始

受驗必携

數學講義

5

平面三角法之部

原　濱吉著

東　京

金刺芳流堂

受驗必携 數學講義

平面三角法ノ部　緒　言

近年諸官立學校ノ入學志願者ハ募集定員ノ五倍乃至十五倍ニモ達スルノ趨勢ナリ．此劇烈ナル競爭場裡ニ立チテ能ク及第ノ榮ヲ擔フニハ拔群ノ學力ヲ要ス，之レ實ニ至難ノ極ミナリトス．

然レドモ此事タルヤ敢テ絶無ニハアラズシテ學修方ノ當ヲ得タランニハ困難ヲ輕減シテ其ノ目的ヲ達シ得ルコト必然ナルベシ．

著者ハ多年此種ノ學生ニ數學ヲ敎授セシ實險ニ徵シテ此處ニ

“本書ニ付キ3頁ニ掲グル豫備學修條項ヲ眞
摯ニ實行セシ者ハ必ズ三角法試驗ニ及第ス”

ト斷言シテ憚ラザルナリ．

本書ハ受驗ニ十二分ヲ期シテ著作シタルモノナルユエ程度ハ現今ノ中學校卒業以上ナリ．然レドモ本書ハ解法ノ要點ニ從ヒ細密ニ且ツ嚴正ニ分類シテ解說シ其ノ稍々困難ナルモノニハ考ヘ方ヲモ說示シタルヲ以テ，之ニ由テ學者ハ槪括的智識ヲ得テ考究事項ヲ減少セルノミナラズ難問モ頗ル理解シ易カルベシ．

要スルニ本書ハ受驗豫備ニ勞力ヲ減ジ受驗ノ効果ヲ完タカラシムルニアルヲ以テ，學者ノ智識ヲ確實强固ナラシムル爲メニ少シク考究スベキ餘地ヲ存セリ．　〔但シ質問券ヲ挿入シ置ケリ〕

終リニ臨ンデ學者ニ希望ス，著者ノ斷言セシ事項ヲ實行セラレンコトヲ，之レ學者ノ幸榮ノ爲メニ外ナラズ．

大正五年三月十日　　　東京　研數會ニ於テ

原　濱吉　誌ス．

科目ノ輕重ト問題ノ難易トニ附テノ參考

官立諸學校ハ夫々目的ヲ異ニスルユエ科目ニ輕重ノ差アルハ勿論，問題ニ難易ノ別アルハ當然ナリ．此事ニ付キ未來ニ投機スルハ實ニ同復シ難キ冒險ノ虞レアリ，然レドモ過去ヲ參考ニ資スルハ強チ無益ニハアラザルベシ．

仍テ各校ノ過去十有五年間ノ出題振リニ鑒ミ此等ノ差別ノ一斑ヲ述ベンニ，

第一 科目ノ輕重ニ附テ

算術 ハ概シテ各校トモ重キヲ置カレシ方ニシテ，若シ此科ヲ省カレシ場合ニハ他ノ科目中ニ含マセラレシコト多カリシ．其特ニ重キヲ置カレシハ各高等商業學校ト各高等工業學校トナリキ．

代數學 ハ各校トモニ其最モ重キヲ置カレシモノノ一ナリ．

平面幾何學 ハ其重キヲ置カレシコト代數學ニ讓ラズ，東京商船學校ニテハ時々新問ヲ出サレ，又東京大阪ノ兩高等工業學校，陸軍士官學校，專門學校檢定，海軍機關學校，東京高等師範學校等ニテハ難問ヲ出サレシコトモ少ナカラズ．海軍兵學校ニテハ重セザリシ傾向アリ，又各高等商業學校ニテハ時々省カレシコトモアリキ．

立體幾何學 ハ各高等學校，各高等工業學校，專門學校檢定，陸軍士官學校，海軍機關學校ニテハ平面幾何學ト同一視セラレシガ如シ．其他ノ學校ニテハ餘リ重キヲ置カレズ，中ニハ出サザリシ學校モ少ナカラザリキ．

三角法 ハ是レ亦タ重キヲ置カレシモノノ一ニシテ，時ニ難易ノ差ハアリタレドモ省カレシ學校ハ少ナカリキ．

第二 問題ノ難易ニ付テ

東京大阪ノ兩高等工業學校，神戸高等商業學校，陸軍士官學校，海軍機關學校，東京商船學校，東北大學工學專門部，盛岡高等農林學校ハ難カシカリシ方ニシテ，

他ノ高等工業學校〔名古屋，仙臺，熊本〕，海軍兵學校，海軍經理學校，高等商業學校〔東京，長崎，小樽〕，東京水產講習所，高等師範學校〔東京，廣島〕，東北農科大學，醫學專門學校〔千葉，仙臺，金澤，岡山，新潟〕等モ易キ方ニハアラザリキ．

高等學校〔第一乃至第八〕ハ易クモアリ亦タ難カシクモアリテ他校ト其選ヲ異ニシタリキ．〔之レ法，文，醫，理，工ノ五科ヲ一緒ニ試驗スルニ依ルナラン〕

其他ノ諸學校ハ先ヅ易キ方ニ屬シタリキ．

（盡力ハ題レ〇一験ハ三間ニ修ル〇精神一到何事カ成ラザラン〇一日再ビ晨ナリ難シ）

豫備學修條項

第一條 先ヅ受驗豫備ノ期間〔學力ニ依ルモ三月内外トス〕ニ於テ最後ノ十日間ヲ省ブキ置キ，毎週ノ自修ニ四時間乃至六時間ヲ取リテ本書ノ頁數ヲ之ニ割リ當テ熟讀スルト同時ニ必ズ演算ヲ遂行セヨ．

〔三角法ノ如キ公式ノ多キ學科ニアリテハ先ヅ分類ヲ嚴密ニシ其ノ各類ノ要項ヲ熟知シテ此等ノ適用ニ練達スレバ充分ナルヲ以テ須ラク之レガ練習ヲ勵ムベシ．著者ノ調査ニ依レバ三角法ノ不出來ノ者ハ概ネ代數學ノ未熟ナルト公式ヲ鵜呑ミニシテ其ノ理解ヲ疎略ニセシトノ二點ニ基因スルガ如シ，讀者ハ宜シク戒心スベシ〕

其際ニ重要ナル即チ應用ノ廣キ定義，定理，公式ハ確實ニ理解シ且ツ記憶シ，其ノ要處要處ニ赤線一條ヲ引キ置ケ．

而シテ複雜ナルモノ，又ハ忘レ易キモノハ常ニ其ノ基本或ハ作リ方ヲ記憶シ，此等ノ箇所ニハ赤線二條ヲ引キ置クベシ．

例ヘバ公式 $\sin(90^\circ+A)=\cos A$ 等ハ餘角ノ，$\sin(180^\circ+A)=-\sin A$ 等ハ補角ノ，二倍角三倍角ノ公式ハ和角ノ，半角ノ公式ハ二倍角ノ，(A，B式)，(S，D式)ハ和角ノ，半角ト邊ノ公式ハ半角ノ，公式ヨリ直チニ得ルガ如シ．

第二條 受驗前ノ十日間ヲ次ノ如ク配當シテ勵行セヨ．

(1) 最初ハ三日間ニ赤線二條ノ箇所ヲ省ブキテ總復習ヲセヨ．
此際ハ勿論，後ノ複習ニモ赤線一條ノ箇所ヲ特ニ留意セヨ．

(2) 次ハ三日間ニ赤線二條ノ箇所ヲモ加ヘテ總復習ヲセヨ．

(3) 次ハ二日間ニ之ヲ綜合的ニ自問自答セヨ．

例ヘバ恒等式ノ證明法，和差角ノ公式，倍角及ビ半角ノ公式，(A,B式)，(S,D式)，三角形ノ角ノ關係，三角形ノ邊ト角ノ關係，三角形ノ面積，三角形ノ解法，測量ノ公式，三角方程式ノ解法，消去法ニハ夫々幾種類アリテ夫々如何ナリシカ，又此等ノ中ノ難問ノ考ヘ方ハ如何ナリシカ，等ノ如シ．

此際ハ忘レタル箇所ハ自作ヲ試ムベシ．

(4) 次ハ一日ニ之ヲ亦タ綜合的ニ自問自答セヨ．

(5) 最後ノ一日即チ受驗ノ前日ハ唯々受驗要具ヲ整ヘ置ク位ニシテ，專ラ心身ヲ休養セヨ．

（苦ミアレバ樂ミアリ）

受驗臨場ノ心得

指定ノ場所ニハ少ナクモ十五分前ニ到着シテ精神ヲ安靜ナラシメ置クヲ肝要トス.

1. 臨場ノ上ハ及落ノ念ヲ斷チテ沈着ニ構ヘヨ.

已ニ臨場シタル以上ハ心配シタレバトテ出來ル丈ケシカ出來ザルコヱ, 須ラク及落ノ念ヲ斷チあせらず, あわてず恰モ自修スルガ如ク落付キ構フベシ.

2. 恐ルルニ及バザルモ侮ル勿レ.

問題ガ六ケ敷ケレバ受驗者全體ガ不成績ナルコヱ敢テ恐ルルニ足ラザルモ, 問題ガ平易ナレバ誰モ出來ルコヱ此時ハ一層ノ精力ヲ注ガザレバ衆ニ冲デ難キニヨリ決シテ侮ル勿レ.

3. 質問スベカラズ.

質問シタトテ試驗官ハ答ヘヌガ通例ニシテ, 只其人ノ學力不足ヲ自白スルニ過ギズ.

4. 數字ヲ讀ミ違ヘヌ樣ニセヨ.

題文ヲ讀ミ違ヘル輩ハ論外ナレドモ, 急イデ數字ヲ見違ヘタリ又ハ見落シタリシテ演算ニ困難ヲ來シ時間ヲ空費シテ失敗ヲ招クノ例ハ少ナカラズ, 能ク注意スベシ.

尙ホ計算違ヒハ平生ノ熟不熟ニ依ルモ, 位違ヒ又ハ單位違ヒヲセヌ樣ニ深ク注意セヨ.

5. 題意ヲ悟ラザル答案ハ答案ニアラズ.

例ヘバ計算問題ニ明文ナシトテ只結果ノミヲ記スルモ其答案トハナラズ, 況ンヤ算術問題ヲ代數ニテ解キ, 又幾何問題ヲ三角法ニテ解キタルニ於テオヤ.

6. 易題ヲ先キニシ難題ヲ後ニセヨ.

答案ヲ作成スルニハ先ヅ全體ノ問題ヲ通讀シテ少シニテモ心當リノアル問題ヲ先キニ解キ, 然ル後ヲ時間ノアラン限リ難題ニ全力ヲ注グベシ.

7. 五問ニ粗ナランヨリハ四問ニ密ナレ.

五問トモ不殘粗漏ニ解クヨリハ四問ヲ完全ニ解クベシ. 五問ノ中ヲ三問出來レバ已ニ及第點ダケハアルニアラズヤ. 併シ幾何三問ノトキ平面ノミ二題解キタリトテ及第點ハ覺束ナシ.

8. 答案ハ繁ニ亘ランヨリモ寧ロ簡ニ失セヨ.

答案ハ試驗官ノ檢査ヲ受クルモノコヱ冗長ニ亘ラズシテ簡明ニ要領ヲ得ルコトヲ主トスベシ.

9. 筆蹟ハ一目整然タルヲ要ス.

字ノ下手ハ仕方ナキモ, 答案ハ極メテ丁寧ニ見易ク分リ易キ樣ニ認ムベシ. 假令理論ハ正シクトモ自分ニサヘ分リ兼ヌル樣ナ答案ハ見捨テラルルガ常ナリ.

10. 答案ハ調査ノ上呈出セヨ.

早クニ答案ヲ出シタレバトテ得點ニハ何等ノ影響アルニアラズ, 與ヘラレタル時間中ハ已得ノ權限内ナルヲ以テ, 此間ハ落附テ答案ヲ少クトモ一度ハ必ズ調ベタル上ニテ差出スベシ.

受驗臨場ノ心得

指定ノ場所ニハ少ナクモ十五分前ニ到着シテ精神ヲ安靜ナラシメ置クヲ肝要トス.

1. 臨場ノ上ハ及落ノ念ヲ斷チテ沈着ニ構ヘヨ.

既ニ臨場シタル以上ハ心配シタレバトテ出來ル丈ケシカ出來ザルユヱ, 須ラク及落ノ念ヲ斷チあせらず, あわてず恰モ自修スルガ如ク落付キ構フベシ.

2. 恐ルルニ及バザルモ侮ル勿レ.

問題ガ六ケ敷ケレバ受驗者全體ガ不成績ナルユヱ敢テ恐ルルニ足ラザルモ, 問題ガ平易ナレバ誰モ出來ルユヱ此時ハ一層ノ精力ヲ注ガザレバ衆ニ[illegible]ヨリ決シテ侮ル勿レ.

3. 質問スベカラズ.

質問セシトテ試驗官ハ答ヘヌガ通例ニシテ, 只其人ノ學力不足ヲ自白スルニ過ギズ.

4. 數字ヲ讀ミ違ヘヌ樣ニセヨ.

題文ヲ讀ミ違ヘル事ハ論外ナレドモ, 急イデ數字ヲ見違ヘタリ又ハ見落シタリシテ演算ニ困難ヲ來シ時間ヲ空費シテ失敗ヲ招クノ例ハ少ナカラズ, 能ク注意スベシ.

尙ホ計算違ヒハ平生ノ熟不熟ニ依ルモ, 位違ヒ又ハ符號違ヒヲセヌ樣ニ深ク注意セヨ.

5. 題意ヲ悟ラザル答案ハ答案ニアラズ.

例ヘバ計算問題ニ問文ナ[illegible]トテ只結果ノミヲ記スルモ其答案トハナラズ, 況ンヤ幾何問題ヲ代數ニテ解キ, 又幾何問題ヲ三角法ニテ解キタルニ於テヲヤ.

6. 易題ヲ先キニシ難題ヲ後チニセヨ.

答案ヲ作成スルニハ先ヅ全體ノ問題ヲ通讀シテ少シニテモ心當リノアル問題ヲ先キニ解キ, 然ル後ヲ時間ノアラン限リ難題ニ全力ヲ注グベシ.

7. 五問ニ粗ナランヨリハ四問ニ密ナレ.

五問ト[illegible]ニ解クヨリハ四問ヲ完全ニ解クベシ. 五問ノ中ニテ[illegible]出來レバ已ニ及第點ガ[illegible]アラズヤ. [illegible]

8. 答案ハ繁ニ亘ランヨリモ寧ロ簡ニ失セヨ.

答案ハ試驗官ノ檢査ヲ受ク[illegible]簡明ニ要領ヲ得ルコトヲ主トスベシ.

9. 筆蹟ハ一目瞭然タルヲ要ス.

字ノ下手ハ仕方ナキモ, 答案ハ極メテ丁寧ニ見易ク分リ易キ樣ニ認ムベシ. 假令理論ハ正シクテモ自分ニサヘ分ラヌ程ノ答案ハ[illegible]

10. 答案ハ調査ノ上早出セヨ.

早ク答案ヲ出スコトハ[illegible]影響アルモノニアラズ. [illegible]時間中ハ已得ノ[illegible]

平面三角法ノ部 目次

第一編

第二編

第三編

第四編

第五編

平面三角法ノ部

第一編

緒論

1. 三角法 トハ角ノ三角函數ト稱スルモノヽ性質及ビ關係ヲ代數學的ニ研究シ,兼テ之ガ應用ヲ講ズルモノナリ.

注意. 三角法ハ平面及ビ球面ニ就テ論ズルニ從ヒ,平面三角法及ビ球面三角法ト云フ.

2. 測角法 角ヲ測ルニハ直角ヲ單位トスレドモ之ヨリモ小ナル角ヲ測ル爲メニ六十分法ヲ用フ,其組織ハ次ノ如シ,

1 直角ヲ 90 等分シ其一部ヲ一度ト稱シ,符號 ° ヲ用ヒ,

1 度ヲ 60 等分シ其一部ヲ一分ト稱シ,符號 ′ ヲ用ヒ,

1 分ヲ 60 等分シ其一部ヲ一秒ト稱シ,符號 ″ ヲ用フ.

例ヘバ 37 度 42 分 25.8 秒ハ $37^\circ 42' 25''.8$ ト記スガ如シ.

注意. 此法ハ星學,航海,測量等ノ如キ實地ノ計算ニ用ヒラル.

3. 角ノ單位ノ變更 或ル角ヲ直角單位或ハ六十分法ノ何レカ一法ニテ表示サルヽトキハ,之ヲ他ニ換算スルコトヲ得ベシ.

例 (1) 1.234 直角ヲ六十分法ニテ示セ. 答 $111^\circ 3' 36''$.

〔解〕 $1.234\hat{R} = 90^\circ \times \frac{1234}{1000} = 111^\circ \frac{6}{100}$, $60' \times \frac{6}{100} = 3' \frac{60}{100}$, $60'' \times \frac{60}{100} = 36''$.

例 (2) $205^\circ 36' 17''$ ヲ直角單位ニテ表ハセ. 答 2.285 直角弱.

〔解〕 $205^\circ 36' 17'' = \frac{205 \times 60 \times 60 + 36 \times 60 + 17}{90 \times 60 \times 60}$ 直角 $= 2.2845 \ldots\ldots$ 直角.

問題及ビ解答

1. (a) 正 n 邊形ノ一邊ガ其外接圓ノ周上ノ一點ニ對スル角ハ幾度ナルカ. 答 $180^\circ/n$.

主ナル公式集

注意 次ノ公式ハ常ニ熟知スルヲ要ス. 其他ハ自修ノ際ニ成ルベク多ク暗誦セヨ

$\sin A \operatorname{cosec} A = 1$, $\cos A \sec A = 1$, $\tan A \cot A = 1$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\sin(2n.180^\circ + A) = \sin A$, $\cos(2n.180^\circ + A) = \cos A$

$\sin(-A) = -\sin A$, $\cos(-A) = \cos A$

$\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$

$\sin(180^\circ - A) = \sin A$, $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}, \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$

$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B$

$\sin S + \sin D = 2\sin\dfrac{S+D}{2}\cos\dfrac{S-D}{2}$

$\sin S - \sin D = 2\cos\dfrac{S+D}{2}\sin\dfrac{S-D}{2}$

$\cos S + \cos D = 2\cos\dfrac{S+D}{2}\cos\dfrac{S-D}{2}$

$\cos S - \cos D = -2\sin\dfrac{S+D}{2}\sin\dfrac{S-D}{2}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad a = b\cos C + c\cos B, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}, \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S}.$$

$\sin\theta = a$ ノ解ハ $\theta = n\pi + (-1)^n a$, $\cos\theta = a$ ノ解ハ $\theta = 2n\pi \pm a$,

$\tan\theta = a$ ノ解ハ $\theta = n\pi + a$. 但シ a ハ最小角ナリ.

平面三角法ノ部

第一編

緒論

1. 三角法 トハ角ノ三角函數ト稱スルモノノ性質及ビ關係ヲ代數學的ニ研究シ,兼テ之ガ應用ヲ講ズルモノナリ.

注意. 三角法ハ平面及ビ球面ニ就テ[illegible]平面三角法及ビ球面三角法ト云フ.

2. 測角法 角ヲ測ルニハ直角ヲ單位トスレドモ之ヨリモ小ナル角ヲ測ル爲メニ六十分法ヲ用フ. 其組織ハ次ノ如シ.

1直角ヲ90等分シ其一部ヲ一度ト稱シ,符號 ° ヲ用ヒ.

1度ヲ60等分シ其一部ヲ一分ト稱シ,符號 ′ ヲ用ヒ.

1分ヲ60等分シ其一部ヲ一秒ト稱シ,符號 ″ ヲ用フ.

例ヘバ37度42分25.8秒ハ37°42′25.″8ト記ス如シ.

注意. 此法ハ星學,航海,測量等ノ如キ實地ノ計算ニ用ヒラル.

3. 角ノ單位ノ變更 或ル角ヲ直角單位或ハ六十分法ノ何レカ一法ニテ表示サルルトキハ,之ヲ他ニ換算スルコトヲ得ベシ.

例(1) 1.234直角ヲ六十分法ニテ示セ. 答 111°3′36″

解. $1.234R = 90^\circ \times \frac{1234}{1000} = 111\frac{6}{100}{}^\circ$, $60' \times \frac{6}{100} = 3\frac{60}{100}{}'$, $60'' \times \frac{60}{100} = 36''$

例(2) 205°36′17″ヲ直角單位ニテ表ハセ. 答 2.285直角弱.

解. $205^\circ 36' 17'' = \frac{205\times60\times60+36\times60+17}{90\times60\times60}$ 直角 $= 2.2845$ … 直角.

問題及ビ解答

1. (1) 正八邊形ノ一邊ガ其外接圓ノ周上ノ一點ニ對スル角ハ幾度ナルカ. 答 [illegible]

(*b*) 正七角形及ビ正十三角形ノ一角ハ夫々何度ナリヤ.

答 $128°34'17''\frac{1}{7}$, $152°18'27''\frac{9}{13}$.

(*c*) 正多角形ノ一外角ガ六十度ナラバ, 其邊數幾何. 答 六.

〔略解〕 (*b*), (*c*) 正 n 邊形ノ一內角 $=\frac{(n-2)}{n}.2\hat{R}=\frac{(n-2).180°}{n}$ ニ依ル.

2. 半徑ト等長ナル弧ニ對スル圓心角ヲ六十分法ニテ表ハセ.

〔解〕 圓ノ半徑ヲ r トシ, 所要ノ角ノ度數ヲ x トセバ

圓心角ハ其對弧ニ比例ス〔∵ 平幾〕ルヲ以テ

$360°:x=2r\pi:r$ ∴ $x=\frac{360°.r}{2r\pi}=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{180°}{3.1416}=57°17'44''.8$

3. 二時三十四分五十六秒ノ時刻ニ於ケル時計ノ長短兩針ノ交角ヲ六十分法ニテ表ハセ.

〔解〕 長針ト短針トノ速サノ比ハ $60:5=12:1$ ナルヲ以テ,

兩針間ノ時限 $=34^m56^s-\left(5^m\times2+34^m56^s\times\frac{1}{12}\right)=\frac{991^m}{45}$,

然ルニ 60^m ニ對應スル角ハ $360°$ ナルユヱ,

所要ノ度數 $=\frac{991}{45}\times\frac{360°}{60}=132°\frac{2}{15}=132°8'$.

4. (*a*) 三角形ノ三ツノ角ヲ夫々 $1°$, $100'$, $10000''$ ナル單位ニテ測リタル數値ガ $2:1:3$ ナラバ, 各角ノ度數幾何.

(*b*) 三角形ノ各角ヲ順次ニ單位トシテ他ノ二角ノ和ヲ度リシ數値ガ等差級數ヲナストキハ, 元形ノ各角ハ調和級數ヲナス.

〔略解〕 (*a*) 第一, 第二角ノ度數ヲ夫々 x, y トセバ題意ニ依テ次ノ方程式ヲ得,

卽チ $\frac{x\div1}{2}=\frac{60y\div100}{1}=\frac{60\times60\{180-(x+y)\}\div10000}{3}$ 是ヨリ $\frac{x}{2}=\frac{3y}{5}$

及ビ $\frac{3y}{5}=\frac{3\{180-(x+y)\}}{25}$ 之ヲ解ク. 答 $30°$, $25°$, $125°$.

(*b*) 第一, 第二, 第三角ノ度數ヲ夫々 x, y, z 且ツ $x>y>z$ トセバ

$x+y+z=180°$ ナルユヱ題意ニ依テ $\frac{180-x}{x}+\frac{180-z}{z}=2\frac{180-y}{y}$

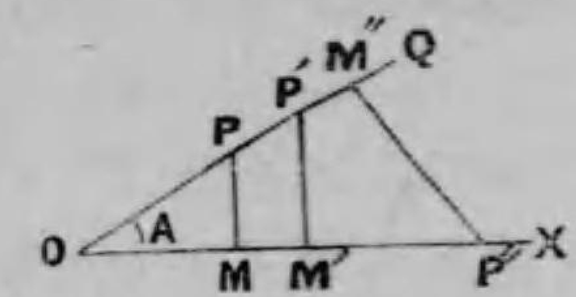
卽チ $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$, 故ニ x, y, z ハ調和級數ヲナス.

第一章

鋭角ノ三角函數

4. 鋭角ノ三角函數ノ定義

任意ノ鋭角 A ノ一邊 OQ 上ニ P 點ヲ取リ之ヨリ他ノ邊 OX ヘ垂線 PM ヲ下セバ, $\hat{A}$ ニ關シテ (i) 直角ノ對邊 OP ヲ斜邊ト云ヒ,



(ii) 其角ノ對邊 MP ヲ垂線ト云ヒ,

(iii) 其角ノ隣邊 OM ヲ底邊ト云フ.

而シテ此三線 OP, MP, OM ヲ二ツ宛取リタル比ニ次ノ如ク命名ス,

(1) $\frac{垂線}{斜邊}$ 卽 $\frac{MP}{OP}$ ヲ $\hat{A}$ ノ正弦 (*sine*) ト云ヒ, 之ヲ $\sin A$ ト記シ,

(2) $\frac{底邊}{斜邊}$ 卽 $\frac{OM}{OP}$ ヲ $\hat{A}$ ノ餘弦 (*cosine*) ト云ヒ, 之ヲ $\cos A$ ト記シ,

(3) $\frac{垂線}{底邊}$ 卽 $\frac{MP}{OM}$ ヲ $\hat{A}$ ノ正切 (*tangent*) ト云ヒ, 之ヲ $\tan A$ ト記シ,

(4) 上ノ (3) ノ逆比ヲ $\hat{A}$ ノ餘切 (*cotangent*) ト云ヒ, 之ヲ $\cot A$ ト記シ,

(5) 上ノ (2) ノ逆比ヲ $\hat{A}$ ノ正割 (*secant*) ト云ヒ, 之ヲ $\sec A$ ト記シ,

(6) 上ノ (1) ノ逆比ヲ $\hat{A}$ ノ餘割 (*cosecant*) ト云ヒ, 之ヲ $\operatorname{cosec} A$ ト記ス.

此六ツノ比ヲ總稱シテ $\hat{A}$ ノ三角函數又ハ圓函數ト云フ.

注意. (1) $\tan A$ 及ビ $\cot A$ ハ又 $tg A$ 及ビ $cotg A$ トモ記ス.

(2) $\sin A$, 等ハ $\hat{A}$ ニ屬スル比ノ記號ナルユヱ $\sin$, 等ト A トヲ分離スベカラズ. 例ヘバ $\sin A+\sin B$ ハ A ノ正弦ト B ノ正弦トノ和ニシテ, A+B ノ正弦 卽チ $\sin(A+B)$ ニハ等シカラズ.

(3) $(\sin A)^2$, $(\tan A)^3$, 等ハ略シテ $\sin^2 A$, $\tan^3 A$, 等ト記ス.

(4) 一角ノ三角函數ハ邊ノ長短ニ關係セズ. 何トナレバ上圖ニ於テ $\triangle OPM\backsim\triangle OP'M'\backsim\triangle OP''M''$ ナルヲ以テ $\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{M''P''}{OP''}$ ニシテ此各々ハ何レモ $\sin A$ ノ數値ナリ.

問題及ビ解答

1. 前圖ニ於テ $tan A=\frac{11}{3}$, $OM=\frac{27}{11}$ ナラバ, OP ノ値幾何.

〔解〕 $\frac{11}{3}=tan A=MP/\frac{27}{11}$　$\therefore\ MP=\frac{11}{3}\times\frac{27}{11}=9$,

$\therefore\ OP=\sqrt{(\overline{MP}^2+\overline{OM}^2)}=\sqrt{\left\{9^2+\left(\frac{27}{11}\right)^2\right\}}=\frac{9}{11}\sqrt{130}$.

2. (a) 直三角形ノ一鋭角ノ正切ガ 0.75 ニシテ其周圍ガ 12 寸ナラバ, 斜邊ハ何寸ナルカ.　答 5寸.　(海兵)

(b) 三角形ノ三邊ガ $1:2:\sqrt{5}$ ナラバ最小角ノ正弦, 正切, 正割ノ値如何.　答 最小角ヲAトセバ $sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $tan A=\frac{1}{2}$, $sec A=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

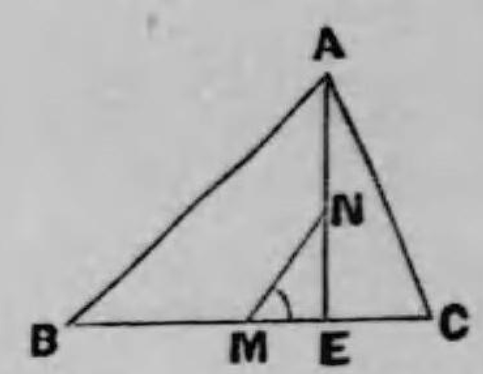
3. △ABC ノ邊 BC ノ中點 M ト A ヨリ BC ヘノ垂線 AE ノ中點 N トヲ結ビ付ケタル直線 MN ト BC トノ爲ス角ヲ θ トセバ次ノ證如何, $cot\theta=cot B\sim cot C$.　(名工)

〔解〕 AB>AC トセバ 直△ABE, △ACE ニ於テ

$BE=AE\,cot B$ 及ビ $CE=AE\,cot C$

故ニ $BE-CE=AE(cot B-cot C)$

$\therefore\ cot B-cot C=\frac{BE-CE}{AE}=\frac{2ME}{2EN}=\frac{ME}{EN}=cot\theta$.



又 AB<AC トセバ前ト同様ニ $cot\theta=cot C-cot B$.

故ニ題言ノ如シ.

4. 直線 AD ヲ點 B, C ニ於テ三等分シ BC ヲ直徑トスル半圓周上ニ點 P ヲ取レバ $tan APB.tan DPC=\frac{1}{4}$ ナリ.

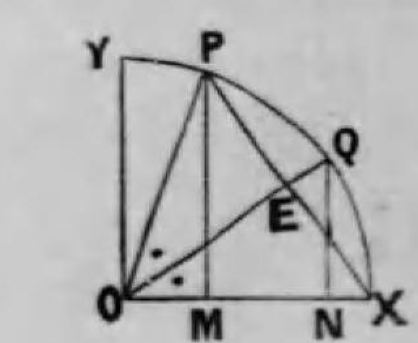
〔略解〕 CE//BP, BF//CP トセバ $CE \underline{\measuredangle} \frac{1}{2}BP$, $BF \underline{\measuredangle} \frac{1}{2}CP$ 且ツ $B\hat{P}C=\hat{R}$.

5. (a) A ガ鋭角ナラバ $sin A+cos A>1$ ナリ.

(b) A, 2A ガ何レモ 90° ヨリモ小ナラバ $2sin A>sin 2A$ ナリ.

〔解〕 (b) 四分圓 XOY ニ於テ $X\hat{O}Q=Q\hat{O}P=\hat{A}$ トシ, OX ニ垂線 PM, QN ヲ下シ PX ト OQ トノ交點ヲ E トセバ 直△OQN≡△OXE, 從テ QN=EX.

又 OE⊥OQ ナルヲ以テ EX=EP.



$\therefore\ 2sin A=2\frac{NQ}{OQ}=\frac{PX}{OQ}=\frac{PX}{OP}$,

又 $sin 2A=\frac{MO}{OP}$. 然ルニ PX>PM.　$\therefore\ 2sin A>sin 2A$.

5. 三角函數相互ノ關係

〔第一〕 相乘關係ノ定理

$$\left.\begin{aligned} sin A.cosec A&=1\\ cos A.sec A&=1\\ tan A.cot A&=1\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

〔證明〕 ハ定義ヨリ直チニ得ラルベシ.

〔第二〕 相除關係ノ定理

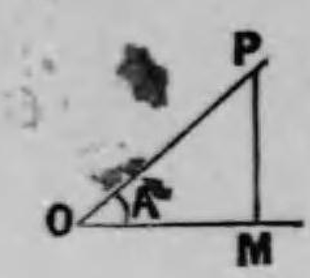
$$\left.\begin{aligned} tan A&=\frac{sin A}{cos A}\\ cot A&=\frac{cos A}{sin A}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

〔證明〕 $tan A=\frac{MP}{OM}=\frac{MP\div OP}{OM\div OP}=\frac{sin A}{cos A}$, 其他ハ之ニ倣フ.

〔第三〕 平方關係ノ定理　(海兵)

$$\left.\begin{aligned} sin^2A+cos^2A&=1\\ 1+tan^2A&=sec^2A\\ 1+cot^2A&=cosec^2A\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

〔證明〕 直△OPM ニ於テ $P\hat{O}M=\hat{A}$, $\hat{M}=\hat{R}$ トセバ



$sin^2A+cos^2A=\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2=\frac{\overline{MP}^2+\overline{OM}^2}{\overline{OP}^2}=1$,

又 $1+tan^2A=1+\left(\frac{MP}{OM}\right)^2=\frac{\overline{OM}^2+\overline{MP}^2}{\overline{OM}^2}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}=sec^2A$,　其他ハ之ニ倣フ.

注意. 上ノ公式ハ屢々次ノ如ク變形シテ利用スルコトアリ,

卽チ (1) ヨリ $sin A$ ト $cosec A$, $cos A$ ト $sec A$, $tan A$ ト $cot A$ ハ互ニ逆數ナリ.

又 (3) ヨリ $\begin{cases}sin^2A=1-cos^2A\\ cos^2A=1-sin^2A\end{cases}$　$\begin{cases}tan^2A=sec^2A-1\\ cot^2A=cosec^2A-1\end{cases}$　$\begin{cases}sec^2A-tan^2A=1\\ cosec^2A-cot^2A=1\end{cases}$

從テ $\begin{cases}sin A=\sqrt{1-cos^2A}\\ cos A=\sqrt{1-sin^2A}\end{cases}$　$\begin{cases}tan A=\sqrt{sec^2A-1}\\ cot A=\sqrt{cosec^2A-1}\end{cases}$

元來根號ノ前ニハ複號 ± ヲ附スルノ必要アルモ鋭角ノ三角函數ハ凡テ正ナルヲ以テ茲ニハ負號ーヲ棄ツベシ.

6. 恒等式ノ證明法

前條ノ諸定理ニ依テ三角函數ヲ含メル恒等式ヲ證明シ得ベシ，其方法ヲ次ニ示サン.

〔第一〕 恒等式ノ一邊ヲ他ノ一邊ニ變形スル方法.

此法ヲ用フルニハ複雜ナル一邊ヲ變形シテ他ノ一邊ニ變形スルヲ得策トス，但シ通例ハ左邊ヨリ右邊ニ誘導ス.

〔第二〕 恒等式ノ兩邊ヲ夫々變ジテ結果ヲ等形ニスル方法.

〔第三〕 第一，第二法ヲ用フルニ當リ sin ト cos ノミノ項ニ變ズル法.

之レ或ハ簡單ナラザルモ思考ヲ要スルコト少ナク，概シテ容易ナリ，特ニ第二法ニ於テハ最モ然リトス.

〔第四〕 已知ノ關係式ヨリ所設ノ式ニ誘導スル方法.

玆ニ已知ノ關係式トハ已知ノ公式及ビ其變形ヲ指スモノトス.

注意. 上ノ四法中何レニ依ルモ理論ニ於テハ些ノ優劣ナシ. 然レドモ第一法ニ於テハ但シ書キノ法ヲ用フルヲ慣例トス.

而シテ第三法ハ一般ニ適用シ得ベシ，然ルニ第四法ハ頗ル簡潔ナルモ之ニ適スル問題ハ極メテ少數ナリ.

問題及ビ解答

次ノ 1 乃至 20 ヲ夫々證明セヨ，

1. (a) $cosecA - sinA = cotA.cosA.$ (b) $secA - cosA = tanA.sinA.$

(c) $cotA + tanA = secA.cosecA.$ (商船，海兵，海機)

〔證明〕 (c) 左邊$=\dfrac{cosA}{sinA}+\dfrac{sinA}{cosA}=\dfrac{cos^2A+sin^2A}{sinA.cosA}=\dfrac{1}{sinA.cosA}=cosecA.secA.$

2. (a) $tan^2A - sin^2A = tan^2A.sin^2A.$ (b) $cot^2A - cos^2A = cot^2A.cos^2A.$

(c) $sec^2A + cosec^2A = sec^2A.cosec^2A.$ (商船)

〔證明〕 (a) 左邊$=\dfrac{sin^2A}{cos^2A}-sin^2A=sin^2A\left(\dfrac{1}{cos^2A}-1\right)=sin^2A.(sec^2-1)=sin^2A.tan^2A.$

或ハ 左邊$=tan^2A(1-cos^2A)=tan^2A.sin^2A.$

3. $sin^2A.cos^2B - cos^2A.sin^2B = sin^2A - sin^2B.$

〔略解〕 左邊ニ於ケル cos ヲ sin ニ變ズ.

4. (a) $\dfrac{tan\alpha}{tan\alpha - tan\beta}=\dfrac{cot\beta}{cot\beta - cot\alpha}.$ (b) $\dfrac{cotA+tanB}{tanA+cotB}=cotA.cotB.$

〔略解〕 第三法ニ依ル. 或ハ

(a) ハ左邊ノ各項ヲ其逆數ニ變ズルヲ最簡トス.

(b) ハ左邊ノ分母ノミヲ其逆數ニ變ズルヲ最簡トス.

5. (a) $sec^2A.cosec^2A = tan^2A + cot^2A + 2.$ 〔∵ 公式 (3)〕

(b) $sin^2A.tan^2A + cos^2A.cot^2A = tan^2A + cot^2A - 1.$

(c) $sin^2A.tanA + cos^2A.cotA + 2sinA.cosA = tanA + cotA.$

〔證明〕 (b) 左邊$=(1-cos^2A)tan^2A+(1-sin^2A)cot^2A$

$=tan^2A-sin^2A+cot^2A-cos^2A=tan^2A+cot^2A-1.$

6. (a) $(secA + cosecA)^2 \div (sec^2A + cosec^2A) = 1 + 2sinA.cosA.$

(b) $cot^2\theta.\dfrac{sec\theta - 1}{1+sin\theta} + sec^2\theta.\dfrac{sin\theta - 1}{1+sec\theta} = 0.$

〔證明〕 (b) 左邊$=\dfrac{1}{tan^2\theta}.\dfrac{sec\theta-1}{1+sin\theta}+\dfrac{1}{cos^2\theta}.\dfrac{sin\theta-1}{1+sec\theta}$

$=\dfrac{1}{sec^2\theta-1}.\dfrac{sec\theta-1}{1+sin\theta}+\dfrac{1}{1-sin^2\theta}.\dfrac{sin\theta-1}{1+sec\theta}$

$=\dfrac{1}{sec\theta+1}.\dfrac{1}{1+sin\theta}-\dfrac{1}{1+sin\theta}.\dfrac{1}{1+sec\theta}=0.$

7. (a) $sinA(1 + tanA) + cosA(1 + cotA) = secA + cosecA.$ (仙工，北農，新醫)

(b) $(sinA + cosA)(tanA + cotA) = secA + cosecA.$

(c) $(cos^2A + cot^2A)tan^2A = sec^2A + (cos^2A - 1)tan^2A.$

〔證明〕 (a), (b) ハ第一法ニ依ル，(c) ハ第二法ニ依ル，或ハ

(a) 左邊$=sin^2A\left(\dfrac{1}{sinA}+\dfrac{1}{cosA}\right)+cos^2A\left(\dfrac{1}{cosA}+\dfrac{1}{sinA}\right)$

$=sin^2A(cosecA+secA)+cos^2A(sec^2A+cosec^2A)$

$=(sin^2A+cos^2A)(secA+cosecA)=secA+cosecA.$

(c) 左邊$=cos^2A.tan^2A+1=cos^2A.tan^2A+(sec^2A-tan^2A)=sec^2A+(cos^2A-1)tan^2A.$

8. (a) $(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta)$. （商船）

(b) $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$. （商船）

(c) $(1+\sin A-\cos A)^2+(1-\sin A+\cos A)^2=4(1-\sin A.\cos A)$.

(d) $(1+\sec A+\tan A)(1+\mathrm{cosec}A+\cot A)$

$$=2(1+\tan A+\cot A+\sec A+\mathrm{cosec}A).$$

(e) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\mathrm{cosec}\theta$. （新醫, 七高）

〔證明〕 考ヘ方　此種ノ題ハ代數ノ乘法公式ヲ利用ス.

(d) 左邊$=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$ 〔$\because\ (a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$〕

$=\dfrac{2\{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{4(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1+\sin\theta)}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\mathrm{cosec}\theta.$

9. $(1+\sin A+\cos A)^2(1-\sin A-\cos A)^2=4\sin^2A.\cos^2A$.

〔證明〕 左邊$=\{1+(\sin A+\cos A)\}^2\{1-(\sin A+\cos A)\}^2$

$=\{1^2-(\sin A+\cos A)^2\}^2$ 〔$\because\ (a+b)^2(a-b)^2=\{a^2-b^2\}^2$〕

$=\{1-\sin^2A-2\sin A.\cos A-\cos^2A\}^2=\{-2\sin A.\cos A\}^2=4\sin^2A.\cos^2A.$

10. (a) $(\tan A-\sin A)^2+(1-\cos A)^2=(\sec A-1)^2$.

(b) $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\mathrm{cosec}A)^2=(1+\sec A.\mathrm{cosec}A)^2$.

(c) $(\sec A+\mathrm{cosec}A)^2=(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2$.

〔證明〕 (a) 左邊$=(\tan^2A-2\tan A.\sin A+\sin^2A)+(1-2\cos A+\cos^2A)$

$=(1+\tan^2A)-2(\tan A.\sin A+\cos A)+(\sin^2A+\cos^2A)$

$=\sec^2A-2\dfrac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos A}+1=\sec^2A-2\sec A+1=(\sec A-1)^2.$

或ハ 左邊$=\sin^2A\left(\dfrac{1}{\cos A}-1\right)^2+\cos^2A\left(\dfrac{1}{\cos A}-1\right)^2=\sin^2A(\sec A-1)^2+\cos^2A(\sec A-1)^2$

$=(\sin^2A+\cos^2A)(\sec A-1)^2=(\sec A-1)^2.$

11. 直三角形ノ二邊ガ $2(1+\sin\theta)+\cos\theta$ 及ビ $2(1+\cos\theta)+\sin\theta$ ナラバ斜邊ハ $3+2(\sin\theta+\cos\theta)$ ナルコトヲ證セ.

〔略解〕 第一, 第二式ノ平方ノ和ヲ第三式ノ平方ニ誘導セヨ.

12. (a) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta.\cos^2\theta$. 〔$\because\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$〕

(b) $\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta=1-\sin^2\theta.\cos^2\theta$. 〔$\because\ a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$〕

(c) $\sin^4\theta-\sin^2\theta.\cos^2\theta+\cos^4\theta=1-3\sin^2\theta.\cos^2\theta$. 〔$\because\ a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$〕

13. $\dfrac{\tan^3A}{1+\tan^2A}+\dfrac{\cot^3A}{1+\cot^2A}=\dfrac{1-2\sin^2A.\cos^2A}{\sin A.\cos A}$.

〔證明〕 左邊$=\dfrac{\tan^3A}{\sec^2A}+\dfrac{\cot^3A}{\mathrm{cosec}^2A}=\dfrac{\sin^3A}{\cos A}+\dfrac{\cos^3A}{\sin A}=\dfrac{\sin^4A+\cos^4A}{\sin A.\cos A}$, 以下前題(a)ニ倣フ.

14. (a) $\cos^8\theta-\sin^8\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta.\cos^2\theta)$.

〔$\because\ a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)\{(a+b)^2-2ab\}$〕

(b) $(1-\tan^4A)\cos^2A+\tan^2A=1$.

〔證明〕 (b) 左邊$=(1-\tan^2A)(1+\tan^2A)\cos^2A+\tan^2A$

$=(1-\tan^2A)\sec^2A.\cos^2A+\tan^2A=(1-\tan^2A)\times1+\tan^2A=1.$

15. (a) $\sin^3\theta\pm\cos^3\theta=(\sin\theta\pm\cos\theta)(1\mp\sin\theta.\cos\theta)$.

(b) $1+2(\sin^6A+\cos^6A)=3(\sin^4A+\cos^4A)$. （海兵）

〔證明〕 (a) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ ニ依ル.

(b) 左邊$=1+2\{(\sin^2A)^3+(\cos^2A)^3\}$

$=1+2(\sin^2A+\cos^2A)(\sin^4A-\sin^2A.\cos^2A+\cos^4A)$

$=(\sin^2A+\cos^2A)^2+2\times1\times(\sin^4A+\cos^4A-\sin^2A.\cos^2A)$

$=(\sin^4A+\cos^4A+2\sin^2A.\cos^2A)+2(\sin^4A+\cos^4A-2\sin^2A.\cos^2A)$

$=3(\sin^4A+\cos^4A).$

16. $\sec^6A=1+\tan^6A+3\tan^2A.\sec^2A$.

〔證明〕 $\sec^6A=(\sec^2A)^3=(1+\tan^2A)^3$

$=1^6+\tan^6A+3\tan^2A(1+\tan^2A)$ 〔$\because\ (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$〕

17. (a) $1-\tan^2A+\tan^4A=\cos^2A(1+\tan^6A)$.

(b) $(\sec A-\mathrm{cosec}A)(1+\tan A+\cot A)=\dfrac{\sec^2A}{\mathrm{cosec}A}-\dfrac{\mathrm{cosec}^2A}{\sec A}$.

〔證明〕 (a) 左邊$=(1-\tan^2A+\tan^4A)(1+\tan^2A)\div(1+\tan^2A)$

$=(1+\tan^6A)\div\sec^2A$ 〔$\because\ (a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+b^2)=a^6+b^6$〕

$=\cos^2A(1+\tan^6A).$

(b) 左邊$=\left(\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1+\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)=\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A.\cos A}.\dfrac{\sin A.\cos A+\sin^2A+\cos^2A}{\sin A.\cos A}$

$=\dfrac{\sin^3A-\cos^3A}{\sin^2A.\cos^2A}$ 〔$\because (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$〕

$=\dfrac{\sin A}{\cos^2A}-\dfrac{\cos A}{\sin^2A}=\dfrac{\sec^2A}{\operatorname{cosec}A}-\dfrac{\operatorname{cosec}^2A}{\sec A}.$

18. (a) $\sin^2A(1+n.\cot^2A)+\cos^2A(1+n.\tan^2A)$

$=\sin^2A(n+\cot^2A)+\cos^2A(n+\tan^2A).$

(b) $(2-\cos^2A)(1+2\cot^2A)=(2+\cot^2A)(2-\sin^2A).$

〔證明〕 第三法ニ依ルヲ穩當トス, 卽チ

(a) 左邊$=\sin^2A\left(1+n.\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}\right)+\cos^2A\left(1+n.\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}\right)$

$=\sin^2A+n.\cos^2A+\cos^2A+n.\sin^2A.$

又 右邊$=\sin^2A\left(n+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}\right)+\cos^2A\left(n+\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}\right)$

$=n.\sin^2A+\cos^2A+n.\cos^2A+\sin^2A.$

卽チ 左右兩邊ノ結果相等シキユヱ元恒等式ハ成立ス.

〔別解〕 (a) 左邊$=\sin^2A+n.\sin^2A.\cot^2A+\cos^2A+n.\cos^2A\tan^2A$

$=(\sin^2A+n.\cos^2A)+(\cos^2A+n.\sin^2A)$

$=\cos^2A(\tan^2A+n)+\sin^2A(\cot^2A+n).$

(b) 左邊$=\{2(\sin^2A+\cos^2A)-\cos^2A\}.\dfrac{1}{\sin^2A}(\sin^2A+2\cos^2A)$

$=\{2\sin^2A+\cos^2A\}.\dfrac{1}{\sin^2A}\{\sin^2A+2(1-\sin^2A)\}$

$=(2+\cot^2A)(2-\sin^2A).$

19. (a) $\sec A=1+\dfrac{\tan^2A}{1+\sec A}.$ (b) $2\operatorname{cosec}^2A=1+\operatorname{cosec}^4A-\cot^4A.$

(c) $\sin A.\cos A=\sqrt{\{(\sin A-\sin^3A)^2+(\cos A-\cos^3A)^2\}}.$

〔證明〕 本題ハ右邊ヨリ左邊ニ誘導スレバ容易ナリ.

〔別證〕 (a) $\sec A=1+(\sec A-1)=1+\dfrac{\sec^2A-1}{\sec A+1}=1+\dfrac{\tan^2A}{\sec A+1}.$

(b) $2\operatorname{cosec}^2A=\operatorname{cosec}^2A+\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A+\operatorname{cosec}^2A$

$=1+(\cot^2A+\operatorname{cosec}^2A)\times(\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A)$

$=1+\cot^4A-\operatorname{cosec}^4A.$ 〔$\because$ $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$〕

(c) $\sin A.\cos A=\sqrt{(\sin^2A.\cos^2A)}=\sqrt{\{\sin^2A.\cos^2A(\sin^2A+\cos^2A)\}}$

$=\sqrt{\{\sin^2A.\cos^4A+\cos^2A.\sin^4A\}}=\sqrt{\{\sin^2A(1-\sin^2A)^2+\cos^2A(1-\cos^2A)^2\}}$

$=\sqrt{\{(\sin A-\sin^3A)^2+(\cos A-\cos^3A)^2\}}.$

20. (a) $\tan A+\cot A=\sin^3A.\sec A+\cos^3A.\operatorname{cosec}A+2\sin A.\cos A.$

(b) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}.$ (c) (i) $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2.$ (商船)

(d) (i) $\dfrac{1+\tan A-\sec A}{1-\tan A+\sec A}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}.$ (ii) $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}=(\operatorname{cosec}A+\cot A)^2.$ (鹿農)

(ii) $\dfrac{1+\cot A+\operatorname{cosec}A}{1-\cot A+\operatorname{cosec}A}=\dfrac{\operatorname{cosec}A+\cot A-1}{-\operatorname{cosec}A+\cot A+1}.$

〔證明〕 (a), (b), (d) ハ第四法ニ依テ證明シ得ベシ, 卽チ

(a) 今 $\sin^2A+\cos^2A=1=1^2=(\sin^2A+\cos^2A)^2$

卽チ $\sin^2A+\cos^2A=\sin^4A+\cos^4A+2\sin^2A.\cos^2A$

此雙方ヲ $\sin A.\cos A$ ニテ除スレバ所設ノ恒等式ヲ得.

<u>考ヘ方</u> (b), (d) ハ分母ヲ拂ヒタル式ガ已知ノ恒等式ナルカ否カヲ確メ, 其恒等式ナルトキハ之ヲ元分母ノ乘積ニテ除ス.

(b) 今 $\sin^2A=1-\cos^2A$ 此雙方ヲ $\sin A(1+\cos A)$ ニテ除スレバ所設ノ恒等式ヲ得.

(d) 今 $(1+\tan A)^2-\sec^2A=\sec^2A-(1-\tan A)^2$

此雙方ヲ $(1-\tan A+\sec A)(1+\tan A+\sec A)$ ニテ除スレバ所設ノ恒等式ヲ得.

又 (a), (c) ハ右邊ヨリ左邊ニ誘導スレバ容易ナリ.

〔別解〕 (b) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)}=\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{1-\cos^2A}=\dfrac{\sin A(1-\cos A)}{\sin^2A}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}.$

(c) (i) $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=\dfrac{(1-\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\dfrac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2A}=\left(\dfrac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2=(\sec A-\tan A)^2.$

(d) (i) $\dfrac{1+\tan A-\sec A}{1-\tan A+\sec A}=\dfrac{1+\tan A-\sec A}{1-\tan A+\sec A}\times\dfrac{\sec A+\tan A+1}{\sec A+\tan A-1}\times\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$

$=\dfrac{(1+\tan A)^2-\sec^2A}{\sec^2A-(1-\tan A)^2}\times\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$

$=\dfrac{\sec^2A+2\tan A-\sec^2A}{\sec^2A-\sec^2A+2\tan A}\times\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}=\dfrac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}.$

21. 次式ヲ最簡ニセヨ，

(a) $(\sin A-\operatorname{cosec}A)^2-(\tan A-\cot A)^2+(\cos A-\sec A)^2.$ 　答 1. (商船)

(b) $(\sec x.\sec y+\tan x.\tan y)^2-(\tan x.\sec y+\sec x.\tan y)^2.$ 　答 1. (海機)

(c) $\dfrac{1}{1+\sin^2x}+\dfrac{1}{1+\cos^2x}+\dfrac{1}{1+\sec^2x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2x}.$ 　答 2. (海兵)

(d) $(\tan A+\tan B)(\cot A-\cot B)+(\tan A-\tan B)(\cot A+\cot B).$

(e) $(\operatorname{cosec}A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A).$ 　答 1. (商船)

〔略解〕 (a), (b), (d) ハ括弧ヲ解クベシ. 　(d) 答 0.

(c) ハ sec, cosec ヲ cos, sin ニ變ジ兩外項ト兩內項トヲ括ル.

(e) ハ sin, cos ノ項ニ變ズベシ.

22. (a) $\sin A+\cos A=1.2$ ナルトキハ $\sin^3A+\cos^3A$ ノ値如何. (海機)

(b) $\tan A=\dfrac{a}{b}$ ナルトキ $a.\operatorname{cosec}A+b.\sec A$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) 第一式ノ平方ハ $1+2\sin A.\cos A=1.44,$ 　$\therefore\ \sin A.\cos A=0.22.$

$$\therefore\ \sin^3A+\cos^3A=(\sin A+\cos A)^3-3\sin A.\cos A(\sin A+\cos A)$$
$$=(1.2)^3-3\times0.22\times1.2=0.936.$$

(b) $\tan A=\dfrac{a}{b}$ ヨリ $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{a}{b}$, 故ニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\cos A}.$

$$\therefore\ \frac{a^2}{\sin^2A}=\frac{b^2}{\cos^2A}=\frac{a^2+b^2}{\sin^2A+\cos^2A}=a^2+b^2 \qquad \therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos A}=\sqrt{a^2+b^2},$$

卽チ $a\operatorname{cosec}A=b\sec A=\sqrt{a^2+b^2},$ 　$\therefore\ a\operatorname{cosec}A+b\sec A=2\sqrt{a^2+b^2}.$

23. $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$ ナルトキハ此各々ハ $\pm\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ニ等シ.

〔證明〕 元式ノ兩邊ニ $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)$ ヲ乘ジテ平方ニ開ケバ

$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=\pm\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$ 　故ニ題言ノ如シ.

24. $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ ナラバ $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ ナリ. 　(海機)

〔證〕 第一ヨリ $\sin\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ ヲ得,

$$\therefore\ \cos^4\theta+\cos^2\theta=(\cos^2\theta)^2+\cos^2\theta=(\sin\theta)^2+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1.$$

25. 次式ヲ證明セヨ， 　〔本題ハ難問ニ屬ス〕

(a) $\dfrac{1}{\tan^2A}=\left(\dfrac{\cos B}{\tan C}\right)^2+\left(\dfrac{\sin B}{\tan D}\right)^2$ ナラバ $\dfrac{1}{\sin^2A}=\left(\dfrac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\dfrac{\sin B}{\sin D}\right)^2$ ナリ.

(b) $\dfrac{\cos^4A}{\cos^2B}+\dfrac{\sin^4A}{\sin^2B}=1$ ナラバ $\dfrac{\cos^4B}{\cos^2A}+\dfrac{\cos^4B}{\sin^2A}=1$ ナリ.

〔證〕 考ヘ方 (a) ハ第二式ヲ變形ス〔次ノ解ヲ逆順ニ見ヨ〕レバ第一式ノ雙方ニ $1=\cos^2B+\sin^2B$ ヲ加フベキヲ知ルベシ.

(b) ハ第一ヲ變形シタル結果 (i) ト，第二ヲ變形シタル結果 (ii)〔次ノ解ヲ逆順ニ見ヨ〕トヲ比較シテ「然ルニ」云々ヨリ (ii) ニ變ウタルナリ.

(a) 第一式ヨリ $\cot^2A=\cos^2B.\cot^2C+\sin^2B.\cot^2D,$

而シテ 　$1=\cos^2B+\sin^2B$

相加ヘテ 　$\cot^2A+1=\cos^2B(1+\cot^2C)+\sin^2B(1+\cot^2D)$

卽チ 　$\operatorname{cosec}^2A=\cos^2B.\operatorname{cosec}^2C+\sin^2B.\operatorname{cosec}^2D$

卽チ 　$\dfrac{1}{\sin^2A}=\left(\dfrac{\cos B}{\sin C}\right)^2+\left(\dfrac{\sin B}{\sin D}\right)^2.$

(b) 第一式ヨリ 　$\dfrac{\cos^4A}{\cos^2B}+\dfrac{\sin^4A}{\sin^2B}=1=\sin^2A+\cos^2A$

轉項シテ 　$\cos^2A\left(\dfrac{\cos^2A}{\cos^2B}-1\right)=\sin^2A\left(1-\dfrac{\sin^2A}{\sin^2B}\right)$

卽チ 　$\dfrac{\cos^2A(\cos^2A-\cos^2B)}{\cos^2B}=\dfrac{\sin^2A(\sin^2B-\sin^2A)}{\sin^2B}$ ………………(i)

然ルニ 　$\cos^2A-\cos^2B=\sin^2B-\sin^2A,$

$\therefore$ 　$\dfrac{\cos^2A(\sin^2B-\sin^2A)}{\cos^2B}=\dfrac{\sin^2A(\cos^2A-\cos^2B)}{\sin^2B}$

故ニ 　$\dfrac{\sin^2B(\sin^2B-\sin^2A)}{\sin^2A}=\dfrac{\cos^2B(\cos^2A-\cos^2B)}{\cos^2A}$ ………………(ii)

卽チ 　$\dfrac{\sin^4B}{\sin^2A}-\sin^2B=\cos^2B-\dfrac{\cos^4B}{\cos^2A}$

$$\therefore\ \frac{\sin^4B}{\sin^2A}+\frac{\cos^4B}{\cos^2A}=\sin^2B+\cos^2B=1.$$

7. 三角函數ノ一ヲ知リテ他ヲ求ムル法.

〔第一〕 公式(1)乃至(3)ヲ利用スル法.

〔第二〕 已知函數値卽チ分數(若シ整數或ハ小數ナラバ已約分數トナス)ノ分母子ノ數ヲ直三角形ノ適當ナル二邊ニ配スレバ,第三邊ハぴたごらす定理ニ依テ容易ニ求メ得ベシ. 然ルトキハ三邊已知トナルヲ以テ定義ニ依リ凡テノ函數ヲ記スルコトヲ得.

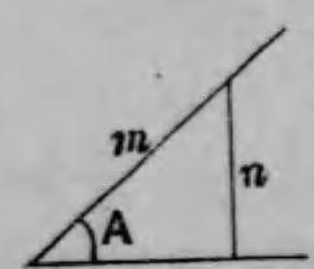
例 (1) $\sin A=\dfrac{n}{m}$ ナルトキ他ノ凡テノ函數ヲ求メヨ.

〔第一解法〕 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{m^2-n^2}{m^2}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$,

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{n}{m}\Big/\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}=\frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}.$$

而シテ $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ガ已知トナラバ $\mathrm{cosec}\,A$, $\sec A$, $\cot A$ ハ夫々前者ノ逆數ナルヲ以テ直チニ記シ得ベシ. 以下皆ナ然リ.

〔第二解法〕 $\hat{A}$ ニ關スル斜邊$=m$ トセバ, 垂線$=n$ ナルユヱ 底邊$=\sqrt{m^2-n^2}$ ナリ.



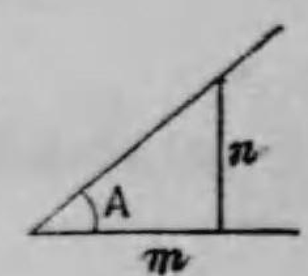
$\therefore\ \cos A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$, $\tan A=\dfrac{\text{垂線}}{\text{底邊}}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

例 (2) $\tan A=\dfrac{n}{m}$ ナルトキ他ノ凡テノ函數ヲ求メヨ.

〔第一解法〕 $\sin A=\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\,A}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}=\dfrac{\tan A}{\sqrt{\tan^2 A+1}}=\dfrac{n}{m}\Big/\sqrt{\left(\dfrac{n}{m}\right)^2+1}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$,

$\cos A=\dfrac{1}{\sec A}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=1\Big/\sqrt{1+\left(\dfrac{n}{m}\right)^2}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$, 以下同上.

〔第二解法〕 $\hat{A}$ ニ關スル底邊$=m$ トセバ, 垂線$=n$ ナルユヱ 斜邊$=\sqrt{m^2+n^2}$ ナリ.



$\therefore\ \sin A=\dfrac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\cos A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

注意 根號ハ銳角ノ場合ニハ正ノミニテ充分ナリ,然レドモ其斷リ無キ場合ニハ一般角トシテ解スルヲ正確トス〔23頁2題ノ如シ〕. 但シ次ノ問題ニ於テハ角 A, θ 等ハ銳角トシテノ解ヲ示ス.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) $(\sec A-\tan A)^2$ ヲ $\sin A$ ノ項ニテ示セ. 答 $(1-\sin A)/(1+\sin A)$.

(b) $1-\tan^4 A$ ヲ $\cos A$ ノ項ニテ示セ. 答 $(2\cos^2 A-1)/\cos^4 A$.

2. (a) $\sin A=5/13$ ナルトキ $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ. 答 5/12. (商船)

(b) $\cos A=0.28$ ナルトキ $\cot A$, $\mathrm{cosec}\,A$ ノ値ヲ求メヨ. (海兵)

答 $0.291\dot{6}$ 及ビ $1.041\dot{6}$

(c) $\tan A=\dfrac{4}{3}$ ナルトキ $\sin A$ ノ値如何. 答 $\dfrac{5}{4}$. (五高)

(d) $\tan A=2-\sqrt{3}$ ナラバ $\cos A$ ノ値如何. 答 $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$. (商船)

(e) $\sec x=8$ ナルトキ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ ノ値ヲ小數第三位迄求メヨ. 答 0.992, 0.125, 7.937, 0.126. (盛農, 熊工)

3. (a) $\sin A=\dfrac{2m}{m^2+1}$ ナルトキ $\cos A$, $\cot A$ ノ値ヲ求メヨ.

答 $\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$, $\dfrac{m^2-1}{2m}$.

(b) $\cos A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキ $\sin A$, $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ.

答 $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $\dfrac{m^2-n^2}{2mn}$.

4. (a) $\tan\theta=2mn/(m^2-n^2)$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ,

$2mn.\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta.\sin\theta$. 答 0. (商船)

(b) $\tan A=b/\sqrt{a^2-b^2}$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ,

$\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)-\sec A$. 答 a/b.

5. $5\sec\alpha=13$ ナルトキ $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}$ ノ値ヲ求メヨ. 答 3.

〔略解〕 $5\sec\alpha=13$ ヨリ $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, 從テ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$,

此 $\sin A$, $\cos A$ ノ値ヲ元式ニ置キ換ヘテ計算ス.

6. $\sin\theta:\cos\theta=a:b$ ナルトキ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

答 $a/\sqrt{a^2+b^2}$, $b/\sqrt{a^2+b^2}$.

7. $\tan A+\sec A=a$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 元式ハ $\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}=a$ 卽チ $\dfrac{\sin A+1}{\cos A}=a$, 故ニ $\dfrac{(\sin A+1)^2}{1-\sin^2 A}=a^2$

卽チ $\dfrac{\sin A+1}{1-\sin A}=a^2$, 之ヨリ $\sin A=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$.

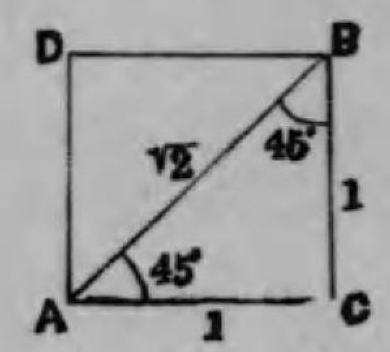
8. 特別角ノ三角函數

〔第一〕 45° ノ三角函數ヲ求ムル法.　(海機)

〔解〕 正方形 ACBD ニ對角線 AB ヲ引ケバ

$\hat{A}=\hat{B}=45°$ ナルユヱ $AC=BC=1$ トセバ

$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ ナリ.



$$\therefore\ \sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

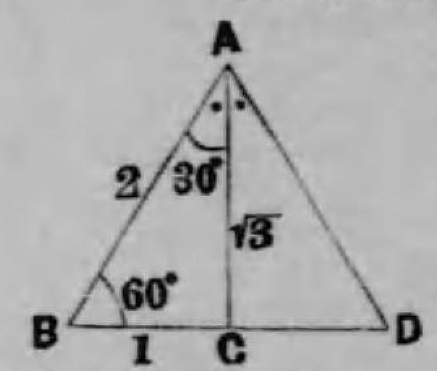
同樣ニ或ハ此二式ヨリ $\tan 45°=1=\cot 45°$, $\sec 45°=\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 45°$.

〔第二〕 30° 及ビ 60° ノ三角函數ヲ求ムル法.　(海兵, 盛農)

〔解〕 正△ABD ニ於テ AC⊥BD トスレバ

$B\hat{A}C=30°$, $\hat{B}=60°$ ナルユヱ $AB=2$ トセバ

$BC=1$, 從テ $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ナリ.



$$\therefore\ \sin 30°=\frac{1}{2}=\cos 60°,\qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60°.$$

同樣ニ或ハ此二式ヨリ $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60°$, $\cot 30°=\sqrt{3}=\tan 60°$ 及ビ

$\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\operatorname{cosec} 60°$, $\operatorname{cosec} 30°=2=\sec 60°$ ヲ得ベシ.

記憶法. 1, 2, 3 ノ各平方根ノ半 卽チ $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ハ夫々 30°, 45°, 60° ノ sin ノ値ニシテ, 又此逆順ノ角ノ cos ノ値ナリ.

問題及ビ解答

1. (a) $\sin^3 60°.\cot 30°-2\sec^2 45°+3\cos 60°.\tan 45°-\tan^2 60°$ ノ値如何.

(b) $\frac{\tan 60°-\tan 30°}{\sin 60°-\sin 45°}$ ノ値ヲ小數三桁マデ求メヨ.　(海機)

(a) 答 $-\frac{35}{8}$.　(b) 答 7.265.

2. $\frac{\tan 45°-\sin 30°}{1+\tan^2 45°}=\cot^2 45°-\cos^2 30°$ ヲ證セ.

3. $\cos(A-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\sin(A-B)=\cos(A+B)$ ヨリ A, B ヲ求メヨ, 但シ A, B ハ何レモ正銳角トス.　答 $A=45°$, $B=15°$.

第二章

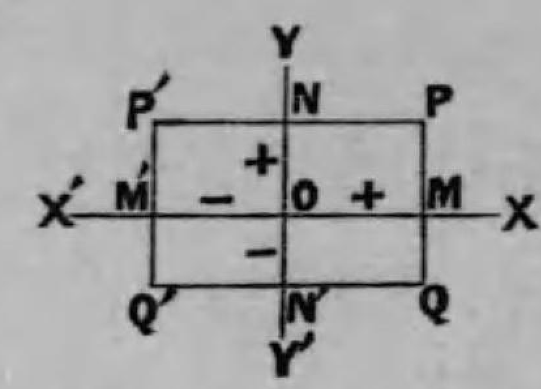
一般角ノ三角函數

9. 直線及ビ角ノ正負 ハ便宜ノ爲メ次ノ如ク規約シ, 之ヲ高等數學ニマデ適用ス.

第一 直線ノ正負

直交二直線 XOX′, YOY′ ヲ引キ, 此二線ヲ夫々橫軸及ビ縱軸ト云ヒ,

其交點 O ヲ原點ト云フ.



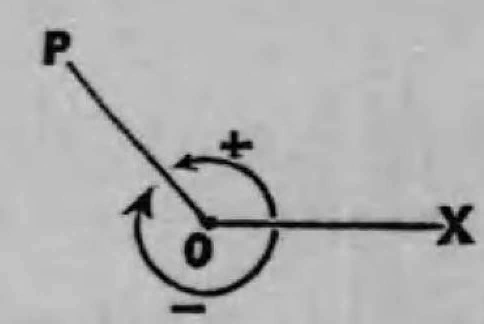
橫軸ハ原點ノ右ヲ正, 左ヲ負トシ

縱軸ハ原點ノ上ヲ正, 下ヲ負トス.

又縱橫兩軸ニ平行セル直線ノ正負ハ兩軸ノ正負ニ準ズ.

第二 角ノ正負

定直線 OX ニ一致セシメタル直線 OP ヲ回軸シテ角ヲ作リタルトキ, 其回轉ノ方向ガ時計ノ針ノ廻リ方ト反對及ビ同ジナルニ從テ正角及ビ負角トス.



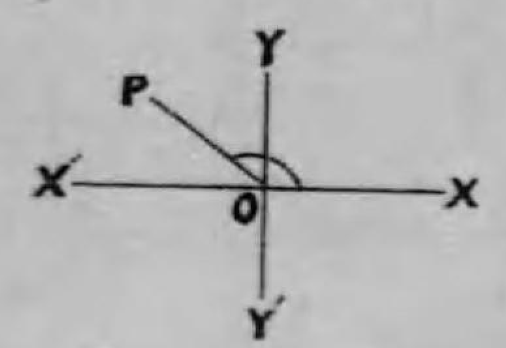
此 OX ヲ首線ト云ヒ, 又 OP ヲ動徑或ハ回線ト云フ.

定理 角ノ大サニハ限リ無シ.

〔證明〕 何トナレバ $\hat{A}$ ト $2n.180°+\hat{A}$ (n ハ 0 或ハ整數トス) トノ動徑 OP ハ一致スルガ故ナリ.

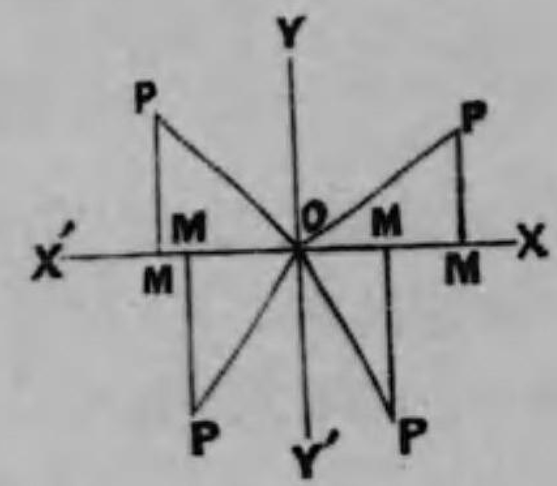
10. 象限 直交二直線 XOX′, Y′OY′ ニテ一平面ヲ四分スルトキ, 其各々ノ分ヲ象限ト云フ.

此 XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ヲ順次ニ第一, 第二, 第三, 第四象限ト云フ.



角ハ動徑ノ存在スル象限ニ從テ第何象限ノ角ト云フ.　例ヘバ $X\hat{O}P$ ハ第二象限ノ角ナルガ如シ.

11. 一般角ノ三角函數ノ定義



任意ノ $\hat{A}$ ニ於ケル首線ハ横軸ノ正傍OX, 動徑ハ OP ノ位置ヲ取ルモノトス. 又 MP⊥XX′ トス. 然ルトキ OP ノ存在スル象限ノ如何ニ關セズ第一章ニ示セシト同様ニ作レル比ヲ一般角ノ三角函數ト稱ス,

卽チ $sin A=\frac{MP}{OP}$, $cos A=\frac{OM}{OP}$, $tan A=\frac{MP}{OM}$, $cosec A$, $sec A$, $cot A$ ハ夫々前者ノ逆數トス.

12. 定理 $2n.180^\circ+\hat{A}$ ト $\hat{A}$ ナル角ノ同名函數ハ相等シ〔但シ n ハ 0 或ハ整數トス〕 卽チ

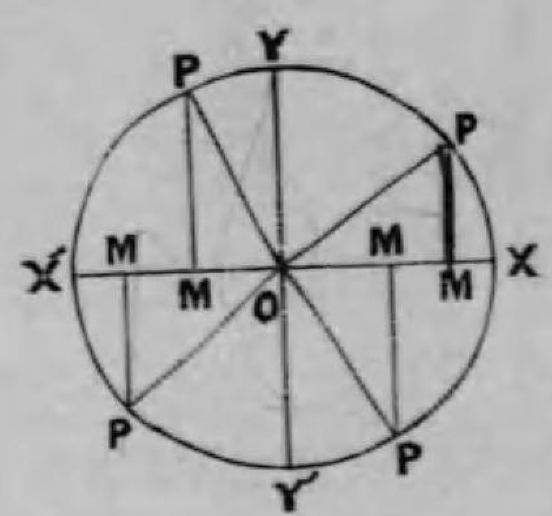
$$\left.\begin{aligned} sin(2n.180^\circ+A)&=sin A\\ cos(2n.180^\circ+A)&=cos A\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

其他ノ函數ニ就テモ同様ナリ.

〔證明〕 何トナレバ n ガ 0 或ハ整數ナルトキ $2n.180^\circ+A$ ト $\hat{A}$ トノ動徑ハ一致スルガ故ナリ.

13. 三角函數ノ符號及ビ値ノ變化

注意. 之レ縦横軸ノ正負ノ規約ノ適用ナリ.



直交二直徑 XOX′, YOY′ ヲ引キ r ナル數値ノ動徑 OP ガ OX ヲ首線トシテ $\hat{A}$ ヲ作リタリトシ, MP⊥XX′ トス.

又 動徑 OP ハ常ニ正 トス.

〔第一〕 $sin A$ ノ符號及ビ値ノ變化

(1) 第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ, 0 ヨリ增大シテ r ニ至ル.

故ニ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ 0 ヨリ增大シテ 1 ニ至ル.

$$\therefore\ sin 0^\circ=0,\quad sin 90^\circ=1.$$

(2) 第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ, r ヨリ減小シテ 0 ニ至ル.

故ニ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ 1 ヨリ減小シテ 0 ニ至ル.

$$\therefore\ sin 180^\circ=0.$$

(3) 第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ, 0 ヨリ減小シテ $-r$ ニ至ル.

故ニ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ 0 ヨリ減小シテ -1 ニ至ル.

$$\therefore\ sin 270^\circ=-1.$$

(4) 第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ, $-r$ ヨリ增大シテ 0 ニ至ル.

故ニ $sin A=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ, -1 ヨリ增大シテ 0 ニ至ル.

$$\therefore\ sin 360^\circ=0.$$

〔第二〕 $cos A$ ノ符號及ビ値ノ變化 ハ第一ニ倣フ.

〔第三〕 $tan A$ ノ符號及ビ値ノ變化 〃

〔第四〕 $cosec A$, $sec A$, $cot A$ ハ夫々 $sin A$, $cos A$, $tan A$ ノ逆數ナルヲ以テ符號ノ變化ハ前ト同様ナリ. 又値ノ變化ハ前ノ逆數ノ變化ナリ.

〔第五〕 若シ $\hat{A}$ ガ負ナルトキハ象限ヲ逆順ニ論スベシ.

又 上ノ事實ハ一般ニ $2n.180^\circ+A$ ナル角ニモ適スルコト明カナリ.

注意. $sin A$, $cos A$ ノ最大値及ビ最小値ハ共ニ ± 1 ナリ, 從テ此等ノ逆數ナル $cosec A$, $sec A$ ノ最小値ハ ± 1 ナリ.

又 $tan A$, $cot A$ ハ 0 ト ∞ トノ間ノ値ヲ取ルコトヲ得. 但シ 0 及ビ ∞ ニハ +, − ナシトス.

14. 三角函數相互ノ關係

既ニ定義ヲ擴張セシ以上ハ三角函數相互ノ關係モ廣意ニ適スルコトハ當然ナリ, 仍テ

$$\left.\begin{aligned} sin A.cosec A&=1\\ cos A.sec A&=1\\ tan A.cot A&=1\end{aligned}\right\} \text{及ビ} \left.\begin{aligned} tan A&=\frac{sin A}{cos A}\\ cot A&=\frac{cos A}{sin A}\end{aligned}\right\}$$

ハ前ト同様ニ定義ヨリ直チニ得ラルベシ.

又
$$\left.\begin{aligned} sin^2A+cos^2A&=1\\ 1+tan^2A&=sec^2A\\ 1+cos^2A&=cosec^2A\end{aligned}\right\}$$

ハ MP ト OM トハ正負如何ニ拘ハラズ此等ノ平方ハ常ニ正ナルヲ以テ亦タ前ト同様ニ證シ得ベシ.

次ニ $\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}$, $\cot A=\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$ 等ハ $\hat{A}$ ノ大サガ未知ナルトキハ複號 $\pm$ ヲ用ヒ，又已知ナルトキハ何レカ一方ヲ選ムヲ要ス.

例ヘバ $\cos 160^\circ=-\sqrt{1-\sin^2 160^\circ}$ 及ビ $\tan 230^\circ=+\sqrt{\sec^2 230^\circ-1}$ ノ如シ.

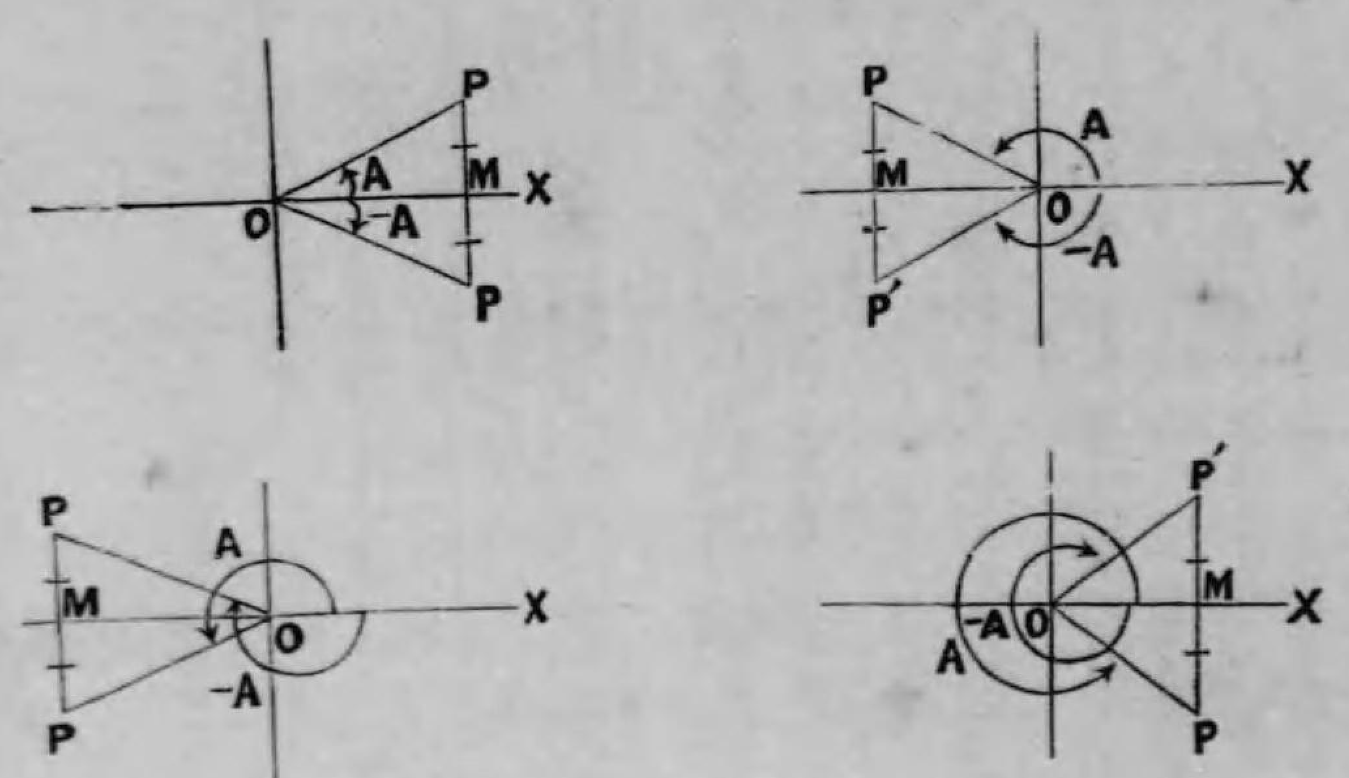
注意. 本條ノ定理ヨリ誘導セラレタル關係式モ亦タ一般ニ眞ナリ，從テ第 6 條ノ問題モ亦タ然ルヲ以テ玆ニ再ビ練習スルモ可ナリ.

15, 負角ト正角トノ函數ノ關係

定理 二角ガ大サ相等シク符號相反スルトキハ，其正弦ハ數値相等シク符號相反ス，又餘弦ハ數値及ビ符號相等シ，　卽チ

$$\left.\begin{aligned} \sin(-A)&=-\sin A \\ \cos(-A)&=\cos A \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

〔證明〕 $X\hat{O}P=\hat{A}$ 及ビ $X\hat{O}P'=-\hat{A}$ トシ，此二角ノ動徑 $OP=OP'$ トシ，PP' ト XO 或ハ其引長トノ交點ヲ M トセバ $\triangle OMP\equiv\triangle OMP'$, 從テ MP ト MP' ハ等長ニシテ符號ヲ異ニス.



$$\therefore\ \sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\frac{MP}{OP}=-\sin A,$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

同樣ニ或ハ此二式ヨリ $\tan(-A)=-\tan A$, $\cot(-A)=-\cot A$ 及ビ $\sec(-A)=\sec A$, $\operatorname{cosec}(-A)=-\operatorname{cosec}A$ ヲ得.

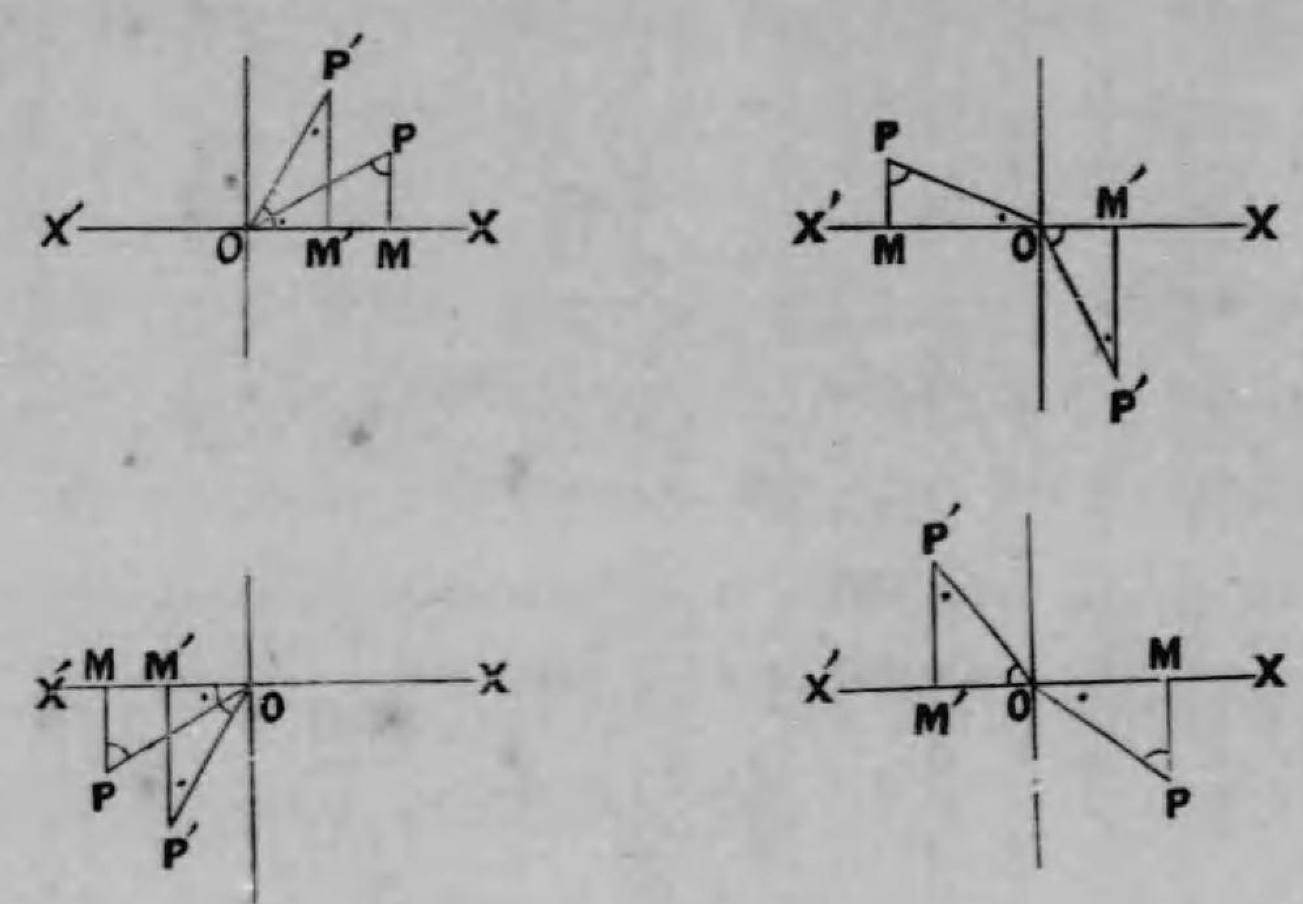
16. 餘角ノ三角函數

定義 二角ノ和ガ 90° ニ等シキトキ其各々ヲ他ノ餘角ト云フ，　卽チ $\hat{A}$ ト $90^\circ-\hat{A}$ トハ互ニ餘角ナリ. 從テ 90° ヨリモ大ナル角ノ餘角ハ必ズ負角ナリ.

定理 二角ガ互ニ餘角ナルトキ其正弦ト餘弦トハ相等シ，　卽チ

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ-A)&=\cos A \\ \cos(90^\circ-A)&=\sin A \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

〔證明〕 $X\hat{O}P=\hat{A}$ 及ビ $X\hat{O}P'=90^\circ-A$ トシ，此二角ノ動徑 $OP=OP'$ トシ，$PM\perp XX'\perp P'M'$ トスルトキハ $OP=OP'$, $M'P'=OM$, $OM'=MP$ ナリ.



$$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A,\qquad \cos(90^\circ-A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A.$$

同樣ニ　或ハ此二式ヨリ $\tan(90^\circ-A)=\cot A$, $\cot(90^\circ-A)=\tan A$ 及ビ $\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}A$, $\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$ ヲ得.

系. (1)
$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ+A)&=\cos A, \\ \cos(90^\circ+A)&=-\sin A. \end{aligned}\right\}$$

〔證明〕 $90^\circ+A$ ト $-A$ トハ互ニ餘角ナルヲ以テ $\sin(90^\circ+A)=\cos(-A)=\cos A$ 及ビ $\cos(90^\circ+A)=\sin(-A)=-\sin A$.

系. (2) $A+B=90^\circ$ ナラバ
$$\left.\begin{aligned} \sin A&=\cos B, \\ \cos A&=\sin B. \end{aligned}\right\}$$

17. 補角ノ三角函數

定義 二角ノ和ガ 180° ニ等シキトキ其各々ヲ他ノ補角ト云フ， 卽チ A ト 180°−A トハ互ニ補角ナリ． 從テ 180° ヨリモ大ナル角ノ補角ハ必ズ負角ナリ．

定理 二角ガ互ニ補角ナルトキ其正弦ハ相等シク，餘弦ハ數値相等シク符號相反ス， 卽チ

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ-A)&=\ \ \sin A \\ \cos(180^\circ-A)&=-\cos A \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

〔證明〕 $\sin(180^\circ-A)=\sin\{90^\circ-(-90^\circ+A)\}=\cos(-90^\circ-A)=\cos(90^\circ-A)=\sin A,$

$\cos(180^\circ-A)=\cos\{90^\circ-(-90^\circ+A)\}$

$=\sin(-90^\circ+A)=-\sin(90^\circ-A)=-\cos A.$

同樣ニ或ハ此二式ヨリ $\tan(180^\circ-A)=-\tan A$, $\cot(180^\circ-A)=-\cot A$ 及ビ $\sec(180^\circ-A)=-\sec A$, $\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$ ヲ得．

注意． 此定理ハ亦タ前條ト獨立ニ前條ノ如ク證スルコトヲ得．

系．
$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ+A)&=-\sin A, \\ \cos(180^\circ+A)&=-\cos A. \end{aligned}\right\}$$

〔證明〕 $180^\circ+A$ ト $-A$ トハ互ニ補角ナルヲ以テ

$\sin(180^\circ+A)=\sin(-A)=-\sin A,\qquad \cos(180^\circ+A)=-\cos(-A)=-\cos A.$

18. 大角ノ三角函數ヲ小角ノ函數ニ變ズル法

〔第一〕 與角ガ負角ナラバ，之ヲ負角ト正角トノ關係ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ．

〔第二〕 與角ガ 2.180° 卽チ 360° ヨリモ大ナラバ，之ヲ同名函數ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ．

〔第三〕 與角ガ 2.180° ト 90° トノ間ノ角ナラバ，之ヲ補角ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ．

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 第二象限ニ在ル角ノ三角函數ヲ其角ノ正切ニテ示セ．

(b) $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ ノ符號ヲ決定セヨ． (海兵)

答 (a) 其角ヲ A トセバ $\sin A=-\dfrac{\tan A}{\sqrt{(\tan^2 A+1)}}$, $\cos A=-\dfrac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$ ニシテ， $\operatorname{cosec}A$, $\sec A$, $\cot A$ ハ $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ノ逆數．

(b) $0^\circ<\theta<90^\circ$ 及ビ $270^\circ<\theta<360^\circ$ ナルトキハ $\cos\theta=+\sqrt{1-\sin^2\theta}$,

$9^\circ<\theta<180^\circ$ 及ビ $180^\circ<\theta<270^\circ$ ナルトキハ $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$.

2. (a) $\tan A=\dfrac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ ノ値ヲ求メヨ． (海機)

(b) $\sec A=2$ ナルトキ $\sin A$, $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ． (海兵)

(c) $\tan\varphi=\dfrac{n.\sin\theta}{m+n.\cos\theta}$ ナルトキ $\sin\theta$ ノ値ヲ求メヨ． (海兵)

(d) $\sec A=\sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\sin A}}$ ノ一ツノ値ハ $\sqrt{2}+1$ ナリ． (陸士)

〔解〕 (a) $\sin A=\pm\dfrac{\tan A}{\sqrt{(\tan^2 A+1)}}=\pm\dfrac{8}{15}\div\left\{\left(\dfrac{8}{15}\right)^2+1\right\}=\pm\dfrac{8}{17}$,

從テ $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\dfrac{15}{17}$.

(b) 答 $\sin A=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A=\pm\sqrt{3}$. (c) 答 $\sin\varphi=\pm\dfrac{n.\sin\theta}{\sqrt{(m^2+n^2+2mn.\cos\theta)}}$.

(d) $\sec A=\sqrt{2}$ ヨリ $\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

從テ $\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\sin A}}$ ノ一ツノ値ハ $\sqrt{\left\{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\Big/\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}$

$=\sqrt{\left\{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right\}}=\sqrt{2}+1$ ナリ．

注意． 本題ノ如ク所設ノ角 A ニ制限ナキトキハ之ヨリ誘導シタル函數値ニハ凡テ ± ヲ附スルヲ要ス．

3. (a) 三角形ノ一角 A ノ正切ハ $-\dfrac{4}{3}$ ナリ，角 A ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ．

答 $\dfrac{4}{5}$, $-\dfrac{3}{5}$. (海機)

(b) $\tan 238^\circ=\dfrac{8}{5}$ ナルトキ $\sin 238^\circ$ 及ビ $\cos 122^\circ$ ノ値ヲ求メヨ．

(c)　$A=202°37'$ ニシテ　$\sin A=-\dfrac{5}{13}$　ナルトキ $\cos A$ 及ビ $\cot A$ ノ値ヲ求メヨ.　　答 $-\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{12}{5}$.

(d)　A ガ $180°$ ト $270°$ トノ間ニ在リテ　$3\tan A=4$　ナルトキ　$\sin A-5\cos A+2\cot A$　ノ値ヲ求メヨ.　　答 3.7.

〔解〕 (b) 問 2 ノ (a) ト同樣ニシテ　$\sin 238°=\pm\dfrac{8}{\sqrt{89}}$ ヲ得. 然ルニ $238°$ ハ第三象限内ニ在ルヲ以テ　$\sin 238°=-\dfrac{8}{\sqrt{89}}$　ナリ.

次ニ　$\cos 122°=\cos(360°-238°)=\cos(-238°)=\cos 238°=\pm\sqrt{1-\sin^2 238°}$.　是ヨリ前ト同樣ニ　$\cos 122°=-\dfrac{5}{\sqrt{89}}$　ヲ得.

4.　(a) (i) $\sin(45°+A)=\cos(45°-A)$,　(ii) $\cos(30°+A)=\sin(60°-A)$

(iii) $\sin(90°+A)=\sin(90°-A)$　ヲ證セ.

(b) (i) $\sin^2 40°+\sin^2 50°=1$,

(ii) $\sin^2(A+45°)+\sin^2(45°-A)=1$,　　(商船)

(iii) $\dfrac{\sin(90°-A).\tan^2 A.\operatorname{cosec}^2 A}{\cos(90°-A).\cot(90°-A)\sec^2 A}=\sec^2(90°-A)-1$　ヲ證セ.

(c) (i)　$\tan^2 A.\sec^2(90°-A)-\sin^2 A.\operatorname{cosec}^2(90°-A)$　ノ値ヲ求メヨ.　　答 1.

(ii)　$\sin 37°.\cos 53°+\cos 37°.\sin 53°$　ヲ最簡ニセヨ.　答 1.

(d)　△ABC ニ於テ $\hat{C}$ ガ直角ナルトキハ次式ノ證如何,

$$(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=2.$$　(山商)

〔證及解〕 餘角ノ公式ニ依ル.

(b) (iii) 兩邊ヲ夫々最簡ニシテ比較ス.

或ハ　$\text{左邊}=\dfrac{\cos A.\tan^2 A.\operatorname{cosec}^2 A}{\sin A.\tan A.\sec^2 A}=\dfrac{\cot A.\tan A.\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A}=\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A}=\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$=\dfrac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\operatorname{cosec}^2 A-1=\sec^2(90°-A)-1.$

(d) $\hat{C}=\hat{R}$ ナルユヱ $\hat{A}$ ト $\hat{B}$ トハ互ニ餘角ヲナス,

$\therefore$　$(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=(\cos A-\cos B)^2+(\cos A+\cos B)^2$　$[\because (b-a)^2=(a-b)^2]$

$=2(\cos^2 A+\cos^2 B)=2(\cos^2 A+\sin^2 A)=2\times 1=2.$

5.　(a) $\sin(A-130°)=\sin(310°-A)$ 及ビ $\cos(110°+A)=-\cos(70°-A)$.

(b) $\sin(270°-A)=-\cos A$ 及ビ $\cos(270°+A)=\sin A$　ヲ證セ.

〔略解〕 (b) $270°-A$ ノ補角ハ $-90°+A$ ナルヲ以テ,

$\sin(270°-A)=\sin(-90°+A)=-\sin(90°-A)=-\cos A$.　次問モ同樣ナリ.

6.　(a)　$\alpha+\beta+\gamma=90°$ ナラバ　$\sin(\alpha+\beta)=\cos\gamma$, $\tan(\alpha-\beta+\gamma)=\cot 2\beta$ 及ビ　$\sec(\alpha+2\beta)=\operatorname{cosec}(\gamma-\beta)$　ノ證如何.

(b)　$\alpha+\beta+\gamma=180°$　ナルトキ　$\sin(2\alpha+\beta+\gamma)=-\sin\alpha$　及ビ $\cos(\beta-\gamma)=-\cos(\alpha+2\gamma)$　ヲ證セ.

〔略解〕 (a)　$\alpha+\beta+\gamma=90°$　ヨリ　$\alpha+\beta=90°-\gamma$,　$\alpha-\beta+\gamma=90°-2\beta$　及ビ $\alpha+2\beta=90°-(\gamma-\beta)$　ナリ.　以下前題ノ如クス.

(b)　$\alpha+\beta+\gamma=180°$ ヨリ $2\alpha+\beta+\gamma=180°+\alpha$,　$\beta-\gamma=180°-(\alpha+2\gamma)$　ナリ.

7.　次式ヲ最簡ニセヨ.

(a)　$(a-b)\tan(90°-A)-(a+b)\tan(90°+A)$.　　答 $2a.\cot A$.　(海機)

(b)　$\sin 90°+\tan^2(180°-A)-\operatorname{cosec}^2(90°-A)$.　　答 0.　(東工)

(c)　$\tan(180°+A).\sin(90°+A)+\cos(180°-A).\cot(180°-A)$.

答 $\operatorname{cosec}A$.　(海機)

(d)　$\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right).\cos(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}+\dfrac{\sin(\pi-\alpha).\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.　(大工, 海機)

答 $\sin\alpha+\cos\alpha$.

(e)　$\dfrac{\sin(180°-A)}{\tan(180°+A)}\times\dfrac{\cot(90°-A)}{\tan(90°+A)}\times\dfrac{\cos(360°-A)}{\sin(-A)}$.　答 $\sin A$.　(海兵)

(f)　$\operatorname{cosec}(90°-A)+\tan(180°-A)\sin(-A)=-\sin(90°+A)$　ヲ證セ.

(陸士)

(g)　四邊形ノ各角頂ヨリ對角線ヘノ垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ, 又對角線ヲ h, k トシ其夾角ヲ θ トセバ $\sin^2\theta=(a+c)(b+d)/hk$ ナリ.

〔解〕 本題ハ餘角, 補角, 負角及ビ同名函數ノ公式ニ依ル.

(e)　$\tan(180°+A)=\dfrac{\sin(180°+A)}{\cos(180°+A)}=\dfrac{\sin(-A)}{-\cos(-A)}=\dfrac{-\sin A}{-\cos A}=\tan A$,　$\sin(-A)=-\sin A$,

$\tan(90°+A)=\cot(-A)=-\cot A$,　　$\cos(360°-A)=\cos(-A)=\cos A$,

$\therefore$　$\text{元式}=\dfrac{\sin A}{\tan A}\times\dfrac{\tan A}{-\cot A}\times\dfrac{\cos A}{-\sin A}=\dfrac{\cos A}{\cot A}=\sin A$.

8. 次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ， （各學校）

(a) $120°,\ 135°,\ 150°.$ (b) $210°,\ 225°,\ 240°.$

(c) $300°,\ 315°,\ 330°.$ (d) $-210°,\ -855°,\ 1230°.$

〔解〕 本題ノ求メ方ハ餘角，補角，負角及ビ同名函數ノ公式ニ依テ已知ノ正鋭角 $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ ノ函數ニ誘導スルニアリ．

(a) $\sin 120°=\sin(180°-60°)=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120°=\cos(180°-60°)=-\cos 60°=-\dfrac{1}{2}$，

$$\tan 120°=\frac{\sin 120°}{\cos 120°}=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}.$$

cosec, sec, cot ハ夫々此等ノ逆數ヲ取ル， 卽チ $\operatorname{cosec} 120°=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\sec 120°=-2$，

$\cot 120°=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

次ニ $135°(=180°-45°)$，$150°(=180°-30°)$ ニ付テモ同樣ニ求メ得ベシ．

(b) $\sin 210°=\sin\{180°-(-30°)\}=\sin(-30°)=-\sin 30°=-\dfrac{1}{2}$，

$\cos 210°=\cos\{180°-(-30°)\}=-\cos(-30°)=-\cos 30°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\tan 210°=\dfrac{\sin 210°}{\cos 210°}=-\dfrac{1}{2}\div\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$， 以下同上．

次ニ $225°[=180°-(-45°)]$，$240°[=180°-(-60°)]$ ニ付テモ同樣ニ求メ得．

(c) $\sin 300°=\sin\{2.180°+(-60°)\}=\sin(-60°)=-\sin 60°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\cos 300°=\cos\{2.180°+(-60°)\}=\cos(-60°)=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$， 以下同上．

次ニ $315°[=2.180°+(-45°)]$，$330°[=2.180°+(-30)°]$ ニ付テモ同樣ニ求メ得．

(d) $\sin(-855°)=-\sin 855°=-\sin(2.2.180°+135°)=-\sin 135°$

$=-\sin(180°-45°)=-\sin 45°=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\cos(-855°)=\cos 855°=\cos(2.2.180°+135°)=\cos 135°$

$=\cos(180°-45°)=-\cos 45°=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$， 以下同上．

次ニ $-210°[=-\{180°-(-30°)\}]$，$1230°[=2.6.180°+150°]$ ニ付テモ同樣ニ求メ得ベシ．

9. (a) $\dfrac{\sin 150°\operatorname{cosec}(-45°)}{\cos 225°.\tan 315°}$ ノ値ヲ求メヨ： 答 $-1.$ （海兵）

(b) $A=\dfrac{11}{4}\pi$ ナルトキ $\sin^2 A-\cos^2 A+3\tan A-\sec^2 A$ ノ値ヲ求メヨ，但シ $\pi=180°$ ナリ． 答 $-5.$

10. (a) $\sin 0°.\cos 30°+\tan 45°.\cot 60°-\sec 0°.\operatorname{cosec} 90°$ ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ． 答 (a) $-.423.$ (b) $\infty.$

(b) $\sin 0°.\cos 90°.\tan 180°+\cot 270°.\sec 360°.\operatorname{cosec} 45°$ ノ値ヲ求メヨ．

11. (a) A ガ正鋭角ニシテ $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキハ $30°<A<45°$ ナリ．

(b) A ガ 4.5 直角ト 5 直角トノ間ニ在レバ $\sin A>\cos A$ ナリ．

〔略解〕 (a) $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$，$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，之ヲ通分シテ比較スレバ $\sin 30°<\sin A<\sin 45°$. 然ルニ第一象限ニ於テハ sin ノ値ハ角ノ增大ニ伴ヒテ增大ス，

$\therefore\ 30°<A<45°.$

(b) 4.5直角 $=90°\times4.5=405°=2.180°+45°$，同樣ニ 5 直角 $=2.180°+90°$.

故ニ A ハ $45°$ ト $90°$ トノ間ニアリ． 而シテ $A=45°$ ナレバ $\sin A=\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ニシテ A ガ增大シテ $90°$ ニ達スルマデ $\sin A$ ハ漸々增大シ，$\cos A$ ハ漸々減小ス，

$\therefore\ 45°<A<90°$ ナルトキ $\sin A>\cos A$ ナリ．

12. $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ $\sin x$ ガ $\cos 50°$ ヨリモ小ナル爲メノ x ノ範圍ヲ求メヨ． （海兵）

〔解〕 今 $\cos 50°=\sin 40°$ 或ハ $=\sin 140°$ ナルヲ以テ

(i) x ガ第一象限內ニアレバ要件ハ $\sin 0°<\sin x\leqq\sin 40°$，

然ルニ第一象限ニ於テ sin ハ角ノ增大ニ伴ヒ値ガ增大スルヲ以テ所要ノ x ノ範圍ハ $0°<x\leqq40°$ ナリ．

(ii) x ガ第二象限內ニアレバ要件ハ $\sin 180°<\sin x\leqq\sin 140°$，

然ルニ第二象限ニ於テ sin ハ角ノ增大ニ伴ヒ値ハ減小スルヲ以テ所要ノ x ノ範圍ハ $180°>x\geqq140°$ ナリ．

13. x ガ實數ナルトキ $\sin A$ ハ $x+\dfrac{1}{x}$ ニ等シキコト能ハズ. 之ヲ證セ.

〔證〕 今 $\sin A=x+\dfrac{1}{x}$ トシ, 之ヲ整理スレバ $x^2-\sin A\,x+1=0$,

此方程式ノ x ガ實數ナル爲メニハ判別式 $\sin^2A-4\times1\geqq0$ ナリ,

故ニ $\sin A>\pm2$, 然ルニ $\sin$ ノ絶對最大値ハ 1 ナリ.

故ニ題言ノ如シ.

14. 角 A ガ 0° ヨリ 360° マデ變ズルトキ $\sin A$, $\cos A$, $\sin A+\cos A$ ノ値ノ變化ヲ表示セヨ. (海兵)

答

	$\sin A$	$\cos A$	$\sin A+\cos A$
0°……… 45°	0 ……$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1 ……$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1 ………$\sqrt{2}$
45°……… 90°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$…… 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$…… 0	$\sqrt{2}$……… 1
90°………135°	1 ……$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0 …$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1 ……… 0
135°………180°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$……	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$……-1	0 ………-1
180°………225°	0 …$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1 …$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1 ……$-\sqrt{2}$
225°………270°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$… -1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$…… 0	$-\sqrt{2}$………-1
270°………315°	-1 …$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0 ……$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1 ……… 0
315°………360°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$…… 0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$…… 0	0 ……… 1

第　二　編
複角ノ三角函數

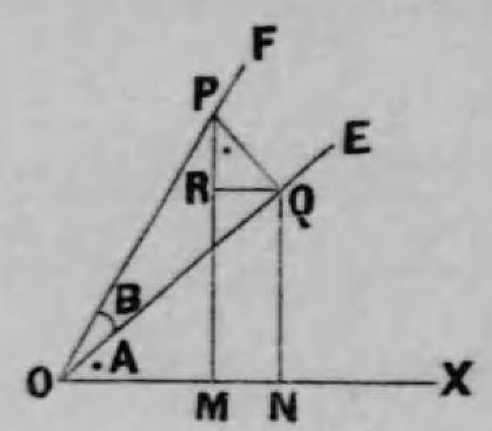
第　一　章
二角ノ和 及ビ 差ノ三角函數

1. 二角ノ和差

〔第一〕
$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B\\ \sin(A-B)&=\sin A.\cos B-\cos A.\sin B\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

(美術, 海機, 商船)

〔證明〕 $X\hat{O}E=\hat{A}$, $E\hat{O}F=\hat{B}$ トセバ $X\hat{O}F=\hat{A}+\hat{B}$ ナリ, 今 $A+B<90°$ トシ, $PM\perp OX$, $PQ\perp OE$ トシ, 又 $QN\perp OX$, $QR\perp PM$ トス. 然ルトキハ $Q\hat{P}R=\hat{A}$,



$$\therefore\ \sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{MR+RP}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{RP}{OP}$$
$$=\frac{NQ.OQ}{OQ.OP}+\frac{RP.PQ}{RQ.OP}$$
$$=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B.$$

次ニ此式ニ於テ B ヲ $-B$ トセバ

$$\sin(A-B)=\sin A.\cos(-B)+\cos A.\sin(-B)$$
$$=\sin A.\cos B-\cos A.\sin B\quad[\because\ \cos(-B)=\cos B,\ \sin(-B)=-\sin B]$$

〔第二〕
$$\left.\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B\\ \cos(A-B)&=\cos A.\cos B+\sin A.\sin B\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

〔證明〕 $\cos(A+B)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{ON-RQ}{OP}=\dfrac{ON}{OP}-\dfrac{RQ}{OP}=\dfrac{ON.OQ}{OQ.OP}-\dfrac{RQ.PQ}{PQ.OP}$
$$=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.$$

次ニ此式ニ於テ B ヲ $-B$ トスレバ

$$\cos(A-B)=\cos A.\cos(-B)-\sin A.\sin(-B)=\cos A.\cos B+\sin A.\sin B.$$

茲ニ A, B 及ビ A+B ハ共ニ 90° ヨリモ小ナリトシテ證明シタリ, 然レドモ之レ一般角ニ擴張シ得ルナリ.

系. $$\left.\begin{aligned}\sin(A+B).\sin(A-B)&=\sin^2 A-\sin^2 B\\ \cos(A+B).\cos(A-B)&=\cos^2 A-\sin^2 B\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

（東師，商船）

〔第三〕 $$\left.\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}\\ \tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A.\tan B}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

（海兵）

〔證明〕 $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A.\cos B+\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B-\sin A.\sin B}$

$=\dfrac{(\sin A.\cos B+\cos A.\sin B)\div\cos A.\cos B}{(\cos A.\cos B-\sin A.\sin B)\div\cos A.\cos B}=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}.$

同樣ニ或ハ此式ニ於テ B ヲ −B トスレバ次式ノ證明ヲ得.

系. $\cot(A+B)=\dfrac{\cot B.\cot A-1}{\cot B+\cot A}$, $\cot(A-B)=\dfrac{\cot B.\cot A+1}{\cot B-\cot A}$.

問 題 及 ビ 解 答

次ノ 1 乃至 5 ヲ夫々證明セヨ.

1. (a) $\sqrt{2}.\sin(A\pm 45°)=\sin A\pm\cos A$.

(b) $2.\cos(A-30°)=\sqrt{3}.\cos A+\sin A$.

(c) $2.\sin(A-60°)=\sin A-\sqrt{3}.\cos A$.

〔略解〕 公式 (8), (9) ニ依ル.

2. (a) $\cos(45°\mp A)-\sin(45°\pm A)=0$.

(b) (i) $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$. （海兵）

(ii) $\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$.

〔略解〕 (b) ハ左邊ヲ公式 (8), (9) ニ依テ展開シ, 而シテ因數ニ括ル.

3. (a) (i) $\sin\gamma=\sin\alpha.\cos(\gamma-\alpha)+\cos\alpha.\sin(\gamma-\alpha)$.

(ii) $\cos\gamma=\cos(\beta+\gamma)\cos\beta+\sin(\beta+\gamma)\sin\beta$.

(b) (i) $\sin mA=\sin A.\cos(m-1)A+\cos A.\sin(m-1)A$.

(ii) $\cos mA=\cos A.\cos(m-1)A-\sin A.\sin(m-1)A$.

〔略解〕 (a) (i) $\sin\gamma=\sin\{\alpha+(\gamma-\alpha)\}$, (ii) $\cos\gamma=\cos\{(\beta+\gamma)-\beta\}$,

(b) (i) $\sin mA=\sin\{A+(mA-A)\}=\sin\{A+(m-1)A\}$, ヲ展開ス.

4. (a) $\dfrac{1}{2}.\cos 40°+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin 40°=\sin 70°$ ヲ證セ. （海兵）

(b) $\cos 4A.\cos 2A-\sin 4A.\sin\cancel{A}\,2A=\cos 3A.\cos 2A-\sin 3A.\sin 2A$ 〃

(c) $\sin A.\cos(B+C)-\sin B.\cos(A+C)=\sin(A-B).\cos C$ 〃

(d) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma.\cos\alpha}=0$ 〃

(e) $\dfrac{\sin A.\sin(B-C)-\sin B.\sin(A-C)}{\sin C}$ ヲ最簡ニセヨ. （海機）

〔略解〕 公式 (8), (9) ニ依ル. (e) 答 $\sin(B-A)$.

5. (a) (i) $\sin 36°.\sin 30°=\sin^2 33°-\sin^2 3°$. （大工）

(ii) $\cos 108°=2(\cos^2 84°-\sin^2 24°)$.

(b) $\sin(\alpha+\beta).\sin 3(\alpha-\beta)=\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2(2\beta-\alpha)$.

(c) $\sin^2 B+\sin^2(A-B)+2\sin B.\sin(A-B).\cos A$ ヲ最簡ニセヨ.

（永講）

(d) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}$. （陸士）

(e) $1+\tan(A+B).\tan(A-B)=\dfrac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$. （札農）

〔證及解〕 公式 (10) ニ依ル.

(c) 元式 $=\sin^2 B+\sin(A-B)\{\sin(A-B)+2\sin B.\cos A\}$

$=\sin^2 B+\sin(A-B)\{\sin A.\cos B-\cos A.\sin B+2\cos A.\sin B\}$

$=\sin^2 B+\sin(A-B).\sin(A+B)=\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 B=\sin^2 A.$

6. (a) $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A.\cos B}$. (b) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

（長商）

(c) $\tan^2 A-\tan^2 B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A.\cos^2 B}$. ヲ證セ.

7. (a) $\tan(45°\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$. (b) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\cos^2 B}=\tan\dfrac{3}{4}\pi$. （陸士）

(c) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ. 答 $\tan(\alpha-45°)$.

(d) $\dfrac{\tan(n+1)A+\tan(1-n)A}{1-\tan(n+1)A.\tan(1-n)A}=\tan 2A$ ヲ證セ.

〔略解〕 公式 (11) ニ依ル, 但シ $\tan 45°=1$, $\tan 135°=-1$.

8. A, B 及ビ A+B ガ正鋭角ニシテ,

(a) (i) $sinA=\frac{2}{3}$, $cosB=\frac{3}{5}$ ナルトキ $sin(A+B)$ 及ビ $cos(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ.　　答 $(6+4\sqrt{5})/15$, $(3\sqrt{5}+8)/15$. (海兵, 海機)

(ii) $sinA=\frac{12}{13}$, $cosB=\frac{3}{5}$ ナルトキ $tan(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

(iii) $cosA=\frac{4}{5}$, $cosB=\frac{9}{41}$ トシテ $cos(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

N (b) (i) $tanA=\frac{1}{2}$, $tanB=\frac{1}{3}$ ナルトキ $tan(A-B)$ 〃 (海經)

(ii) 同上　$sin(A+B)$ 〃 (水講)

(iii) $tanA=\frac{1}{3}tanB=8$ ナルトキ $tan(A+B)$ 〃 (商船)

(iv) $tanA=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$, $tanB=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ ナルトキ $tan(A-B)$ ノ値ヲ小數第三位マデ計算スベシ.

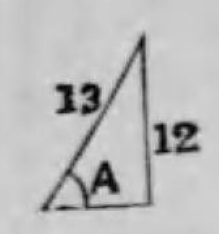
(c) $secA=\frac{17}{8}$, $cosecB=\frac{5}{4}$ ナルトキ $sec(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) (ii) $tanA=\frac{sinA}{cosA}=\frac{sinA}{\sqrt{(1-sin^2A)}}=\frac{12}{13}\Big/\sqrt{\left\{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2\right\}}=\frac{12}{13}\times\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$,

$$tanB=\frac{sinB}{cosB}=\frac{\sqrt{(1-cos^2B)}}{cosB}=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}}\Big/\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$$

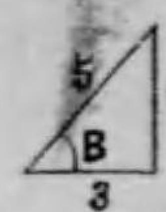
$$\therefore\ tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1-tanA.tanB}=\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{3}\right)\Big/\left(1-\frac{12}{5}\times\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$$

〔別解〕 $sinA=\frac{12}{13}$ ナルユエ　　又 $cosB=\frac{3}{5}$ ナルユエ



底邊 $=\sqrt{13^2-12^2}=5$,

$\therefore\ tanA=\frac{12}{5}$.



垂線 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

$\therefore\ tanB=\frac{4}{3}$. 以下同上.

答 (a) (iii) $-\frac{124}{205}$. (b) (i) $\frac{1}{7}$. (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (iii) $-\frac{16}{193}$.

(c) $-\frac{85}{36}$. 此 (b) ノ (ii) 及ビ (c) ハ上ノ別解ニ倣フベシ.

注意. 若シ問題ニ A, B 及ビ A+B ガ正鋭角又ハ 0° ト 90° トノ間ノ角ナル條件ナキトキハ, 根號ハ複號 ± ヲ採ルヲ要ス.

9. (a) (i) A+B ガ正鋭角ニシテ $tanA=\frac{1}{2}$, $tanB=\frac{1}{3}$ ナルトキハ $A+B=45°$ ナリ.　(千醫)

(ii) $tan\beta=\frac{1-tan\alpha}{1+tan\alpha}$ ナラバ $\alpha+\beta$ ノ一ツノ値ハ 45° ナリ.

(iii) $cotx=2$, $cosecy=\sqrt{10}$ ナルトキハ $x+y=45°$ ナリ, 但シ x, y ハ何レモ正鋭角ナリ.　(高等)

(b) (i) 正切ガ夫々 $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ 及ビ $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ ナル二鋭角ノ和ヲ求メヨ.

(ii) 二等邊 △ABC ノ B ヲ直角トス, BC ヲ E, F ニ於テ三等分シ $C\hat{A}F$, $F\hat{A}E$ ノ正切ヲ求メヨ.　答 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{11}$.　(東工)

(c) $\alpha+\beta=45°$ ナルトキハ $(1+tan\alpha)(1+tan\beta)=2$ ナリ.

〔證及解〕 (a) (i) $tan(A+B)=\frac{tanA+tanB}{1-tanA.tanB}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\right)=1=tan45°$,

$\therefore$ 兩邊ヲ比較シテ $A+B=45°$ ヲ得.　(b) (ii) 答 90°.

(c) $tan(\alpha+\beta)=tan45°$ 即チ $\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha.tan\beta}=1$, 此分母ヲ拂ヒ轉項シテ

$tan\alpha+tan\beta+tan\alpha.tan\beta=1$, 此兩邊ニ 1 ヲ加フレバ

$1+tan\alpha+tan\beta(1+tan\alpha)=2$ 即チ $(1+tan\alpha)(1+tan\beta)=2$.

10. (a) $sin(180°+x).sin(90°+y)-sin(90°-x).sin(180°-y)$ ヲ最簡ニセヨ.　答 $-sin(x+y)$.　(海兵)

(b) $sin(x+60°)+2sin(x-60°)-\sqrt{3}.cos(120°-x)$ 〃 (海機)

(c) $sin100°.sin(-160°)+cos200°.cos(-280°)$ 〃

(d) $tanA.tan(A+60°)+tanA.tan(60°-A)$
$+tan(A+60°)tan(A-60°)$ 〃 答 -3.

〔解〕 (b) 元式 $=sin(x+60°)+2sin(x-60°)+tan60°.cos(60°+x)$

$$=\frac{sin(x+60°)cos60°+cos(60°+x)sin60°}{cos60°}+2sin(x-60°)$$

$$=2\{sin(x+120°)\}+2sin(x-60°)=2sin(60°-x)+2sin(x-60°)$$

$$=2sin(60°-x)-2sin(60°-x)=0.$$

(c) 元式 $=-sin100°.sin20°+(-cos20°).(-cos100°)$ 〔∵ 補角, 負角ノ公式〕

$$=cos(100°+20°)=-cos60°=-\frac{1}{2}.$$

11. (*a*) (i) $\tan\theta=\dfrac{b}{c}$ ナレバ $\tan(\theta-45^\circ)=\dfrac{b-c}{b+c}$ ナリ. (商船)

(ii) $\tan B=\dfrac{n.\sin A.\cos A}{1-n.\sin^2 A}$ ナレバ $\tan(A-B)=(1-n)\tan A$ ナリ.

(*b*) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ ナレバ $a.\cos\omega+b.\sin\omega=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(\theta+\omega)$ ナリ. (東工)

(*c*) $\sin\theta:\cos\theta=a:b$ ナレバ $a.\sin2\theta+b.\cos2\theta=b$ ナリ.

〔證明〕 (*b*) $\sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及ビ $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\therefore\ a.\cos\omega+b.\sin\omega=\sqrt{a^2+b^2}.\sin\theta.\cos\omega+\sqrt{a^2+b^2}.\cos\theta.\sin\omega=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(\theta+\omega)$.

(*c*) 略解 $a.\sin2\theta+b.\cos2\theta=b\left(\dfrac{a}{b}\sin2\theta+\cos2\theta\right)=b(\tan\theta.\sin2\theta+\cos2\theta)$, 下略.

12. (*a*) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ $\tan A$, $\tan B$ トシテ $\tan(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ. 答 $b/(c-a)$.

(*b*) 二次方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トスレバ $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ ナリ. (海兵)

〔證明〕 (*b*) 二次方程式ノ根ト係數ノ關係ニヨリ

$\tan\alpha+\tan\beta=-6$ 及ビ $\tan\alpha.\tan\beta=7$ ナルヲ以テ,

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{-6}{1-7}=1$, $\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

13. $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha.\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$ ノ値ハ θ ニ關係ナシ.

〔證明〕 問 5 ノ (c) ト同樣ニ 元式$=1-\cos^2\alpha$ トナルガ故ナリ.

14. $\tan B=\dfrac{2\sin A.\sin C}{\sin(A+C)}$ ナラバ $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セ. (仙醫)

〔證明〕 $\cot B=\dfrac{\sin(A+C)}{2\sin A.\sin C}=\dfrac{\sin A.\cos C+\cos A.\sin C}{2\sin A.\sin C}=\dfrac{1}{2}(\cot C+\cot A)$

卽チ $2\cot B=\cot A+\cot C$. 故ニ $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ハ等差級數ヲナス.

15. A, B ガ共ニ 90° ヨリモ小ナルトキハ次式ノ證如何,

$\sin(A+B)<\sin A+\sin B$. (東師)

〔證〕 A, B ガ正鋭角ナレバ $\cos B$, $\cos A$ ハ共ニ 1 ヨリモ小ナルヲ以テ, $\sin A.\cos B<\sin A$ 及ビ $\cos A.\sin B<\sin B$, 此二式ヲ相加フレバ $\sin A.\cos B+\cos A.\sin B<\sin A+\sin B$

卽チ $\sin(A+B)<\sin A+\sin B$.

16. 次式ヲ證明セヨ,

(*a*) $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA=\tan(p+q)A.\tan pA.\tan qA$.

(*b*) $\tan A+\tan2A+\tan3A=\tan A.\tan2A.\tan3A$.

(*c*) $\tan5A-\tan3A-\tan2A=\tan5A.\tan3A.\tan2A$.

〔證〕 (*a*) 左邊$=\tan(p+q)A-(\tan pA+\tan qA)$

$=\tan(p+q)A-\tan(pA+qA)(1-\tan pA.\tan qA)$

$\left[\because\ \tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}\right]$

17. 次式ヲ夫々證明セヨ,

(*a*) $\sin(A+B+C)=\sin A.\cos B.\cos C+\sin B.\cos C.\cos A$
$+\sin C.\cos A.\cos B-\sin A.\sin B.\sin C$.

(*b*) $\cos(A+B+C)=\cos A.\cos B.\cos C-\cos A.\sin B.\sin C$
$-\cos B.\sin C.\sin A-\cos C.\sin A.\sin B$

(*c*) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C}{1-\tan A.\tan B-\tan B.\tan C-\tan C.\tan A}$.

〔略解〕 $A+B+C=(A+B)+C$ トシテ展開シ, 再ビ展開ヲ行フ.

18. $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A.\tan B.\tan C=\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos A.\cos B.\cos C}$ ヲ證セ.

〔略解〕 左邊ヲ sin, cos ノ項ニ變ジ同分母トナシ, 公式 (8) ニ依ル.

第 二 章

倍角ノ三角函數

2. 二倍角

〔第一〕 $$\boldsymbol{\sin 2A = 2\sin A.\cos A} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\cos 2A} &\boldsymbol{= \cos^2 A - \sin^2 A}\\ &\boldsymbol{= 1 - 2\sin^2 A}\\ &\boldsymbol{= 2\cos^2 A - 1}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(大工, 海機)

〔證明〕 $\sin 2A = \sin(A+A) = \sin A.\cos A + \cos A.\sin A = 2\sin A.\cos A.$

$\cos 2A = \cos(A+A) = \cos A.\cos A - \sin A.\sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$= (1-\sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$= \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1.$

系. $\sin(\alpha \pm \beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta).$

〔第二〕 $$\boldsymbol{\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}} \tag{14}$$

(海機, 盛農)

〔證明〕 $\tan 2A = \tan(A+A) = \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A.\tan A} = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.$

注意. 上ノ證明ハ公式 (11) ニ於テ B ヲ A ト置キタルニ過ギズ.

3. 三倍角

(陸士, 七高, 海機)

〔第一〕 $$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sin 3A} &\boldsymbol{= 3\sin A - 4\sin^3 A}\\ \boldsymbol{\cos 3A} &\boldsymbol{= -(3\cos A - 4\cos^3 A)}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

〔證明〕 $\sin 3A = \sin(2A+A) = \sin 2A.\cos A + \cos 2A.\sin A$

$= 2\sin A.\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A = 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$

$= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A = 3\sin A - 4\sin^3 A.$

$\cos 3A = \cos(2A+A) = \cos 2A.\cos A - \sin 2A.\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A.\cos A = 2\cos^3 A - \cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

〔第二〕 $$\boldsymbol{\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}}$$ (商船)

〔證明〕 $\tan 3A = \tan(2A+A) = \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A.\tan A} = \dfrac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \times \tan A}$

$= \dfrac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A} = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}.$

注意. 之モ亦タ公式 (11) ニ於テ B ヲ 2A ト置キタルニ過ギズ.

問 題 及 ビ 解 答

次ノ 1 乃至 7 ヲ夫々證明セヨ,

1. (a) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$ (海兵, 商船, 五高, 長商, 千醫)

(b) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$ (c) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A.$ (陸士)

(d) $\dfrac{\sin^2 A + \cos 2A + \cos^2 A}{\sin 2A} = \cot A.$ (e) $\dfrac{1-\cos 2A}{\sin 2A} = \tan A.$ (海機)

〔證明〕 (a) $\sin 2A = 2\sin A.\cos A = 2\sin A.\cos A \times \dfrac{1}{\cos^2 A.\sec^2 A} = \dfrac{2\tan A}{\sec^2 A} = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A} \times \dfrac{1}{\sec^2 A} = (1-\tan^2 A) \times \dfrac{1}{1+\tan^2 A}.$

(c) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \dfrac{2\sin A.\cos A}{1+(2\cos^2 A - 1)} = \dfrac{2\sin A.\cos A}{2\cos^2 A} = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$

2. (a) $\sin 2\alpha + \sin^2\alpha.\tan\alpha + \cos^2\alpha.\cot\alpha = \sec\alpha.\mathrm{cosec}\,\alpha.$ (商船)

(b) $\sec 2A - \cos 2A = \dfrac{4\sin^2 A}{1-\tan^2 A}$ 或ハ $= \dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$ (水講)

(c) $\sin 2A.\tan 2A = \dfrac{4\sin^2 A}{1-\tan^2 A}.$ (d) $\tan\alpha = \dfrac{2}{\cot\frac{1}{2}\alpha - \tan\frac{1}{2}\alpha}.$ (東師)

(e) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin 2\alpha - 1} \div \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cot\alpha - 1}$ ハ $\mathrm{cosec}\,A$ ニ等シ. (醫專)

〔證明〕 (b) 左邊 $= \dfrac{1}{\cos 2A} - \cos 2A = \dfrac{1-\cos^2 2A}{\cos 2A} = \dfrac{(1+\cos 2A)(1-\cos 2A)}{\cos 2A}$

$= \dfrac{2\cos^2 A.2\sin^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \dfrac{4\sin^2 A}{1-\tan^2 A}$ 次問ハ 1 節ヲ $\dfrac{\sec^2 A}{1+\tan^2 A}$ ヲ乘ズ.

(e) $\sin 2\alpha - 1 = 2\sin\alpha.\cos\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = -(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ ニ注意セヨ.

3. (*a*) (i) $\tan A+\cot A=2\operatorname{cosec}2A$ (大工, 農實, 陸士)

(ii) $\tan 50^\circ+\cot 50^\circ=2\sec 10^\circ$. (專檢, 海機)

(*b*) (i) $\cot A-\tan A=2\cot 2A$. (陸士)

(ii) $\cot\dfrac{\pi}{8}-\tan\dfrac{\pi}{8}=2$. (大工)

(iii) $\tan A+2\tan 2A+4\tan 4A=\cot A-8\cot 8A$ 及ビ

$\tan 70^\circ=\tan 20^\circ+2\tan 40^\circ+4\tan 10^\circ$.

(*c*) $\tan A+\cot A=2\sqrt{2}$ ナラバ $2A$ ノ一ツノ値ハ 45° ナリ.

〔證明〕 (*a*) $\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A.\cos A}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2A}=2\operatorname{cosec}2A$.

(*b*) ノ (iii) ハ (i) ノ兩邊ノ角ヲ 2 倍シ且ツ兩邊ヲ 2 倍シ, 又其兩邊ノ角ヲ 2 倍シ且ツ兩邊ヲ 2 倍シ, 而シテ (i) ト此二式トヲ邊々相加ヘテ轉項ス.

(*c*) ハ (*a*) ト同樣ニ $2\operatorname{cosec}2A=2\sqrt{2}$, $\therefore\ \cos 2A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナルユエ $2A$ ノ最小正角ハ 45° ナリ.

4. (*a*) $\cot^2 A-\tan^2 A=\dfrac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}$ (陸士, 大工)

或ハ $=4\cot 2A.\operatorname{cosec}2A$. (農實, 盛農)

(*b*) $\dfrac{\cos\alpha\pm\sin\alpha}{\cos\alpha\mp\sin\alpha}=\sec 2\alpha\pm\tan 2\alpha$. (陸主, 農實)

〔證明〕 (*a*) $\cot^2 A-\tan^2 A=\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{\cos^4 A-\sin^4 A}{\sin^2 A.\cos^2 A}$

$$=\frac{(\cos^2 A+\sin^2 A)(\cos^2 A-\sin^2 A)}{\frac{1}{4}(2\sin A.\cos A)^2}=\frac{1\times\cos 2A}{\frac{1}{4}\sin^2 2A}=\frac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}$$

或ハ $=4\cot 2A.\operatorname{cosec}2A$.

(*b*) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha+\tan 2\alpha.$$

5. (*a*) $1+\tan(A+B).\tan(A-B)=\dfrac{\cos 2B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$. (農實)

(*b*) $1+\tan\alpha.\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sec\alpha$. (小商)

〔證明〕 (*a*) 左邊 $=1+\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}\cdot\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\dfrac{\cos(A+B)\cos(A-B)+\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B).\cos(A-B)}$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}=\frac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}=\frac{\cos 2B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$$

6. (*a*) (i) $\sin(\alpha+45^\circ).\sin(\alpha-45^\circ)=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. (海經)

(ii) $\sec(45^\circ+\alpha).\sec(45^\circ-\alpha)=2\sec 2\alpha$. (高等)

(*b*) $\cos(15^\circ-A).\sec 15^\circ-\sin(15^\circ-A).\operatorname{cosec}15^\circ=4\sin A$. (海機)

(*c*) (i) $\tan(45^\circ+A)+\tan(45^\circ-A)=2\sec 2A$. (水講)

(ii) $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$. (海機, 仙工, 商船, 海兵)

(*d*) $\sec^2(\alpha+45^\circ)-\operatorname{cosec}^2(\alpha-45^\circ)=4\tan 2\alpha.\sec 2\alpha$. (商船)

(*e*) $2+\tan^2(\alpha+90^\circ)+\cot^2(\alpha-90^\circ)=4\operatorname{cosec}^2 2\alpha$. (海兵)

(*f*) $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\cos^2(45^\circ-A)}=\sin 2A$.

〔證〕 (*b*) 左邊 $=\dfrac{\cos(15^\circ-A)}{\cos 15^\circ}-\dfrac{\sin(15^\circ-A)}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sin 15^\circ.\cos(15^\circ-A)-\cos 15^\circ.\sin(15^\circ-A)}{\sin 15^\circ.\cos 15^\circ}$

$$=\frac{\sin\{15^\circ-(15^\circ-A)\}}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=\frac{\sin A}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4\sin A.$$

(*c*) (ii) 左邊 $=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}-\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}=\dfrac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{(1-\tan A)(1+\tan A)}$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}=2\times\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=2\tan 2A.$$

(*e*) $1+\tan^2 A=\sec^2 A$, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$ ニ注意セヨ.

(*f*) 左邊ヲ $\sin, \cos$ トシ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ヲ用フ.

7. $\cos 2\alpha=2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$.

〔證明〕 $\cos 2\alpha=\sin(90^\circ-2\alpha)=2\sin(45^\circ-\alpha).\cos(45^\circ-\alpha)$

$=2\cos(45^\circ+\alpha).\cos(45^\circ-\alpha)$. 〔$\because\ \sin A=\cos(90^\circ-A)$〕

8. (*a*) $\sin x=\dfrac{3}{5}$ ヲ知リテ $\sin 2x$ 及ビ $\tan 2x$ ノ値ヲ求メヨ.

(海兵, 東工)

(*b*) $\tan\theta=\dfrac{2ab}{a-b}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ. (熊工)

(*c*) $\cot\alpha$ ノ値ヲ知リテ $\sin 2\alpha$ ノ値ヲ計算スル式ヲ作レ.

(海機)

(*d*) (i) $\tan A=2-\sqrt{3}$, $\cos B=\dfrac{1}{2}$ ナルトキ $\tan(2A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

答 ∞ 或 $-1/\sqrt{3}$. (北農)

(ii) $\tan x=2$, $\tan y=\dfrac{1}{3}$ ヲ知リテ $\tan\{2(x+y)\}$ „ (海兵, 陸士)

(e) 矩形ノ二隣邊ガ夫々 m 寸及ビ n 寸ナルトキ，兩對角線ノ交角ヲ求メヨ．

〔解〕 (a) $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2x}=\pm\sqrt{\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}}=\pm\frac{4}{5}$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\pm\frac{3}{4}$.

$\therefore\ \sin 2x=2\sin x.\cos x=2\times\frac{3}{5}\times\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{24}{25}$.

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=2\times\left(\pm\frac{3}{4}\right)\Big/\left\{1-\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2\right\}=\pm\frac{3}{2}\Big/\frac{7}{16}=\pm\frac{24}{7}$.

(b) 答 $\frac{4ab(a-b)}{(a-b)^2+4a^2b^2}$.　(c) 答 $\cot x=a$ トセバ $\frac{2a}{1+a^2}$.

(d) (i) $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

及ビ $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2B}}{\cos B}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{2}=\pm\sqrt{3}$.

$\therefore\ \tan(2A+B)=\frac{\tan 2A+\tan B}{1-\tan 2A.\tan B}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}}$ 或ハ $\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}}=\infty$ 或ハ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) 答 $-\frac{7}{24}$.　(e) 答 $\frac{2mn}{n^2-m^2}$.

9. (a) $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ノ値ヲ求メヨ．（海機）

(b) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ 〃（海機）

(c) $\sin^6A+\cos^6A=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A$ ヲ證セ．（海兵）

(d) $\cos^8A-\sin^8A=\cos 2A\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2A\right)$ 〃（陸主）

〔解〕 (a) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta.\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}(2\sin\theta.\cos\theta)^2$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{17}{25}$.

(c) $\sin^6A+\cos^6A=(\sin^2A)^3+(\cos^2A)^3$

$=(\sin^2A+\cos^2A)^3-3\sin^2A.\cos^2A(\sin^2A+\cos^2A)$

$=1^3-3\sin^2A.\cos^2A\times 1=1-\frac{3}{4}(2\sin A\cos A)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2A$.

10. (a) $2\sin^2\theta\sin^2\phi+2\cos^2\theta\cos^2\phi-\cos 2\theta\cos 2\phi=1$ ヲ證セ．（盛農）

(b) $\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}$

$=1-\frac{1}{2}(\cos^2A+\cos^2B)$ ヲ證セ．（東商）

〔證〕 (a) 左邊 $=2\sin^2\theta\sin^2\phi+2\cos^2\theta\cos^2\phi-\cos 2\theta\cos 2\phi$

$=2\{(\sin\theta\sin\phi-\cos\theta\cos\phi)^2+2\sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi\}-\cos 2\theta\cos 2\phi$

$=2\cos^2(\theta+\phi)+\sin 2\theta\sin 2\phi-\cos 2\theta\cos 2\phi$

$=2\cos^2(\theta+\phi)-\cos(2\theta+2\phi)=1+\cos(2\theta+2\phi)-\cos(2\theta+2\phi)=1$.

(b) 左邊 $=\left\{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right\}^2$

$-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$=\left\{\sin\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)\right\}^2-\frac{1}{2}\{\sin(A+B)\sin(A-B)\}$

$=\sin^2A-\frac{1}{2}\{\sin^2A-\sin^2B\}=1-\cos^2A-\frac{1}{2}(\cos^2B-\cos^2A)$

$=1-\frac{1}{2}(\cos^2A+\cos^2B)$.

11. $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$ ナルトキハ次ノ證如何，

(a) $\cos^2\beta=1+\cos 2\alpha$.　(b) $\cos 2\beta=2\cos 2\alpha+1$.（醫專）

〔證〕 (a) $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$ ノ兩邊ニ 1 ヲ加フレバ $\sec^2\alpha=2\sec^2\beta$,

$\therefore\ \cos^2\beta=2\cos^2\alpha=1+2\cos^2\alpha-1=1+\cos 2\alpha$.

12. $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$ ガ等比級數ヲナストキハ次ノ證如何，

$\cos 2\beta=2\cos^2(A+45^\circ)$.

〔略解〕 定義ニヨリ $\sin^2B=\sin A\cos A$, 故ニ $2\sin^2B=2\sin A\cos A$,

$\therefore\ \cos 2B=1-2\sin A\cos A=(\cos A-\sin A)^2$

$=2(\cos A\cos 45^\circ-\sin A\sin 45^\circ)^2=2\cos^2(A+45^\circ)$.

〔別解〕 第四章 (A, B) 式ヲ併用シテ解クコト次ノ如シ，

$\cos 2B=1-\sin 2A=\sin 90^\circ-\sin 2A$　〔$\because\ \sin 90^\circ=1$〕

$=2\cos(45^\circ+A)\sin(45^\circ-A)$

$=2\cos^2(45^\circ+A)$.　〔$\because\ \sin A=\cos(90^\circ-A)$〕

13. $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナルトキハ $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ ナルコトヲ證セ. (高等)

〔證〕 $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{\sqrt{\overline{a-b}^2}+\sqrt{\overline{a+b}^2}}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

14. (a) $\sin A.\cos^3 A-\sin^3 A.\cos A=\dfrac{1}{4}\sin 4A$ ヲ證セ. (海兵)

(b) $3\sin A-\sin 3A=2\sin A(1-\cos 2A)$ ヲ證セ. (水講)

(c) $4\sin 3A.\cos^3 A+4\cos 3A.\sin^3 A=3\sin 4A$ 〃

(d) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2.$ 〃 (陸主)

(e) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=4\sin(A+B)\sin(B-A)$ 〃 (商船)

〔證〕 (a) 左邊$=\sin A.\cos A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\dfrac{1}{2}\sin 2A(\cos 2A)=\dfrac{1}{4}\sin 4A.$

(b) 左邊$=3\sin A-(3\sin A-4\sin^3 A)=4\sin^3 A=2\sin A(2\sin^2 A)$

$=2\sin A(1-\cos 2A).$

(c) 左邊$=4\{(3\sin A-4\sin^3 A)\cos^3 A+(4\cos^3 A-3\cos A)\sin^3 A\}$

$=4\{3\sin A.\cos^3 A-3\cos A.\sin^3 A\}$

$=6\times 2\sin A.\cos A\{\cos^2 A-\sin^2 A\}$

$=6\sin 2A.\cos 2A=3\sin 4A.$

(d) 左邊$=\dfrac{3\sin A-4\sin^3 A}{\sin A}-\dfrac{4\cos^3 A-3\cos A}{\cos A}=3-4\sin^2 A-4\cos^2 A+3$

$=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)=6-4=2.$

〔別解〕 左邊$=\dfrac{\sin 3A.\cos A-\cos 3A.\sin A}{\sin A.\cos A}=\dfrac{\sin(3A-A)}{\frac{1}{2}\sin 2A}=2.$

15. $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$ ヲ證セ.

〔證〕 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A,\quad \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$

∴ 左邊$=\cos 30^\circ+3\cos 10^\circ+3\sin 20^\circ-\sin 60^\circ$

$=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$ 〔∵ $\cos 30^\circ=\sin 60^\circ$〕

16. (a) $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)-\sin^3(120^\circ-A)=-\dfrac{3}{4}\sin 3A$ ヲ證セ.

(b) $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\dfrac{3}{4}\cos 3A$ 〃

〔證〕 (a) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ ヨリ $\sin^3 A=\dfrac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$, 故ニ

左邊$=\dfrac{1}{4}[\{3\sin A-\sin 3A\}+\{3\sin(120^\circ+A)-\sin(360^\circ+3A)\}$

$-\{3\sin(120^\circ-A)-\sin(360^\circ-3A)\}]$

$=\dfrac{1}{4}[3\sin A+3\sin(120^\circ+A)-3\sin(120^\circ-A)-\{\sin 3A+\sin 3A-\sin(-3A)\}]$

$=\dfrac{3}{4}[\sin A+2\cos 120^\circ.\sin A-\sin 3A]$ 〔∵ (A,B) 式 及ビ $\sin(-A)=-\sin A$〕

$=\dfrac{3}{4}\left[\sin A+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)\sin A-\sin 3A\right]=-\dfrac{3}{4}\sin 3A.$

17. $\dfrac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\tan(A-45^\circ).\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}$ ヲ證セ.

〔證〕 左邊$=\dfrac{3\sin A-4\sin^3 A+4\cos^3 A-3\cos A}{3\sin A-4\sin^3 A-4\cos^3 A+3\cos A}$ 〔∵ 公式 (15) ニ依ル〕

$=\dfrac{3(\sin A-\cos A)-4(\sin^3 A-\cos^3 A)}{3(\sin A+\cos A)-4(\sin^3 A+\cos^3 A)}$

$=\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}.\dfrac{3-4(\sin^2 A+\sin A.\cos A+\cos^2 A)}{3-4(\sin^2 A-\sin A.\cos A+\cos^2 A)}$

$=\dfrac{\tan A-1}{\tan A+1}.\dfrac{-(1+4\sin A.\cos A)}{-(1-4\sin A.\cos A)}$ 〔∵ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$〕

$=\dfrac{\tan A-\tan 45^\circ}{1+\tan A.\sin 45^\circ}.\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}=\tan(A-45^\circ).\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}.$

18. (a) $\sin 3A=4\sin A.\sin(60^\circ+A).\sin(60^\circ-A).$ (海機, 農實, 海兵)

(b) $\cos 3A=4\cos A.\cos(60^\circ+A).\cos(60^\circ-A).$

(c) $\tan A.\tan(60^\circ+A).\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A.$ (北農)

〔證明〕 (a) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A=4\sin A\left\{\dfrac{3}{4}-\sin^2 A\right\}$

$=4\sin A\{\sin^2 60^\circ-\sin^2 A\}$ $\left[∵ \sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$=4\sin A.\sin(60^\circ+A).\sin(60^\circ-A).$ 〔∵ 公式 (10) ニ依ル〕

注意. 右邊ヨリ左邊ニ誘導センニハ此解ヲ逆視スベシ.

19. (a) $\sin 33^\circ\frac{3}{4}=0.55557$ 及ビ $\cos 33^\circ\frac{3}{4}=0.83147$ ナリトシテ $\sin 67^\circ\frac{1}{2}$ 及ビ $\cos 101^\circ\frac{1}{4}$ ノ値ヲ小數第五位迄求メヨ. (商船)

(b) $\tan A=0.75$ ナルトキハ $\tan 3A$ ノ値幾何.

(c) $\sin(3A-45^\circ)=4\sin(A-15^\circ).\cos(A+15^\circ).\cos(A-45^\circ)$ ヲ證セ.

答 (a) 0.92388, −0.19510. (b) −2.66弱.

(c) ハ $\sin 3(A-15^\circ)$ トシ前題 (a) ニ傚フ.

20. (a) $\sin 4A=4\sin A.\cos A-8\sin^3 A.\cos A$ ヲ證セ.

(b) $\cos 4A=1-8\cos^2 A+8\cos^4 A$ 〃

(c) $\sin 5A=5\sin A-20\sin^3 A+16\sin^5 A$ 〃 (高等, 商船)

(d) $\cos 5A=5\cos A-20\cos^3 A+16\cos^5 A$ 〃 (東商, 商船)

(e) $\sin 6A=\cos A(6\sin A-32\sin^3 A+32\sin^5 A)$ 〃

(f) $\cos 6A=-(1-18\cos^2 A+48\cos^4 A-32\cos^6 A)$ 〃

〔證〕 (a) $\sin 4A=2\sin 2A.\cos 2A=4\sin A.\cos A(1-2\sin^2 A)=4\sin A.\cos A-8\sin^3 A.\cos A.$

(d) $\cos 5A=\cos(4A+A)=\cos 4A.\cos A-\sin 4A.\sin A$

$=(2\cos^2 2A-1)\cos A-2\sin 2A.\cos 2A.\sin A$

$=\{2(2\cos^2 A-1)^2-1\}\cos A-4\sin^2 A.\cos A(2\cos^2 A-1)$

$=(8\cos^4 A-8\cos^2 A+1)\cos A-4(1-\cos^2 A)\cos A(2\cos^2 A-1)$

$=8\cos^5 A-8\cos^3 A+\cos A-8\cos^3 A+8\cos^5 A+4\cos A-4\cos^3 A$

$=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A.$

〔別解〕 $4A=3A+A$ 及ビ $5A=3A+2A$ トスルモ可ナリ.

(e) 左邊 $=\sin 2(3A)=2\sin 3A.\cos 3A=2(3\sin A-4\sin^3 A)(4\cos^3 A-3\cos A)$

$=2\cos A(3\sin A-4\sin^3 A)\{4(1-\sin^2 A)-3\}$

$=\cos A(6\sin A-32\sin^3 A+32\sin^5 A).$

第 三 章

分角ノ三角函數

4. 半角

〔第一〕

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{2} \\ \cos^2\frac{A}{2}&=\frac{1+\cos A}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

〔證明〕 公式 (13) ニ於テ A ヲ $\frac{1}{2}$A トシ轉項セバ證ヲ得ベシ.

〔第二〕

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A} \qquad (17)$$

〔證明〕 $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$ ヲ $\tan\frac{A}{2}$ ノ二次方程式トシテ解ケバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

問 題 及 ビ 解 答

次ノ1乃至4ヲ夫々證明セヨ,

1. (a) $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$. (b) $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$. (東商, 海機)

(c) $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\frac{A}{2}$. (d) $\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$. (東工, 商船)

〔證明〕 (b) $\tan\frac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}.$

(d) $\tan^2 A=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A}=\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}.$

2. (a) $\tan\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha)$. (商船) (b) $\mathrm{cosec}\,\alpha-\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}$. (長商)

〔證明〕 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}.\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha).$

3. (a) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2=4\cos^2\frac{1}{2}(A-B).$ (商船)

(b) $(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2=4\sin^2\frac{1}{2}(A-B).$ (仙工)

注意. 本題ノ如キハ $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2$ ヲ一項式ニ直セト換問スルコアリ.

〔證明〕 (a) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2$

$$=(\cos^2 A+\cos^2 B+2\cos A.\cos B)+(\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A.\sin B)$$

$$=2+2(\cos A.\cos B+\sin A.\sin B)=2\{1+\cos(A-B)\}$$

$$=2\left\{2\cos^2\frac{1}{2}(A-B)\right\}=4\cos^2\frac{1}{2}(A-B).$$

4. $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$ (高等)

〔證明〕 左邊$=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}-\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\dfrac{\sin\left\{\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)\right\}}{\cos^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B}$

$$=\frac{2\sin B}{2\left(\cos^2\frac{1}{2}A-\cos^2\frac{1}{2}B\right)}=\frac{2\sin B}{1+\cos A-(1-\cos A)}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$$

5. (a) $\sin A=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求メヨ. (海兵, 七高)

(b) $\tan A=\frac{1}{5}$ ナルトキ $\tan 2A$ 及ビ $\tan\frac{A}{2}$ 〃 (三高)

答 (a) A ヲ正鋭角トスルトキハ $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$. (b) $-5\pm\sqrt{26}$.

6. (a) $\frac{1-\cos A}{\sin A}$ ヲ最簡ニシ此結果ニヨリテ $\tan 22^\circ 30'$ ノ値ヲ求メヨ. 答 $\sqrt{2}-1$. (海機)

(b) $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$ ヲ證シ, 且ツ之ヲ用ヒテ $\tan 15^\circ$ 及ビ $\tan 22^\circ\frac{1}{2}$ ヲ求メヨ. 答 $2-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-1$. (四高, 盛農)

〔解〕 (b) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)+\sin\theta}{(1+\cos\theta)+\sin\theta}=\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}.$$

次ニ $\tan 15^\circ=\frac{1+\sin 30^\circ-\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ+\cos 30^\circ}$ 及ビ $\tan 22^\circ.5=\frac{1+\sin 45^\circ-\cos 45^\circ}{1+\sin 45^\circ+\cos 45^\circ}$ ニ 30° 及ビ 45° ノ函數値ヲ代入シテ計算ス.

7. (a) $\cos 315^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ 157°.5 ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ.

答 $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. (海兵)

(b) $\tan 150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ知リテ $\tan 75^\circ$ ヲ求メヨ. 答 $\sqrt{3}+2$. (五高)

(c) $\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ヲ與ヘテ, 36° ノ角ノ三角函數ヲ求メヨ.

答 $\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, 等 (東工)

8. $\sin\theta:\sin\frac{\theta}{2}=8:5$ ナルトキ $\cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 $2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}:\sin\frac{\theta}{2}=8:5$, 故ニ $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{4}{5}$, 故ニ $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{16}{25}$,

即チ $1+\cos\theta=\frac{16}{25}$, $\therefore\ \cos\theta=\frac{16}{25}-1=-\frac{9}{25}$.

9. $\dfrac{2\cos A.\cos(90^\circ+A)}{\tan 225^\circ+\cos(-2A)}+\dfrac{\operatorname{cosec}150^\circ}{\cot\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)-\tan\left(\frac{A}{2}-90^\circ\right)}$ ヲ最簡ニセヨ. 答 0. (海兵)

10. $\cos A=\frac{40}{41}$, $\cos B=\frac{60}{61}$ ヲ與ヘテ $\sin^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{41\times 61}$ ヲ證セ.

〔證明〕 $\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}=\pm\frac{9}{41}$, 同樣ニ $\sin B=\pm\frac{11}{61}$.

$$\therefore\ \sin^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}\{1-\cos(A-B)\}=\frac{1}{2}\{1-\cos A.\cos B-\sin A.\sin B\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{40}{41}\times\frac{60}{61}-\frac{9}{41}\times\frac{11}{61}\right\}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{2499}{41\times 61}\right\}=\frac{1}{41\times 61}$$

或ハ $=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{40}{41}\times\frac{60}{61}-\left(-\frac{9}{41}\right)\times\left(-\frac{11}{61}\right)\right\}=$ 〃 $=$ 〃

11. (a) $\frac{1\pm\sin\theta}{1\mp\sin\theta}=\tan^2\left(45^\circ\pm\frac{\theta}{2}\right)$ ヲ證セ. (陸士, 商船, 名工)

(b) $\sec\theta\pm\tan\theta=\tan\left(45^\circ\pm\frac{\theta}{2}\right)$ 〃 (東工, 海機, 商船)

〔證明〕 (a) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{1+\cos(90^\circ-\theta)}{1-\cos(90^\circ-\theta)}=\dfrac{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}=\cot^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$

$=\tan^2\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$. 〔$\because$ $\cot A=\tan(90^\circ-A)$〕 其他之ニ倣フ.

12. (a) $\tan(A+60^\circ).\tan(A-60^\circ)=\dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}$ ヲ證セ. (二高, 專檢)

(b) $\tan\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right).\tan\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{2\cos\alpha-1}{2\cos\alpha+1}$ 〃 (名工)

〔證明〕 (b) 左邊$=\dfrac{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}.\dfrac{\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\sin^2 30^\circ-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2 30^\circ-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ 〔公式 (10)〕

$$=\frac{\frac{1}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{3}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-1}{2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+1}=\frac{2\cos\alpha-1}{2\cos\alpha+1}.$$

13. 二次方程式 $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ $2p=\sec\theta$, $2q=\tan\theta$ ナルトキハ兩根ハ $1\Big/\left(1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ 及ビ $1\Big/\left(\cot^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)$ ナリ. (名工)

〔證明〕 $x^2-2px+q^2=0$ ノ二根ヲ α, β トセバ根ト係數ノ關係ニヨリ

$\alpha+\beta=2p=\sec\theta$ ......(1)　　$\alpha\beta=q^2=\dfrac{1}{4}\tan^2\theta$ ......(2)

從テ $\alpha-\beta=\sqrt{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=1$ ......(3)　〔$\because \sqrt{(1)^2-(2)\times 4}$〕

(1), (3) ヨリ $\alpha=\dfrac{\sec\theta+1}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2\cos\theta}=\dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)}=\dfrac{1}{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}$,

$$\beta=\frac{\sec\theta-1}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}{2(\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta)}=\frac{1}{\cot^2\frac{1}{2}\theta-1}.$$

14. (a) $\cos\alpha=\dfrac{\cos\beta-e}{1-e.\cos\beta}$ ナレバ $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}.\tan\dfrac{\beta}{2}$ ナリ.

(海機, 商船, 高等)

(b) $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha.\cos\beta}$ ナレバ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}.\tan^2\dfrac{\beta}{2}$ ナリ.

(c) $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ナレバ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ナリ. (商船)

〔證明〕 (a) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\left(1-\dfrac{\cos\beta-e}{1-e.\cos\beta}\right)\Big/\left(1+\dfrac{\cos\beta-}{1-e.\cos\beta}\right)$

$$=\frac{1-e.\cos\beta-\cos\beta+e}{1-e.\cos\beta+\cos\beta-e}=\frac{1+e-\cos\beta(1+e)}{1-e+\cos\beta(1-e)}=\frac{(1+e)(1-\cos\beta)}{(1-e)(1+\cos\beta)}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\beta}{2}.$$ 下略.

第四章

和差ト積トノ關係

5. 和或ハ差ヲ積ニ變ズルコト

〔第一〕

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)+\sin(A-B)&=2\sin A.\cos B\\ \sin(A+B)-\sin(A-B)&=2\cos A.\sin B\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(A+B)+\cos(A-B)&=2\cos A.\cos B\\ \cos(A+B)-\cos(A-B)&=-2\sin A.\sin B\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

此四公式ヲ (A, B) 式ト名ヅク.

〔證明〕 公式 (8), (9) ヲ加減スレバ直チニ證ヲ得.

〔第二〕

$$\left.\begin{aligned}\sin S+\sin D&=2\sin\frac{S+D}{2}\cos\frac{S-D}{2}\\ \sin S-\sin D&=2\cos\frac{S+D}{2}\sin\frac{S-D}{2}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos S+\cos D&=2\cos\frac{S+D}{2}\cos\frac{S-D}{2}\\ \cos S-\cos D&=-2\sin\frac{S+D}{2}\sin\frac{S-D}{2}\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

此四公式ヲ (S, D) 式 ト名ヅク.

〔證明〕 第一ニ於テ $A+B=S$, $A-B=D$ トスレバ

$A=\dfrac{S+D}{2}$ 及ビ $B=\dfrac{S-D}{2}$ トナルガ故ナリ.

6. 積ヲ和或ハ差ニ變ズルコト

之レ前條ノ逆ナリ.

問題及ビ解答

1. (a) $\sin(30^\circ+A)+\sin(30^\circ-A)=\cos A$ ヲ證セ.

(b) $\sin(45^\circ+A)-\sin(45^\circ-A)=\sqrt{2}.\sin A$ 〃

(c) $\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)=\cos A$ 〃 (東商)

(d) $\sin(150^\circ+A)+\sin(150^\circ-A)$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $\cos A$. (高等)

〔略解〕 (18), (19) ニ依ル.

2. 次ノ (*a*) 乃至 (*f*) ハ證明シ, (*g*), (*h*), (*k*) ハ最簡ニセヨ.

(*a*) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$ (*b*) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}+\cot\dfrac{A+B}{2}=0.$ (東商,陸士)

(*c*) $\dfrac{\sin A+\sin 3A}{\cos A-\cos 3A}=\cot A.$ (陸士) (*d*) $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\tan 2A.$

(*e*) $\dfrac{\sin B+\sin 5B}{\cos B-\cos 5B}=\cot 2B.$ (東商) (*f*) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}=\tan\alpha.$ (海兵)

(*f*) $\dfrac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}=\dfrac{\tan A}{\tan B}.$

(*g*) $\dfrac{\sin 3A+\sin 2A}{\cos 3A-\cos 2A}.$ (東商) (*h*) $\dfrac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}.$ (水講)

(*k*) $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}+\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\cos 3x-\cos x}.$

〔略解〕 (*f*) ハ (A, B) 式ニ依ル. 其他ハ (S, D) 式ニ依ル.

(*b*) 左邊$=\dfrac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}+\cot\dfrac{A+B}{2}=-\cot\dfrac{A+B}{2}+\cot\dfrac{A+B}{2}=0.$

答 (*g*) $-\cot\dfrac{A}{2}.$ (*h*) $\cot\dfrac{5A}{2}.\tan\dfrac{A}{2}.$ (*k*) $-2\cot 2x.$

3. (*a*) $\sin 80^\circ+\sin 40^\circ$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ. (海兵)

(*b*) $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\sin 85^\circ$ ヲ證セ.

(*c*) $\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{2}=2\sin\dfrac{5\pi}{12}.\sin\dfrac{\pi}{12}$ 〃 (農實)

〔解〕 $\sin 80^\circ+\sin 40^\circ=2\sin\dfrac{1}{2}(80^\circ+40^\circ).\cos\dfrac{1}{2}(80^\circ-40^\circ)=2\sin 60^\circ.\cos 20^\circ$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ=\sqrt{3}.\cos 20^\circ.$$

4. $\sec\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\sec\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{2\sqrt{2}.\cos x}{\cos 2x}$ ヲ證セ.

〔證明〕 左邊$=\dfrac{1}{\cos(45^\circ+x)}+\dfrac{1}{\cos(45^\circ-x)}$ 〔∵ $\pi=180^\circ$〕

$$=\frac{\cos(45^\circ+x)+\cos(45^\circ-x)}{\cos(45^\circ+x).\cos(45^\circ-x)}=\frac{2\cos 45^\circ.\cos x}{\cos^2 45^\circ-\sin^2 x}=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x}{\frac{1}{2}-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}.\cos x}{1-2\sin^2 x}=\frac{2\sqrt{2}.\cos x}{\cos 2x}.$$

5. $17A=180^\circ$ ナルトキ $\dfrac{\cos A.\cos 13A}{\cos 3A+\cos 5A}=-\dfrac{1}{2}$ ヲ證セ. (仙醫, 京醫)

〔略解〕 $\cos 13A=\cos(17A-4A)=\cos 17A.\cos 4A+\sin 17A.\sin 4A$

$$=\cos 180^\circ.\cos 4A+\sin 180^\circ.\sin 4A=(-1)\cos 4A+0\times\sin 4A=-\cos 4A,$$

6. (*a*) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ ヲ證セ.

(*b*) $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$. 〃

〔證明〕 (*a*) 左邊$=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ 〔第2條第一ノ系〕 $=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$

7. (*a*) (i) $\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ヲ證セ.

(ii) $\sin\alpha-\cos\beta=-2\cos\left(45^\circ+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ 〃

(*b*) $\sin 84^\circ+\cos 66^\circ$ ヲ一項式ニ化セ. 答 $\sqrt{3}.\sin 54^\circ.$ (商船)

(*c*) $\sin(30^\circ-A)-\cos(120^\circ+A)$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $\cos A.$ (海兵)

(*d*) $2\{\sin(30^\circ+x)+\cos(60^\circ+x)\}^2-\{\cos(45^\circ-x)-\sin(45^\circ-x)\}^2$

$=2\cos 2x$ ヲ證セ. (高等)

考ヘ方 本題ノ如ク異名函數ノ場合ニハ先ヅ同名函數ニ直ス.

〔證〕 (*a*) $\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta)$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^\circ\right)\quad〔∵ (A, B) 式〕$$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\quad〔∵ 負角, 餘角ノ公式〕$$

(*d*) 左邊$=2\{\sin(30^\circ+x)+\sin(30^\circ-x)\}^2-\{\sin(45^\circ+x)-\sin(45^\circ-x)\}^2$

$=2\{2\sin 30^\circ.\cos x\}^2-\{2\cos 45^\circ\sin x\}^2$ 〔∵ (A, B) 式〕

$$=2\left\{2\times\frac{1}{2}\cos x\right\}^2-\left\{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right\}^2=2\cos^2 x-2\sin^2 x=2\cos 2x.$$

8. (a) (1) $\sin 10° + \sin 20° - \sin 30°$ ヲ最簡ニセヨ. （海兵）

(2) $\sin 95° - \sin 25° - \sin 35° = 0$ ヲ證セ. （海兵）

(3) $\sin 50° + \sin 10° - \cos 20° = 0$ ヲ證セ. （農實）

(4) $\sin 3A - \sin A - \sin 5A = \sin 3A(1 - 2\cos 2A)$ ヲ證セ.

(b) (1) $\cos 55° + \cos 65° + \cos 175° = 0$ ヲ證セ. （仙醫, 海機）

(2) $\cos 138° + \cos 102° + \cos 18°$ ノ値ヲ求メヨ. （陸士）

(c) (1) $\sin 3\theta + \sin 2\theta + 3\sin\frac{3\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$ ヲ積形ニ變ゼヨ. （長商）

(2) $\cos 3A - \cos 2A + 2\sin\frac{3A}{2}.\sin\frac{A}{2}$ 〃 （東商）

(d) $\dfrac{\sin A - \sin 3A + \sin 5A}{\cos A - \cos 3A + \cos 5A}$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $\tan 3A$. （大工）

(e) $\dfrac{\sin A + \sin(A+2B) + \sin(A+4B)}{\cos A + \cos(A+2B) + \cos(A+4B)} = \tan(A+2B)$ ヲ證セ.

(f) $\{\sin A + \sin B + \sin(A+B)\}^2 = 4\cos^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{B}{2}$ ヲ證セ.

〔解〕 考ヘ方　sin 或ハ cos ノ三項式ハ常ニ最大, 最小角ノ項ヲ括リ, 而シテ A, B 式或ハ S, D 式ニ依ル.　　9 乃至 11 モ然リ.

(a) (1) 元式 $= -(\sin 30° - \sin 10°) + \sin 20° = -2\cos 20°.\sin 10° + 2\sin 10°.\cos 10°$

$= -2\sin 10°\{\cos 20° - \cos 10°\} = -2\sin 10°\{-2\sin 15°.\sin 15°\}$

$= 4\sin 15°.\sin 10°.\sin 5°.$

(3) ハ $\cos 20° = \sin 70°$ トス.

(b) (2) 元式 $= (\cos 138° + \cos 18°) + \cos 102° = 2\cos 78°.\cos 60° + \cos 102°$

$= \cos 78° + \cos 102° = 2\cos 90°.\cos(-12°) = 0.$　　[∵ $\cos 90° = 0$]

(c) (1) 元式 $= 2\sin\frac{5\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{5\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left\{2\sin 2\theta.\cos\frac{\theta}{2}\right\} = 4\sin 2\theta.\cos^2\frac{\theta}{2}.$

(2) ノ答 $-4\cos 2A.\sin^2\frac{A}{2}.$

(f) 略解 $\sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$ トス.

9. (a) $\cos A + \cos(A - 120°) + \cos(A + 120°) = 0$ ヲ證セ. （五高, 千醫）

(b) $\cos A + \cos(A + 120°) + \cos(A + 240°)$ ヲ最簡ニセヨ. 答 0.

(c) $\dfrac{\cos A + \cos(120° + B) + \cos(120° - B)}{\sin B + \sin(120° + A) - \cos(120° - A)}$ 〃 （仙工）

〔解〕 (c) 元式 $= \dfrac{\cos A + 2\cos 120°.\cos B}{\sin B + 2\cos 120°.\sin A} = \dfrac{\cos A - 2\cos 60°.\cos B}{\sin B - 2\cos 60°.\sin A}$

$= \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin B - \sin A} = \dfrac{-2\sin\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B).\sin\frac{1}{2}(B-A)} = \tan\frac{A+B}{2}.$

10. 次ノ各々ヲ證明セヨ,

(a) (1) $1 + \cos 6\theta - \cos 10\theta - \cos 4\theta = 4\sin 2\theta.\cos 3\theta.\sin 5\theta.$ （岡醫）

(2) $\{1 + \cos A + \cos B + \cos(A+B)\}^2 = 4\cos^2\frac{A}{2}.\cos^2\frac{B}{2}.$

(b) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) = -4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

(c) $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + 1 = 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

〔證〕 考ヘ方　本題ノ如ク左邊ニ 1 ヲ有スルトキハ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ニ依テ 1 ヲ消ス. 又 -1 ヲ消スニハ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ヲ用フ.

(a) (1) 左邊 $= 1 + (2\cos^2 3\theta - 1) - 2\cos 7\theta.\cos 3\theta = 2\cos 3\theta(\cos 3\theta - \cos 7\theta)$

$= 2\cos 3\theta\{-2\sin 5\theta.\sin(-2\theta)\} = 4\cos 3\theta.\sin 5\theta.\sin 2\theta.$

(2) ハ前題ノ (f) ヲ參考スベシ.

(c) 左邊 $= 2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2} + 2\cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2} - 1 + 1$

$= 2\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-2\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\right\}$

$= 2\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left\{2\cos\frac{\gamma-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right\} = 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$

11. $\dfrac{\sin(A-C) + 2\sin A + \sin(A+C)}{\sin(B-C) + 2\sin B + \sin(B+C)}$ ノ値ハ C ニ付テ關係ナシ.

〔略解〕 元式ヲ最簡ニセバ $\sin A/\sin B$ トナルガ故ナリ.

12. (a) (1) $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ=2\sin 75^\circ.\cos 5^\circ$　ヲ證セ.

(2) $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$　〃

(b) (1) $\sin A+\sin 2A+\sin 3A+\sin 4A=4\cos\dfrac{A}{2}\cos A\sin\dfrac{5A}{2}$　〃

(2) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$　ヲ積形ニ變ゼヨ.　（高等）

(c) (1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$　ヲ證セ.

(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$　〃

(d) (1) $\sin(y+z-x)+\sin(z+x-y)+\sin(x+y-z)-\sin(x+y+z)$

$$=4\sin x\sin y\sin z$$　ヲ證セ.

(2) $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$　ヲ證セ.　（醫專）

〔解〕 考ヘ方　sin 或ハ cos ノ四項式ハ兩外項ト兩中項トヲ括リ,　而シテ A, B 式或ハ S, D 式ニ依ル.

(b) 元式 $=(\cos 7x+\cos x)+(\cos 5x+\cos 3x)$

$=2\cos 4x\cos 3x+2\cos 4x\cos x=2\cos 4x(\cos 3x+\cos x)$

$=2\cos 4x(2\cos 2x.\cos x)=4\cos 4x.\cos 2x.\cos x.$

(c) (1) 左邊 $=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\dfrac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\dfrac{-(\alpha+\beta)}{2}$

$=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left\{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right\}$

$=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left\{-2\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\sin\dfrac{-(\beta+\gamma)}{2}\right\}$

$=4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}.$

(d) (1) 左邊 $=2\sin z\cos(y-x)+2\cos(x+y)\sin(-z)$

$=2\sin z\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}$

$=2\sin z\{-2\sin x.\sin(-y)\}=4\sin x.\sin y.\sin z$

13. (a) $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)$　ヲ最簡ニセヨ.　答 $\dfrac{3}{2}$.

(b) $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(120^\circ-A)$　〃　答 $\dfrac{3}{2}$.（仙工）

(c) $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(240^\circ+A)$　〃　（千醫, 專檢）

(d) $\cos^2 27^\circ.5+\cos^2 32^\circ.5+\cos^2 87^\circ.5=\dfrac{3}{2}$　ヲ證セ.　（陸士）

〔解〕 考ヘ方　$\sin^2$ 或ハ $\cos^2$ ノ多項式ハ各項ヲ二倍角ニ變ズ.

(c) 元式 $=\cos^2 A+\cos^2(60^\circ-A)+\cos^2(-60^\circ-A)$　〔$\because$ $\cos(180^\circ-A)=-\cos A$〕

$=\cos^2 A+\cos^2(60^\circ-A)+\cos^2(60^\circ+A)$　〔$\because$ $\cos(-A)=\cos A$〕

$=\dfrac{1}{2}\{1+\cos 2A+1+\cos(120^\circ-2A)+1+\cos(120^\circ+2A)\}$

〔$\because$ $\cos^2 A=\frac{1}{2}(1+\cos 2A)$〕

$=\dfrac{1}{2}\{3+\cos 2A+2\cos 120^\circ.\cos(-2A)\}$　〔$\because$ (A, B) 式〕

$=\dfrac{1}{2}\{3+\cos 2A-\cos 2A\}$〔$\because$ $\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$〕$=\dfrac{3}{2}.$

14. (a) $\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)$

$$=1+2\cos(x-y)\cos(y-z)\cos(z-x)$$　ヲ證セ.

(b) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z+\sin^2(x+y+z)$

$$=2\{1-\cos(x+y)\cos(y+z)\cos(z+x)\}$$　〃

〔證明〕 (b) 左邊 $=\dfrac{1}{2}\{1-\cos 2x+1-\cos 2y+1-\cos 2z+1-\cos 2(x+y+z)\}$

〔$\because$ $\sin^2 A=\frac{1}{2}(1-\cos 2A)$〕

$=\dfrac{1}{2}[4-\{\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+\cos 2(x+y+z)\}]$

以下 12 題ノ如クス.

15. (a) $2\sin(A-30^\circ)\cos A$　ヲ和或ハ差ニ變形セヨ.　（海兵）

(b) $6\cos 3A.\sin 6A$　〃　答 $3(\sin 9A+\sin 3A)$.

(c) $\cos\dfrac{3A}{2}.\cos\dfrac{5A}{2}$　〃　答 $\frac{1}{2}(\cos 4A+\cos A)$.

(d) $\sin 3x.\sin(x+y)$　〃　答 $\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(4x+y)\}$.

(e) $2\sin(2\alpha+\beta).\cos(\alpha-2\beta)$　〃　答 $\sin(3\alpha-\beta)+\sin(\alpha-3\beta)$.

〔略解〕 第6條卽チ (A, B) 式及ビ (S, D) 式ノ逆ニ依ル.

16. 次式ヲ夫々證明セヨ，

(a) (i) $\sin(A+B).\cos(A-B)=\sin A.\cos A+\sin B.\cos B.$

(ii) $\cos(A+B).\sin(A-B)=\sin A.\cos A-\sin B.\cos B.$

(b) (i) $\sin 2A.\cos A+\cos 4A.\sin A=\sin 3A.\cos 2A.$

(ii) $\sin\theta.\sin 2\theta+\sin 3\theta.\sin 6\theta=\sin 4\theta.\sin 5\theta.$

(c) (i) $\sin\alpha.\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta.\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma.\sin(\alpha-\beta)=0.$

(ii) $\sin(A+C)\cos(A-C)-\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=\cos(A+B)\sin(A-B).$

(d) $\sin(A-B)\sin(C-D)+\sin(B-C)\sin(A-D)$

$+\sin(C-A)\sin(B-D)=0.$

(e) $\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\dfrac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}.$ (陸經)

〔證明〕 前題ト同樣ナリ.

(b) (i) 左邊$=\dfrac{1}{2}[(\sin 3A+\sin A)+(\sin 5A-\sin 3A)]=\dfrac{1}{2}[\sin 5A+\sin A]$

$=\dfrac{1}{2}[2\sin 3A.\cos 2A]=\sin 3A.\cos 2A.$

(e) 左邊$=\dfrac{2(\sin 2A.\sin A+\sin 4A.\sin A+\sin 6A.\sin A)}{2\sin A}$

$=\dfrac{-(\cos 3A-\cos A+\cos 5A-\cos 3A+\cos 7A-\cos A)}{2\sin A}$

$=\dfrac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}.$

17. (a) $\tan(A+B)=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}$ ヲ證セ.

(b) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A.\cos A-\sin B.\cos B}=\tan(A+B)$,, (七高)

〔證〕 (a) 左邊$=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{2\sin(A+B).\sin(A-B)}{2\cos(A+B).\sin(A-B)}=\dfrac{-(\cos 2A-\cos 2B)}{\sin 2A-\sin 2B}$

$=\dfrac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}.$

(b) 左邊$=\dfrac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 2B)}=\dfrac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin(A+B).\cos(A-B)}=\tan(A+B).$

18. (a) (1) $4\sin 75^\circ.\sin 15^\circ=1$ ヲ證セ.

(2) $\cos 60^\circ 1'=\cos 1'-\cos 59^\circ 59'$ ヲ證セ.

(b) $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $\dfrac{1}{8}$. (海機)

(c) $\sin 20^\circ.\sin 35^\circ.\sin 45^\circ+\cos 25^\circ.\cos 45^\circ.\cos 80^\circ$,, 答 $\dfrac{1}{4}$. (陸士)

(d) $\cos 55^\circ.\cos 65^\circ+\cos 65^\circ.\cos 175^\circ+\cos 175^\circ.\cos 55^\circ=-\dfrac{3}{4}$. (六高)

(e) $\cos\theta.\cos(120^\circ+\theta)+\cos\theta.\cos(120^\circ-\theta)+\cos(120^\circ+\theta).\cos(120^\circ-\theta)$

$=-\dfrac{3}{4}$ ヲ證セ. (海機)

〔解〕 (a) $\cos 60^\circ 1'=2\times\cos 60^\circ 1'\times\cos 60^\circ=\cos 120^\circ 1'+\cos 1'=\cos 1'-\cos 59^\circ 59'.$

(b) 元式$=\dfrac{1}{2}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)\cos 40^\circ=\dfrac{1}{2}\cos 100^\circ.\cos 40^\circ+\dfrac{1}{4}\cos 40^\circ$

$=\dfrac{1}{4}(\cos 140^\circ+\cos 60^\circ)+\dfrac{1}{4}\cos 40^\circ=-\dfrac{1}{4}\cos 40^\circ+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}\cos 40^\circ$

$=\dfrac{1}{8}.$ (c) ハ $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ニ注意セヨ.

(d) 左邊$=\cos 65^\circ.\cos 55^\circ-\cos 65^\circ.\cos 5^\circ-\cos 55^\circ.\cos 5^\circ$

$[\because \cos(180^\circ-A)=-\cos A]$

$=\dfrac{1}{2}[\cos 120^\circ+\cos 10^\circ-\cos 70^\circ-\cos 60^\circ-\cos 60^\circ-\cos 50^\circ]$

$=\dfrac{1}{2}[-3\cos 60^\circ-2\sin 40^\circ.\sin(-30^\circ)-\cos 50^\circ]$ 〔∵ (S, D) 式〕

$=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{3}{2}+\sin 40^\circ-\sin 40^\circ\right]=-\dfrac{3}{4}.$

19. (a) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ.\cos 40^\circ$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $\dfrac{3}{4}$.

(b) $\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A.\cos B.\cos(A+B)=\sin^2(A+B)$ ヲ證セ. (專檢)

(c) $\cos^2 A-\cos A.\cos(60^\circ+A)+\sin^2(30^\circ-A)=\dfrac{3}{4}$,, (二高)

〔解〕 考ヘ方 平方ノ項ハ二倍角ノ一次項ニ直ス.

(a) 元式$=\dfrac{1}{2}[1-\cos 20^\circ+1+\cos 80^\circ+\sin 50^\circ-\sin 30^\circ]$

$=\dfrac{1}{2}[2-2\sin 50^\circ.\sin 30^\circ+\sin 50^\circ-\sin 30^\circ]$ 〔∵ (S, D) 式〕

$=\dfrac{1}{2}\left[2-\sin 50^\circ+\sin 50^\circ-\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{3}{4}.$

(b) $2\cos A.\cos B.\cos(A+B)=\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}\cos(A+B)$

$$=\cos^2(A+B)+\cos^2A-\sin^2B$$

$\therefore\ \cos^2A+\cos^2B-2\cos A.\cos B.\cos(A+B)$

$$=\cos^2A+\cos^2B-\cos^2(A+B)-\cos^2A+\sin^2B$$

$$=1-\cos^2(A+B)=\sin^2(A+B).$$

(c) $\cos^2A-\cos A.\cos(60^\circ+A)+\sin^2(30^\circ-A)$

$$=\frac{1}{2}\{1-\cos2A-\cos(60^\circ+2A)-\cos60^\circ+1-\cos(60^\circ-2A)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2-\frac{1}{2}-\cos2A-2\cos60^\circ.\cos2A\right]=\frac{3}{4}.$$

20. $\sin A.\sin B.\sin(A-B)+\sin B.\sin C.\sin(B-C)+\sin C.\sin A.\sin(C-A)$

$+\sin(A-B).\sin(B-C).\sin(C-A)=0$ ヲ證セ. (東商)

〔證〕 $\sin A.\sin B.\sin(A-B)=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}\sin(A-B)$

$$=-\frac{1}{2}\cos(A+B)\sin(A-B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)\sin(A-B)$$

$$=-\frac{1}{4}\{\sin2A-\sin2B\}+\frac{1}{4}\sin2(A-B)$$

同樣ニ 第二項$=-\frac{1}{4}\{\sin2B-\sin2C\}+\frac{1}{4}\sin2(B-C)$

第三項$=-\frac{1}{4}\{\sin2C-\sin2A\}+\frac{1}{4}\sin2(C-A)$

$\therefore$ 第一, 第二, 第三項ノ和

$$=\frac{1}{4}\{\sin2(A-B)+\sin2(B-C)+\sin2(C-A)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{2\sin(A-C)\cos(A-2B+C)+2\sin(C-A)\cos(C-A)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin(C-A)\{\cos(A-2B+C)-\cos(C-A)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sin(C-A)\{-2\sin(C-B)\sin(A-B)\}=-\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$$

之レ第四項ト符號ノミ異ナルユヱ左邊ハ0トナル.

注意. 本題ハ A, B, C ノ循環ノ順序ナルユヱ, 第一項ヲ求メタルトキハ第二項, 第三項ハ上ノ如ク直チニ記シ得ベシ.

21. $\sin\theta+\sin\varphi=a$ 及ビ $\cos\theta+\cos\varphi=b$ ナルトキ $\sin\frac{\theta+\varphi}{2}$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 $\sin\theta+\sin\varphi=a$ ヨリ $2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a$..........(1)

$\cos\theta+\cos\varphi=b$ ヨリ $2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=b$..........(2)

(1)÷(2) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}=\frac{a}{b}$ 故ニ $\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}{1-\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)}=\frac{a^2}{b^2}$

故ニ $\sin^2\frac{1}{2}(\theta+\varphi)=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, $\therefore\ \sin\frac{1}{2}(\theta+\varphi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

22. $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$ ヲ變形シテ $k.\sin(45^\circ-\alpha)$ トナシ k ノ値ヲ小數點以下二位マデ計算セヨ. 答 1.93 弱. (大工)

〔解〕 $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)=\sin(60^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$

$$=2\sin(45^\circ-\alpha)\cos15^\circ,$$

$$\therefore\ k=2\cos15^\circ=2\times\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos30^\circ)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times3.857.$$

23. $2\sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha$ ヲ和或ハ差ニ變形シ, 然ル後此乘積ヲ最大ナラシムベキ α ノ値ヲ決定セヨ. (海兵)

〔解〕 $2\sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha=\sin(2\alpha-30^\circ)+\sin(-30^\circ)$ 或 $=\sin(2\alpha-30^\circ)-\sin30^\circ$,

故ニ 此乘積ヲ最大ナラシムルニハ此和或ハ差ヲ最大ナラシムルヲ要ス, 然ルニ $\sin30^\circ$ ハ $\frac{1}{2}$ 卽チ常數ナルヲ以テ $\sin(2\alpha-30^\circ)$ ヲ最大ナラシムレバ可ナリ.

而シテ $\sin$ ノ最大値ハ1ナルヲ以テ $\sin(2\alpha-30^\circ)=1=\sin90^\circ$,

$$\therefore\ 2\alpha-30^\circ=90^\circ\quad\therefore\ \alpha=60^\circ.$$

第 五 章

特別角ノ三角函數 及ビ 條件附キ問題

7. 特別角ノ三角函數

既ニ 16 頁ニ於テ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ノ三角函數ヲ得タリ；又 18 頁及ビ 19 頁ニ於テ $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ ノ三角函數ヲ得タリ.

〔第一〕 **15° ノ三角函數ヲ求ムルコト.** (海機, 陸士, 海經)

〔解〕 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ.\cos 30^\circ-\cos 45^\circ.\sin 30^\circ$ 〔∵ 公式 (8)〕

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ.$$

但シ正銳角ノ三角函數ハ凡テ正ナルユヱ 根號ハ正ノミヲ採リタリ.

同樣ニ或ハ $\cos 15^\circ=\sqrt{1-\sin^2 15^\circ}=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{4}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75^\circ.$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ,\quad \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75^\circ.}$$

從テ $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}=\cot 75^\circ$, $\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}=\tan 75^\circ$, $\sec 15^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 75^\circ$, $\operatorname{cosec} 15^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sec 75^\circ$ ヲ得.

注意. 或ハ $15^\circ=60^\circ-45^\circ$ 或ハ $75^\circ=45^\circ+30^\circ$ ヨリモ得ラル.

〔第二〕 **18° ノ三角函數ヲ求ムルコト.** (東工, 陸士, 專檢, 北農, 新醫, 大工)

〔解〕 $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ 卽チ $\sin 2(18^\circ)=\cos 3(18^\circ)$ ナルガ故ニ

$2\sin 18^\circ.\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ$ 〔∵ 公式 (12), (15)〕, 然ルニ $\cos 18^\circ\neq 0$,

故ニ $2\sin 18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$ 卽チ $2\sin 18^\circ=4(1-\sin^2 18^\circ)-3$

卽チ $4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0$. 此二次方程式ヲ解キテ

$\sin 18^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. 然ルニ正銳角ノ函數ハ凡テ正ナリ.

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos 72^\circ.}$$

同樣ニ 或ハ $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$,

$$\therefore \quad \boldsymbol{\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\sin 72^\circ.}$$

從テ $\tan 18^\circ=\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$, 又 cot, sec, cosec ハ夫々前者ノ逆數ヲ取ル.

8. 半角ノ三角函數

$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 及ビ $15^\circ, 75^\circ, 18^\circ, 72^\circ$ ノ三角函數ハ已知ナルヲ以テ, 是等ノ各半角卽チ $15^\circ, 22^\circ.5, 30^\circ, 45^\circ$ 及ビ $7^\circ.5, 37^\circ.5, 9^\circ, 36^\circ$ ノ三角函數ハ皆ナ半角ノ公式卽チ

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ 及ビ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ニ依テ求メ得ベク,

同法ニ依リテ次第ニ半角ノ三角函數ヲ求メ得ベシ.

(1) **15° ノ三角函數ヲ求ムルコト** 〔前頁ト對照セヨ〕

〔解〕 $\boldsymbol{\sin 15^\circ}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}=\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ}$,

$\boldsymbol{\cos 15^\circ}=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}}=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}=\sin 75^\circ}$,

等, 但シ正銳角ナルユヱ根號ハ正ノミヲ採リタリ. 以下皆然リ.

(2) **22°.5 ノ三角函數ヲ求ムルコト.** (七高)

〔解〕 $\boldsymbol{\sin 22^\circ.5}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\cos 67^\circ.5}$,

$\boldsymbol{\cos 22^\circ.5}=\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\sin 67^\circ.5}$,

(3) **36° ノ三角函數ヲ求ムルコト.** (東工)

〔解〕 $\boldsymbol{\sin 36^\circ}=\sqrt{\frac{1-\cos 72^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right\}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\cos 54^\circ}$,

$\boldsymbol{\cos 36^\circ}=\sqrt{\frac{1+\cos 72^\circ}{2}}=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right\}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin 54^\circ}$, 等.

注意. (1) 上ノ逆ニ, 二倍角ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得,

例ヘバ $\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ノ如シ.

(2) 已ニ得タル函數ノ其餘角及ビ補角ノ三角函數ハ直チニ得ラルベシ.

問題及ビ解答

1. 105°, 108°, 126°, 165°, 等ノ三角函數ヲ求ムル方法如何.

答 此等ハ夫々 90° ト 15°, 18°, 36°, 75° ノ和トスルカ

或ハ 180° ト 75°, 72°, 54°, 15° ノ差トシテ展開ス.

2. 105° 及ビ 165° ナル二角ノ正弦及ビ餘弦ヲ問フ. (海兵)

〔解〕 前題ノ如クス.

答 $\sin 105° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 105° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 165° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 165° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3. $\sin 195°$ ノ値ヲ小數四桁マデ求メヨ. 答 $-.2588$. (大工)

4. $7°.5$ 及ビ $11°\frac{1}{4}$ ノ正切ヲ求メヨ. (北農)

答 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ 及ビ $\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-\sqrt{2}-1$.

5. (a) $\theta = 18°$ ナルトキ $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ ヲ證シ且ツ之レヨリ $\sin 18°$ ヲ求メヨ. (陸士)

(b) $\sin 18°$ ヲ知リテ $\sin 54°$ ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) $\cos 3\theta = \cos 3.18° = \sin(90° - 54°) = \sin 36° = \sin 2\theta$.

次ニ 第7條ノ第二ト同法ニ依リテ $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ヲ得.

(b) $\sin 54° = \sin 3(18°) = 3\sin 18° - 4\sin^3 18° = \sin 18°\{3 - 4\sin^2 18°\}$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\left\{3 - 4\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right\} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}+2}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$ 〔$\sin 54° = \cos 36°$ ナリ〕

6. $\cos^2 36° + \sin^2 18° = \frac{3}{4}$ ヲ證セ. (商船)

〔解〕 左邊 $= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left\{(\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2\right\}$

$$= \frac{1}{16}\{2(5+1)\} \quad [\because (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)] = \frac{3}{4}.$$

7. $\frac{1}{\sqrt{(\cot^2 15° - \cot^2 45°)}} = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}}\right)$ ヲ證セ.

〔證〕 左邊 $= \frac{1}{\sqrt{\{(2+\sqrt{3})^2 - 1^2\}}} = \frac{1}{\sqrt{\{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}.\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{3} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{4}}\right).$$

8. $a = 24°$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ,

$\cos a + \cos 2a + \cos 4a + \cos 8a.$ (新醫)

〔解〕 元式 $= \cos 24° + \cos 48° + \cos 96° + \cos 192°$

$$= (\cos 24° + \cos 96°) + (\cos 48° + \cos 192°)$$

$$= 2\cos 60°.\cos 36° + 2\cos 120°.\cos 72°$$ 〔∵ (S, D) 式〕

$$= 2\cos 60°.\cos 36° - 2\cos 60°.\cos 72°$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4} - 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ 〔∵ $\cos 72° = \sin 18°$〕

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

9. 條件附キ問題

〔第一〕 $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ

此條件ハ一般ニ三角形ニ合マル、ユヱ此種ノ問題ハ三角形ノ角ノ關係ノ部ニ示ス.

〔第二〕 種々ノ條件附キ問題

1. $\alpha+\beta+\gamma=0^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セ, 〔63 頁問 1 參考〕

(a) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma+4\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma=0.$

(b) $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=-2\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma.$

〔證〕 $\alpha+\beta+\gamma=0^\circ$ ナルユヱ $\alpha+\beta=-\gamma,\ \beta+\gamma=-\alpha,\ \gamma+\alpha=-\beta.$

$\therefore$ (b) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+2\sin\frac{1}{2}\gamma.\cos\frac{1}{2}\gamma$

$=-2\sin\frac{1}{2}\gamma\{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

$=-4\sin\frac{1}{2}\alpha.\sin\frac{1}{2}\beta.\sin\frac{1}{2}\gamma.$

又 $1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos^2\frac{1}{2}\alpha+2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$

$=2\cos\frac{1}{2}\alpha\{\cos\frac{1}{2}\alpha+\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\}$

$=4\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\beta.\cos\frac{1}{2}\gamma.$

$\therefore$ 左邊 $=-16\sin\frac{1}{2}\alpha.\sin\frac{1}{2}\beta.\sin\frac{1}{2}\gamma.\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\beta.\cos\frac{1}{2}\gamma=-2\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma.$

2. $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セ, 〔66 頁問 4 參考〕

(a) $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha$

$=1+\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma.$

(b) 依テ $(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta+\sin\beta)(\cos\gamma+\sin\gamma)$

$=2(\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma+\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma).$

〔證〕 (a) $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$ ナルユヱ $\alpha+\beta=45^\circ-\gamma$ ナリ,

故ニ $\tan(\alpha+\beta)=\tan(45^\circ-\gamma)$ 卽チ $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{1-\tan\gamma}{1+\tan\gamma},$

此分母ヲ拂ヒ轉項スレバ第一式ノ證ヲ得.

(b) 左邊 $=\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)(1+\tan\gamma)$

$=\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\{1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha+\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma\}$

$=\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\{2(1+\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma)\}$ 〔$\because$ (a)〕

$=2(\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma+\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma).$

3. $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セ,

(a) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma=1.$ 〔57 頁問 19 (b) 參考〕

(b) (i) $\tan\alpha.\tan\beta+\tan\beta.\tan\gamma+\tan\gamma.\tan\alpha=1.$ 〔70 頁問 6 參考〕

(ii) $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma.$

〔證〕 (a) $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ ナルユヱ $\sin\gamma=\sin\{90^\circ-(\alpha+\beta)\}=\cos(\alpha+\beta),$

$\therefore$ $2\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma=-\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\cos(\alpha+\beta)$

$=-\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$=-\sin^2\gamma+\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

$\therefore$ 左邊 $=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\gamma+\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

(b) (i) $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ ナルユヱ $\tan(\alpha+\beta)=\tan(90^\circ-\gamma)=\cot\gamma.$

卽チ $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{1}{\tan\gamma},$ 此分母ヲ拂ヒ轉項スレバ證ヲ得.

(ii) ハ (i) ニ倣フ, 或ハ (i) ノ兩邊ヲ $\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$ ニテ除ス.

4. $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$ ナルトキ次式ヲ證セ,

(a) $\sin(\sigma-\alpha).\sin(\sigma-\beta)+\sin\sigma.\sin(\sigma-\gamma)=\sin\alpha.\sin\beta.$

(b) $\sin(\sigma-\alpha)+\sin(\sigma-\beta)+\sin(\sigma-\gamma)-\sin\sigma=4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2}.$

(c) $\cos 2\sigma+\cos 2(\sigma-\alpha)+\cos 2(\sigma-\beta)+\cos 2(\sigma-\gamma)=4\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.$

(d) $\cos^2\sigma+\cos^2(\sigma-\alpha)+\cos^2(\sigma-\beta)+\cos^2(\sigma-\gamma)=2+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.$

〔證〕 (d) $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$ ナルユヱ

左邊 $=\frac{1}{2}\{1+\cos 2\sigma+1+\cos 2(\sigma-\alpha)+1+\cos 2(\sigma-\beta)+1+\cos 2(\sigma-\gamma)\}$

$=\frac{1}{2}\{4+2\cos(2\sigma-\alpha).\cos\alpha+2\cos(2\sigma-\beta-\gamma).\cos(\gamma-\beta)\}$

$=\frac{1}{2}\{4+2\cos(\beta+\gamma).\cos\alpha+\cos\alpha.\cos(\gamma-\beta)\}$

$=\frac{1}{2}[4+2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma-\beta)\}]=2+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.$

5. $A+B+C+D=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セ,

(a) $\cos A.\cos B+\cos C.\cos D=\sin A.\sin B+\sin C.\sin D.$

(b) $\cos A.\cos B+\cos A.\cos C+\cos A.\cos D+\cos B.\cos C$

$$+\cos B.\cos D+\cos C.\cos D$$

$$=\sin A.\sin B+\sin A.\sin C+\sin A.\sin D+\sin B.\sin C+\sin B.\sin D$$

$$+\sin C.\sin D.$$

(c) $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$$=\tan A.\tan B.\tan C+\tan B.\tan C.\tan D+\tan C.\tan D.\tan A$$

$$+\tan D.\tan A.\tan B.$$

〔證〕 (a) $A+B+C+D=180^\circ$ ナルユヱ $A+B=180^\circ-(C+D)$ ナリ,

故ニ $\cos A.\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}=\frac{1}{2}\{-\cos(C+D)+\cos(A-B)\}$

同樣ニ $\cos C.\cos D=\frac{1}{2}\{-\cos(A+B)+\cos(C-D)\}$

$\therefore$ $\cos A.\cos B+\cos C.\cos D=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)+\cos(C+D)-\cos(C-D)\}$

$$=-\tfrac{1}{2}\{-2\sin A.\sin B-2\sin C.\sin D\}$$

$$=\sin A.\sin B+\sin C.\sin D.$$

(c) $A+B+C+D=180^\circ$ ナルユヱ $A+B=180^\circ-(C+D)$ ナリ,

故ニ $\tan(A+B)=\tan\{180^\circ-(C+D)\}=-\tan(C+D)$

卽チ $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\dfrac{\tan C+\tan D}{1-\tan C.\tan D}$, 此分母ヲ拂ヒ轉項スレバ證ヲ得.

第 三 編

三角形ノ性質

第 一 章

三角形ノ角ノ關係

1. 角ノ關係

〔第一〕 $\begin{cases}\sin(A+B+C)=\ \ 0\\ \cos(A+B+C)=-1\end{cases}$ $\begin{cases}\sin(\text{二角ノ和})=\ \ \sin(\text{殘角})\\ \cos(\text{二角ノ和})=-\cos(\text{殘角})\end{cases}$

〔證〕 $A+B+C=180^\circ$, 及ビ 補角ノ關係 ニ依ル.

注意. 之ニ由テ, 互ニ補角ナル二角ノ正弦ノ値ハ相等シキヲ知ル.

〔第二〕 $\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(A+B+C)=1\\ \cos\frac{1}{2}(A+B+C)=0\end{cases}$ $\begin{cases}\sin\frac{1}{2}(\text{二角ノ和})=\cos\frac{1}{2}(\text{殘角})\\ \cos\frac{1}{2}(\text{二角ノ和})=\sin\frac{1}{2}(\text{殘角})\end{cases}$

〔證〕 $\frac{1}{2}(A+B+C)=0$, 及ビ 餘角ノ關係 ニ依ル. (海兵)

問 題 及 ビ 解 答

$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ 或ハ三角形 ABC ニ於テ次ノ **1** 乃至 **10** ヲ夫々證明セヨ,

1. (a) (i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}.$ (東師,山商,陸經,北農)

(ii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}.$ (商船, 水講)

(b) (i) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}+1.$ (仙工, 千醫)

(ii) $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}-1.$ (北農)

(c) (i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C.$ (陸士. 大工, 海經)

(ii) $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\sin B.\cos C.$

(d) (i) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A.\cos B.\cos C.$

(ii) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A.\sin B.\cos C.$

(e) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3}{2}A.\cos\frac{3}{2}B.\cos\frac{3}{2}C.$

(f) (i) $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C.$

(ii) $\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=4\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C.$

(g) $\sin 8A+\sin 8B+\sin 8C=-4\sin 4A.\sin 4B.\sin 4C.$　（陸士）

(h) $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$

(k) $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)=4\sin A.\sin B.\sin C.$

考ヘ方　本題以下 6 題迄ノ證明ハ 52 頁ノ 8 乃至 19 題ト同樣ニシ，以テ $A+B+C=180^\circ$ 及ビ此倍數或ハ分數ノ關係ヲ利用スベシ.

〔證〕 (a) (i) $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$　$\left[\because\ \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right]$

$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{-B}{2}\right\}=4\cos\frac{}{2}.\cos{}_{2}.\cos\frac{C}{2}.$

(d) (ii) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=2\cos(A+B)\cos(A-B)-\{2\cos^2 C-1\}$

$=2\cos C\{-\cos(A-B)\}-2\cos^2 C+1$　$[\because\ A+B=180^\circ-C]$

$=2\cos C\{-\cos(A-B)+\cos(A+B)\}+1$

$=2\cos C\{-2\sin A.\sin B\}+1=-4\sin A.\sin B.\cos C+1.$

(e) 左邊$=2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}+2\sin\frac{3}{2}C.\cos\frac{3}{2}C$　〔∵ (A,B)式及ビ半角ノ公式〕

$=-2\cos\frac{3}{2}C\left\{\cos\frac{3A-3B}{2}+\cos\frac{3A+3B}{2}\right\}$

$\left[\because\ \frac{3}{2}(A+B)=180^\circ\times\frac{3}{2}-\frac{3}{2}C=360^\circ+\left(-90^\circ-\frac{3}{2}C\right)\right]$

$=-2\cos\frac{3}{2}C\left\{2\cos\frac{3}{2}A.\cos\left(-\frac{3}{2}B\right)\right\}=-4\cos\frac{3}{2}A.\cos\frac{3}{2}B.\cos\frac{3}{2}C.$

(f) (i) 左邊$=2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)+2\sin 2C.\cos 2C$

$=-2\sin 2C\{\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B)\}$　$[\because\ 2(A+B)=180^\circ\times 2-2C]$

$=-2\sin 2C\{-2\sin 2A.\sin(-2B)\}=-4\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C.$

(g) 左邊$=2\sin(4A+4B)\cos(4A-4B)+2\sin 4C.\cos 4C$

$=-2\sin 4C\{\cos(4A-4B)-\cos(4A+4B)\}$　$[\because\ 4A+4B=180^\circ\times 4-4C]$

$=-2\sin 4C\{-2\sin 4A.\sin(-4B)\}=-4\sin 4A.\sin 4B.\sin 4C.$

2. (a) $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A-B}{2}.$　（東商）

(b) $\frac{\sin 3B-\sin 3C}{\cos 3C-\cos 3B}=\tan\frac{3A}{2}$　(c) $\tan A+\tan B=\sec A.\sec B.\sin C.$

(d) $\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.$　〔(1) ノ (a)〕　（東師）

(e) $\frac{\cos A}{\sin B.\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C.\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A.\sin B}=2.$　（海機）

〔證〕 (e) 左邊$=\frac{\sin A.\cos A+\sin B.\cos B+\sin C.\cos C}{\sin A.\sin B.cin C}=\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{2\sin A.\sin B.\sin C}$

$=\frac{4\sin A.\sin B.\sin C}{2\sin A.\sin B.\sin C}$ 〔∵ 問 1 ノ (c) (i) ニ倣ヒ〕$=2.$

3. $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$

〔證〕 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ ヨリ $\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$ ヲ得，故ニ

左邊$=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)$，以下 1 題ニ倣フ.

4. (a) $\sin A.\sin(A+2C)+\sin B.\sin(B+2A)+\sin C.\sin(C+2B)=0.$

(b) $\sin 3A.\sin(B-C)+\sin 3B.\sin(C-A)+\sin 3C.\sin(A-B)=0.$

(c) $\cos 3A.\sin(B-C)+\cos 3B.\sin(C-A)+\cos 3C.\sin(A-B)$

$=-4\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B).$

〔證〕 (c) $A+B+C=180^\circ$ ナルニヨ，$3A+B-C=180^\circ+2A-2C$，等ナルニヨ

左邊$=\frac{1}{2}\{\sin(3A+B-C)-\sin(3A-B+C)+\sin(3B+C-A)-\sin(3B-C+A)$

$+\sin(3C+A-B)-\sin(3C-A+B)\}$　〔∵ (A, B) 式〕

$=\frac{1}{2}\{-\sin(2A-2C)+\sin(2A-2B)-\sin(2B-2A)+\sin(2B-2C)-\sin(2C-2B)$

$+\sin(2C-2A)\}$

$=\sin(2B-2C)+\sin(2C-2A)+\sin(2A-2B)$，　以下 1 題ニ倣フ.

5. (a) (i) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A.\cos B.\cos C.$

(ii) $\sin^2 A+2\sin B.\sin C.\cos A=\sin^2 B+\sin^2 C.$　（東工）

(b) (i) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C.$

(ii) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A.\sin B.\cos C.$

(c) (i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$.

(ii) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$

〔證〕 (a) (i) 左邊$=\frac{1}{2}[1-\cos 2A+1-\cos 2B+2\sin C]$ 〔∵ 半角ノ公式〕

$=\frac{1}{2}[2-2\cos(A+B)\cos(A-B)+2-2\cos^2 C]$ 〔∵ (S, D) 式〕

$=\frac{1}{2}[4+2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}]$ 〔∵ $A+B=180^\circ-C$〕

$=\frac{1}{2}[4+2\cos C\{2\cos A\cdot\cos B\}]=2+2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$.

(ii) 58頁19題(b)ニ倣フ. 或ハ(i)ト同形ニ付テ證シ, 轉項ス.

6. (i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$. （陸士）

(ii) $\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A=1$.

(i) $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$.

(ii) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$. （大工）

〔證〕 (a) (i) $A+B+C=180^\circ$, $\therefore\ \tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$

卽チ $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\tan C$, 此分母ヲ拂ヒ轉項スレバ證ヲ得.

(b) (i) $\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ$, $\therefore\ \cot\frac{1}{2}(A+B)=\cot\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\tan\frac{C}{2}$,

以下同上.

7. (a) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$=1+4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)$.

(b) $\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$=1+4\cos\left(45^\circ+\frac{A}{4}\right)\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cdot\cos\left(45^\circ+\frac{C}{4}\right)$.

〔證〕 (a) 左邊$=2\sin\frac{A+B}{4}\cdot\cos\frac{A-B}{4}+\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$

$=2\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\cos\frac{A-B}{4}+1-2\sin^2\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)$ $\left[\because\ \frac{A+B}{4}=45^\circ-\frac{C}{4}\right]$

$=1+2\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\left\{\cos\frac{A-B}{4}-\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{4}\right)\right\}$ $\left[\because\ \frac{C}{4}=45^\circ-\frac{A+B}{4}\right]$

$=1+2\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\left\{-2\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{A}{4}-45^\circ\right)\right\}$

$=1+2\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)$.

8. (a) $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=\cot C+\frac{\sin C}{\sin A\cdot\sin B}$.

(b) $\tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\sec\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}\cdot\sec\frac{A}{2}$. （商船）

(c) $\tan A\cdot\tan B+\tan B\cdot\tan C+\tan C\cdot\tan A=1+\sec A\cdot\sec B\cdot\sec C$. （盛農）

〔證〕 (a) 左邊$=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=\frac{\cos A\cdot\sin B\cdot\sin C+\sin^2 A}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}=\frac{\cos A(\sin B\cdot\sin C-\cos^2 A)+1}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$

$=\frac{\cos A\{\sin B\cdot\sin C+\cos(B+C)\}+1}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$ 〔∵ $B+C=180^\circ-A$〕

$=\frac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+1}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$.

同樣ニ 右邊モ亦タ之ト等結果ヲ得. 故ニ元式ハ成立ス.

(b) $\cos\frac{A}{2}\cdot\sec\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sec\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}$ $\left[\because\ \frac{A}{2}=90^\circ-\frac{B+C}{2}\right]$

$=\left(\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right)\sec\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$,

$\therefore\ \tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\sec\frac{B}{2}\cdot\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$, 以下同上.

(c) 左邊$=\frac{\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}+\frac{\sin B\cdot\sin C}{\cos B\cdot\cos C}+\frac{\sin C\cdot\sin A}{\cos C\cdot\cos A}$

$=\frac{\cos C\cdot\sin A\cdot\sin B+\cos A\cdot\sin B\cdot\sin C+\cos C\cdot\sin C\cdot\sin A}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}$

此分子$=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+\cos C\cdot\sin A\cdot\sin B+\cos A\cdot\sin B\cdot\sin C$

$+\cos B\cdot\sin C\cdot\sin A-\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$

$=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin(A+C)-\cos B\cdot\cos(A+C)$

$=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin^2 B+\cos^2 B$ 〔∵ $A+C=180^\circ-B$〕$=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+1$

$\therefore$ 左邊$=\frac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C+1}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}=1+\sec A\cdot\sec B\cdot\sec C$.

9. (*a*) $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキハ $B=C$ ナリ. (陸士, 八高)

(*b*) $\sin 2B+\sin 2C=\sin 2A$ ナラバ B 或ハ C ハ直角ナリ.

(*c*) $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$ ナラバ $C=90^\circ$ ナリ.

(*d*) $\dfrac{\sin A}{\cos B}=\sin C+\cos C.\cot A$ ナルトキハ $C=90^\circ$ ナリ.

(*e*) $\tan B+\cot B=2\operatorname{cosec}2A$ ナルトキハ此三角形ハ直角ナルカ或ハ二等邊ナリ. (鹿農)

〔證〕(*e*) $\tan B+\cot B=\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\cos B}{\sin B}=\dfrac{1}{\sin B.\cos B}=\dfrac{2}{\sin 2B}=2\operatorname{cosec}2B,$

故ニ題意ニ依テ $\operatorname{cosec}2A=\operatorname{cosec}2B$, $\therefore\ \sin 2A-\sin 2B=0$

即 $2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$ $\therefore\ \cos(A+B)=0$ 或 $\sin(A-B)=0.$

然ルニ A, B ハ三角形ノ角ナルニヨ $A+B<180^\circ$ 及ビ $A-B<180^\circ$.

故ニ $\cos(A+B)=0=\cos 90^\circ$, $\therefore\ A+B=90^\circ$, 從テ $C=90^\circ$.

或ハ $\sin(A-B)=0=\sin 0^\circ$ $\therefore\ A-B=0^\circ$ 即 $A=B$.

10. (*a*) $\sin(A+B)=\frac{1}{2}=\cos(A-C)$ ナレバ A, B, C ノ大サ如何. (海機)

(*b*) $\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}.\cos(B-90^\circ)$, $\sqrt{3}.\cos A=-\sqrt{2}.\cos(180^\circ+B)$ ナルトキハ A, B, C ノ値如何. (海兵)

〔解〕(*a*) A, B, C ハ三角形ノ角ナルニヨ

$\sin(A+B)=\sin C=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$ 或 $\sin 150^\circ$, $\therefore\ C=30^\circ$ 或 150°.

又 $\cos(A-C)=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ $\therefore\ A-C=60^\circ$.

$C=30^\circ$ ナルトキハ $A=C+60^\circ=90^\circ$, 從テ $B=180^\circ-(A+C)=60^\circ$.

$C=150^\circ$ ナルトキハ $A=C+60^\circ=210^\circ$ トナルニヨ不合理ナリ.

答 $A=90^\circ$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$.

(*b*) 略解 元二式ヨリ $\sin A=\sqrt{2}.\sin B$, $\sqrt{3}.\cos A=\sqrt{2}.\cos B$.

平方ノ和ヲ取レバ $1+2\cos^2 A=2$ $\therefore\ \cos A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

答 $A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$.

11. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{5}{6}$, $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{20}{37}$ ナルトキハ $\tan C$ ノ値如何. (大工, 專檢)

〔解〕$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{5}{6}+\dfrac{20}{37}=\dfrac{375}{222}$, $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{20}{37}=\dfrac{100}{222}$,

而シテ $A+B+C=180^\circ$ ナルニヨ $\dfrac{C}{2}=90^\circ-\dfrac{A+B}{2}$ ナリ.

$\therefore\ \tan\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{1-\tan\frac{1}{2}A.\tan\frac{1}{2}B}{\tan A+\tan B}=\left(1-\dfrac{100}{222}\right)\Big/\dfrac{375}{222}=0.4.$

$\therefore\ \tan C=2\tan\dfrac{C}{2}\Big/\left(1-\tan^2\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{2\times 0.4}{1-(0.4)^2}=\dfrac{0.8}{0.84}=\dfrac{20}{21}.$

12. (*a*) $\cos A=\cos B\cos C$ ナレバ $\cot B\cot C=\dfrac{1}{2}$ ナリ. (仙工)

(*b*) $\cot\dfrac{A}{2}$, $\cot\dfrac{B}{2}$, $\cot\dfrac{C}{2}$ ガ A.P. ヲナストキハ $\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{C}{2}=3$ ナルコトヲ證セ. (高等)

(*c*) $\sin A, \sin B, \sin C$ ガ A. P. ヲナストキハ $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$ ナリ.

(*d*) $\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=5\sin\dfrac{C}{2}$ ナルトキハ $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2}{3}$ ナリ.

〔證〕(*b*) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=2\cot\dfrac{B}{2}$ 〔$\because$ A.P.〕 $=2\tan\dfrac{A+C}{2}=1/\cot\dfrac{A+C}{2}$

$$=2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\Big/\left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}-1\right)$$

故ニ $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}-1=2$ $\therefore\ \cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=3.$

(*d*) $\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=\sin\left(A+90^\circ-\dfrac{A+B}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\dfrac{B-A}{2}\right)=\cos\dfrac{B-A}{2}$,

〔$\because$ $A+B+C=180^\circ$〕

及ビ $\sin\dfrac{C}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\dfrac{A+B}{2}$. 〔 " 〕

$\therefore$ 元式ハ $\cos\dfrac{B-A}{2}=5\cos\dfrac{A+B}{2}$, 之ヲ展開シテ轉項スレバ

$6\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}=4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}$, $\therefore\ \tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2}{3}$.

13. $\hat{B}=45^\circ$ ナルトキハ $(1+\cot A)(1+\cot C)=2$ ナリ.

〔略解〕$A+C=180^\circ-B$ ナルニヨ $\cot(A+C)=\cot 135^\circ=-\cot 45^\circ=-1$,

以下 33 頁問 9 ノ (*c*) ト全ク同樣ナリ.

14. $\cot A+\sin A.\operatorname{cosec}B.\operatorname{cosec}C$ ハ角 A, B, C 中ノ何レノ二ツヲ交換スルモ恒ニ同ジ値ヲ有スルコトヲ證セ.

〔略解〕 元式ヲ最簡ニスレバ $\dfrac{\cos A.\cos B.\cos C+1}{\sin A.\sin B.\sin C}$ トナル, 故ニ何レノ二角ヲ交換スルモ恒ニ同ジ値ヲ有ス.

15. $A+B+C+D=360°$ ナルトキ 或ハ四邊形 ABCD ニ於テ次式ヲ證セ,

(a) $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\dfrac{A+B}{2}.\sin\dfrac{B+C}{2}.\sin\dfrac{C+A}{2}$. (二高)

(b) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cos\dfrac{A+B}{2}.\cos\dfrac{B+C}{2}.\cos\dfrac{C+A}{2}$. (八高)

(c) $\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{D}{2}=\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}.\sin\dfrac{D}{2}$.

(d) $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D$

$$=\tan A.\tan B.\tan C.\tan D(\cot A+\cot B+\cot C+\cot D).$$

〔證〕 (a) $A+B+C+D=360°$ ナルユエ $D=360°-(A+B+C)$ ナリ, 故ニ

$\sin D=\sin\{360°-(A+B+C)\}=\sin\{-(A+B+C)\}=-\sin(A+B+C)$,

$\therefore\ \sin A+\sin B+\sin C+\sin D$

$=\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$, 以下 54 頁問 12 ノ (c) ト同様ナリ.

(c) $A+B+C+D=360°$ ナルユエ $\dfrac{A+B}{2}=180°-\dfrac{C+D}{2}$ ナリ,

故ニ $\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\left\{180°-\dfrac{C+D}{2}\right\}=-\cos\dfrac{C+D}{2}$.

此兩邊ヲ夫々展開シテ轉項スレバ證ヲ得.

(d) $A+B+C+D=360°$ ナルユエ $A+B=360°-(C+D)$ ナリ,

$\tan(A+B)=\tan\{360°-(C+D)\}=-\tan(C+D)$

即チ $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\dfrac{\tan C+\tan D}{1-\tan C.\tan D}$,

此分母ヲ拂ヒ轉項シ, 而シテ右邊ヨリ $\tan A.\tan B.\tan C.\tan D$ ヲ括リ出ス.

第 二 章

三角形ノ邊ト角トノ關係

記法 $\triangle ABC$ ノ A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c ト記ス,

又 $a+b+c=2s$ ト記ス.

2. 邊ト角トノ關係

〔第一〕 三角形ノ各邊ハ其對角ノ正弦ニ比例ス, 即チ

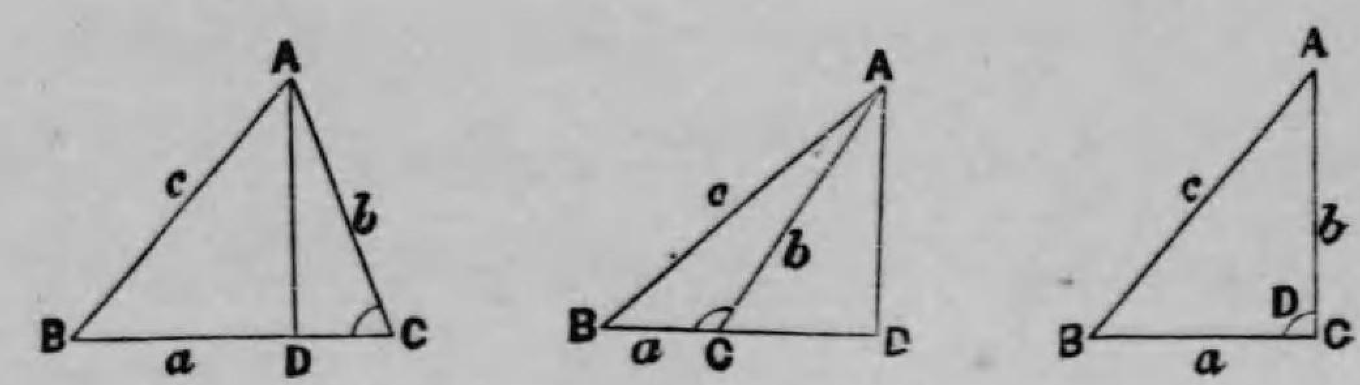
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (22)$$

(二高, 東工, 海機, 農實, 北農, 海兵, 商船)

之ヲ正弦比例式ト名ヅク.

〔證〕 $\triangle ABC$ ノ頂點 A ヨリ底邊 BC 或ハ其引長上ニ垂線 AD ヲ引ケバ

(1) (2) (3)



(1)圖 即 $\hat{C}$=鋭角 ナルトキ $AD=c.\sin B$ 及ビ $AD=b.\sin C$.

(2)圖 即 $\hat{C}$=鈍角 ナルトキ $AD=c.\sin B$

及ビ $AD=b.\sin ACD=b.\sin(180°-C)=b.\sin C$.

(3)圖 即 $\hat{C}$=直角 ナルトキ $AD=c.\sin B$ 及ビ $AD=b.\sin 90°=b.\sin C$.

斯ク凡テノ場合ニ於テ $b.\sin C=c.\sin C$ 即チ $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

次ニ B ヨリ AC ニ垂線 BE ヲ引キ前ト同様ニ $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$ ヲ得.

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

注意. 此式ハ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ト書クコトモアリ.

〔第二〕

$$\left.\begin{aligned} a&=b.\cos C+c.\cos B\\ b&=c.\cos A+a.\cos C\\ c&=a.\cos B+b.\cos A\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(二高, 陸士, 海兵)

〔證〕 前頁ノ圖或ハ下圖ヲ用フ,

(1) 圖ニ於テハ $a=BD+DC=c.\cos B+b.\cos C.$

(2) 圖 〃 $a=BD-DC=c.\cos B-b.\cos(180°-C)=c.\cos B+b.\cos C.$

(3) 圖 〃 $a=BD+0 =c.\cos B+b.\cos 90°=c.\cos B+b.\cos C.$

同樣ニ或ハ a, b, c 及ビ A, B, C ノ循環ノ順序ニ依テ第二, 第三式ヲ得ベシ.

以下皆ナ然リ.

注意. 此公式ハ問題解法ニ用ヒラル.

〔第三〕

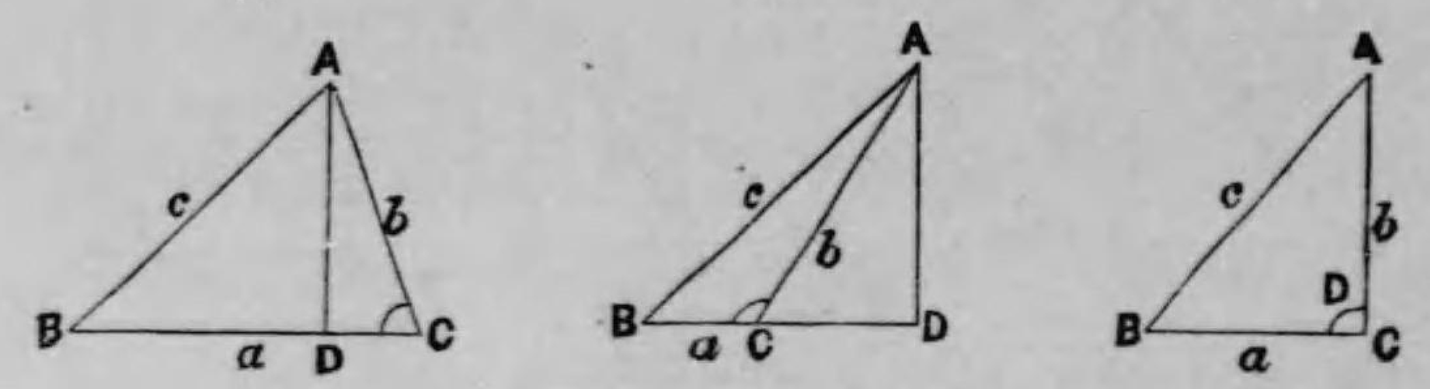
$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc.\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca.\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab.\cos C\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

(熊工, 商船)

之ヲ<u>餘弦式</u>ト名ヅク.

〔證〕 △ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC 或ハ其引長ヘ垂線 AD ヲ引ケバ

(1) (2) (3)



(1)圖 卽 $\hat{C}$=銳角 ナルトキ $c^2=a^2+b^2-2a.AD$ 〔∵ 平幾定理〕

$=a^2+b^2-2ab.\cos C.$

(2)圖 卽 $\hat{C}$=鈍角 ナルトキ $c^2=a^2+b^2+2a.AD$ 〔 〃 〕

$=a^2+b^2+2ab.\cos(180°-C)$

$=a^2+b^2-2ab.\cos C.$

(3)圖 卽 $\hat{C}$=直角 ナルトキ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$ 〔∵ $\cos C=\cos 90°=0$〕

以下第二ト同樣ナリ.

注意. 之レ二邊ト其夾角ヲ知リテ第三邊ヲ求ムル公式ナリ.

系.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad 等. \qquad (25)$$

注意. 之レ三邊ヲ知リテ一角ヲ求ムル公式ナリ.

〔第四〕

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}, \quad 等. \qquad (26)$$

(高等, 東商, 海兵, 陸士, 仙工, 二高, 專檢)

之ヲ<u>正切式</u>ト名ヅク.

〔證〕 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ トセバ

$a=k.\sin A,\ b=k.\sin B,\ c=k.\sin C$ ナリ,

$$\therefore \frac{a-b}{a+b}=\frac{k(\sin A-\sin B)}{k(\sin A+\sin B)}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)} \quad 〔∵ (S, D) 式〕$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}(A+B)\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

系.

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{a-b}{a+b}.\cot\frac{C}{2}, \quad 等.$$

注意. 之レ二邊ト其夾角ヲ知リテ他ノ二角ヲ求ムル公式ナリ.

3. 半角ト邊トノ關係

定理

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad 等. \qquad (27)$$

(東商, 陸士, 商船)

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad 等. \qquad (28)$$

(高等, 商船)

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad 等. \qquad (29)$$

(商船)

〔證〕 $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ 及ビ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

$$\therefore \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}=\frac{2(s-c).2(s-b)}{4bc}$$

〔∵ $a+b+c=2s$, ∴ $a+b-c=2(s-c)$, 等〕

∴ $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, 然ルニ三角形ノ一角ノ半分ハ必ズ正銳角タルヲ以テ上ノ根號ハ正ノミヲ採ル.

$\cos\frac{A}{2}$ ハ之ト同樣ナリ，又 $\tan\frac{A}{2}$ ハ $\sin\frac{A}{2}/\cos\frac{A}{2}$ ヨリモ直チニ得ラル.

注意 之レ各邊ヲ知リテ角ヲ求ムル公式ナリ.

系. $$\boldsymbol{\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},\ \text{等}. \qquad (30)$$

〔證〕 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}=2\times\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

問題及ビ解答

△ABC ニ於テ次ノ 1 乃至 19 ヲ夫々證明セヨ，

1. (*a*) (i) $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$.

(ii) $C=60^\circ$ ナルトキハ $a+b=2c.\cos\frac{A-B}{2}$ ナリ. (陸士)

(iii) $B=60^\circ$ ナルトキハ $\frac{a+c}{2b}=\sin(30^\circ+C)$ ナリ. (高等)

(iv) $A=2B$ ナレバ $a=2b.\cos B$ ナリ.

(v) $A=3B$ ナレバ $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{a}{b}}$ ナリ.

(*b*) (i) $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$. (ii) $a=(b-c)\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}$. (陸士)

(iii) $\frac{a-b}{c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$. (名工，專檢)

〔證〕 考ヘ方 三角形ノ三邊ト三角トヲ含ム恆等式ノ證明ハ 77 頁ノ第四ノ證明ニ倣フベシ.

今 $(a+b)\sin\frac{C}{2}=c.\cos\frac{A-B}{2}$ 或ハ $a+b=c.\sec\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$ (海機)

或ハ $c=(a+b)\sin\frac{C}{2}/\cos\frac{A-B}{2}=(a+b)\sin\frac{C}{2}.\sec\frac{A-B}{2}$ 等ハ (i) ノ變形ニ過ギズ.

又 (ii) 乃至 (v) ハ (i) ニ條件ヲ附シタルノミナリ.

(*a*) (i) 正弦比例式ヲ k トオケバ $a=k.\sin A,\ b=k.\sin B,\ c=k.\sin C$.

$\therefore\ \frac{a+b}{c}=\frac{k(\sin A+\sin B)}{k.\sin C}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}\quad\left[\because\ \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}\right]$

(iii) $\frac{a+c}{2b}=\frac{k(\sin A+\sin C)}{k.2\sin B}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+C)\cos\frac{1}{2}(A-C)}{4\sin\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{2\sin\frac{1}{2}B}\quad\left[\because\ \frac{A+C}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}\right]$

$=\frac{\sin\{90^\circ-\frac{1}{2}(A-C)\}}{2\sin30^\circ}=\sin\{\frac{1}{2}(A+B+C)-\frac{1}{2}(A-C)\}=\sin\left\{\frac{B}{2}+C\right\}=\sin(30^\circ+C)$.

2. $\sin A+\sin B>\sin C$. 〔∵ $a+b>c$ ニ依ル〕 (陸士)

3. (*a*) $\cot A+\cot B=\frac{c}{b.\sin A}$. (*b*) $\cot A-\cot B=-\frac{a^2-b^2}{ab.\sin C}$.

〔證〕 (*a*) 左邊$=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin(B+A)}{\sin A.\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A.\sin B}$ 〔∵ $A+B=180^\circ-C$〕

$=\frac{c}{b.\sin A}.\quad\left[\because\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right]$

4. (*b*) $\dfrac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{a-b}{c}$. (*b*) $\dfrac{\cot\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}=\frac{a+b}{c}$.

〔證〕 (*a*) 左邊$=\left(\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)\Big/\left(\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$

$=\sin\frac{1}{2}(A-B)/\sin\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{1}{2}(A-B)/\cos\frac{1}{2}C$.

又 右邊ハ 1 題ノ (*b*) ト同樣ニシテ上ト同結果ヲ得.

故ニ 題言ノ如シ.

〔別解〕 本題ハ公式 (29) ニ依リテモ證シ得ベシ.

5. (*a*) $a.\sin A-b.\sin B=c.\sin(A-B)$.

(*b*) $a.\cos A+b.\cos B=c.\cos(A-B)$. (商船)

〔證〕 (*a*) 左邊$=\frac{c.\sin A}{\sin C}.\sin A-\frac{c.\sin B}{\sin C}.\sin B\quad\left[\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right]$

$=\frac{c(\sin^2A-\sin^2B)}{\sin C}=\frac{c.\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin C}=c.\sin(A-B)$.

6. $a^2.\sin2B+b^2.\sin2A=2ab.\sin C$. (六高)

〔證〕 左邊$=2\{a(a.\sin B)\cos B+b(b\sin A)\cos A\}$ 〔∵ $\sin2A=2\sin A.\cos A$〕

$=2\{ab.\sin A.\cos B+ba.\sin B.\cos A\}\quad\left[\because\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\right]$

$=2ab\{\sin A.\cos B+\cos A.\sin B\}=2ab.\sin(A+B)=2ab.\sin C$.

7. (*a*) $\sin(A-B):\sin C=a^2-b^2:c^2$. (水產)

(*b*) $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$ ナリ. (新醫)

〔證〕 (*a*) $\frac{a^2}{\sin^2A}=\frac{b^2}{\sin^2B}=\frac{c^2}{\sin^2C}=\frac{a^2-b^2}{\sin^2A-\sin^2B}=\frac{a^2-b^2}{\sin(A+B)\sin(A-B)}$.

然ルニ $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$, $\therefore\ \sin(A-B):\sin C=a^2-b^2:c^2$.

8. (a) $a.\sin(B-C)+b.\sin(C-A)+c.\sin(A-B)=0.$ (二高, 長商)

(b) $(a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B=0.$ (商船)

〔證〕 (a) $a.\sin(B-C)=\dfrac{a.\sin(B-C)\sin(B+C)}{\sin A}$ 〔∵ $B+C=180^\circ-C$〕

$=\dfrac{a(\sin^2B-\sin^2C)}{\sin A}=b.\sin B-c.\sin C$ 〔∵ 正弦比例式〕

其他モ同樣ニシテ相加フレバ 0 卽チ右邊トナル.

(b) $(a^2-b^2)\cot C=k^2(\sin^2A-\sin^2B)\cot C=k^2\sin(A+B)\sin(A-B)\times\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$=-k^2\sin(A-B)\cos(A+B)=-\frac{1}{2}k^2\{\sin 2A-\sin 2B\}$, 以下同上.

9. $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.$ (高等)

〔證〕 問 1 ト同樣ニ $\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\dfrac{k(\sin A+\sin B+\sin C)}{k(\sin A+\sin B-\sin C)}$,

此分母子ヲ 67 頁ノ 1 題ニ倣ヒテ最簡ニス.

注意. 本題ハ 69 頁ノ 2 題ノ (d) ト同意ニ歸ス.

10. (a) $\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$ (陸士)

(b) $a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C=2a.\sin B.\sin C.$ (北農, 山商, 高等)

〔證〕 (a) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a.\cos A}{\sin A.\cos A}=\dfrac{b.\cos B}{\sin B.\cos B}=\dfrac{c.\cos C}{\sin C.\cos C}$

$=\dfrac{2(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C)}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$ 〔∵ 相等比定理〕

此第一項ト最後ノ項トノ等式ノ兩邊ヲ 2 除セバ證ヲ得.

(b) 上ノ如クシ, 結果ノ分母ヲ 67 頁 1 題 (c) ニ倣ヒテ最簡ニスベシ.

〔別解〕 左邊$=\dfrac{a.\sin A.\cos A}{\sin A}+\dfrac{b.\sin B.\cos B}{\sin B}+\dfrac{c.\sin C.\cos C}{\sin C}$ 〔∵ 正弦比例式〕

$=\dfrac{a}{2\sin A}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$=2a.\sin B.\sin C.$ 〔∵ 67 頁 1 題 (c) ト同樣〕

11. (a) $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$ ナレバ $C=90^\circ$ ナリ.

(b) $a=2b,\ A=3B$ ナレバ $C=60^\circ$ ナリ.

(c) $b.\cos A=a.\cos B$ ナレバ $a=b$ ナリ. (小商)

(d) (i) $a.\cos A=b.\cos B$ ナレバ 二等邊又ハ直三角形ナリ.

(ii) $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2A}{\sin^2B}$ ナレバ 同上. 〔(i) ニ歸ス〕 (東商)

〔證〕 (b) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$ 卽チ $\dfrac{2b}{b}=\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=\dfrac{3\sin B-4\sin^3B}{\sin B}$,

卽チ $2=3-4\sin^2B$, $\therefore\ \sin B=\pm\dfrac{1}{2}$, 然ルニ B ハ三角形ノ一角ナルヲ以テ

$\sin B=\dfrac{1}{2}=\sin 30^\circ$ 或ハ $\sin 135^\circ$, $\therefore\ B=30^\circ$ 或ハ 135°.

$B=30^\circ$ トセバ $A=3B=90^\circ$ トナリ, 從テ $C=180^\circ-(A+B)=60^\circ$.

又 $B=135^\circ$ トセバ $A=3B=405^\circ$ トナリテ不合理ナリ.

(d) $a.\cos A=b.\cos B$ 卽チ $\dfrac{b.\sin A}{\sin B}.\cos A=b.\cos B$ $\left[\because\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\right]$

故ニ $\sin A.\cos A-\sin B.\cos B=0$ 卽チ $\sin 2A-\sin 2B=0$,

卽チ $2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$ $\therefore\ \cos(A+B)=0$ 或ハ $\sin(A-B)=0$,

然ルニ A, B ハ三角形ノ角ナルユヱ $A+B=90^\circ$, 從テ $C=90^\circ$,

或ハ $A-B=0$, 從テ $A=B$ 卽チ $a=b$ ナリ.

12. (a) 中線 AD ヲ m トシ, $B\hat{A}D=\alpha$, $C\hat{A}D=\beta$ トスレバ

$\sin\alpha:\sin\beta:\sin A=b:c:2m$ ナリ.

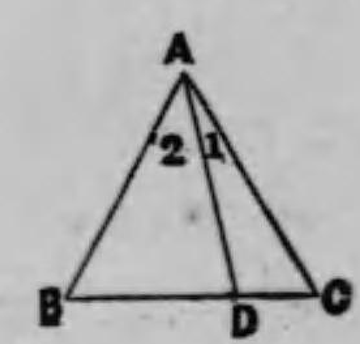
(b) $\hat{A}$ ノ二等分線ト底邊 BC 或ハ其引長トノ交點ヲ D, D′ トセバ

(i) $BD:CD=\sin C:\sin B.$ (ii) $BD':CD'=\sin C:\sin B.$

(iii) $DC=\dfrac{a.\sin B}{2\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}(B-C)}$ (iv) $D'C=\dfrac{a.\sin B}{2\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$

(c) 正三角形ノ一角ヲ 2:1 ノ比ニ分ツ點ハ其對邊ヲ如何ナル比ニ分ツカ. 但シ $\cos 20^\circ=0.94$ トス. (水講)

〔證〕 (c) 正 △ABC ノ各角ハ 60° ナルユヱ



$B\hat{A}D=2D\hat{A}C$ トセバ $B\hat{A}D=40^\circ$, $D\hat{A}C=20^\circ$ ナリ.

故ニ △ABD, △ADC ニ於テ正弦比例ニヨリ

$BD:CD=\dfrac{AD.\sin BAD}{\sin B}:\dfrac{AD.\sin DAC}{\sin C}=\sin 40^\circ:\sin 20^\circ$

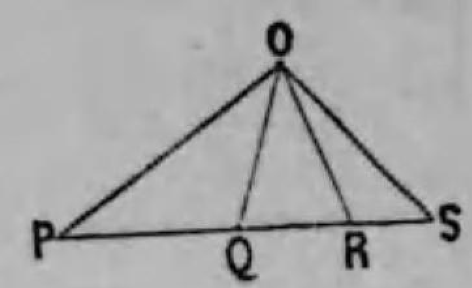
$=2\sin 20^\circ.\cos 20^\circ:\sin 20^\circ=2\cos 20^\circ:1=2\times 0.94:1=47:25.$

13. (a) P, Q, R, S ハ順次ニ一直線上ニ取レル四點ナルトキ.其直線外ニ一點 O ヲ取リ之ヲ P, Q, R, S ニ結ブトキハ

$PQ.RS : QR.PS = \sin POQ.\sin ROS : \sin QOR.\sin POS$ ナリ. (大工)

(b) 圓ノ内接四邊形 ABCD ニ於テ $C\hat{A}D=\alpha$, $B\hat{A}C=\beta$, $A\hat{B}D=\gamma$ トセバ $CD = AB.\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ ナリ. (山商)

〔證〕 (a) △POQ ニ於テ $\dfrac{PQ}{PO}=\dfrac{\sin POQ}{\sin PQO}=\dfrac{\sin POQ}{\sin OQR}$,

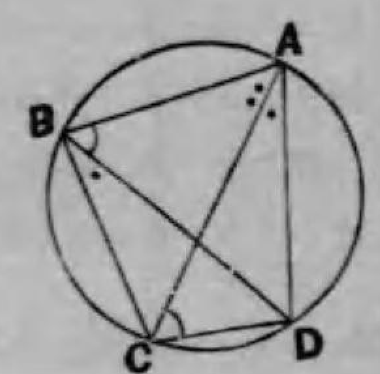


△POS 〃 $\dfrac{PO}{PS}=\dfrac{\sin S}{\sin POS}$

△QOR 〃 $\dfrac{OR}{QR}=\dfrac{\sin OQR}{\sin QOR}$

△POS 〃 $\dfrac{RS}{OR}=\dfrac{\sin ROS}{\sin S}$ 之ヲ邊々相乘セバ證ヲ得.

(b) $C\hat{B}D=C\hat{A}D=\alpha$, $A\hat{C}D=A\hat{B}D=\beta$ ナルニヨ



△ABC ニ於テ $AC=\dfrac{AB.\sin(\alpha+\gamma)}{\sin BCA}=\dfrac{AB.\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$.

又 △ACD 〃 $CD=\dfrac{AC.\sin\alpha}{\sin D}=\dfrac{AC.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$

之ニ上式ヲ代用セバ證ヲ得.

14. (a) $a+b+c=(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$.

(b) $a(b.\cos C-c.\cos B)=b^2-c^2$. (商船)

(c) $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc$.

(d) $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\dfrac{C}{2}$.

(e) $a^2+b^2+c^2=2(ab.\cos C+bc.\cos A+ca.\cos B)$.

(f) $a(\cos B.\cos C+\cos A)=b(\cos C.\cos A+\cos B)$

$=c(\cos A.\cos B+\cos C)$.

〔證〕 公式 (23) ニ依ル. (a) 三式相加フ. (b) 第二, 三ニ b, c ヲ乘ジテ相減ズ.

(c) 三式ニ夫々 bc, ca, ab ヲ乘ジテ相加フ.

(d) 第一, 第二ヲ加ヘ, 轉項シ且ツ變形ス. (e) 三式ニ a, b, c ヲ乘ジテ相加フ. 或ハ公式 (24) ヲ相加フ.

(f) 第一, 第二ニ $\cos A$, $\cos B$ ヲ乘ジテ相減スレバ

$a.\cos A-b.\cos B=\cos A(b.\cos C+c.\cos B)-\cos B(c.\cos A+a.\cos C)$

$\therefore\ a(\cos B.\cos C+\cos A)=b(\cos C.\cos A+\cos B)$.

同様ニ $b(\cos C.\cos A+\cos B)=c(\cos A.\cos B+\cos C)$. 故ニ題言ノ如シ.

15. $\tan A=\dfrac{a.\sin C}{b-a.\cos C}$. (商船)

〔證〕 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{c.\sin A}{c.\cos A}=\dfrac{a.\sin C}{b-a.\cos C}$ $\left[\because\ b=c.\cos A+a.\cos C,\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\right]$

16. (a) 平行四邊形ノ隣接二邊ヲ a, b トシ其夾角ヲ θ トスレバ, 兩對角線ハ $a^2+b^2-2ab.\cos\theta$ 及ビ $a^2+b^2+2ab.\cos\theta$ ナリ.

(海兵, 海機)

(b) $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$ ナレバ C ハ $45°$ ナルカ或ハ $135°$ ナリ.

(c) a, b, A ガ與ヘラルヽトキ c ハ $x^2-2bx.\cos A+b^2-a^2=0$ ナル方程式ノ一根ナリ.

(d) 三角形ノ二邊ヲ夫々 $x+y.\cos A$, $y+x.\cos A$ トシ其夾角ヲ A トシ第三邊ヲ a トスルトキハ $a=\sin A(x^2+y^2+2xy.\cos A)^{\frac{1}{2}}$ ナリ.

(大工)

(e) $C=60°$ ナルトキハ $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{3}{a+b+c}$ ナリ.

〔證〕 (d) $a^2=(x+y.\cos A)^2+(y+x.\cos A)^2-2(x+y.\cos A)(y+x.\cos A)\cos A$

$=\{(x+y.\cos A)^2-(x+y.\cos A)(y+x.\cos A)\cos A\}$

$+\{(y+x.\cos A)^2-(x+y.\cos A)(y+x.\cos A)\}$

$=(x+y.\cos A)\{x(1-\cos^2 A)\}+(y+x.\cos A)\{y(1-\cos^2 A)\}$

$=\sin^2 A[x^2+xy\cos A+y^2+xy\cos A]=\sin^2 A(x^2+y^2+2xy.\cos A)$.

(e) 今 $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)=2+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}=2+\dfrac{ac+a^2+b^2+bc}{bc+ab+c^2+ac}=3$,

$[\because\ 2ab.\cos 60°=a^2+b^2-c^2$ 卽チ $ab=a^2+b^2-c^2]$

此兩邊ヲ $a+b+c$ ニテ除スレバ證ヲ得.

17. $c^2=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$. (商船)

〔證〕 $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C=(a^2+b^2)\left(\sin^2\dfrac{C}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\right)-2ab\left(\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

$=(a^2+b^2+2ab)\sin^2\dfrac{C}{2}+(a^2+b^2-2ab)\cos^2\dfrac{C}{2}=(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}$.

18. (a) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$ (農實)

(b) $\tan B:\tan C=a^2+b^2-c^2:a^2-b^2+c^2.$

(c) 正△ABC 內ニ一點 P ヲ取リ次式ヲ證明セヨ,

$$\cos(BPC-60^\circ)=(\overline{BP}^2+\overline{PC}^2-\overline{PA}^2)/2BP.PC.$$

〔證〕 (b) $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{\sin B.\cos C}{\cos B.\sin C}=\dfrac{b.\cos C}{c.\cos B}\left[\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\right]=\dfrac{2ab.\cos C}{2ac.\cos B}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$ 〔∵ (24)〕

(c) $B\hat{P}C$ 內ニ於テ $B\hat{P}M=60^\circ$ ニ取リ BP=PM トセバ △BPM モ亦タ正三角形トナル ∴ △ABP≡△CBM, 從テ AP=MC. 故ニ △MPC ニ於テ

$M\hat{P}C=B\hat{P}C-60^\circ$ ナルニヱ

$$\cos(BPC-60^\circ)=(\overline{PM}^2+\overline{PC}^2-\overline{MC}^2)/2PM.PC=(\overline{BP}^2+\overline{PC}^2-\overline{PA}^2)/2BP.PC.$$

19. (a) $b.\sin^2\dfrac{C}{2}+c.\sin^2\dfrac{B}{2}=s-a.$ (b) $b.\cos^2\dfrac{C}{2}+c.\cos^2\dfrac{B}{2}=s.$

(b) (i) $bc.\cos^2\dfrac{A}{2}+ca.\cos^2\dfrac{B}{2}+ab.\cos^2\dfrac{C}{2}=s^2.$

(ii) $\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+b+c}{2a}.$ (商船)

(iii) $a.\cos^2\dfrac{C}{2}+c.\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$ ナレバ $a+b+c=3b$ ナリ. (海兵)

(c) (i) $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

(ii) $\dfrac{a}{1-\tan\frac{1}{2}B.\tan\frac{1}{2}C}=\dfrac{b}{1-\tan\frac{1}{2}C.\tan\frac{1}{2}A}=\dfrac{c}{1-\tan\frac{1}{2}A.\tan\frac{1}{2}B}.$ (商船)

〔略解〕 (a) ハ公式 (27), (b) ハ公式 (28), (c) ハ公式 (29) ニ依ル.

(c) (ii) $\dfrac{a}{1-\tan\frac{1}{2}B.\tan\frac{1}{2}C}=a\Big/\left\{1-\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\right\}=a\Big/\left(1-\dfrac{s-a}{s}\right)=s,$

同樣ニ 第二項及ビ第三項モ亦タ s トナル. 故ニ題言ノ如シ.

20. (a) 各角ノ比ガ 1:2:3 ナルトキ三邊ノ比如何. (千醫)

(b) (i) 三邊ガ 6尺, 10尺, 14尺 ナレバ最大角幾何. (商船)

(ii) 又三邊ガ $m^2+m+1,\ 2m+1,\ m^2-1$ ナレバ同上. (高等)

(iii) 三邊ガ $2,\ \sqrt{6},\ 1+\sqrt{3}$ ナレバ最小角幾何. (千醫, 陸士)

(c) $b+c:c+a:a+b=4:5:6$ ナルトキ各角ノ餘弦ヲ求メヨ.

(d) $a=7, b=8, c=9$ ナルトキ $\sin\frac{1}{2}A,\ \cos\frac{1}{2}B,\ \tan\frac{1}{2}C$ ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) A:B:C=1:2:3 トスレバ $A=180^\circ\div(1+2+3)=30^\circ$ トナル, 從テ $B=60^\circ$, $C=90^\circ$ ナリ. 故ニ正弦比例式ニヨリテ

$$a:b:c=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ:\sin 90^\circ=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2.$$

(b) (ii) 三角形ノ最大邊ハ最大角ニ對ス. 故ニ先ヅ最大邊ヲ確定センニ, 各邊ノ長サヲ表ハス數ハ何レモ正數ナリ. 仍テ

先ヅ $m\leqq 1$ トセバ $m^2<1$ ナルベク, 從テ $m^2-1\leqq 0$ トナルニヱ不能ナリ.

次ニ $m\leqq 0$ トセバ $m^2-1\leqq 0$ トナルニヱ之レ亦タ不能ナリ.

故ニ $m>1$ ナラザルベカラズ. 而シテ $m>1$ ナルトキハ

$m^2+m+1-(2m+1)=m^2-m=m(m-1)$ 及ビ $m^2+m+1-(m^2-1)=m+2$ ハ何レモ正トナルヲ以テ m^2+m+1 ハ最大邊ナリ, 其對角ヲ A トスレバ

$$\cos A=\{(2m+1)^2+(m^2-1)^2-(m^2+m+1)^2\}/2(2m+1)(m^2-1)=-\frac{1}{2},$$

而シテ A ハ三角形ノ角ナルヲ以テ $A<180^\circ$, ∴ $A=120^\circ$.

答 (b) (i) 120°. (iii) 45°.

(c) $\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}=\dfrac{a+b}{6}=k$ トセバ $b+c=4k,\ c+a=5k,\ a+b=6k$ ナリ,

此三式ヨリ $a=\dfrac{7}{2}k,\ b=\dfrac{5}{2}k,\ c=\dfrac{3}{2}k$ ヲ得.

故ニ 公式 (25) ニ依テ $\cos A=-\dfrac{1}{2},\ \cos B=\dfrac{1}{14},\ \cos C=\dfrac{13}{14}.$

(d) 公式 (27), (28), (29) ニ依ル. 答 $\dfrac{\sqrt{6}}{6},\ \dfrac{4\sqrt{21}}{21},\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

21. (a) 二邊ガ $\sqrt{3}+1$ 及ビ $\sqrt{3}-1$ ニシテ其夾角ガ 60° ナルトキ, 他ノ二角ヲ求メヨ.

(b) 邊 AB ト AC トノ比ハ $\sqrt{3}:2$ ニシテ $\hat{B}$ ハ $\hat{C}$ ヨリモ 30° 大ナルトキハ, 各角ノ大サ幾何. 答 A=30°, B=90°, C=60°, (海機)

〔解〕 (a) $a=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1$ トスレバ 其夾角C=60° ナルヲ以テ,

$\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}.\sqrt{3}=1=\tan 45^\circ,$ ∴ $\dfrac{A-B}{2}=45^\circ$, 從テ $A-B=90^\circ$

又 $A+B=180^\circ-C=120^\circ$. 此二式ヨリ $A=105^\circ,\ B=15^\circ$ ヲ得.

22. (a) $\cot A,\ \cot B,\ \cot C$ ガ等差級數ヲナストキハ a^2, b^2, c^2 モ亦タ等差級數ヲナス.

(b) $\tan\frac{A}{2},\ \tan\frac{B}{2},\ \tan\frac{C}{2}$ ガ等比級數ヲナストキハ $b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$ ナリ.

(c) A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ

$$2\cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+c}{\sqrt{(a^2-ac+c^2)}}\quad ナリ.$$

〔證〕 (a) 定義ニヨリ $\cot A-\cot B=\cot B-\cot C$ 即チ $\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos C}{\sin C}$,

此分母ヲ拂ヘバ $\sin C(\sin A.\cos B-\cos A.\sin B)=\sin A(\sin B.\cos C-\cos B.\sin C)$

即チ $\sin C.\sin(A-B)=\sin A.\sin(B-C)$, 然ルニ $A+B+C=180^\circ$ ナルユヱ

$\sin(A+B).\sin(A-B)=\sin(B+C).\sin(B-C)$ 即チ $\sin^2A-\sin^2B=\sin^2B-\sin^2C$.

然ルニ正弦比例式ヨリ $\frac{a^2}{\sin^2A}=\frac{b^2}{\sin^2B}=\frac{c^2}{\sin^2C}=\frac{a^2-b^2}{\sin^2A-\sin^2B}=\frac{b^2-c^2}{\sin^2B-\sin^2C}$

$\therefore\ a^2-b^2=b^2-c^2$ 即チ a^2, b^2, c^2 ハ等差級數ヲナス.

(b) 公式 (29) ニ依ル.

(c) 定義ニヨリ $A+C=2B$ ナルユヱ $B=180^\circ\times\frac{1}{3}=60^\circ$ ナリ.

又 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$ トセバ $\sin A=ak,\ \sin B=bk,\ \sin C=ck$ ナリ.

$\therefore\ 2\cos\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin A+\sin C}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}$ 〔∵ (A, B) 式ノ逆〕 $=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{k(a+c)}{kb}=\frac{a+c}{b}$

$=\frac{a+c}{\sqrt{(c^2+a^2-2ac.\cos B)}}$ 〔∵ 公式(24)〕 $=\frac{a+c}{\sqrt{(c^2+a^2-ac)}}$. 〔∵ $B=60^\circ$〕

23. $a.\cos A+b.\sin A=a.\cos B+b.\sin B=c$ ナルトキハ次式ノ證如何,

$$\frac{a}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{c}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$ (高等)

〔證〕 $a.\cos A+b.\sin A=a.\cos B+b.\sin B$ ヨリ $a(\cos A-\cos B)=b(\sin B-\sin A)$

即チ $-2a.\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)=2b.\cos\frac{1}{2}(B+A)\sin\frac{1}{2}(B-A)$

$\therefore\ a/\cos\frac{1}{2}(A+B)=b/\sin\frac{1}{2}(A+B)$..........................(1)

次ニ $a.\cos A+b.\sin A+(a.\cos B+b.\sin B)=2c$

即チ $2a.\cos\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)+2b.\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)=2c$

即チ $\cos\frac{1}{2}(A-B)\{a.\cos\frac{1}{2}(A+B)+b.\sin\frac{1}{2}(A+B)\}=c$ ....(2)

然ルニ (1) ヨリ $a=b.\cos\frac{1}{2}(A+B)/\sin\frac{1}{2}(A+B)$, 之ヲ (2) ニ代用スレバ

$\cos\frac{1}{2}(A-B)\{b.\cos^2\frac{1}{2}(A+B)/\sin\frac{1}{2}(A+B)+b.\sin\frac{1}{2}(A+B)\}=c$,

即チ $\cos\frac{1}{2}(A-B).\frac{b}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=c,\quad\therefore\ b/\sin\frac{1}{2}(A+B)=c/\cos\frac{1}{2}(A-B)$.........(3)

此 (1), (3) ニ依テ所要ノ證ヲ得.

24. 正弦比例式即チ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ヨリ次式ヲ誘導セヨ,

(a) $a=b.\cos C+c.\cos B$, 等.

(b) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$, 等. (大工)

〔解〕 正弦比例式ノ値ヲ k トセバ $a=k.\sin A,\ b=k.\sin B,\ c=k.\sin C$ ヲ得.

$\therefore$ (a) $\sin(B+C)=\sin A$ 即チ $\sin B.\cos C+\cos B.\sin C=\sin A$ ニ代用スレバ

$\frac{\ }{k}\cos C+\frac{c}{k}\cos B=\frac{a}{k}$, 然ルニ $k\neq0\quad\therefore\ b.\cos C+c.\cos B=a$, 等.

(b) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{k^2(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)}{k^2.2\sin B.\sin C}=\frac{2\cos A.\sin B.\sin C}{2\sin B.\sin C}$ 〔∵ 69 頁 5題〕

$=\cos A$, 此分母ヲ拂ヒ轉項スレバ證ヲ得.

25. (a) $\sin^2\theta=\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}$ ナルトキハ $a=(b+c)\cos\theta$ ナリ.

(b) $\tan^2\phi=\frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{A}{2}$ ナルトキハ $a=(b-c)\sec\phi$ ナリ.

〔證〕 (a) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=(b+c)^2-4bc.\cos^2\frac{A}{2}$

$=(b+c)^2\left\{1-\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\frac{A}{2}\right\}=(b+c)^2\{1-\sin^2\theta\}=(b+c)^2\cos^2\theta$,

$\therefore\ a=(b+c)\cos\theta$.

注意. 本題ハ $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ヲ對數計算ニ便ナル形ニ變ヘタルモノニシテ上ノ角 θ 及ビ ϕ ヲ補助角ト云フ.

而シテ之レハ三角形ノ解法ニ於テ, 二邊 b, c ト其夾角 A ガ與ヘラルヽトキ若シ第三邊 a ノミヲ求メンニハ頗ル便ナリ.

△ABC ニ於テ C ガ直角ナルトキ次ノ 26 乃至 29 題ヲ證セ,

26. (a) $sin2A=\frac{2ab}{c^2}=sin2B$, $cos2A=-\frac{c^2}{a^2-b^2}=-cos2B$,

$cosec2B=\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}$.

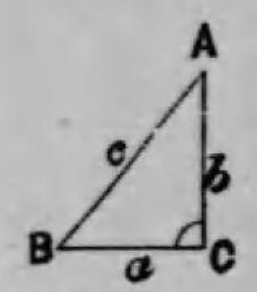
(b) $sin3A=\frac{3ab^2-a^3}{c^3}$, $cos3A=\frac{b^3-3a^2b}{c^3}$. (c) $tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$. (商船)

(d) $sin^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{2c}$, $cos^2\frac{A}{2}=\frac{c+b}{2c}$. (e) $tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}$.

〔證〕 考ヘ方 二倍, 三倍, 半角ノ函數ヲ一倍角ノ函數ニ直セバ邊ニテ表サル.

(a) $sin2A=2sinA.cosA=2\times\frac{a}{c}\times\frac{b}{c}=\frac{2ab}{c^2}$

$=2cosB.sinB=sin2B$.



(b) $sin3A=3sinA-4sin^3A=3\times\frac{a}{c}-4\times\left(\frac{a}{c}\right)^3=\frac{3ac^2-4a^3}{c^3}$

$=\frac{3a(a^2+b^2)-4a^3}{c^3}=\frac{3ab^2-a^3}{c^3}$. 他モ同様ナリ.

(c) $tan\frac{A}{2}=\frac{sin\frac{1}{2}A}{cos\frac{1}{2}A}=\frac{2sin\frac{A}{2}.cos\frac{A}{2}}{2cos^2\frac{1}{2}A}=\frac{sinA}{1+cosA}=\frac{a}{c}\Big/\left(1+\frac{b}{c}\right)=\frac{a}{b+c}$.

(d) $sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-cosA}{2}=\left(1-\frac{b}{c}\right)\Big/2=\frac{c-b}{2c}$. 他モ同様ナリ.

(e) 公式 (26) ノ系ニ於テ $cot\frac{C}{2}=cot45^\circ=1$ ナレバナリ.

27. $tan^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{c-a}{c+a}=tan^2\frac{B}{2}$.

〔證〕 左邊$=\frac{sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}A)}{cos^2(45^\circ-\frac{1}{2}A)}=\frac{\frac{1}{2}\{1-cos(90^\circ-A)\}}{\frac{1}{2}\{1+cos(90^\circ-A)\}}=\frac{1-sinA}{1+sinA}=\left(1-\frac{a}{c}\right)\Big/\left(1+\frac{a}{c}\right)=\frac{c-a}{c+a}$.

又 $tan^2\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)=tan^2\frac{1}{2}(90^\circ-A)=tan^2\frac{B}{2}$.

28. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{2sinA}{\sqrt{cos2B}}$. 〔42 頁 13 題ト對照セヨ〕 (新瀉)

〔證〕 左邊$=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}=\frac{a+b+(a-b)}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}}=\frac{2a}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$

$=\frac{2c.sinA}{\sqrt{(c^2.sin^2A-c^2.sin^2B)}}$ 〔∵ 正弦比例式〕 $=\frac{2sinA}{\sqrt{(cos2B)}}$.

第 三 章

三角形ノ面積, 等

記法 △ABC ノ面積ヲ S ト記シ; 又外接圓, 內切圓及ビ $\hat{A}$, $\hat{B}$ $\hat{C}$ 內ノ傍切圓ノ半徑ヲ夫々 R, r 及ビ r_1, r_2, r_3 ト記ス.

4. 三角形ノ面積

$$\left.\begin{aligned}S&=\tfrac{1}{2}bc.sinA,\ \text{等}\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

〔證〕 75 頁ノ圖ヲ見ヨ. △ABC ニ於テ AD⊥BC トスレバ

$S=\frac{1}{2}a.AD=\frac{1}{2}ca.sinB$, 等

$=\frac{1}{2}ca\times\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 〔∵ 公式 (30)〕 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

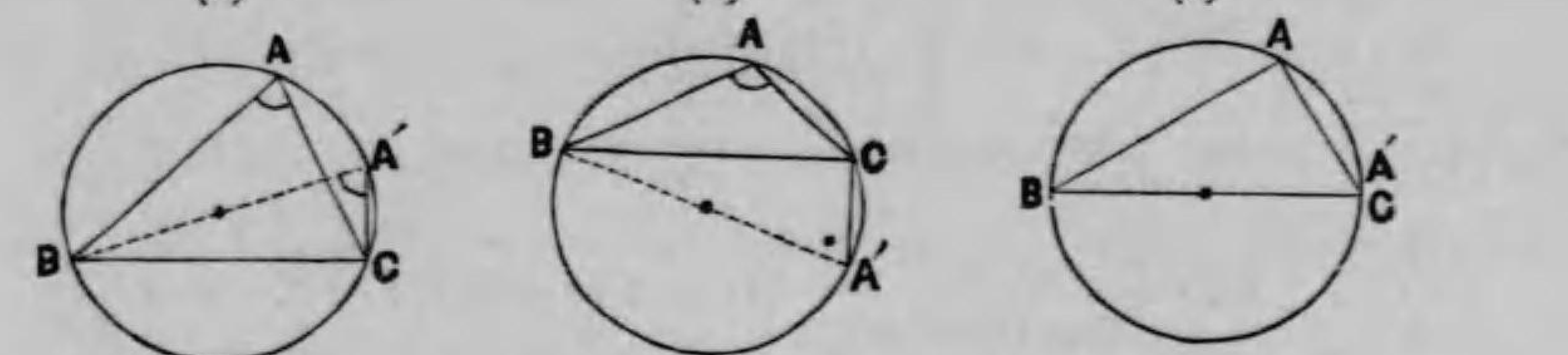
注意. 此第一ノ公式ハ, 二邊ト其夾角ノ正弦トノ乘積ノ半ナリ.

5. 外接圓, 內切圓, 傍切圓ノ半徑

〔第一〕 $$\left.\begin{aligned}R&=\frac{a}{2sinA}=\frac{b}{2sinB}=\frac{c}{2sinC}\\&=\frac{abc}{4S}\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$ (海兵)

〔證〕 △ABC ノ外接圓ノ直徑 BA′ ヲ引ケバ

(1) (2) (3)



(1) 圖 $\hat{A}$=鋭角ナレバ $\hat{A}=\hat{A'}$, $\hat{C}=\hat{R}$ ナルヲ以テ,

$sinA=sinA'=\frac{BC}{BA'}=\frac{a}{2R}$, ∴ $2R=\frac{a}{2sinA}=\frac{b}{2sinB}=\frac{c}{2sinC}$ 〔∵ 正弦比例式〕

(2) 圖 $\hat{A}$=鈍角ナレバ $\hat{A}$ ト $\hat{A'}$ トハ補角, $\widehat{BCA'}=\hat{R}$ ナルニモ,

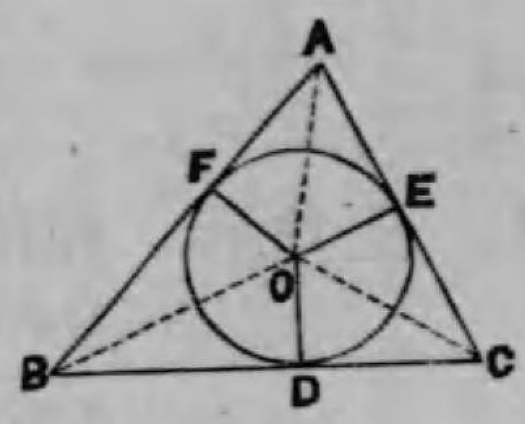
$sinA=sin(180^\circ-A)=sinA'=\frac{BC}{BA}=\frac{a}{2R}$, ∴ $R=\frac{a}{2sinA}=\frac{b}{2sinB}=\frac{c}{2sinC}$.

(3) 圖 $\hat{A}$=直角ナレバ $2R=BA'=BC=\frac{a}{1}=\frac{a}{sin90^\circ}=\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$.

系. $a=2R.\sin A$, 等.

〔第二〕 $$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \qquad (33)$$

〔證〕 △ABC ノ內心ヲ O トシ, 切點ヲ D, E, F トスルトキハ



$$\triangle BOC+\triangle COA+\triangle AOB=\triangle ABC$$

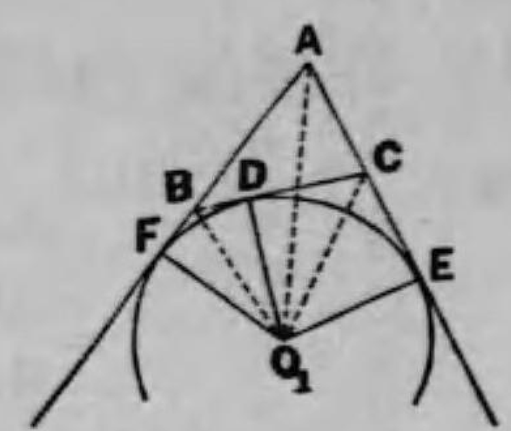
即チ $\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=S$ 〔∵ 平幾定理〕

即チ $\frac{1}{2}(a+b+c)r=S$

即チ $sr=S$, 之ヨリ容易ニ證ヲ得.

〔第三〕 $$r_1=\frac{S}{s-a}, \text{ 等}. \qquad (34)$$

〔證〕 $\hat{A}$ 內ノ傍心ヲ O_1 トシ, 切點ヲ D, E, F トスルトキハ



$$\triangle CO_1A+\triangle AO_1B-\triangle BO_1C=\triangle ABC,$$

是ヨリ上ト同樣ニ

$$\tfrac{1}{2}(b+c-a)r_1=S$$

即チ $(s-a)r_1=S$, $\therefore\ r_1=\frac{S}{s-a}$.

同樣ニ $r_2=\frac{S}{s-b}$, $r_3=\frac{S}{s-c}$.

6. 三角形ノ高サ, 中線, 角ノ二等分線

(1) △ABC ノ A ヨリ BC ヘノ高サヲ AD トスレバ

(i) $AD=\dfrac{a}{\cot B\pm\cot C}$. (ii) $AD=2s\Big/\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$. (陸士)

(iii) $AD=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{bc}{2R}$.

〔證〕 (i) $a=BD\pm DC=AD.\cot B\pm AD.\cot C$, $\therefore\ AD=a/(\cot B\pm\cot C)$.

(ii) $AD=\frac{2S}{a}=\frac{2r.s}{a}=2s.\times\frac{r}{a}=2s\Big/\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$. 〔∵ 問 3 ノ (a)(ii)〕

(iii) $S=\frac{1}{2}a.AD$ $\therefore\ AD=\frac{2S}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{bc}{2R}$, 〔∵ $R=\frac{abc}{4S}$〕

(2) △ABC ノ A ヨリ BC ヘノ中線 AD ヲ m トスレバ

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc.\cos A} \quad ナリ.$$

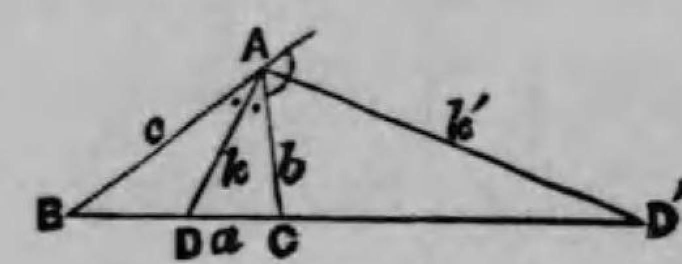
〔證〕 次圖ヲ見ヨ, $2\left\{m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}=b^2+c^2$ 〔∵ 平幾定理〕

$\therefore\ m=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc.\cos A}$. 〔∵ 公式 (24)〕

(3) △ABC ノ $\hat{A}$ 及ビ其外角ノ二等分線 AD, AD′ ヲ k, k' トセバ

$$k=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \quad 及ビ \quad k'=\frac{2bc}{b\sim c}\sin\frac{A}{2} \quad ナリ.$$

〔證〕 $\triangle ABD+\triangle ADC=\triangle ABC$



即チ $\frac{1}{2}c.AD.\sin\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}b.AD.\sin\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}bc.\sin A$

∴ $AD=\frac{1}{2}BC.2\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}A/\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}A(c+b)$

即チ $k=2bc.\cos\frac{1}{2}A/(b+c)$.

次ニ $\triangle ABD'-\triangle ACD'=\triangle ABC$ 即 $\frac{1}{2}c.AD.'\sin BAD'-\frac{1}{2}b.AD.'\sin CAD'=\frac{1}{2}bc.\sin A$

即チ $\frac{1}{2}ck.'\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)-\frac{1}{2}bk.'\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$

∴ $(c-b)k'=2bc.\sin\frac{A}{2}$. 〔∵ $\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)=\cos\left(-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$, $\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$〕

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 平行四邊形ノ面積ハ隣接二邊 a, b ト其夾角 θ ノ正弦トノ乘積ニ等シ. 〔公式 (31) ニ依ル, 以下モ亦然リ〕

(b) △ABC ニ於テ $b=25$間, $c=32$間, $A=60^\circ$ ナルトキ面積ヲ坪以下二桁マデ算出セヨ. 答 346.41 坪. (東商, 東工, 東師)

(c) 50尺, 60尺 ヲ二邊トセル三角形ノ中ニ於テ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ. 答 1500 平方尺.

(d) △ABC ニ於テ AB=10米, AC=17米, BC=21米 ナルトキ $\hat{A}$ ノ二等分線 AE ヲ引ケバ △ABC, △ACE ノ面積各幾何. (七高)

〔略解〕 (d) 公式 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ニ依テ △ABC=84 平方米.

次ニ △ABE : △ACE=BE : EC=AB : AC, ∴ △ABC : △ACE=AB+AC : AC=27 : 17

∴ $\triangle ACE=\triangle ABC\times\frac{17}{27}=84\times\frac{17}{27}=52.\dot{8}$ 平方米.

2. 次ノ各々ヲ證明セヨ,

(*a*) $S=\dfrac{a^2}{2(\cot B\pm\cot C)}$, 等$=\dfrac{a^2-b^2}{2(\cot B-\cot A)}$, 等$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}$.

(*b*) $S=\dfrac{a^2.\sin B.\sin C}{2\sin A}$, 等. (*c*) $S=\dfrac{2abc}{a+b+c}\left(\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}\right)$.

(*d*) $S=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$. (*e*) $S=r^2.\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$.

(*f*) $S=\dfrac{1}{4}(a^2.\sin 2B+b^2.\sin 2A)$. (六高)

〔證〕 (*a*) $S=\dfrac{1}{2}a.AD=\dfrac{a^2}{2(\cot B\pm\cot C)}$ 〔∵ 第6條1ノ(i)〕

次ニ $S=\dfrac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}=\dfrac{b^2}{2(\cot C+\cot A)}=\dfrac{a^2-b^2}{2(\cot B-\cot A)}$ 〔∵ 等値分數定理〕

(*b*) $S=\dfrac{1}{2}ab.\sin C=\dfrac{1}{2}a.\dfrac{a.\sin B}{\sin A}.\sin C$ 〔∵ 正弦比例〕 $\dfrac{a^2.\sin B.\sin C}{2\sin A}$, 等.

(*c*) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{1}{s}\sqrt{s^2.(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\dfrac{abc}{s}\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}.\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}=\dfrac{2abc}{a+b+c}\left(\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}\right)$.

(*d*) $S=\dfrac{1}{2}ab.\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2R.\sin A\times 2R.\sin B\times\sin C$ 〔∵ 第5條ノ系〕

$=2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$.

(*e*) $S=\dfrac{S^2}{S}=\dfrac{r^2.s^2}{S}=r^2\times\dfrac{s^2.S}{S^2}=r^2\times\dfrac{s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=r^2.\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-a)(s-c)}}.\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}.\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=r^2.\cot\dfrac{A}{2}.\cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}$.

(*f*) $S=\frac{1}{2}ab.\sin C=\frac{1}{2}ab.\sin(A+B)=\frac{1}{2}ab(\sin A.\cos B+\cos A.\sin B)$

$=\frac{1}{4}\{2a.b\sin A.\cos B+2b.a\sin B.\cos A\}=\frac{1}{4}\{2a.a\sin B.\cos B+2b.b\sin A.\cos A\}$

$=\frac{1}{4}\{a^2.\sin 2B+b^2.\sin 2A\}$. 〔79 頁問 6 參考〕

3. (*a*) (i) $r=(s-a)\tan\dfrac{A}{2}$, 等. (ii) $r=a\Big/\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$, 等.

(iii) $r=a.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\Big/\cos\dfrac{A}{2}$, 等. (iv) $r=4R.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.

(*b*) (i) $r_1=s.\tan\dfrac{A}{2}$, 等. (ii) $r_1=a\Big/\left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)$, 等.

(iii) $r_1=a.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}\Big/\cos\dfrac{A}{2}$, 等. (iv) $r_1=4R.\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$.

〔證〕 (*a*) 90 頁ノ圖ヲ用フ, (i) $r=AF.\tan\dfrac{A}{2}=(s-a).\tan\dfrac{A}{2}$, 等.

(ii) r ハ △BOC ノ高サナルヲ以テ第 6 條(1) ト同樣ナリ.

(iii) $r=a\Big/\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$ 〔∵ (ii)〕$=a\Big/\left(\dfrac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}+\dfrac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right)$

$=a\Big/\dfrac{\sin\frac{1}{2}(C+B)}{\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}=a.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}\Big/\cos\frac{1}{2}A$ 〔∵ $A+B+C=180°$〕.

(iv) ハ (iii) ニ於テ $a=2R.\sin A=4R.\sin\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{A}{2}$ ヲ代用ス.

4. (*a*) △ABC ニ於テ $a=5$, $b=12$, $C=13$ ナルトキ S, R, r, r_1, r_2, r_3 ノ値ヲ求メヨ. 答 $S=30$, $R=6.5$, $r=2$, $r=3$, $r_2=10$, $r_3=15$.

(*b*) 三角形ノ三邊ガ 24間, 35間, 17間 ナルトキハ, 此地積ハ何坪何合何勺ナルカ. 答 183 坪 1 合 4 勺弱. (醫専, 海機)

5. △ABC ニ於テ三邊 a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ次ノ證如何, $ac=6rR$.

〔證〕 a, b, c ガ A.P. ヲナストキハ $a+c=2b$ ナリ.

$\therefore\ ac=\dfrac{3abc}{3b}=\dfrac{3abc}{2b+b}=\dfrac{3abc}{a+c+b}=\dfrac{3abc}{2s}=\dfrac{3\times 4RS}{2S/r}=6rR$.

6. (*a*) △ABC ニ於テ $\hat{A}=\hat{R}$ ナルトキ次式ヲ證セ,

(i) $r=s-a$. (ii) $r_1=s$. (iii) $S=s(s-a)$.

(*b*) △ABC ニ於テ $\hat{C}=\hat{R}$ ナルトキハ $R+r=\frac{1}{2}(a+b)$ ナリ.

〔證〕 (*a*) $\tan\dfrac{A}{2}=\tan 45°=1$ ナルヲ以テ 3 題ノ (*a*) ノ (i), (*b*) ノ (i) ヨリ直チニ $r=s-a$, $r_1=s$ ヲ得. 從テ $S=r.s=(s-a).s$.

(*b*) $R+r=\dfrac{S}{s}+\dfrac{c}{2\sin C}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab.\sin C}{s}+\dfrac{c}{\sin C}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{s}+c\right)$ 〔∵ $\sin C=\sin 90°=1$〕

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{ab+sc}{s}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2ab+(a+b)c+c^2}{a+b+c}$ 〔∵ $2s=a+b+c$〕

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2ab+(a+b)c+a^2+b^2}{a+b+c}$ 〔∵ $c^2=a^2+b^2$〕$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(a+b)^2+(a+b)c}{a+b+c}$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{(a+b+c)(a+b)}{a+b+c}=\dfrac{1}{2}(a+b)$.

7. 凸四邊形ノ面積

四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交角 $AOB=\theta$ トシ，面積ヲ S トスレバ　　$S=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\theta$ ナリ.　　（二高）

又四ツノ邊ヲ夫々 a, b, c, d トシ $a+b+c+d=2\sigma$ トセバ

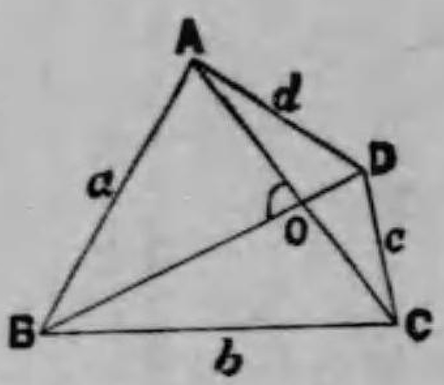
$$S^2=(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)(\sigma-d)$$

$$-abcd.\cos^2\tfrac{1}{2}\,(\text{對角ノ和})\qquad(35)$$

〔證〕 $\triangle ABD=\triangle AOB+\triangle AOD$

$=\frac{1}{2}AO.BO.\sin\theta+\frac{1}{2}AO.OD.\sin(180^\circ-\theta)$

$=\frac{1}{2}AO.BD.\sin\theta$　$[\because \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta]$



同樣ニ　$\triangle BCD=\frac{1}{2}CO.BD.\sin\theta.$

$\therefore$　$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}AO.BD.\sin\theta+\frac{1}{2}CO.BD.\sin\theta$

$=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\theta.$

次ニ　$\triangle ABD$, $\triangle CBD$ ニ於テ　$a^2+d^2-2ad.\cos A=\overline{BD}^2=b^2+c^2-2bc.\cos C,$

$\therefore$　$a^2+d^2-b^2-c^2=2ad.\cos A-2bc.\cos C$　　(1)

又　$2S=\triangle ABD+\triangle CBD=ad.\sin A+bc.\sin C$

$\therefore$　$4S=2ad.\sin A+2bc.\sin C$　　(2)

此 (2) ノ平方ト (1) ノ平方トヲ邊々相加フレバ

$16S^2+(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd.\cos(A+C)$

$\therefore$　$16S^2=(2ad+2bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-16abcd.\cos^2\frac{1}{2}(A+C)$

$=16(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)(\sigma-d)-16abcd.\cos^2\frac{1}{2}(A+C)$

$\therefore$　$S^2=(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)(\sigma-d)-\cos^2\frac{1}{2}(A+C).$

他ノ對角ノ和 (B+D) ニ付テモ同樣ニ證明シ得ベシ.

系 (1)　若シ四邊形ガ圓ニ內接スルトキハ　$A+C=B+D=180^\circ$ ナルヲ以テ　　$S=\sqrt{(\sigma-a)(\sigma-b)(\sigma-c)(\sigma-d)}$　　ナリ.

系 (2)　若シ四邊形ガ一圓ニ內接シ他邊ニ外切スルトキハ $a+c=b+d=\sigma$　ナルヲ以テ　$S=\sqrt{abcd}$　　ナリ.

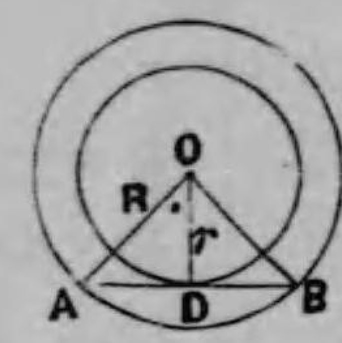
8. 正多角形ノ面積

正 n 邊形ノ一邊ヲ a，面積ヲ S トシ；又外接圓及ビ內切圓ノ半徑ヲ R, r トシ；又 $180^\circ=\pi$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}R&=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\\ r&=\frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}\end{aligned}\right\}\quad(36)\qquad\left.\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}nR^2.\sin\frac{2\pi}{n}\\ &=nr^2.\tan\frac{\pi}{n}\\ &=n\left(\frac{a}{2}\right)^2.\cot\frac{\pi}{n}\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

〔證〕 外接圓，內切圓ノ同心ヲ O トセバ

(1)　$\hat{AOB}=\frac{2\pi}{n}$，從テ　$\hat{AOD}=\frac{\pi}{n}$　ナルユエ



$OD\perp AB$ トセバ　直$\triangle AOD$ ニ於テ

$AO.\sin AOD=AD=OD.\tan AOD$

卽チ　　$2R.\sin\frac{\pi}{n}=a=2r.\tan\frac{\pi}{n}.$

(2)　$S=n.\triangle AOB=n.\frac{1}{2}R.R\sin AOB=n.\frac{1}{2}R^2.\sin\frac{2\pi}{n}.$

或ハ　　$=n.\frac{1}{2}ar=n.\frac{1}{2}r.\left(2r.\tan\frac{\pi}{n}\right)=nr^2.\tan\frac{\pi}{n}.$

或ハ　　$=n.\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\right)=n\left(\frac{a}{2}\right)^2.\cot\frac{\pi}{n}.$

注意. (1) ヲ變形シテ R, r ヲ得ベク，又 (1) ヲ n 倍セバ周ヲ得ベシ.

系.　半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a)　半徑 a ナル圓ノ中心角 A ノ對弦ノ長サ幾何.　　（海兵）

(b)　半徑 2尺 ノ圓ニ內接スル正八邊形ノ一邊ノ長サヲ寸位マデ計算シ以下四捨五入セヨ.　　（七高）

〔略解〕 公式 (36) ニ依ル.　　答 (a) $2a.\sin\frac{A}{2}$.　(b) 1尺5寸.

2. 圓ノ面積ト其ノ內接正十角形ノ面積トノ比ヲ小數點以下第二位マデ算出セヨ.　　答 10.8 弱.　　（大工）

第　四　編
三角形ノ解法 及ビ 其應用

第　一　章
三角形ノ解法

1. 三角形ヲ解クトハ三邊ト三角トノ六元素ノ中,獨立セル三元素〔卽チ其二ツヨリ他ノ一ツヲ得ザル〕ヲ知リテ他ノ元素ヲ求ムル方法ヲ云フ. 而シテ其解法ニハ次ノ已知條件ノ四場合アリ,

(1) 一邊ト二角.　(2) 二邊ト其一邊ノ對角.
(3) 二邊ト其夾角.　(4) 三邊.

2. 三角形ノ解法

第一 一邊ト二角 (例ヘバ a, B, C) ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

〔解法〕

次ニ公式 (22) ヨリ

及ビ

$$\left.\begin{aligned} A&=180^\circ-(B+C)\\ b&=\frac{a.\sin B}{\sin A}\\ c&=\frac{a.\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

第二 二邊ト其一邊ノ對角 (例ヘバ a, b, A) ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

〔解法〕 公式 (22) ヨリ

又公式 (22) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} \sin B&=\frac{b.\sin A}{a}\\ C&=180^\circ-(A+B)\\ c&=\frac{a.\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

吟味 $\sin\mathrm{B}=\dfrac{b.\sin\mathrm{A}}{a}$ ニ於テ

(1) $b.\sin\mathrm{A}>a$ ナラバ $\sin\mathrm{B}>1$ トナル, 然ルニ $\sin$ ノ最大絕對值ハ 1 ナルヲ以テ此場合ハ不合理ナリ, 卽チ解ナシ.

(2) $b.\sin\mathrm{A}=a$ ナラバ $\sin\mathrm{B}=1$ トナリテ B ハ 90° ニ限ルヲ以テ此場合ニハ一ツノ直三角形アリ.

(3) $b.\sin\mathrm{A}<a$ ナラバ $\sin\mathrm{B}<1$ トナリテ B ノ値ハ二ツアリテ互ニ補角ナリ,故ニ此場合ニハ鋭角,鈍角ノ兩三角形アリ.

之ヲ要スルニ,二邊ト其小邊ノ對角ガ已知ナルトキハ二ツノ解アリ. 之ヲ兩意ノ場合ト云フ.

第三 二邊ト其夾角 (例ヘバ a, b, C) ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

〔解法〕

公式 (26) ヨリ

此二式ヨリ A ヲ求メ,次ニ

$$\left.\begin{aligned} A+B&=180^\circ-C\\ \tan\frac{A-B}{2}&=\frac{a-b}{a+b}.\cot\frac{C}{2}\\ c&=\frac{a.\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

注意. 已知數ガ簡單ナルトキ,邊ヲ求ムルニハ公式 (24) 卽チ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\mathrm{C}$ 等ニ用ヒテ便ナルコトアリ. 然レドモ角ハ槪シテ表ニ依テ求ムルヲ要ス.

第四 三邊 a, b, c ヲ知リテ三角形ヲ解クコト.

〔解法〕 公式 (29) ヨリ

及ビ

從テ

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ C&=180^\circ-(A+B)\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

注意. 已知數ガ簡單ナルトキ, 角ヲ求ムルニハ公式 (25) 卽チ $\cos\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, 等ヲ用ヒテ便ナルコトアリ.

上ノ四ツノ場合ヲ見ルニ,第一ト第二トハ正弦比例,第三ハ二邊ト其夾角,第四ハ三邊ガ已知ナル公式ニ依リタルコトヲ知ル.

故ニ 問題ヲ解クニハ先ヅ已知數ノ關係ヲ檢シ(三角形ヲ畫キ之ニ已知數ヲ適當ニ配置セバ一目瞭然タラン)以テ其ノ何レノ場合ニ適合スルカヲ確カムルヲ要ス.

問題及ビ解答

1. (a) $B=30^\circ$, $C=45^\circ$, $c=10\sqrt{2}$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

(b) $A=75^\circ$, $C=30^\circ$, $c=42.4$ 尺 〃

(c) $A=45^\circ$, $B=105^\circ$, $AB=c$ ヲ與ヘテ a, b ヲ求メヨ, 但シ根式ニテ答ヘヨ. (四高)

〔解〕 二角ト一邊トヲ知ルユヱ, 正弦比例ニ依ル.

(c) $a=\dfrac{c.\sin A}{\sin C}=\dfrac{c.\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ [$\because$ $A+B+C=180^\circ$] $=c\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big/\dfrac{1}{2}=c\sqrt{2}$.

$b=\dfrac{c.\sin B}{\sin C}=\dfrac{c.\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c.\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$ [$\because$ $\sin A=\sin(180^\circ-A)$]

$=c\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Big/\dfrac{1}{2}=c\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

答 (a) $A=105^\circ$, $b=10$, $a=5(\sqrt{6}+2)$. (b) $B=75^\circ$, $a=b=81.9$ 尺.

2. (a) $AB=\sqrt{2}$, $AC=1$, $B=30^\circ$ ナルトキ A, C ヲ求メヨ. (海機)

(b) $a=30\sqrt{3}$, $b=90$, $A=30^\circ$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ. (專檢)

(c) $a=2$, $c=4(\sqrt{3}+1)$, $C=45^\circ$ 〃

(d) $a=2$, $b=3(\sqrt{3}-1)$, $A=75^\circ$ 〃

(e) $b=50\sqrt{3}$, $c=150$, $B=30^\circ$ ニ適スル三角形ノ一ツハ二等邊, 一ツハ直三角形ナリ. 又其ノ最大ナル三角形ノ面積ヲ求メヨ. (農實)

〔解〕 二邊ト其一邊ノ對角トヲ知ルユヱ, 正弦比例ニ依ル.

(a) $\sin C=\dfrac{c.\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{2}.\sin 30^\circ}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore$ $C=45^\circ$,

然ルニ $c=\sqrt{2}$, $b=1$, $B=30^\circ$ 卽チ二邊ト其小邊ノ對角トヲ知ルユヱ

$C=180^\circ-45^\circ=135^\circ$, 從テ $A=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$.

從テ $A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$. 答 $A=105^\circ$, $C=45^\circ$ 或 $A=15^\circ$, $C=135^\circ$.

(b) 答 $B=60^\circ$, $C=90^\circ$, $c=60\sqrt{3}$ 或ハ $B=120^\circ$, $C=30^\circ$, $c=30\sqrt{3}$.

(c) 答 $A=15^\circ$, $B=120^\circ$, $b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. 〔$c>a$, C ガ已知ナルユヱ一ツノ解ナリ〕

(d) 答 解ナシ. 〔計算シテ $\sin B>1$ ナルヲ知ルガ故ナリ〕

(e) $\sin C=\dfrac{c.\sin B}{b}=\dfrac{150\sin 30^\circ}{50\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore$ $C=60^\circ$, 從テ $A=90^\circ=\hat{R}$.

然ルニ二邊ト其ノ小邊ノ對角ガ已知ナルユヱ兩意ノ場合ニシテ $C=120^\circ$, 從テ $A=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$, $\therefore$ $A=B$, 從テ $a=b$.

次ニ b, c ヲ二隣邊トスル三角形ハ其ノ二邊ガ直交スルトキニ面積ハ最大ナリ.

$\therefore$ 所要ノ面積 $=\frac{1}{2}b.c=\frac{1}{2}\times 50\sqrt{3}\times 150=3750\sqrt{3}$.

3. (a) $A=120^\circ$, $b=12$尺, $c=9$尺 ナルトキ a ヲ寸位マデ求メヨ.

答 18尺 3寸. (海機)

(b) $c=\sqrt{2}$, $a=\sqrt{3}+1$, $B=45^\circ$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

(c) $a=3$, $b=7$, $C=98^\circ 13'$ ナルトキ c ヲ求メヨ. 答 8.

(d) $a=24$尺, $b=50$尺 ニシテ $\cos C=0.9246$ ナルトキ c ヲ求メヨ. (東商, 一高)

〔解〕 二邊ト其夾角トヲ知ルユヱ公式 (24) 或ハ (26) ニ依ル.

(b) $b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B=\sqrt{2}^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cos 45^\circ$

$=2+3+1+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2=4$, $\therefore b=2$.

次ニ $\sin C=\dfrac{c.\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{2}.\sin 45^\circ}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ $C=30^\circ$, 從テ $A=105^\circ$.

(d) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=24^2+50^2-2\times 24\times 50\times 0.9246=856.96$,

故ニ $c=\sqrt{856.96}=29.27$. 答 29.3尺弱.

注意. (a), (b), (c) ハ公式 (26) ニ依レバ頗ル複雜トナル.

4. (a) $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $b=c=2$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

(b) $a=7$, $b=5$, $c=8$, $\cos 38^\circ 11'=\dfrac{11}{14}$ ヲ與ヘテ 同上.

(c) $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ ナルトキ A ヲ求メヨ.

〔解〕 三邊ガ已知ナルユヱ公式 (25) 或ハ (29) ニ依ル.

(b) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times 5\times 8}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ $A=60^\circ$ 同樣ニ $B=38^\circ 11'$.

從テ $C=180^\circ-(60^\circ+38^\circ 11')=81^\circ 49'$.

答 (a) $A=30^\circ$, $B=C=75^\circ$. (c) $A=60^\circ$.

5. (a) $A=45°$, $B=60°$ ナラバ $2c=(1+\sqrt{3})a$ ナリ.

(b) $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$ ナラバ $a=60\sqrt{5}$ ナリ. (水講)

(c) $A:B:C=3:2:1$ ニシテ $a-c=80$米 ナルトキ各角及ビ各邊ヲ求メヨ.

答 $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$ 及ビ $c=80$, $a=160$, $b=c\sqrt{3}=138.6$米.

〔解〕 (a) $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin 75}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

$[\because\ C=180°-(A+B)]$　$\therefore\ 2c=a(\sqrt{3}+1)$.

(b) $\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{1+2}{1-1\times 2}=-3$,　$\therefore\ \tan A=3$.

又 $\sin A=\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\dfrac{3}{\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,　同様ニ $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore\ a=\dfrac{b.\sin A}{\sin B}=100\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{2}}=60\sqrt{5}$.

(以下對數計算ニ關ス)

6. (a) $a=100$尺, $A=50°$, $C=66°$ ナルトキ c ヲ求メヨ, 但シ $L\sin 50°=9.88425$, $L\sin 66°=9.96073$, $\log 1.19255=0.07648$.

答 119.26 尺弱.　(一高)

(b) $B=60°40'$, $C=59°10'$, $a=10.62$ ナルトキ b ヲ求メヨ, 但シ $\log 106=2.0253$, $\log\sin 60°=9.9375-10$,

$\log 107=2.0294$.　$\log\sin 61°=9.9418-10$.　(東商)

〔解〕 一邊ト二角トヲ知ルニハ正弦比例式ニ依ル.

(b) $b=\dfrac{a.\sin B}{\sin A}$ ノ對數式ニ依リテ計算ス, 卽チ

先ヅ $A=180°-(B+C)=180°-(60°40'+59°10')=60°10'$.

$\log 10.62=2.0253+\dfrac{106.2-106}{107-106}\times(2.0294-2.0253)=2.0261$

$\log\sin 60°40'=\bar{1}.9375+\dfrac{40}{60}\times(\bar{1}.9418-\bar{1}.9375)=\bar{1}.9404$.

$\log\sin 60°10'=\bar{1}.9375+\dfrac{10}{60}\times(\bar{1}.9418-\bar{1}.9375)=\bar{1}.9382$.

$\therefore\ \log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$

$=\log 10.62+\log\sin 60°40'-\log\sin 60°10'$

$=1.0261+\bar{1}.9404-\bar{1}.9382=1.0283$.

仍テ $41:283-253=1:x$,　$\therefore\ x=.73$

$\therefore\ b=10.6+.07=10.67$.　答 10.67强.

7. (a) $a=2$, $b=3$, $L\sin A=9.5228813$ ヲ知リテ $L\sin B$ ヲ求メヨ, 但シ $\log 2=0.3010300$, $\log 3=0.4771213$.　答 9.6999726.　(陸士)

(b) $b=63$, $c=36$, $C=29°23'15''$ ナルトキ A, B ヲ求メヨ. 但シ $\log 63=1.79934$, $\log 36=1.55630$.

$L\sin 29°23'=9.69077$,　$1'$ ノ表差$=22$.

$L\sin 59°10'=9.93382$,　$1'$　〃　$=8$.

〔解〕 二邊ト其一邊ノ對角ガ已知ナルニヱ正弦比例ニ依ル.

(b) $\sin B=\dfrac{b.\sin C}{c}$ ヲ對數式ニ取リテ計算スルコト次ノ如シ,

$L\sin B=\log b+L\sin C-\log c$

$=\log 63+L\sin 29°23'15''-\log 36$

$=1.79934+9.69083-1.55630\left[\because\ 22\times\dfrac{15}{60}=5.5\right]=9.93387$.

仍テ $8:5=60'':x$　$\therefore\ x=37.5$　$\therefore\ B=59°10'37.''5$,

從テ $A=91°26'7.''5$.　然ルニ二邊ト其小邊ノ對角ガ已知ナルニヱ

$B=120°49'22.''5$,　從テ $A=29°47'22.''5$.

8. (a) 二邊 b, c ノ比ハ $5:3$ ニシテ其夾角 A ハ $40°$ ナリ, B, C ヲ求メヨ. 但シ $\tan 70°=2.748$, $\tan 34°30'=.687$.　(水講)

(b) $a=522$, $b=320$, $C=34°22'$ ナルトキ A, B ヲ算出セヨ, 但シ $\log\tan 72°49'=0.50971$, $\log 1.01=0.00432$,　(七高)

$\log\tan 52°11'44''=\bar{1}.88975$.　$\log 4.21=0.62428$.

(c) $a=20$尺, $c=30$尺, $B=22°$ ナルトキ A, C ヲ求メヨ, 但シ $L\tan 45°48'=10.0121294$,　$L\cot 11°=10.7113477$,

$L\tan 45°49'=10.0123821$,　$\log 2=0.3010300$.　(仙工)

〔解〕 二邊ト其ノ夾角トヲ知ルニヨ公式 (26) ニ依ル.

(b) 公式 $tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}tan\frac{A+B}{2}$ ニ於テ $a=522$, $b=320$ 及ビ

$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}=72^\circ 49'$ トセバ $a-b=101$, $a+b=421$ ナルニヨ

$log\ tan\frac{A-B}{2}=log\ 101-log\ 421+log\ tan\ 72^\circ 49'=2.00432-2.62428+0.50971$

$=-0.11025=\bar{1}.88975=log\ tan\ 52^\circ 11'44''.$

$\therefore\ \frac{A-B}{2}=52^\circ 11'44''$ 之ト $\frac{A+B}{2}=72^\circ 49'$ トニ依リテ

$A=125^\circ 0'44''$, $B=20^\circ 37'16''$.

答 (a) $B=104^\circ 30'$, $C=35^\circ 30'$. (c) $A=33^\circ 11'1''$, $C=124^\circ 48'49''$.

9. (a) $a=40$, $b=51$, $c=43$ ナルトキ A ヲ求メヨ, 但シ

$log\ 203=0.30771$, 　$L\ tan\ 24^\circ 44'=9.66337$,

$log\ 768=0.88536$, 　$L\ tan\ 24^\circ 45'=9.66371$. 答 $49^\circ 28'26''$.

(b) $a=13$, $b=14$, $c=15$ ナルトキ最小角ヲ求メヨ, 但シ

$log\ 2=0.30103$, 　$L\ tan\ 26^\circ 33'54.''2=9.69897$.

〔解〕 三邊ガ已知ナルニヨ公式 (29) ニ依ル.

(b) $2s=a+b+c$ ナルニヨ $s=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$ ナリ,

從テ $s-a=8$, $s-b=7$, $s-c=6$ ナリ.

而シテ一ツノ三角形ニ於テハ最小角ハ最小邊ニ對スルニヨ A ガ最小角ナルコト明カナリ.

$\therefore\ log\ tan\frac{A}{2}=log\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=log\sqrt{\frac{7\times 6}{21\times 8}}=log\sqrt{\frac{1}{4}}=log\frac{1}{2}$

$=log\ 1-log 2=0-0.30103=-0.30103.$

$\therefore\ L\ tan\frac{A}{2}=log\ tan\frac{A}{2}+10=-0.30103+10=9.69897=L\ tan\ 26^\circ 33'54.''2,$

故ニ $\frac{A}{2}=26^\circ 33'54.''2$, 　$\therefore\ A=53^\circ 7'48''.4$.

注意. 若シ s, $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ ノ對數ガ與ヘラルヽトキハ

$L\ tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{log(s-b)+log(s-c)-log\ s-log(s-a)\}$ ニ付テ計算スルコトヲ要ス.

10. C ヲ直角トスル直三角形 ABC ニ於テ

(a) $a=100$尺, $B=24^\circ 35'23''$ ナルトキ邊 b ヲ求メヨ, 但シ

$tan\ 24^\circ 35'=0.41602$, 　$tan\ 24^\circ 36'=0.41628$. 　(海兵)

(b) $a=75$呎, $A=39^\circ 15'$ ナルトキ邊 c ヲ求メヨ, 但シ

$log\ 75=1.87500$, 　$L\ sin\ 39^\circ 10'=9.80043$,

$log\ 11854=4.07386$, 　$L\ sin\ 39^\circ 20'=9.80197$.

(c) $c=6953$尺, $b=4321$尺 ナルトキ B ヲ求メヨ,

但シ $log\ 4.321=0.63558$, 　$log\ 6.953=0.84217$

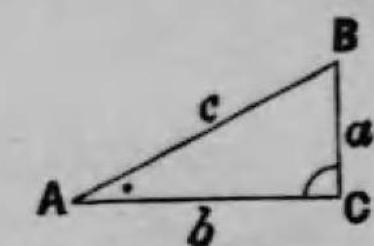
$L\ tan\ 38^\circ 25'=9.79335$, 　$1'$ ノ表差$=16$. 　(大工)

(d) $A=22^\circ 14'18''$, $b=150$ ナルトキ $log\ a$ ヲ求メヨ,

但シ $log\ 2=0.30103$, 　$log\ cot\ 22^\circ 20'=0.38636$,

$log\ 3=0.47712$, 　$log\ cot\ 22^\circ 30'=0.38278$. 　(東商)

〔解〕 考ヘ方　直三角形ノ解法ハ次ノ三式



$sinA=\frac{b}{c}$, $cosA=\frac{a}{c}$, $tanA=\frac{a}{b}$ 及ビ

$C=90^\circ=A+B$, $c^2=a^2+b^2$ ニ依ル.

(d) $a=b.tanA=\frac{b}{cotA}$ ニ依テ計算スルコト次ノ如シ,

今 $log\ 150=log(3\times 10^2\div 2)=log\ 3+2\ log\ 10-log\ 2$

$=0.47712+2\times 1-0.30103=2.17609.$

又 $log\ cot\ 22^\circ 14'18''=0.38636+\frac{20'-14.'3}{30'-20'}\times(0.38636-0.38278)$

$=0.38840.$

$\therefore\ log\ a=log\ b-log A=log\ 150-log\ 22^\circ 14'18''$

$=2.17609-0.38840=1.78769.$

答 (a) 416.12尺. (b) 118.54呎. (c) $38^\circ 25'23''$.

3. 雜問題

1. (a) △ABC ニ於テ A ヨリノ高サ h 及ビ兩底角 B, C ヲ知リテ各邊ヲ求メヨ.　(海機, 商船)

(b) 又 $h=12$尺, $A=75^\circ$, $C=45^\circ$ ナルトキ同上.　(東商)

(c) 一角ト二ツノ高サトヲ知リテ鋭角三角形ヲ解ケ.

〔解〕 (a) $c=h.\mathrm{cosec}B$, $b=h.\mathrm{cosec}C$ ニ依テ c, b ヲ知ル.

次ニ $a=\dfrac{b.\sin A}{\sin B}=\dfrac{b.\sin(B+C)}{\sin B}$ ニ依テ a ヲ知ル.

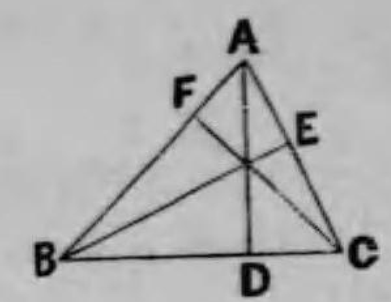
(b) $b=AC=AD.\mathrm{cosec}45^\circ=12\times\sqrt{2}=12\sqrt{2}$,

$$c=AB=\frac{AC.\sin C}{\sin B}=\frac{b.\sin 45^\circ}{\sin(A+C)}=\frac{6\sqrt{2}.\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=12\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\Big/\frac{\sqrt{3}}{}=8\sqrt{3},$$

$$a=BC=\frac{AB.\sin A}{\sin C}=\frac{c.\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Big/\frac{1}{\sqrt{2}}=4(3+\sqrt{3}).$$

(c) △ABC ノ三ツノ高サヲ AD, BE, CF トス.

(i) A ト AD, BE トガ已知ナルトキハ



$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AD}{BE.\sec A}$ ヨリ B ヲ知ル,

從テ $C=180^\circ-(A+B)$ モ知ル.

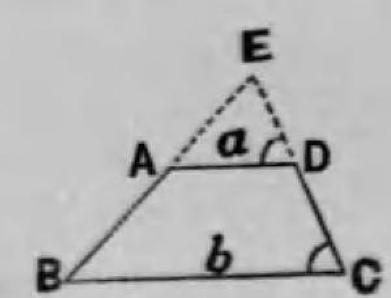
次ニ (b) ト同樣ニ AB, BC, CA ヲ求メ得ベシ.

(ii) A ト AD, CF トガ已知ナルトキハ (i) ト同樣ナリ.

(iii) A ト BE, CF トガ已知ナルトキハ $AB=BE.\sec A$, $AC=CF\sec A$ ニ依テ AB, AC ヲ知ル. 然ルトキハ二邊ト其ノ夾角ガ已知トナルヲ以テ公式(26) ニ依テ其他ヲ求メ得ベシ.

2. 梯形 ABCD ノ各角ノ大サ及ビ平行二邊 AD, BC ノ長サ a, b ヲ知リテ他ノ二邊 AB, CD ノ長サヲ求メヨ.

〔解〕 BA, CD ノ引長ノ交點ヲ E トセバ △EBC, △EAD ニ於テ正弦比例ニ依リ



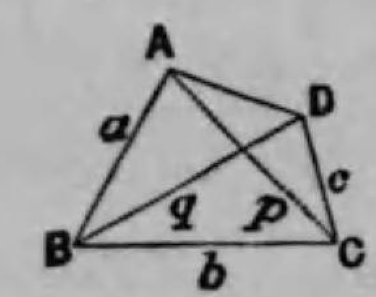
$EB=BC.\sin C/\sin E$, $EA=AD.\sin EDA/\sin E$

$$\therefore\ AB=EB-EA=\frac{(BC-AD)\sin C}{\sin E}=\frac{(b-a)\sin C}{\sin(B+C)}.$$

同樣ニ CD ヲ求メ得ベシ.

3. 四邊形 ABCD ノ三邊 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ 及ビ兩對角線 $AC=p$, $BD=q$ トヲ知リテ邊 $AD=x$ ヲ計算スル式ヲ作レ.　(一高)

〔解〕 △ABC, △BCD ハ各々三邊ガ已知ナルヲ以テ一般ニ其ノ各角ヲ求メ得ベク,



從テ $\hat{ABC}-\hat{DBC}=\hat{ABD}$ ハ已知トナル.

然ルトキハ △ABD ハ二邊ト其夾角ガ已知トナルニ由,

$x^2=a^2+q^2-2aq.\cos ABD$ ハ所要ノ式ナリ.

或ハ $\tan\dfrac{1}{2}(BAD-BDA)=\dfrac{q-a}{q+a}\cot\dfrac{ABD}{2}$ 及ビ $\dfrac{1}{2}(BAD+BDA)=90^\circ-\hat{ABD}$

ヨリ $\hat{BAD}$, $\hat{BDA}$ ヲ求メ之ヲ α, β トスレバ正弦比例ニ依テ

$x=\dfrac{q.\sin ABD}{\sin\alpha}$, 之レ所要ノ式ナリ.

4. 二角ト周トヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

〔解〕 A, B ト $2s=a+b+c$ トヲ已知トス. 然ルトキハ

$C=180^\circ-(A+B)$ ニ依テ C ヲ知リ得ベシ.

次ニ
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2s}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}},$$

$$\therefore\quad a=\frac{2s.\sin A}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{2s.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{s.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}.$$

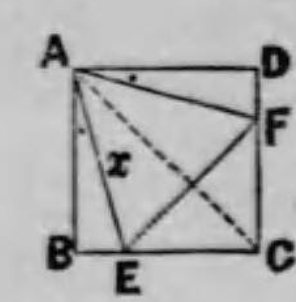
同樣ニ成ハ循環ノ順序ニ依テ b ヲ得ベク, 從テ $c=2s-(a+b)$.

5. 正方形 ABCD ニ其ノ一角頂 A ヲ共有スル正三角形 AEF ヲ內接シ, 正方形ノ一邊ヲ 2 尺トセバ正三角形ノ一邊ハ何尺ナルカ,

但シ $\log\cos 15'=\bar{1}.98494$, $\log 2=0.30103$,

$\log 2023=3.30600$, $\log 2024=3.30621$.　(海機)

〔解〕 $\hat{EAF}=60^\circ$, 從テ $\hat{BAE}=\hat{DAF}$ ノ各々ハ 15° ナリ,



故ニ $AE=x$ トスレバ

$x=AB.\sec 15^\circ=2\times\dfrac{1}{\cos 15^\circ}$,

$\therefore \quad \log x = \log 2 + \log 1 - \log \cos 15^\circ = 0.30103 + 0 - \bar{1}.98494 = 0.31609$

$\therefore \quad x = 2.0230 + (2.024 - 2.023) \times \dfrac{0.31609 - 0.30600}{0.30621 - 0.30600} = 2.0711$尺.

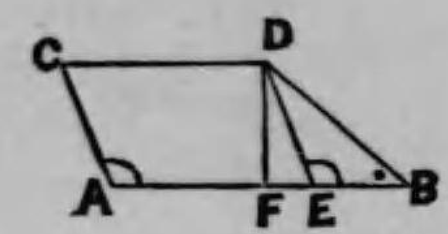
6. 梯形 ABCD ニ於テ $AB /\!/ CD$, $AB = 850$米, $CD = 650$米 ニシテ, 又 $C\hat{A}B = 102^\circ 40'$, $D\hat{B}A = 47^\circ 20'$ ナリ, 其ノ面積幾何.

但シ $\cos 12^\circ 40' = 0.9757$, $\cos 42^\circ 40' = 0.7353$ トス. (陸士)

〔解〕 $DE /\!/ CA$, $DF \perp AB$ トスレバ $B = 47^\circ 20'$, $D\hat{E}B = \hat{A} = 102^\circ 40'$,

$E\hat{D}B = 180^\circ - (D\hat{E}B + \hat{B}) = 30^\circ$, 又 $EB = AB - AE = 850$米$- 650$米$= 200$米.

故ニ △DEB ニ於テ正弦比例ニヨリ



$DE = \dfrac{EB.\sin B}{\sin EDF} = \dfrac{200.\sin 47^\circ 20'}{\sin 30^\circ}$

$= \dfrac{200.\cos 42^\circ 40'}{\sin 30^\circ} = \dfrac{200 \times 0.7353}{\frac{1}{2}} = 294.12$米.

次ニ $\hat{A}$ ノ補角 $DEA = 180^\circ - 102^\circ 40' = 77^\circ 20'$, 又此餘角 $FDE = 12^\circ 40'$ ナルヲ以テ, 直△FDE ニ於テ

$DF = DE.\cos FDE = 294.12 \times 0.9751 = 286.9729$米.

$\therefore$ ABCD ノ面積 $= \frac{1}{2}(CD + AB).DF = \frac{1}{2}(650 + 850) \times 286.9729$

$= 215229.663$ 平方米.

第二章

高サ及ビ距離

4. 測量ニ關スル重ナル術語

(1) **仰角 及ビ 俯角** 觀測セントスル一點ト觀測器ノ中心トノ連結線ガ觀測器ノ中心ヲ過ル水平面ト爲ス角ヲ, 其點ガ水平面ヨリモ上ニ在ルカ或ハ下ニ在ルニ從テ仰角或ハ俯角ト云フ. 仰角ハ天體ニ付テハ高度ト稱ス.

(2) **距角** トハ觀測セントスル二點ヲ觀測器ノ中心ニ結ビ付クル二直線ノ夾角ヲ云フ.

(3) **基線** トハ高サ又ハ距離ヲ測ル爲メ便宜ノ場所ニ於テ實測シタル直線ヲ云フ.

(4) **方位ノ呼ビ方** ニハ羅針盤ヲ用フ.

航海用 ニ於テハ圓周ヲ北, 東, 南, 西ニ四等分シ更ニ其ノ間ヲ八等分シ, 此三十二點ニ右圖ノ如ク命名ス.

此名ノ付ケ方ハ北ヨリ東ト西及ビ南ヨリ東ト西ニ至ル, 卽チ北ト東ノ中央ヲ北東ト云ヒ, 北ト北東ノ中央ヲ北北東ト云フ, 其他ハ之ニ準ズ.

又陸地測量用 ニ於テハ北ト南トヲ 0° トシ之ヨリ夫々東ト西マデヲ 90° トシ, 以テ北東或ハ北西及ヒ南東或ハ南西ノ二字間ニ角度ヲ挿入シテ方位ヲ呼ブ.

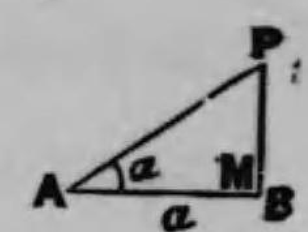
例ヘバ 北$22^\circ\frac{1}{2}$東 又ハ N$22^\circ\frac{1}{2}$E 等ト呼ブ, 之レ航海用ノ北北東ニ當ル.

5. 簡易測量 直三角形ノ解法ノ應用

模範問題 達シ得ザル一點 P ヨリ達シ得ベキ一直線 AB ニ至ル距離 PM ヲ求ムルコト. (海兵)

從テ, 達シ得ザル水平距離 BM ヲ求ムルコト.

〔解〕 (1) 假想垂線 PM ノ足 M 點ガ水平基線 BA ノ B 點ニ合スルトキ.

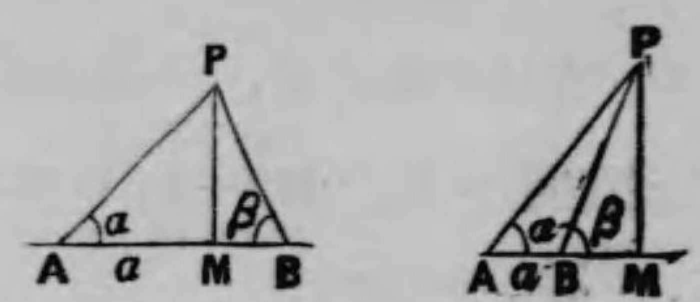


此場合ニハ水平基線BAヲ取リ a トシ, 又 A 點ニ於テ P 點ノ仰角ヲ測リ α トセバ

$$MP=a.\tan\alpha.$$

注意. 高サ MP ヲ求ムルニ當リ若シ精密ヲ要スルトキハ a ニ物體ノ厚サノ半ヲ加ヘテ計算シ, 其ノ結果ニ觀測器ノ中心ノ高サヲ加フベシ.

(2) 假想垂線 PM ノ足 M 點ガ AB 上或ハ其ノ引長上ニ落ツルトキ.



此場合ニハ水平基線 AB ヲ取リ a トシ, 又二點 A, B ニ於テ P 點ノ仰角ヲ測リ夫々 α, β トスレバ

$$MA \pm MB = AB$$

即チ $MP.\cot\alpha \pm MP.\cot\beta = a$,

$$\therefore\quad MP=\frac{a}{\cot\alpha\pm\cot\beta} \qquad (42)$$

次ニ α, β ノ餘角 MPA, MPB ハ已知ナルヲ以テ之ヲ α', β' トセバ第二圖ニ於テ $BM=MP.\cot\beta$, 之ニ MP ノ値ヲ代入スレバ

$$BM=\frac{a.\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}=\frac{a.\tan\beta'}{\tan\alpha'-\tan\beta'} \qquad (43)$$

注意. 上ノ二式ノ應用ニ於テ $\sqrt{2}$ 及ビ $\sqrt{3}$ ノ値ハ屢々用ヒラルヽユヱ小數三桁マデハ

・ $\sqrt{2}=1.41421$, $\sqrt{3}=1.73205$ ト記憶スベシ.

6. 一般測量 斜三角形ノ解法ノ應用

模範問題 1. 達シ得ザル一點 P ヨリ達シ得ベキ一直線 AB ニ至ル距離 PM ヲ求ムルコト.

從テ, 達シ得ザル水平距離 AM ヲ求ムルコト.

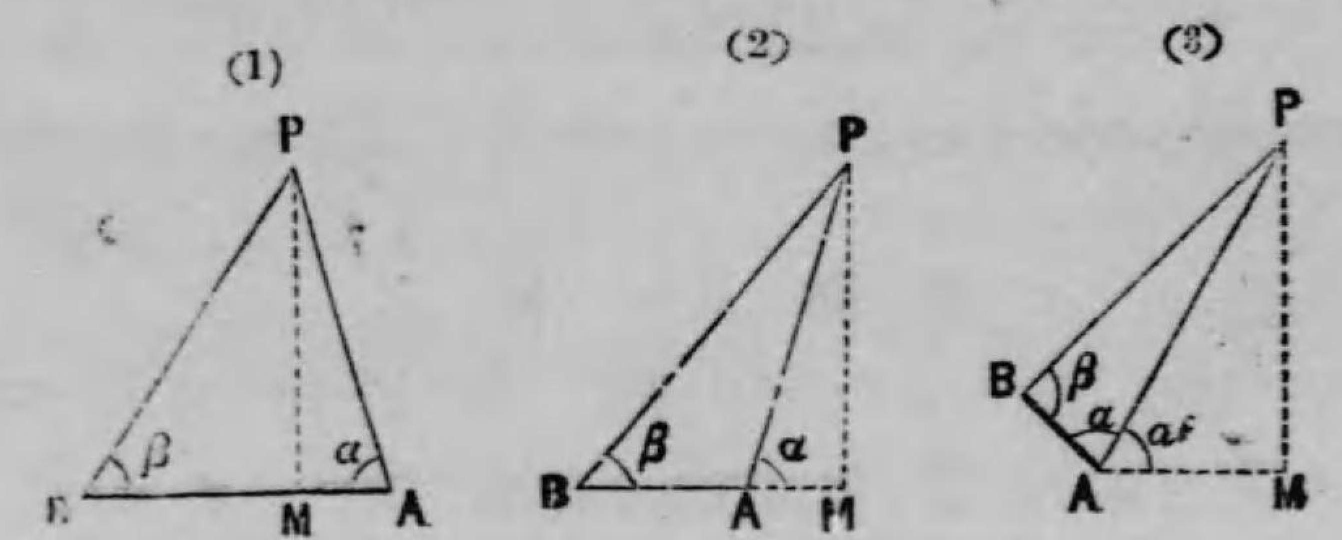
〔解〕 基線 AB ヲ取リ $P\hat{A}M$, $P\hat{B}A$ ヲ測リ之ヲ夫々 α, β トセバ

$$AP=\frac{AB.\sin\beta}{\sin APB}\,[\because (22)]=\frac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha\pm\beta)} \text{ ナリ.}$$

(1) AB ト MP ガ一平面上ニ在ルトキハ

直△MAP ニ於テ $MP=AP.\sin\alpha$, $AM=AP.\cos\alpha$ ナリ,

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} MP&=\frac{AB.\sin\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha\pm\beta)},\\ AM&=\frac{AB.\cos\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha\pm\beta)}.\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$



(2) AB ト MP トガ一平面上ニ在ラザルトキハ

直△MAP ニ於テ $MP=AP.\sin\alpha'$, $AM=AP.\cos\alpha'$ ナリ,

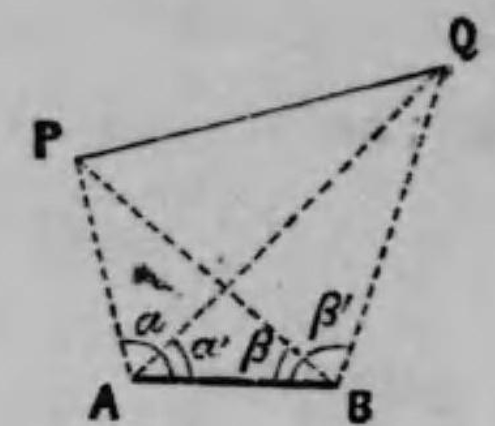
$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} MP&=\frac{AB.\sin\alpha'.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\\ AM&=\frac{AB.\cos\alpha'.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

注意. 公式 (42) ヲ變形スレバ (44) トナル. 又上ノ右圖ニ於テ $M\hat{A}P=\alpha'$ トセバ (44) ノ分母ハ $\sin(\alpha-\beta)$ トナル.

模範問題 2. 水平基線AB上ノ二點ヨリ達シ得ザル二點PQノ距離ヲ求ムルコト.

〔解〕 △ABP ニ於テ $\widehat{PAB}$, $\widehat{PBA}$ ヲ測リ之ヲ夫々 α, β トセバ

$$BP=\frac{AB.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad [\because (22)]$$



同樣ニ △ABQ ニ於テ $\widehat{QAB}$, $\widehat{QBA}$ ヲ測リ夫々 α', β' トスルトキハ

$$BQ=\frac{AB.\sin\alpha'}{\sin(\alpha'+\beta')} \text{ ナリ.}$$

次ニ AB ト PQ ガ一平面上ニ在ルトキハ $\widehat{PBQ}=\beta'-\beta$ ハ已知ナリ.

又 AB ト PQ ガ一平面上ニ在ラザルトキハ $\widehat{PBQ}$ ヲ測ル.

然ルトキハ △PBQ ニ於テ二邊 BP, BQ ト其夾角 PBQ トヲ知ルガ故ニ PQ ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 〔∵ (40)〕

卽チ $\tan\frac{\widehat{BPQ}-\widehat{BQP}}{2}=\frac{BP-BQ}{BP+BQ}\cot\frac{\widehat{PBQ}}{2}$, $\frac{\widehat{BPQ}+\widehat{BQP}}{2}=90^\circ-\frac{\widehat{PBQ}}{2}$

ニ依テ $\widehat{BPQ}$, $\widehat{BQP}$ ヲ求メ, 次ニ $BQ=\frac{BP.\sin PBQ}{\sin\widehat{BQP}}$ ヨリ PQ ヲ得.

問題及ビ解答

1. (a) 塔底ヲ距ルコト 86.6 米ノ一地點ニ於テ塔頂ノ仰角 30° ヲ得タリ, 塔頂及ビ塔頂ト觀測點トノ距離ヲ問フ. 答 49.8米, 100米.

(b) 甲山ノ頂點 A ニ於テ乙山ノ頂點 P ノ仰角 33°20′ ヲ得タリ; 今三寸六寸ガ一里ニ當ル地圖上ニ於テ此二山ノ距離ハ二寸四分ナリ, 乙山ハ甲山ヨリモ何尺高キカ. 但シ $\tan 33^\circ 20'=0.65771$ トス.

答 568.3尺.

(c) 澎湖島附近ノ船中ニ於テ新高山 (海拔 12850尺) ノ頂ノ仰角 63°11′ ヲ得タリ; 然ラバ二萬分ノ一ノ地圖上ニ於テ此船ト山頂トノ距離ハ何寸何分何厘アルカ, 但シ $\cot 63^\circ 11'=0.50550$ トス.

答 3寸2分5厘弱.

(d) 平地上ニ於テ塔ノ影ガ100尺ナルトキ之レト同時ニ高サ9尺ノ旗竿ノ影ハ $3\sqrt{3}$尺 ナリト云フ. 太陽ノ高度及ビ塔ノ高サヲ問フ.

答 60°, 173.2尺. (海經)

(e) 太陽ノ高度ガ 47° ナルトキ杖ノ影ヲ最大ナラシメンニハ杖ガ水平面ニ傾ク角ヲ何度ニスベキカ.

注意. 上ノ (c), (d), (e) ハ早計ニシテ誤解スル者アリ, 須ラク熟考ヲ要ス.

〔解〕 (b) 所要ノ高サヲ PM トスレバ, 二山ノ距離 AM ハ實際ニ於テ

$36^{分}:24^{分}=1^{里}:x^{里}$ ヨリ $\frac{2}{3}$里 ナリ.

$$PM=AM.\tan 33^\circ 20'=\frac{2}{3}\times 0.65771=568.3\text{尺}.$$

(c) 觀測點ヲ A, 山頂ヲ P, 海拔ヲ PM トス. 然ルトキハ地圖上ニ於テハ山頂ハ其正射影ニ合ス.

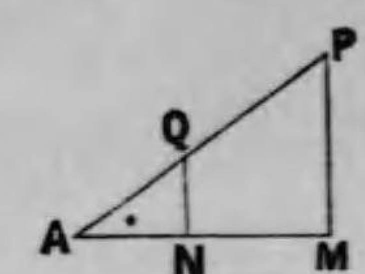
$\therefore$ $AP=AM=PM\cot 63^\circ 11'=12850^{尺}\times 0.50550.$

仍テ 地圖上ノ AP ハ $12850^{尺}\times 0.56550\div 20000=0.^{尺}325.$

(d) 同時ニ於ケル太陽ノ光線ハ平行ト見做シ得ルユエ, 塔 MP ノ影 MA ハ杖 NQ ノ影 NA ト合ス. 故ニ高度ヲ α トセバ

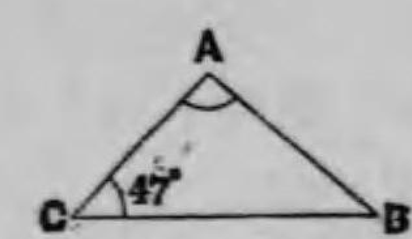
$$\tan\alpha=\frac{MP}{AM}=\frac{NQ}{AN}=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

$$\therefore \quad \alpha=60^\circ.$$



次ニ $MP=AM.\tan\alpha=100.\tan 60^\circ=100\sqrt{3}=173.2$尺.

(e) 杖ヲ AB, 其影ヲ BC トスレバ



$\widehat{ACB}=47^\circ$ ナルユエ正弦比例ニヨリテ

$$BC=\frac{AB.\sin A}{\sin 47^\circ}.$$

今 BC ヲ最大ニセンニハ AB ハ杖長ニシテ定長, 又 $\sin 47^\circ$ ハ定數ナルユエ $\frac{AB}{\sin 47^\circ}$ ハ定數ナリ. 仍テ $\sin A$ ヲ最大ナラシムルヲ要ス.

$\therefore$ $A=90^\circ$, 從テ $B=96^\circ-47^\circ=43^\circ$.

2. (*a*) 平地ニ直立セル長サ 6 尺ノ旗竿アリ; 日中地上ニ 5 尺ノ影ヲ投ゼリト云フ. 此時ノ太陽ノ高度ヲ求メヨ, 但シ

$\log 2 = 0.30103$, $\log \tan 50°11' = 0.07901$, (金醫)

$\log 3 = 0.47712$, $\log \tan 50°12' = 0.07927$. 答 50°11′39″.

(*b*) 直立セル旗竿ガ地上ニ投ズル影ノ長サハ 23.27 尺ニシテ此ノトキ太陽ノ仰角 44°48′ ナリ. 旗竿ノ長サ幾何, 但シ

$\log 2.31 = 0.3636$, $\log 2.32 = 0.3674$, $\log 2.33 = 0.3674$,

$\mathrm{L} \tan 44°40' = 9.9949$, $\mathrm{L} \tan 44°50' = 9.9975$. (海機)

(*c*) 海岸ノ一點ニ於テ軍艦ノ檣頭ノ仰角ヲ測リ 2°4′34″ ヲ得タリ, 今檣ノ高サガ 150 尺ナラバ其測點ト檣トノ水平距離幾何,

但シ $\log 2 = 0.301030$, $\log 3 = 0.477121$,

$\log 4.137 = 0.616685$, $\mathrm{L} \cot 2°4'30'' = 11.440915$,

$\log 4.138 = 0.616790$, $\mathrm{L} \cot 2°4'40'' = 11.440333$. (海兵)

〔解〕 (*c*) 觀測點チ A トシ, 檣ノ高サチ MP トスレバ

$$\mathrm{AM} = \mathrm{MP}.\cot \mathrm{A} = 150.\cot 2°4'34'' = \frac{3\times10^2}{2}.\cot 2°4'34'',$$

$$\therefore \log \mathrm{AM} = \log 3 + 2\log 10 - \log 2 + \mathrm{L}\cot 2°4'34'' - 10$$

$$= 0.477121 + 2\times1 - 0.301030 + \left\{(11.440333 - 10) - 0.000582\times\frac{4}{10}\right\} = 3.616772.$$

故ニ $(.616790 - .616685) : (.616772 - .616685) = .001 : x (= .000828)$.

$\therefore$ AM=4137.83尺 卽チ 11町 26間 4尺弱. (*b*) 答 23.11尺.

3. 圓形ノ池アリ, 地上ノ一點 A ヨリ此池ヲ夾ム角 BAC ハ 60° ニシテ點 A ヨリ池邊ニ至ル最短距離 AD ハ 15 間ナリ, 此池ノ直徑ハ幾間アルカ. 答 30間. (高等)

〔略解〕 圓形ノ中心チ O トスレバ, ADO ハ一直線ニシテ $\hat{\mathrm{A}}$ チ二等分ス. 又 AB ハ切線ナルユエ OB⊥AB, 且ツ 半徑OB=OD ナリ,

$\therefore$ $\mathrm{OB} = \mathrm{AO}.\sin \mathrm{OAB} = (1+\mathrm{OD})\sin 30° = (1+\mathrm{OD})\times\frac{1}{2}$, $\therefore$ OB=15.

4. (*a*) 海岸線 AB ヲ測リ 300 間ヲ得, 又其ノ兩端ニ於テ海上ニ投錨セル汽船 P ヲ覘ヒ $\mathrm{P\hat{A}B} = 30°$ 及ビ $\mathrm{P\hat{B}A} = 60°$ ヲ得タリト云フ. 船ト岸ノ距離 (200 間未滿ヲ己知ス) ヲ問フ. 答 130間弱. (長商)

(*b*) 平地上相距ルコト 2500米ナル二點 A, B ニ於テ直線 AB ノ直上ニアル飛行機 C ヲ望ミタルニ視線ガ地平面トナス角ハ夫々 45° 及ビ 60° ナリ, 此飛行機ノ地平上ノ高サ幾何. (東工)

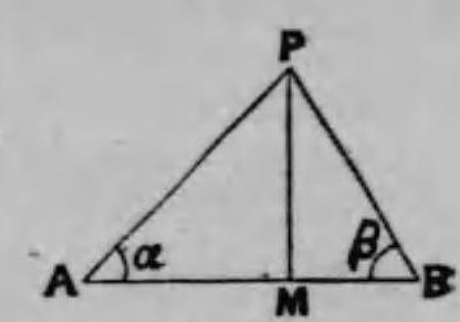
(*c*) 堤上 200 尺ノ兩端 A, B ニ於テ其ノ中間ノ對岸ノ一標 P ヲ覘ヒ $\mathrm{P\hat{A}B} = 65°37'$, $\mathrm{P\hat{B}A} = 53°4'$ ヲ得タリ, 此目標ニ到ル最短距離幾何, 但シ $\mathrm{L}\sin 65°37' = 9.95942$,

$\log 2 = 0.30103$, $\mathrm{L}\sin 53°\ 4' = 9.90273$,

$\log 16597 = 4.22003$. $\mathrm{L}\sin 61°19° = 9.94314$.

〔解〕 (*a*) 公式 (42) ニ依ルカ或ハ之ニ倣ヒ, 其次場合ハ適セザルチ知ル.

(*b*) ハ公式 (42) ニヨル. 答 1585米.



(*c*) $\mathrm{AP} = \frac{\mathrm{AB}.\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{APB}} = \frac{200\sin 53°4'}{\sin\{180° - (\mathrm{A}+\mathrm{B})\}} = \frac{200.\sin 58°4'}{\sin 61°19'}$.

從テ $\mathrm{MP} = \mathrm{AP}.\sin \mathrm{A} = \frac{200.\sin 65°37'.\sin 53°4'}{\sin 61°19'}$,

$$\therefore \log \mathrm{MP} = \log 200 + \mathrm{L}\sin 65°37' + \mathrm{L}\sin 53°4' - \mathrm{L}\sin 61°19' - 10$$

$$= 2.30103 + 9.95942 + 9.90273 - 9.94314 - 10 = 2.22004.$$

然ルニ $\log 16597 = 4.22003$, $\therefore$ MP=165.97尺. 答 166尺.

5. (*a*) 河岸ニ於テ其ノ對岸ニ立テル樹木ノ仰角ヲ測リシニ 60° アリ, 又其所ヨリ 40 呎後退シテ再ビ仰角ヲ測リシニ 45° アリシト云フ. 樹木ノ高サ及ビ河幅ヲ問フ. (大工)

(*b*) 或人某所ニ於テ塔ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ, 夫レヨリ塔ニ向ヒ 50 尺直進シテ更ニ塔ノ仰角ヲ測リ 75° ヲ得タリ. 塔高幾何, 但シ兩測點ト塔ノ基礎トハ同水平ニアリ. (東商)

(*c*) 直立セル一塔アリ, 其ノ底ヲ通ズル水平面上ノ一點ニテ其ノ頂ヲ見レバ仰角 32°27′ ナリ, 此點ヨリ同水平面上尙ホ 100尺進

ミタル點ニテハ仰角 45° ナリ. 此水平面上塔ノ高サハ何尺ナルカ, 但シ $\tan 32^\circ 20' = 0.6330$, $\tan 32^\circ 30' = 0.6371$ トス. (高等)

(d) 高ク揚レル風船ヲ一地平線上ノ三點 A, B, C ヨリ望ミタル仰角ハ夫々 60°, 45°, 30° ナリト云フ. 風船ノ高サ何程ナルカ, 但シ $AB = BC = 10$ 町 トス. 答 12.24町. (高等)

(e) 人アリ一點 B ヨリ或山ノ頂 P ヲ測リシニ $27^\circ 18'$ ヲ得タリ, 又同ジ水平面上 500 間後方ナル A ヨリ之ヲ測リシニ $16^\circ 10'$ ヲ得タリト云フ. 依リテ山ノ高サヲ求メヨ. (長商)

但シ $L\sin 27^\circ 18' = 9.66148$, $\log 5 = 0.69897$,
$L\sin 16^\circ 10' = 9.44472$, $\log 3307 = 3.51940$.
$L\sin 11^\circ 8' = 9.28577$. 答 330.7間

〔略解〕 (a), (b), (c) ハ公式 (42) 或ハ其ノ解法ニ倣フ. (b) 答 161.6尺

(a) 樹高 $MP = \dfrac{40}{\cot 45^\circ - \cot 60^\circ} = 40 \Big/ \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 20(3+\sqrt{3}) = 94.64$ 呎,

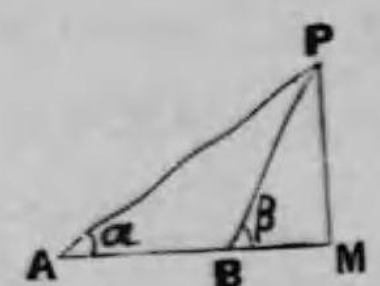
從テ 河幅 $BM = MP.\cot 60^\circ = 20(3+\sqrt{3}) \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 20(\sqrt{3}+1) = 54.64$ 呎.

(c) $\tan 32^\circ 27' = 0.6330 + (0.6371 - 0.6331) \times \dfrac{7}{10} = 0.6359$,

$\therefore$ 塔高 $MP = \dfrac{100}{\cot 32^\circ 27' - \cot 45^\circ} = 100 \Big/ \left(\dfrac{1}{0.6359} - 1\right) = 174.65$ 尺.

(d) 別解 $\overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 = 2(\overline{CB}^2 + \overline{PB}^2)$ 卽チ $\overline{PM}^2(\operatorname{cosec}^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ)$
$= 2(10^2 + \overline{PM}^2.\operatorname{cosec}^2 45^\circ)$.

(e) AB ヘノ垂線 PM ハ山ノ高サナリ,



故ニ $\triangle ABP$ ニ於テ $PB = \dfrac{AB.\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$,

$\therefore$ $MP = BP.\sin\beta = \dfrac{AB.\sin\alpha.\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

$\therefore$ $\log MP = \log AB + L\sin\alpha + L\sin\beta - L\sin(\beta-\alpha) - 10$
$= \log 500 + L\sin 16^\circ 10' + L\sin 27^\circ 18' - L\sin 11^\circ 8' - 10$
$= 2.69897 + 9.44472 + 9.66148 - 9.28577 - 10 = 2.51940$.

然ルニ $\log 3307 = 3.51940$, $\therefore$ $MP \doteqdot 330.7$.

6. (a) 旗竿アリ, 其ノ底點ヨリ 360尺 ノ所ニ於ケル仰角ハ 135 尺ノ所ニ於ケル仰角ノ半ナリト云フ. 竿ノ高サ幾何. (東工)

(b) 平地上ニ立テル高サ 18米, 8米 ノ二塔アリ, 其ノ塔底ニ於ケル他塔ノ仰角一ツガ他ノ二倍ナレバ二塔ノ距離幾何.

〔略解〕 (a) $135.\tan 2\alpha = MP = 360.\tan\alpha$ 卽チ $\dfrac{270\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = 360.\tan\alpha$, $\therefore$ $\tan\alpha \doteqdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ $MP = 360.\tan\alpha = 360 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 311.76$ 尺. (b) 答 24米.

7. (a) 海面ヨリ h 尺高キ斷崖ノ頂ヨリ其ノ麓ト同一直線上ニ在ル二船ノ俯角ヲ測リ δ, δ' ヲ得タリトセバ, 其ノ二船ノ距離幾何. 若シ $\delta = 45^\circ + A$, $\delta' = 45^\circ - A$ ナルトキハ如何. (二高)

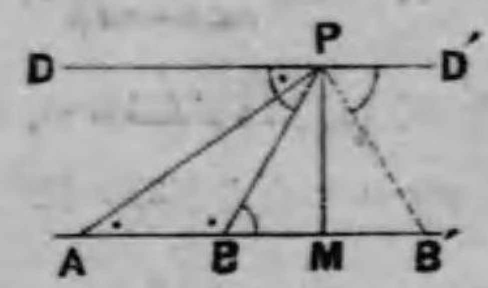
(b) 水面上高サ 40米 ノ燈臺ニ於テ其ノ正西ニ在ル二艇ヲ臨ミ俯角 75° 及ビ 15° ヲ得タルトキハ二艇ノ距離幾何. 答 138.6間.

(c) 或人橋上ニ於テ橋ニ向フテ進航スル川蒸汽船ノ俯角ヲ測リ $13^\circ 31'$ ヲ得タリ, 若シ此人ノ眼高ハ水面上 5 間ニシテ船ハ毎時 45町ノ速サニテ來ルトセバ船ハ何秒時ニテ橋ノ直下ニ來ルカ.

(d) 平地上 250 米ノ山上ヨリ觀測者ト同一垂直面ニアル平地上ノ二點ヲ臨ミ俯角 $28^\circ.4$ 及ビ $33^\circ.2$ ヲ得タリ, 二點間ノ距離ヲ求メヨ, 答 89.96米. (陸士)

但シ $\sin 4^\circ = 0.0698$, $\sin 5^\circ = 0.0872$, $\sin 28^\circ = 0.4695$,
$\sin 29^\circ = 0.4848$, $\sin 33^\circ = 0.5448$, $\sin 34^\circ = 0.5592$.

〔解〕 (a) 斷崖ノ高サヲ MP トシ, 二箇ノ觀測點ヲ A, B トス. $DPD' /\!/ AB$ トスレバ $\widehat{DPA} = \delta = \hat{A}$, $\widehat{DPB} = \delta' = \widehat{PBM}$, $MP = h$ ナルユヱ 5 題ト全ク同樣ナリ.



又觀測二點 A, B′ ガ MP ノ兩側ニ在ルトキハ 4 題ト全ク同樣ナリ,

卽チ $AB = h(\cot\alpha \pm \cot\beta)$ 或ハ $= \dfrac{h.\sin\delta.\sin\delta'}{\sin(\delta \pm \delta')}$. (c) 答 約31秒.

次ニ $\delta = 45^\circ + A$, $\delta' = 45^\circ - A$ ナレバ $AB = 2h.\tan 2A$ 或ハ $2h\sec 2A$ トナル.

8. (*a*) 丘ノ基礎ト同平地上ノ一點ニ於テ,丘頂ト其ノ上ニ在ル高サ h 尺ノ旗竿ノ頂トノ仰角ヲ測リ α, β ヲ得タリト云フ．丘ノ高サ幾何．

(*b*) 或人山頂ノ仰角ヲ測リテ 60° ヲ得,更ニ其ノ上ノ高サ100尺ノ塔頂ノ仰角 75° ヲ得タリト云フ．山高幾何．　(商船)

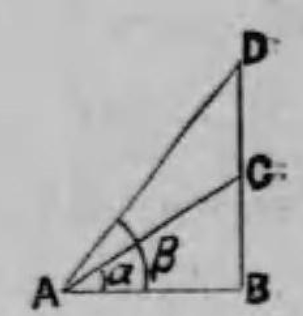
(*c*) 等速ニテ垂直ニ昇ル飛行機アリ,1 哩昇リシトキ仰角 α ヲ得,其ノ後チ 15 分時ヲ經テ仰角 β ヲ得タリト云フ．飛行機毎時ノ速サヲ問フ．　(陸士)

(*d*) 平地上ニ立テル高サ h 尺ノ塔頂ニ避雷針アリ，今塔底ヲ距ルコト a 尺ノ所ニ於ケル塔ノ仰角ト避雷針ノ距角トハ相等シト云フ．避雷針ノ長サヲ求メヨ．　(名工)

(*e*) 塔アリ其ノ頂上ニ長サ a 尺ノ旗竿ヲ立ツ,今塔ノ基礎ト同水平面上ノ一點ニ於テ塔ノ仰角ト旗竿ノ距角ヲ測リシニ何レモ θ 度アリシトキハ塔ノ高サハ $a.\cos 2\theta$ ナリ．　(水講)

(*f*) 橋上ニ於テ浮標ノ俯角ヲ測リテ 35° ヲ得,更ニ 5 尺降リテ又俯角ヲ測リ 34° ヲ得タリト云フ．浮標迄ノ水平距離如何，但シ $\tan 35° = 0.700$, $\tan 34° = 0.675$ トス．　答 200尺．　(商船)

〔解〕 丘高ヲ BC, 旗竿ヲ $CD = h$ トスレバ



$$BC.\cos\alpha = AB = BD.\cot\beta = (BC + CD)\cot\beta,$$

$$\therefore\ BC = \frac{h.\cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}\text{尺 或ハ} = \frac{h.\sin\alpha.\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}\text{尺}.$$

〔別解〕(1) $\hat{D}$, $A\hat{C}B$ ハ夫々 β, α ノ餘角ニシテ已知ナルユエ公式 (43) ニ依ル．

〔別解〕(2) $\triangle ACD$ ニ於テ $AC = \dfrac{CD.\sin(90° - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \dfrac{h.\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$,

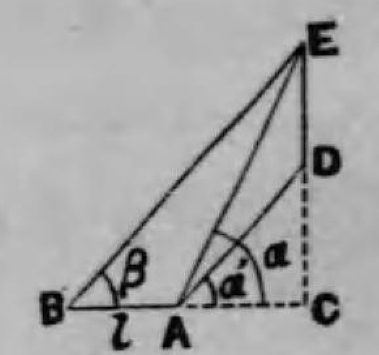
$\therefore$ 直$\triangle ACB$ ニ於テ $BC = AC.\sin\alpha = \dfrac{h.\sin\alpha.\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$尺．

答 (*c*) $\dfrac{4(\cot\alpha - \cot\beta)}{\cot\beta}$ 或ハ $\dfrac{4\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha.\cos\beta}$哩．　(*d*) $\left(\dfrac{a^2 + h^2}{a^2 - h^2}\right)h$尺

9. (*a*) 丘上ニ塔アリ,其ノ麓ニ於テ塔頂ト丘頂トノ仰角ヲ測リ α, α' ヲ得,夫レヨリ a 米退キテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リ β ヲ得タリ．塔ノ高サ及ビ丘ノ高サ幾何．

(*b*) 或人岩上ニ立テル松樹ヲ望ミ樹頂及ビ根際ノ仰角 60° 及ビ 45° ヲ得,夫レヨリ同水平面上ニ 25 尺退キテ再ビ樹頂ヲ望ミ仰角 30° ヲ得タリ．松樹及ビ岩ノ高サ幾何．　(盛農, 陸士)

〔解〕 (*a*) 丘高ヲ CD, 塔高ヲ DE トシ，觀測二點ヲ B, A トセバ $\triangle ABF$ ニ於テ



$AE = \dfrac{l.\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. 故ニ $\triangle ADE$ ニ於テ

$$DE = \frac{AE.\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(90° + \alpha')} = \frac{l.\sin\beta.\sin(\alpha - \alpha')}{\cos\alpha'.\sin(\alpha - \beta)}.$$

又 $AD = \dfrac{AE.\sin(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha')} = \dfrac{l.\sin\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha'.\sin(\alpha - \beta)}$,

$$\therefore\ CD = AD.\sin\alpha' = \frac{l.\cos\alpha.\sin\beta.\tan\alpha'}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

(*b*) $\alpha = 60°$, $\alpha' = 45°$, $\beta = 30°$, $C = \hat{R}$ ナルユエ $AC = CD$, $AE = AB = 25$.

$$\therefore\ CD(= AC) = AE.\cos 60° = 25 \times \frac{1}{2} = 12.5\text{尺}.$$

$$DE = EC - CD = AE.\sin 60° - 12.5 = 25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 12.5 = 9.15\text{尺}.$$

10. (*a*) 高サ 3300 米ノ丘アリ,其ノ麓ノ一點 A ニ於テハ丘頂ノ仰角 60° ナリ,A ヨリ飛行機ニ乗リテ垂直ニ上昇シ 1 分 30 秒ヲ經タルトキ B ニ於テハ丘頂ノ仰角 30° トナリシト云フ．此飛行機ノ毎時ノ速サハ幾哩ナルカ．但シ 1哩＝1.6粁トス．

(*b*) 山ノ麓ニ高サ h 尺ノ塔アリ，山巓ニ於テ塔ノ頂及ビ基礎ノ俯角ヲ測リ α 及ビ β 度ヲ得タリ，山ノ高サ幾何．　(海機)

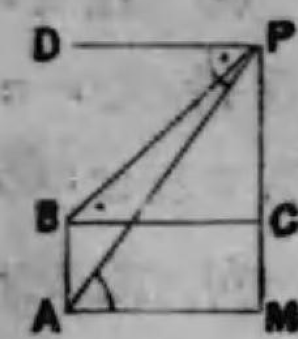
〔解〕 (*a*) 次圖ヲ用フ、丘高ヲ MP, 平地ヲ AM トス．$BC \perp MP$ トセバ

$$CP = BC.\tan 30° = AM.\tan 30° = MP.\cot 60°.\tan 30° = 3300\text{米} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1100\text{米},$$

故ニ $AB = MC = MP - CP = 3300\text{米} - 1100\text{米} = 2200\text{米}$.

$$\therefore\ \text{所要ノ速サ} = 2200 \times \frac{1}{1600} \times \frac{60 \times 60}{90} = 55\text{哩}.$$

(*b*) 塔高ヲ AB トシ，山高ヲ MP トシ其ノ嶺ヲ P トス．今 DP//AM//BC トスレバ $AB=h$，



$P\hat{B}C=D\hat{P}B=\alpha$，$P\hat{A}M=D\hat{P}A=\beta$ ナルユヱ

$PC.\cot\alpha=BC=AB=PM.\cot\beta=(PC+h)\cot\beta$

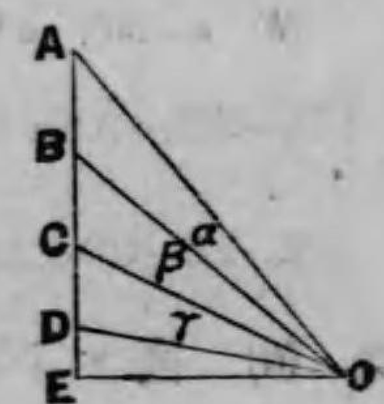
$\therefore\ PC=h.\cot\beta/(\cot\alpha-\cot\beta)$.

$MP=PC+AB=\dfrac{h.\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}+h=\dfrac{h.\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}$ 或ハ $\dfrac{h.\cot\alpha.\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$尺．

11. 南北ノ道路上ニ北ヨリ A, B, C, D 及ビ E ノ順序ニ 5 箇ノ目標アリ，E ノ東ノ一地 O ニ於テ是等ノ目標ヲ望ミ $A\hat{O}B=\alpha$, $B\hat{O}C=\beta$, $C\hat{O}D=\gamma$, $D\hat{O}E=\delta$ ナルコトヲ知レリ，尚ホ $DE=d$ ナルトキハ AB, BC 及ビ CD 各々幾何．但シ對數計算ニ便ナル式ニテ表ハセ．

又 $d=10$米，$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15^\circ$ ナル場合ニ於ケル結果ヲ米ノ小數第一位マデ計算セヨ． (陸士)

〔解〕 $OE=d.\cot\delta$ ナルヲ以テ



$CE=OE.\tan(\gamma+\delta)=d.\cot\delta.\tan(\gamma+\delta)$,

$\therefore\ CD=CE-d=d\{\cot\delta.\tan(\gamma+\delta)-1\}$

$=d\left\{\dfrac{\cos\delta}{\sin\delta}.\dfrac{\sin(\gamma+\delta)}{\cos(\gamma+\delta)}-1\right\}$

$=\dfrac{d.\sin(\gamma+\delta-\delta)}{\sin\delta.\cos(\gamma+\delta)}=\dfrac{d.\sin\gamma}{\sin\delta.\cos(\gamma+\delta)}$.

$BC=BE-CE=d.\cot\gamma\{\tan(\beta+\gamma+\delta)-\tan(\gamma+\delta)\}=\dfrac{d.\cot\gamma.\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma+\delta).\cos(\gamma+\delta)}$,

$AB=AE-BE=d.\cot\delta\{\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\tan(\beta+\gamma+\delta)\}=\dfrac{d.\cot\delta.\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta).\cos(\beta+\gamma+\delta)}$.

次ニ $d=10$米，$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15^\circ$ ヲ上ノ各々ニ代用スレバ

$AB=\dfrac{10.\cot15^\circ.\sin15^\circ}{\cot60^\circ.\cos45^\circ}=\dfrac{10.\cos15^\circ}{\cos60^\circ.\cos45^\circ}=10\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\div\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=10(\sqrt{3}+1)=27.32$米,

$BC=\dfrac{10.\cot15^\circ.\sin15^\circ}{\cos45^\circ.\cos30^\circ}=\dfrac{10.\cos15^\circ}{\cos45^\circ.\cos30^\circ}=10\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\div\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=10(3+\sqrt{3})=47.32$米,

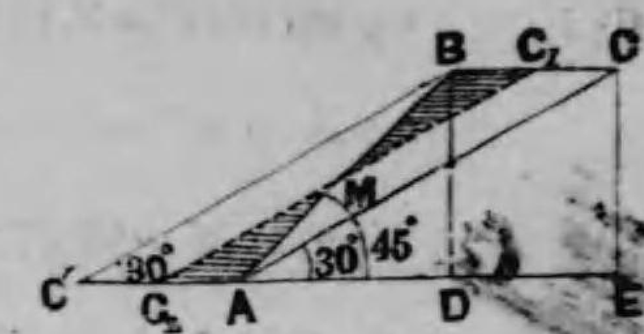
$CD=\dfrac{10.\sin15^\circ}{\sin15^\circ.\cos30^\circ}=\dfrac{10}{\cos30^\circ}=10\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{20}{3}\sqrt{3}=11.51$米.

12. (*a*) 平地ニ 45° 傾斜セル長サ 100 間ノ坂路アリ，傾斜ヲ減ジテ 30° トナサバ坂路ノ長サハ幾何． (東工)

(*b*) (i) 坂路 ABC アリ，AB, BC ノ傾斜ハ 30°, 15° ニシテ長サハ 100尺, 60尺ナリト云フ．C ハ A ヨリモ高キコト幾何ナルカ．

(ii) 高サ 1250尺ノ峠ノ頂上ニ達スベキ新道ヲ造ルニ，其ノ麓ヨリ中央マデヲ 25°，其ノ余ヲ 30° ノ傾斜ニナサバ其ノ長サ幾何，但シ $\sin25^\circ=0.42262$ トス． 答 2742尺．

〔解〕 (*a*) 舊新兩坂路ヲ AB, AC トシ，



高サ BD=CE トセバ 直△ABD ニ於テ

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$ 卽チ $100^2=2\overline{BD}^2$

$\therefore\ CE=BD=\sqrt{100^2\div2}=50\sqrt{2}$.

$\therefore\ AC=CE.\mathrm{cosec}30^\circ=50\sqrt{2}\times2=141.4$間.

注意． 或ハ DA ノ引長上ニ點 C′ ヲ取リ $B\hat{C'}A=30^\circ$ トスルモ同様ナリ．

實際ニ於テハ AB ノ中點 M ヲ過リ AC ニ平行線 C_1C_2 ヲ引キ $\triangle BMC_1$ ノ土ヲ取リテ $\triangle AMC_2$ ヲ埋メルコト多シ．

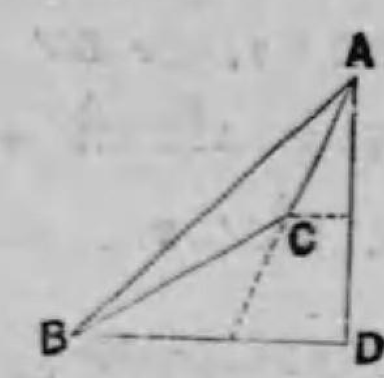
(*b*) (i) B, C ヨリノ高サヲ BF, CG トシ BE⊥CG トスレバ

$CG=BF+CE=AB.\sin30^\circ+BC.\sin15^\circ=100\times\dfrac{1}{2}+60\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=65.53$尺.

13. (*a*) 傾斜 30°，長サ 250 米ノ斜面 BC アリ其ノ麓ノ點 B ニ於テ山頂 A ヲ望ミ仰角 60° ヲ得タリ，今 $B\hat{C}A=135^\circ$ トスレバ A ハ B ヨリモ高キコト幾米ナルカ． (陸士)

(*b*) 山麓ニ於テ山頂ノ仰角 47° ヲ得，夫レヨリ之ニ向フテ 32° 傾斜セル坂路ヲ登ルコト 1000 尺ニシテ再ビ頂上ノ仰角 77° ヲ得タリト云フ．山ノ高サヲ問フ，但シ $\sin47^\circ=0.731$ トス．

〔解〕 (*a*) AD ヲ所要ノ高サトスレバ



$\triangle ABC$ ニ於テ $B\hat{A}C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$,

故ニ $AB=\dfrac{BC.\sin135^\circ}{\sin15^\circ}=\dfrac{25^\circ.\sin45^\circ}{\sin15^\circ}$ ナリ．

(*b*) 右圖ニ就テ (*a*) ニ倣フベシ．

$\therefore\ \mathrm{AD}=\mathrm{AB}.\sin 60^\circ=\dfrac{250.\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}.\sin 60^\circ=250\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$=125(3+\sqrt{3})=591.25$米.

(b) 略解　AC ヲ引長シ, 又 C ヨリ AD ニ垂線ヲ引ク.　　答　1034尺.

14. (a) 水平面ニ $0^\circ 47'.3$ ノ傾斜ヲナセル鐵道線路アリ, 今1尺丈ケ鉛直ニ昇ルニハ此線路ニ沿フテ幾尺ヲ行クベキカ, 尺ノ小數第一位マデ求メ以下四捨五入セヨ.　　答　72.7尺.

但シ　$\log\sin 0^\circ 47'=\bar{2}.1358$　|　$\log 72.6=1.8609$

　　　$\log\sin 0^\circ 48'=\bar{2}.1450$　|　$\log 72.7=1.8615$　トス.　（海機）

(b) 南北ニ亙ル堤防アリ, 正東ニ向ヒテ登ルトキハ7歩ニ付キ高マリ2歩ノ割合ナリ, 然ラバ東ヨリ30°南ニ向ヒテ登ルトキハ8歩ニ付キ高マリ2歩ナルコトヲ證セ.　（海兵）

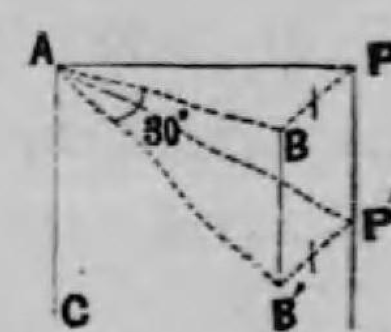
〔解〕 (a) $\log\sin 0^\circ 47'.3=\bar{2}.1358+(\bar{2}.1450-\bar{2}.1358)\times .3=\bar{2}.1386.$

故ニ　所要ノ尺數ヲ x トセバ　$x=\dfrac{1}{\sin 0^\circ 47'.3}$

$\therefore\ \log x=\log 1-\log\sin 0^\circ 47'.3=0-\bar{2}.1386=1.8614,$

$\therefore\ x=72.6+(72.7-72.6)\times\dfrac{1.8614-1.8609}{1.8615-1.8609}=72.6+.0835=72.6833.$

(b) 地平面ヲ ABB′C トシ; 堤防ノ斜面ヲ PAC トシ其ノ垂直斷面ヲ PBB′ トシ; 斜面上東及ビ東ヨリ 30° 南ニ登リタル點ヲ夫々 P, P′ トシ; 又 P, P′ ノ高マリヲ BP, B′P′ トス. 然ルトキ B′P′ ヲ2歩トシテ AP′ ノ8歩ナルコトヲ證セン,



サテ斜面上ニ於テ P, P′ ハ地平面ヨリ何レモ2歩ノ距離ニアルガ故ニ PP′ ハ斜面ト地平面トノ交線ニ平行ナリ, 從テ BB′ ハ AC ニ平行ナリ.

而シテ　$\mathrm{A\hat{B}P}=\hat{\mathrm{R}}$　ナルユヱ　$\mathrm{AB}=\sqrt{(\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2)}=\sqrt{(7^2-2^2)}=3\sqrt{5},$

又　$\mathrm{B\hat{A}B'}=30^\circ$,　$\mathrm{A\hat{B}B'}=\hat{\mathrm{R}}$　ナルユヱ　$\mathrm{AB'}=\mathrm{AB}.\sec\mathrm{BAB'}=3\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{15},$

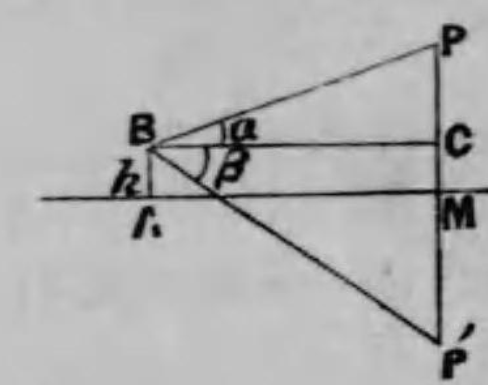
$\therefore\ \mathrm{AP'}=\sqrt{(\overline{\mathrm{AB'}}^2+\overline{\mathrm{P'B'}}^2)}\ [\because \mathrm{A\hat{B'}P}=\hat{\mathrm{R}}]=\sqrt{\{(2\sqrt{15})^2+2^2\}}=\sqrt{(60+4)}=8.$

15. (a) 湖水面ヨリ高サ h 尺ノ處ニ於テ雲ノ仰角ヲ測リ α ヲ得, 又湖水面ニ映ズル雲影ノ俯角 β ヲ得タリト云フ, 然ルトキハ雲ノ高サハ　$\dfrac{h.\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺　ナルコトヲ證セ.

(b) 若シ　$h=120$ 尺, $\alpha=15^\circ$, $\beta=30^\circ$　ナルトキハ雲ノ高サハ何尺ナルカ.　　答　328尺弱.　　（陸士）

〔證及解〕 (a) 湖水面ヲ AM, 雲ノ高サヲ AP トス. PM ヲ引長シテ $\mathrm{PM}=\mathrm{MP'}=x$ 尺トシ, $\mathrm{BC}\perp\mathrm{PM}$ トセバ $\mathrm{P\hat{B}C}=\alpha$, $\mathrm{P'\hat{B}C}=\beta$ ナルユヱ $\triangle\mathrm{BPC}$, $\triangle\mathrm{BP'C}$ ニ於テ

$\mathrm{CP}.\cot\alpha=\mathrm{BC}=\mathrm{CP'}.\cot\beta$



即チ　$(x-h)\cot\alpha=(x+h)\cot\beta$

之ヨリ x ヲ求ムレバ

$x=\dfrac{h(\cot\beta+\cot\alpha)}{\cot\alpha-\cot\beta}=\dfrac{h.\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺.

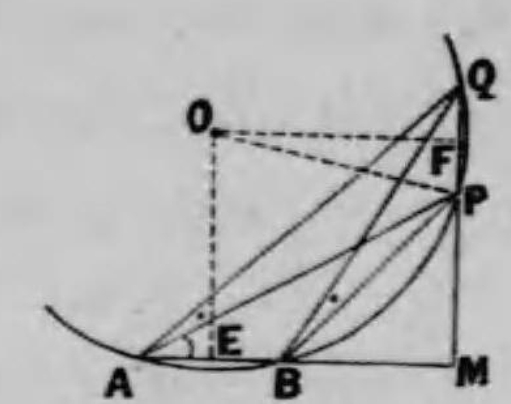
16. (a) 鉛直線 MPQ ノ上部 PQ ガ水平線 ABM 上ノ二點 A, B ニ等角 α ニ對向スルトキハ　$\mathrm{PQ}=(\mathrm{AM}+\mathrm{BM})\tan\alpha$　ナリ.

(b) 若シ　$\mathrm{M\hat{A}P}=\beta$ トシ, $\mathrm{AC}=c$　トスレバ

$$\mathrm{MP}=\frac{c}{\cot\beta-\tan(\alpha+\beta)}\quad 或ハ\quad =\frac{c.\sin\beta.\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+2\beta)}\quad ナリ.$$

〔證〕 (a) $\mathrm{Q\hat{A}P}=\mathrm{Q\hat{B}P}=\alpha$　ナルユヱ

ABPQ ハ圓ニ內接ス. 其ノ圓心ヲ O トシ, $\mathrm{OE}\perp\mathrm{AB}$, $\mathrm{OF}\perp\mathrm{PQ}$　トセバ



$\mathrm{OF}=\mathrm{EM}=\frac{1}{2}(\mathrm{AM}+\mathrm{BM})$

$\mathrm{PF}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}$,　$\mathrm{P\hat{O}F}=\alpha$

$\therefore\ \frac{1}{2}\mathrm{PQ}=\mathrm{PF}=\mathrm{OF}.\tan\alpha$

$=\frac{1}{2}(\mathrm{AM}+\mathrm{BM})\tan\alpha.$

(b) 外角 $\mathrm{BPM}=\mathrm{B\hat{A}Q}=\alpha+\beta$　ナルユヱ　$\triangle\mathrm{PAM}$, $\triangle\mathrm{PBM}$　ニ於テ

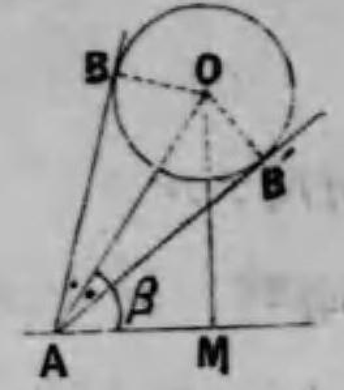
$\mathrm{MA}=\mathrm{MP}.\cot\beta$　及ビ　$\mathrm{MB}=\mathrm{MP}.\tan(\alpha+\beta)$　ナリ,

$\therefore\quad c=\mathrm{MA}-\mathrm{MB}=\mathrm{MP}\{\cot\beta-\tan(\alpha+\beta)\}$, 以下略ス.

17. (*a*) 地上ノ一點 A ニ於テ空中ニアル半徑 r 尺ノ風船ヲ望ム視角 α 及ビ中心 O ノ仰角 β ヲ得タリ, 風船ノ高サ幾何.

(*b*) 若シ $r=3$尺, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$ ナレバ如何.　(東工)

〔解〕 (*a*) 平地ヲ AM, OM⊥AM, 視角ヲ $B\hat{A}B'$ トセバ AB ハ切線ナルニヨ r⊥AB, 又 $A\hat{B}O=\hat{R}$, $B\hat{A}O=\frac{\alpha}{2}$ ナリ.



$\therefore\ OM=OA.\sin\beta=r.\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}.\sin\beta.$

18. (*a*) 燈臺 L ヨリ南西及ビ南 15° 東ニ二船 A, B アリ, AB ノ方向ハ南東ニシテ AL ノ長サガ四浬ナレバ二船ノ距離如何.

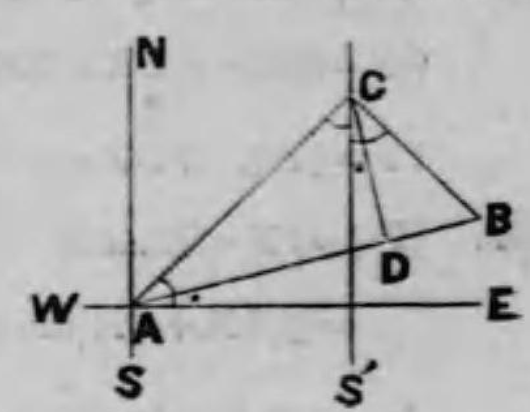
答 6.93浬.

(*b*) 一船ガ進行中北東及ビ北北東ニ方リテ二箇ノ燈臺ヲ見タリ, 夫レヨリ正北ニ向フテ進行スルコト 20 浬ニシテ再ビ以前ノ燈臺ヲ見タルニ其ノ方位ハ何レモ正東ナリシト云フ, 二燈臺ノ距離幾何, 但シ $\tan 22^\circ 30'=0.4142$ トス.　答 11.76浬.　(水講)

(*c*) 二燈臺 A, B ノ距離ハ 12 浬ニシテ方向ハ E15°N ナリ, 今 10のっと ノ速サニテ S15°E ノ方向ニ走ル一船ガ夜半ニ A ヲ南西ニ, B ヲ南東ニ望ミタリ, 此船ガ AB 線ヲ通過スル時刻如何.

〔解〕 (*c*) 船ノ夜半ノ位置及ビ AB ヲ通過スル點ヲ C, D トスレバ

△ACD ニ於テ $A\hat{C}D=60^\circ$, $C\hat{A}D=30^\circ$, 從テ CD⊥AB. 又 △ACB ニ於テ $C\hat{A}B=30^\circ$, $A\hat{C}B=90^\circ$, $\hat{B}=60^\circ$ ナリ. 故ニ △ACB ニ於テ $AB=AD+DB=CD(\cot A+\cot B)$



$$\therefore\ CD=\frac{AB}{\cot A+\cot B}=\frac{12}{\cot 30^\circ+\cot 60^\circ}$$

$$=12\Big/\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=5.197\text{浬}.$$

故ニ CD ヲ航スル時間ハ $5.197\div 10=.5197$時$=31$分10.9秒 ナリ,

∴ 所要ノ時刻ハ其ノ 0時31分11秒 ナリ.

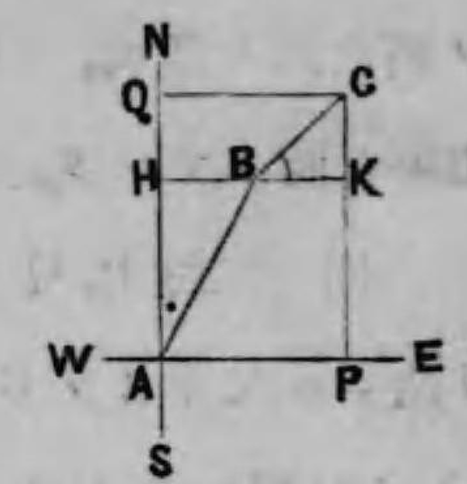
19. 或人東西及ビ南北ニ通ズル二道路ノ交點ヨリ N30°E ノ方向ニ 600 尺ヲ進ミ更ニ方向ヲ北東ニ轉ジ 400 尺ヲ進ミテ某地點ニ達セリ, 此地點ト兩道路トノ距離ヲ問フ.　(海機)

〔解〕 道路 EW, SN ノ交點ヲ A トシ, 次ノ地點ヲ B, C トシ, C ヨリ EW, SN ヘノ距離ヲ CP, CQ トス. B ヲ過リ EW ニ平行線ヲ引キ QA, CP トノ交點ヲ H, K トセバ $N\hat{A}B=30^\circ$, $K\hat{B}C=45^\circ$, AB=600尺, BC=400尺 ナリ.

$\therefore\ CP=AH+CK=AB.\cos NAB+BC.\sin KBC$

$=600.\cos 30^\circ+400.\sin 45^\circ$

$=600\times\frac{\sqrt{3}}{2}+400\times\frac{\sqrt{2}}{2}=802.45$尺.



又 $CQ=BH+BK=AB.\sin NAB+BC.\cos KBC$

$=600.\sin 30^\circ+400.\cos 45^\circ=582.84$尺.

20. (*a*) 我軍艦 A ガ南ニ方リテ敵艦 B ヲ認メタルニ其ノ針路ハ西北西ニシテ速サハ 10のっと ナリ, 今直航シテ之ヲ衝カントセバ我艦ノ針路及ビ速サヲ如何ニスベキカ. 但シ $\cot 22^\circ.5=\sqrt{2}+1$ ナリ.

答 針路ハ南南西, 速サハ約 24のっと.

(*b*) 旅順港ノ正南 $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ 海里ノ沖ニ我封鎖艦隊ノ一部碇泊セリ, 敵ノ一艦ガ港口ヨリ S60°E ノ方向ニ遁竄スルヲ見テ, 直チニ我艦ハ或方向ニ 15のっと ノ速サニテ 20分時ノ後チ之ニ追及セリト云フ. 我艦ノ進行セシ方向及ビ敵艦ノ速サヲ問フ.　(大工)

〔解〕 (*a*) 略解 $C\hat{A}B=90^\circ-67^\circ.5=22^\circ.5$,

$$x=10\times\frac{AC}{BC}=10\times\frac{AB.\cos 22^\circ.5}{AB.\cos 67^\circ.5}=10\times\frac{\cos 22^\circ.5}{\sin 22^\circ.5}=10.\cot 22^\circ.5=10(\sqrt{2}+1).$$

(*b*) 旅順港及ビ我艦ノ碇泊所ヲ A, B トシ, 敵艦ト我艦トノ會所ヲ C トセバ

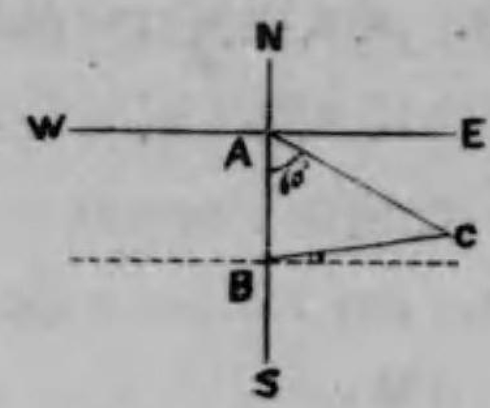
△ABC ニ於テ $A=60^\circ$, $AB=\frac{5}{3}\sqrt{6}$ 浬, $BC=15\times\frac{20}{60}=5$浬 ナルニヨ

$$\sin(60^\circ+B)=\frac{AB.\sin A}{BC}=\frac{5}{3}\sqrt{6}\times\frac{\sin 60^\circ}{5}=\frac{5}{3}\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ナリ}.$$

然ルニ $0^\circ<60^\circ+B<180^\circ$ ナルベキガ故ニ $60^\circ+B=135^\circ$, $\therefore\ B=75^\circ$.

∴　我艦ノ針路ハ N15°E ナリ.

又　$AC=\frac{5.\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}=5\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 浬.



∴　敵艦ノ速サハ　$\frac{5}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{60}{20}=16.72$

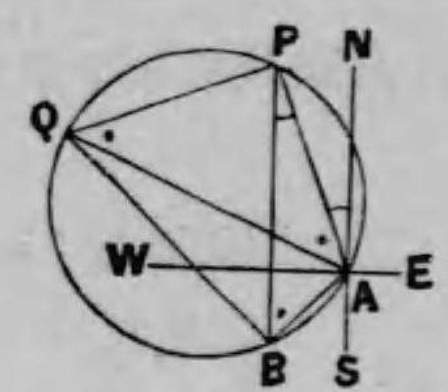
卽チ　約27浬ナリ.

21. (a)　一船ガ碇泊セルトキ右舷ニ方リ甲山 P ヲ北北西ニ乙山 Q ヲ西北西ニ望ミ，夫レヨリ南西ニ向ヒテ五浬進航セシニ甲山ハ北，乙山ハ北西トナレリ，此二山ノ距離及ビ方位如何.

(b)　二點 P, Q アリ P ノ南ノ一地 A ニ於テ $P\hat{A}Q=\alpha$ ヲ得，A ヨリ西ニ a 尺歩ミテ B ニ到リ $P\hat{B}Q=\alpha$ ヲ得，尙ホ同方向ニ b 尺歩ミテ Q ノ南 C ニ達セリ，PQ ノ距離ヲ問フ.

〔解〕 (a)　第一，第二ノ觀測點ヲ A, B トスレバ　$A\hat{P}B=N\hat{A}P=22^\circ.5$,

及ビ　$A\hat{B}P=45^\circ$　ナルユエ　△ABP　ニ於テ



$$AP=\frac{AB.\sin ABP}{\sin APB}=\frac{5.\sin 45^\circ}{\sin 22^\circ.5}=10.\cos 22^\circ.5$$

$$=10\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=5\sqrt{2+\sqrt{2}}=9.238\text{浬}.$$

而シテ　$P\hat{A}Q(=N\hat{A}Q-N\hat{A}P)=45^\circ=P\hat{B}Q$

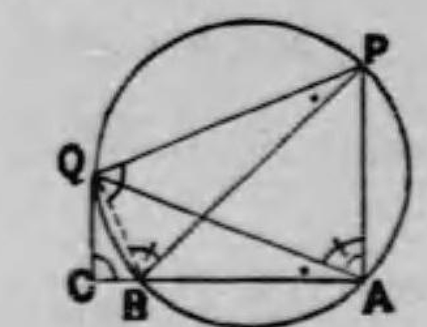
ナルユエ PABQ ハ圓ニ內接ス，從テ　$P\hat{A}Q=45^\circ(=A\hat{B}P)=P\hat{Q}A$　ナルユエ

PQ(=AP)=9.24浬弱　ナリ.

又　$B\hat{P}Q=A\hat{P}Q-A\hat{P}B=90^\circ-22^\circ.5=67^\circ.5$　卽チ　PQ ノ方位ハ西南西ナリ.

(b)　$P\hat{A}Q=P\hat{B}Q=\alpha$　ナルユエ ABQP ハ圓ニ內接ス，從テ $\hat{Q}=\hat{A}=\hat{R}$,

而シテ　直△BCQ ニ於テ



$$\overline{BQ}^2=\overline{BC}^2+\overline{CQ}^2=b^2+(a+b)^2.\tan^2 CAQ$$

$$=b^2+(a+b)^2.\cot^2\alpha.$$

故ニ　直△BQP ニ於テ　$PQ=BQ.\tan\alpha$

卽チ　$PQ=\sqrt{(a+b)^2.\cot^2\alpha+b^2}\times\tan\alpha=\sqrt{(a+b)^2+b^2.\tan^2\alpha}.$

22. (a) (i)　空中ノ飛行機ヲ東地ニ於テ觀測セシニ方位ハ北ニシテ仰角ハ 60° ヲ得タリ，之ト同時ニ西地ニ於テハ仰角 45° ヲ得タリ，飛行機ノ高サヲ問フ．但シ東西兩地ノ距離ハ 1.2粁 ナリ.

(ii)　東西一哩ヲ距ツル二地 A, B ニ於テ空中ノ飛行機ヲ望ミタルニ其ノ方位ハ北西及ビ北東ニ當リ仰角ハ各々 45° ナルコトヲ知リタリ，飛行機ノ高サ幾何.　答 0.71哩弱.　(陸經)

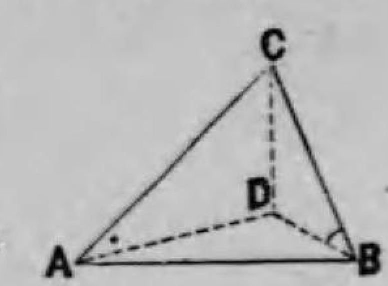
(b)　A, B ハ平地上ノ二箇ノ觀測點, C ハ山頂ノ目標ニシテ $C\hat{B}A=48^\circ10'$,　$B\hat{A}C=60^\circ20'$,　AB=153米,　B ニ於ケル C ノ仰角ハ 23°40′ ナルトキハ平地上ニ於ケル C ノ高サハ何米ナルカ．但シ $\sin 65^\circ=0.906$, $\sin 66^\circ=0.914$, $\sin 67^\circ=0.921$ トス.　(陸士)

(c)　ABC ヲ平地上ノ一直線トシ AB=150尺, BC=200尺 トス．今 A, B, C ニ於テ丘頂ノ仰角ヲ測リ夫々 30°, 45°, 60° ヲ得タリトスレバ丘ノ高サ幾何.　答 187尺餘.

〔略解〕 (a)　BD=CD,　$D\hat{A}B=\hat{R}$,　$\overline{BD}^2-\overline{DA}^2=\overline{BA}^2$　卽チ　$CD^2(1-\cot^2 60^\circ)=1.2^2$.

(b)　CD ヲ山ノ高サトスレバ △ABC ニ於テ　$C=180^\circ-(A+B)=65^\circ30'$,

$$\therefore\ BC=\frac{AB.\sin A}{\sin C}=\frac{153.\sin 66^\circ20'}{\sin 65^\circ30'}=\frac{153\times 0.916}{0.910}=154,$$



$\left[\because\ \sin 66^\circ20'=0.914+(0.921-0.914)\times\frac{20}{60}=0.916\right.$

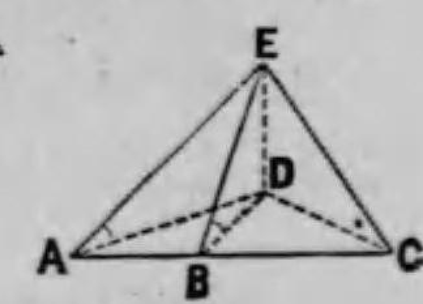
$\left.\sin 65^\circ30'=0.906+(0.914-0.906)\times\frac{30}{60}=0.910\right]$.　次ニ直△CBD ニ於テ

$$CD=BC.\cos CBD=154.\cos 23^\circ40'=154\sqrt{1-\sin^2 66^\circ20'}$$

$$=154\sqrt{1-(0.916)^2}=61.76\text{米}.$$

(c)　丘ノ高サヲ DE=x尺 トセバ　$AD=x.\cot 30^\circ=x\sqrt{3}$,　$BD=x.\cot 45^\circ=x$,

$CD=x.\cot 60^\circ=\frac{x}{\sqrt{3}}$.　又　△ABD,　△CBD ニ於テ



$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2AB.BD.\cos ABD,$$

$$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC.\,BD.\cos(180^\circ-ABD)$$

$$=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+2BC.\,BD.\cos ABD$$

此二式ニ上ノ値ヲ代用シテ $\cos ABD$ ヲ逐ヒ出シ，x^2 ノ二次方程式ヲ解ク.

23. (a) 平地上ニ直立セル塔CDアリ,其ノ正南ノ一地Aニ於テハ塔ノ仰角αニシテ,夫レヨリ正西ニa米ヲ距ツル一地Bニ於テハ塔ノ仰角βナリトスレバ,塔ノ高サハ幾何. (水產)

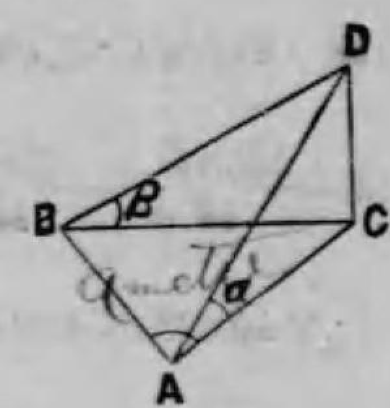
(b) 若シ$\alpha=30^\circ$, $\beta=18^\circ$ナレバ 塔高$=\dfrac{a}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}$米ナリ.

(c) 若シ$\alpha=45^\circ$, $\beta=15^\circ$ナレバ 塔高$=\dfrac{a}{2}\left(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right)$米ナリ.

(d) 水平面上ニAヲ直角トスル$\triangle ABC$アリ, 今Cニ直立スル塔ノ頂點DノA及ビBニ於ケル仰角ハ45°及ビ15°ナリトスルトキハ $\tan ABC=\dfrac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right)$ ナリ. (名工)

(e) 某所ニ於テ其ノ正東ニ飛颺セル飛行機ノ仰角ヲ測リ60°ヲ得,夫レト同時ニ其ノ正南2哩ヲ距ツル所ニ於テハ仰角45°ヲ得タリト云フ. 飛行機ノ高サ幾何. (海兵, 商船)

〔解〕 (a) DCハCA, CBニ垂線ニシテ, BハAノ正西ナルユヱ $C\hat{A}B=\hat{R}$



ナルユヱ $\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$

即チ $\overline{CD}^2(\cot^2\beta-\cot^2\alpha)=a^2$,

$\therefore\ CD=\dfrac{a}{\sqrt{(\cot^2\beta-\cot^2\alpha)}}$ 米

或ハ $=\dfrac{a.\sin\alpha.\sin\beta}{\sqrt{\{\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)\}}}$ 米.

(b) $\overline{CD}^2=\dfrac{a^2}{\cot^2 18^\circ-\cot^2 30^\circ}=\dfrac{a^2}{\operatorname{cosec}^2 18^\circ-\operatorname{cosec}^2 30^\circ}=a^2\Big/\left\{\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}\right)^2-2^2\right\}$

$=a^2\Big/\left\{\dfrac{4(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}-2^2\right\}=\dfrac{a^2}{2+2\sqrt{5}}$, 之ヲ平方ニ開ク.

(c) 63頁7題ヲ見ヨ.

(d) $D\hat{A}C=45^\circ$, $DC\perp CA$ ナルユヱ $AC=CD$. 又 $C\hat{A}B=\hat{R}$.

$\therefore\ \tan ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{\cot^2 15^\circ-\cot^2 45^\circ}$ 以下 (c) ニ同ジ.

(e) 飛行機ノ高サヲCDトシ, 第一, 第二ノ觀測點ヲB, Aトセバ $C\hat{B}A=\hat{R}$, $D\hat{B}C=60^\circ$, $D\hat{A}C=45^\circ$, $BA=2$哩. 故ニ 同上. 答 2.45哩弱.

24. (a) 煙突ノ頂點ヲDトシ,其ノ基底Cト同ジ水平面上ニ二點A, Bヲ取リ觀測ニ依リテ $C\hat{A}B=105^\circ$, $C\hat{B}A=30^\circ$, $D\hat{A}C=60^\circ$, $AB=30$間 ヲ得タリ,烟突ノ高サヲ間ノ小數第一位マデ算出セヨ. (高等)

(b) 對岸ノ大樹ノ頂ノ仰角$19^\circ 25'$ヲ得タルトキ海岸ニ沿フテ正北ニ進ムコト120尺ニシテ又前ト等シキ仰角ヲ得タリト云フ,今河幅ハ樹根ニテ80尺ナリトセバ其ノ樹高幾何.

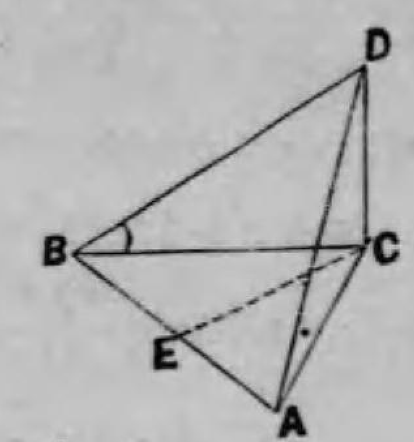
但シ $\log\tan 19^\circ 25'=\bar{1}.54714$, $\log 3.5248=0.54713$. (長商)

〔解〕 (a) $\triangle ABC$ ニ於テ $C=180^\circ-(A+B)=45^\circ$ ナルヲ以テ

$AC=\dfrac{AB.\sin ABC}{\sin C}=\dfrac{30.\sin 30}{\sin 45^\circ}=30\times\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=15\sqrt{2}$ ナリ,

$\therefore\ CD=AC.\tan DAC=15\sqrt{2}.\tan 60^\circ=15\sqrt{2}\times\sqrt{3}=15\sqrt{6}=36.74$間.

(b) 樹木ノ高サヲCDトシ, 觀測二點ヲA, Bトシ, 又此河幅ヲCEトス. 然レバDCハCA, CBニ垂線且ツ



$D\hat{A}C=19^\circ 25'=D\hat{B}C$, $\triangle DAC\equiv\triangle DBC$, 從テ

$BC=CA$, 仍テ $AE=BE=60$尺, $CA=80$尺.

故ニ $CA=\sqrt{(\overline{CE}^2+\overline{EA}^2)}=\sqrt{(80^2+60^2)}=100$尺.

$\therefore\ CD=CA.\tan DAC=100.\tan 19^\circ 25'$

$\therefore\ \log CD=\log 100+\log\tan 19^\circ 25'=2+\bar{1}.54714=1.54714$,

而シテ $\log 3.5248=0.54713$, $\therefore\ CD=35.248$. 答 約35尺.

25. 高サ相等シキ甲乙ノ二塔アリ,或人甲塔ヲ正南ニ乙塔ヲ正北ニ望ム所ニ在リテ近キ甲塔ノ仰角ヲ測リ60°ヲ得,又其所ヨリ正東80尺ノ所ニテ兩塔ノ仰角45°, 30°ヲ得タリ. 塔ノ高サ及ビ兩塔間ノ距離ヲ算出セヨ. (七高)

〔解〕 (a) 甲乙二塔ノ高サヲ $BP=CQ=x$尺 トシ, 觀測二點ヲA, A′トスレバ BP, CQハ面BCA′ニ垂線ニシテ, 又 $B\hat{A}A'=\hat{R}$ ナルユヱ

$AB=x.\cot 60^\circ=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $A'B=x.\cot 45^\circ=x$, $AA'=80$尺 ナリ.

$\therefore\ \overline{A'B}^2=\overline{AB}^2+\overline{AA'}^2$ 即チ $x^2=\dfrac{x^2}{3}+80^2$, 之ヲ解キ正ノミヲ採リテ

$x=40\sqrt{6}$尺$=97.98$尺弱.

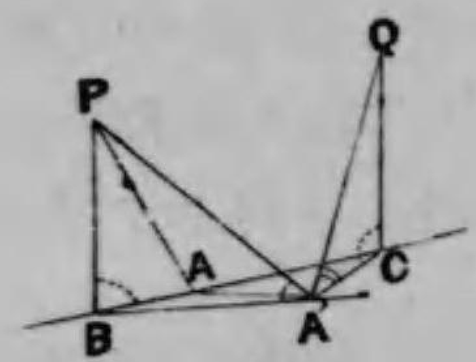
次ニ　$A'C=x.\cot 30^\circ=x\sqrt{3}=40\sqrt{6}\times\sqrt{3}$

$=120\sqrt{2}$尺.

$\therefore\quad AC=\sqrt{(\overline{A'C}^2-\overline{AA'}^2)}$　〔$\because AA'\perp BC$〕

$=\sqrt{(120^2\times2-80^2)}=40\sqrt{14}$尺,

$AB=\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times40\sqrt{6}=40\sqrt{2}$尺



$\therefore\quad BC=AC+AB=40\sqrt{14}+40\sqrt{2}=149.67+56.58=206.25$尺弱.

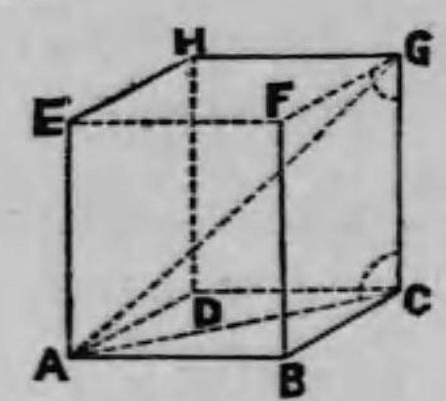
26. (*a*) 立方體ノ對角線ガ之ト交ル一稜ト爲ス角ノ正切ヲ求メヨ. 又此結果ヨリ其ノ角ヲ分ノ位マデ求メヨ, 但シ

$\log 2=.3010,\quad \log\tan 54^\circ 40'=.1494,\quad \log\tan 54^\circ 50'=.1521.$　(海機)

(*b*) 正方形ノ底面ヲ有スル直桂體狀ノ塔アリ, 底ノ平面上ノ一點ヨリ其ノ隅ヲ觀ルトキハ仰角ハ夫々 45°, 60° 及ビ 45° ナリト云フ. 高サト底邊トノ比ヲ求メヨ.　答 $(\sqrt{6}+\sqrt{30}):4$.

〔解〕 (*a*) 立方體 (ABCD−EFGH) ニ於テ對角線 AG チ引ケバ面 AGC ハ面 ABCD ニ垂直ナルユヱ $\widehat{ACG}=\widehat{R}$ ニシテ, 又 $\widehat{ABC}=\widehat{R}$ ナリ.

$\therefore\quad \tan AGC=\dfrac{AC}{CG}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{CG}=\sqrt{2}.$



次ニ　$\log\tan AGC=\log\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\log 2$

$=\dfrac{1}{2}\times.3010=.1505.$

又　$(.1521-.1494):(.1505-.1494)=10':x$　ヨリ　$x=4'.0$……………

$\therefore\quad \widehat{AGC}=54^\circ 44'.$

(*b*) 上圖チ用フ. 底面 DB 上ノ觀測點チ O トシ塔ノ三隅チ E, F, G トシ, $AB=BC=a$, $AE=FB=h$ トス. 然ルトキハ

$OA=h.\cot 45^\circ=h,\quad OB=h.\cot 60^\circ=\dfrac{h}{\sqrt{3}},\quad OC=h.\cot 45^\circ=h$　ナルユヱ點 O ハ DB ノ引長上ニ在リ, O ヨリ AB ノ引長ニ垂線 OK チ引ケバ　$BK=OK$,

$\therefore\quad \overline{OA}^2=(a+BK)^2+\overline{OK}^2=\overline{BO}^2+a^2+2a.BK$, 之レヨリ BK チ求ムレバ

$BK=\dfrac{2h^2-3a^2}{6a}$,　依テ　$\overline{OB}^2=\overline{BK}^2+\overline{OK}^2$　ヨリ　$\dfrac{h}{a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{30}}{4}.$

27. (*a*) 正△ABC ノ外心 O ヨリ其ノ三角形ノ平面ニ垂線 OD ヲ立テ OD＝AB ナラシメ, 面ABC ト 面ABD トノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ.　(大工)

(*b*) 各稜ノ長サヲ一尺トスル正四面體ノ二面角ハ何度何分ナルカ. 但シ $\sin 70^\circ=.9397$, $\sin 71^\circ=.9455$.　(専檢)

(*c*) 正方錐體アリ, 底面ノ一邊ノ長サハ 2 尺ニシテ, 又斜稜ハ 3 尺ナルトキ斜面ト底面トノナス角ノ正弦, 餘弦及ビ正切ノ對數ヲ求メヨ. 又右ノ表ニヨリテ其ノ角ヲ分ノ位迄算出セヨ.

$\log 2=.3010,\quad \log 7=.8451.$　(海機)

角	log sin	
20° 0′	$\bar{1}.5311$	70° 0′
10′	$\bar{1}.5375$	50′
20′	$\bar{1}.5409$	40′
30′	$\bar{1}.5443$	30′
40′	$\bar{1}.5477$	20′
50′	$\bar{1}.5510$	10′
21° 0′	$\bar{1}.5543$	69° 0′
	log cos	角

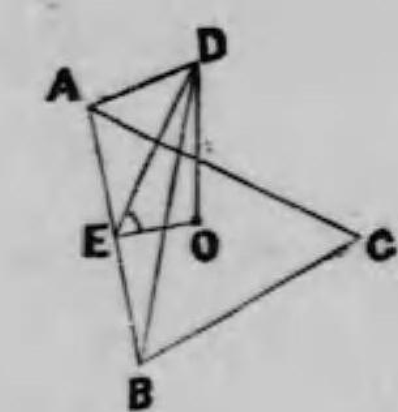
(*d*) 正八角錐體アリ, 底ノ一邊ノ長サガ一尺ニシテ側稜ト高サトガ 30° ノ角ヲナストキハ其ノ體積幾何.　(東工)

〔解〕 (*a*) $OE\perp AB$ トセバ $DO\perp$面ABC ナルチ以テ三垂線定理ニ依リ $DE\perp AB$, 從テ $\widehat{DEO}$ ハ二面 DBA ト ABC トノナス角チ計ル角ナリ.

サテ　$EO=EB.\cot 60^\circ=\dfrac{1}{2}AB.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{AB}{2\sqrt{3}}$,

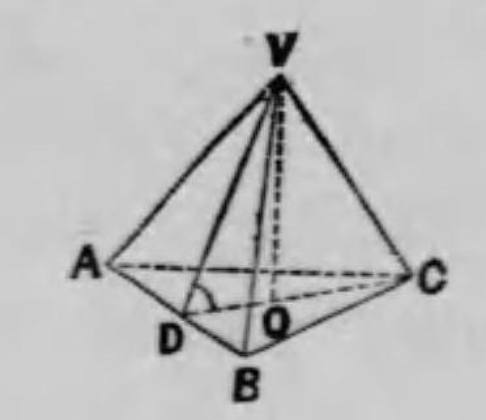
又 $OD\perp EO$ 且ツ $DO=AB$ ナルユヱ

$DE=\sqrt{(\overline{OE}^2+\overline{OD}^2)}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{12}\overline{AB}^2+\overline{AB}^2\right)}=AB\sqrt{\dfrac{13}{12}}.$



$\therefore\quad \cos DEO=\dfrac{EO}{DE}=\dfrac{AB}{2\sqrt{3}}\div AB\sqrt{\dfrac{13}{12}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}.$

(*b*) 正四面體 (V−ABC) ハ各面ハ全等ナル正三角形ニシテ其ノ高サハ中線ト一致シ, 又體ノ高サノ足ハ底面ノ垂心卽チ重心ト一致ス. 故ニ AB ノ中點チ D トセバ $\widehat{VDO}$ ハ二面角チ度ル角ナリ.



サテ　$VA=AB=1$ ナルユヱ

$VD=\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad DO=\dfrac{1}{3}VD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

故ニ $\cos VDO=\dfrac{DO}{DV}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$, $\therefore$ $\sin VDO=\sqrt{1-\cos^2 VDO}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=.9428.$

$\therefore$ $VDO=70^\circ+(71^\circ-70^\circ)\times\dfrac{.9428-.9397}{.9455-.9397}=70^\circ32'.$

(c) 答 $69^\circ18'$. $\log\sin 69^\circ18'=\bar{1}.9710$, $\log\cos 69^\circ18'=\bar{1}.5484$,

$\log\tan 69^\circ18'=0.4226.$

(d) 正八角錐體 (V—ABCDEFGH) ノ高サヲ VO トシ, $OK\perp AB$ トセバ OK ハ底面ノ內切圓ノ半徑ナルヲ以テ

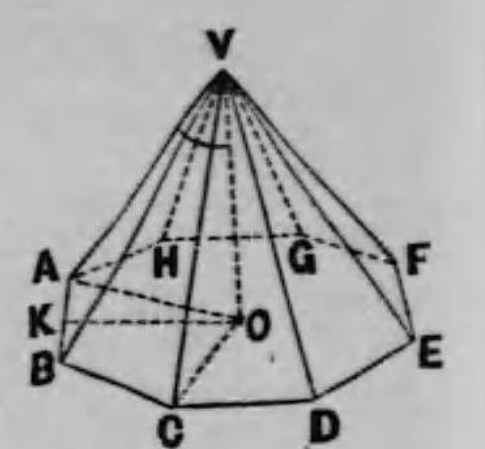
$$OK=AB/2\tan\frac{180^\circ}{8}\ [\because 95\text{頁第8條}]=\frac{1}{2\tan 22^\circ.5}=\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

$\therefore$ 底面積$=\dfrac{1}{2}\times8\times AB\times OK=\dfrac{1}{2}\times8\times1\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}=2(\sqrt{2}+1)$

又 $AO=\sqrt{\left\{\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2+\overline{OK}^2\right\}}=\sqrt{\left\{\dfrac{1}{4}+4(3+2\sqrt{2})\right\}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(49+32\sqrt{2})}.$

$A\hat{O}V=\hat{R}$, $A\hat{V}O=30^\circ$ ナルユヱ $VO=AO.\cot 30^\circ=\dfrac{1}{2}\sqrt{(49+32\sqrt{2})}\times\sqrt{3}.$

$\therefore$ 此體積$=\dfrac{1}{3}\times$底面$\times$高サ



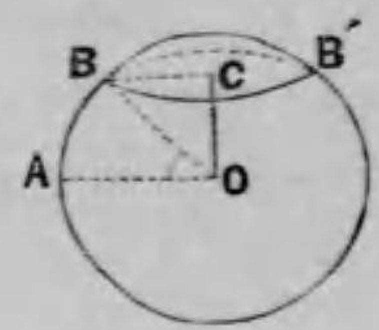
$$=\frac{1}{3}\times2(\sqrt{2}+1)\times\frac{1}{2}\sqrt{(49+32\sqrt{2})}\times\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)\sqrt{(49+32\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{3}\times1.732\times(1.414+1)\times\sqrt{(49+32\times1.414)}$$

$$=.577\times2.414\times9.703=13.515.$$

28. 地球ノ回轉ニ仍リ緯度四十五度ノ處ニ居ル人ハ一時間ニ幾哩空間ニ於テ運バルヽ譯ニナルカ, 但シ地球ノ半徑ヲ 4000 哩トス. 但シ $\pi=3.1416$ トス. (大工)



〔解〕 地球ノ中心ヲ O, 人ノ位置ヲ B トシ, $A\hat{O}B=45^\circ$ トス. B ガ一日ニ運バルル小圓 BB' ノ平面ニ垂線 OC ヲ引ケバ BC ハ此小圓ノ半徑ニシテ, $\hat{C}=90^\circ$, $O\hat{B}C=45^\circ$.

$\therefore$ 此圓周$BB'=2\pi\times BC=2\pi\times OB.\cos45^\circ=2\pi\times4000\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pi.4000\sqrt{2}$哩.

$\therefore$ 所要ノ長サハ $\pi.4000\sqrt{2}\div24=3.1416\times4000\times1.414\div24=524$哩餘.

29. 梯形 ABCD ニ於テ $A\hat{B}C=60^\circ$, $B\hat{C}D=30^\circ$, BC=1尺, BA=4寸 ナリ. 今 BC ヲ軸トシテ梯形ヲ回轉スルトキニ作ル所ノ體積ヲ求メヨ. (大工)

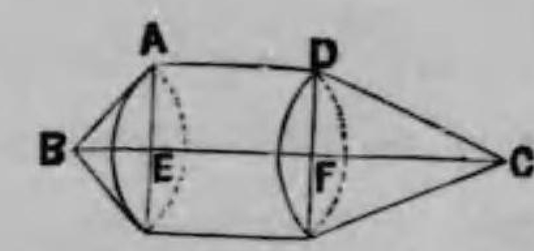
〔解〕 A,D ヨリ BC ニ垂線 AE, DF ヲ引ケバ $\triangle DFC$, $\triangle ABE$ ニ於テ

$$DF=AE=BA.\sin ABC=.4\times\sin60^\circ=.4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=.2\times\sqrt{3}$$

又 $BE=BA.\cos ABC=.4\times\cos60^\circ=.4\times\dfrac{1}{2}=.2$

$FC=DF.\cot BCD=.2\sqrt{3}.\cot30^\circ=.2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=.6.$

從テ $EF=BC-BE-FC=1-.2-.6=.2.$



今 BC ヲ軸トシテ梯形 ABCD ヲ一廻轉シタル體積ハ BE, FC ヲ軸トシ AE, DF ヲ底半徑トセル兩直圓錐ト EF ヲ軸トシ AE ヲ底半徑トセル直圓壔トノ體積ノ和ナリ.

$\therefore$ 所要ノ體積 $V=\dfrac{1}{3}\overline{AE}^2\pi.BE+\dfrac{1}{3}\overline{DF}^2\pi.FC+\overline{DF}^2\pi.EF$

$$=\frac{1}{3}(.2\sqrt{3})^2\times.2\pi+\frac{1}{3}(.2\sqrt{3})^2\times.6\pi+(.2\sqrt{3})^2\times.2\pi$$

$$=.008\pi+.024\pi+.024\pi=.056\pi.$$

然ルニ $3.1415<\pi<3.1416$ ナルユヱ $3.1415\times.056<V<3.1416\times.056$ 卽チ $.1759240<V<.1759396$, 故ニ 立方尺ヲ單位トシテ精確ニ V ヲ小數點以下三位マデ取レバ .175 立方尺 ナリ.

30. (a) 海岸ニ人アリ, 海上ニ碇泊スル二ツノ軍艦ノ距離ヲ知ラント欲シ二艦ニ對スル角ヲ測リ六十度ヲ得タリ, 又各艦ヨリ發スル砲火ヲ見シヨリ砲聲ヲ聞ク迄ノ時間ヲ檢シテ四秒及ビ六秒ヲ得タリト云フ. 音響ノ速サハ每秒三百三十米ナリトスレバ二艦ノ距離ハ何米ナリヤ. (六高)

(b) 眞正ナル二條ノ鐵道ガ $25^\circ50'$ 交角ヲナスアリ, 今同時ニ甲乙ノ機關車ガ其ノ交叉點ヲ出發シテ各々一條ノ鐵路ヲ走ルニ甲ノ每時ノ速サハ 20 哩ニシテ 2 時間ノ後チニ乙トノ距離ハ 30 哩ナリシト云フ. 乙每時ノ速サヲ問フ. 但シ $\cos25^\circ50'=0.9$ トス.

〔解〕 (a) 觀測點ヲ A トシ, 二軍艦ノ位置ヲ B, C トス. 然ルトキハ

$\hat{A}=60^\circ$, $AB=330\times4=1320$米, $AC=330\times6=1980$米 ナリ.

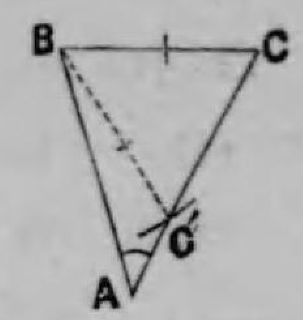
$\therefore\ BC^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AB.AC.\cos60^\circ=1320^2+1980^2-2\times1320\times1980\times\frac{1}{2}$

$=1320^2+1980\times(1980-1320)=3049200,$

∴ 所要ノ距離卽チ $BC=\sqrt{3049200}$米$=1746.2$米.

(b) 交叉點ヲ A トシ, 2時間後ノ甲乙ノ位置ヲ B, C トス.

然ルトキハ $\hat{A}=25^\circ50'$, $AB=20$浬$\times2=40$浬, $BC=30$浬 ナルヲ以テ AC ヲ x 浬トスレバ



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+AC^2-2AB.AC.\cos25^\circ50'$

卽チ $30^2=40^2+x^2-2\times40\times0.9$

卽チ $x^2-72x+700=0,$

此二次方程式ヲ解キ $x=60.413$浬 或ハ 23.174浬 ヲ得.

∴ 乙ノ每時ノ速サハ $x\div2=30.21$浬 或ハ 11.59浬 ナリ.

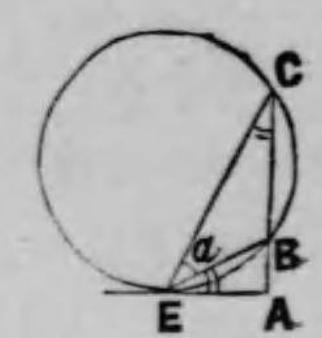
31. 塔AB上ノ旗竿 BC ガ塔底 A ヨリ c ナル距離ノ一地ニ於テ最大角 α ニ對スルトキハ次ノ證如何,

$$AB=c.\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\ \text{及ビ}\ BC=2c.\tan\alpha.$$

〔證〕 $B\hat{E}C$ ヲ最大角 α トスレバ 圓BCE ハ E ニ於テ直線 AE ニ切ス, 從テ

$B\hat{E}A=\hat{C}$, 故ニ $2B\hat{E}A+\alpha=90^\circ$,

卽チ $B\hat{E}A=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$.



$\therefore\ AB=AE.\tan BEA=c.\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

次ニ 之ト同樣ニ $AC=c.\tan\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$\therefore\ BC=AC-AB=c\left\{\tan\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)-\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$=c\left\{\frac{1+\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1-\tan\frac{1}{2}\alpha}{1+\tan\frac{1}{2}\alpha}\right\}\quad[\because\ \tan45^\circ=1]$$

$$=c\left\{\frac{(1+\tan\frac{1}{2}\alpha)^2-(1-\tan\frac{1}{2}\alpha)^2}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha}\right\}=c\left\{\frac{4\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha}\right\}=2c.\tan\alpha.$$

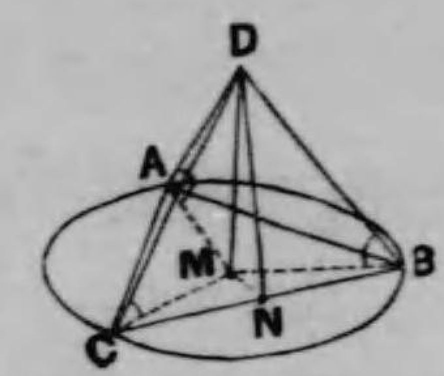
32. 平地上ノ三點 A, B, C ニ於テ塔 MP ノ頂ノ仰角ハ相等シク, 又 $AB=123$尺, $BC=130$尺, $CA=77$尺 ニシテ此三直線中ノ或點ニ於ケル塔頂ノ最大仰角ハ 45° ナリト云フ. 塔ノ高サヲ問フ.

〔解〕 A, B, C ハ P ノ仰角相等シキニ由リ $\triangle PAM\equiv\triangle PBM\equiv\triangle PCM$, 從テ

$AM=BM=CM$ 卽チ M ハ 圓ABC ノ中心ナリ.

故ニ $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=4620$ 平方米.



$\therefore\ MB=\frac{abc}{4\triangle ABC}=\frac{533}{8}$ 米.

次ニ $\triangle ABC$ ノ最大邊 BC ハ圓心 M ヨリ最短距離ナルニ由リ, 最大仰角 45° ヲ望ムベキ點ハ BC ノ中點 N ナリ.

故ニ $\triangle BMN$ ニ於テ $MN=\sqrt{(\overline{MB}^2-\overline{NB}^2)}=\sqrt{\left\{\left(\frac{533}{8}\right)^2-\left(\frac{130}{2}\right)^2\right\}}=\frac{117}{8}$ 尺,

$\therefore\ \triangle MPN$ ニ於テ $MP=MN.\tan PNM=\frac{117}{8}\tan45^\circ=\frac{117}{8}$尺$\times1=14.6$尺强.

第　五　編
方程式　及ビ　消去法

第　一　章
三角方程式

1.　三角方程式　未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ三角方程式ト云フ．其角ヲ求ムルコトヲ方程式ヲ解クト云フ．

(1)　以上諸編ノ如ク，已知一角ノ三函數値ハ只々一ツナリ．

(2)　逆ニ，已知函數値ヲ有スル角ハ無限ニアリ．

例ヘバ $\sin 30^\circ$ ノ値ハ只々 $\frac{1}{2}$ ノミナリ；然ルニ $\frac{1}{2}$ ヲ有スル $\sin$ ノ角ハ 30° 及ビ $180^\circ-30^\circ=150^\circ$．從テ同名函數ノ公式ニ依テ $2n.180^\circ+30^\circ$ 及ビ $2n.180^\circ+150^\circ$ 卽チ無限ニアリ．

2.　方程式ノ解法

m, n ヲ 0 或ハ任意ノ整數，π ヲ 180°，α ヲ最小角，θ ヲ一般角，a ヲ與値トスルトキハ

〔第一〕　$\sin\theta=a$　ノ解ハ　$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$.　　(46)

系．$\begin{cases} a=0 & \text{ナレバ}\quad \theta=n\pi \quad \text{ナリ．} \\ a=\pm1 & \text{ナレバ}\quad \theta=(4n\pm1)\dfrac{\pi}{2} \quad \text{ナリ．} \end{cases}$

〔第二〕　$\cos\theta=a$　ノ解ハ　$\theta=2n\pi\pm\alpha$.　　(47)

系．$\begin{cases} a=0 & \text{ナレバ}\quad \theta=(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad \text{ナリ．} \\ a=1 & \text{ナレバ}\quad \theta=2n\pi \quad \text{ナリ．} \\ a=-1 & \text{ナレバ}\quad \theta=(2n+1)\pi \quad \text{ナリ．} \end{cases}$

〔第三〕　$\tan\theta=a$　ノ解ハ　$\theta=n\pi+\alpha$.　　(48)

〔第四〕　cosec, $\sec$, $\cot$　ハ $\sin$, $\cos$, $\tan$ ノ逆數ニシテ此等ノ中ニ含マル．

〔解〕(1)　$\sin\theta=a=\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$　〔∵　公式 (7)〕

$\therefore\ \theta=2n\pi+\alpha$　或ハ　$\theta=2n\pi+(\pi-\alpha)=(2n+1)\pi-\alpha$,

之レヲ一式ニ纏メテ　$\theta=n\pi\pm(-1)^n\alpha$.

(2)　$\cos\theta=a=\cos\alpha=\cos(-\alpha)$　〔∵　公式 (5)〕

$\therefore\ \theta=2n\pi+\alpha$　或ハ　$\theta=2n\pi-\alpha$,

之レヲ一式ニ纏メテ　$\theta=2n\pi\pm\alpha$.

(3)　$\tan\theta=a=\tan\alpha=\tan(\pi+\alpha)$　〔∵　公式 (7) 系〕

$\therefore\ \theta=2n\alpha+\alpha$　或ハ　$\theta=2n\pi+(\pi+\alpha)=(2n+1)\pi+\alpha$,

之レヲ一式ニ纏メテ　$\theta=n\pi+\alpha$.

3.　問題解法ノ順序

〔第一〕　先ヅ已知ノ公式ニ依テ都合宜キ一未知函數ノ項ニ變ジ．

〔第二〕　次ニ其未知角ノ三角函數ノ値ヲ求メ．

〔第三〕　終リニ此値ニ適スル一般角ニテ表ハス．

注意． 同一問題ヲ $\sin$, $\cos$, $\tan$ ニテ解ケバ種々ノ形チヲ取ルモ之レ角ノ同ジ一組ヲ表ハスモノナリ．

問　題　及ビ　解　答

次ノ 1 乃至 11 題ノ方程式ヲ解ケ，

1.　(a)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　(b)　$\cos^2\theta=1$.（東工）　(c)　$\sec 2\theta=-\sqrt{2}$.

〔解〕(b)　$\cos\theta=\pm1$，之ニ適スル最小正角ハ 0° 或ハ $180^\circ=\pi$ ナリ，

$\therefore\ \theta=2n\pi$　或ハ　$\theta=2n\pi\pm\pi=(2n+1)\pi$.

答　(a)　$n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}$.　(c)　$n\pi\pm\dfrac{3}{8}\pi$

2.　(a)　$\sin^2\theta=\sin^2\alpha$.　(b)　$\sec^2\theta=\sec^2\alpha$.　但シ α ハ已知トス．

〔解〕(a)　兩邊ヲ平方ニ開ケバ　$\sin\theta=\pm\sin\alpha=\sin(\pm\alpha)$,

$\therefore\ \theta=n\pi+(-1)^n(\pm\alpha)=n\pi\pm\alpha$.　(b)　答　$2n\pi\pm\alpha$.

3. (a) $\sin 7\theta-\sin\theta=\sin 3\theta$ 答 $\frac{n\pi}{3}$ 或 $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{24}$.

(b) $\sin 5\theta-\sin 3\theta=\sqrt{2}.\cos 4\theta$. (商船)

(c) $\cos 2\theta-\cos 4\theta=\sin\theta$. 答 $n\pi$ 或 $\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{7\pi}{18}$. (海兵)

(d) $\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta$. 答 $\frac{n\pi}{4}$ 或 $\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}$. (專檢)

〔解〕 考へ方 此種ノ題ハ左邊ヲ積形ニ變ズ.

(b) 元方程式ヨリ $2\cos 4\theta\sin\theta=\sqrt{2}.\cos 4\theta$,

$\therefore\ \cos 4\theta=0$..............(1) 或ハ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$..............(2)

此 (1) ニ適スル最小正角ハ $90°=\frac{\pi}{2}$ ナルユヱ,

$4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta=(2n+1)\frac{\pi}{8}$.

又 (2) ニ適スル最小正角ハ $45°=\frac{\pi}{4}$ ナルユヱ, $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

4. (a) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$. 答 $\frac{n\pi}{2}$ 或 $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. (山商)

(b) $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta=0$. 答 $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(c) $\sin 4\theta-\sin 3\theta+\sin 2\theta-\sin\theta=0$.

答 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi$ 或 $(2n+1)\frac{\pi}{}$

(d) $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=0$. 答 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

〔略解〕 左邊ヲ 52 頁 8 題及ビ 54 頁 12 題ノ如クス.

5. (a) $\sin 5\theta.\cos\theta=\sin 6\theta.\cos 2\theta$. 答 $n\pi$ 或 $\frac{2n+1}{14}\pi$.

(b) $\sin 11\theta.\sin 4\theta+\sin 5\theta.\sin 2\theta=0$.

〔解〕 (b) 元方程式ヲ和差ノ形ニ變ズレバ

$-\frac{1}{2}\{(\cos 15\theta-\cos 7\theta)+(\cos 7\theta-\cos 3\theta)\}=0$

卽チ $\cos 15\theta-\cos 3\theta=0$, $\therefore\ \cos 15\theta=\cos 3\theta=\cos\{2n\pi\pm 3\theta\}$

$\therefore\ 15\theta=2n\pi\pm 3\theta$ $\therefore\ \theta=\frac{n\pi}{6}$ 答或 $\theta=\frac{n\pi}{9}$.

6. (a) $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$. 答 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. (商船)

(b) $\sin^2 x+\cos 2x=\cos x$. 答 $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi$. (海機)

(c) $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$. (海兵)

(d) $\cos 2A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos A+\sqrt{\frac{3}{2}}-1$. (高等)

答 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

〔解〕 考へ方 此種ノ題ハ一未知函數ノ項ニ變ズベシ.

(c) 元方程式ハ $2\sin^2\theta+(2\sin\theta\cos\theta)^2=2$,

卽チ $2\sin^2\theta+4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=2$, 之ヲ整理スレバ

$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1=0$ 卽 $(2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)=0$,

$\therefore\ \sin^2\theta=\frac{1}{2}$....................(1) 或ハ $\sin^2\theta=1$....................(2)

(1) ヨリ $\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 之ニ適スル最小角ハ $\pm 45°=\pm\frac{\pi}{4}$ ナルユヱ

$\theta=n\pi+(-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$ 卽チ $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

又 (2) ヨリ $\sin\theta=\pm 1$, 之ニ適スル最小角ハ $\pm 90°=\pm\frac{\pi}{2}$ ナルユヱ

$\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$ 卽チ $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$.

7. (a) $\sin A-\operatorname{cosec} A+15=0$. 答 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (東商)

(b) $6\cot^2\theta-4\cos^2\theta=1$. 答 $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$.

(c) $\tan\theta+\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$. 答 $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. (海兵)

(d) $3\tan^2 x-\sec^2 x=1$. 答 $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. (農實)

〔略解〕 前題ト同樣ノ考ヘヲ要ス, 卽チ

(a) ハ $\sin$ ノ二次, (b) ハ $\cot^2\theta=\sec^2\theta-1$ トシ $\cos$ ノ準二次,

(c) ハ括弧ヲ展開シテ $\tan$ ノ二次, (d) モ $\tan$ ノ二次トス.

8. (a) $3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta.$ 答 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$ (盛農)

(b) $\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta=2\sqrt{2}.$ 答 $n\pi-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}.$

(c) $\tan 2\theta+\cot\theta=8\cos^2\theta.$

〔解〕 考ヘ方 此種ノ題ハ先ヅ $\sin$, $\cos$ ノ項ニ變ズベシ.

(d) 元方程式ヨリ $\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-8\cos^2\theta=0,$

卽 $\frac{\cos(2\theta-\theta)}{\cos 2\theta.\cos\theta}-8\cos^2\theta=0$ 卽 $\frac{\cos\theta(1-8\cos 2\theta.\sin\theta.\cos\theta)}{\cos 2\theta.\sin\theta}=0$

卽 $\frac{\cos\theta(1-2\sin 4\theta)}{\cos 2\theta.\sin\theta}=0.$ 之レガ成立スル爲メニハ分母ハ0ナラズシテ分子ハ0ナリ, 仍テ $\cos\theta(1-2\sin 4\theta)=0.$

$\therefore\ \cos\theta=0$..............(1) 或ハ $\sin 4\theta=\frac{1}{2}$..............(2)

(1) ニ適スル最小正角ハ $90^\circ=\frac{\pi}{2},\quad \therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$

(2) ニ適スル最小正角ハ $30^\circ=\frac{\pi}{6},\quad \therefore\ \theta=\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}.$

9. (a) $\sin 3\theta=8\sin^3\theta.$ 答 $n\pi$ 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$

(b) $\cos 3\theta+8\cos^3\theta=0.$ (東商)

(c) $\tan x+\tan 2x=\tan 3x.$ (七高)

〔解〕 考ヘ方 此種ノ題ハ先ヅ倍角ヲ單角トス.

(b) 元方程式ハ $4\cos^3\theta-3\cos\theta+8\cos^3\theta=0$

卽チ $12\cos^3\theta-3\cos\theta=0,$ 故ニ $\cos\theta(4\cos^2\theta-1)=0,$

$\therefore\ \cos\theta=0$..............(1) 或ハ $\cos^2\theta=\frac{1}{4}$..............(2)

(1) ニ適スル最小正角ハ $90^\circ=\frac{\pi}{2},\quad \therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}.$

(2) ヨリ $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$, 之ニ適スル最小正角ハ $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ 及ビ $120^\circ=\frac{2}{3}\pi,$

$\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi.$

(c) 今 $\tan 3x=\tan(x+2x)=\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x.\tan 2x},$

故ニ 元方程式ハ $\tan x+\tan 2x=\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x.\tan 2x},$

$\therefore\ \tan x+\tan 2x=0$..............(1) 或 $1=\frac{1}{1-\tan x.\tan 2x}$..............(2)

此 (1) ヨリ $\tan 2x=-\tan x=\tan(-x)\quad \therefore\ 2x=n\pi+(-x),\quad \therefore\ x=\frac{n\pi}{3}.$

又 (2) ヨリ $\tan x.\tan 2x=0,\quad \therefore\ \tan x=0$ 或ハ $\tan 2x=0,$

$\therefore\ x=n\pi$ 或ハ $x=\frac{n\pi}{2}.$

別解. 二倍角, 三倍角ノ公式ニ依ル. 此解ハ稍々複雜ナリ.

10. $\sin 5\theta=16\sin^5\theta.$ 答 $n\pi$ 或 $n\pi\pm\frac{\pi}{6}.$ (高等)

〔略解〕 44 頁 20 題ノ如クニ左邊ヲ展開スレバ

$$5\sin\theta-20\sin^3\theta+16\sin^5\theta=16\sin^5\theta$$

卽チ $5\sin\theta-20\sin^3\theta=0,$ 以下前諸題ニ倣フ.

11. $\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}+\frac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}=\frac{10}{3}.$ 答 $n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$

〔略解〕 視察ニヨリ $\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}=3$ 或 $\frac{1}{3}.$ 之レヲ解ク.

12. (a) $2\sin(A+30^\circ)=\cos A$ ヨリ A ノ値ヲ求メヨ. (商船)

(b) $\cos(x-\alpha)=m.\sin x-n.\cos x$ ヨリ $\tan x$ ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) $2(\sin A.\cos 30^\circ+\cos A.\sin 30^\circ)=\cos A$

卽チ $2\sqrt{3}.\sin A+\cos A=\cos A$ 卽チ $2\sqrt{3}.\sin A=0,$

$\therefore\ \sin A=0$, 之ニ適スル最小正角ハ 0° ナルニヨ

$A=n.180^\circ+(-1)^n 0^\circ$ 卽チ $n.180^\circ.$

(b) $\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha=m.\sin x-n.\cos x,$ 轉項シテ

$(\cos\alpha+n)\cos x=(m-\sin\alpha)\sin x,\quad \therefore\ \tan x=\frac{m-\sin\alpha}{n+\cos\alpha}.$

4. 餘函數方程式

〔第一〕 餘函數ノ項ノミナルトキハ同名函數ニ直ス.

〔第二〕 (1) 餘函數ト已知數トヲ含ムトキハ餘函數ノ項ヲ $\cos$ (或ハ $\sin$) ノ和差角ニ誘導ス.

(2) 平方ニ依ル. 但シ必ズ檢メシヲ行フ.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) $\sin 3\theta=\cos 2\theta$. （海經） (b) $\tan p\theta=\cot q\theta$. ヲ解ケ.

〔解〕 (a) $\sin 3\theta=\cos 2\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$

故ニ $3\theta=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$,

$\therefore\ 3\theta+(-1)^n 2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$,

故ニ n ガ奇數ナレバ $\theta=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

又 n ガ偶數ナレバ $\theta=\frac{1}{5}\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(2n+1)\frac{\pi}{10}$.

別解. $\cos 2\theta=\sin 3\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)$ トシテ解ク.

(b) 答 $(2n+1)\pi/2(p+q)$.

2. $\sin 3\theta+\cos 3\theta=\sin\theta+\cos\theta$. 答 $n\pi$ 或 $(2n+1)\frac{\pi}{8}$. （高等）

〔解〕 轉項シテ $\sin 3\theta-\sin\theta=\cos\theta-\cos 3\theta$ トシ,

之レヲ積形ニ變ズレバ $2\cos 2\theta\sin\theta=2\sin 2\theta\sin\theta$,

$\therefore\ \sin\theta=0$ 或ハ $\cos 2\theta=\sin 2\theta$, 以下前題ニ倣フ.

3. $1+\sin^2\theta=3\sin\theta.\cos\theta$ ヨリ $\tan\theta$ ヲ求メヨ. （千醫）

〔解〕 元方程式ハ $(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin^2\theta=3\sin\theta.\cos\theta$

轉項シテ $2\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)+\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)=0$

卽チ $(\sin\theta-\cos\theta)(2\sin\theta-\cos\theta)=0$. 然ルニ題意ヨリ $\cos\theta\neq 0$,

故ニ $(\tan\theta-1)(2\tan\theta-1)=0$, $\therefore\ \tan\theta=1$ 或ハ $\frac{1}{2}$.

次ノ 5 乃至 7 題ノ方程式ヲ解ケ,

5. (a) $\sqrt{3}.\cos\theta-\sin\theta+1=0$. 答 $2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

(b) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 答 $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{12}$. （高等）

(c) $\cos\theta=\sqrt{3}(1-\sin\theta)$. 答 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi+\frac{\pi}{6}$.

〔解〕 元方程式ヨリ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=-\frac{1}{2}$ ……………………(A)

卽 $\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ 卽 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,

之レニ適スル最小正角ハ $120^\circ=\frac{2}{3}\pi$ ナルユエ

$\theta+\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $\therefore\ \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$.

或ハ (A) ヲ $\sin$ ノ差角トシテ解クモ可ナリ.

〔別解〕 轉項シテ平方ス卽チ $3.\cos^2\theta=(\sin\theta-1)^2$, 之レヲ $\sin$ ノ二次方程式トシテ解キ檢メシヲ行フ.

注意. 上ノ平方式ハ元方程式 $\sqrt{3}.\cos\theta=\sin\theta-1$ ノ外ニ方程式 $-\sqrt{3}.\cos\theta=\sin\theta-1$ ノ解ヲモ含ムコトヲ見ル.

6. $\cos 2\theta=\cos\theta+\sin\theta$. 答 $n\pi-\frac{\pi}{4}$ 或 $2n\pi$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

〔略解〕 $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta+\sin\theta$ トスレバ

$\cos\theta+\sin\theta=0$ 或ハ $\cos\theta-\sin\theta=1$, 之レヲ解ク.

7. (a) $\cot\theta-\tan\theta=\sec\theta-\mathrm{cosec}\,\theta$. （陸士, 商船）

(b) $\tan\theta+\sec\theta=2$ ヨリ $\sin\theta$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 考ヘ方 斯ル異名函數ハ先ヅ $\sin$, $\cos$ ニ變ズ.

(a) ハ 6 題ト同形トナルユエ之ニ倣フ.

答 $n\pi+\frac{\pi}{4}$ 或 $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

(b) ハ 5 題ト同形トナルユエ $\sin$ ノ二次方程式トシテ解キ, 元方程式ニ附テ檢メシヲ行フ. 答 $\frac{3}{5}$.

5. 制限附キ方程式

三角方程式ノ解卽チ所要ノ角ハ之レニ制限ヲ附セラル、コトアリ, 此場合ニハ前ノ如ク解キ其制限ニ適セシムルヲ要ス.

問題及ビ解答

1. (a) $5\sin x = \cos 2x + 2$ ニ適スル x ノ最小正値ヲ求メヨ. (大工)

(b) $\sqrt{3}.\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ ヲ滿足スル最小正角如何. (北農)

〔解〕 (a) 元方程式ハ $5\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2$, 之レヲ整理スレバ

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$, 卽チ $(2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$,

$\therefore\ \sin x = \dfrac{1}{2}$ ……………(1) 或ハ $\sin x = -3$ ……………(2)

此 (1) ニ適スル最小正角ハ 30° ナリ, 故ニ x ノ最小値ハ 30° ナリ.

次ニ sin ノ最大絶對値ハ ±1 ナルニヨ (2) ハ不能ナリ.

(b) 前頁ノ 5 題 (a) ト全ク同法ニ依ル, 卽チ

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos x + \dfrac{1}{2}.\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 卽チ $\cos 30°.\cos x + \sin 30°.\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

卽チ $\cos(x - 30°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 之ニ適スル最小正角ハ 45° ナリ,

$\therefore\ x - 30° = 45°$, $\therefore$ 所要ノ x ハ 75° ナリ.

2. (a) $\sin(A - 40°) = \sin(A + 80°)$ ナルトキ A ヲ求メヨ, 但シ A ハ正鋭角ナリトス. (海機)

(b) 次式ニ適スベキ 90° 以内ノ角ヲ求メヨ,

$$\frac{\cot(90° - A).\operatorname{cosec}^2(180° - A).\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A.\sin^2(270° + A)} = 2.$$ (海兵)

(c) 0° ト 90° トノ間ニ於テ次式ニ適スル θ ノ値ヲ求メヨ,

$\tan 3\theta = 2 - \sqrt{3}$, 但シ $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$. 　答 5°, 65°.

〔解〕 (a) 轉項シテ $\sin(A - 40°) - \sin(A + 80°) = 0$

卽チ $2\cos(A + 20°)\sin(-60°) = 0$ 〔∵ A, B 式〕

卽チ $-2\cos(A + 20°)\sin 60° = 0$ 卽チ $-\sqrt{3}.\cos(A + 20°) = 0$

$\therefore\ \cos(A + 20°) = 0$, 之ニ適スル最小正角ハ 90° ナルヲ以テ $A + 20° = 90°$,

仍テ $A = 70°$

(b) 略解 24 頁 4 題ノ如クシテ最簡ニセバ $\dfrac{1}{\sin A} = 2$,

$\therefore\ \sin A = \dfrac{1}{2}$, 之ニ適スル 90° 以内ノ角ハ 30° ナリ.

3. 0° ト 180° トノ間ニ於テ次ノ方程式ニ適スル θ, A 及ビ x ノ値ヲ求メヨ,

(a) $\sin 2\theta = 0$. (陸士) (b) $2\cos^3\theta = \cos\theta$. (海機)

(c) $\cos 2A + \cos A = 0$. (海機) (d) $\sin 2x - \cos x = 0$. (陸士)

(e) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$. (f) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$. (海兵)

(g) $2\sin\theta.\sin 3\theta = 1$. (陸士) (h) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$. (專檢)

〔略解〕 (a) 一倍角ニス. (b) $\cos\theta = 0$, $2\cos^2\theta = 1$ ヲ解ク. (c) 積形ニス.

(d) 同名函數ニシ積形ニス. (e) sin ノ項ニス. (f) $\sin^2 x$ ノ準二次トス

(h) 133 頁 5 題ニ倣ヒ積形ニス.

(g) 元方程式ハ $2\sin\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) = 1$

卽 $8\sin^4\theta - 6\sin^2\theta + 1 = 0$ 卽 $(2\sin^2\theta - 1)(4\sin^2\theta - 1) = 0$,

$\therefore\ \sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……………(1) 或 $\sin\theta = \pm\dfrac{1}{2}$ ……………(2)

(1) ニ適スル最小角ハ ±45° ナルニヨ $\theta = n.180° \pm 45°$,

之ニ $n = 0, 1$ ト置キ $\theta = 45°$, 135°.

(2) ニ適スル最小角ハ ±30° ナルニヨ $\theta = n.180° \pm 30°$.

之ニ $n = 0, 1$ ト置キ $\theta = 30°$, 150°.

而シテ n ニ其他ノ値ヲ與フレバ所要ノ範圍ニ適セズ.

答 (a) 90°. (b) $2n.180° \pm 90°$ 或 $2n.180° \pm 45°$ 或 $2n.180° \pm 135°$.

(c) 60°, 90°. (d), (e), (f) ハ皆 30°, 90°, 150°. (h) 45°, 120°, 135°.

4. (a) $\cos 3A-\cos 5A=\sin A$ ニ適スル角ノ中ニテ $90°$ 及ビ $-90°$ ノ間ニアルモノヲ求メヨ. （陸士）

(b) $0°$ ト $360°$ トノ間ニ於テ $\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ニ適スル角ヲ求メヨ.

答 $30°, 60°, 210°, 240°$.

(c) $790°$ ト $880°$ トノ間ニ於テ $\tan 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ニ適スル θ ノ値ヲ求メヨ.

答 $840°$. （海機）

〔解〕 (a) 元方程式ヨリ $-2\sin 4A\sin(-A)=\sin A$ 〔$\because$ S, D 式〕

即チ $\sin A(2\sin 4A-1)=0$ $\therefore$ $\sin A=0$ 或ハ $\sin 4A=\dfrac{1}{2}$.

$\sin A=0$ ニ適スル所要ノ範圍內ノ角ハ $0°$ ノミナリ,

又 $\sin 4A=\dfrac{1}{2}$ ニ適スル最小角ハ $30°$ ナルユヱ,

$4A=n.180°+(-1)^n 30°$ $\therefore$ $A=n.45°+(-1)^n 7°.5$.

茲ニ於テ $n=0, 1$ トスレバ $A=7°.5,\ 37°.5$ ヲ得.

$n=-1, -2$ トスレバ $A=-52°.5,\ -82°.5$ ヲ得.

而シテ n ニ其他ノ値ヲ與フレバ A ハ所要ノ範圍ヲ脫ス.

答 $7°.5, 37°.5, -52°.5, -82°.5$.

5. $3\operatorname{cosec}^2\theta-\cot\theta+2=0$ ニ適スル正鋭角ヲ求メヨ, 但シ

$\log\tan 30°57'=\bar{1}.77791$, $\log\tan 30°58'=\bar{1}.77820$,

$\log 6=0.77815$. （専檢）

〔解〕 元方程式ハ $3(1+\cot^2\theta)-8\cot\theta+2=0$, 之レヲ整理スレバ

$3\cot^2\theta-8\cot\theta+5=0$, 即チ $(3\cot\theta-5)(\cot\theta-1)=0$,

$\therefore$ $3\cot\theta=5$......................(1) 或ハ $\cot\theta=1$......................(2)

此 (2) ニ適スル最小正角ハ $45°$ ナリ.

又 (1) ヨリ $\tan\theta=\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{10}$, 之ヲ對數ニ取レバ

$\log\tan\theta=\log 6-\log 10=0.77815-1=\bar{1}.77815$

而シテ $\bar{1}.77815-\bar{1}.77791:\bar{1}.77820-\bar{1}.77791=60'':x$

$\therefore$ $x=42''.8$. $\therefore$ $\theta=30°57'42''.8$.

6. 聯立三角方程式

聯立三角方程式ノ解法ハ聯立代數方程式ノ解法ニ準ズ.

〔代數學 66 乃至 68 頁及ビ 116 頁乃至 126 頁參考〕

問題及ビ解答

1. (a) $x+y=90°$, $\sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ解ケ. （東工）

(b) $x+y=\dfrac{\pi}{3}$, $\sin x+\sin y=1$ ヲ解ケ.

(c) $x+y=150°$, $\tan x+\tan y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ヲ解ケ. （東工）

〔解〕 (a) 第一ヨリ $y=90°-x$ $\therefore$ $\cos y=\cos(90°-x)=\sin x$,

之ヲ第二ニ代用スレバ $2\sin x=2\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ トナル, $\therefore$ $\sin x=\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(b) 答 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$, $y=-2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$.

(c) $x+y=150°$......................(1) $\tan x+\tan y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$......................(2)

(1) ヨリ $\tan(x+y)=150°$ 即チ $\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

之ニ (2) ヲ代用シテ最簡ニセバ $\tan x.\tan y=-1$..............................(3)

$(2)^2-(3)\times 4$ ヲ平方ニ開ケバ $\tan x-\tan y=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$..............................(4)

(2) ト (4) ヨリ $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan y=-\sqrt{3}$; 或 $\tan x=-\sqrt{3}$, $\tan y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

此 x, y ニ適スル最小正角ハ $30°, 120°$ 或ハ $120°, 30°$ ナリ,

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l} x=n.180°+30° \\ y=n.180°+120° \end{array}\right\}$ 或ハ $\left.\begin{array}{l} x=n.180°+120° \\ y=n.180°+30° \end{array}\right\}$

2. (a) $2\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{3}$, $2\cos(\theta-\varphi)=\sqrt{3}$ ヲ解ケ. （農實）

(b) $\sin(2x-y)=\dfrac{1}{2}=\cos(x+2y)$ ヲ解ケ. （商船）

(c) $\sin(x-y)=\dfrac{1}{2}$, $\cos(x+y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

〔解〕 (a) $\sin(\theta+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\theta-\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ニ夫々適スル最小正角ハ

$60^\circ=\frac{\pi}{3}$ 及ビ $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ ナリ.

$\therefore\ \theta+\varphi=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$ 及ビ $\theta-\varphi=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\left\{3n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}\right\}$, $\varphi=\frac{1}{2}\left\{-n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\mp\frac{\pi}{6}\right\}$.

答 (b) $x=\frac{1}{5}\left\{4n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}\right\}$, $y=\frac{1}{3}\left\{5n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\pm\frac{2}{3}\pi\right\}$.

(c) $x=\frac{1}{2}\left\{(2m+n)\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}\right\}$,

$y=\frac{1}{2}\left\{(2m-n)\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}\right\}$.

3. $a\cos^2x+b\sin^2x=p\cos^2y$, $a\sin^2x+b\cos^2x=q\sin^2y$ ヨリ $\sin x$, $\cos y$ ヲ求メヨ. (東師)

〔解〕 相加フレバ $a(\cos^2x+\sin^2x)+b(\sin^2x+\cos^2x)=p\cos^2y+q\sin^2y$

即チ $a+b=p(1-\sin^2y)+q\sin^2y=p+(q-p)\sin^2y$,

$\therefore\ \sin y=\sqrt{\frac{a+b-p}{q-p}}$. 從テ第二ヨリ $\sin x=\sqrt{\frac{aq+bp-pq}{(a-b)(q-p)}}$.

4. $p.\sin\mathrm{A}+q$ ニ於テ A ヲ 90° 及ビ 630° トスレバ夫々 1 及ビ 0 トナル, 今此式ノ値ヲ $\frac{1}{2}$ トナサンニハ A ヲ幾度トナスベキカ. (大工)

〔解〕 題意ニヨリ $p.\sin 90^\circ+q=0$ 及ビ $p.\sin 630^\circ+q=0$.

然ルニ $\sin 90^\circ=1$, $\sin 630^\circ=\sin\{2.2.180^\circ+(-90^\circ)\}=\sin(-90^\circ)=-1$.

故ニ $p+q=1$..............(1) 及ビ $-p+q=0$..............(2)

此 (2) ヨリ $p=q$, 之ヲ (1) ニ代用スレバ $p=q=\frac{1}{2}$.

故ニ $p.\sin\mathrm{A}+q=\frac{1}{2}$ ハ $\frac{1}{2}\sin\mathrm{A}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 即チ $\sin\mathrm{A}=0$,

之レニ適スル最小正角ハ 0° ナリ,

$\therefore\ \mathrm{A}=n.180^\circ+(-1)^n0^\circ=n.180^\circ$.

5. 方程式 $x+y=90^\circ$, $\sin(3x-y)=\frac{1}{2}$ ニ適スル 180° 以内ノ x, y ノ値ヲ求メヨ. (大工)

〔解〕 第一式ヨリ $y=90^\circ-x$, 之ヲ第二式ニ代用セバ

$\sin(4x-90^\circ)=\frac{1}{2}$, 之ニ適スル最小正角ハ 30° ナリ,

$\therefore\ 4x-90^\circ=n.180^\circ+(-1)^n30^\circ$ $\therefore\ x=n.45^\circ+(-1)^n7^\circ.5$.

之ニ $n=0, 1, 2, 3$ ト置ケバ $x=7^\circ.5, 37^\circ.5, 97^\circ.5, 127^\circ.5$,

從テ 第一式ヨリ $y=82^\circ.5, 52^\circ.5$.

而シテ n ニ其他ノ値ヲ與フレバ題意ニ適セザルナリ.

6. $\sin\theta+\cos\varphi=1$..............(1) $\cos\theta-\sin\varphi=1$..............(2)

〔解〕 (2) ヨリ $\cos\theta=1+\sin\varphi$, 之レヲ (1) ニ代用スレバ

$\pm\sqrt{1-(1+\sin\varphi)^2}+\cos\varphi=1$ 即チ $\pm\sqrt{1-(1+\sin\varphi)^2}=1-\cos\varphi$,

兩邊ヲ平方シ且ツ最簡ニセバ $\cos\varphi-\sin\varphi=1$,

故ニ $\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 即 $\cos\frac{\pi}{4}.\cos\varphi-\sin\frac{\pi}{4}.\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

即 $\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 之ニ適スル最小正角ハ $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ ナリ,

$\therefore\ \varphi+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $\therefore\ \varphi=2n\pi$ 或ハ $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

サテ $\varphi=2n\pi$ ナルトキハ (1), (2) ヨリ $\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$ ヲ得,

之レヲ解キ $\theta=m\pi$ 及ビ $\theta=2m\pi$ ヲ得.

$\therefore$ (1), (2) ニ適スベキ θ ハ $m\pi$ ヨリモ狹意ノ $2m\pi$ ナリ.

又 $\varphi=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ ヲ (1), (2) ニ代用セバ $\sin\theta=1$, $\cos\theta=0$ ヲ得,

之レヲ解キ $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2}$

及ビ $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4n\pm1)\frac{\pi}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ (1), (2) ニ適スベキ θ ハ $n\pi+\frac{\pi}{2}$ ヨリモ狹意ノ $2m\pi+\frac{\pi}{2}$ ナリ.

答 $\theta=2m\pi$, $\varphi=2n\pi$; 或ハ $\theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}$, $\varphi=2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

第 二 章

消 去 法

7. 消去法 (或ハ逐ヒ出シ) トハ所設ノ一組ノ三角方程式ヨリ其中ニ含マレタル一ツ或ハ一ツ以上ノ角ヲ取リ去リタル一式ヲ求ムルコトヲ云フ.

8. 解法 消去法ニハ一定ノ解法ナク,或ハ平方シ,或ハ邊々相乘シ,或ハ代用シ,或ハ加減スルト同時ニ已知ノ公式ヲ巧ミニ利用スルヲ要ス. 又聯立代數方程式ノ解法ニ準ジ,或ハ等置法,或ハ根ト係數トノ關係ヲ利用シテ解キ得ルコトアリ.

消去法ニ於テハ同一ノ題チ三様ニ問フコトアリ, 例ヘバ

(1) $x.\cos\theta=a,\quad y.\cot\theta=b$ ヨリ θ チ消去セヨ.

(2) $x.\cos\theta=a,\quad y.\cot\theta=b$ ナルトキハ $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ナルコトチ證セ.

(3) $x.\cos\theta=a,\quad y.\cot\theta=b$ ナルトキハ a, b, x, y ノ關係如何.

〔解〕 (1) 第一,第二ヨリ $\sin\theta=\dfrac{x}{a},\quad \tan\theta=\dfrac{y}{b}$ チ得,

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta-\tan^2\theta=1 \quad \text{卽チ} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(2) $b^2x^2-a^2y^2=(bx+ay)(bx-ay)$

$$=(xy.\cot\theta+xy.\cot\theta)(xy.\cot\theta-xy.\cos\theta)$$

$$=x^2y^2(\cot^2\theta-\cos^2\theta)=x^2y^2\cos^2\theta(\operatorname{cosec}^2\theta-1)$$

$$=x^2y^2.\cos^2\theta.\cot^2\theta=(x\cos\theta)^2(y\cot\theta)^2=a^2b^2.$$

(3) 此解法ハ (1) ト同様ナリ.

注意. (1), (3) ノ如キハ如何ナル結果チ得ルカノ考チ要スルモ,

(2) ノ如キハ其結果チ知ルユヱ演算ハ稍々面倒ナルモ考ヘチ要スルコト無キチ以テ概シテ容易ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) $\sin A=a,\quad \tan A=b$ ナラバ $(1-a^2)(1+b^2)=1$ ナリ.

(b) $\tan A+\sin A=m,\quad \tan A-\sin A=n$ ナルトキハ次式ノ證如何.

$$(m^2-n^2)^2=16mn. \qquad \text{(陸士)}$$

〔解〕 (a) $(1-a^2)(1+b^2)=(1-\sin^2A)(1+\tan^2A)=\cos^2A.\sec^2A=1.$

(b) $(m^2-n^2)^2=(m+n)^2(m-n)^2=(2\tan A)^2(2\sin A)^2$

$$=16\tan^2A.\sin^2A=16\tan^2A(1-\cos^2A)=16(\tan^2A-\sin^2A)$$

$$=16(\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)=16mn.$$

2. (a) $x=a.\tan^2\alpha,\quad y=2a.\cot\alpha$ ヨリ α ヲ逐ヒ出セ.

(b) $\sin\alpha=m.\sin\beta,\quad \tan\alpha=n.\tan\beta$ ヨリ β ヲ消去セヨ. (商船)

(c) $x=a.\cos^3\theta,\quad y=b.\sin^3\theta$ ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 (a) 第二ヨリ $\tan\alpha=\dfrac{2a}{y}$, 此平方チ第二ニ代用セバ

$$x=a.\times\left(\frac{2a}{y}\right)^2 \qquad \therefore\ xy^2=4a^3.$$

(b) 元二式ヨリ $\operatorname{cosec}\beta=m.\operatorname{cosec}\alpha$ ....(1) $\cot\beta=n.\cot\alpha$ .... (2)

(1) ヨリ $\operatorname{cosec}^2\beta=m^2.\operatorname{cosec}^2\alpha$ 卽チ $1+\cot^2\beta=m^2(1+\cot^2\alpha)$

之ニ (2) ノ平方チ代用セバ $1+n^2.\cot^2\alpha=m^2+m^2\cot^2\alpha,$

$$\therefore\ (m^2-n^2)\cot^2\alpha=1-m^2.$$

(c) 第一,第二ヨリ $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos\theta,\quad \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin\theta.$

之チ邊々平方シテ加フレバ $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

卽チ $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

3. $\sin\theta+\cos\theta=m,\quad \sin2\theta=n$ ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ. (陸士)

〔解〕 第二ヨリ $1+n=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2,$

之ニ第一チ代用スレバ $1+n=m^2.$

4. $x=sec\theta-cos\theta,\quad y=cosec\theta-sin\theta$　ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 第一式ヲ cos ニ變ジテ整理セバ　$cos^2\theta+x\cos\theta-1=0,$

$$\therefore\ cos\theta=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+4}}{2},\qquad \text{同樣ニ}\quad sin\theta=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}.$$

此二式ヲ邊々平方シテ相加フレバ

$$1=\frac{x^2+2\mp x\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{y^2+2\mp\sqrt{y^2+4}}{2}$$

之ヲ最簡ニセバ　$x^2y^2(x^2+y^2+3)=1.$

5. $x=cos\theta+tan\theta,\quad y=sec\theta-cos\theta$　ヨリ θ ヲ消去セヨ.

〔解〕 第一式ヨリ　$x=\dfrac{1}{tan\theta}+tan\theta=\dfrac{1+tan^2\theta}{tan\theta}=\dfrac{sec^2\theta}{tan\theta},$

第二式ヨリ　$y=sec\theta-\dfrac{1}{sec\theta}=\dfrac{sec^2\theta-1}{sec\theta}=\dfrac{tan^2\theta}{sec\theta}.$

故ニ　$x^2y=sec^3\theta$　及ビ　$xy^2=tan^3\theta,$

$\therefore\ (x^2y)^{\frac{2}{3}}-(xy^2)^{\frac{2}{3}}=sec^2\theta-tan^2\theta$　卽　$x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=1.$

6. $\dfrac{x}{a}=cos\theta+cos2\theta,\quad \dfrac{y}{b}=sin\theta+sin2\theta$　ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 元二式ヨリ　$\dfrac{x}{a}=2cos\dfrac{3\theta}{2}$　及ビ　$\dfrac{y}{b}=2sin\dfrac{3\theta}{2}cos\dfrac{\theta}{2},$

之レヲ平方シテ相加フレバ　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=4cos^2\dfrac{\theta}{2}$ ....(A)

而シテ　$\dfrac{x}{a}=2cos\dfrac{3\theta}{2}cos\dfrac{\theta}{2}=2cos\dfrac{\theta}{2}\left(4cos^3\dfrac{\theta}{2}-3cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

$=2cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(4cos^2\dfrac{\theta}{2}-3\right)$

之レニ (A) ヲ代用セバ　$\dfrac{2x}{a}=\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-3\right).$

7. $a=(b+c)cos\phi$　及ビ　$4bc\cos^2\dfrac{A}{2}=(b+c)^2sin^2\phi$　ヨリ ϕ ヲ消去シ $cosA$ ノ値ヲ a,b,c ニテ表ハセ.　（商船）

〔略解〕 第一式ヲ平方シ $sin^2\phi$ ヲ求メ，之ヲ第二式ニ代用シテ　$cos^2\dfrac{A}{2}$　ノ値ヲ求メ，

之ヲ　$cosA=2cos^2\dfrac{A}{2}-1$　ニ代用ス.　　答　$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$

（次ノ 7 乃至 10 題ハ聯立方程式ノ解法ニ準ズ）

7. (a)　$a.cosA+b.sinA=c,\quad b.cosA-a.sinA=d$　ナルトキハ a,b,c,d ノ關係如何.

(b)　$sin\theta+b.cos\theta=c,\quad sin\theta+a.cos\theta=d$　ヨリ θ ヲ逐去セヨ.

答　$(a-b)^2-(c-d)^2=(ac-bd)^2.$　（海機）

(c)　$m.sec\theta=1+tan\theta,\quad n.sec\theta=1-tan\theta$　〃　（陸主）

(d)　$cos\theta+sin\theta=a,\quad cos\theta-sin\theta=b$　〃

(e)　$tan\theta+cos\theta=a,\quad tan\theta-cos\theta=b$　〃　（商船）

〔解〕 考ヘ方　此種ノ題ハ二函數ヲ未知數トスル聯立方程式トシテ解ク.

(a)　$a.cosA+b.sinA=c$ ....(1)　$b.cosA-a.sinA=d$ ....(2)

$(1)\times a+(2)\times b$　卽チ　$(a^2+b^2)cosA=ac+bd$

又　$(1)\times b-(2)\times a$　卽チ　$(b^2+a^2)sinA=bc-ad$

此二式ヲ夫々平方シテ邊々相加フレバ

$$(a^2+b^2)^2(cos^2A+sin^2A)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

卽チ　$(a^2+b^2)^2=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2+d^2,$　之レ所要ノ關係式ナリ.

別解. 邊々平方シテ相加フレバ

$$c^2+d^2=a^2.cos^2A+b^2.sin^2A+2ab.cosA.sinA$$
$$+b^2.cos^2A+a^2.sin^2A-2ab.cosA.sinA$$
$$=a^2(cos^2A+sin^2A)+b^2(sin^2A+cos^2A)=a^2+b^2.$$

(c), (d)　ハ上ノ別解ニ倣フ.　　答　$m^2+n^2=2,\quad a^2+b^2=2.$

(e)　加減セバ　$tan\theta=\dfrac{a+b}{2},\quad cos\theta=\dfrac{a-b}{2}.$

而シテ　$tan^2\theta=sec^2\theta-1=\dfrac{1}{cos^2\theta}-1,$　之ニ上式ヲ代用セバ

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{a-b}\right)^2-1,\qquad \therefore\ \left(\frac{2}{a-b}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1.$$

8. $a.\sin\theta+b.\cos\theta=m,\quad b.\tan\theta-n\sec\theta=a$ ヨリ θ ヲ逐ヒ出スベシ.

（東工）

〔解〕 第二ハ $\dfrac{b.\sin\theta-n}{\cos\theta}=a$ ナルニヨ $\cos\theta\neq 0$,

之レヲ變形シテ $b.\sin\theta-a.\cos\theta=n$ トス.

而シテ第一ハ $a.\sin\theta+b.\cos\theta=m.$

此二式ヲ夫々平方シテ邊々相加フレバ $a^2+b^2=m^2+n^2.$

9. $\sin A+\sin B=a,\quad \cos A+\cos B=b,\quad \cos(A-B)=c$ ヨリ A, B ヲ逐ヒ出セ.

答 $a^2+b^2=2(1+c).$ （大工）

〔解〕 第一, 第二ノ平方ヲ相加ヘ之ニ第三ヲ代用ス, 卽チ

$$a^2+b^2=(\sin A+\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2$$

$$=(\sin^2A+\cos^2A)+(\sin^2B+\cos^2B)+2(\sin A.\sin B+\cos A.\cos B)$$

$$=1+1+2\cos(A-B)=2\{1+\cos(A-B)\}=2(1+c).$$

10. 次ノ三式ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ,

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2,\quad \frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=a^2-b^2 \text{ 及ビ } \theta-\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

〔解〕 (3) ヨリ $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$, 之レヲ (1) ニ代用スレバ

$$\frac{ax}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}-\frac{by}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}=a^2-b^2$$

卽チ $\dfrac{ax}{\sin\varphi}+\dfrac{by}{\cos\varphi}+(a^2-b^2)=0$..............................(4)

又 $\dfrac{ax}{\cos\varphi}-\dfrac{by}{\sin\varphi}-(a^2-b^2)=0$..............................(3)

此 (3), (4) ヲ $\dfrac{1}{\cos\varphi}$, $\dfrac{1}{\sin\varphi}$ ヲ未知數トシテ解クトキハ

$$\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{(a^2-b^2)(by-ax)}{-(b^2y^2+a^2x^2)} \text{ 及ビ } \frac{1}{\sin\varphi}=\frac{(a^2-b^2)(ax+by)}{-(b^2y^2+a^2x^2)}.$$

此逆數ノ平方ノ和ハ $1=\left(\dfrac{a^2x^2+b^2y^2}{a^2-b^2}\right)^2\cdot\dfrac{2(b^2y^2+a^2x^2)}{(b^2y^2-a^2x^2)^2}$,

卽チ $\{(a^2-b^2)(a^2x^2-b^2y^2)\}^2=2(a^2x^2+b^2y^2)^3.$

（次ノ 11 乃至 14 題ハ代用又ハ等値法ニ依ル）

11. $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\phi}{2},\quad \cos\alpha=\cos\beta\cos\phi=\cos\gamma\cos\theta$ ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 $\sin^2\alpha=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cdot 2\sin^2\dfrac{\phi}{2}=(1-\cos\theta)(1-\cos\phi).$

然ルニ第二ヨリ $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ 及ビ $\cos\phi=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

此二式ヲ上式ニ代用セバ $\sin^2\alpha=\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$,

分母ヲ拂ヒ最簡ニセバ $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$

12. (a) $a.\tan^2x+b.\tan x+c=0,\quad a'.\tan^2x+b'.\tan x+c'=0$ ヨリ θ ヲ消去セヨ.

(b) $\tan(\alpha+\phi)=m,\quad \tan(\alpha-\phi)=n$ ヨリ ϕ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 (a) $\tan^2x$, $\tan x$ ヲ未知數トシテ解クトキハ

$$\tan^2x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \text{ 及ビ } \tan x=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore\ \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\tan^2x=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2$$

此 分母ヲ去レバ $(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ca'-c'a)^2.$

(b) 第一ヨリ $\dfrac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha.\tan\phi}=m,\quad \therefore\ \tan\phi=\dfrac{m-\tan\alpha}{1+m.\tan\alpha}.$

第二ヨリ $\dfrac{\tan\alpha-\tan\phi}{1+\tan\alpha.\tan\phi}=n,\quad \therefore\ \tan\phi=\dfrac{\tan\alpha-n}{1+n.\tan\alpha}.$

$\therefore\ \dfrac{m-\tan\alpha}{1+m.\tan\alpha}=\tan\phi=\dfrac{\tan\alpha-n}{1+n.\tan\alpha}$, 此分母ヲ拂ヒ變形シテ

$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{m+n}{1-mn}$ 卽チ $\tan 2\alpha=\dfrac{m+n}{1-mn}.$

別解. $\dfrac{\tan(\alpha+\phi)+\tan(\alpha-\phi)}{1-\tan(\alpha+\phi)\tan(\alpha-\phi)}=\tan\{(\alpha+\phi)+(\alpha-\phi)\}=\tan 2\alpha$,

之レニ元二式ヲ代用スレバ $\dfrac{m+n}{1-mn}=\tan 2\alpha$

13. 比例式 $x:y:z=\sin(\theta+\phi):\sin(\theta-\phi):\sin 2\theta$ 及ビ 方程式 $b^2(x^2-y^2)\cos\theta=a^2z^2.\cos\phi$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ.

〔解〕 比例式ヨリ $\dfrac{x^2}{\sin^2(\theta+\phi)}=\dfrac{y^2}{\sin^2(\theta-\phi)}=\dfrac{z^2}{\sin^2 2\theta}$

$=\dfrac{x^2-y^2}{\sin 2\theta.\sin 2\phi}$〔∵ 減比ノ理及ビ公式 (10)〕

∴ $\dfrac{x^2-y^2}{z^2}=\dfrac{\sin 2\phi}{\sin 2\theta}$. 又方程式ヨリ $\dfrac{x^2-y^2}{z^2}=\dfrac{a^2.\cos\phi}{b^2.\cos\theta}$.

∴ $\dfrac{a^2.\cos\phi}{b^2.\cos\theta}=\dfrac{\sin 2\phi}{\sin 2\theta}$, ∴ $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{\sin\phi}{\sin\theta}$.

14. $a.\sin^2\theta+b.\cos^2\theta=m$, $b.\sin^2\phi+a.\cos^2\phi=n$ 及ビ $a.\tan\theta=b.\tan\phi$ ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 考ヘ方 本題ノ如キハ第一, 第二式チ $\tan$ ノ項ニ變ジ得レバ第三式ニ依テ成功スベシ.

然ルニ第一式ヨリ $a.\sin^2\theta+b.\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

卽チ $(a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta$ ∴ $\tan^2\theta=\dfrac{m-b}{a-m}$.

又 第二式ヨリ之レト同様ニ $\tan^2\phi=\dfrac{n-a}{b-n}$.

此二式チ第三式ノ平方ニ代用セバ $\dfrac{a^2(m-b)}{a-m}=\dfrac{b^2(n-a)}{b-n}$,

分母チ拂ヘバ $a^2(bm-b^2-mn+bn)=b^2(an-a^2-mn+am)$,

故ニ $mab(a-b)+nab(a-b)=mn(a^2-b^2)$,

∴ $(m+n)ab=mn(a+b)$ 或ハ $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

〔別解〕 $\sin^2\theta=\sin^2\theta\times\dfrac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ ナルユヱ,

第一式ハ $\dfrac{a.\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{b}{1+\tan^2\theta}=m$, ∴ $\tan^2\theta=\dfrac{m-b}{a-m}$.

同様ニ 第二式ヨリ $\tan^2\phi=\dfrac{n-a}{b-n}$.

以下ハ全ク前ト同様ナリ.

(次ノ 15 乃至 16 題ハ根ト係數トノ關係ニ依ル)

15. 次ノ三式ヨリ θ, ϕ ヲ逐ヒ出セ,

$a.\cos\theta+b.\sin\theta=c$, $a.\cos\phi+b.\sin\phi=c$ 及ビ $\tan\theta.\tan\phi=m$.

〔解〕 今方程式 $a.\cos\alpha+b.\sin\alpha=c$..........................(A)

(A) ヨリ $(a.\cos\alpha)^2=(c-b.\sin\alpha)^2$, 之チ $\sin\alpha$ ノ項ニ變ズレバ

$(a^2+b^2)\sin^2\alpha-2bc.\sin\alpha+c^2-a^2=0$,

此方程式ノ二根ハ $\sin\theta$ 及ビ $\sin\phi$ ナリ,

∴ 根ト係數ノ關係ニヨリ $\sin\theta.\sin\phi=\dfrac{c^2-a^2}{a^2+b^2}$..........................(1)

又 (A) ヨリ上ト同様ニ $\cos\theta.\cos\phi=\dfrac{c^2-b^2}{a^2+b^2}$..........................(2)

此 (1), (2) チ第二式ニ代用スレバ $\dfrac{c^2-a^2}{c^2-b^2}=m$.

16 次ノ三式ヨリ θ, ϕ ヲ消去セヨ,

$x.\cos\theta+y.\sin\theta=x\cos\phi+y.\sin\phi=2a$, $2\sin\dfrac{\theta}{2}.\sin\dfrac{\phi}{2}=1$.

〔解〕 今方程式 $x.\cos\alpha+y.\sin\alpha=2a$ ノ二根ハ第一, 第二ニヨリテ θ 及ビ ϕ ナルチ知ル. 而シテ此方程式ヨリ

$y^2.\sin^2\alpha=(2a-x.\cos\alpha)^2=4a^2-4ax.\cos\alpha+x^2.\cos^2\alpha$

卽チ $(x^2+y^2)\cos^2\alpha-4ax.\cos\alpha+4a^2-y^2=0$.

此方程式ノ二根ハ $\cos\theta$ 及ビ $\cos\phi$ ナリ,

∴ 根ト係數トノ關係ニヨリテ

$\cos\theta+\cos\phi=\dfrac{4ax}{x^2+y^2}$ 及ビ $\cos\theta.\cos\phi=\dfrac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}$.

然ルニ第三ヨリ $1=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}.\sin^2\dfrac{\phi}{2}=(1-\cos\theta)(1+\cos\phi)$

卽チ $\cos\theta+\cos\phi=\cos\theta.\cos\phi$.

∴ $\dfrac{4ax}{x^2+y^2}=\dfrac{4a^2-y^2}{x^2+y^2}$ ∴ $y^2=4a(a-x)$.

17. $\dfrac{\cos^3\theta}{\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\sin^3\theta}{\sin(\alpha-3\theta)}=m$ ヨリ θ ヲ逐ヒ出セ.

〔解〕 考ヘ方 本題ノ如キハ熟練ニ依ル.

$$\frac{\sin\theta.\cos^3\theta}{\sin\theta.\cos(\alpha-3\theta)}=\frac{\cos\theta.\sin^3\theta}{\cos\theta.\sin(\alpha-3\theta)}=m,$$

$\therefore\ m=\dfrac{\sin\theta.\cos\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin(\alpha-2\theta)}$〔$\because$ 加比ノ理〕$=\dfrac{\sin2\theta}{2\sin(\alpha-2\theta)}$,

故ニ $\dfrac{1}{2m}=\sin\alpha.\cot2\theta-\cot\alpha$, $\therefore\ \cot2\theta=\left(\dfrac{1}{2m}+\cos\alpha\right)\operatorname{cosec}\alpha$ ……………(1)

又 $\dfrac{\cos^4\theta}{\cos\theta.\cos(\alpha-3\theta)}=\dfrac{\sin^4\theta}{\sin\theta.\sin(\alpha-3\theta)}=m$,

$\therefore\ m=\dfrac{\cos^4\theta-\sin^4\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}$〔$\because$ 減比ノ理〕$=\dfrac{\cos2\theta}{\cos(\alpha-2\theta)}$,

故ニ $\dfrac{1}{m}=\cos\alpha+\sin\alpha.\tan2\theta$, $\therefore\ \tan2\theta=\left(\dfrac{1}{m}-\cos\alpha\right)\operatorname{cosec}\alpha$ ……………(2)

(1), (2) ヲ相乘セバ $\left(\dfrac{1}{2m}+\cos\alpha\right)\left(\dfrac{1}{m}-\cos\alpha\right)=\sin^2\alpha$

之レヲ最簡ニセバ $2m^2=1+m.\cos\alpha$.

―{平面三角法ノ部終}―

大正五年三月十一日印刷
大正五年三月十五日發行

正價金五拾錢

著者 原濱吉 東京市牛込區南榎町五十七番地
發行者 金刺源次 東京市神田區今川小路一丁目五番地
印刷者 赤羽正己 東京市芝區南佐久間町一丁目一番地
關東大賣捌 東京堂書店 東京市神田區表神保町二番地
關西大賣捌 三宅書店 大阪市東區南本町四丁目
印刷所 東洋印刷株式會社 東京市芝區愛宕町三丁目二番地

發行所 東京市神田區今川小路一丁目五番地（電話本局七六六番） 金刺芳流堂 振替貯金口座東京（八四二四）

糸左近先生著	改版增補 生理學講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓	小包料八錢
東京農科大學講師 文學士 村上辰午郎先生著	改訂增補 實踐倫理講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓	小包料拾貳錢
文學士 北澤定吉先生著	論理學講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓	小包料拾貳錢
東京農科大學講師 文學士 村上辰午郎先生著	教育學講義	菊判上製 全一冊	正價七拾五錢	小包料八錢
學習院教授 理學士 吉田好九郎先生著	算術講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓七拾錢	小包料拾貳錢
同	改訂增補 代數學講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓八拾錢	小包料拾貳錢
同	平面三角法講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓貳拾錢	小包料拾貳錢
原濱吉先生著	平面幾何學講義	四六上製 全一冊	正價壹圓貳拾錢	小包料八錢
綠川幸則先生著	訂正 漢文講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓八拾錢	小包料拾貳錢
東京農科大學教授 理學博士 石川千代松先生著	動物學講義	菊判背皮 全三冊	上卷 貳圓八拾錢	小包料拾貳錢
農學士 河南休男先生著	改訂增補 植物學講義	菊判上製 全一冊	正價壹圓五拾錢	小包料拾貳錢
今井芳麻呂先生著	實用 用器畫法講義	菊判上製 全一冊	正價八拾五錢	小包料八錢

地方大賣捌所

京都市二條通リ河原町	寳文館
同市寺町通リ二條	若林書店
名古屋市本町三丁目	川瀬書店
同市玉屋町一丁目	百架堂書店
同市同町三丁目	永東書店
神戸市元町通リ五丁目	寳文館支店
廣島市鹽屋町	積善館
同市東横町	友田書店
福岡市博多中島町	積善館支店
久留米市米屋町	菊竹書店
熊本市新二丁目	長崎次郎
佐賀市呉服町	大坪書店
鹿兒島市東千石町	久永金光堂
同市中町後寬堀町	谷村書店
德島市西新町五丁目	黒崎書店
高知市種崎町	澤本書店
高松市丸龜町	宮脇書店
松山市港町	土肥書店
同市同町	向井書店
大連市大山通リ	大阪屋號
朝鮮京城本町	日韓書房
同京城本町	大阪屋號
金澤市片町	宇都宮書店
福井市佐佳枝中町	品川書店
同市佐佳枝上町	中六書店
富山市東四十物町	中田書店
同市西三番町	福田書店
高岡市守山町	學海堂書店
長野市大門町	西澤書店
松本市本町壹丁目	松榮堂書店
新潟市古町通リ六	萬松堂支店
長岡市表三ノ町	覺張書店
同市表四ノ町	目黒書店
仙台市大町四丁目	金港堂支店
同市大町五丁目	鈴英書店
盛岡市呉服町	佐々木書店
青森市米町四丁目	今泉支店
弘前市土手町	今泉本店
秋田市茶町菊之町	成見書店
山形市七日町	五十嵐書店
前橋市曲輪町	煥乎堂書店
甲府市柳町	柳正堂書店
函館區末廣町	魁文舍書店
札幌區南一條西三丁目	富貴堂書店

謹告

世に普通學全書或は叢書或は問答なる書甚だ多しと雖も何れも簡單に過ぎ或は龍頭蛇尾に陷り或は總て一人の手になり或は陳腐に屬するなど殆ど言ふに足らず、弊堂玆に慨する所あり各專門家の知名實地敎育者に懇篤なる執筆を請ひ逐次發行し其內容豐富講說の平易明快而も周匝懇切にして普通學の參考書として適切なる事他の類書に比し世旣に高評あり、讀者諸君よ速に是等の各書に據りて一意硏鑽せられん事を。

東京神田今川小路
金刺芳流堂
振替東京八四二番
電話本局七六六番

第六高等學校教授 理學士 田中三四郎先生著　改訂增補 **物理學講義**　菊判上製 全一冊　正價 壹圓五拾錢　小包料 拾貳錢

陸軍教授 理學士 池田清先生著　改版增補 **化學講義**　菊判上製 全一冊　正價 壹圓八拾錢　小包料 拾貳錢

早稻田大學講師 文學士 本多淺治郎先生著　改版增補 **日本歷史講義**　菊判上製 全二冊　上卷 壹圓七拾錢　下卷 壹圓八拾錢　小包料 各拾貳錢

學習院教授 文學士 河野元三先生著　改版增補 **東洋歷史講義**　菊判上製 全二冊　上卷 壹圓五拾錢　下卷 貳圓五拾錢　送料 上十二錢 下十六錢

慶應大學講師 文學士 阿部秀助先生著　**日本地理講義**　菊判上製 全二冊　上卷 壹圓七拾錢　下卷 壹圓八拾錢　小包料 各拾貳錢

文學士 池田夏苗先生著　**外國地理講義**　菊判上製 全一冊　正價 壹圓八拾五錢　小包料 拾貳錢

理學士 石川成章先生著　**地文學講義**　菊判上製 全二冊　正價 各壹圓六拾錢　小包料 各拾貳錢

終