

**Elemente der Algebra****Arbeitsblatt 3****Übungsaufgaben**

AUFGABE 3.1. Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Elementen  $x, y, z, w \in R$ , wobei  $z$  und  $w$  Einheiten seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)

$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)

$$\frac{1}{x} = x^{-1},$$

(3)

$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(4)

$$\frac{0}{z} = 0,$$

(5)

$$\frac{z}{z} = 1,$$

(6)

$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$

(7)

$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

(8)

$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x - z) + (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt, außer im Nullring.

## AUFGABE 3.2.\*

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $f \in R$ . Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f: R \longrightarrow R, g \longmapsto fg,$$

wann  $f$  ein Nichtnullteiler und wann  $f$  eine Einheit ist.

AUFGABE 3.3. Zeige, dass ein Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist.

AUFGABE 3.4. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.5. Es sei  $K$  ein Körper mit

$$2 \neq 0.$$

Zeige, dass für  $f, g \in K$  die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4} ((f + g)^2 - (f - g)^2)$$

gilt.

AUFGABE 3.6. Zeige für einen Körper  $K$  die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes  $a \in K$  ist die Abbildung

$$\alpha_a: K \longrightarrow K, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes  $b \in K, b \neq 0$ , ist die Abbildung

$$\mu_b: K \longrightarrow K, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

AUFGABE 3.7. Zeige, dass die einelementige Menge  $\{0\}$  alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass  $0 = 1$  ist.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form  $a + bi$  mit reellen Zahlen  $a, b$  angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

AUFGABE 3.8. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

- (1)  $(5 + 4i)(3 - 2i)$ .
- (2)  $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$ .
- (3)  $(2i + 3)^2$ .
- (4)  $i^{1011}$ .
- (5)  $(-2 + 5i)^{-1}$ .
- (6)  $\frac{4-3i}{2+i}$ .

AUFGABE 3.9. Bestimme die inversen Elemente der folgenden komplexen Zahlen.

- (1) 3.
- (2)  $5i$ .
- (3)  $3 + 5i$ .

AUFGABE 3.10. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

AUFGABE 3.11. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

AUFGABE 3.12. Zeige, dass  $P = \mathbb{R}^2$  mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

AUFGABE 3.13. Skizziere die folgenden Teilmengen.

- (1)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq -3\}$ ,
- (2)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$ ,
- (3)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5\}$ .

AUFGABE 3.14.\*

a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i).$$

b) Bestimme das inverse Element  $z^{-1}$  zu  $z = 3 + 4i$ .

c) Welchen Abstand hat  $z^{-1}$  aus Teil (b) zum Nullpunkt?

AUFGABE 3.15.\*

Löse die lineare Gleichung

$$(2 + 5i)z = (3 - 7i)$$

über  $\mathbb{C}$  und berechne den Betrag der Lösung.

AUFGABE 3.16. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

- (1)  $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$ .
- (2)  $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$ .
- (3)  $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$ .
- (4) Für  $r \in \mathbb{R}$  ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z).$$

- (5)  $z = \operatorname{Re}(z)$  genau dann, wenn  $z \in \mathbb{R}$  ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn  $\operatorname{Im}(z) = 0$  ist.

AUFGABE 3.17. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

- (1)  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .
- (2)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ .

- (3)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .
- (4)  $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$ .
- (5) Für  $z \neq 0$  ist  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

AUFGABE 3.18. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

- (1) Für reelles  $z$  stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
- (2) Es ist  $|z| = 0$  genau dann, wenn  $z = 0$  ist.
- (3)  $|z| = |\bar{z}|$ .
- (4)  $|zw| = |z| |w|$ .
- (5)  $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .
- (6) Für  $z \neq 0$  ist  $|1/z| = 1/|z|$ .

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 3.19. (2 Punkte)

Bestimme die Einheiten von  $\mathbb{Z}/(8)$ .

AUFGABE 3.20. (3 Punkte)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass  $R$  genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn  $R$  ein Körper ist.

AUFGABE 3.21. (2 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring und  $f \in R$  ein nilpotentes Element. Zeige, dass  $1 + f$  eine Einheit ist.

AUFGABE 3.22. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1 + i)^n$$

für  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

AUFGABE 3.23. (2 Punkte)

Löse die lineare Gleichung

$$(4 - i)z = (6 + 5i)$$

über  $\mathbb{C}$  und berechne den Betrag der Lösung.

AUFGABE 3.24. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

- (1)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- (2)  $\overline{-z} = -\bar{z}$ .
- (3)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ .
- (4) Für  $z \neq 0$  ist  $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$ .
- (5)  $\bar{\bar{z}} = z$ .
- (6)  $\bar{z} = z$  genau dann, wenn  $z \in \mathbb{R}$  ist.