ナルモノノミニシテ且ツ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

等ハ只符號ノミ異ナル故ニ結局 D ハ Δ ニテ割り切レルコトヲ知ル、即チ

$$D = k \cdot \Delta \tag{1}$$

D ハ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ニツキ三次ノ同次式ニシテ Δ モ亦然ルガ故ニ k ハソレ等ノ文字ヲ合マズ、從ツテソレ等ノ文字ニ特別ナル値ヲ與フルモ k ハ不變ナリ、依ツテ (1) ノ兩邊ニ於テ $a_1=b_2=c_3=1, a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=6$ トオケル

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k$$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \Delta = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

○ 35. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}$ ヲーツノ行列式ニテ表ハセ。

[解] $\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 a_1' + a_2 a_2' & a_1 b_1' + a_2 b_2' & a_3 \\ b_1 a_1' + b_2 a_2' & b_1 b_1' + b_2 b_2' & b_3 \\ c_1 a_1' + c_2 a_2' & c_1 b_1' + c_2 b_2' & c_3 \end{vmatrix}$$

36. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - zx \\ y^2 - zx & z^2 - xy & x^2 - yz \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ。

[解] $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & -2z & y \\ y & -2x & z \\ z & -2y & x \end{vmatrix}$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & -2z & y \\ y & -2x & z \\ z & -2y & x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x^2 - yz & z^2 - xy & 2xz - 2y^2 \\ 2xy - 2z^2 & y^2 - zx & x^2 - yz \\ y^2 - zx & 2yz - 2x^2 & z^2 - xy \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \{-6(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) + 2(y^2 - zx)^3 + 2(z^2 - xy)^3 + 2(x^2 - yz)^3\}$$

$$= (y^2 - zx)^3 + (z^2 - xy)^3 + (x^2 - yz)^3 - 3(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \\ z^2 - xy & x^2 - yz & y^2 - zx \\ y^2 - zx & z^2 - xy & x^2 - yz \end{vmatrix}$$

或ハ左邊ノ行列式ノ x, y, z 等ノ餘因數ハ夫々 $yz - x^2, xz - y^2, xy - z^2$ 等ナル故ニ問. 41 ト同様ニ

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} zy-x^2 & xz-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix}$$

右邊ノ第二, 第三列ヲ交換シ且ツ各元素ノ符號ヲ變ズレバ所題ノ結果ヲ得ベシ。

37. $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0$$

ナルトキハ $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1$ ナルコトヲ証セヨ。

[解] $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 & l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 & l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 & l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 & l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 & l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 & l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\therefore \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1,$$

33. 同上 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] $\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1$ ノ l_i, m_i 等ノ餘因數ヲ L_i, M_i 等トスレバ

$$l_1 L_1 + m_1 M_1 + n_1 N_1 = \pm 1, \quad (1)$$

又假設ニヨリ

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0$$

$$\therefore \frac{l_1}{m_2 n_3 - m_3 n_2} = \frac{m_1}{n_2 l_3 - n_3 l_2} = \frac{n_1}{l_2 m_3 - l_3 m_2}$$

$$\therefore \frac{l_1}{L_1} = \frac{m_1}{M_1} = \frac{n_1}{N_1} \quad (2)$$

(2) ノ各分數ノ値ヲ $\frac{1}{k}$ トシ (1) ニ代入スレバ假設ニヨリ $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ ナル

故ニ $k = \pm 1$, 但シ $\Delta = 1$ ナラバ $k = 1$, $\Delta = -1$ ナラバ $k = -1$,

$$\therefore l_1 = \pm L_1, \quad m_1 = \pm M_1, \quad n_1 = \pm N_1$$

同様ニ $l_2 = \pm L_2, \quad m_2 = \pm M_2, \quad n_2 = \pm N_2$

$$l_3 = \pm L_3, \quad m_3 = \pm M_3, \quad n_3 = \pm N_3$$

$$\therefore l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = \pm(l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3) = \pm \Delta = 1,$$

同様ニ $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$

又 $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = \pm(m_1 L_1 + m_2 L_2 + m_3 L_3) = 0,$

同様ニ $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0.$

39. $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 + abc$ ヲ証セヨ。

[解] $a^3 + b^3 + c^3 + abc = \begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix}$

然ルニ $\begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & 2ac-b^2 & 2ab-c^2 \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix} \\ = a^3 + b^3 + c^3 + abc,$$

40. $\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ヲ求ム。

〔解〕 求ムル商ヲ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ トスルニ

$$\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_1+ay_1+a^2z_1 & x_2+ay_2+a^2z_2 & x_3+ay_3+a^2z_3 \\ x_1+by_1+b^2z_1 & x_2+by_2+b^2z_2 & x_3+by_3+b^2z_3 \\ x_1+cy_1+c^2z_1 & x_2+cy_2+c^2z_2 & x_3+cy_3+c^2z_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1+ay_1+a^2z_1=1 & x_2+ay_2+a^2z_2=bc+ad & x_3+ay_3+a^2z_3=b^2c^2+a^2d^2 \\ x_1+by_1+b^2z_1=1 & x_2+by_2+b^2z_2=ca+bd & x_3+by_3+b^2z_3=c^2a^2+b^2d^2 \\ x_1+cy_1+c^2z_1=1 & x_2+cy_2+c^2z_2=ab+cd & x_3+cy_3+c^2z_3=a^2b^2+c^2d^2 \end{cases}$$

之等三組ノ聯立方程式ヨリ次ノ結果ヲ得

$$\begin{aligned} x_1=1 & \quad x_2=ab+bc+ca & \quad x_3=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c) \\ y_1=0 & \quad y_2=-a-b-c+d & \quad y_3=-(b+c)(c+a)(a+b) \\ z_1=0 & \quad z_2=1 & \quad z_3=ab+bc+ca+d^2, \end{aligned}$$

41. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ ノ a_1, b_1 等ノ餘因數ヲ A_1, B_1 等トスルトキ

A_1

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \Delta^3 \text{ ヲ証セヨ。}$$

〔解〕 $a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+d_1D_1=\Delta, \quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1+d_2D_1=0$ 等ナル故ニ

$$\Delta \cdot \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^4$$

$$\therefore \Delta' = \Delta^3,$$

42. 同上, $\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = a_1\Delta^2$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $\Delta \cdot \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & \Delta & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & \Delta & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = a_1\Delta^3$

$$\therefore \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = a_1\Delta^2,$$

43. 同上, $\begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \Delta$ ヲ証セヨ。

[解] $\Delta \cdot \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \Delta & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & \Delta & 0 \\ b_4 & 0 & \Delta \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_3 & \Delta & 0 \\ b_4 & 0 & \Delta \end{vmatrix}$
 $= a_1 b_2 \Delta^2 - a_2 b_1 \Delta^2,$

$\therefore \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Delta,$

44. $\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 & (a_1-b_4)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 & (a_2-b_4)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 & (a_3-b_4)^2 \\ (a_4-b_1)^2 & (a_4-b_2)^2 & (a_4-b_3)^2 & (a_4-b_4)^2 \end{vmatrix} = 0$ ヲ証セヨ。

[解] 所題ノ行列式ヲ Δ トスレバ

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 & 0 \\ a_3^2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_4^2 & a_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2b_1 & b_1^2 & 0 \\ 1 & -2b_2 & b_2^2 & 0 \\ 1 & -2b_3 & b_3^2 & 0 \\ 1 & -2b_4 & b_4^2 & 0 \end{vmatrix}$

ナルコトハ直チニ知ルコトヲ得、然ルニ此二ツノ行列式ハ第四行ノ各元素 0 ナル故ニ共ニ 0 ナリ、故ニ其積ナル Δ モ亦 0 ナリ。

45. $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ。

[解] 左邊ヲ Δ トシ Δ ノ第四行ヨリ第一行ヲ引キ第三行ヨリ第二行ヲ引ケバ

$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z-y & w-x \\ a & b & c-b & d-a \\ d & c & b-c & a-d \\ w & z & y-z & x-w \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2x & 2y & z-y & w-x \\ 2a & 2b & c-b & d-a \\ 2d & 2c & b-c & a-d \\ 2w & 2z & y-z & x-w \end{vmatrix}$

次ニ第一行ニ第四行ヲ、第二行ニ第三行ヲ加ヘ然ル後第四列ヨリ第一列ヲ引キ、第三列ヨリ第二列ヲ引ケバ

$\Delta = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ d+a & c+b & b-c & a-d \\ w+x & z+y & y-z & x-w \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ 0 & 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$
 $= \frac{1}{4}(x+w) \begin{vmatrix} b+c & c-b & d-a \\ 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix} - \frac{1}{4}(a+d) \begin{vmatrix} y+z & z-y & w-x \\ 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$
 $= \frac{1}{4}(x+w)(b+c) \begin{vmatrix} 2(b-c) & 2(a-d) \\ 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix} - \frac{1}{4}(a+d)(y+z) \begin{vmatrix} 2(b-c) & 2(a-d) \\ 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$
 $= \{(x+w)(b+c) - (a+d)(y+z)\} \begin{vmatrix} b-c & a-d \\ y-z & x-w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$

46. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ、但シ
 $A = a^2 - d^2 + 2ce - 2bf$
 $B = e^2 - b^2 + 2ac - 2df$
 $C = c^2 - f^2 + 2ae - 2bd$

[解] 左邊ノ行列式ニ於テ第二行以下ヲ第一行ニ加フレバ

$a+b+c+d+e+f$ (1)

ハ其一ツノ因数ナルヲ知ル、又第二行ヨリ順次各行ニ $-1, 1, -1, 1, -1$ ヲ乘

シテ第一行ニ加フレバ

$$a-b+c-d+e-f \quad (2)$$

モ亦其一ツノ因数ナルヲ知ル、又 1 ノ立方根ノ虚数ヲ ω トシ第二行以下ニ順次 $\omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2$ ヲ乗ジテ第一行ニ加フレバ

$$a+\omega b+\omega^2 c+d+\omega e+\omega^2 f \quad (3)$$

モ亦其一ツノ因数ナルヲ知ル、同様ニ $\omega^2, \omega, 1, \omega^2, \omega$ 及ビ $-\omega, \omega^2, -1, \omega, -\omega^2$ 及ビ $-\omega^2, \omega, -1, \omega^2, -\omega$ ヲ乗ジテ加フレバ

$$a+\omega^2 b+\omega c+d+\omega^2 e+\omega f \quad (4)$$

$$a-\omega b+\omega^2 c-d+\omega e-\omega^2 f \quad (5)$$

$$a-\omega^2 b+\omega c-d+\omega^2 e-\omega f \quad (6)$$

モ亦其因数ナルヲ知ル、故ニ左邊ノ行列式ハ此等六ツノ因数ト定数トノ積ニ等シ、而シテ a^6 ノ係數ヲ比較シテ其定數ハ 1 ナルヲ知ル

然ルニ (1), (2) 及ビ (3), (5) 及ビ (4), (6) ノ積バ夫々次ノ如シ

$$(a+c+e)^2-(b+d+f)^2=A+B+C$$

$$(a+\omega^2 c+\omega e)^2-(d+\omega b+\omega^2 f)^2=A+\omega^2 B+\omega C$$

$$(a+\omega c+\omega^2 e)^2-(b+\omega^2 b+\omega f)^2=A+\omega B+\omega^2 C$$

故ニ左邊ノ行列式ハ

$$(A+B+C)(A+\omega^2 B+\omega C)(A+\omega B+\omega^2 C)$$

$$=A^3+B^3+C^3-3ABC$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} \quad 6-3$$

47. $f(xy)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ガ x, y ノ一次ノ因数ニ分解セラル、タメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

ナルコトヲ証セヨ。

[解] $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=(lx+my+n)(l'x+m'y+n')$ ト假定スレバ

$$a=ll', \quad 2h=lm'+l'm, \quad b=mm'$$

$$2g=ln'+l'n, \quad 2f=mn'+m'n, \quad c=nn'$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2ll' & lm'+l'm & ln'+l'n \\ lm'+l'm & 2mm' & mn'+m'n \\ ln'+l'n & mn'+m'n & 2nn' \end{vmatrix}$$

$$\text{然ルニ} \begin{vmatrix} l & l' & 0 \\ m & m' & 0 \\ n & n' & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l' & l & 0 \\ m' & m & 0 \\ n' & n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2ll' & lm'+l'm & ln'+l'n \\ l'm+l'n & 2mm' & mn'+m'n \\ l'n+l'n' & mn'+m'n & 2nn' \end{vmatrix}$$

左邊ノ兩行列式ハ第三行ノ各元素 0 ナル故ニ共ニ 0 ナリ、依ツテ右邊ノ行列式モ 0 ナリ $\therefore \Delta=0$

逆ニ $\Delta=0$ ナルトキハ $f(xy)=0$ ヲ x ノ二次方程式ト考ヘタルトキノ判別式 $(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$ ハ完全平方トナル故ニ $f(xy)$ ハ二ツノ一次因数ニ分解セラル、依ツテ $\Delta=0$ ハ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

48. 次ノ式ガ一次ノ因数ニ分解セラル、ヤウニ k ノ値ヲ定メヨ、

$$2x^2-3ky^2-12z^2+17yz+kzx-xy \quad (1)$$

[解] 所題ノ整式 (1) ハ x, y, z ニツキ二次ニシテ同次ナル故ニ若シ一次ノ因数ニ分解セラル、ナラバ其因数ハ一次ニシテ同次ナル $lx+my+nz$ ナル形ノモノナルベシ、故ニ (1) ガ一次ノ因数ニ分解セラル、ナラバ (1) ニ於テ $z=1$ トオキタル

$$2x^2-xy-3ky^2+kx+17y-12 \quad (2)$$

モ亦 $lx+my+n$ ナル形ノ一次ノ因数ニ分解セラルベク逆ニ (2) ガ x, y ノ一次ノ因数ニ分解セラルレバ (1) モ亦 x, y, z ノ一次ノ因数ニ分解セラルベシ、然ルニ

(2) ガ一次因数ニ分解セラル、タメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{k}{2} \\ -\frac{1}{2} & -3k & \frac{17}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{17}{2} & -12 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore 3k^3+271k-566=0$$

視察ニヨリ k ノ一ツノ値ハ 2 ニシテ他ハ虚数ナルヲ知ル、
依ツテ所要ノ値ハ 2 ナリ。

$$49. \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \text{ ナルトキハ } \begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix}$$

ハ完全平方ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 Δ ノ元素 a, h, g 等ノ餘因数ヲソレソレ $\Delta_a, \Delta_h, \Delta_g$ 等ニテ表ハセバ

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix} = \Delta_a x^2 + \Delta_b y^2 + \Delta_c z^2 + 2\Delta_h xy + 2\Delta_f yz + 2\Delta_g xz - u\Delta$$

$$= \frac{1}{\Delta_a} (\Delta_a^2 x^2 + \Delta_a \Delta_b y^2 + \Delta_a \Delta_c z^2 + 2\Delta_a \Delta_h xy + 2\Delta_a \Delta_f yz + 2\Delta_a \Delta_g xz) - u\Delta,$$

然ルニ $\Delta = 0$ ナル故ニ 問 27 ニヨリ

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_h} = \frac{\Delta_h}{\Delta_b} = \frac{\Delta_g}{\Delta_f}, \quad \frac{\Delta_a}{\Delta_g} = \frac{\Delta_h}{\Delta_f} = \frac{\Delta_g}{\Delta_c},$$

$$\therefore \Delta_a \Delta_b = \Delta_h^2, \quad \Delta_a \Delta_c = \Delta_g^2, \quad \Delta_a \Delta_f = \Delta_h \Delta_g,$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_a} (\Delta_a^2 x^2 + \Delta_h^2 y^2 + \Delta_g^2 z^2 + 2\Delta_a \Delta_h xy + 2\Delta_h \Delta_g yz + 2\Delta_a \Delta_g xz) = \frac{1}{\Delta_a} (\Delta_a x + \Delta_h y + \Delta_g z)^2,$$

50. 次ノ方程式ハ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ、

$$\begin{vmatrix} a+x & h & g \\ h & b+x & f \\ g & f & c+x \end{vmatrix} = 0,$$

〔解〕 所題ノ方程式ヲ $D(x) = 0$ トシ $D(x) = 0$ ガ a, b, c, h, g, f ノ如何ニ係ラズ
實根ノミヲ有スルコトヲ証明スルニハ βi ナル根ヲ有セザルコトヲ証明スルベ可
ナリ、何ントナレバ若シ $\alpha + \beta i$ ナル根ヲ有スレバ a, b, c ノ代リニ $a + \alpha, b + \alpha,$
 $c + \alpha$ ヲ以テシタル方程式ガ βi ナル根ヲ有スルコトトナレバナリ

然ルニ $D(\beta i) = 0$ ナラズ

$$D(\beta i) \cdot D(-\beta i) = 0$$

故ニ $D(x) = 0$ ガ βi ナル根ヲ有スルニ $D(x) \cdot D(-x) = 0$ モ亦 βi ナル根ヲ
有セザルベカラズ、然ルニ

$$D(x) \cdot D(-x) = \begin{vmatrix} a+x & h & g \\ h & b+x & f \\ g & f & c+x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-x & h & g \\ h & b-x & f \\ g & f & c-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+h^2+g^2-x^2 & ah+bh+fg & ag+hf+cg \\ ah+bh+fg & h^2+b^2+f^2-x^2 & gh+bf+cf \\ ag+hf+cg & gh+bf+cf & g^2+f^2+c^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= -x^6 + Ax^4 - Bx^2 + C = 0,$$

トスレバ

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + 2(h^2 + g^2 + f^2) > 0,$$

$$B = (a^2 + h^2 + g^2)(b^2 + h^2 + f^2) + (a^2 + h^2 + g^2)(c^2 + g^2 + f^2)$$

$$+ (b^2 + h^2 + f^2)(c^2 + g^2 + f^2) - (ah + bh + fg)^2$$

$$- (ag + cg + hf)^2 - (bf + cf + gh)^2$$

$$= (ab - h^2)^2 + (hf - bg)^2 + (af - hg)^2 + (ac - g^2)^2 + (gf - ch)^2 + (af - hg)^2$$

$$+ (bc - f^2)^2 + (hf - bg)^2 + (gf - ch)^2$$

$$= (ab - h^2)^2 + (ac - g^2)^2 + (bc - f^2)^2 + 2(hf - bg)^2 + 2(af - hg)^2$$

$$+ 2(gf - ch)^2 > 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}^2 > 0$$

故ニ $x = \beta i$ 即チ $x^2 = -\beta^2$ トオケバ $D(x) \cdot D(-x) = 0$ ノ左邊ノ各項ハ皆正トナ
リテ從ツテ其和ハ 0 トナラズ、即チ $D(x) \cdot D(-x) = 0$ ハ βi ナル根ヲ有セズ、
故ニ $D(x) = 0$ ハ βi ナル根ヲ有セズ、從ツテ $\alpha + \beta i$ ナル根ヲ有セズ、即チ
 $D(x) = 0$ ハ常ニ實根ノミヲ有ス。

51. a, b, c が方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の三根ナルトキ

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

ノ値如何。

[解] 所題ノ行列式ヲ Δ トシ第二行, 第三行ヲ第一行ニ加フレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+c+b) & (c+a)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

然ルニ $a+b+c=-p$,

$$\therefore \Delta = -p \begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

次ニ第二列, 第三列ヲ第一列ニ加フレバ

$$\Delta = -p \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+c+b) & (a+b)(a+b+c) \\ (a+c) & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= p^2 \begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= p^2 \left\{ 2 \begin{vmatrix} (c+a)^2 & bc \\ bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} - (a+c) \begin{vmatrix} a+c & bc \\ a+b & (a+b)^2 \end{vmatrix} + (a+b) \begin{vmatrix} a+c & (c+a)^2 \\ a+b & bc \end{vmatrix} \right\}$$

$$= p^2 \{ 2[(c+a)^2(a+b)^2 - b^2c^2] - (a+c)(a+b)[(a+c)(a+b) - bc] + (a+b)(a+c)[bc - (c+a)(a+b)] \}$$

$$= p^2 \{ -2b^3c^2 + 2bc(a+c)(a+b) \} = 2p^2abc(a+b+c)$$

$$= 2p^3r,$$

$$2a_1 - 2a_4 \quad 2b_1 - 2b_4$$

$$52 \begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1a_2-a_3a_4+b_1b_2-b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1a_3-a_2a_4+b_1b_3-b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1a_4-a_2a_3+b_1b_4-b_2b_3 \end{vmatrix} \\ = 2 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & a_1^2+b_1^2 \\ 1 & a_2 & b_2 & a_2^2+b_2^2 \\ 1 & a_3 & b_3 & a_3^2+b_3^2 \\ 1 & a_4 & b_4 & a_4^2+b_4^2 \end{vmatrix} \quad \text{ヲ証セヨ。}$$

[解] 右邊ノ行列式ヲ Δ トスレバ第一列ニ第二列ヲ加ヘ第三第四列ヲ引キ次ニ第二列

ヨリ第三列ヲ, 第三列ヨリ第四列ヲ引ケバ

$$2\Delta = 2 \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2 \\ 0 & a_2-a_3 & b_2-b_3 & a_2^2-a_3^2+b_2^2-b_3^2 \\ 0 & a_3-a_4 & b_3-b_4 & a_3^2-a_4^2+b_3^2-b_4^2 \\ 1 & a_4 & b_4 & a_4^2+b_4^2 \end{vmatrix} \\ = -2 \begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & a_2^2-a_3^2+b_2^2-b_3^2 \\ a_3-a_4 & b_3-b_4 & a_3^2-a_4^2+b_3^2-b_4^2 \end{vmatrix}$$

第二列ニ -2 ヲカケテ第一列ヲ加ヘ然ル後第三列ニ -2 ヲカケテ第二列ヲ加フレバ

$$2\Delta = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2+b_1^2-b_2^2-b_3^2+b_4^2 \end{vmatrix}$$

第一行ニ $a_1+a_2+a_3+a_4$, 第二行ニ $b_1+b_2+b_3+b_4$ ヲ乘シテ第三行ヨリ引ケバ

$$2\Delta = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & -2a_1a_2+2a_3a_4-2b_1b_2+2b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & -2a_1a_3+2a_2a_4-2b_1b_3+2b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & -2a_1a_4+2a_2a_3-2b_1b_4+2b_2b_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1a_2-a_3a_4+b_1b_2-b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1a_3-a_2a_4+b_1b_3-b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1a_4-a_2a_3+b_1b_4-b_2b_3 \end{vmatrix},$$

53. 主対角線上ノ元素ガ皆 a ニシテ其他ノ元素ガ皆 b ナル $n+1$ 次ノ行列式ノ値ハ $(a+nb)(a-b)^n$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ Δ トスレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

第二行以下ヲ總テ第一行ニ加フレバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+nb & b & b & \dots & b \\ a+nb & a & b & \dots & b \\ a+nb & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+nb & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (a+nb) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

第一列ヲ各列ヨリ引キ第二列以下ヨリ $a-b$ ヲ括リ出セバ

$$\Delta = (a+nb) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+nb)(a-b)^n \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

然ルニ第一行ニツイテ展開スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore \Delta = (a+nb)(a-b)^n,$$

54. $\begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \\ 1 & x^{n-1} & \dots & x^2 & x \\ x & 1 & \dots & x^1 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 1 & x^{n-1} \end{vmatrix} = (x^n - 1)^{n-1}$ ヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ Δ トシ、第一列ニ x, x^2, \dots, x^{n-1} ヲカケテ第二列、第三列、
.....、第 n 列ヨリ引ケバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \\ 1-x^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x(1-x^n) & 1-x^n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-2}(1-x^n) & x^{n-3}(1-x^n) & \dots & 1-x^n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^n)^{n-1} \begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & x & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第 n 行ニツイテ展開スレバ

$$\Delta = (1-x^n)^{n-1} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \dots & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x^n)^{n-1} (-1)^{n-1} = (x^n - 1)^{n-1}$$

55. $\begin{vmatrix} a, & a+d, & a+2d, & \dots, & a+(n-1)d \\ a+(n-1)d, & a, & a+d, & \dots, & a+(n-2)d \\ a+(n-2)d, & a+(n-1)d, & a, & \dots, & a+(n-3)d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+d, & a+2d, & a+3d, & \dots, & a \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n-1} (nd)^{n-1} \left(a + \frac{n-1}{2} d \right) \text{ ヲ証セヨ。}$$

[解] 左邊ヲ Δ トシ第二行以下ヲ第一行ニ加ヘテ $\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$ ヲ括リ出セバ

$$\Delta = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} \begin{vmatrix} 1 & a+d & a+2d & \dots & a+(n-1)d \\ 1 & a & a+d & \dots & a+(n-2)d \\ 1 & a+(n-1)d & a & \dots & a+(n-3)d \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a+2d & a+3d & \dots & a \end{vmatrix}$$

各列ヲ其上ノ列ヨリ引キ第一列乃至第 $n-1$ 列ヨリ d ヲ括リ出セバ

$$\Delta = n \left(a + \frac{n-1}{2} d \right) d^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -(n-1) & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -(n-1) & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) & 1 \\ 1 & a+2d & a+3d & \dots & a+(n-1)d & a \end{vmatrix}$$

第一行ニツキ展開スレバ

$$\Delta = (-1)^{n-1} n \left(a + \frac{n-1}{2} d \right) d^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ヲ Δ' トシ Δ' ノ第 $(n-1)$ 行(最後ノ行)ヲ第一行ヨリ引キ第一行ニツキ展開スレバ

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -(n-1) & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix}$$

此右邊ノ行列式ハ Δ' ト同シ形ニテ $(n-2)$ 次ナリ, 依ツテ同シ計算ヲ繰リ返セバ

$$\Delta' = n^{n-3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

$$\therefore \Delta = (-1)^{n-1} (nd)^{n-1} \left(a + \frac{n-1}{2} d \right)$$

56. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{vmatrix} = n! (n-1)! \dots 3! 2! 1!$ ヲ証セヨ。

[解] 今 a_1, a_2, \dots, a_n ヲ皆相異なる n 個ノ数トスレバ一般ニ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ニ於テ $a_n = a_{n-1}, a_n = a_{n-2}, \dots, a_2 = a_1$ トスレバ 0 トナリ且ツ

Δ ハ a_1, a_2, \dots, a_n ニツキ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 次ナル故ニ

$$\Delta = k a_1 a_2 \dots a_n (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \dots (a_n - a_1) \\ (a_{n-1} - a_{n-2}) \dots (a_{n-1} - a_1) \\ \dots \\ (a_2 - a_1)$$

主項 $a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n$ ノ係數ヲ比較シテ $k=1$ ナルヲ知ル, 依ツテ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ ヲ夫々 $n, n-1, \dots, 2, 1$ トスレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{vmatrix} = n! (n-1)! (n-2)! \dots 2! 1!$$

57. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ k^2 & (k+1)^2 & (k+2)^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^{n-k} & (k+1)^{n-k} & (k+2)^{n-k} & \dots & n^{n-k} \end{vmatrix}$$

トスレバ $\Delta_1 = (n-1)!(n-2)! \dots (n-k+1)! \Delta_k$ ナルコトヲ証セヨ,

但シ k ハ n ヨリ小ナル任意ノ正ノ整数トス。

[解] Δ_1 ノ第一行ヲ他ノ各行ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2-1 & 3-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 2^2-1 & 3^2-1 & \dots & n^2-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & \dots & n^{n-1}-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & \dots & n-1 \\ 2^2-1 & 3^2-1 & \dots & n^2-1 \\ 2^3-1 & 3^3-1 & \dots & n^3-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & \dots & n^{n-1}-1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

各行ヨリ $2-1, 3-1, \dots, n-1$ ヲ括リ出シ然ル後各列ヲ其次ノ列ヨリ引ケバ

$$\Delta_1 = (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2} & 4^{n-2} & \dots & n^{n-2} \end{vmatrix} = (n-1)! \Delta_2$$

同様ニ Δ_2 ノ第一行ヲ他ノ各行ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3-2 & 4-2 & \dots & n-2 \\ 2^2 & 3^2-2^2 & 4^2-2^2 & \dots & n^2-2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2}-2^{n-2} & 4^{n-2}-2^{n-2} & \dots & n^{n-2}-2^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-2 & 4-2 & \dots & n-2 \\ 3^2-2^2 & 4^2-2^2 & \dots & n^2-2^2 \\ 3^3-2^3 & 4^3-2^3 & \dots & n^3-2^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3^{n-2}-2^{n-2} & 4^{n-2}-2^{n-2} & \dots & n^{n-2}-2^{n-2} \end{vmatrix}$$

各行ヨリ $3-2, 4-2, \dots, n-2$ ヲ括リ出シ然ル後各列ノ 2 倍ヲ其次ノ列ヨリ引ケバ

$$\Delta_2 = (n-2)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3^{n-3} & 4^{n-3} & 5^{n-3} & \dots & n^{n-3} \end{vmatrix} = (n-2)! \Delta_3$$

以下同様ニシテ

$$\Delta_3 = (n-3)! \Delta_4 \dots \Delta_{k-1} = (n-k+1)! \Delta_k$$

$$\therefore \Delta_1 = (n-1)!(n-2)! \dots (n-k+1)! \Delta_k$$

58.
$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_1 - a_4)^2 \dots (a_1 - a_n)^2 (a_2 - a_3)^2 (a_2 - a_4)^2 \dots (a_2 - a_n)^2 \dots (a_{n-1} - a_n)^2$$

ヲ証セヨ, 但シ $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = s_k$ トス。

[解] 今 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ トスレバ

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

然ルニ Δ ハ a_1, a_2, \dots, a_n ニツキ $\frac{n(n-1)}{2}$ 次ニシテ且ツ $a_1=a_2, a_1=a_3$ 等トオケバ 0 トナル

$$\therefore \Delta = M(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) \\ (a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) \\ \dots \\ (a_{n-1}-a_n)$$

主項 $a_2 a_3^2 a_4^3 \dots a_n^{n-1}$ ノ係數ヲ比較スレバ

$$1 = M(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \therefore M = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\therefore \Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n) \\ (a_2-a_3)\dots(a_2-a_n) \\ \dots \\ (a_{n-1}-a_n)$$

$$\therefore \Delta^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = (a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2\dots(a_1-a_n)^2 \\ (a_2-a_3)^2\dots(a_2-a_n)^2 \\ \dots \\ (a_{n-1}-a_n)^2$$

59.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x_1+x_2 & x_1+x_3 & \dots & x_1+x_{n+1} \\ 1 & x_2+x_1 & 0 & x_2+x_3 & \dots & x_2+x_{n+1} \\ 1 & x_3+x_1 & x_3+x_2 & 0 & \dots & x_3+x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1}+x_1 & x_{n+1}+x_2 & x_{n+1}+x_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} 2^n x_1 x_2 \dots x_{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$
 ヲ証セヨ。

[解] 左邊ヲ Δ トシ Δ' ノ第一行ニ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ヲ乗シテ第二行以下ヨリ引キ第二列以下ヨリ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} ヲ括リ出セバ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 1 & x_2 & -x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 & -x_3 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1} & x_{n+1} & \dots & -x_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 \dots x_{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_2} & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

最後ノ行ヲ第二行以下ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ、最後ノ行ハ第 $n+2$ 行)

$$\Delta = x_1 x_2 \dots x_{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & -2 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{x_2} & 0 & -2 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2 & 2 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} x_1 x_2 \dots x_{n+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{x_2} & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \frac{1}{x_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ヲ Δ' トシ第一列ニツキ展開スレバ