萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

代數學一次方程式

林鶴一 高野泰藏著
崔朝慶譯

商務印書館發行

代數學
一次方程式

林鶴一　高野泰藏著
崔朝慶譯

算學小叢書

王雲五主編

林鶴一　高野泰藏著
崔朝慶譯

發行兼印刷者　上海寶山路
商務印書館

發行所　上海及各埠
商務印書館

中華民國十八年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

EQUATION OF THE FIRST DEGREE

By
HAYASHI and TAKANO
Translated by
TSUI CHAO CHING

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929

序

本書所記述者,爲代數學一次方程式,因方程式爲代數學求未知數之津筏,數學科之基礎也;而一次方程式,乃方程式之第一階級,故習代數學者,必先了解一次式之解法,循序漸進,自能達於高遠之域;此篇依本叢書之方針,但求見於今時中等學校教科書之方法,包括無遺,不載高深之法理,如求聯立方程式之根之簡便法,認爲肄業及畢業於中等學校習代數者必要之事項,故揭載於後篇之中,至文字方程式之根之研究,尤關重要,而其理較深,惟就本書豫定範圍,示研究之標準.

本書分前後二篇:以數字爲係數之一次方程式各種解法,及應用問題之解法,載於前篇;以文字爲係數之一次方程式各種解法,及根之研究,載於後篇;前後篇各例題之後,每附有類題,雖微嫌繁複,然演題既多,則變化有左右逢原之妙,此著者之經驗也;練習計算,練習心思,爲習數學一定不易之法,初學

者須不憚勞煩，順類題之次序，一一詳解，不宜忽略，余於文字方程式，論述較中等學校教科書爲詳，自信堪爲畢業生補習之用；但文字之數增多，則研究之條件，愈益紛繁，如三元以上之聯立方程式之根，關係殊爲複雜，非僅具中等程度之人所能剖析，故本書之終結，至二元聯立一次方程式之解法及根之研究而止；如欲擴充知識，方程式之專書，倘有林鶴一先生之鴻著焉。

大正八年五月廿五日　　高野泰藏識

前篇　數字方程式

後篇 文字方程式

代數學　一次方程式

前篇　數字方程式

第　一　章

恆等式與方程式

1.　等式.

二式相等,以等號＝表之,謂之等式.

例

$$7+13=20\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{3x+4}{3}=2x+\frac{3}{5}\ \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

上之(1),(2),(3)三式,皆爲等式.

2.　等式之兩邊.

在等號＝左之式,謂之左邊,在右之式,謂之右邊.

例　$3a+b=2a+5b$.　其 $3a+b$ 爲左邊. $2a+5b$ 爲右邊.

3.　等式之性質.

(一)　等式之兩邊,以同數(或相等之數)加之或減之,仍爲等式.

例　設 $a=b$.　兩邊各加 x,或各減 x,得 $a+x=b+x$, $a-x=b-x$. 其 x 之值無論爲何數,與所設之式加減而得之二式,仍爲等式.

又　設$a=b$,　$c=d$.　以第二式之兩邊，分加於第一式之兩邊，或從第一式之兩邊，各減第二式之兩邊，得 $a+c=b+d$, $a-c=b-d$.仍爲等式。

由此性質，能將等式中任意之項，變其符號，從某邊移於他邊。

例　$5+3=2+6$...(1) 此等式之兩邊各減6.則$5+3-6=2+6-6$.卽$5+3-6=2$........(2)觀此結果，知在等式某邊之某項移於他邊，惟須改變其項之符號而已。

又　$a+b=c-d$........(1)此兩邊各加d.則$a+b+d=c-d+d$.卽$a+b+d=c$......(2)　以(1)式之$-d$變爲$+d$.從右邊移於左邊，卽成(2)式，更於(2)式之兩邊各減b.則$a+b+d-b=c-b$.卽$a+d=c-b$...(3)以(2)式之$+b$變爲$-b$.從左邊移於右邊，卽成(3)式。

注意　凡變某項之符號，從一邊移於他邊，謂之移項。

例 1.　試以$(a+b)(a-b)+c=a^2-b^2$移項化爲簡單之式。

先解原式左邊之括弧，則$a^2-b^2+c=a^2-b^2$ 次將右邊之二項全移於左邊，則$a^2-b^2+c-a^2+b^2=0$.卽$c=0$.

例 2.　設$3a+2b=2a+3b$.問a與b之關係如何。

先以含a之項移於左邊，又以含b之項移於右邊，則$3a-2a=3b-2b$ 故$a=b$.卽所求之關係也。

例 3.　求化 $15x+7=7x+18$ 爲簡單之式。

移項則 $15x-7x=18-7$. 故 $8x=11$.

例 4.　設$(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$.問此等式有無錯誤。

解左邊之括弧。則 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=2a^3+6ab^2$.　移項得　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-2a^3-6ab^2=0$.左邊各同類項抵消，則$0=0$，知所設之式不誤。

類題

1.　設 $73+42=52+62$. 取右邊之62移於左邊，而後計算以判定等式有無錯誤。

2. 設$(a+b)(2a-b)=0$.先解左邊之括弧,再移b^2於右邊.

3. 設$a+2b=2(b-2)$. 求 a 之值.

4. 設 $5x-7=4x+3$.求 x 之值.

5. 有等式$(a+6)(2a+3)=2a^2+15a+4$.解左邊之括弧,盡移右邊之各項於左邊,判別其等式有無錯誤.

答 1. $73+42-62=53$. 等式不誤.

2. $2a^2+ab=b^2$.　　3. $a=-4$.　　4. $x=10$.

5. $2a^2+15a+18-2a^2-15a-4=0$.卽 $18-4=0$. 知等式有誤.

(二)　等式之兩邊,以同數(或相等之數)乘之或除之,仍爲等式.

例　設 $a=b$. 兩邊以x乘之或除之,則$ax=bx$, $\frac{a}{x}=\frac{b}{x}$. 其 x 之值無論爲何數,與所設之式乘除所得之式,仍爲等式.(惟 x 之值爲 0 或 ∞. 以之乘除不等式之兩邊,亦爲等式.)

又　設 $a=b$, $c=d$.以第一式之兩邊,各乘第二式之兩邊,或以第二式之兩邊,各除第一式之兩邊,得 $ac=bd$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. 仍爲等式.

由此性質,能變化等式爲最單簡之等式.

例 1.　設$\frac{a+b}{5}=\frac{c}{7}$. 兩邊同以 5×7 乘之.則$7(a+b)=5c$.

注意　以適宜之數乘等式之兩邊,抵消其分母,謂之去分母.

例 2.　設 $a\neq b$. 欲化 $(a+b)^2(a-b)=a^3-b^3$ 爲簡單之式.

以 $a-b$ 除等式之兩邊,則$(a+b)^2=a^2+ab+b^2$. 卽 $a^2+2ab+b^2=a^2+ab+b^2$. 移項則 $a^2+2ab+b^2-a^2-ab-b^2=0$. 卽 $ab=0$. 由此知 a 與 b 之值,必有一爲 0.

例 3.　設 $-5x+2y+8=x-3y-5$............(1)

求證 $5x-2y-8=-x+3y+5$.

(1)式之兩邊,同以-1乘之,則$-(-5x+2y+8)=-(x-3y-5)$.

解兩邊之括弧，卽得 $5x-2y-8=-x+3y+5$.

注意　以 -1 乘等式之兩邊，卽全變其等式各項之符號。

例 4.　設 $a\neq b$. 欲化 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2}$ 爲簡單之式。

以 a^2-b^2 乘等式之兩邊而去其分母，則 $(a+b)^2=ab$. 卽 $a^2+2ab+b^2=ab$. 移項得 $a^2+2ab+b^2-ab=0$. 卽 $a^2+ab+b^2=0$. 若 $a=b$. 原式兩邊之分母皆爲 0. 以 0 除任何數皆爲 ∞. 則原式卽 $\infty=\infty$.（惟以 0 除 0. 其値無定，不能成等式。）

例 5.　求化 $\frac{3}{5}(2x+5)=\frac{3}{4}(3x+2)$ 爲簡單之式。

以 3 除等式之兩邊，得 $\frac{1}{5}(2x+5)=\frac{1}{4}(3x+2)$。又以 5×4 乘此等式之兩邊，得 $4(2x+5)=5(3x+2)$。解此等式之括弧，則 $8x+20=15x+10$. 移項得 $8x+20-15x-10=0$. 卽 $-7x+10=0$. 變其符號，則 $7x-10=0$. 又移項得 $7x=10$.

例 6.　求化 $\frac{2x-7}{3}+2x=3-\frac{x-3}{5}$ 爲簡單之式。

以 3×5 乘等式之兩邊，去其分母，則 $5(2x-7)+3\times5\times2x=3\times3\times5-3(x-3)$。卽 $10x-35+30x=45-3x+9$. 移項得 $10x-35+30x-45+3x-9=0$. 卽 $43x-89=0$. 又移項得 $43x=89$.

類題

1. 設 $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$. 問此等式有無錯誤。
2. 設 $0.35+0.24x=3.2y$. 求化各項之小數爲整數。
3. 去 $\frac{2}{3}(x-5)=\frac{x+3}{5}$ 之分母并解其括弧，化爲簡單之形。
4. 去 $\frac{4}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$ 之分母，化爲簡單之等式。
5. 化 $3a^2x+a^3=a^4$ 爲簡單之式。
6. 去 $\frac{(x-1)(x-2)}{3}=\frac{(2x-1)x}{6}$ 之分母并解其括弧，化爲簡單

之形。

7. 化$\frac{1}{3}-(x+3)(x+2)=x^2+2$ 爲簡單之式。

8. 去 $0.3+\frac{x-7}{5}=\frac{7}{2}-\frac{3x-7}{10}$之分母，化爲簡單之等式。

9. 去 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{c-a}$之各分母，化爲整式。

答 1. 等式不誤。　2. 兩邊同以 100 乘之，即化爲整數。

3. $7x=59.$　4. $5x=92.$　5. $3x+a=a^2.$

6. $5x=4.$　7. $2x=5.$　8. $5x=53.$

9. $a^2-b^2+c^2+ab-3ac+bc=0.$

---

4. 等式之種類。

等式有恆等式與方程式二種。

(一) 恆等式。 等式兩邊之形狀不同，任以何數代其式之文字，恆能成等式者，謂之恆等式。

例 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 此等式之兩邊，形狀不同，其實爲同一之式，卽恆等式也，

注意 此類之恆等式，以任何數值代式中之文字兩邊之數值，恆相等。

例 設 $a=0$, $b=0$.則$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. 卽 $0=0$.

又 設 $a=0$, $b=1$.代入前式，卽 $1^2=1^2$.

又 設 $a=1$, $b=2$. 代入前式，卽 $(1+2)^2=1^2+2\times1\times2+2^2$ 卽 $3^2=1+4+4$. 卽 $9=9$. 知無論以何數代 a 與 b. 恆爲等式。

恆等式之例

乘法之公式。

$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2.$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3.$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc.$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$

上之各等式，皆恆等式也。

(二) 方程式。

等式中之文字，非以特別之值代之，兩邊不能相等者，謂之方程式。

例 設 $x+3=15$. 任意以 1 代其 x. 則 $1+3=15$. 不合於理，卽知非恆等式。惟以 12 代其 x.則 $15=15$.故 12 爲 x 之特別之值。

凡等式限定以特別之値代其文字，兩邊始能相等者，卽爲方程式。

5. 未知數與既知數及方程式之根。

凡方程式中之文字，須以特別之值代之，始能成等式，其文字謂之未知數，至於文字之值，或爲問題中所已言者，或能改易他數者，其文字謂之既知數，而未知數之特別之值，謂之方程式之根。

注意 既知數有時以數字表之，或以羅馬文字次序在前之 a, b, c, d 等文字表之，而未知數常以次序在後之 x, y, z, u, v 等文字表之。

6. 方程式之種類。

方程式之各項，全移於等號 = 之左邊，令等號 = 之右邊爲0. 其左邊之各項，有同類項，依符號加減爲一項，就如是之結果而類別之如次。

(一) 無未知數在分母之方程式，謂之整方程式。

(二) 有未知數在分母之方程式，謂之分數方程式。

此外尙有無理方程式指數方程式等各種方程式之名，不在本書範圍之內，無須說明。

例 設 $4x+6=2x+3$......(1) 化爲簡單之式，即$2x+3=0$......(2) 此方程式無 x 在分母之分數形之項，卽整方程式也。

又 設$3x+\dfrac{3}{x-2}=3-2x$......(1) 化爲簡單，卽 $5x+\dfrac{3}{x-2}-3=0$ ......(2) 此十程式，有 x 在分母之分數形之項，卽分數方程式也。

7. 方程式之元及方程式之次數。

(一) 方程式從式中所含未知數之數區別如次。

（1） 含一未知數之方程式，謂之一元方程式。

（2） 含二未知數之方程式，謂之二元方程式。

依此類推，凡含幾未知數之方程式，即爲幾元方程式。

注意 二元以上之方程式，總名爲多元方程式。

例1. 次之各方程式，一一區別之。

$3x+2y=7$ ………此爲二元方程式。

$2x^2+x+8=0$ ……此爲一元方程式。

$3x+5xyz=3$ ……此爲三元方程式。

$2x+\dfrac{1}{y}=5$ ……此爲二元方程式。

（二） 全移整方程式之各項於一邊，以A表其各項，則 $A=0$. 視A爲幾次式即稱爲幾次方程式。

例2. 次之各方程式，一一區別之。

$3x+4=0$……………此爲一元一次方程式。

$2x+3y+5=0$………此爲二元一次方程式。

$3x+2y+z-3=0$ …此爲三元一次方程式。

$2x^2+3x+4=0$ ……此爲一元二次方程式。

$3x^2+5xy+1=0$ ……此爲二元二次方程式。

$4xy+2z^2+3=0$ ……此爲三元二次方程式。

依此例區別方程式爲幾元幾次方程式甚易。

注意1. 設 $(x+3)(x+4)=x^2+5$. 此方程式未化爲簡單之時，則爲一元二次方程式，至化爲簡單之後，其x^2 已消滅，實爲一元一次方程式也。

注意2. 分數方程式，不言次數。

例 如$\dfrac{2x+1}{3x+5}=0$. 雖可化爲一元一次方程式，因分數方程式不能合於第7節之（二），故不言次數，其理由說明於他篇。

第二章

一元一次方程式（其一）

8. 一元一次方程式解法.

例題 1. 求 $3x+7=22$ 之根.

解 移左邊之7於右邊,則 $3x=22-7$. 卽 $3x=15$ 此兩邊同以 3 除之，則 $\frac{3x}{3}=\frac{15}{3}$ 卽 $x=5$. 答

注意 求方程式之根,或稱爲解方程式.

又以求得之根,代入原方程式,驗等式之正確與否,謂之驗算.

驗算 解例題 1 得 $x=5$.以 5 代入題式左邊則 $3x+7=3\times5+7=22$.與題式右邊之數相同.

由上之驗算結果，知正確不誤,則 $x=5$ 爲恰合原方程式,(或謂之滿足原方程式.)

又解方程式,卽求能與之恰合(卽滿足)之根也.

例題 2. 解 $3(x-2)+5=2(x-3)+11$.

解 先撤去兩邊之括弧,則 $3x-6+5=2x-6+11$.又以右邊含 x 之項移於左邊,以左邊之既知數移於右邊，得 $3x-2x=-6+11+6-5$, 卽 $x=6$. 答

驗算 以 6 代題式左邊及右邊之 x,分爲二式如次.

$$3(x-2)+5=3(6-2)+5=17.$$

$$2(x-3)+11=2(6-3)+11=17.$$

故 $x=6$.滿足原方程式.

例題 3. 解 $5(x-2)+13=2(x+5)-7(x+1)$.

解 先撤去兩邊之括弧,則 $5x-10+13=2x+10-7x-7$. 移右邊未知數之項於左邊，移左邊既知數之項於右邊,得 $5x-2x+7x=10-7+10-13$. 卽 $10x=0$. 此兩邊同以10除之,則$x=\frac{0}{10}=0$. 答

驗算 先以0代入原方程式之左邊,又以 0 代入原方程式之右邊,得

$$5(x-2)+3=5(0-2)+13=3.$$

$$2(x+5)-7(x+1)=2(0+5)-7(0+1)=3.$$

故 $x=0$. 滿足原方程式。

注意 去方程式之括弧，以含未知數之項移於左邊，以既知數之項移於右邊，謂之依法變化方程式。

例題 3 依法變化之結果，右邊爲 0.其左邊非 0.而根爲 0 也。

類題 解次之方程式

1. $8x=2x+12.$
2. $3x+5=17.$
3. $8x-15=25.$
4. $8x-5=5x+13.$
5. $3x-7=x+19.$
6. $10x+9=3x+16.$
7. $3x+23=78-2x.$
8. $3x+4=5(x-2).$
9. $5(x-7)+87=9x.$
10. $72(x-5)=63(5-x).$
11. $15(x+3)+7=3(2x+1)+58.$
12. $32(x+3)-11(2x+5)=5(3x+1)+21.$
13. $27(x-4)+182(x-5)=27.$
14. $23(5x-19)-12(3x-11)=3x-1.$
15. $63(x+7)-5(3x+63)=32(x+4)-2.$

答	1. 2.	2. 4.	3. 5.	4. 6.	5. 13.
	6. 1.	7. 11.	8. 7.	9. 13.	10. 5.
	11. 1.	12. 3.	13. 5.	14. 4.	15. 0.

例題 4. 解 $5x-69=21x+11.$

解 依法變化原方程式，得 $5x-21x=69+11$. 卽 $-16x=80$,變兩邊之符號，則 $16x=-80$. 兩邊同以 16 除之，得 $x=(-80)\div16=-5$. 答

驗算 先以 -5 代入原方程式之左邊，又以 -5 代入原方程式之右邊。得

$$5x-69=5(-5)-69=-94.$$

$$21x+11=21(-5)+11=-94.$$

故 $x=-5$.滿足原方程式。

例題 5. 解 $7x-\{3x-7(2x-8)\}=2x-64$.

解 依法變化。得 $7x-3x+14x-2x=56-64$. 卽 $16x=-8$. 兩邊同以 16 除之，則 $x=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}$。答

驗算 以 x 之值 $-\frac{1}{2}$ 代入原方程式。

$$\text{左邊}=7\left(-\frac{1}{2}\right)-\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right)-7\left(-\frac{1}{2}\times2-8\right)\right\}$$

$$=-\frac{7}{2}-\left(-\frac{3}{2}+63\right)=-65.$$

$$\text{右邊}=2\left(-\frac{1}{2}\right)-64=-65.$$

故 $x=-\frac{1}{2}$。滿足原方程式。

類題　解次之方程式

1. $5x+7=x-1$.
2. $7(x+5)=3x+23$.
3. $6x+(5x+7)=9x-3$.
4. $3(x+1)+5(x-100)=20x-497$.
5. $75(x+5)+9(x+4)=75$.
6. $7x+5=2(x+3)+6x+2$
7. $8x+89=116-10x$.
8. $6(x+2)+7(x+3)=8(x+4)+9(x+5)$.
9. $2(3x+5)+3(4x+7)=5(2x+2)+10(x+3)$.
10. $3x+\{2+(5x+7)\}=3(x-2)$.
11. $3(x+2)-\{2x+3(2x-5)\}=7(x+5)$.

答 1. -2.　2. -3.　3. -5.　4. 0.
5. -4.　6. -3.　7. $\frac{3}{2}$.　8. -11.

9. $-\frac{9}{2}$.　　10. -3.　　11. $-\frac{7}{6}$.

例題 6. 解 $2(x-3)(2x+5)=(2x+3)^2-100$.

解 依法變化，得 $4x^2-2x-4x^2-12x=9-109+30$. 即 $-14x=-70$. 兩邊同以 -14 除之，得 $x=\frac{-70}{-14}=5$. 答

驗算 以 x 之值 5 代入原方程式.

左邊 $=2(5-3)(2\times5+5)=4\times15=60$.

右邊 $=(2\times5+3)^2-109=169-109=60$.

故 $x=5$. 滿足原方程式.

例題 7. 解 $x(x-2)(x+2)=(x-1)^3+3x(x-2)$.

解 依法變化. 得 $x^3-4x-x^3+3x^2-3x-3x^2+6x=-1$. 即 $-x=-1$. 變兩邊之符號，得 $x=1$. 答

驗算 以 x 之值 1 代入原方程式.

左邊 $=1\times(1-2)\times(1+2)=-3$.

右邊 $=(1-1)^3+3\times1\times(1-2)=-3$.

故 $x=1$. 滿足原方程式.

例題 8. 解 $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+28x-4$.

解 依法變化，得 $x^3+9x^2+20x-x^3-9x^2-28x=-4-12$. 即 $-8x=-16$. 兩邊同以 -8 除之，得 $x=\frac{-16}{-8}=2$. 答

驗算 以 x 之值 2 代入原方程式.

左邊 $=(2+1)(2+2)(2+6)=3\times4\times8=96$.

右邊 $=2^3+9\times2^2+28\times2-4=8+36+56-4=96$.

故 $x=2$. 滿足原方程式.

類題 解次之方程式

1. $(x+1)(x+2)=(x+2)(x-4)$.

2. $(x-1)(x-4)=2x+(x-2)(x-3)$.

3. $2x^2=(x+2)^2+(x-5)^2$.

4. $(x+1)(x-3)+2=x(x+5)+13$.

5. $(3-x)(6x+1)=2x(4-3x)$.

6. $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x-4)^2$.

7. $(x-5)^2+(x-4)^2=(x-7)^2+(x-8)^2$.

8. $(2x-1)(3x-2)-(x-3)(x+2)=(5x+1)(x-7)$.

9. $(x+1)^2=x\{6-(1-x)\}-2$.

10. $(x+1)^2-(x^2-1)=x(2x+1)-2(x+1)(x+2)+29$.

11. $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=3x(x+1)(x+2)$.

答 1. -2. 2. -1. 3. $\frac{29}{6}$. 4. -2.

5. $-\frac{1}{3}$. 6. $\frac{5}{2}$. 7. 6. 8. $-\frac{15}{28}$.

9. 1. 10. $\frac{25}{9}$. 11. -1.

例題 9. 解 $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}$.

解 以分母之最小公倍數 3×4 乘之，得

$3(x-2)+4=12x-4(2x-1)$，依法變化，則 $3x-12x+8x=4+6-4$.

即 $-x=6$. 又變兩邊之符號，即 $x=-6$. 答

驗算 以 x 之值 -6 代入原方程式

$$左邊=\frac{-6-2}{4}+\frac{1}{3}=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}.$$

$$右邊=-6-\frac{-6\times2-1}{3}=-6+\frac{13}{3}=-\frac{5}{3}.$$

故 $x=-6$. 滿足原方程式.

例題 10. 解 $\frac{1}{2}(27-2x)=\frac{9}{2}-\frac{1}{10}(7x-54)$.

解 以分母之最小公倍數 10 乘兩邊，得

$5(27-2x)=45-(7x-54)$. 依法變化，則 $-10x+7x=45+54-135$.

卽 $-3x=-36$. 兩邊同以 -3 除之，得 $x=\frac{-36}{-3}=12$. 答

驗算 以 x 之值 12 代入原方程式。

$$左邊=\frac{1}{2}(27-2\times12)=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}.$$

$$右邊=\frac{9}{2}-\frac{1}{10}(7\times12-54)=\frac{9}{2}-\frac{1}{10}\times30=\frac{3}{2}.$$

故 $x=12$. 滿足原方程式。

例題 11. 解 $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$.

解 以分母之最小公倍數 35 乘之，得

$7(3x^2-2x-8)=(7x-2)(3x-6)$.

去兩邊之括弧，$21x^2-14x-56=21x^2-48x+12$. 以含未知數之項移於左邊，以既知數之項移於右邊，得 $21x^2-14x-21x^2+48x=12+56$

卽 $34x=68$. 兩邊同以 34 除之，得 $x=\frac{68}{34}=2$. 答

驗算 以 x 之值 2 代入原方程式。

$$左邊=\frac{3\times2^2-2\times2-8}{5}=\frac{12-4-8}{5}=0.$$

$$右邊=\frac{(7\times2-2)(3\times2-6)}{35}=\frac{12\times0}{35}=0.$$

故 $x=2$. 滿足原方程式.

例題 12. 解 $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{3}x-7\right)=\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(\frac{1}{3}x-6\right)$.

解 因 $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{3}x-7\right)=\frac{x+10}{2}\times\frac{x-21}{3}=\frac{x^2-11x-210}{6}$.

$$\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(\frac{1}{3}x-6\right)=\frac{x+8}{2}\times\frac{x-18}{3}=\frac{x^2-10x-144}{6}.$$

故 $\frac{x^2-11x-210}{6}=\frac{x^2-10x-144}{6}$

去分母，$x^2-11x-210=x^2-10x-144$. 移項則

$x^2-11x-x^2+10x=-144+210$. 即 $-x=66$.變其符號,$x=-66$. 答

驗算 以 x 之值 -66 代入原方程式

$$左邊=\left(-66\times\frac{1}{2}+5\right)\left(-66\times\frac{1}{3}-7\right)=-28\times(-29)=812.$$

$$右邊=\left(-66\times\frac{1}{2}+4\right)\left(-66\times\frac{1}{3}-6\right)=-29\times(-28)=812.$$

故 $x=-66$. 滿足原方程式.

類題 解次之方程式.

1. $\frac{x}{3}+\frac{1}{6}-\frac{x}{4}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12}$.

2. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x+1}{2}-x$.

3. $\frac{x-5}{3}+\frac{2x-4}{4}=\frac{5x}{8}-1$.

4. $7x+\frac{1}{3}(31x+2)=\frac{1}{2}(37x+6)$.

5. $\frac{5x+3}{2}+\frac{10x+1}{3}=11x+\frac{4}{5}$.

6. $\frac{x-9}{7}+\frac{x-4}{3}+\frac{5}{21}=0$.

7. $\frac{8x+1}{6}-\frac{3x+1}{2}=\frac{1-x}{3}$.

8. $\frac{3}{4}x+\frac{7}{16}x-\frac{x}{2}-\frac{9x}{16}=\frac{1}{8}$.

9. $\frac{(5x+3)(x+2)}{5}=\frac{(3x-2)(x+1)}{3}$.

10. $\left(\frac{1}{5}x+8\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{5}x+3\right)$.

答 1. 2. 2. $\frac{5}{2}$. 3. 8. 4. -2. 5. $\frac{1}{5}$.

6. 5. 7. 4. 8. 1. 9. $-\frac{14}{17}$. 10. 10.

例題 13. 解 $2.4x-.218=8x-.05.$

解 依法變化.得 $2.4x-8x=.218-.05$. 卽 $-5.6x=.168$. 兩邊同以 -5.6 除之,得 $x=-\dfrac{.168}{5.6}=-.03$. 答

驗算 以 x 之値 $-.03$ 代入原方程式.

左邊 $=2.4\times(-.03)-.218=-.29.$

右邊 $=8\times(-.03)-.05=-.29.$

故 $x=-.03$. 滿足原方程式.

例題 14. 解 $\dfrac{1}{2}x+1.6-.2x=.55x+1.1.$

解 改首項 $\dfrac{1}{2}x$ 爲 $.5x$.依法變化,得 $.5x-.2x-.55x=1.1-1.6.$

卽 $-.25x=-.5$,兩邊同以 $-.25$ 除之,得 $x=-.5\div(-.25)=2$. 答

驗算 以 x 之値 2 代入原方程式.

左邊 $=\dfrac{1}{2}\times2+1.6-.2\times2=1+1.6-.4=2.2.$

右邊 $=.55\times2+1.1=1.1+1.1=2.2.$

故 $x=2$. 滿足原方程式.

例題 15. 解 $x+4.\dot{3}=.\dot{6}x+.5x-.\dot{3}$

解 化小數爲分數,得 $x+4\dfrac{3}{9}=\dfrac{6}{9}x+\dfrac{5}{10}x-\dfrac{3}{9}$......(1)

又化 (1) 式中之帶分數爲假分數,并約諸分數爲簡分數,得

$x+\dfrac{13}{3}=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}$..............................(2)

以分母之最小公倍數 6 乘之,則 $6x+26=4x+3x-2$.移未知數之項於左邊,移既知數之項於右邊,得 $6x-4x-3x=-2-26$.卽 $-x=-28$.變兩邊之符號.得 $x=28$. 答

驗算 以 x 之値 28 代入 (2) 式.

左邊 $=28+\dfrac{13}{3}=\dfrac{97}{3}.$

$$右邊=\frac{2}{3}\times28+\frac{1}{2}\times28-\frac{1}{3}=\frac{56}{3}+14-\frac{1}{3}=\frac{97}{3}.$$

故 $x=28$.滿足原方程式.

類題　解次之方程式.

1. $.5x-2=.25x+2x-1.$　　2. $.5x+.45=3(.03x-6).$

3. $.5x+2.75=5x-42.25.$　　4. $\frac{1}{2}+.3x=\frac{2}{3}x+.02.$

5. $x+\frac{x}{.5}=7-\frac{x}{.2}.$　　6. $.15x-.875x+1.575=.0625.$

7. $.\dot{2}+.\dot{8}x=\frac{1}{3}(x-2).$　　8. $.7\dot{3}+5.\dot{6}x=.7x+.5.$

9. $4.\dot{7}x+3.\dot{5}=2.\dot{3}x-2.9.$

答 1. $-\frac{4}{7}$.　　2. -45.　　3. 10.　　4. $\frac{72}{55}$.　　5. $\frac{7}{8}$.

6. 2.　　7. $-\frac{8}{5}$.　　8. $-\frac{7}{149}$.　　9. $-\frac{581}{220}$.

問題一

解次之方程式

1. $156x+125=75x-44.$
2. $(3x+2)(x-5)=(x-1)^2+2x^2-88.$
3. $(x+10)^2+(x+12)^2=(x+9)^2+(x+11)(x+13).$
4. $\frac{5+3x}{2}-\frac{4x-7}{3}=\frac{16x-27}{21}-\frac{x+3}{5}.$
5. $\frac{x-3}{7}-\frac{x-25}{5}=7-\frac{2+x}{4}.$
6. $\frac{3x-5}{5}-\frac{7x-13}{6}=3-\frac{x+3}{2}.$
7. $1.5x-1.875=.48x+1.185.$
8. $.5x+4.\dot{3}=.\dot{6}x-.\dot{3}.$

9. $\dfrac{x-5}{7}+\dfrac{18-x^2}{6}=3-\dfrac{x^2-x+1}{6}.$

10. $\dfrac{3}{5}\left[\dfrac{2}{3}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{7}x-5\right)+1\right\}+5\right]+\dfrac{4}{5}=-2.$

11. $.375x-1.185=.12x+1.875.$

12. $\left(3x+\dfrac{2}{5}\right)\left(5x+\dfrac{3}{7}\right)=\left(15x-2\right)\left(x+\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{8}{7}$

13. $\dfrac{x}{4}-.1\dot{6}x=.75+.\dot{1}x-\dfrac{7}{18}.$

14. $\dfrac{7x}{15}+\dfrac{3x}{7}-\dfrac{2x}{5}=\dfrac{3x}{4}.$

15. $\dfrac{5x-.4}{.3}+\dfrac{1.3-3x}{2}+\dfrac{8x-1.8}{1.2}=0.$

16. $\left(\dfrac{1}{3}x+5\right)\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)=\left(\dfrac{1}{2}x+7\right)\left(\dfrac{1}{3}x-2\right)+7.$

第三章

應用問題

9. 以式表題意之例.

問題之意,以式表之,爲問題解法之基本,必須熟練.

例題 1. 有米 a 袋,每袋盛米 4 斗,又有 b 袋,每袋盛米 5 斗,問合計有米幾斗.

解 每袋米 4 斗,則 a 袋爲 $4a$ 斗,又每袋米 5 斗,則 b 袋爲 $5b$ 斗,故所求之米數爲 $(4a+5b)$ 斗.

例題 2. 買砂糖用銀 n 圓,只云每斤價銀 m 分,問砂糖之斤數.

解 n 圓之中有幾 m 分,卽爲砂糖幾斤.故以 m 分除 n 圓,卽得砂糖數,由是求得砂糖斤數之式爲 $100n\div m$.

例題 3. 某數之 3 倍加 7,等於 $3x+4$.求某數之值.

解 從 $3x+4$ 減 7,卽某數之 3 倍,又以 3 除之,卽表某數之式,故所求之數爲 $\dfrac{3x+4-7}{3}$,卽 $x-1$.

例題 4. 有二位之整數,以 x 表十位之數字,以 y 表一位之數字,求作表此數之式及表互易數字位置之數(倒轉數)之式.

解 在算術中,並書兩數字,卽表二位之數,而於代數不能用此方法,因 xy 爲 x 與 y 相乘,非表二位之數之意義也,今就算術中表二位數(如以35表三十五)之根源考之,由 $35=30+5=3\times10+5$.推知所求之數得以 $10x+y$ 表之,其倒轉數得以 $10y+x$ 表之.

例題 5. 有連續三偶數及連續三奇數,求以式表之.

解 偶數爲 2 之倍數,而奇數爲 2 之倍數加 1.故以 x 爲任意之整數,而任何偶數得以 $2x$ 表之,任何奇數得以 $2x+1$ 表之,今以 $2x$ 爲連續三偶數中之中央一偶數,則三偶數爲 $2x-2, 2x, 2x+2$.又以 $2x+1$ 爲連續三奇數之中央一奇數,則三奇數爲 $(2x+1)-2, 2x+1, (2x+1)+2$.

注意 若以 x 爲中央之偶數,則連續三偶數可以 $x-2, x, x+2$ 表

之，著者亦不拘定以 $2x$ 表偶數，因以 x 爲整數，而以 $2x$ 爲偶數，有人認爲便利故也。

例題 6. 問 n 點鐘時，鐘表面長針與短針間之分畫數若干。

解 一點鐘時，從長針至短針之分畫數爲 5 分畫，故 n 點鐘時，從長針至短針之分畫數爲 $5n$ 分畫，又從短針至長針(依旋轉之方向)之分畫數爲 $5(12-n)$ 分畫。

例題 7. 厚三币之中空方陣之總人數，以式表之。

解 此方陣之中空處，恰能容一小方陣之人數爲 $(a-6)^2$.此小方陣之人數，加所求之總人數，卽爲每列 a 人之充實方陣之人數，故所求之總人數爲$\{a^2-(a-6)^2\}$人，卽$(12a-36)$人。

類題　以式表次之各題之意

1. 比 x 多 5 之數如何。
2. 某之年齡爲 15 歲,問比此人多 x 歲及少 x 歲之兩人年齡如何。
3. 問加如何之數於 20.則等於x。
4. 設有銀 x 圓，用去 a 圓，問賸若干圓。
5. 問 y 比 x 大若干。
6. 設有銀 x 圓，用去四分之三，問賸餘若干圓。
7. 分 100 爲二部分，其一部分爲 $2x$,問他一部分如何。
8. 矩形相鄰二邊之長，一爲 a 寸，一爲 b 寸，問表其周圍及面積之式如何。
9. 三數之和爲 100. 第一數爲 x, 第二數比第一數多 3. 問第二數及第三數各如何。
10. 每列 x 人，排爲 10 列，尙多 2 人，問總人數如何。
11. 甲有 100 圓，乙有 150 圓,甲以 $5x$ 圓與乙,乙以 $2y$圓與甲，問現在甲乙二人所有之圓數如何。
12. 以 5 除某數之商爲 x,賸餘爲 6.求某數之值.
13. x 之三分之二與5 之和之 5 倍，其式如何。
14. 分 100 爲二部分，其一部分之 3 倍爲 x.問他一部分如何。

15. 二因數之積爲50.其一因數爲x.問他一因數如何.

16. 有連續三整數,其中央之數爲x.求此三數.

17. 甲有銀m圓,從m圓減5圓,2乘之,3除之,復加7圓,爲乙所有之銀數,以式表之.

18. 某人在10年前爲x歲,問在今之15年後爲幾歲.

19. 甲所有之銀之5倍爲a圓,又知甲所有之銀之2倍,等於乙所有之銀之3倍,問乙有銀幾圓.

20. 甲酒3升之價銀a錢,乙酒4升之價銀b錢,今以甲酒2升與乙酒3升混和,問一升之價幾何.

21. 某數之5倍加7.等於x之3倍,問某數如何.

22. 有甲乙二人,同時於一處同向一路進行,一分鐘時,甲行a步,乙行b步,問行30分鐘時,二人之距離幾何.

23. 有正方形之地,每邊之長x步,在界內沿邊掘溝寬3步,問溝之面積幾何.

24. 酒中和以水,其酒與水之比如5:3.求混和液7升中酒與水之量.

25. 有三位之整數,百位之數字爲x,十位之數字爲y,一位之數字爲z,問表此整數之式如何.

26. 甲乙二人,各存銀於銀行,甲之存款爲乙之5倍,知甲以利銀30圓併入存款,共有x圓,問乙之存款如何.

答 1. $x+5$.　2. $15+x$及$15-x$.　3. $x-20$.

4. $x-a$.　5. $y-x$.　6. $\left(1-\frac{3}{4}\right)x$.

7. $100-2x$.　8. $2(a+b)$寸及ab平方寸.

9. $x+3$及$100-(x+x+3)$.　10. $10x+2$.

11. 甲$(100-5x+2y)$圓.　乙$(150+5x-2y)$圓.

12. $5x+6$.　13. $5\left(\frac{2}{3}x+5\right)$.　14. $100-\frac{x}{3}$.

15. $\frac{50}{x}$　　16. $x-1, x, x+1$.　17. $\frac{2}{3}(m-5)+7$.

18. $x+10+15$.　　19. $\frac{a\text{圓}}{5}\times\frac{2}{3}$.

20. $\left(\frac{a\text{錢}}{3}\times 2+\frac{b\text{錢}}{4}\times 3\right)\div(2+3)$.　21. $\frac{3x-7}{5}$.

22. $30(a-b)$步.　　23. $\{x^2-(x-6)^2\}$方步.

24. 7升$\times\frac{5}{5+3}$, 7升$\times\frac{3}{5+3}$.

25. $100x+10y+z$.　　26. $\frac{x-30}{5}$.

10. 應用問題解法之次序

(一) 定未知數.

在通常情形,每定問題中所欲求之數爲未知數,有時遇某種問題,或以他數加減(或以他數乘除)爲未知數,較爲便利,須知定未知數之事爲解題解法之基本,而選擇未知數之巧拙,關係解法之難易,最宜注意.

(二) 立方程式.

以未知數作爲既知數,依題中所言作表問題中某數之式,令等於問題中之某數,卽成方程式.有時須用兩種方法,求得同表一數之式,而形狀不同,以等號=連接之爲方程式.(問題用名數,設單位不同,宜改用同一之單位.)

例 1. 從某數之 2 倍減 5. 等於從其數之 3 倍減 15. 求作方程式.

解 以 x 代某數,則 $2x-5$ 與 $3x-15$ 所表之數爲同一之數,故成立等式爲 $2x-5=3x-15$. 此關係式,卽解此問題所須之方程式.

例 2. 有人從甲地往乙地,乘每點鐘行 3 哩之人力車,行至半路,下車步行,每點鐘祇行 2 哩,共行 21 點鐘,始達乙地,求甲乙間之路程.

解 命所求之路程爲 x 哩，則路之半爲 $\frac{1}{2}x$ 哩，乘車鐘點數爲 $\frac{\frac{1}{2}x}{3}$，步行鐘點數爲 $\frac{\frac{1}{2}x}{2}$，此人共行之鐘點數爲 $\frac{\frac{1}{2}x}{3}+\frac{\frac{1}{2}x}{2}$.

由此成立次之等式，即 $\frac{\frac{1}{2}x}{3}+\frac{\frac{1}{2}x}{2}=21$. 此關係式，爲解此問題所須之方程式。

注意 定此問題之未知數，雖當以全路爲 x 哩，然以全路爲 $2x$ 哩較爲利便。

若以全路爲 $2x$ 哩，則方程式爲 $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=21$. 此方程式比前之方程式爲簡。

(三) 解方程式.

解方程式祇書演算必要之式，計算以不複雜爲限。

(四) 驗算答之恰合與否.

方程式之根，不盡與問題恰合，往往有與問題不恰合之結果。

例題

A. 某中學校之生徒總數 325 人，二學年之生徒數，比他學年之生徒總數三分之一少 22 人，求二學年之生徒數.

B. 甲乙二人共有銀 325 圓，乙所有之銀，比甲所有之銀之三分之一少 22 圓；求乙所有之銀數.

以上 A,B 二問題之方程式，同爲 $x+22=\frac{1}{3}(325-x)$. 解此方程式，得 $x=64.75$. 此根 64.75 不合於問題 A.（問題 A 之答，須爲正整數，）而合於問題 B，因乙之所有銀爲 64 圓 7 角 5 分，不得謂之不合理也。

如上之方程式，表問題中未知數與既知數之關係，並無舛誤，而未知數之限制，由於事實上之某條件，非方程式所能具備，雖方程式有

包括性，然不能使問題中本不合理之未知數，變爲合理之數，故驗算方程式之根，若恰合於方程式而不合於題，則設題不合理，非運算者之咎也。

11. 應用問題解法模範.

例題 1. 從某數之 5 倍減 27. 等於從原數減 5 之較之 4 倍，求此數。

解 命所求之數爲 x. 則從此數之 5 倍減 27. 以 $5x-27$ 表之，又從此數減 5 之較之 4 倍，以 $4(x-5)$ 表之，立方程式 $5x-27=4(x-5)$. 解右邊之括弧，則 $5x-27=4x-20$. 移項，得 $5x-4x=27-20$. 卽 $x=7$.

答 7.

驗算 此問題中之未知數，無事實上之條件爲限制，故適宜以方程式之根爲問題之答.

例題 2. 某數與 1 之和之四分之一，比從原數減 1 之較之三分之二多 3. 求此數.

解 命所求之數爲 x. 則此數與 1 之和之 $\frac{1}{4}$. 以 $\frac{x+1}{4}$ 表之，又從此數減 1 之較之 $\frac{2}{3}$ 加 3. 以 $\frac{2}{3}(x-1)+3$ 表之，故得方程式爲 $\frac{x+1}{4}=\frac{2}{3}(x-1)+3$. 去分母，得 $3x+3=8(x-1)+36$. 解右邊之括弧，則 $3x+3=8x-8+36$. 移項得 $3x-8x=-8+36-3$. 卽 $-5x=25$. 以 -5 除兩邊，得 $x=-5$. 答 -5.

驗算 此問題中之未知數，無何種限制，故適宜以方程式之根 -5 爲答.

例題 3. 分 150 爲二數，其一數之 5 倍，比他數之 3 倍多 190. 求二數.

解 以 x 代一數則他一數爲 $150-x$. 依題意 $5x$ 與 $3(150-x)+190$ 所表之數爲相同之數，故得方程式爲 $5x=3(150-x)+190$. 去括弧，移項，則 $5x+3x=450+190$. 卽 $8x=640$. 兩邊同以 8 除之，得

$x=80$. 答二數一爲80,一爲70.

驗算 80之5倍爲$80\times5=400$.又70之3倍加190爲$70\times3+190=400$.故求得之二數,恰合題意.

類題

1. 有某數,其3倍與4之和,等於從原數之4倍減7之較,求某數.

2. 從6減某數,等於從某數之2倍減6.求此數.

3. 甲乙二數和爲120.知甲數之3倍,等於乙數之6倍,求甲乙二數.

4. 某數之2倍與15之和,等於原數與35之和,求此數.

5. 從某數之3倍減12之較,等於原數之$\frac{1}{5}$與58之和,求此數.

6. 某數之10倍與9之和,等於原數之3倍與16之和,求此數.

7. 某數之$\frac{4}{3}$倍與24之和.等於原數之2倍與6之和,求此數.

8. 兩數之和爲127.其一數之3倍,比他一數之4倍少39.問兩數各幾何.

9. 某數之6倍加1之和與從3減原數之較之積,等於原數之2倍與從原數之3倍減4之較之積,求原數.

答 1. 11.	2. 4.	3. 甲80,乙40.
4. 20.	5. 25.	6. 1.
7. 27.	8 60,67.	9. $-\frac{1}{3}$.

例題4. 甲有銀500圓,乙有銀280圓,問甲分若干圓與乙,則乙爲甲之4倍.

解 以x代甲分與乙之圓數,則甲賸餘之數爲$(500-x)$圓,乙共有之數爲$(280+x)$圓,因此時二人之銀數,乙爲甲之4倍,故成立方程式爲$280+x=4(500-x)$解右邊之括弧則$280+x=2000-4x$.移

項，得 $x+4x=2000-280$. 卽 $5x=1720$. 以5除兩邊，得 $x=344$.
答 344. 圓.

驗算　甲分 344 圓與乙，則甲之餘數爲 500 圓$-$344 圓$=$156 圓，乙之總數爲 280 圓 $+$344 圓$=$624 圓 $=4\times156$ 圓，故方程式之根，與題恰合。

例題 5. 甲所有之銀爲乙之 5 倍，其後甲增加 120 圓，乙增加 158 圓，而甲爲乙之 3 倍，問甲乙二人原有銀各幾何。

解　設乙原有之銀數爲 x 圓，則甲原有之銀數爲 $5x$ 圓，其後乙共有銀數爲 $(x+158)$ 圓，甲共有銀數爲 $(5x+120)$ 圓，此時二人之銀數，甲爲乙之 3 倍，故得方程式爲 $5x+120=3(x+158)$. 撤去右邊之括弧，則 $5x+120=3x+474$. 移項，得 $5x-3x=474-120$. 卽 $2x=354$. 兩邊同以 2 除之，得 $x=177$.　答甲 177 圓$\times5=$885圓，　乙 177 圓。

驗算　甲原有 885 圓，乙原有 177 圓，甲之數爲乙之 5 倍，各增加之後，甲爲 885 圓 $+$120 圓$=$1005圓，乙爲 177 圓$+$158 圓$=$335圓，而乙數之 3 倍亦爲 1005 圓，與甲數同，故方程式之根，與題恰合。

類題

1. 甲有銀 120 圓，乙有銀 96 圓，問乙與甲幾圓，則甲爲乙之 3 倍。

2. 甲樽盛酒 2 斗 5 升，0 乙樽盛酒 7 斗 5 升，問從乙樽中取酒若干升加入甲樽，則甲樽之酒爲乙樽餘酒之 4 倍。

3. 大小二數之差爲 28. 大數等於小數之 5 倍，求大數及小數。

4. 甲乙二人共有銀 360 圓，後又增加 120 圓，其總數爲甲原有銀數之 12 倍，求二人原有之銀數。

5. 甲原有之銀數爲乙之 5 倍，其後甲增加 120 圓，乙增加 158 圓，則甲所有之銀數爲乙之 3 倍。問各增加後二人所有之銀數幾何。

6. 東倉有米 459 袋，西倉有米 165 袋，每日從東倉運出 45 袋，從西倉運出 18 袋，問幾日後東倉賸餘之米，與西倉賸餘之米之 3 倍相等。

7. 甲倉之米 320 袋,乙倉之米 180 袋,每日甲倉運出 15 袋,乙倉運入 5 袋,問幾日後甲乙二倉之米恰相等.

8. 甲乙兩人,同出銀若干圓買羊一羣,分羊之時,甲之羊比乙多 4 頭,甲與乙 54 圓,問羊 1 頭之價幾何.

9. 甲乙二商店之本銀相等,甲折本 100 圓,乙獲利 600 圓,乙共有之銀數,等於甲賸餘之 3 倍,問原有資本各幾何.

答 1. 42 圓. 2. 55 升. 3. 35, 7. 4. 甲 40, 乙 320.
5. 甲 1005 圓, 乙 335 圓. 6. 4 日 7. 7 日.
8. 27 圓. 9. 450 圓.

例題 6. 龜鶴之頭數 25, 足數 70. 問鶴幾隻,龜幾尾.

解 以 x 代鶴數,則 $25-x$ 爲龜數,$2x$ 爲鶴足之總數,$4(25-x)$ 爲龜足之總數,$2x+4(25-x)$ 爲鶴與龜之足之總數,題云足數 70. 故得方程式爲 $2x+4(25-x)=70$.解左邊之括弧,又移項,得 $2x-4x=70-100$.即 $-2x=-30$.故 $x=15$. 答鶴 15 隻,龜 10 尾.

驗算 以鶴數 15 乘 2 足,得 30 足,以龜數 10 乘4足,得 40 足,故足之總數爲 30 足 $+$ 40 足 $=$70 足,與題恰合.

例題 7. 父年 43 歲,子年 4歲,從今幾年後,父之歲數爲子之歲數之 4 倍.

解 以 x 代所求之年數,其時父之年爲 $(43+x)$歲,子之年爲 $(4+x)$歲,故得方程式爲 $4(4+x)=43+x$. 去括弧,移項,則 $4x-x=43-16$. 卽 $3x=27$.故 $x=9$. 答 9 年後.

算驗 9 年後父爲$(43+9=52)$歲,子爲$(4+9=13)$歲,此時子之歲數之 4 倍爲$(13\times4=52)$歲,與父之歲同,故與題恰合.

類題

1. 有米 87 石,分裝 80 袋,大袋容 5 斗,小袋容 4 斗,問大袋小袋各幾何.

2. 有糖包 18 件,共裝砂糖 159 斤,小包裝 5 斤,大包裝 12 斤,

其中有 1 大包缺糖 1 斤，求兩種糖包之數.

3. 議定運磁器 1 車，無破損，則與運費 3 角 2 分；有破損，僅與運費 1 角，共運 10 車，出運費 2 圓 5 角 4 分，問幾車無破損.

4 某商人買毛筆鉛筆共 400 枝，平均計算，每枝價銀 2 分，賣出時，毛筆 1 枝之價 3 分 5 釐，鉛筆 1 枝之價 2 分 5 釐，共獲利 3 圓，問毛筆鉛筆各幾枝.

5. 有一工人每日工銀 8 角，若兼作夜工，則共給銀 1 圓 2 角，此人作工 20 日，共得工銀 20 圓 8 角，問兼作夜工幾日.

6. 甲樽盛酒 31 升，乙樽盛酒 17 升，每日從兩樽各取出 1 升，問幾日後甲樽之酒等於乙樽之 3 倍.

7. 有父子二人，父年 45 歲，子年 10 歲，問在今之幾年前，父之歲數爲子之歲數之 3 倍.

8. 有兄弟二人，共年 44 歲，在 4 年前兄之歲數，與在 4 年後弟之歲數相等，問在今之幾年前，兄之歲數爲弟之歲數之 3 倍.

9. 有父子四人，父年 48 歲，其三子之歲數之和，等於父之歲數之半，問在今之幾年後，父之歲數等於三子之歲數之和.

10. 有甲乙丙三人，共年 155 歲，乙之歲數爲甲之歲數之 $1\frac{1}{9}$. 丙之歲數爲甲之歲數之 $1\frac{1}{3}$. 求甲之歲數.

答 1. 大袋 50. 小袋 30.		2. 小包 8. 大包 10.	
3. 7 車.		4. 毛筆 100 枝，鉛筆 300 枝.	
5. 12 日.	6. 10 日.	7. 5 年前.	8. 14 年前.
9. 12 年後.	10. 45 歲.		

例題 8. 有二位之數，其數字之和爲 12. 而一位之數字之 6 倍，與其二位之數相等，求此二位之數.

解 設以 x 代十位之數字，則一位之數字爲 $12-x$. 所以二位之數爲 $10x+(12-x)$. 而一位之數字之 6 倍爲 $6(12-x)$ 此與二位之數

相等,故得方程式為 $10x+(12-x)=6(12-x)$.去括弧,移項,則 $10x-x+6x=72-12$. 卽 $15x=60$. 故 $x=4$. 所求之二位數為 $10\times4+(12-4)=48$. 答48.

驗算　二位之數為 48. 其數字之和為 12. 又一位數之 6 倍為 $8\times6=48$. 與題恰合.

例題 9　鐘表面之長短二針,在 3 點鐘與 4 點鐘之間相重,問其時為 3 點幾分.

解　命所求之分數為 x. 則長針進行之分畫數為 x 分畫,短針進行之分畫數為 $(x-15)$ 分畫,因長針進行之速度,為短針進行之速度之 12 倍,故 x 與 $12(x-15)$ 所表之分畫數相同,得方程式為 $12(x-15)=x$ 去括弧,移項,則 $12x-x=180$.卽 $11x=180$.故 $x=16\frac{4}{11}$.

答 3 點 $16\frac{4}{11}$ 分.

驗算　3 點 $16\frac{4}{11}$ 分鐘時,其短針從第 15 分畫處起進行之分畫數為 $16\frac{4}{11}-15=1\frac{4}{11}$. 此分畫數之 12 倍為 $1\frac{4}{11}\times12=16\frac{4}{11}$. 與長針在 3 點鐘後進行之分畫數同,故與題恰合.

例題 10.　水池之上,有甲乙二水管,用甲管注水入池,歷 30 分鐘時而滿,用乙管則須 50 分鐘時,而池底之旁有一丙水管,開 1 點鐘時,能將全池之水放盡,若池中無水,同時甲乙丙三管齊開,問幾分鐘時,水可滿池.

解　1 分鐘時,甲管注入之水為池之容積之 $\frac{1}{30}$. 乙管注入之水為池之容積之 $\frac{1}{50}$,丙管放出之水為池之容積之 $\frac{1}{60}$,三管齊開 1 分鐘時,池中存留之水為池之容積之 $\frac{1}{30}+\frac{1}{50}-\frac{1}{60}$. 以 x 代所求之分數,則 $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{50}-\frac{1}{60}\right)x$.等於水池之全量 1.故得方程式為

$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{50}-\frac{1}{60}\right)x=1$. 以各分母之最小公倍數 300 乘之，得

$(10+6-5)x=300$. 即 $11x=300$. 兩邊同以 11 除之,得

$x=\frac{300}{11}=27\frac{3}{11}$. 答 $27\frac{3}{11}$分.

驗算　$27\frac{3}{11}$分鐘時，從甲管注入水之量爲$\frac{1}{30}\times\frac{300}{11}=\frac{10}{11}$.

從乙管注入水之量爲$\frac{1}{50}\times\frac{300}{11}=\frac{6}{11}$從丙管放出水之量爲

$\frac{1}{60}\times\frac{300}{11}=\frac{5}{11}$.而$\frac{10}{11}+\frac{6}{11}-\frac{5}{11}=1$. 故與題恰合.

例題 11. 在 3 點鐘與 4 點鐘之間，鐘面之長短二針成直角，問其時爲 3 點幾分，又二針反對成一直線，問其時爲 3 點幾分.

解　4 直角與 60 分畫相當，而一直角與 15 分畫相當，在 3 點鐘時，二針適成直角，故二針在 3 點鐘後復成直角，長針須超過短針 15 分畫，設 x 爲成直角時之分數，則長針從 0 分畫處進行之分畫數爲 x 分畫，而短針從第 15 分畫起進行之分畫數爲$\frac{x}{12}$分畫，其所指之分畫數爲$\left(15+\frac{x}{12}\right)$分畫，此時二針位置之差爲 15 分畫，故得方程式爲 $x-\left(15+\frac{x}{12}\right)=15$. 去括弧，移項，則 $x-\frac{x}{12}=15+15$. 即$\frac{11x}{12}=30$.以 12 乘兩邊得 $11x=360$.故 $x=32\frac{8}{11}$.答 3 點$32\frac{8}{11}$分.

又設成一直線時之分數爲 x.依前所說明，則短針所指之分畫數爲$\left(15+\frac{x}{12}\right)$分畫，此時二針位置之差爲 30 分畫，故得方程式爲 $x-\left(15+\frac{x}{12}\right)=30$. 去括弧，移項，則 $x-\frac{x}{12}=30+15$. 即 $\frac{11x}{12}=45$. 去分母，得 $11x=540$. 故 $x=49\frac{1}{11}$. 答 3 點 $49\frac{1}{11}$分.

別解 在3點鐘時，假設又有一短針(與短針之速度同)指於第30分畫處，則二短針繼續進行，恆成直角，前問題可歸於求長針與假設之短針相重時之分數，(可參考例題9)故得方程式爲 $x-\frac{x}{12}=30.$ 兩邊同以12乘之，則 $11x=360.$ 故 $x=32\frac{8}{11}.$ 與前之解法之結果同。

又在3點鐘時，假設又有一短針(與短針之速度同)指於第45分畫處，則二短針繼續進行，恆反對成直線，前題之第二問，可歸於求長針與假設之短針相重時之分數，故得方程式爲 $x-\frac{x}{12}=45.$ 去分母，得 $11x=540.$ 故 $x=49\frac{1}{11}.$ 與前之解法之結果同。

例題12. 在兩點鐘與三點鐘之間，有人看自鳴鐘，誤以短針爲長針，而比眞正時間少55分，問其時爲兩點幾分。

解 以 x 爲所求之分數，卽長針所指之分畫數爲 x 分畫，而短針所指之分畫數爲 $\left(10+\frac{x}{12}\right)$ 分畫，按題意其時長針之位置，必在第5分畫與第10分畫之間，知看鐘之人誤認其時爲1點，$\left(10+\frac{x}{12}\right)$ 分，因比直正時間少55分，故得方程式爲2點，x 分$-$1點，$\left(10+\frac{x}{12}\right)$ 分$=$55分，左邊全化爲分數，則 $120+x-\left(60+10+\frac{x}{12}\right)=55.$ 去括弧，移項，得 $x-\frac{x}{12}=55-50.$ 卽 $\frac{11x}{12}=5.$ 故 $x=5\frac{5}{11}.$ 答兩點 $5\frac{5}{11}$ 分。

別解 長針之位置在 x 分畫處，短針之位置在 $\left(10+\frac{x}{12}\right)$ 分畫處，就分數之誤而言，加55分於短針所指之分畫數，卽合於眞正之

時間，就鐘點之誤而言，加 60 分於長針所指之分畫數，亦合於眞正之時間，故得方程式爲 $60+x=10+\frac{x}{12}+55$. 移項，則 $x-\frac{x}{12}=5$. 卽 $\frac{11x}{12}=5$. 故 $x=5\frac{5}{11}$.與前之結果同。

例題 13. 有犬追狐，其狐行 4 步之時間，犬僅行 3 步，但犬之 2 步之距離，等於狐之 3 步之距離，今狐在犬前 50 步，問犬追若干步可以追及。

解 設犬追及狐之時犬行之步數爲 $3x$. 則在同時間狐行之步數爲 $4x$. 因狐先行 50 步，故犬行 $3x$ 步，狐已共行 $(50+4x)$ 步，而犬與狐之 1 步之長，得以 3 與 2 表之，則犬行 $3x$ 步，之長爲 3 ($3x$ 步)，狐行 $(50+4x)$ 步之長爲 2 $(50+4x)$ 步，得方程式 $3(3x)=2(50+4x)$，卽 $9x=100+8x$. 移項，得 $9x-8x=100$. 即 $x=100$. 故 $3x=300$. 答 300 步。

例題 14. 有兵若干人，排爲方陣，則多 60 人，重排爲長方陣，前面比方陣減 3 人，側面增 5 人，則少 1 人，求兵數。

解 命方陣每邊之兵數爲 x. 則兵之總數爲 x^2+60. 改排長方陣，其前面之兵數爲 $x-3$. 側面之兵數爲 $x+5$. 則兵之總數爲 $(x-3)(x+5)-1$. 故得方程式爲 $(x-3)(x+5)-1=x^2+6$. 解括弧，則 $x^2+2x-15-1=x^2+60$. 移項，得 $x^2+2x-x^2=60+15+1$. 卽 $2x=76$. 以 2 除兩邊，得 $x=38$. 而 $x^2+60=38^2+60=1504$.答1504人。

例題 15. 主人與僕人議明一年中之工銀 135 圓，并給以衣服，此僕人至七個月辭退，給銀 76 圓及全年之衣服，問衣服值銀若干圓。

解 設衣服值銀之數爲 x 圓，則僕人一年所得之數爲 $(135+x)$ 圓，至七個月辭退，應得 $\frac{7}{12}(135+x)$ 圓，今得 $(67+x)$ 圓，必與 $\frac{7}{12}(135+x)$ 圓相當，立方程式 $67+x=\frac{7}{12}(135+x)$. 去分母及括弧，

則 $804+12x=945+7x$. 移項，得 $12x-7x=945-804$. 卽 $5x=141$. 故 $x=28.2$. 答28圓2角.

例題16. 有人以銀 400 圓買一馬一車，賣馬獲利百分之二十五，賣車獲利十分之四，通算獲利千分之三百六十四，問買馬及賣馬之價各幾何.

解 設買馬價爲 x 圓，則買車價爲 $(400-x)$ 圓，賣馬獲利 $.25x$ 圓，賣車獲利 $.4(400-x)$ 圓，因賣車馬共獲利 $.364\times400$ 圓，故成立方程式爲 $.25x+.4(400-x)=.364\times400$. 去括弧，移項，$.25x-.4x=145.6-160$. 卽 $-.15x=-14.4$. 故 $x=96$. 答買價 96 圓，賣價 $.25\times96$ 圓 $=120$ 圓.

例題17. 甲種合金，以金3兩6錢銀5兩4錢化合而成，乙種合金，以金2兩7錢銀9錢化合而成，今欲造丙種合金，含金銀各2兩1錢，問須用甲乙合金各幾何.

解 設用甲合金 x 錢，則用乙合金 $(42-x)$ 錢，而甲合金中含金銀之比爲 $36:54$. 卽 $2:3$. 故甲合金中之金爲 $\frac{2}{2+3}$ 錢，又乙合金中含金銀之比爲 $27:9$. 卽 $3:1$. 故乙合金中之金爲 $\frac{3}{3+1}(42-x)$ 錢。因丙合金中所含之金爲 21 錢，得方程式 $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}(42-x)=21$. 去分母，則 $8x+15(42-x)=420$. 解括弧，移項，得 $8x-15x=420-630$. 卽 $-7x=-210$. 兩邊同以 -7 除之，得 $x=30$. 答甲合金3兩，乙合金1兩2錢.

問題二

解次之1至8各方程式

1. $x-[3+\{x-(3+x)\}]=5$.
2. $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$.
3. $(x+1)(x+2)(x+6)=x(x^2+9x)+4(7x-1)$.

4. $\frac{3}{16}(x-1)-\frac{5}{12}(x-4)=\frac{2}{5}(x-6)+\frac{5}{48}$.

5. $x-\frac{1}{6}\ (2x-57)\ =\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)-\frac{5}{3}$.

6. $3+\frac{x}{.5}=7-\frac{x}{.2}$.

7. $.\dot{6}x+.25-1.\dot{8}x=\frac{1}{9}x-.75x-\frac{1}{3}$.

8. $12\{3x-.25(x-4)-.\dot{3}(5x+14)\}=47$.

9. 甲乙丙三人，分銀 450 圓，乙所得之數爲甲之 2 倍，丙所得之數爲乙之 3 倍，問各得幾何。

10. 甲有銀 15 圓，乙有銀 18 圓，問甲與乙若干圓，則甲賸餘之數，等於乙之總數之半。

11. 甲乙二人，共有銀 800 圓，甲分所有之銀與乙，如乙所有之數，則乙之總數，等於甲所餘之數之 $\frac{1}{3}$，問二人原有銀各幾何。

12. 有兄弟二人平分現銀 300 圓及所有之田地，取現銀之 $\frac{3}{5}$ 者，得田地之 $\frac{3}{7}$. 問田地値銀幾何。

13. 有若干人分銀，每人得 10 圓，則多 7 圓，若每人得 12 圓，則不足 17 圓，求銀數。

14. 有人以所有財產之 $\frac{1}{2}$ 分與其妻，以 $\frac{1}{6}$ 分與長子，以 $\frac{1}{12}$ 分與次子，賸銀 600 圓，分與其餘諸子，問此人之財產總數幾何。

15. 某人在 8 年前之歲數，等於 8 年後之歲數之 $\frac{5}{7}$. 問此人今若干歲。

16. 父年 45 歲，母年 37 歲，子年 14 歲，問幾年前父母年齡之和爲子之年齡之 8 倍。

17. 有父子二人，父之年齡爲子之 3 倍，在今之 4 年前，父之年齡

爲子之4倍,問父子之年齡各幾何.

18. 父子年齡之和,乃25年後年齡之和之半,而父子年齡之差爲20年後年齡之和之$\frac{1}{3}$.問父子年齡各幾何.

19. 某宴會中,男子之數爲女子之數之4倍,有男女各10人先散;所餘男子之數,比女子之數之5倍多10人,問赴宴會之男女各有幾人.

20. 某中學校之入學考試,及格之人數,比投考總人數之$\frac{2}{11}$多30人,而等於不及格之人數之$\frac{5}{17}$.問投考之人數共若干.

21. 有二位之數,其十位之數字爲一位之數字之$\frac{3}{4}$.而從兩數字之和之5倍減1.與二位之數相等,求此二位之數.

22. 有二位之數,其十位之數字爲一位之數字之3倍,而兩數字之差之7倍與兩數字之和之3倍相加,比二位之數少10.求此二位之數.

23. 有二位之數,其十位之數字,比一位之數字多3.加8於二位之數.等於十位之數字之12倍,求此二位之數.

24. 有二位之數,其十位之數字,比一位之數字之3倍多1,而二位之數之$\frac{1}{36}$.等於一位之數字,求此二位之數.

25. 有二位之數,其十位之數字,比一位之數字少3,而加26於二位之數,比一位之數字之9倍多10.求此二位之數.

26. 原有二位之數,其兩數字之和爲11.而以兩數字交換其位置之二位之數,比原有二位之數多27.求原有二位之數.

27. 有連續兩偶數之和爲86.問兩數各若干.

28. 有連續兩整數之平方之差17.爲問兩數各若干.

29 自鳴鐘面之長短兩針,在5點鐘與6點鐘之間相重,問其時爲5點幾分.

30. 自鳴鐘面之長短兩針，在 5 點鐘與 6 點鐘之間第一次成直角，問其時爲 5 點幾分。

31. 自鳴鐘面之長短兩針，在 11 點鐘與 12 點鐘之間成一直線，問其時爲 11 點幾分。

32. 甲辦某事，8 日可成，乙僅須 6 日，丙則須 12 日，今甲乙丙三人合作，問幾日可辦成 $\frac{3}{4}$.

33. 有一事，甲於 18 點鐘時間，可以辦畢，乙須辦 24 點鐘，丙須辦 36 點鐘，今甲乙丙三人合辦三事，問幾點鐘完畢。

34. 甲 15 日能辦完一事，乙 16 日能辦完一事，今甲乙邀丙相助，合辦一事。6 日間完畢，問丙一人辦理須幾日。

35. 連續四整數之和爲 22. 問四數各若干。

36. 僱工之人與工人議明，12 日間之工銀 17 圓，并與布半匹，因作工 7 日卽停止，與以工銀 9 圓 5 角及布半匹，問布値銀若干。

37. 買梨柿共 300 枚，梨一枚之價銀 3 分 5 釐，柿一枚之價銀 2 分，賣出時，平均每枚之價銀 3 分，獲利 1 圓 5 角，求梨數及柿數。

38. 甲乙丙三人，共有銀 6290 圓，甲所有之銀數爲乙所有之銀數之 $1\frac{1}{3}$. 丙所有之銀數爲甲所有之銀數之 $1\frac{1}{3}$，求丙所有之銀數。

39. 甲有銀 80 圓，乙有銀 95 圓甲每日用銀 1 圓 2 角，乙每日用銀 1 圓 8 角，問幾日後二人所餘之銀數相等。

40. 有銀票 20 張，共計 250 圓，一種爲 20 圓票，一種爲 5 圓票，求二種銀票之數。

41. 犬在兎後追兎，其距離與兎之 100 跳相當，犬 5 跳之時間，兎能 6 跳，但犬 7 跳之遠，等於兎 9 跳之遠，問兎至若干跳時爲犬所追及。

42. 以每升値銀 1 圓 2 角之酒，與每升値銀 7 角 5 分之酒，和成每升値銀 1 圓零 5 分之酒 1 斗 5 升，問用二種酒各幾何。

43. 買雞蛋用銀 3 圓 5 角，其後價値跌落十分之二，用銀 3 圓 4 角

7 分 2 釐．多買雞蛋 24 枚，問前次所買之雞蛋，每枚價銀幾何．

44. 小學校某期之畢業學生數爲在校學生數之 $\frac{5}{27}$. 舉行畢業式以後，續收學生 120 名，至開學時之學生總數，爲未行畢業試驗時原有學生數之$\frac{28}{27}$. 求原有學生之數．

45. 有酒一樽，第一日賣出之數，比樽中所有酒之半少 1 升，第二日賣出之數，比第一日賣出後樽中餘酒之半少 1 升，第三日賣出之數，比第二日賣出後樽中餘酒之半少 1 升，此時樽中尙餘酒 2 斗 4 升，問三日間共賣出酒幾何．

46. 有人以銀若干圓買地 18 方，若每方之價少 2 圓，則多得地 2 方，問地價共幾何．

47. 男 30 人，女 50 人，童子 20 人，共分銀 240 圓，男一人所得之數，比女一人所得之數多 2 圓，童子一人所得之數爲女一人所得之數之半，問男女童子一人所得各幾何．

48. 有人以銀若干圓買金表與表鏈，其金表之價，比共價之$\frac{3}{5}$多 1 圓 9 角 6 分，表鏈之價，比共價之$\frac{1}{3}$少 2 角，求金表與表鏈之價．

49. 乙辦理一事，須 4 點鐘時間．甲則須 12 點鐘，有一事初由甲辦理，繼因他事而去，改由乙接辦完畢，合計有 6 點鐘時間，問甲辦理幾點鐘，

50. 甲乙二人，共借銀 1500 圓，共出利銀 80 圓，甲之利率爲百分之五，乙之利率爲百分之六，問甲乙各借銀若干圓．

51. 某工廠用工人作工，每日給銀 8 角，曠工則罰銀 4 角，有工人於 30 日間，共得 18 圓，問共作工幾日．

52. 有人從甲地往乙地，步行至甲乙二地之中央，每一點鐘之速度爲 3 哩，其後改乘馬車，每一點鐘之速度爲 4 哩，若前後每一點鐘之速度同爲 $3\frac{1}{2}$ 哩，則能早到 5 分鐘，問甲乙二地距離若干哩．

53. 以酒精與水混和，其酒精比全量之$\frac{2}{3}$多4升，水比全量之$\frac{1}{4}$少1升，問用酒精與水共幾何。

54. 以酒1石2斗與水1石8斗混和爲薄酒，又以酒9斗與水3斗混和爲厚酒，今以此二種酒混和，而所含之酒與水各7斗，問用薄酒厚酒各幾何。

55. 有兵一隊，備80日之糧食，經20日後增兵2000人，所有之糧食，僅能支10日，求原有兵數。

56. 有魚頭長4寸，其尾之長，等於脊之長之半與頭之長之和，而脊之長等於頭與尾之長之和，求魚之全長。

57. 以銀若干圓分與甲乙丙三人，甲所得之數，比總數之$\frac{1}{4}$多100圓，乙所得之數，比分與甲後所餘之數之$\frac{3}{5}$多10圓，賸250圓爲丙所得，問共有銀若干圓。

58. 某路有甲乙兩列車，其每1點鐘之速度，甲列車比乙列車快5哩，而甲列車行2點20分鐘時間之距離，比乙列車行3點鐘時間之距離少5哩，問兩列車之速度各若干哩。

59. 有地基爲長方形，縱比橫多6丈，若縱橫各加3丈，則面積增加81平方丈，問所有之地基面積幾何。

60. 有長方形之地，又有面積相等之正方形之地，其長方地之長邊，比正方地之一邊多5步，長方地之闊邊，比正方地之一邊少3步，求長方形之地之面積。

61. 有長方形，其長比闊之2倍少1寸，若長闊各減6寸，則面積減少246平方寸，問原面積幾何。

62. 有兵士一隊、排爲方陣，則多16人，若每行每列各增1人，則不足29人，求兵數。

63. 連續三奇數之和，比其中最大之奇數之2倍多7，求此三奇數。

64. 某學校有生徒 1000 人，在體操場排爲厚 5 市之中空方陣，求第一列之人數。

65. 原有三位之數，其末位之數字爲 3. 若以末位之數字，移爲首位之數字，而以首中二位之數字，移爲中末二位之數字，則其數比原有三位之數少 171. 求原有三位之數。

66. 以銀若干圓分與甲乙丙丁四人，甲所得之數，比總銀數之 $\frac{1}{4}$ 多 81 圓，乙所得之數，比分與甲後所餘之數之 $\frac{1}{4}$ 多 81 圓，丙所得之數，比分與甲乙後所餘之數之 $\frac{1}{4}$ 多 81 圓，丁所得之數，比分與甲乙丙後所餘之數之 $\frac{1}{4}$ 多 81 圓，而銀數適盡，求總銀數。

67. 金 1 兩 9 錢，於水中衡之，重少 1 錢，銀 1 兩，於水中衡之，亦少 1 錢，今有金與銀之合金，重 10 兩 6 錢，於水中衡之，重 9 兩 9 錢，求合金中所含金與銀之重。

第四章

聯立一次方程式(其一)

12. 聯立方程式.

含二未知數x,y之一次方程式. 如 $2x+3y=11$......(1) 謂之二元一次方程式,就(1)式考之,以任意之數代其x. 皆有與x對應之y之值,故適合於(1)式之x,y之值,多至無窮,證明於次.

移含x之項於右邊,以y之係數3除兩邊,則 $y=\dfrac{11-2x}{3}$........(2)

(此爲求y之值之式)

今以種種之值,代(2)式右邊之x,求得種種與x對應之y之值,其配合如下.

$$\begin{cases} x= & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots\ldots \\ y= & \dfrac{11}{3}, & 3, & \dfrac{7}{3}, & \dfrac{5}{3}, & 1, & \dfrac{1}{3}, \ldots\ldots \end{cases}$$

(2)式之x之值無限制,則與之對應之y之值,有無窮之多,

卽$\left(x=0, y=\dfrac{11}{3}\right)$, $(x=1, y=3)$, $\left(x=2, y=\dfrac{7}{3}\right)$,.........各組$x$與$y$之值,皆適合於(1)式.

又設一方程式 $x-y=3$......(3)考之,適合此方程式之x與y之值,亦多至無窮,證明於次.

解(3)式爲求y之值之式,得$y=x-3$........(4),以種種之值代(4)式右邊之x. 求得種種與x對應之y之值,其配合如下.

$$\begin{cases} x= & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \ldots\ldots \\ y= & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, \ldots\ldots \end{cases}$$

卽$(x=0, y=-3)$, $(x=1, y=-2)$, $(x=2, y=-1)$ ....各組x與y之值,皆適合於(3)式.

如上之各組x與y之值,有無窮之多,皆能適合於一方程式,但含二未知數(x,y)之一方程式,僅表x與y之關係而止,不能決定x,y

之值。

若以(1)式與(3)式聯合爲一組方程式,則 x 與 y 之值,能同時恰合於(1)(3)兩式者,僅有 $(x=4, y=1)$ 一組。

凡含二未知數以上之一組方程式,其未知數之值,同時能恰合此一組之式者,其一組之方程式,謂之聯立方程式。

注意 1. 聯立方程式之未知數之值,即其方程式之根,求根之事,謂之解聯立方程式。

例如 $x+y=7$..(1)

$x-y=3$..(2)

此(1)式與(2)式爲一組聯立方程式,而恰合(1),(2)兩式之 x, y 之值5,2.爲聯立方程式之根。

注意 2. 如(1)式與(2)式所表二未知數 x 與 y 之關係不同,謂之獨立方程式,如 $x+y=7$, $2x+2y=14$. 則非獨立之方程式,因從第一式能引伸而得第二式也。

又含二未知數之兩方程式,無論以如何之數爲其未知數之值,不能同適合於兩式,則謂之矛盾方程式。

例如 $x+y=5$, $3x+3y=12$. 以3除第二式之兩邊,則 $x+y=4$,此與第一式不能兩立,故此兩方程式,雖獨立而矛盾。

注意 3. 未知數之數,與方程式之數同,(如含二未知數,有兩方程式,含三未知數,有三方程式。)其方程式獨立而不矛盾,始爲聯立方程式。

注意 4. 聯立方程式,在第一章說明,從式之次數及未知數之數,如次之區別,其 $a,b,c,$........爲既知數,而 $x,y,z,$........爲未知數。

$ax+by=c$..........................(1)

$a'x+b'y=c'$ ....(2)

合(1),(2)兩式,謂之聯立二元一次方程式。

$ax+by+cz=d$..............(3)

$a'x+b'y+c'z=d'$..............(4)

$$a''x+b''y+c''z=d'' \text{ .... } (5)$$

合(3),(4),(5)三式,謂之聯立三元一次方程式。

$$ax+by+cz=d \text{ .... } (6)$$

$$x^2+y^2+z^2=d' \text{ .... } (7)$$

$$a'xy+b'yz+c'xz=d'' \text{ .... } (8)$$

合(6),(7),(8)三式,謂之聯立三元二次方程式。

餘可類推。

13. 聯立二元一次方程式之解法。

(一) 加減法。(又名加減消去法)

例 1. 解次之聯立方程式。

$$3x+5y=25 \text{ .... } (1)$$

$$5x-7y=11 \text{ .... } (2)$$

用加減法解聯立方程式之例,先以適宜之數,乘方程式之一式或兩式,使兩式中有一未知數之項之係數相等,依加法或減法,消去一未知數,而用一元一次式之解法,定所餘一未知數之值,以求得之一未知數之值,代入原方程式較簡單之一式中,定他一未知數之值。

解 計算之細草

(1)式×5..............$15x+25y=125$............(3)

(2)式×3..............$15x-21y=33$ ....(4)

從(3)式減(4)式............$46y=92$.

故 $y=2$.以 y 之值代入(1)式,則 $3x+5\times2=25$.即 $3x+10=25$.

移項,得 $3x=15$. 故 $x=5$.

答 $\begin{cases} x=5. \\ y=2. \end{cases}$

驗算 以5與2代(1),(2)兩式左邊之 x 與 y。

$3x+5y=3\times5+5\times2=25.$

$5x-7y=5\times5-7\times2=11.$

故 $x=5, y=2$. 與 (1), (2) 兩式皆恰合。

例 2. 解次之聯立方程式

$9x+8y=7$ .... (1)

$21x-12y=1$ .... (2)

解 (1)式×3............ $27x+24y=21$ .... (3)

(2)式×2............ $42x-24y=2$ .... (4)

以(4)式加(3)式...$69x\qquad=23$.

故 $x=\frac{1}{3}$, 以 x 之值代入(1)式,則 $9\times\frac{1}{3}+8y=7$. 即 $3+8y=7$.

移項, 得 $8y=4$. 故 $y=\frac{1}{2}$ 答 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}. \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

驗算 以 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$ 代(1), (2)兩式左邊之 x 與 y.

$$9x+8y=9\times\frac{1}{3}+8\times\frac{1}{2}=7.$$

$$21x-12y=21\times\frac{1}{3}-12\times\frac{1}{2}=1.$$

故 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$. 與(1), (2)兩式皆恰合。

例 3. 解次之聯立方程式

$2\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}y=12$ .... (1)

$\frac{5}{2}x+2y=25$ .... (2)

解 (1)式×15.............. $35x-6y\ =180$ .... (3)

(2)式×14.............. $35x+28y=350$ .... (4)

從(4)式減(3)式.............. $34y=170$.

故 $y=5$. 以 y 之値代入(1)式,則 $2\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}\times5=12$.
即 $\frac{7}{3}x-2=12$. 移項,得 $\frac{7}{3}x=14$. 以 $\frac{7}{3}$ 除兩邊,則 $x=6$.

答 $\begin{cases}x=6.\\y=5.\end{cases}$

驗算 以 6 與 5 代(1),2)兩式左邊之 x 與 y,

$$2\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}y=\frac{7}{3}\times6-\frac{2}{5}\times5=12.$$

$$\frac{5}{2}x+2y=\frac{5}{2}\times6+2\times5=25.$$

故 $x=6$, $y=5$. 與(1),(2)兩式皆恰合。

類題 解次之聯立方程式

1. $3x+4y=14$, $7x-2y=10$.
2. $7x+3y=8$, $\frac{1}{2}x-5y=11$.
3. $12x+14y=11$, $18x-6y=3$.
4. $24x-10y=6$, $45x-20y=11$.
5. $x-3y-2=0$, $2x-y-10=0$.
6. $11x+5y=1$, $x-2y=5$.
7. $5x+7y=31$. $2x+3y=13$.
8. $3x+5y=22$, $7x-4y=20$.

答 1. $\begin{cases}x=2.\\y=2.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=2.\\y=-2.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=\frac{1}{3}.\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=\frac{1}{3}.\\y=\frac{1}{5}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=\frac{28}{5}.\\y=\frac{6}{5}.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=1.\\y=-2.\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=2.\\y=3.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x=4.\\y=2.\end{cases}$

（二）代用法.（又名代入消去法）

例 1. 解次之聯立方程式

$8x+y=11$ ……………………………… (1)

$7x-3y=29$ ……………………………… (2)

用代用法解聯立方程式之例，先從兩方程式中之一式，令一未知數之項，獨居於左邊，而以其係數除兩邊，然後以右邊代他一式中之此一未知數，則消去一未知數.（若兩方程式中有一式之一未知數無係數，消去此一未知數較便.）

解　計算之細草

移(1)式左邊之 $8x$ 於右邊,得 $y=11-8x$……(3) 以右邊代(2)式中之 y. 則 $7x-3(11-8x)=29$. 去括弧，又移項，得 $7x+24x=29+33$, 即爲 $31x=62$. 故 $x=2$.以 2 代(3)式右邊之 x. 得 $y=11-8\times2=-5$.

答 $\begin{cases} x=2. \\ y=-5. \end{cases}$

驗算　以 2 與 -5 代(1),(2)兩式左邊之 x 與 y.

$8x+y=8\times2+(-5)=16-5=11.$

$7x-3y=7\times2-3(-5)=14+15=29.$

故 $x=2$, $y=-5$. 與(1),(2)兩式皆恰合.

例 2. 解次之聯立方程式

$5x+7y=31$ …………… (1)

$7x-3y=5$ …………… (2)

解　移(2)式左邊之 $7x$ 於右邊,則 $-3y=5-7x$.化得 $y=\dfrac{7x-5}{3}$…(3)

以右邊代(1)式中之 y.則 $5x+7\times\dfrac{7x-5}{3}=31$.由此得 $15x+49x=93+35$.

即 $64x=128$. 故 $x=2$. 以 2 代(3)式右邊之 x.得 $y=\dfrac{14-5}{3}=3$.

答 $\begin{cases} x=2. \\ y=3. \end{cases}$

例 3. 解次之聯立方程式

$3x-4y=18$ ………………………(1)

$8x+2y=0$ ………………………(2)

解 由(2)式移項,得 $2y=-8x$.以 2 除兩邊,則 $y=-4x$……(3)
以右邊代(1)式中之 y. 得 $3x-4(-4x)=18$. 即 $3x+16x=18$. 故
$x=\frac{18}{19}$. 以 $\frac{18}{19}$ 代(3)式右邊之 x. 得 $y=-4\times\frac{18}{19}=-\frac{72}{19}$.

答 $\begin{cases} x=\frac{18}{19}. \\ y=-\frac{72}{19}. \end{cases}$

類題 用代用法解次之聯立方程式

1. $4x+3y=29$, $3x-2y=9$.
2. $2x+3y=2$, $6x-3y=2$.
3. $5x+6y=8$, $3x+4y=5$.
4. $38x-y=74$, $42x-27y=30$.
5. $17x+5y=144$, $7x-10y+1=0$.
6. $3x-4y+17=0$, $8x-5y=0$.

答 1. $\begin{cases} x=5. \\ y=3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=\frac{1}{2}. \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=1. \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=2. \\ y=2, \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=7. \\ y=5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=5. \\ y=8. \end{cases}$

(三) 等置法.(又名比較消去法)

例 1. 解次之聯立方程式

$7x+5y=46$ ………………………(1)

$11x-4y=13$ ………………………(2)

等置法之第一種解法

解　以46除(1)式之兩邊，則$\frac{7x+5y}{46}=1$……(3)又以13除(2)式之兩邊，則$\frac{11x-4y}{13}=1$……(4)從(3)，(4)兩式得

$\frac{11x-4y}{13}=\frac{7x+5y}{46}$．去分母，則$506x-184y=91x+65y$．移項，得$415x=249y$．兩邊同以415除之$x=\frac{249}{415}y$．即$x=\frac{3}{5}y$……(5)以$x$之值代入(1)式，得$7\left(\frac{3}{5}y\right)+5y=46$．去分母，則$21y+25y=230$．即$46y=230$．故$y=5$．以5代(5)式右邊之$y$．得$x=\frac{3}{5}\times5=3$．

答$\begin{cases}x=3.\\y=5.\end{cases}$

驗算　以3與5代(1)(2)兩式左邊之x與y．

$7x+5y=7\times3+5\times5=21+25=46.$

$11x-4y=11\times3-4\times5=33-20=13.$

故．$x=3$，$y=5$．與(1)，(2)兩式皆恰合．

例2.　解次之聯立方程式

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2\text{……………………}(1)$$

$$\frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=6\text{……………………}(2)$$

解　以2除(1)式之兩邊，則$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$……(3)又以6除(2)式之兩邊，則$\frac{x}{24}-\frac{2y}{18}=1$……(4)從(3)，(4)兩式得

$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=\frac{x}{24}-\frac{2y}{18}$．移項，則$\frac{x}{4}-\frac{x}{24}=-\frac{y}{6}-\frac{y}{9}$

即$\frac{5x}{24}=-\frac{5y}{18}$　兩邊同以6乘之，又同以5除之，得$\frac{x}{4}=-\frac{y}{3}$……(5)

以右邊代 (3) 式中之$\frac{x}{4}$. 則$-\frac{y}{3}+\frac{y}{6}=1$. 即$-\frac{y}{6}=1$.

故$y=-6$. 以-6代(5)式右邊之y.得$\frac{x}{4}=-\frac{-6}{3}$. 故$x=8$.

答$\begin{cases} x=8. \\ y=-6. \end{cases}$

別解　命$\frac{x}{4}=X$, $\frac{y}{3}=Y$.則$\frac{x}{2}=2X$, $\frac{2y}{3}=2Y$.

變(1),(2)兩式爲 $2X+Y=2$........................(3)

$X-2Y=6$........................(4)

依前法得$\frac{2X+Y}{2}=1$, $\frac{X-2Y}{6}=1$. 故$\frac{2X+Y}{2}=\frac{X-2Y}{6}$兩邊同以 6 乘之,

則$6X+3Y=X-2Y$. 移項, 得$6X-X=-2Y-3Y$. 即 $5X=-5Y$.

故$X=-Y$......(5). 以右邊代(3)式之X. 則$2(-Y)+Y=2$.故$Y=-2$.

以-2代(5)式右邊之Y.得$X=2$.

因$\frac{x}{4}=X$, $\frac{y}{3}=Y$.故$\frac{x}{4}=2$, $\frac{y}{3}=-2$. 去分母得$x=8$, $y=-6$.

例 3. 解次之聯立方程式

$2x+15y=4$....................(1)

$14x-25y=2$ ....(2)

等置法之第二種解法.

解　化(1),(2)兩式爲$x=\frac{4-15y}{2}$...(3)及$x=\frac{2+25y}{14}$...(4)從(3),

(4)兩式得$\frac{2+25y}{14}=\frac{4-15y}{2}$(同爲$x$之值)去分母,則$2+25y=28-105y$.

移項,得$25y+105y=28-2$. 即$130y=26$. 故$y=\frac{1}{5}$. 以$\frac{1}{5}$代(3)

式右邊之y. 得$x=\frac{4-15\times\frac{1}{5}}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}$.

答$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}. \\ y=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

例 4. 解次之聯立方程式

$y=3(9-x)$ .... (1)

$2x=11-\dfrac{y}{3}$ .... (2)

解 移(2)式含 y 之項及含 x 之項,得 $\dfrac{y}{3}=11-2x$. 兩邊同以 3 乘之,則 $y=3(11-2x)$......(3)從(1),(3)兩式得 $3(9-x)=3(11-2x)$. 兩邊同以 3 除之, 則 $9-x=11-2x$. 移項得 $2x-x=11-9$. 卽 $x=2$. 以 2 代(1)式右邊之 x. 得 $y=3(9-2)=21$. 答$\begin{cases} x=2. \\ y=21. \end{cases}$

類題 用等置法解次之聯立方程式

(半用第一種解法,半用第二種解法).

1. $5x+2y=80,\quad 2x+3y=65.$
2. $7x-9y=13,\quad 3x+2y=-12.$
3. $18x-15y=4,\quad 22x+9y=14.$
4. $7x-20y=17,\quad 5x+20y=19.$
5. $45x+7y=8,\quad 25x-14y=7.$
6. $125x-45y=2,\quad 25x+75y=6.$

答 1. $\begin{cases} x=10. \\ y=15. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=-2. \\ y=-3. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}. \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=3. \\ y=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{5}. \\ y=-\dfrac{1}{7}. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{25}. \\ y=\dfrac{1}{15}. \end{cases}$

注意 1. 凡二元聯立一次方程式，雖皆能任意用上所說明之三種方法解之，而用加減法之時爲多，亦有用代用法與等置法，較用加減法爲便利者。

例如解次之聯立方程式

$123x+245y=368$………………(1)

$576x-208y=368$………………(2)

以用等置法解之爲便。

化題式中 x 或 y 之係數使相等，若計算複雜，則宜用等置法，如上之(1)(2)兩式，無論化 x 之係數使相等，或化 y 之係數使相等，計算皆複雜，用等置法，可從 $576x-208y=123x+245y$. 得 $453x=453y$. 故 $x=y$.

又如解次之聯立方程式

$452x-276y=79$……………(1)

$x=3y+5$ ……………………(2)

此用代用法解之爲便。

遇題式中 x 與 y 之關係簡單，則宜用代用法。

注意 2. 等置法之第一種解法，即化聯立方程式爲一簡單之式，而引入代用法之方法，用代用法，乃化一方程式爲 $y=mx+c$ 或 $x=ny+d$ 之形，以其右邊代他一方程式中之 y 或 x. 消去一未知數，變爲一元一次方程式解之也，而用等置法之第一解法，則以兩方程式化爲 $y=mx$ 或 $x=ny$ 之形之方程式，然後用代用法解之也。

14. 特別形狀之聯立方程式例題。

例題 1. 解次之聯立方程式

$23x+17y=63$……………………(1)

$17x+23y=57$……………………(2)

此題 x 與 y 之係數互相等，解法如次。

解 (1)…………$23x+17y=63$.

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots 17x+23y=57.$$

$(1)+(2)\ldots\ldots 40x+40y=120.$　$\therefore$　$x+y=3\ldots\ldots(3)$

$(1)-(2)\ldots\ldots 6x-6y=6.$　$\therefore$　$x-y=1\ldots\ldots(4)$

$(3)+(4)\ldots\ldots\ldots 2x=4.$　$\therefore$　$x=2.$

$(3)-(4)\ldots\ldots\ldots 2y=2.$　$\therefore$　$y=1.$

答 $\begin{cases}x=2.\\y=1.\end{cases}$

例題 2.　解次之聯立方程式

$$\frac{2x+1}{3}+\frac{2y+3}{5}=6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{3}(x+5)-\frac{1}{5}(7y+3)=-6\ldots(2)$$

解　去(1)式之分母，則 $10x+5+6y+9=90$. 移項，得 $10x+6y=76$. 以 2 除，得 $5x+3y=38\ldots\ldots\ldots(3)$ 去(2)式之分母，則 $5(x+5)-3(7y+3)=-90$. 去括弧，移項，得 $5x-21y=-106\ldots\ldots(4)$ 從(3)式減(4)式，得 $24y=144$. 故 $y=6$. 以 6 代(3)式之 y. 則 $5x+3\times6=38$. 移項，得 $5x=38-3\times6$. 卽 $5x=20$. 故 $x=4$.

答 $\begin{cases}x=4.\\y=6.\end{cases}$

例題 3.　解次之聯立方程式

$$2.4x-.\dot{3}y=11\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$3.25x+\frac{1}{4}y=17\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

解　化(1)式爲 $2\frac{4}{10}x-\frac{3}{9}y=11$. 卽 $\frac{12}{5}x-\frac{1}{3}y=11$. 以 15 乘兩邊，得 $36x-5y=165\ldots\ldots(3)$，化(2)式爲 $3\frac{25}{100}x+\frac{1}{4}y=17$. 卽 $\frac{13}{4}x+\frac{1}{4}y=17$. 以 4 乘兩邊，得 $13x+y=68\ldots\ldots(4)$，又以 5 乘，則 $65x+5y=340\ldots\ldots(5)$，以(5)式加(3)式。得 $101x=505$. 故 $x=5$. 以 5 代(4)式之 x. 則 $13\times5+y=68$. 移項，得 $y=68-13\times5=3$.

答 $\begin{cases} x=5. \\ y=3. \end{cases}$

類題　解次之聯立方程式

1. $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{y}{3}=-1,\qquad \dfrac{1}{2}(2x-10)+\dfrac{1}{9}y=3.$

2. $\dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=9,\qquad \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=5.$

3. $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}(y+1)=1,\qquad \dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{3}{4}(y-1)=9.$

4. $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2}y=16\dfrac{1}{6},\qquad \dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}y=16\dfrac{1}{6}.$

5. $\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{3}(y+4)=1,\qquad 2x-\dfrac{1}{2}(4y-6)=7.$

6. $\dfrac{2x+3y}{5}-10=-\dfrac{1}{3}y,\qquad \dfrac{4y-3x}{6}-1=\dfrac{3x}{4}.$

7. $.2x+.\dot{3}y=6,\qquad .5x+.25y=8.$

8. $2.7x+2.6y=8.8,\qquad .9x+2.2y=4.4.$

9. $.08x-.21y=.33,\qquad .12x+.7y=3.54.$

10. $5x-4.9y=1,\qquad 3x-2.9y=1.$

11. $3x+9y=2.4\qquad .21x-.06y=.03.$

答
1. $\begin{cases} x=6.6. \\ y=12.6. \end{cases}$　2. $\begin{cases} x=6. \\ y=12. \end{cases}$　3. $\begin{cases} x=8. \\ y=9. \end{cases}$　4. $\begin{cases} x=13. \\ y=5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=13. \\ y=11. \end{cases}$　6. $\begin{cases} x=4. \\ y=9. \end{cases}$　7. $\begin{cases} x=10. \\ y=12. \end{cases}$　8. $\begin{cases} x=2.2. \\ y=1.1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=12. \\ y=3. \end{cases}$　10. $\begin{cases} x=10. \\ y=10. \end{cases}$　11. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{5}. \\ y=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

例題 4.　解次之聯立方程式

$$3x+\frac{6}{y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$12x-\frac{15}{y}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解　$\frac{1}{y}$爲y之倒數，今不以爲倒數，而以爲代未知數之一文字計算.

$$(1)\times 4 \cdots\cdots 12x+\frac{24}{y}=20 \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{(2) \cdots\cdots\cdots\cdots 12x-\frac{15}{y}=7}{}$$

$(3)-(2)\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{39}{y}=13$.化得$13y=39$.故$y=3$. 以3代(1)式之$y$.得$3x+\frac{6}{3}=5$.卽$3x+2=5$.移項得$3x=3$.故$x=1$.

答$\begin{cases} x=1. \\ y=3. \end{cases}$

例題 5.　解次之聯立方程式

$$\frac{3}{x}+\frac{20}{y}=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{3x}+\frac{7}{2y}=1\frac{1}{30} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解　以X與Y代(1),(2)兩式之$\frac{1}{x}$與$\frac{1}{y}$,得$3X+20Y=7\ldots(3)$

$\frac{1}{3}X+\frac{7}{2}Y=\frac{31}{30}\ldots(4)$去(4)式之分母,得$10X+105Y=31\ldots(5)$

$$(3)\times 10 \cdots\cdots 30X+200Y=70 \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{(5)\times 3 \cdots\cdots 30X+315Y=93 \cdots\cdots(7)}{}$$

$(6)-(7)\cdots\cdots-115Y=-23$. $\therefore Y=\frac{1}{5}$. 以$\frac{1}{5}$代(3)式

之 Y. 得 $3X+20\times\frac{1}{5}=7$. 卽 $3X+4=7$. 移項,得 $3X=3$. $\therefore X=1$.

因 $X=\frac{1}{x}, Y=\frac{1}{y}$. 則 $\frac{1}{x}=1$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$. 故 $x=1$, $y=5$.

答 $\begin{cases} x=1. \\ y=5. \end{cases}$

驗算 以 1 與 5 代(1),(2)兩式左邊之 x 與 y.

$$\frac{3}{x}+\frac{20}{y}=\frac{3}{1}+\frac{20}{5}=3+4=7.$$

$$\frac{1}{3x}+\frac{7}{2y}=\frac{1}{3}+\frac{7}{10}=\frac{10}{30}+\frac{21}{30}=1\frac{1}{30}.$$

故 $x=1, y=5$. 與(1),(2)兩式皆恰合.

例題 6. 解次之聯立方程式

$$(2x+3)(y-5)=2y(x-3)-2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2(x-3)+4(3y-2)=80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

解 去(1)式之括弧,則 $2xy-10x+3y-15=2xy-6y-2$. 化簡,得 $-10x+9y=13 \ldots\ldots (3)$ 又去(2)式之括弧,則 $2x-6+12y-8=80$. 化簡,得 $x+6y=47 \ldots\ldots (4)$

$$(3) \ldots\ldots\ldots -10x+9y=13$$

$$(4)\times 10 \ldots\ldots 10x+60y=470 \ldots\ldots\ldots (5)$$

$(3)+(5) \ldots\ldots\ldots\ldots 69y=483$. $\therefore y=7$. 以 7 代(4)式之 y.

得 $x+6\times 7=47$. 卽 $x+42=47$. $\therefore x=5$. 答 $\begin{cases} x=5. \\ y=7. \end{cases}$

類題 解次之聯立方程式

1. $(x-3)(y+4)=(x-1)(y+3)$, $x(y+8)=y(x-10)+22$.

2. $\frac{8}{y}+\frac{3}{x}=3$, $\frac{2}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$.

3. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1$, $\frac{18}{x}+\frac{20}{y}=16$

4. $2y-\frac{3}{x}=3,\qquad 8y+\frac{15}{x}=-6.$

5. $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2,\qquad 5\left(\frac{2}{y}-\frac{3}{2x}\right)=\frac{25}{12}.$

6. $y(5-x)=x(3-y)+8,\quad 6xy+2=-2x(1-3y).$

7. $xy-6(y-1)=(x-1)(y-1),\qquad x=y+1.$

8. $(x-3)(7y-2)=7(x-5)(y-4)-2,\quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2\frac{1}{3}.$

答 1. $\begin{cases}x=\frac{67}{13}.\\ y=-\frac{25}{13}.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=3.\\ y=4.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=3.\\ y=2.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}.\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=\frac{42}{11}.\\ y=\frac{42}{17}.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=-1.\\ y=1.\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=\frac{5}{2}.\\ y=\frac{3}{2}.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x=4.\\ y=2.\end{cases}$

---

15. 聯立三元一次方程式解法.

例 1. 解次之聯立方程式

$2x-y-z=2$..................(1)

$5x+y-2z=3$ ....(2)

$x-4y+z=9$..................(3)

以(1),(2),(3)三式之(1),(2)兩式或(1),(3),兩式或(2),(3)兩式之三組方程式中,選用二組方程式,各依消去法(常用加減消去法)消去相同之一未知數,則成二元一次聯立方程式,依13節解聯立二元一次方程式之法解之,即求得二未知數之值,以其值代入原三式中最簡單之一式,即求得他一未知數之值.

初消去之一未知數.常爲 z. 有時擇未知數之係數最小者先消去.

解 計算之細草

(1)...............$2x-y-z=2$

$$\begin{array}{ll}
& (3)\cdots\cdots\cdots\cdots x-4y+z=9 \\
\hline
& (1)+(3)\quad\cdots\cdots\cdots 3x-5y=11\cdots\cdots\cdots(4) \\
\text{又} & (1)\times 2\quad\cdots\cdots 4x-2y-2z=4\quad\cdots\cdots\cdots(5) \\
& (2)\cdots\cdots\cdots\cdots 5x+y-2z=3 \\
\hline
& (5)-(2)\cdots -x-3y\qquad =1\quad\cdots\cdots\cdots(6) \\
\text{又} & (4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3x-5y=11 \\
& (6)\times 3\cdots\cdots\cdots\ -3x-9y=3\quad\cdots\cdots\cdots(7) \\
\hline
\end{array}$$

$(7)+(4)\cdots\cdots\cdots\cdots-14y=14.\ \therefore y=-1.$ 以-1代(4)式之y. 得$3x-5(-1)=11$. 卽$3x+5=11$. 移項,得$3x=6.\ \therefore x=2.$ 以2與-1代(1)式之x與y. 則$2\times2-(-1)-z=2$. 卽$4+1-z=2.\ \therefore z=3.$

答$\begin{cases} x=2. \\ y=-1. \\ z=3. \end{cases}$

驗算 以$2,-1,3$代(1),(2),(3)三式左邊之x,y,z.

$2x-y-z=2\times2-(-1)-3=4+1-3=2.$

$5x+y-2z=5\times2+(-1)-2\times3=10-1-6=3.$

$x-4y+z=2-4(-1)+3=2+4+3=9.$

故$x=2,y=-1,z=3$.與(1),(2),(3)三式皆恰合。

例2. 解次之聯立方程式

$x+y=7\cdots\cdots(1)\quad y+z=9\cdots\cdots(2)\quad z+x=8\cdots\cdots(3)$

凡未知數不完備之三元一次聯立方程式,常有簡單之解法。

解 $(1)+(2)+(3)\quad 2x+2y+2z=24.\ \therefore x+y+z=12\cdots\cdots(4)$

$(4)-(1)\ \cdots\cdots\cdots z=12-7=5.$

$(4)-(2)\ \cdots\cdots\cdots x=12-9=3.$

$(4)-(3)\ \cdots\cdots\cdots y=12-8=4.$

答$\begin{cases} x=3. \\ y=4. \\ z=5. \end{cases}$

別解 $(1)-(3)\cdots\cdots\cdots y-z=-1\cdots\cdots(4).$

$(2)+(4)\cdots\cdots\cdots 2y=8.\qquad \therefore y=4.$

$(2)-(4)$ ………$2z=10$.　$\therefore z=5$.以 4 代(1)式之 y.則 $x+4=7$.　$\therefore x=3$.

例 3. 解次之聯立方程式

$$\frac{2x-y}{3}=\frac{3y+2z}{4}=\frac{x-y-z}{5}=4$$

解 題式之前三節,皆與第四節之 4 相等,分爲三式,各去分母,得次之三式.

$$2x-y\quad=12 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3y+2z=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x-y-z\quad=20 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

計算之細草

$$(2) \cdots\cdots\cdots\cdots 3y+2z=16$$

$$(3)\ \times 2 \cdots\cdots 2x-2y-2z=40 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$(2)+(4)\ \cdots\cdots 2x+y\quad=56 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

又 $(1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2x-y=12$

$$(5) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2x+y=56$$

$(1)+(5)$ ………… $4x\quad=68$.　$\therefore x=17$.以 17 代(1)式之 x.則 $2\times17-y=12$.即 $34-y=12$.　$\therefore y=22$.　以 22代 (2)式之 y.則 $3\times22+2z=16$.即 $66+2z=16$.移項,得 $2z=-50$. $\therefore z=-25$.

$$答\begin{cases}x=\ \ 17.\\ y=\ \ 22.\\ z=-25.\end{cases}$$

類題　解次之聯立方程式

1. $x+3y+5z=6$,　$2x-y-4z=5$,　$7x-2y+6z=2$.

2. $2x-3y=6$,　$3y-2z=5$,　$4x-y+2z=13$.

3. $x+3y+2z=11$,　$2x+y+3z=14$,　$3x+2y+z=11$.

4. $2x-3z=11$,　$5z+x=12$,　$3x-4y=5$.

5 $4x+5y-z=6,\quad x-y-5z=18,\quad 7x+11y-2z=9.$

6. $x+y+z=5,\quad 3x-5y+7z=75,\quad 9x-11z+10=0.$

7. $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=\frac{13}{2},\quad x+2y+z=-9,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+z=2.$

答 1. $\begin{cases}x=2.\\y=3.\\z=-1.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=\frac{33}{8}.\\y=\frac{3}{4}.\\z=-\frac{11}{8}.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}x=2.\\y=1.\\z=3.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=7.\\y=4.\\z=1.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x=2.\\y=-1.\\z=-3.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=5.\\y=-5.\\z=5.\end{cases}$ 7. $\begin{cases}x=11.\\y=-11.\\z=2.\end{cases}$

---

16. 聯立四元一次方程式解法

例 解次之聯立方程式

$x+2y+3z+u=17 \ldots\ldots(1)\qquad 3x-5y+4z-2u=3 \ldots\ldots(2)$

$2x+y+4z-3u=16 \ldots(3)\qquad 4x-3y+z+3u=12 \ldots\ldots(4)$

此(1),(2),(3),(4)四方程式，先選用二式爲一組，依消去法消去未知數 x,y,z,u 之一未知數，又選用二式爲一組，消去與前相同之一未知數，再選用二式爲一組，亦消去與前相同之一未知數，則成含三未知數之三元一次聯立方程式，如前節解聯立三元一次方程式之法解之，卽求得三未知數之値，以三未知數之値，代入原方程式之最簡單之一式，卽求得他一未知數之値。

解 計算之細草

$(1)\times2 \ldots\ldots\ldots\ldots 2x+4y+6z+2u=34 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$

$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3x-5y+4z-2u=3$

$(5)+(2) \ldots\ldots\ldots 5x-y+10z\quad =27 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

又 $(1)\times3 \ldots\ldots\ldots\ldots 3x+6y+9z+3u=51 \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$

$$(3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2x+y+4z-3u=16$$

$$(7)+(3)\cdots\cdots\ 5x+7y+13z \qquad =67\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

又 $(3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2x+y+4z-3u=16$

$$(4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4x-3y+z+3u=12$$

$$(3)+(4)\cdots\cdots\cdots 6x-2y+5z \qquad =28\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

以上求得之(6),(8),(9)三式爲三元一次聯立方程式，解之於次，

$$(6)\times 7\cdots\cdots\cdots 35x-7y+70z=259\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$(8)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5x+7y+13z=67$$

$$(10)+(8)\cdots\cdots 40x \qquad +83z=326\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

又 $(6)\times 2\cdots\cdots\cdots 10x-2y+20z=74\ \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$

$$(9)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6x-2y+5z=28$$

$$(12)-(9)\cdots\cdots\cdots\cdots 4x+15z=46\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

以上求得之(11),(13)二式爲二元一次聯立方程式，解之於次。

$$(13)\times 10\cdots\cdots\cdots 40x+150\ z=460\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$(11)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 40x+83z=326$$

$(14)-(11)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 67z=134.\quad \therefore z=2.$ 以 2 代(13)式之 z. 則 $4x+15\times 2=46.$ 移項得 $4x=46-30.\quad \therefore x=4.$ 以 4 與 2 代(6)式之 x 與 z. 則 $5\times 4-y+10\times 2=37.$ 移項，得 $-y=37-40.\quad \therefore y=3.$ 以 4, 3, 2 代(1)式之 x, y, z. 則 $4+2\times 3+3\times 2+u=17.$ 移項，

得 $u=17-16.\quad \therefore u=1.$ 答 $\begin{cases} x=4,\ y=3, \\ z=2,\ u=1, \end{cases}$

注意 五元以上之聯立方程式，由聯立四元一次方程式解法，可以類推，又四元以上之聯立方程式，其未知數不完備者，亦如三未知數不完備之聯立三元一次方程式，常有簡便之解法。

類題 解次之聯立方程式

1. $x+y+z-u=2,\quad 2x+3y-2z+3u=14,$
$5x+2y+3z-2u=10,\quad x+2y-z+4u=18.$

2. $x+y+z+u=1,\quad 2y-x-4z+2u=5,$
$6x+9z-y+u=4,\quad 2x+4y+3z+3u=-1.$

3. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z+\frac{1}{5}u=4,\quad 2x+3y-2z+u=10,$
$\frac{1}{2}(x+z)-\frac{2}{3}y+2u=11,\quad x+y+z-u=4.$

4. $x+y+z=60,\quad y+z+u=90,$
$z+u+x=80,\quad u+x+y=70.$

答 1. $\begin{cases}x=1, & z=3,\\ y=2, & u=4.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=1, & z=-1.\\ y=-3, & u=4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=2, & z=4,\\ y=3, & u=5.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}x=10, & z=30,\\ y=20, & u=40.\end{cases}$

---

17. 多元聯立一次方程式雜例題.

例題 1. 解次之聯立方程式

$$3x+\frac{1}{2}y+\frac{4}{z}=3\cdots\cdots\cdots(1)\qquad 5x+2y-\frac{6}{z}=8\cdots\cdots(2)$$

$$7x-3y+\frac{10}{z}=-26\cdots\cdots(3)$$

解 $(1)\times 6\cdots\cdots\cdots 18x+3y+\frac{24}{z}=18\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)\cdots\cdots\cdots\cdots 7x-3y+\frac{10}{z}=-26$

$(4)+(3)\cdots\cdots 25x\quad +\frac{34}{z}=-8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

又 $(1)\times 4\cdots\cdots 12x+2y+\frac{16}{z}=12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$$(2)\cdots\cdots\cdots\cdots 5x+2y-\frac{6}{z}=8$$

$$(6)-(2)\cdots 7x \qquad +\frac{22}{z}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

以上求得之(5),(7)兩式爲二元一次聯立方程式，解之於次。

$$(5)\times 7\cdots\cdots\ 25\times 7x+\frac{238}{z}=-56\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$(7)\times 25\cdots\cdots 7\times 25x+\frac{550}{z}=100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$(8)-(9)\ \cdots\cdots\cdots\cdots -\dfrac{312}{z}=-156.$ 以-312除兩邊，

得$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$. $\therefore z=2.$ 以2代(7)式之z,則$7x+\dfrac{22}{2}=4.$

卽$7x+11=4.$ $\therefore x=-1.$ 以-1與2代(1)式之x與z.則

$3(-1)+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{4}{2}=3.$ 卽$-3+\dfrac{1}{2}y+2=3.$移項，

得$\dfrac{1}{2}y=3+3-2=4.$ $\therefore y=8.$ 答$\begin{cases}x=-1.\\ y=8.\\ z=2.\end{cases}$

例題2. 解次之聯立方程式

$$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=4\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \frac{6}{x}-\frac{9}{y}+\frac{15}{z}=3\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{10}{z}=2\frac{5}{6}\cdots\cdots(3)$$

解 以X,Y,Z代$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}$.則題式以次之(1),(2),(3)三式表之。

$$4X+3Y+5Z=4\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad 6X-9Y+15Z=3\cdots\cdots(2)$$

$$X+Y+10Z=\frac{17}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從(1),(2),(3)三式求X,Y,Z如次

$$(1)\cdots\cdots\cdots\cdots 4X+3Y+5Z=4$$

$$(3)\times 4\cdots\cdots 4X+4Y+40Z=\frac{68}{6}\cdots\cdots(4)$$

$$(1)-(4)\cdots\cdots -Y-35Z=4-\frac{68}{6}=-\frac{22}{3}\cdots\cdots(5)$$

又 $(2)\cdots\cdots\cdots 6X-9Y+15Z=3$

$$(3)\times 6\cdots\cdots 6X+6Y+60Z=17\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(2)-(6)\cdots\cdots -15Y-45Z=-14\cdots\cdots(7)$$

從(5)與(7)求 Y 與 Z 如次。

$$(5)\times 15\cdots\cdots -15Y-525Z=-110\cdots\cdots(8)$$

$$(7)\cdots\cdots\cdots\cdots -15Y-45Z=-14$$

$$(8)-(7)\cdots\cdots\cdots -480Z=-96.$$

$\therefore Z=\frac{1}{5}$，以 $\frac{1}{5}$ 代(5)式之 Z 則 $-Y-35\times\frac{1}{5}=-\frac{22}{3}$，

即 $-Y-7=-7\frac{1}{3}$．　$\therefore Y=\frac{1}{3}$．以 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{5}$ 代(1)式之 Y,Z．

則 $4X+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{5}=4$．即 $4X+2=4$．移項，得 $4X=2$．

$\therefore X=\frac{1}{2}$．從 $X=\frac{1}{x}$，$Y=\frac{1}{y}$，$Z=\frac{1}{z}$．得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$，

$\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$．　$\therefore x=2, y=3, z=5$．　答

類題　解次之聯立方程式

1. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=5$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1$.

2. $\frac{1}{3}x+2y-\frac{4}{z}=1$, $2x-4y+\frac{6}{z}=5$,　$x+y+\frac{8}{z}=8$.

3. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{5}{z}=1$, $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{10}$,　$\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=1\frac{1}{2}$.

4. $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{10}{z}=4,\ \frac{2}{x}-\frac{8}{y}+\frac{15}{z}=1,\quad \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4.$

答 1. $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{4}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x=\frac{4}{3}, \\ y=\frac{4}{5}, \\ z=\frac{20}{9}. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=5. \end{cases}$

問題 解次之聯立方程式

1. $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2},\qquad \frac{x}{5}-\frac{3}{10}y=\frac{1}{2}.$

2. $x+\frac{3}{y}=3\frac{1}{2},\qquad 3x-\frac{2}{y}=8\frac{2}{3}.$

3. $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10.$

4. $3x+1=2y+1=3y+2x.$

5. $x+y+z=1,\quad 2x+3y+z=4,\quad 4x+y+z=16.$

6. $x+y+z=1,\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1,\ \frac{5}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{z}{2}=1.$

7. $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+3y+z=6.$

8. $y+z=9,\quad z+x=5,\quad x+y=1.$

9. $x+y+z-u=2,\quad 2x+3y+5z+2u=12,$

$5x-2y-3z+u=1,\quad 6x+7y-5z-4u=4.$

10. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=9,\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{z}=2,\ \frac{7}{x}+\frac{2}{y}-\frac{5}{z}=4.$

11. $\frac{3}{x}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=3,\ \frac{6}{x}+\frac{y}{2}+2z=14,\quad \frac{9}{x}+3y-2z=5.$

12. $\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{5}y\right)+\frac{x+\frac{1}{5}y}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{4}{5}y-2}{6}-x-y\right),$

$$x-2y-\frac{3y-5x}{2}=\frac{11}{2}(x+y)+3(x-y).$$

18. 聯立一次方程式應用問題

(1) 定未知數.

作方程式.

解方程式.

驗算答之恰合與否.

上之計算次序方法,與一元一次方程式應用問題無異.

(2) 設 $x,y,z,$………等未知數之數,多於方程式之數,不能得確定之答,若方程式之數,多於未知數之數,(如後之第二種不能問題例 3)每生不可能之結果,凡遇未知數之數不等於方程式之數,難以此章之方法解之.

例題 1. 有甲乙二數,其和為 75. 甲數之 3 倍,比乙數之 4 倍多 15. 求甲乙二數.

解 以 x,y 代甲乙二數,則甲與乙之和為 $x+y$. 甲之 3 倍為 $3x$. 比乙之 4 倍多 15 為 $4y+15$. 故得次之二方程式.

$$x+y=75\text{…………}(1)\qquad 3x=4y+15\text{…………}(2)$$

方程式解法

從(1)式之 3 倍減(2)式,則 $3y=75\times3-4y-15$. 移項

$3y+4y=225-15$. 即 $7y=210$. $\therefore y=30$. 以 30 代(1)式之 y. 則

$x+30=75$. $\therefore x=45$.

答 $\begin{cases}\text{甲}\,45.\\ \text{乙}\,30.\end{cases}$

驗算 甲與乙為 45 與 30.則甲與乙之和為 $45+30=75$.而甲之 3 倍為 $45\times3=135$. 乙之 4 倍加 15 為 $30\times4+15=135$.故與題恰合.

注意 用多元一次方程式解法之問題,有時能用一元一次方程式之解法解之,今舉其得失如次.

(一) 用多元一次方程式,容易表問題之意義,若以一元一次方程

式表之則思考較爲費力。

(二) 解方程式及驗算，以一元一次方程式之法爲簡便。

以上之說明各有得失，因表問題之意義爲第一事，而解方程式之事在後，故用一元不如用多元，若用多元或一元皆易得方程式，則用多元不如用一元。

例題 2. 有甲乙丙三數，甲之 2 倍與乙之 3 倍之和爲 65. 又丙之 4 倍比乙之 5 倍多 5. 而乙之 4 倍，等於甲丙和之 2 倍，問甲乙丙各幾何。

解 以 x,y,z 代甲乙丙三數，依題意得次之三式。

$2x+3y=65$ ……………… (1)

$4z=5y+5$ ……………… (2)

$4y=2(x+z)$ …………… (3)

方程式解法

(1) ……………… $2x+3y=65$

(3) ………… $2x-4y+2z=0$

---

(1) − (3) ……… $7y-2z=65$ ………… (4)

又 (2) …………… $-5y+4z=5$

(4) ×2 ………… $14y-4z=130$ ………… (5)

---

(2) + (5) ……… $9y=135$. $\therefore y=15$. 以 15 代 (2) 式之 y. 則 $4z=5\times15+5=80$. $\therefore z=20$. 又以 15 代 (1) 式之 y.

得 $2x+3\times15=65$. 卽 $2x+45=65$. $\therefore x=10$ 答 $\begin{cases}甲\ 10.\\乙\ 15.\\丙\ 20.\end{cases}$

驗算 甲乙丙三數，一爲 10, 一爲 15, 一爲 20. 則甲之 2 倍與乙之 3 倍之和爲 $10\times2+15\times3=65$. 又丙之 4 倍爲 $20\times4=80$. 而乙之 5 倍爲 $15\times5=75$. 故丙之 4 倍比乙之 5 倍多 5 又乙之 4 倍爲 $15\times4=60$. 與甲丙和之 2 倍 $(10+20)\times2=60$ 相等，知答數與題皆

恰合。

類題

1. 有甲乙二數，甲之 3 倍比乙之 4 倍多 4. 而甲與乙之和爲其差之 5 倍，求甲數及乙數。

2. 有甲乙二數，甲之 5 倍與乙之 6 倍之和爲 140. 又甲之 7 倍與乙之 4 倍之和爲 130. 問甲乙各若干。

3. 甲乙二數之和爲 20. 而甲之 7 倍比乙之 9 倍多 60. 求甲數乙數。

4. 甲數之半與乙數之 $\frac{1}{4}$ 之和爲 50. 又甲數之 $\frac{2}{5}$ 與乙數之 $\frac{1}{10}$ 之差爲 10. 求甲乙二數。

5. 有甲乙丙三數，甲之 3 倍，等於乙丙和之 4 倍，又乙之 5 倍，等於丙之 10 倍，而甲等於從乙之 3 倍減 2. 問甲乙丙各幾何。

6. 甲乙丙三數之和爲 120. 而甲之 3 倍比乙之 2 倍與丙之 3 倍之和少 20. 又乙之 3 倍等於丙之 4 倍，問甲乙丙各若干。

7. 有甲乙丙三數，甲與丙之和，等於乙之 2 倍，又甲之五分之一，等於乙之四分之一，而乙之二分之一比丙少 1. 問甲乙丙各若干。

答　1. $\begin{cases}\text{甲 } 12.\\ \text{乙 } 8.\end{cases}$　2. $\begin{cases}\text{甲 } 10.\\ \text{乙 } 15.\end{cases}$　3. $\begin{cases}\text{甲 } 15.\\ \text{乙 } 5.\end{cases}$　4. $\begin{cases}\text{甲 } 50.\\ \text{乙 } 100.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\text{甲 } 4.\\ \text{乙 } 2.\\ \text{丙 } 1.\end{cases}$　6. $\begin{cases}\text{甲 } 50.\\ \text{乙 } 40.\\ \text{丙 } 30.\end{cases}$　7. $\begin{cases}\text{甲 } 5.\\ \text{乙 } 4.\\ \text{丙 } 3.\end{cases}$

例題 3. 原有二位之整數，其數字之和爲 10. 而以數字交換其位置之二位之整數，比原數多 18. 求原數。

解　以 x 代十位之數字，以 y 代一位之數字，則原數爲 $10x+y$. 又交換數字之位置所得之二位數爲 $10y+x$. 故得次之方程式。

$$x+y=10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$10y+x=10x+y+18 \ldots\ldots\ldots(2)$$

化(2)得 $y-x=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$(1)+(3)\ldots 2y=12.\quad \therefore y=6.$

$(1)-(3)\ldots 2x=8.\quad \therefore x=4.$　答 46.

驗算　二位之整數為 46. 則交換其數字之位置之二位數為 64. 求此二數之差,得 $64-46=18$.與題恰合。

例題 4.　有三位之整數,其數字之和為 12. 而百位之數字與一位之數字之和,等於十位之數字之 2 倍,又數字之位置倒轉,其數比原數多 198. 求原數。

解　以 x 代百位之數字,以 y 代十位之數字,以 z 代一位之數字,則所求三位之整數為 $100x+10y+z$. 而倒轉數為 $100z+10y+x$. 故得次之方程式。

$$x+y+z=12 \ldots\ldots\ldots(1)\qquad x+z=2y \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$100x+10y+z+198=100z+10y+x \ldots\ldots\ldots(3)$$

化(3)得 $x-z=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

從(1),(2),(4)三式求 x, y, z 如次。

$(1)-(2) \ldots\ldots y=12-2y$.移項,得 $3y=12.\quad \therefore y=4$. 以 4 代(1)式之 y, 則 $x+4+z=12$. 兩邊各減 4. 得 $x+z=8 \ldots\ldots\ldots(5)$ 以(5)加(4). 則 $2x=6.\quad \therefore x=3$. 又從(5)減(4)則 $2z=10.\quad \therefore z=5.$　答 345.

驗算　所求之數為 345. 則數字之和為 $3+4+5=12$. 又十位數字之 2 倍為 $4\times 2=8$. 而百位之數字與一位之數字之和為 $3+5=8$. 故相等。又倒轉數與原數之差為 $543-345=198$. 皆與題恰合。

例題 5.　有長方形之地基,若闊加 5 丈長加 2 丈,則地基成正方形,而面積比長方形之面積多 130 平方丈,問地基之長與闊各若干丈。

解　設闊為 x 丈.長為 y 丈,則長方形之面積為 xy 平方丈,而闊加 5 丈長加 2 丈之面積為 $(x+5)(y+2)$ 平方丈,又 $x+5$ 與 $y+2$ 同為正方形之一邊,故得次之方程式。

$$(x+5)(y+2)=xy+130\text{..........}(1)$$

$$x+5=y+2\text{..........}(2)$$

化(1)得 $2x+5y=120$..........(3)

化(2)得 $x-y=-3$..........(4)

從(3),(4)兩式求 x,y 如次。

$$(3)\text{..........}2x+5y=120$$

$$(4)\times 2\text{..........}2x-2y=-6\text{..........}(5)$$

$(3)-(5)$ ....$7y=126$. $\therefore y=18$. 以 18 代(4)式之 y.

則 $x-18=-3$. $\therefore x=15$. 答 $\begin{cases}\text{長 18 丈。}\\ \text{闊 15 丈。}\end{cases}$

驗算 長 18 丈,闊 15 丈,一加 2 丈,一加 5 丈,則長闊同為 20 丈,成正方形,而正方形與長方形面積之差為 $(20\times 20-18\times 15)$ 平方丈 $=130$ 平方丈,與題恰合。

類題

1. 有二位之整數,其數字之和為 13. 而從原數減 45. 等於倒轉原數之數字位置之二位整數,求原數。

2. 有二位之整數,等於其數字之和之 5 倍,若加 9 於原數,則等於倒轉原數之數字位置之二位整數,求原數。

3. 有三位之整數,其百位之數字,等於十位之數字與一位之數字之和,以百位之數字與十位之數字交換其位置之三位整數,比原數少 180.求原數。

4. 有三位之整數,其各數字相加,等於一位之數字之 4 倍,又十位之數字與一位之數字之差,等於百位之數字之 3 倍,而倒轉原數之數字位置之三位數,比原數多 99. 求原數。

5. 有長方形之宅地,若闊加 4 丈,則面積增加 32 平方丈,若長闊各加 3 丈,則面積增加 51 平方丈,求原有宅地之長闊。

6. 有地為長方形,若長闊各減 3 丈.則面積減少 75 平方丈,若闊

加2丈，則成正方形，求地之長闊。

7. 有長方形之地，其闊比長之$\frac{1}{2}$少2丈，若闊加4丈，長減8丈，則成正方形，問地之長闊各若干丈。

答 1. 94. 2. 45. 3. 612. 4. 152.

5. $\begin{cases}\text{長 } 8 \text{ 丈.}\\ \text{闊 } 6 \text{ 丈.}\end{cases}$ 6. $\begin{cases}\text{長 } 15 \text{ 丈.}\\ \text{闊 } 13 \text{ 丈.}\end{cases}$ 7. $\begin{cases}\text{長 } 20 \text{ 丈.}\\ \text{闊 } 8 \text{ 丈.}\end{cases}$

例題5. 有分數，分子加3則爲$\frac{1}{2}$，分母加3則爲$\frac{2}{7}$．求原分數。

解 以$\frac{x}{y}$代所求之分數，依題意得x之方程式。

$$\frac{x+3}{y}=\frac{1}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\qquad \frac{x}{y+3}=\frac{2}{7}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

化(1)得$2x-y=-6$ .... (3) 化(2)得$7x-2y=6$... (4)

從(3)，(4)兩式求x,y如次。

(4)............$7x-2y=6$

(3)$\times 2$ ...... $4x-2y=-12$..............(5)

(4)－(5) ...$3x\quad =18$. $\therefore x=6$. 以6代(3)式之x.

則$2\times 6-y=-6$. $\therefore y=18$. 答$\frac{6}{18}$.

驗算 原分數爲$\frac{6}{18}$加3於原分數之分子則$\frac{6+3}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$．加3於原分數之分母，則$\frac{6}{18+3}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$．與題恰合。

注意 (1)此問題雖爲分數方程式之題，然有本篇之學力程度，即能解之，故特提出。(2)求得此問題$\frac{x}{y}$之值爲$\frac{6}{18}$不宜用約分約爲$\frac{1}{3}$.

例題6. 有銀1000圓，存儲甲乙兩銀行生利，甲銀行之年利率為百分之五，乙銀行之年利率為百分之四，放出一年，甲處之利銀比乙處多5圓，問二處存銀之數各幾何。

解 設存於甲銀行之數為x圓，存於乙銀行之數為y圓，則甲處一年之利為$\frac{5}{100}x$圓，乙處一年之利為$\frac{4}{100}y$圓，故得次之方程式

$$x+y=1000\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{100}x-\frac{4}{100}y=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(2)\times100$ 得　$5x-4y=500\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

從(1)，(3)兩式求x, y如次。

$(1)\times4\cdots\cdots\cdots4x+4y=4000\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)\cdots\cdots\cdots5x-4y=500$

$(4)+(3)\cdots\cdots9x=4500.$　$\therefore x=500.$ 以500代(1)式之x。則$500+y=1000.$　$\therefore y=500.$　答二處各500圓。

驗算 兩銀行各存儲500圓，合計為1000圓，依年利率百分之五計算，500圓之利息為$\frac{5}{100}\times500$圓$=25$圓，依年利率百分之四計算，500圓之利息為$\frac{4}{100}\times500$圓$=20$圓，而25圓-20圓$=5$圓，與題恰合。

例題7. 有甲乙丙三工匠，甲乙二人於20日間能合造一器，甲丙二人合造，須24日，乙丙二人合造須40日，求三人獨造一器之日數。

解 以x, y, z代甲乙丙三人獨造一器之日，數則$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$為甲乙丙各人每日之成績，(即一人一日所造成器之一部分)

而$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. 即甲乙與甲丙及乙丙每日二人合作之成績，故得次之方程式。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{40}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從(1),(2),(3)三式求x, y, z.不必先去分母,卽以$\frac{1}{x}$,$\frac{1}{y}$,$\frac{1}{z}$爲未知數求之較便。(1)+(2)+(3)

爲　$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}.$$

卽$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{6}{120}+\frac{5}{120}+\frac{3}{120}$. $\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{120}\cdots\cdots(4)$

$$(4)-(1)\cdots\cdots\cdots\frac{1}{z}=\frac{7}{120}-\frac{1}{20}=\frac{1}{120}.\quad\therefore z=120.$$

$$(4)-(2)\cdots\cdots\cdots\frac{1}{y}=\frac{7}{120}-\frac{1}{24}=\frac{2}{120}.\quad\therefore y=60.$$

$$(4)-(3)\cdots\cdots\cdots\frac{1}{x}=\frac{7}{120}-\frac{1}{40}=\frac{4}{120}.\quad\therefore x=30.$$

答　甲30日,乙60日,丙120日。

驗算　甲乙丙三人各造一器爲30日,60日,120日則每日各人之成績爲$\frac{1}{30}$,$\frac{1}{60}$,$\frac{1}{120}$;而甲乙二人合作20日,則$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)\times 20=1$.甲丙二人合作24日,則$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{120}\right)\times 24=1$.乙丙二人合作40日,則$\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{120}\right)\times 40=1$.故答與題恰合。

類題

1. 有分數,加4於分數之分子,則等於$\frac{7}{9}$.從分數之分子減1.則等於$\frac{1}{2}$.求原分數。

2. 有兩分數之和為 $1\frac{31}{198}$,其分子一為 6, 一為 11, 其兩分母交換,則兩分數之和為 $1\frac{1}{3}$.求原有兩分數.

3. 有等於 $\frac{3}{5}$ 之分數,其分母分子同加某數,則等於 $\frac{2}{3}$.若從原分數之分母分子,同減去比前之某數多 3 之數,則等於 $\frac{1}{3}$ 求原分數.

4. 以銀若干圓放出生利,至滿六年時,依單利法計算,本利合計有銀 2600 圓,若滿十年,則有 3000 圓,求本銀及利率.

5. 甲乙丙三人共欠銀 5500 圓,其利率甲為百分之十,乙為百分之十五,丙為百分之五,至滿一年,三人所出之利銀相等,問各欠銀若干圓.

6. 甲乙丙三人,各放出本銀若干圓生利,乙之本銀比甲多 100 圓,而利率比甲多百分之一,丙之本銀比甲多 150 圓,而利率比甲多百分之二,放出一年所得之利息.乙比甲多 8 圓,丙比甲多 15 圓,問本銀利率各幾何.

答 1. $\frac{10}{18}$.　2. $\frac{6}{11}$, $\frac{11}{18}$.　3. $\frac{9}{15}$,　4. $\begin{cases}\text{本銀 2000 圓.}\\\text{利率百分之五.}\end{cases}$

5. 甲 1500 圓.　乙 1000 圓.　丙 3000 圓.

6. $\begin{cases}\text{甲 300 圓.}\\\text{利率百分之四.}\end{cases}$ $\begin{cases}\text{乙 400 圓.}\\\text{利率百分之五.}\end{cases}$ $\begin{cases}\text{丙 450 圓.}\\\text{利率百分之六.}\end{cases}$

問題四

1. 龜鶴頭數之和 160. 足數之和 420. 求龜數及鶴數.

2. 甲乙二人,各有銀若干圓,若乙與甲 100 圓,則二人所有之數相等,若甲與乙 150 圓,則乙之總數為甲之餘數之 6 倍,求二人原有之銀數.

3. 步行 7 日本里,(日本 1 里之長為 12960 日本尺,約與中國之

7 里相當)比乘人力車多費 5 點鐘時間，知步行 1 里半之時間，乘人力車行 3 里半，問 1 點鐘時間，徒步與乘車各行若干日本里。

4. 甲乙二人，各有銀若干圓，若乙與甲 50 圓，則甲之總數爲乙之餘數之 2 倍，若甲用去 10 圓，乙用去 30 圓，則二人所餘之數相等，求二人原有之銀數。

5. 有數人分銀，若增加 5 人，則每人所得減少 2 圓，若減少 4 人，則每人所得增加 4 圓，求原有人數及每人所得之銀數。

6. 有人買酒 30 斤醬油 50 斤，賣酒獲利爲原價之十分之三，賣醬油獲利爲原價之十分之二，共賺銀 13 圓，若酒與醬油平均獲利百分之二十五，則少賺銀 5 角，問原價各幾何。

7. 分 180 圓爲二分，其大數之 $\frac{1}{4}$ 與小數之 $\frac{1}{3}$ 之和，比大小二數之差之 4 倍少 93 圓，問大小二分各幾何。

8. 有人以銀 2550 圓，買牛 10 頭馬 15 匹，賣牛獲利十分之二，賣馬獲利十分之一，共收回本利 2925 圓，問原價各幾何。

9. 某會有會員若干名，若增加會員 5 名，則每人所出之會費，比豫定之數少銀 1 角，若減少會員 6 名，則每人須多出銀 1 角 5 分，問原有會員及每人所出會費之數。

10. 銀幣 50 枚之價，合計 16 圓 5 角，其銀幣之種類，有 5 角 2 角 1 角三種，今以 5 角之銀幣全換値銀 5 分之鎳幣，以 1 角之銀幣全換値銀 1 分之銅幣，則換得之鎳幣與未換之銀幣，總數爲 365 枚，求三種銀幣之數。

11. 有甲乙二工匠，能於 30 日間合造成一器，今造一器，初用二匠合作，至 18 日之後，乙匠停息，甲匠繼續作工 20 日而成，問獨造一器各須若干日。

12. 有火輪車從甲地至乙地須若干點鐘，若比平均之速度每 1 點鐘加增 5 哩，則能早到兩點鐘，若比平均之速度每 1 點鐘減少 5 哩，則遲到兩點半鐘，求平均之速度及兩地之距離。

13. 買甲茶3斤乙茶5斤，合計銀7圓6角，其後乙茶之價，減少十分之二，買甲茶6斤乙茶11斤，合計銀14圓2角4分，問甲茶乙茶之原價各幾何．

14. 數人分銀，若每人分6圓，不足7圓，若每人分5圓，則餘12圓，問銀數及人數．

15. 甲乙二人，共有銀1200圓，甲用去$\frac{2}{7}$，乙用去$\frac{3}{8}$，二人所餘之銀相等，問二人原有銀各幾何．

16. 甲乙二種酒混和，其甲量與乙量之比為2:3，每升值銀8角2分．又甲量與乙量之比為3:7，每升值銀7角9分．求甲酒乙酒各1升之價．

17. 有兄弟二人，從前兄之年齡，等於現今弟之年齡時，為弟當時之年齡之2倍，又以後弟之年齡，等於現今兄之年齡時，其時兄弟年齡之和為91歲，問兄弟現今之年齡各幾歲．

18. 有甲乙二整數，其和為1492．以甲數除乙數，得整商25．賸餘10．問甲乙二數各若干．

19. 甲乙二人作工6日，得工銀12圓，甲丙二人作工12日，得工銀21圓6角，乙丙二人作工9日，得工銀14圓4角，求甲乙丙三人每日之工價．

20. 有甲乙丙三水管，接通水池，開甲乙二管20分鐘，或開甲丙二管18分鐘，或開乙丙二管15分鐘，皆能使池中水滿，若三水管齊開，問幾分鐘時間滿池．

21. 某國之鐵路章程，旅客所攜之物件，重量在25公斤之內，不收運費，帶50公斤之物件，旅行200哩，運費為25法郎，帶35公斤之物件，旅行150哩，運費為16$\frac{1}{2}$法郎，問旅行100哩，有100公斤之物件，須出運費幾何．

22. 有五位之整數，分前三位為三位之整數，後二位為二位之整數，

加 10 於三位之整數，等於二位之整數之 4 倍，又移右二數字於左三數字之前之五位整數，比原數多 34758，求原數。

19. 負數之根

(一) 一次方程式之根，變更符號之例.

某一次方程式與變更未知數符號之方程式之根比較，其絕對值相等，而符號相反。

例 設方程式爲 $3x+5=8(x+5)$...(1) 化(1)式得 $3x-8x=40-5$. 卽 $-5x=35$. $\therefore x=-7$.

今變更(1)式之 x 之符號，則 $-3x+5=8(-x+5)$......(2) 化(2)式得 $-3x+8x=40-5$. 卽 $5x=35$. $\therefore x=7$.

變(1)式之未知數符號爲(2)式，其根之符號與(1)式之根之符號相反。

(二) 負根之解釋

甲. 以方程式表問題之意義，若不細心判別，則方程式之根，有爲負數者，其負根應有適當之解釋，或以不合理之理由，附於解答。

例 1. 甲有銀 300 圓，乙有銀 200 圓，問從一方面送若干圓於他方面，則甲之銀數爲乙之 4 倍。

解 設甲送乙 x 圓則甲之銀數爲 $(300-x)$ 圓，乙之銀數爲 $(200+x)$ 圓，立方程式 $300-x=4(200+x)$......(1) 去括弧，移項，得 $-x-4x=800-300$. 卽 $-5x=500$. $\therefore x=-100$.

注意 此求得之負根，由於以方程式表題意時，未經潛心審察耳，若稍加研究，易知當由乙送銀與甲也。

負根之解釋. 甲送與乙之數爲 -100 圓，欲知送 -100 圓爲如何之意義，可變更原方程式未知數之符號，作次之方程式解之。

變原方程式之 x 爲 $-x$. 得 $300+x=4(200-x)$............(2) 左邊 $300+x$ 爲加 x 圓於甲所有銀數，右邊 $4(200-x)$ 爲從乙所有銀數減 x 圓之餘數之 4 倍，而 (2) 式之根爲 100. 此 100 圓爲乙送與甲之數，

故以甲送乙-100圓爲乙送甲100圓,解釋恰當。

例2. 有父子二人,父年48歲,子年16歲,問距今幾年,父之歲數爲子之歲數之5倍。

解 設從今起x年後,父之歲數爲子之歲數之5倍,則其時父之年爲$(48+x)$歲,子之年爲$(16+x)$歲,依題得次之方程式。

$48+x=5(16+x)$……(1) 去括弧,移項,得$x-5x=80-48$.

卽$-4x=32$. $\therefore x=-8$.

解釋此負根如次。

變更原方程式未知數之符號,以$-x$代(1)式之x. 變得次之方程式。

$48-x=5(16-x)$………(2) 此方程式之根爲8.

(2)式之左邊爲現今x年前父之歲數,右邊爲現今x年前子之歲數之5倍,故以從今起之-8年後爲從今起之8年前,解釋恰當。

乙。 以方程式表題意,完全無誤,亦有得負根者,欲改負根爲正根,須略變更問題,不能有適當之解釋。

例 有甲乙二人,甲年40歲,乙年16歲,問從今起幾年之後,甲之歲數爲乙之歲數之3倍。

解 設x年後甲之歲數爲乙之3倍,則其時甲之年爲$(40+x)$歲,乙之年爲$(16+x)$歲,依題得次之方程式。

$40+x=3(16+x)$……(1)去括弧, 移項,得$x-3x=48-40$.

卽$-2x=8$. $\therefore x=-4$.

此負根無意義可言,因依題意立方程式,完全無誤, 故知此題爲不合理之問題。

今欲變負根爲正根,以$-x$代(1)式之x.得次之方程式。

$40-x=3(16-x)$……(2) 此方程式之根爲4. 與變(1)式之根之符號同,而(2)式與原問題不合,宜改問題如次:

有甲乙二人.甲年40歲,乙年16歲,問從今起幾年之前, 甲之歲數爲乙之歲數之3倍。 答4年前。

20 不能及不定之問題。

(一)　不能之問題.

不能之問題,卽不能有答之問題,其問題有二種區別,第一種因數之限制,求得之答,能恰合方程式,而不合於問題,例如答之限制,當爲正整數,而解方程式所得之根爲負數或分數,則問題不能有答,第二種因問題自相矛盾,或含有背理之事實,則方程式亦必矛盾而背理,故答不能決定,例如解方程式,而未知數消滅,成不合理之等式,或方程式彼此矛盾,而不能成聯立方程式,或獨立方程式之數,多於未知數之數,此等問題,皆不能有答.

第一種不能問題.

例 1. 有二位之整數,其十位之數字,等於一位之數字之 2 倍,若從原數減 21. 則等於倒轉原數之數字位置之二位整數,求原數.

解　以 x 代一位之數字,則十位之數字爲 $2x$. 故原數爲 $10(2x)+x$ 倒轉數字之位置之二位整數爲 $10x+2x$. 依題得次之方程式.

$$10(2x)+x-21=10x+2x.$$ 化之得 $$20x+x-10x-2x=21.$$

卽 $9x=21$. $\therefore\ x=\dfrac{7}{3}$.

因 x 爲數字,不外從 1 至 9 之正整數,故 $\dfrac{7}{3}$ 不能爲此問題之答,此不能問題之一例也.

例 2. 有男工女工共 50 人,每日之工銀,男工 1 人 8 角,女工 1 人 4 角,此 50 人作工 1 日,共發工銀 31 圓,問男工女工各幾人.

解　以 x 代男工之人數,則 $50-x$ 爲女工之人數,男工之工銀,共爲 $.8x$ 圓,女工之工銀共爲 $.4(50-x)$ 圓,依題得次之方程式.

$$.8x+.4(50-x)=31.$$ 去括弧,移項,得 $$.8x-.4x=31-20.$$

卽 $.4x=11$. $\therefore\ x=\dfrac{110}{4}=27\dfrac{1}{2}$.

因 x 爲男工之人數,須爲正整數,故 $27\dfrac{1}{2}$ 不能爲此問題之答,此不能問題之又一例也.

第二種不能問題.

例 1. 某人之年齡之$\frac{1}{3}$加 2 年，等於此人之年齡之$\frac{4}{12}$加 7 年，問其年齡若干.

解 設此人之年爲 x 歲，依題得次之方程式.

$\frac{1}{3}x+2=\frac{4}{12}x+7$.兩邊同以 12 乘之，則 $4x+24=4x+28$.
兩邊同減去 $4x$. 得 $24=28$. 此結果不合理，故爲不能問題.

此問題一經研究，其人之年齡之$\frac{4}{12}$ 等於年齡之 $\frac{1}{3}$，一加 2 年，一加 7 年，不能相等；含有如斯之背理事實，當然不能有答.

例 2. 米 5 升與豆 7 升，共價銀 2 圓 9 角，又米 1 石與豆 1 石 4 斗，共價銀 49 圓，求米豆各 1 升之價.

解 命米 1 升之價爲 x 角，豆 1 升之價爲 y 角，依題得次之方程式.

$$5x+7y=29 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$100x+140y=490 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1)\times 20\ldots\ldots 100x+140y=580\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

以 (2) 式與 (3) 式比較，左邊全相同，其右邊不相等，此兩方程式，彼此矛盾，故爲不能問題.

例 3. 買甲乙兩自鳴鐘，共價銀 20 圓，甲鐘價之 2 倍，等於乙鐘價之 3 倍，而賣乙鐘得甲鐘之價，獲 6 圓之利益，問買甲乙二鐘之價各幾何.

解 命甲鐘之價爲 x 圓，乙鐘之價爲 y 圓，依題得次之方程式.

$$x+y=20\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2x=3y\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$x=y+6\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

從 (2) 式得 $x=\frac{3}{2}y$. 以$\frac{3}{2}y$ 代 (1) 式之 x. 則$\frac{3}{2}y+y=20$.去分母，

得 $3y+2y=40$. 卽 $5y=40$. $\therefore y=8$. 以 $\frac{3}{2}y$ 代(3)式之 x.

則 $\frac{3}{2}y=y+6$. 去分母，移項，得 $3y-2y=12$. $\therefore y=12$.

求得 y 之値，一爲 8.一爲 12. 知爲矛盾，而與 y 對應之 x 之値，亦必矛盾，故爲不能問題.

此題獨立方程式之數，多於未知數之數，而(1)，(2)，(3)三式合爲一組，則矛盾不能有答，(有時問題之情形不同，卽非不能問題.)

(二)　不定之問題.

從問題所得獨立方程式之數，少於方程式中未知數之數，則此組方程式，不能有確定之根，卽問題不能有確定之答.

又解從問題而得之方程式，其未知數與既知數同時消滅，得 $0=0$ 之形狀，則任以何數代方程式中之未知數，皆成等式，此種問題，亦不能有確定之答.

凡問題有多答而不能確定者，謂之不定問題.

例 1.　問某人之年齡，其人答曰，余年之 2 倍加 21，比余年與 5 之和之 2 倍多 11. 求此人之年齡.

解　設此人之年爲 x 歲，依題得次之方程式.

$2x+21=2(x+5)+11$. 去括弧，則 $2x+21=2x+10+11$. 移項，得 $2x-2x=21-21$. 卽 $0=0$. 故此題爲不定問題.

此問題某人之歲數之 2 倍加 21. 變換其詞爲歲數與 5 之和之 2 倍加 11. 其實僅有歲數之 2 倍加 21 一倍，故不能定其人爲若干歲.

例 2.　甲乙二人，共有銀 47 圓，若甲再得乙所有之 2 倍，則比乙多 47 圓，問甲乙原有銀各幾何.

解　設甲原有 x 圓.乙原有 y 圓，依題得次之方程式.

$x+y=47$ ……………… (1)

$x+2y=y+47$ ………… (2)

從(2)式減(1)式，則 $y=y$，移項，得 $y-y=0$. 卽 $0=0$.或以(2)式化

簡，則 $x+y=47$.與(1)式同。雖有兩方程式，其實僅有一方程式，未知數之數，多於方程式之數，在某限制內有與題恰合之多組答數，如甲有7圓，乙有40圓，甲增加乙所有之2倍，共有7圓+40圓×2=87圓，比乙所有多7圓+40圓=47圓，與題恰合；又如甲有8圓，乙有39圓，甲增加乙所有之2倍，共有8圓+39圓×2=86圓，比乙所有多8圓+39圓=47圓，與題亦合；甲乙之共數爲47圓，無論甲少乙多，或甲多乙少，皆能與題恰合，故無確定之答。

例 3. 有甲乙二數，甲之$\frac{1}{2}$與乙之$\frac{1}{3}$之和爲15. 甲之3倍與乙之2倍之和爲90. 問甲乙各若干。

解 以x,y代甲乙二數，依題得次之方程式。

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=15\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x+2y=90\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$ 去(1)式之分母，得 $3x+2y=90$. 與(2)式同；故(1)，(2)兩式，非獨立之方程式。

此問題有二未知數，僅有一方程式，未知數之數，多於方程式之數，故爲不定問題。

類題

1. 有二位之數，其數字之和爲12. 交換其數字之位置之二位數爲原數之4倍.求原數。

2. 鶴龜之頭數共50. 足數共24. 求鶴數龜數。

3. 有二位之整數，數字之和爲18. 其十位之數字爲一位之數之2倍，求此整數。

4. 買甲茶3斤乙茶2斤，共銀2圓3角，又買甲茶6斤乙茶4斤，共銀5圓，求甲乙茶各1斤之價。

5. 以銀2圓8角，換得大小銅幣共50枚，大者值銀5分，小者值銀2分，求大小銅幣之數。

6. 甲酒每斤價銀8角，乙酒每斤價銀6角，和成每斤價銀8角

5分之酒20斤，問用甲乙酒各幾斤。

7. 甲所有之銀，比乙之2倍多2角5分，而乙所有之銀之6倍，比甲之3倍少7角5分，問甲乙各有銀幾何。

8. 甲乙二人，分銀100圓，甲所得之2倍，比乙之5倍少8圓，又甲之3倍與乙之2倍之和爲280圓，問二人各得幾何。

9. 有正方形之宅地，若橫增3丈，縱少3丈，則面積減少11平方丈，求原有宅地之面積。

10. 某數之$\frac{17}{12}$與9之和，比原數與12之和之$\frac{3}{4}$多原數之$\frac{2}{3}$。求原數。

11. 求分10爲大小二數，令二數之平方之差爲140.

12. 甲年48歲，乙年12歲，問從今起幾年之後，甲之歲數爲乙之4倍。

答	1. 不能，	2. 不能，	3. 不能，	4. 不能，
	5. 不能，	6. 不能，	7. 不定，	8. 不能，
	9. 不定，	10. 不定，	11. 不能，	12. 須改問題。

雜例題解法.

注意於聯立方程式之形狀與係數，有時能得簡捷之解法。

例題 1. $273x-137y=545$ ....(1)

$37x+99y=309$ ....(2)

解此聯立方程式，用加減法代用法等置法計算，皆不容易，依次之方法解之，甚覺便利。

從(1)式減(2)式，則 $236x-236y=236$. $\therefore x-y=1$.........(3)又以37乘(3)式，得 $37x-37y=37$......(4)從(2)式減(4)式，則 $136y=272$. $\therefore y=2$. 以2代(3)式之y. 得 $x-2=1$. $\therefore x=3$. 答$\begin{cases}x=3.\\y=2.\end{cases}$

例題 2. $3x+5y-2z=14$......................(1)

$$\frac{7x+2y}{11}=\frac{11y-4z}{10}=\frac{9x-2z}{3} \quad \ldots\ldots(2)$$

如此之形式，用次之未定常數 m 爲(2)式各分數之值，解法最妙。

令$\frac{7x+2y}{11}=\frac{11y-4z}{10}=\frac{9x-2z}{3}=m$. 化得次之(3)，(4)，(5)三式。

$$7x+2y=11m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$11y-4z=10m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$9x-2z=3m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$(5)\times2\ldots\ldots18x-4z=6m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

$(4)\ldots\ldots\ldots\ 11y-4z=10m$

$(6)-(4)\ldots18x-11y=-4m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$

又$(3)\times11\ldots77x+22y=121m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$

$(7)\times2\ldots36x-22y=-8m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$

$(8)+(9)\ldots113x\quad=113m.\ \therefore x=m.$ 以 m 代(3)式及(5)式之 x.

則 $\begin{matrix}7m+2y=11m.\\9m-2z=3m.\end{matrix}$ 移項，得 $\begin{matrix}2y=4m.\\-2z=-6m.\end{matrix}\ \therefore\ \begin{matrix}y=2m.\\z=3m.\end{matrix}$

以 $m,2m,3m$ 代(1)式之 x,y,z.則 $3m+10m-6m=14$.

即 $7m=14.\ \therefore m=2.$ 由此得 $x=2, y=4, z=6$

注意　以上之方法，異常巧妙，當求了解

雜題　解次之1至19各方程式

1. $4x-[3+\{x-(3+x)\}]=5.$

2. $3(x+3)^2+5(x+5)^2-8(x+8)^2=0.$

3. $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+28x-4.$

4. $(x+1)^2=x\{6-(1-x)\}-2$

5. $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-5}{6}=\frac{41}{60}+\frac{3x-8}{5}-\frac{5x+6}{15}$

6. $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{3}x-7\right)=\left(\frac{1}{2}x+4\right)\left(\frac{1}{3}x-6\right).$

7. $4x-6y-3=7x+2y-4=-2x+3y+24$

8. $\frac{1}{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{20}\left(2x+3\right).$

9. $\frac{1}{4}\{19-3(14x-31)\}=5\frac{1}{4}-\frac{35x}{12}.$

10. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\left(x-4\frac{1}{2}\right)\right\}+1\frac{17}{18}.$

11. $.2x-.03=.12x+2(.05-.2x).$

12. $.1x+\frac{.05x-.08}{.3}=.88-\frac{.03x-.08}{.5}.$

13. $5x-6y+4z=15,\quad 7x+4y-3z=19,\quad 2x+y+6z=46.$

14. $3x-y+z=17,\quad 5x+3y-2z=10,\quad 7x+4y-5z=3.$

15. $\frac{x+2y}{7}=\frac{3y+4z}{8}=\frac{5x+6z}{9},\quad x+y-z=126.$

16. $x+y+z=6,\quad 2.5x+2y+1.5z=11,\quad 15x+10y+6z=53.$

17. $\frac{2x-y}{3}=\frac{2y+2z}{4}=\frac{x-y-z}{5}=4.$

18. $x+y+z=6,\quad y+z+m=9,\quad z+m+x=8,\quad m+x+y=7.$

19. $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=6,\quad \frac{5}{y}-\frac{3}{z}=9,\quad \frac{4}{z}-\frac{3}{t}=5,\quad \frac{20}{t}-\frac{3}{x}=8.$

20. 有一軍官，分部下之兵士為二等分，排成甲乙兩中空方陣，甲陣厚 3 而，乙陣厚 5 而，而乙陣能容於甲陣之內，求兵士之數.

21. 有人買馬與車，共價銀 400 圓，賣馬獲利百分之二十五，賣車獲利十分之四，合計所得之利為共價之千分之三百六十四，問賣馬得價銀若干圓.

22. 製火藥若干斤，用硝石比全量之半多 6 斤，硫黃比全量之 $\frac{1}{3}$ 少 5 斤，木炭比全量之 $\frac{1}{4}$ 少 3 斤，求各成分之重量.

23. 解 $(x+3)(y+5)=(x-1)(y+2),\quad 8x+5=9y+2.$

24. 解 $2x+3y-4z=1,\quad x-2y+z=2,\quad 3x-y-z=3.$

25. 解 $153x+27y-7z=173$, $\frac{2}{3}x+\frac{11}{15}y-\frac{3}{5}z=\frac{4}{5}$, $3x+y-z=2$.

26. 設代數式 $px+2p$ 之 x 爲 5 及 20. 則代數式之値爲 87 及 12. 若 x 爲 8.5,問代數式之値如何.又代數式之値爲 0 時. x 之値如何.

27. 有人看自鳴鐘在 10 點鐘與 11 點鐘之間，只云在 3 分鐘前短針之位置，與再過 6 分鐘時長針之位置相反，問看鐘之時爲 10 點幾分.

28. 攜銀若干圓，買書若干册，若每册之價減少 2 角，則所攜之銀能多買 4 册，若每册之價加增 2 角，則少買 2 册，尙欠銀 1 圓 2 角，問每册價銀幾何.

29. 有甲乙丙三水管，通於水池，開甲乙二管 $1\frac{5}{7}$ 點鐘時間，或開甲丙二管 $1\frac{7}{8}$ 點鐘時間，或開乙丙二管 $2\frac{2}{9}$ 點鐘時間，皆能注水滿池，問開三管中之一管，各須幾點鐘時間，水恰滿池.

30. 有輪船由甲港至乙港，若比一定之速力每 1 點鐘增加 2 浬，則進港早 4 點鐘，每 1 鐘點減少 2 浬，則遲 6 點鐘進港，問其航路及速力各若干浬.

31. 有金銀之合金二種，其第一種金與銀之比爲 5 與 4. 第二種金與銀之比爲 8 與 7. 今欲以此二種合金化合爲第三種合金，內含金 1 兩 4 錢銀 1 兩 2 錢，問用二種合金各幾何.

32. 有富人以 5500 圓分借與甲乙丙三人，年利率不同，甲爲十分之一，乙爲百分之十五，丙爲百分之五，至滿一年，三人所出之利銀相等，問甲乙丙各借用銀若干圓.

33. 某學校去年生徒之總數爲 1040 名，今年比去年增通學生 $4\frac{1}{2}\%$,減寄宿生 15%. 而總數增 $3\frac{3}{4}\%$. 問今年通學生共有若干名.

34. 甲列車長 60 碼，乙列車長 72 碼，此二列車行於平行之路線.甲

列車之前端，追及乙列車之後端，至二列車相離，歷12秒鐘，若乙列車之速度爲原速度之3倍，則二列車相離須歷30秒鐘，問每1點鐘甲乙之速度各若干哩。

35. 有甲乙二水管，通於能容水21石之水池，開甲管4點鐘，乙管5點鐘，注入水9石，開甲管7點鐘，乙管3點半鐘，注入水12石6斗，問二管齊開，歷幾點鐘滿池。

36. 三個有效數字之三位數，其數等於數字之和之48倍，從原數減去198.等於倒轉原數之數字位置之三位數，又首末兩數字之和，等於中央之數字之2倍，求原數。

37. 甲乙丙三工人於30日間，能合造一器，若初用甲乙二人作工20日，其後加丙一人繼續作工14日，或初用甲丙二人作工24日，其後用甲乙二人繼續作工16日半，皆能成一器，問甲乙丙獨造一器各須幾日。

38. 甲乙丙三人，同在一處向一路進行，每一點鐘，甲行4哩，乙行5哩，丙行6哩，乙出發之時，比甲遲兩點鐘，今丙與乙於同時追及甲，問丙比乙遲幾點鐘出發。

後篇　文字方程式

第 五 章

不等式解法

21. 不等式.

兩式不相等,以不等號表之,謂之不等式.

不等式之記號.

如 $5>2$ 爲表 5 大於 2 之式,又 $5<7$ 爲表 5 小於 7 之式.

例　$6+5>7$……………………(1)

$a+b<c+d$ ………………(2)

$\frac{7x+3}{5}>2x+3$……………(3)

此(1),(2),(3)三式皆爲不等式.

22. 不等式之邊.

在不等號之左之式,謂之左邊,其右之式,謂之右邊.

例　如不等式 $A>B$. 其 A 爲左邊, B 爲右邊.

23. 不等式之性質.

(一)　不等式之兩邊,以相同(或相等)之數加之,或以相同(或相等)之數減之,其不等式不變向.

注意　如不等式 $a>b$. 變爲 $a<b$. 謂之變向.

例　如 $a>b$ 時, x 爲任何實數, $a+x>b+x$. 而 $a-x>b-x$.

又　如 $a>b$. $c=d$ 時, $a+c>b+d$. 而 $a-c>b-d$.

由此性質,則不等式之任何項,變其符號,能從一邊移於他邊.

例　從 $a+b>c+d$……(1)之兩邊各減去 b, 則 $a+b-b>c+d-b$.
卽 $a>c+d-b$……(2)

(2)式乃變(1)式之 b 爲 $-b$. 從左邊移至右邊也.

再從(2)式之兩邊各減 d. 則 $a-d>c+d-b-d$. 卽 $a-d>c-b$ (3)

(3)式乃變(2)式之 d 爲 $-d$. 從右邊移至左邊也。

注意　凡變某項之符號，從一邊移於他邊，謂之移項。

例　求化 $7x+5>5x+8$ 爲簡單之形。

以含 x 之項移於左邊，常數項移於右邊，則 $7x-5x>8-5$. 卽 $2x>3$.

(二)　不等式之兩邊，以相同(或相等)之正數乘之，或以相同(或相等)之正數除之，其不等式不變向。

例　$a>b$, x 爲任意之正數（不等於 0）時，$ax>bx$. 而 $\frac{a}{x}>\frac{b}{x}$.

又　$a>b$, $c=d$ (c 與 a 非 0) 時，$ac>bd$. 而 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

例 1　求去 $\frac{5x-2}{3}>\frac{1}{4}(2x+3)$ 之分母.

此不等式之兩邊，同以 3×4 乘之，則 $4(5x-2)>3(2x+3)$.

注意　以各分母之最小公倍數，乘不等式之兩邊，變化爲無分母之不等式，謂之去分母。

例 2.　以 2 除不等式 $4x+8<2x-12$ 之兩邊，則 $2x+4<x-6$.

(三)　不等式之兩邊，以相同(或相等)之負數乘之，或以相同(或相等)之負數除之，則其不等式變向。

例　$a>b$, x 爲任意之負數時，$ax<bx$. 而 $\frac{a}{x}>\frac{b}{x}$.

用相等之負數，其結果亦同。

例　如以 -1 乘不等式 $-2x+3>7x+5$ 之兩邊，則

$2x-3<-7x-5$.

注意　不等式，雖有一次不等式二次不等式以及多次不等式，但本篇僅至解係數爲文字之一次不等式而止。

24.　不等式之解法.

例　求 $7x+3>5x+9$ 之 x 之界限。

解　移含未知數之項於左邊，既知數之項於右邊。

則 $7x-5x>9-3$. 卽 $2x>6$. $\therefore x>3$. 從此結果，知大於 3 之任何數，皆可爲原不等式之 x 之値。

驗算 以 4 代不等式兩邊之 x.

左邊 $7x+3=7\times4+3=31$.

右邊 $5x+9=5\times4+9=29$.

故 $x=4$. 能合於原不等式。

若以小於 3 之 2 代兩邊之 x.

左邊 $7x+3=7\times2+3=17$.

右邊 $5x+9=5\times2+9=19$.

故 $x=2$. 則原不等式變向，不能成立。

注意 如此例之解法定 x 之界限，謂之解不等式。

例 1. 解 $5x-3>2(x+5)$.

解 去括弧，移項，則 $5x-2x>10+3$, 卽 $3x>13$. $\therefore x>\frac{13}{3}$. 答

例 2. 解 $\frac{1}{5}(2x+7)<\frac{1}{3}(5x-2)$.

解 先以 5×3 乘兩邊去分母，得 $3(2x+7)<5(5x-2)$. 又去括弧，移項，則 $6x-25x<-10-21$. 卽 $-19x<-31$. $\therefore x<\frac{31}{19}$. 答

例 3. 解 $ax+b>cx+d$. 但 $a\neq c$.

解 移項，得 $ax-cx>d-b$. 卽 $(a-c)x>d-b$. $\therefore x>\frac{d-b}{a-c}$.

若 $a-c>0$. 則 $a>c$. 答 $x>\frac{d-b}{a-c}$. 又 $a-c>0$. 則 $a<c$. 答 $x<\frac{d-b}{a-c}$.

類題 解次之不等式

1. $3x-3>2x+7$.
2. $\frac{1}{3}(2x+5)-\frac{x}{2}>0$.
3. $\frac{1}{8}(x-2)<\frac{1}{5}(3x+5)$
4. $ax+3>2x-7$.

5. $ax+c>b-dx$. 6. $x-\frac{1}{3}(2x+5)+2(3x-7)>0$.

答 1. $x>10$. 2. $x>-10$. 3. $x>-\frac{25}{4}$.

4. $a>2$. 則 $x>\frac{-10}{a-2}$ 又 $a<2$. 則 $a<\frac{-10}{a-2}$.

5. $a>-d$. 則 $x>\frac{b-c}{a+d}$. 又 $a<-d$. 則 $x<\frac{b-c}{a+d}$.

6. $x>\frac{47}{19}$.

第六章
一元一次方程式（其二）

25. 一元一次方程式之公式形狀及根之研究

一元一次方程式右邊之各項，全移於左邊，化爲最簡，常得次之形狀。

$ax+b=0$……(1) 此爲一元一次方程式之公式。

(1)式 x 之係數 a 之値，不宜爲 0.（若 $a=0$. 乃特別之情形，論述於後節）。

移(1)式之常數項（卽不含未知數之項）於右邊，以 x 之係數 a 除其兩邊，則 $x=-\frac{b}{a}$，此爲一元一次方程式之根之公式。

研究根與常數項及 x 之係數之關係如次。

第一 若 $b=0$. 則 $-\frac{b}{a}=\frac{0}{a}=0$，而根爲 0.

第二 若 $b>0$. 則從 a 之正負，有次之二種區別。

(1) $a>0$. 則 $\frac{b}{a}$ 爲正數，而 $-\frac{b}{a}$ 爲負數，故根爲負。

(2) $a<0$. 則 $\frac{b}{a}$ 爲負數，而 $-\frac{b}{a}$ 爲正數，故根爲正。

第三 若 $b<0$. 則從 a 之正負，有次之二種區別。

(1) $a>0$. 則 $\frac{b}{a}$ 爲負數，而 $-\frac{b}{a}$ 爲正數，故根爲正。

(2) $a<0$. 則 $\frac{b}{a}$ 爲正數，而 $-\frac{b}{a}$ 爲負數，故根爲負。

總括

（一） (1)式之常數項爲 0. 則根亦爲 0.

（二） (1)式 x 之係數與常數項之符號相同，則根爲負數，又 x 之係數與常數項之符號不同，則根爲正數。

注意 由 x 之係數及常數項之等於 0 大於 0 小於 0. 定根之種類。

稱爲根之研究。

26. $ax+b$ 與 $ax+b=0$ 之根之關係.

設 $ax+b=0$之根爲 α. 則 $ax+b=a(x-\alpha)$.

證 α 爲 $ax+b=0$之根,則 $a\alpha+b=0$. $\therefore b=-a\alpha$. 以$-a\alpha$代 $ax+b$ 中之 b. 得 $ax+b=ax-a\alpha=a(x-\alpha)$.

27. $ax+b=0$ 之根與他數之比較.

設 $ax+b=0$.........(1) 之根爲 α. 他數爲 c.

因 $ax+b=a(x-\alpha)$.........〔見前節〕

以 c 代此式之 x. 則 $ac+b=a(c-\alpha)$...... (2)若(2) 式右邊之 a 與 $c-\alpha$ 之符號相同,則爲正數,符號不同,則爲負數,從 α 與 c 之比較,生次之結果,

第一 若 $c=\alpha$. 則 $ac+b=a(c-\alpha)=0$. 故得定理如次.

定理 以c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x. 若 $ac+b=0$. 則 c 卽方程式之根.

例如以 2 代 $3x+\frac{2-7x}{3}-2$ 之 x. 則

$3x+\frac{2-7x}{3}-2=3\times2+\frac{2-7\times2}{3}-2=0$. 故 2 卽此方程式之根.

第二 若 $c>\alpha, a>0$. 則 a 與 $c-\alpha$ 之符號相同,故 $a(c-\alpha)>0$. 卽 $ac+b>0$. 又 $c>\alpha, a<0$. 則 a 與 $c-\alpha$ 之符號不同,故 $a(c-\alpha)<0$. 卽 $ac+b<0$. 由此得定理如次.

定理 以 c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x. 若 $ac+b$ 與 a 之符號相同,則 c 大於方程式之根.

例 1. 如以 2 代 $7x+3=0$ 之x. 則 $7x+3=7\times2+3>0$.
因 $7\times2+3$ 與 x 之係數 7. 同爲正數, 知 2 大於此方程式之根.

例 2. 如以 7 代$-3x+17=0$ 之 x.
則 $-3x+17=-3\times7+17=-4<0$.因 $-3\times7+17$ 與 x之係數-3.

同爲負數,知 7 大於此方程式之根。

第三 若 $c<\alpha$, $a>0$. 則 a 與 $c-\alpha$ 之符號不同,故 $a(c-\alpha)<0$. 卽 $ac+b<0$. 又 $c<\alpha$, $a<0$. 則 a 與 $c-\alpha$ 之符號相同,故 $a(c-\alpha)>0$. 卽 $ac+b>0$. 由此得定理如次。

定理 以 c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x. 若 $ac+b$ 與 a 之符號不同,則 c 小於方程式之根.

例 1. 如以 1 代 $5x-8=0$ 之 x. 則 $5x-8=5\times1-8=-3<0$. 因 $5\times1-8$ 與 x 之係數 5. 一爲負數,一爲正數,知 1 小於此方程式之根。

例 2. 如以 2 代 $-11x+32=0$ 之 x.
則 $-11x+32=-11\times2+32=10>0$.

因 $-11\times2+32$ 與 x 之係數 -11. 一爲正數,一爲負數,知 2 小於此方程式之根。

上之定理,亦可爲解不等式之用。

A. 設 $ax+b$ 之 $a>0$. 欲令 $ax+b>0$. 其 x 須用大於 $ax+b=0$ 之根之數,又令 $ax+b<0$. 其 x 須用小於 $ax+b=0$ 之根之數。

例 1. 解 $3x-5>0$.

變不等式爲 $3x-5=0$. 解之得 $x=\frac{5}{3}$ 因不等式 x 之係數爲正數, 故 $x>\frac{5}{3}$ 爲不等式之 x 之界限。

例 2. 解 $7x+8<0$.

變不等式爲 $7x+8=0$. 解之得 $x=-\frac{8}{7}$, 因不等式 x 之係數爲正數, 故 $x<-\frac{8}{7}$ 爲不等式之 x 之界限。

B. 設 $ax+b$ 之 $a<0$. 欲令 $ax+b>0$. 其 x 須用小於 $ax+b=0$ 之根之數,又令 $ax+b<0$. 其 x 須用大於 $ax+b=0$ 之根之數。

例 1. 解 $-7x+2>0$.

變不等式爲 $-7x+2=0$. 解之得 $x=\frac{2}{7}$，因不等式 x 之係數爲負數，故 $x<\frac{2}{7}$ 爲不等式之 x 之界限。

例 2. 解 $-6x+5<0$.

變不等式爲 $-6x+5=0$. 解之得 $x=\frac{5}{6}$，因不等式 x 之係數爲負數，故 $x>\frac{5}{6}$ 爲不等式之 x 之界限。

例題 1. 求 $5x-4=\frac{2}{3}x-3$ 之根與 3 之比較。

解 以方程式右邊之各項，全移於左邊，化爲最簡，得 $13x+21=0$. 左邊之 x. 以 3 代之，則 $13\times3+21=60>0$. 此結果與簡式 x 之係數之符號相同，知 3 大於方程式之根。

例題 2. 求 $\frac{2x+7}{3}=2x+1$ 之根與 -2 之比較。

解 以方程式右邊之各項，全移於左邊，化爲最簡，得 $-4x+4=0$. 左邊之 x 以 -2 代之，則 $-4\times(-2)+4=12>0$. 此結果與簡式 x 之係數之符號不同，知 -2 小於方程式之根。

例題 3. 求 $7x+3=\frac{x+8}{2}$ 之根與 $\frac{2}{13}$ 之比較。

解 以方程式右邊之各項，全移於左邊，化爲最簡，得 $13x-2=0$. 左邊之 x. 以 $\frac{2}{13}$ 代之，則 $13\times\frac{2}{13}-2=0$. 知 $\frac{2}{13}$ 爲方程式之根。

28. $ax+b=0$ 之 $a>0$ 之解法.

例 1. 解 $3x+2p=x+3$.

移項得 $3x-x=3-2p$. 即 $2x=3-2p$. $\therefore x=\frac{3-2p}{2}$.

根之研究.

研究 p 之值與根之關係如次。

〔1〕 若 $p<\frac{3}{2}$ 則 $3-2p>0$. 而根爲正數。

〔2〕 若 $p=\frac{3}{2}$ 則 $3-2p=0$. 而根爲 0.

〔3〕 若 $p>\frac{3}{2}$ 則 $3-2p<0$. 而根爲負數。

例 2. 解 $px+3p=4x+5$.

移項，得 $px-4x=5-3p$. 卽 $(p-4)x=5-3p$, $\therefore x=\frac{5-3p}{p-4}$.

(但 $p-4\neq 0$. 卽 $p\neq 4$).

根之研究

研究 p 之値與根之關係如次。

〔1〕 若 $p<\frac{5}{3}$ 則 $5-3p>0$, $p-4<0$. 知 $\frac{5-3p}{p-4}$ 之分子爲正數，分母爲負數，故根爲負數。

〔2〕 若 $p=\frac{5}{3}$. 則 $5-3p=0$, $p-4<0$. 知 $\frac{5-3p}{p-4}$ 之分子爲 0. 故根爲 0.

〔3〕 若 $\frac{5}{3}<p<4$. 則 $5-3p<0$, $p-4<0$. 知 $\frac{5-3p}{p-4}$ 之分子分母同爲負數，故根爲正數。

〔4〕 若 $p>4$. 則 $5-3p<0$, $p-4>0$. 知 $\frac{5-3p}{p-4}$ 之分子爲負數，分母爲正數，故根爲負數。

例 3. 解 $\frac{x+2}{p-3}=\frac{2x-3}{p-4}$. (此問題須附帶二條件，一爲 $p-3\neq 0$. 一爲 $p-4\neq 0$. 無此條件，則方程式兩邊之分母有一爲 0. 不能成等式)。

以 $(p-3)(p-4)$ 乘方程式之兩邊，則 $(p-4)(x+2)=(p-3)(2x-3)$。去括弧，移項，得 $px-4x-2px+6x=-3p+9-2p+8$.

卽 $(2-p)x=17-5p$. $\therefore x=\frac{17-5p}{2-p}$. (但 $2-p\neq 0$. 卽 $p\neq 2$)。

根之研究.

研究 p 之值與根之關係如次。

〔1〕 若 $p<2$. 則 $17-5p>0, 2-p>0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子分母,同爲正數,故根爲正數。

〔2〕 若 $2<p<3$. 則 $17-5p>0, 2-p<0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子爲正數,分母爲負數,故根爲負數。

〔3〕 若 $3<p<\frac{17}{5}$ 則 $17-5p>0, 2-p<0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子爲正數,分母爲負數,故根爲負數。

〔4〕 若 $p=\frac{17}{5}$ 則 $17-5p=0, 2-p<0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子爲 0.故根爲 0.

〔5〕 若 $\frac{17}{5}<p<4$. 則 $17-5p<0, 2-p<0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子分母,同爲負數,故根爲正數。

〔6〕 若 $p>4$. 則 $17-5p<0, 2-p<0$. 知 $\frac{17-5p}{2-p}$ 之分子分母,同爲負數,故根爲正數。

例 4. 設 $ax+b=cx+d$ 之根大於 1. 問 a,b,c,d 之關係如何。

先化方程式爲 $(a-c)x+b-d=0$. 欲使此方程式之根大於 1. 須以 1 代此方程式左邊之 x 之結果,與 x 之係數之符號不同,今 x 之係數爲 $a-c$. 而以 1 代 x 之結果爲 $(a-c)+b-d$. 求合於題意,有次之二途。

〔1〕 $a-c>0, (a-c)+b-d<0$. 卽 $a>c$, $a+d<c+d$.

〔2〕 $a-c<0, (a-c)+b-d>0$. 卽 $a<c$, $a+b>c+d$.

29. 不定方程式及不能方程式.(又名不可能方程式)

前於第 25 節，言方程式 $ax+b=0$ 之 a. 不宜爲 0. 今欲擴張方程式之意義，特設 x 之係數 a 爲 0 研究之，a 爲 0. 其 b 有爲 0 或不爲 0 之二種情形。

第一 若 $ax+b=0$.........(1) 之 a 與 b 皆爲 0. 則(1)式變爲次之形狀，　$0.x+0=0$.........(2)

(2)式 x 之值，無論爲何數，皆能成立，故根不定。

又先解(1)式得 $x=-\dfrac{b}{a}$.然後以 0 代 a 與 b.則 $x=\dfrac{0}{0}$.

凡方程式之結果，成如此之形狀者，謂之不定方程式。

例如 $5x+42=7x-2(x-21)$.去括弧，移項，

則 $5x-7x+2x=42-42$. 卽 $0.x=0$. (x 之係數，抵消而爲 0.)

由此知原方程式之 x 之值，無論爲何數，皆能成等式。

凡方程式之結果，各項消滅成 $0=0$ 之形狀者，卽爲不定方程式。

例題 設 $3ax+4=5(x-b)$ 之根爲不定，問 a 與 b 之值如何。

化題式得 $(3a-5)x+-5b-4$ $\therefore$ $x=\dfrac{-5b-4}{3a-5}$.

其根爲不定，須令 $\dfrac{-5b-4}{3a-5}=\dfrac{0}{0}$.

從 $3a-5=0$. 得 $a=\dfrac{5}{3}$.從 $-5b-4=0$. 得 $b=-\dfrac{4}{5}$.

第二 若 $ax+b=0$......(1)之 a 爲 0. b 不爲 0, 則 (1) 式變爲次之形狀，　$0.x+b=0$......(2)

(2)式 x 之值無論爲何數，皆不能成立，故不能有根。

又先解 (1) 式得 $x=-\dfrac{b}{a}$.然後以 0 代 a. 則 $x=-\dfrac{b}{0}$.

凡方程式之結果，成如此之形狀者，謂之不能方程式。

例如 $5x+2=3x-(7-2x)$. 去括弧，移項，則 $5x-3x-2x=-7-2$.

卽 $0.x=-9$.

由此知原方程式之 x 之值，無論爲何數，皆不能成等式。

因 $0=-9$ 不合理，故爲不能方程式。

注意 考 $ax+b=0$ 之 b 不爲 0. 其 a 爲非常小之數，則 x 之絕對值，當以非常大之數表之，因 a 爲甚小之數，x 之值已爲甚大之數，最後 a 爲 0, x 之值成 $\frac{b}{0}$ 之形狀，則其數無正負之區別，而爲一種不可思議之數，通稱爲無限大，以記號 ∞ 表之。

無限大，出乎吾人所知之數之範圍，不能以常法計算，其性質與 0 相似，例如以 ∞ 加 ∞，非兩個 ∞，以 ∞，除 ∞，不等於 1；猶以 0 加 0，非兩個 0，以 0 除 0. 不等於 1 也。

凡解方程式之結果，得根爲無限大者，其問題爲不能之問題。

30. 一元一次方程式之解法模範

例題 1. 解 $mx+n=5x+7$.

解 移項，得 $mx-5x=7-n$. 卽 $(m-5)x=7-n$.

$$\therefore x=\frac{7-n}{m-5}.$$

根之研究

研究 m 及 n 之值與根之關係如次。

〔1〕 $m>5, n>7$. 則 $m-5>0, 7-n<0$. 故根爲負數。

〔2〕 $m>5, n=7$. 則 $m-5>0, 7-n=0$. 故根爲 0.

〔3〕 $m>5, n<7$. 則 $m-5>0, 7-n>0$. 故根爲正數。

〔4〕 $m=5, n\neq7$. 則 $m-5=0, 7-n\neq0$. 故根爲無限大。

〔5〕 $m=5, n=7$. 則 $m-5=0, 7-n=0$. 故根爲不定。

〔6〕 $m<5, n>7$. 則 $m-5<0, 7-n<0$. 故根爲正數。

〔7〕 $m<5, n=7$ 則 $m-5<0, 7-n=0$.故根爲 0.

〔8〕 $m<5, n<7$. 則 $m-5<0, 7-n>0$.故根爲負數。

例題 2. 解 $\frac{2x+7}{2m+1}=1+\frac{x+m}{2m-1}$.

解 此方程式，當附帶二條件，一爲 $2m+1\neq0$. 一爲 $2m-1\neq0$.

若 $2m+1=0$. 或 $2m-1=0$. 則方程式兩邊之分母有一爲 0. 不能成等式。

以 $(2m+1)(2m-1)$ 乘方程式之兩邊，去其分母。

得 $(2m-1)(2x+7)=(2m+1)(2m-1)+(2m+1)(x+m)$. 又化爲簡式如次。

$(2m-3)x=6m^2-13m+6$. 卽 $(2m-3)x=(2m-3)(3m-2)$.

以 $2m-3$ 除兩邊，得 $x=\dfrac{(2m-3)(3m-2)}{2m-3}=3m-2$.

根之研究

研究 m 之値與根之關係如次。

〔1〕 $m<\dfrac{2}{3}$. 則 $3m-2<0$. 故根爲負數。

(此雖包含 $m=\pm\dfrac{1}{2}$ 於內，因前有條件 $2m\mp1=0$. 無須增加 $m\neq\pm\dfrac{1}{2}$).

〔2〕 $m=\dfrac{2}{3}$ 則 $3m-2=0$. 故根爲 0.

〔3〕 $\dfrac{2}{3}<m\neq\dfrac{3}{2}$，則 $3m-2>0$. 故根爲正數。

〔4〕 $m=\dfrac{3}{2}$. 則 $\dfrac{(2m-3)(3m-2)}{2m-3}=\dfrac{0}{0}$. 故根爲不定。

問題五

1. 求 $3x^2+4x+3=(x-2)(3x-5)$ 之根與 3 之比較。
2. 設 $5x-7+2(x+1)$ 爲正數，求 x 之値之界限。
3. 解 $4x+5>3x-7$。
4. 解 $ax-3>bx+5$。
5. 解 $\dfrac{1}{3}(x+7)<\dfrac{1}{5}(3-5x)$.
6. 解 $6x+m=3x+3m+1$. 又 m 之値如何，則根爲負數。

7. 解 $2x-3p=5(x-p)$.

8. 兩方程式 $ax+b=0$ 與 $a'x+b'=0$ 之根相等，問 a,b,a',b' 之關係如何。

9. 兩方程式 $5x-3m=\frac{1}{3}(2x-m)$ 與 $\frac{1}{3}x+2m=3x-m$ 之根相等，問 m 之值如何。

10. 求從 $ax+b=b(x+a)$, $ax+2b=b(x+3)$ 消去 x.

11. 解 $\frac{7x-p}{3}=\frac{2x+p}{2}$.

12. 解 $\frac{3x+4}{2p-1}=\frac{x+5}{p-3}$.

13. 求 $2p+3=3x-q$ 之根大於 2 之要件。

14. 問 a 與 p 之關係如何，則 $2ax+p=2px+3a$ 之根大於 1.

31. 文字方程式之例題解法.

例題 1. 解 $ax+b^2=bx+a^2$. (a 與 b 皆爲實數，以下問題中之 a 與 b 亦然)。

解 移項，得 $ax-bx=a^2-b^2$. 卽 $(a-b)x=(a-b)(a+b)$.

以 $a-b$ 除兩邊，則 $x=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b$.

根之研究

〔1〕 $a-b\neq 0$. 則根有一定之值。

卽 $\begin{cases} a>-b. \text{ 則 } a+b>0. \text{ 根爲正數。} \\ a=-b. \text{ 則 } a+b=0. \text{ 根爲 } 0. \\ a<-b. \text{ 則 } a+b<0. \text{ 根爲負數。} \end{cases}$

〔2〕 $a-b=0$. 則 $\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=\frac{0}{0}$ 根爲不定。

例題 2. 解 $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2$. ($a$ 與 b 之值不宜爲 0. 若皆爲 0. 或有一爲 0. 方程式不能成立)。

解　去分母，則 $a^2x+b^2x=ab(a^2+b^2)$，卽 $(a^2+b^2)x=ab(a^2+b^2)$。因 a,b 皆實數，a^2+b^2 必爲正數，以 a^2+b^2 除兩邊，得 $x=ab$。

根之研究.

〔1〕 $a>0.\begin{cases}b>0.\text{根爲正數。}\\b<0.\text{根爲負數。}\end{cases}$

〔2〕 $a<0.\begin{cases}a>0.\text{根爲負數。}\\b<0.\text{根爲正數。}\end{cases}$

總括

a 與 b 之符號相同，根爲正數，符號不同，根爲負數。

例題 3.　解 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

解　移項，得

$$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)=0.$$

依次之分解因數公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\}$$

得 $\frac{1}{2}\{3x-(a+b+c)\}\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\}=0$.　此式以 2 乘之，以 3 除之，則

$$\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(1) 式左邊之兩因數，必有一爲 0. 凡實數無論正數負數之平方皆爲正數，若 a,b,c 不互相等，則 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2>0$.

因知 $x-\frac{a+b+c}{3}=0$.　$\therefore$　$x=\frac{a+b+c}{3}$.

根之研究.

〔1〕 a,b,c 之値，不互相等，或各不相等。

$$\begin{cases}a+b+c>0.\text{根爲正數。}\\a+b+c=0.\text{根爲 }0.\\a+b+c<0.\text{根爲負數。}\end{cases}$$

〔2〕 $a=b=c$.

前之(1)式,變爲$\left(x-\dfrac{a+b+c}{3}\right)\times 0=0$. 此式 x 之値無論爲何數,皆能成等式,故根爲不定。

例題 4. 解 $\dfrac{x}{a-1}+\dfrac{x}{b-1}-\dfrac{x}{a+1}-\dfrac{x}{b+1}=1$. (各分母皆不等於 0)

解 因$\dfrac{x}{a-1}-\dfrac{x}{a+1}=\dfrac{2x}{a^2-1}$, $\dfrac{x}{b-1}-\dfrac{x}{b+1}=\dfrac{2x}{b^2-1}$. 故變原方程式如次, $\dfrac{2x}{a^2-1}+\dfrac{2x}{b^2-1}=1$. 去分母,

得 $2(a^2+b^2-2)x=(a^2-1)(b^2-1)$. $\therefore x=\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{2(a^2+b^2-2)}$.

根之研究.

〔1〕 若 $a^2=1, b^2=1$. 則 $\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{2(a^2+b^2-2)}=\dfrac{0}{0}$. 根爲不定。

〔2〕 若 $a^2>1$, $b^2<1$. 或 $a^2<1$, $b^2>1$. 則 $(a^2-1)(b^2-1)<0$. 故從 a^2+2b 之値得次之結果。

$$\begin{cases} a^2+b^2>2. \text{ 根爲負數。} \\ a^2+b^2=2. \text{ 根爲無限大。} \\ a^2+b^2<2. \text{ 根爲正數。} \end{cases}$$

〔3〕 若 $a^2>1$, $b^2>1$. 或 $a^2<1$, $b^2<1$.則$(a^2-1)(b^2-1)>0$. 故從 a^2+b^2 之値得次之結果。

$$\begin{cases} a^2+b^2>2. \text{ 根爲正數。} \\ a^2+b^2<2. \text{ 根爲負數。} \end{cases}$$

例題 5. 解$(x-a)(x-b)(x+2a+2b)=(x+2a)(x+2b)(x-a-b)$.

解 化左邊得 $x^3+(a+b)x^2-(2a^2+2b^2+3ab)x+2ab(a+b)$.

化右邊得 $x^3+(a+b)x^2-(2a^2+2b^2)x-4ab(a+b)$.

故 $-3abx+2ab(a+b)=-4ab(a+b)$......(1) 以 $-ab$ 除(1)式之兩邊,則 $3x-2(a+b)=4(a+b)$. 移項得 $3x=6(a+b)$. $\therefore x=2(a+b)$.

根之研究.

〔1〕 $a \neq 0,\ b \neq 0.$

$$\begin{cases} a > -b. & 根爲正數。\\ a = -b. & 根爲0.\\ a < -b. & 根爲負數。\end{cases}$$

〔2〕 a 與 b 之值,同爲 0,或有一爲 0.

上之(1)式變爲 $0 \times x = 0$,根爲不定。

例題 6. 解 $\dfrac{a}{x}+b^2=\dfrac{b}{x}+a^2$.

解 以 y 代原方程式之 $\dfrac{1}{x}$ 則 $ay+b^2=by+a^2$. 移含 y 之項於左邊,既知項於右邊,得 $ay-by=a^2-b^2$. 卽 $(a-b)y=(a+b)(a-b)$.

以 $a-b$ 除兩邊,得 $y=\dfrac{(a+b)\ (a-b)}{a-b}=a+b.$

$$\therefore\ x=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a+b}.$$

根之研究.

〔1〕 $a-b \neq 0, a+b \neq 0.$

$$\begin{cases} a < -b. & 根爲負數。\\ a > -b. & 根爲正數。\end{cases}$$

〔2〕 $a-b=0,\ a+b \neq 0.$

因 $\dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{0}{0}$. 故根爲不定。

〔3〕 $a-b \neq 0,\ a+b=0.$

因 $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{0}$. 故根爲無限大。

〔4〕 $a-b=0,\ a+b=0.$ 卽 $a=0,\ b=0.$

因 $\dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{0}{0}$. 故根爲不定。

問題六

解次之方程式，并研究方程式之根。

1. $(a+bx)(b+ax)=ab(x^2-1)$.

2. $(x+a+b)^2+(x+a-b)^2=2x^2$.

3. $a\left(\frac{x-a}{b}\right)+b\left(\frac{x-b}{a}\right)=x$.

4. $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2$.

5. $\frac{x-a^2}{b+a}=\frac{x-c^2}{b+c}+c-a$.

6. $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)$.

7. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=ab+ac+bc$.

8. $\frac{x-a-c}{b}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-a-b}{c}=3$.

9. $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=3x^2-2(a+b+c)x$.

10. $\frac{x-1}{c-1}+\frac{x}{c+1}=\frac{1}{c-1}+\frac{2}{(c-1)^2}$.

11. $\frac{a^2(x-b)}{a^3-b^3}+\frac{b(x+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{x+b}{a+b}$.

12. $\frac{x-2c}{a+b-c}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x}{a+b+c}=\frac{3(x-2a)}{b+c-a}$.

13. $\frac{ax}{(a+b)^2}+\frac{b(x-2b)}{a^2-b^2}=\frac{2x}{a+b}-1$.

14. $(x+a)(x+b)(x+c)-(a+b)x^2=(x^2+c)(x+c)$.

第七章

聯立一次方程式(其二)

32. 特別之問題解法

例題 1. $ax+by=c$ ....(1)

$bx+ay=c'$ ....(2)

求 x,y 之值. (a,b,c,c' 皆不等於 0)

此題(1),(2)兩式中 x 與 y 之係數成交互之形狀,用次之解法爲便.

(1)+(2)......$(a+b)x+(a+b)y=c+c'$. $\therefore x+y=\dfrac{c+c'}{a+b}$......(3)

(1)−(2)......$(a-b)x-(a-b)y=c-c'$. $\therefore x-y=\dfrac{c-c'}{a-b}$......(4)

(3)+(4)......$2x=\dfrac{c+c'}{a+b}+\dfrac{c-c'}{a-b}$. $\therefore x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c+c'}{a+b}+\dfrac{c-c'}{a-b}\right)$.

(3)−(4)......$2y=\dfrac{c+c'}{a+b}-\dfrac{c-c'}{a-b}$. $\therefore y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c+c'}{a+b}-\dfrac{c-c'}{a-b}\right)$.

例 1. $5x+6y=7$ ....(1)

$6x+5y=4$ ....(2)

求 x, y 之值.

(1)+(2)......$11x+11y=11$. $\therefore x+y=1$ ......(3)

(2)−(1)...........$x-y=-3$ ....(4)

(3)+(4)......$2x=-2$. $\therefore x=-1$.

(3)−(4)......$2y=4$. $\therefore y=2$.

例 2. 解次之方程式

$(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2$ ....(1)

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$ ....(2)

$a+b\neq 0$, $a-b\neq 0$.

(1)+(2)...... $2ax+2ay=2a^2$. $\therefore x+y=a$ ....(3)

(1)－(2)………$2bx-2by=2b^2$ $\therefore$ $x-y=b$………(4)

(3)＋(4)………$2x=a+b$. $\therefore$ $x=\dfrac{a+b}{2}$.

(3)－(4)………$2y=a-b$. $\therefore$ $y=\dfrac{a-b}{2}$.

例題 2. 解次之方程式

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c \quad \text{…………(1)}$$

$$\frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}=c' \quad \text{…………(2)}$$

a, b, c, a', b', c' 皆不等於 0.

以 X 代 $\dfrac{1}{x}$. 以 Y 代 $\dfrac{1}{y}$ 則(1),(2)兩式如次。

$$aX+bY=c \quad \text{……………(3)}$$

$$a'X+b'Y=c' \quad \text{…………(4)}$$

從(3),(4)兩式求 X, Y.

得 $X=\dfrac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$, $Y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

卽 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$.

$\therefore$ $x=\dfrac{ab'-a'b}{b'c-bc'}$, $y=\dfrac{ab'-a'b}{ac'-a'c}$.

33. 求二元一次方程式之根之簡便法.

方程式有二種形狀。

(一) 如次之方程式形狀爲第一種。

$$ax+by+c=0 \quad \text{……………(1)}$$

$$a'x+b'y+c'=0 \quad \text{…………(2)}$$

以 x, y 之係數及既知項排列如次。

$\begin{vmatrix} a & & b & & c & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ a' & & b' & & c' & & a' \end{vmatrix}$ 分爲三部分於下。

$$\begin{vmatrix} a & & b \\ & \times & \\ a' & & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots A$$

$$\begin{vmatrix} b & & c \\ & \times & \\ b' & & c' \end{vmatrix}=bc'-b'c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots B$$

$$\begin{vmatrix} c & & a \\ & \times & \\ c' & & a' \end{vmatrix}=a'c-ac' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots C$$

A, B, C 與 x, y 之關係式爲 $\frac{1}{A}=\frac{x}{B}=\frac{y}{C}$。

即 $\frac{1}{ab'-a'b}=\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{a'c-ac'}$。

$\therefore \quad x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$。

注意 用此方法，能徑得二元一次聯立方程式之根，至於須依解法之次序方法之問題，已於前詳述用加減法及代用法等之例，遇僅欲求聯立方程式之結果之時，用此簡便法，最爲便捷。

例 1. $3x-5y-5=0 \cdots\cdots\cdots(1)$

$7x-8y-19=0 \cdots\cdots(2)$

$$\begin{vmatrix} 3 & & -5 & & -5 & & 3 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 7 & & -8 & & -19 & & 7 \end{vmatrix}$$

$\qquad\quad$ A $\qquad\quad$ B $\qquad\quad$ C

得 $\frac{1}{3\times(-8)-7\times(-5)}=\frac{x}{-5\times(-19)-(-8)\times(-5)}$

$=\frac{y}{-5\times 7-(-19)\times 3}$。

即 $\dfrac{1}{35-24}=\dfrac{x}{95-40}=\dfrac{y}{57-35}.$

$\therefore\ x=\dfrac{55}{11}=5,\qquad y=\dfrac{22}{11}=2.$

例 2. $8x+11y-6=0$............(1)

$3x-7y+20=0$............(2)

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 8 & & 11 & & -6 & & 8 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 3 & & -7 & & 20 & & 3 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array}$$

得 $\dfrac{1}{8\times(-7)-3\times 11}=\dfrac{x}{11\times 20-(-7)\times(-6)}=\dfrac{y}{-6\times 3-20\times 8}.$

即 $\dfrac{1}{-56-33}=\dfrac{x}{220-42}=\dfrac{y}{-18-160}.$

$\therefore\ x=\dfrac{178}{-89}=-2,\qquad y=\dfrac{-178}{-89}=2.$

例 3. $(a+b)x-(a-b)y-4ab=0$..............(1)

$\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}-2=0$....................(2)

$$\left|\begin{array}{ccccccc} (a+b) & & (a-b) & & -4ab & & (a+b) \\ & \times & & \times & & \times & \\ \dfrac{1}{a+b} & & \dfrac{1}{a-b} & & -2 & & \dfrac{1}{a+b} \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}$$

得 $\dfrac{1}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{x}{2(a-b)+\dfrac{4ab}{a-b}}=\dfrac{y}{\dfrac{-4ab}{a+b}+2(a+b)}.$

即 $\dfrac{1}{\dfrac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}}=\dfrac{x}{\dfrac{2(a^2+b^2)}{a-b}}=\dfrac{y}{\dfrac{2(a^2+b^2)}{a+b}}.$

$$\therefore \quad x=\frac{(a+b)(a-b)}{2(a^2+b^2)}\times\frac{2(a^2+b^2)}{a-b}=a+b.$$

$$y=\frac{(a+b)(a-b)}{2(a^2+b^2)}\times\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}=a-b.$$

(二) 如次之方程式形狀爲第二種.

$ax+by=c$............(1)

$a'x+b'y=c'$ ....(2)

排列 x, y 之係數及既知項，與解第一種方程式之排列同，惟 A 之符號與前相反.

$$\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ a' & b' & c' & a' \end{array}\right|$$

$$\quad A \qquad B \qquad C$$

A, B, C 與 x, y 之關係式爲 $\frac{-1}{A}=\frac{x}{B}=\frac{y}{C}$

即 $$\frac{-1}{ab'-a'b}=\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{a'c-ac'}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}, \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

例 1. $4x-3y=6$............(1)

$5x+2y=19$ ....(2)

$$\left|\begin{array}{cccc} 4 & -3 & 6 & 4 \\ 5 & 2 & 19 & 5 \end{array}\right|$$

$$\quad A \qquad B \qquad C$$

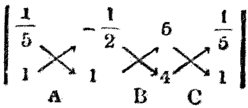
得 $$\frac{-1}{4\times2-5\times(-3)}=\frac{x}{-3\times19-2\times6}=\frac{y}{6\times5-19\times4}.$$

即 $\dfrac{-1}{8+15}=\dfrac{x}{-57-12}=\dfrac{y}{30-76}$.

$\therefore\ x=\dfrac{57+12}{8+15}=3,\qquad y=\dfrac{76-30}{8+15}=2.$

例 2.　$\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}=5$..............(1)

$x+y=4$.....................(2)



得 $\dfrac{-1}{\dfrac{1}{5}\times1-1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{x}{-\dfrac{1}{2}\times4-1\times5}=\dfrac{y}{5\times1-4\times\dfrac{1}{5}}$.

即 $\dfrac{-1}{\dfrac{7}{10}}=\dfrac{x}{-7}=\dfrac{y}{\dfrac{21}{5}}$.

$\therefore\ x=7\times\dfrac{10}{7}=10,\qquad y=-\dfrac{21}{5}\times\dfrac{10}{7}=-6.$

例 3.　$\dfrac{x+y}{3}+x=15$.........(1)

$\dfrac{x-y}{5}+y=6$ ....(2

去分母,併同類項,則(1),(2),兩式如次.

$4x+y=45$

$x+4y=30$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 4 & & 1 & 45 & & 4 \\ & \times & & & \times & \\ 1 & & 4 & 30 & & 1 \\ & A & & B & & C \end{array}\right|$$

得 $\dfrac{-1}{4\times4-1\times1}=\dfrac{x}{1\times30-4\times45}=\dfrac{y}{45\times1-30\times4}$.

即 $\dfrac{-1}{16-1}=\dfrac{x}{30-180}=\dfrac{y}{45-120}$.

$\therefore\ x=\dfrac{180-30}{16-1}=10,\quad y=\dfrac{120-45}{16-1}=5.$

類題 用簡便法解次之方程式

1. $4x+2y-8=0,\qquad 8x+3y-14=0.$
2. $3x+5y-19=0,\qquad 5x-4y-7=0.$
3. $4x-\dfrac{y}{2}=11,\qquad 2x+3y=12.$
4. $\dfrac{x}{4}-\dfrac{2}{3}y=3,\qquad \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1.$
5. $7x+8y=23,\qquad 15x-3y=9.$
6. $\dfrac{3}{5}x+7y=13,\qquad 2x-5y=15.$

用適當之方法解次之方程式

7. $\dfrac{10}{x}+\dfrac{15}{y}=8,\qquad \dfrac{14}{x}-\dfrac{21}{y}=0.$
8. $\dfrac{8}{2x}+\dfrac{18}{3y}=5,\qquad \dfrac{10}{3x}+\dfrac{5}{y}=4\dfrac{1}{6}.$
9. $15x-8y=22,\qquad 8x-15y=1.$
10. $13x+11y=61,\qquad 11x+13y=59.$

答 1. $x=1, y=2.$ 2. $x=3, y=2.$ 3. $x=3, y=2.$

4. $x=4, y=-3$. 5. $x=1, y=2$. 6. $x=10, y=1$.
7. $x=2, y=3$. 8. $x=y=2$. 9. $x=2, y=1$.
10. $x=3, y=2$.

34. 三元聯立一次方程式用未定係數之解法

$$ax+by+cz+d=0 \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=0 \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$a''x+b''y+c''z+d''=0 \dots\dots\dots (3)$$

以 m 乘(1)式，n 乘(2)式，與(3)式相加(m, n 爲未定常數)於次。

$$m(ax+by+cz+d)+n(a'x+b'y+c'z+d')+a''x+b''y+c''z+d''=0.$$

即 $$(ma+na'+a'')x+(mb+nb'+b'')y+(mc+nc'+c'')z$$
$$+md+nd'+d''=0.$$

今欲同時消去 y 與 z. 必須令 y 與 z 之係數皆爲 0.

若 $$mb+nb'+b''=0 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$
$$mc+nc'+c''=0 \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

則 $$(ma+na'+a'')x=md+nd'+d''$$

$$\therefore \quad x=\frac{md+nd'+d''}{ma+na'+a''} \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

用簡便法解(4),(5)兩式

得 $$\frac{1}{bc'-b'c}=\frac{m}{b'c''-b''c'}=\frac{n}{b''c-bc''}.$$

$$\therefore \quad m=\frac{b'c''-b''c'}{bc'-b'c}, \qquad n=\frac{b''c-bc''}{bc'-b'c}.$$

以 m 與 n 之值代入(6)式。

則 $$x=-\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)} \dots\dots (7)$$

依同樣方法，可求得 y 與 z 之值，因既得 (7) 式，一以 a, a', a'' 與 b, b', b'' 互換，一以 $a, a,' a''$ 與 c, c', c'' 互換，即得 y 與 z 之值如次。

$$y=-\frac{d(a'c''-a''c')+d'(a''c-ac'')+d''(ac'-a'c)}{b(a'c''-a''c')+b'(a''c-ac'')+b''(ac'-a'c)}.$$

$$z=-\frac{d(a'b''-a''b')+d'(a''b-ab'')+d''(ab'-a'b)}{c(a'b''-a''b')+c'(a''b-ab'')+c''(ab'-a'b)}.$$

例 $2x+3y-4z=9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3x-4y+5z=10 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$5x+7y-3z=35 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

依上法得 $(2m+3n+5)x+(3m-4n+7)y+(-4m+5n-3)z$

$$=9m+10n+35 \ldots (4)$$

令 (4) 式 y 與 z 之係數皆爲 0.

則 $3m-4n+7=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

$-4m+5n-3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$

$$x=\frac{9m+10n+35}{2m+3n+5} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

從 (5), (6) 兩式求 m 與 n 之值。

因 $\dfrac{1}{3\times5-(-4)\times(-4)}=\dfrac{m}{-4\times(-3)-5\times7}=\dfrac{n}{7\times(-4)-(-3)\times3}.$

即 $\dfrac{1}{15-16}=\dfrac{m}{12-35}=\dfrac{n}{-28+9}.$

$\therefore\ m=23,\quad n=19.$

以 m 與 n 之值代入 (7) 式。

得 $x=\dfrac{9\times23+10\times19+35}{2\times23+3\times19+5}=\dfrac{432}{108}=4.$

又以 4 代(1),(2)兩式之 x.

化得 $3y-4z=1$ ....(8)

$-4y+5z=-2$ ....(9)

從(8),(9)兩式求 y 與 z 之値.

因 $$\frac{-1}{3\times5-(-4)\times(-4)}=\frac{y}{-4\times(-2)-5\times1}=\frac{z}{1\times(-4)-(-2)\times3}.$$

即 $$\frac{-1}{15-16}=\frac{y}{8-5}=\frac{z}{6-4}.$$

$\therefore\ y=3,\qquad z=2.\qquad$ 答 $\begin{cases}x=4.\\ y=3.\\ z=2.\end{cases}$

35. 求三元聯立一次方程式之根之簡便法.

$ax+by+cz=d$ ....(1)

$a'x+b'y+c'z=d'$ ....(2)

$a''x+b''y+c''z=d''$ ....(3)

以 x, y, z 之各係數及各既知項排列如次.

x, y, z 之分母

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\\ a & b & c\\ a' & b' & c'\end{array}\right|$$

x 之分子

$$\left|\begin{array}{ccc} d & b & c\\ d' & b' & c'\\ d'' & b'' & c''\\ d & b & c\\ d' & b' & c'\end{array}\right|$$

y 之分子

$$\left|\begin{array}{ccc} d & c & a\\ d' & c' & a'\\ d'' & c'' & a''\\ d & c & a\\ d' & c' & a'\end{array}\right|$$

z 之分子

$$\left|\begin{array}{ccc} d & a & b\\ d' & a' & b'\\ d'' & a'' & b''\\ d & a & b\\ d' & a' & b'\end{array}\right|$$

計算之法則.

$$公分母=a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c).$$

$$x之分子=d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c).$$

$$y之分子=d(c'a''-c''a')+d'(c''a-ca'')+d''(ca'-c'a).$$

$$z之分子=d(a'b''-a''b')+d'(a''b-ab'')+d''(ab'-a'b).$$

$$\therefore \quad x=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a''(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

$$y=\frac{d(c'a''-c''a')+d'(c''a-ca'')+d''(ca'-c'a)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

$$z=\frac{d(a'b''-a''b')+d'(a''b-ab'')+d''(ab'-a'b)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

例 $2x+3y-4z=9$……………(1)

$3x-4y+5z=10$ ……………(2)

$5x+7y-3z=35$ ……………(3)

x, y, z 之分母

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

x 之分子

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 10 & -4 & 5 \\ 35 & 7 & -3 \\ 9 & 3 & -4 \\ 10 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

y 之分子

$$\begin{vmatrix} 9 & -4 & 2 \\ 10 & 5 & 3 \\ 35 & -3 & 5 \\ 9 & -4 & 2 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

z 之分子

$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & -4 \\ 35 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$公分母=2\times\{-4\times(-3)-7\times5\}+3\times\{7\times(-4)-3\times(-3)\}$$

$$+5\times\{3\times5-(-4)\times(-4)\}$$

$$=2\times(12-35)+3\times(-28+9)+5\times(15-16)$$

$$=-46-57-5=-108.$$

x 之分子 $=9\times\{-4\times(-3)-7\times5\}+10\times\{7\times(-4)-3\times(-3)\}$

$$+35\times\{3\times5-(-4)\times(-4)\}$$

$$=9\times(12-35)+10\times(-28+9)+35\times(15-16)$$

$$=-207-190-35=-432.$$

y 之分子 $=9\times\{5\times5-(-3)\times3\}+10\times\{-3\times2-(-4)\times5\}$

$$+35\times\{-4\times3-5\times2\}$$

$$=9\times(25+9)+10\times(-6+20)+35\times(-12-10)$$

$$=306+140-770=-324.$$

z 之分子 $=9\times\{3\times7-5\times(-4)\}+10\times\{5\times3-2\times7\}$

$$+35\times\{2\times(-4)-3\times3\}$$

$$=9\times(21+20)+10\times(15-14)+35\times(-8-9)$$

$$=369+10-595=-216.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-432}{-108}=4,\quad y=\frac{-324}{-108}=3,\quad z=\frac{-216}{-108}=2.$$

注意　求得 x 之值，代入(1)，(2)兩式，依二元一次聯立方程式之解法，求 y 與 z 之值，較爲便利。

第八章

聯立一次方程式(其三)

36 二元一次聯立方程式之根之研究.

二元一次聯立方程式之公式形狀如次.

$ax+by+c=0$...........(1)

$a'x+b'y+c'=0$ ....(2)

根之公式 $x=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$, $y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$.

以 A 代 $ab'-a'b$, B 代 $bc'-b'c$, C 代 $a'c-ac'$

根之公式用略記法則 $x=\dfrac{B}{A}$, $y=\dfrac{C}{A}$.

根之研究.

研究二元一次聯立方程式之根,以 A, B, C 爲 0 或不爲 0 而定.

第一 A 不爲 0. B 與 C 在實數之範圍內,則有確定之根.

第二 A 爲 0. x 與 y 之係數,或全爲 0. 或不全爲 0. 有二種區別.

(一) x 與 y 之係數 a, b, a', b' 全爲 0.其 c 與 c' 或同爲 0. 或有一不爲 0. 又有二種區別.

1. $c=0$, $c'=0$. 則(1),(2)兩方程式成次之形狀.

$0.x+0.y+0=0$.........(3) 此式 x 與 y 之値,無論爲何數,皆能成等式,故根爲不定.

2. c 與 c' 有一不爲 0. 設 $c\neq0$. 則(1)式成次之形狀.

$0.x+0.y+c=0\ldots\ldots(4)$　此式 x 與 y 之值，無論爲何數，不能成等式，故不能有根。

（二）x 與 y 之係數 a, b, a', b' 中，不全爲 0. 則略記法之分子 B 與 C 極少有一不爲 0. ($B\neq 0, C=0$ 或 $B\neq 0, C\neq 0$) 或 B 與 C 皆爲 0, 亦有二種區別。

1. B 與 C 極少有一不爲 0. 設 $B\neq 0$.(C 或爲 0 或不爲 0) $bc'-b'c$ 之 b 與 b' 不能同時爲 0. 若同時爲 0. 則 $bc'-b'c=0$. 卽 $B=0$. 與假設 $B\neq 0$ 相反，今定 $b\neq 0$.(b' 或爲 0 或不爲 0) 因 $A=0$. 卽

$ab'-a'b=0$. 移項，得 $ab'=a'b$. 以 b 除兩邊，則 $a'=\dfrac{ab'}{b}$

故 $a'x+b'y+c'=\dfrac{ab'}{b}x+b'y+c'$ 化得

$$b(a'x+b'y+c')=ab'x+bb'y+bc'=ab'x+bb'y+(b'c-b'c)+bc'$$
$$=b'(ax+by+c)+bc'-b'c.$$

因 $bc'-b'c=B$. $\therefore$ $b(a'x+b'y+c')=b'(ax+by+c)+B\ldots\ldots(5)$

以恰合 $ax+by+c=0$ 之 x, y 之值，代入(5)式，則 $b(a'x+b'y+c')=B$. 因 $B\neq 0$ 故 $a'x+b'y+c'\neq 0$ 知 $a'x+b'y+c'=0\ldots\ldots(2)$ 不能成立，又以恰合 $a'x+b'y+c'=0$ 之 x, y 之值代入(5)式，則 $b'(ax+by+c)+B=0$. 因 $B\neq 0$. 故 $ax+by+c\neq 0$. 知 $ax+by+c=0\ldots\ldots(1)$ 不能成立。

總括 $ax+by+c=0$ 之根與 $a'x+b'y+c'=0$ 之根不同，卽非聯立方程式而爲不能方程式。

2. B 與 C 同爲 0. 卽 $bc'-b'c=0$, $a'c-ac'=0$. x 與 y 之係數 a, b, a', b' 不全爲 0. 今設 $b\neq 0$.

因 $B=0$. 則前之(5)式變爲 $b(a'x+b'y+c')=b'(ax+by+c)\ldots(6)$

以恰合 $ax+by+c=0$ 之 x, y 之值代入(6)式，則 $b(a'x+b'y+c')=0$. 因 $b\neq 0$. 故 $a'x+b'y+c'=0$. 知恰合 $ax+by+c=0$ 之根，皆爲恰合 $a'x+b'y+c'=0$ 之根，但恰合一方程式 $ax+by+c=0$ 之根，有無限之多，則恰合他方程式 $a'x+b'y+c'=0$ 之根，同有無限之多，故根爲不

定,

總括

1. $A=ab'-a'b\neq 0$.

(1),(2)兩式惟有一組有限而確定之根。

2. $A=ab'-a'b=0$.

〔1〕 a, b, a', b' 皆爲0

c與c'有一不爲0.不能有根。

又$c=c'=0$.根爲不定。

〔2〕 a, b, a', b' 不全爲0.

B與C極少有一不爲0.不能有根。

又B與C同爲0.根爲不定。

注意一 x與y之係數全不爲0. A爲0. B與C同爲0或不爲0.

從$A=ab'-a'b=0$.化得$b'=\dfrac{a'b}{a}$.以$\dfrac{a'b}{a}$代$B=bc'-b'c$之b'.

得 $B=bc'-\dfrac{a'b}{a}c=\dfrac{b}{a}(ac'-a'c)=\dfrac{b}{a}(-C)$.

若$B=0$, $\dfrac{b}{a}\neq 0$.則$C=0$.不定之形狀爲$x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$.

又$B\neq 0$, $\dfrac{b}{a}\neq 0$.則$C\neq 0$.不能之形狀爲$x=\dfrac{B}{0}$, $y=\dfrac{C}{0}$.

故x與y之係數全不爲0.適用根之公式,若結果爲$x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$之形狀,卽斷定原方程式爲不定方程式,又結果爲$x=\dfrac{B}{0}$, $y=\dfrac{C}{0}$之形狀,($B\neq 0$, $C\neq 0$)卽斷定原方程式爲不能方程式。

注意二 x與y之係數全不爲0.若原方程式爲不定方程式,適用根之公式,知結果爲$x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$之形狀,又原方程式爲不能方程式,適用根之公式,知結果爲$x=\dfrac{B}{0}$, $y=\dfrac{C}{0}$(B與C極少有一不

爲 0)之形狀.

37. 解二元一次聯立方程式適用二公式之情形.

(1) $A=ab'-a'b\neq 0$. 惟有一組有限而確定之根.

(2) $A=ab'-a'b=0$, $x=\dfrac{B}{0}$, $y=\dfrac{C}{0}$, 其 B 與 C 極少有一不爲 0. 原方程式爲不能方程式.

(3) $A=ab'-a'b=0$, $x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$. 判別如次.

(一) a, b, a', b' 不全爲 0. 原方程式爲不能方程式.

(二) a, b, a', b' 全爲 0. c 與 c' 又同爲 0. 原方程式爲不定方程式. c 與 c' 有一不爲 0. 原方程式爲不能方程式.

38. 二元一次聯立方程式之例題解法.

例題 1. 解 $x+y=a+b$ ....(1)

$(a+c)x-by=bc$ ....(2)

解 $$\frac{-1}{-b-(a+c)}=\frac{x}{bc-(-b)(a+b)}=\frac{y}{(a+b)(a+c)-bc}.$$

即 $$\frac{1}{a+b+c}=\frac{x}{b(a+b+c)}=\frac{y}{a(a+b+c)}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{b(a+b+c)}{a+b+c}=b,\quad y=\frac{a(a+b+c)}{a+b+c}=a.$$

根之研究

(1) $a+b+c\neq 0$.

有根一組爲 $x=b, y=a$.

(2) $a+b+c=0$.

根之形狀爲 $x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$ 在(1), (2)兩式 x 與 y 之係數全不爲 0.

故根為不定。

從 $a+b+c=0$ 得 $a+c=-b$ 及 $c=-(a+b)$. 代入 (2) 式如次.

$(a+c)x+(a+c)y=(a+c)(a+b)$ ......(3) 以(3)式與(1)式比較,知(3)式乃以 $a+c$ 乘(1)式而得,卽由(1)式引伸之方程式,故(1),(2)兩式之形狀,雖不相同,其實僅有一式,由此顯然可見根為不定。

例題 2 解 $(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2$............(1)

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$............(2)

解
$$\frac{1}{(a+b)^2-(a-b)^2}=\frac{x}{(a-b)(a^2-b^2)-(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$=\frac{y}{(a-b)(a^2+b^2)-(a+b)(a^2-b^2)}.$$

卽
$$\frac{-1}{4ab}=\frac{x}{-2ab(a+b)}=\frac{y}{-2ab(a-b)}.$$

$$\therefore\ x=\frac{2ab(a+b)}{4ab}=\frac{a+b}{2},\qquad y=\frac{2ab(a-b)}{4ab}=\frac{a-b}{2}.$$

根之研究.

〔1〕 a 與 b 皆不為 0.

有根一組為 $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{a-b}{2}$.

〔2〕 a 與 b 同為 0 或有一不為 0.

設 $a=0$. 從 $x=\dfrac{2ab(a+b)}{4ab}$, $y=\dfrac{2ab(a-b)}{4ab}$. 知 $x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$.

細為區別如次。

(一) $a=0$, $b=0$. x 與 y 之係數及既知項皆為 0. 故根為不定。

(二) $a=0$, $b\neq 0$. x 與 y 之係數無一為 0. 根亦為不定,因 $a=0$.則(1)(2)兩式如次。

$$bx-by=b^2\dots\dots\dots\dots(3)$$
$$-bx+by=-b^2\dots\dots\dots\dots(4)$$

以 -1 乘(3),(4)兩式中之一式之兩邊，則二式完全相同，故根爲不定顯然可見。

例題 3. 解 $(2m+1)x+(4m+3)y=3m+1\dots\dots\dots\dots(1)$

$$(m+2)x+(3m-4)y=1-m\dots\dots\dots\dots(2)$$

解 $$\frac{-1}{(2m+1)(3m-4)-(m+2)(4m+3)}$$

$$=\frac{x}{(4m+2)(1-m)-(3m-4)(3m+1)}$$

$$=\frac{y}{(3m+1)(m+2)-(1-m)(2m+1)}.$$

即 $$\frac{1}{2(m^2-1)}=\frac{x}{(m+1)(13m+1)}=\frac{y}{-(m+1)(5m+1)}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{(m+1)(13m+1)}{2(m^2-1)}=\frac{13m+1}{2(m-1)},$$

$$y=\frac{(-m+1)(5m+1)}{2(m^2-1)}=\frac{-(5m+1)}{2(m-1)}.$$

根之研究

〔1〕 $m^2-1\neq0$. 卽 $m\neq1$ 及 $m\neq-1$.

有根一組爲 $x=\dfrac{13m+1}{2(m-1)},\quad y=\dfrac{-(5m+1)}{2(m-1)}$.

〔2〕 $m=1$.

根之形狀爲 $x=\dfrac{28}{0}, y=\dfrac{-12}{0}$. 卽不能有根。

因 $m=1$. 則 (1),(2) 兩式如次。

$$3x+7y=4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$3x+7y=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此(3),(4)兩式矛盾，故不能有根。

〔3〕 $m=-1$.

從 $x=\dfrac{(m+1)(13m+1)}{2(m^2-1)}$, $y=\dfrac{-(m+1)(5m+1)}{2(m^2-1)}$.

知 $x=\dfrac{0}{0}$, $y=\dfrac{0}{0}$. 以 -1 代 x 與 y 之係數之 m. 無一爲 0. 故根爲不定。

因 $m=-1$ 則(1) (2)兩式如次。

$$-x-y=-2\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$x+y=2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

以 -1 乘(5),(6)兩式中之一式之兩邊，則二式完全相同，顯見其根爲不定。

例題 4. 解 $(3m+1)x+(5m-2)y=am-3\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$$(9-m)x+2(m+2)y=bm+a+4\ldots\ldots\ldots(2)$$

此題附帶一種條件，命(1),(2)兩式之 m 爲任何數，定 a, b 之值，求 x 與 y.

解 化(1)式爲 $(3x+5y-a)m+x-2y+3=0$.

化(2)式爲 $(2y-x-b)m+9x+4y-a-4=0$.

依條件 m 之値爲任何數，卽須有次之關係。

$$3x+5y-a=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$x-2y+3=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$2y-x-b=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$9x+4y-a-4=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

(4)+(5)……$3-b=0$. ∴ $b=3$.

(3)−(4)×3…………$11y-a-9=0$. ∴ $y=\dfrac{a+9}{11}$……………(7)

$(6)+(5)\times 9\ldots\ldots 22y-a-9b-4=0.\ \therefore y=\dfrac{a+9b+4}{22}\ldots\ldots(8)$

$(7)-(8)\ \ldots\ldots\ldots \dfrac{a+9}{11}-\dfrac{a+9b+4}{22}=\dfrac{a-9b+14}{22}=0\ldots\ldots\ldots(9)$

以 3 代(9)式第二節之 b. 則 $\dfrac{a-13}{22}=0.\ \therefore a=13.$

又以 13 代(7)式之 a 則 $y=\dfrac{13+9}{11}=2.$

再以 2 代(4)式之 y. 則 $x-4+3=0.\ \therefore\ x=1.$ 答 $\begin{cases}a=13.\\b=3.\end{cases}\begin{cases}x=1.\\y=2.\end{cases}$

例題 5. 解 $(p-3)x+(2p+1)y+p-5=0\ldots\ldots\ldots(1)$

$(p-1)x-(3p-1)y-2p+7=0\ \ldots\ldots\ldots(2)$

解
$$\frac{1}{-(p-3)(3p-1)-(p-1)(2p+1)}$$
$$=\frac{x}{(2p+1)(-2p+7)+(3p-1)(p-5)}$$
$$=\frac{y}{(p-5)(p-1)-(p-3)(-2p+7)}.$$

即 $$\frac{1}{-(5p^2-11p+2)}=\frac{x}{-(p^2+4p-12)}=\frac{y}{3p^2-19p+26}.$$

即 $$\frac{1}{-(5p-1)(p-2)}=\frac{x}{-(p+6)(p-2)}=\frac{y}{(3p-13)(p-2)}.$$

$$\therefore\ x=\frac{(p+6)(p-2)}{(5p-1)(p-2)}=\frac{p+6}{5p-1},$$

$$y=-\frac{(3p-13)(p-2)}{(5p-1)(p-2)}=-\frac{3p-13}{5p-1}.$$

根之研究

〔1〕 $(5p-1)(p-2)\neq 0$. 卽 $p\neq\frac{1}{5}$及 $p\neq 2$.

有根一組爲 $x=\frac{p+6}{5p-1}$, $y=-\frac{3p-13}{5p-1}$.

〔2〕 $(5p-1)(p-2)=0$. 卽 $p=\frac{1}{5}$或 $p=2$. 有次之二種區別。

〔一〕 $p=\frac{1}{5}$.

根之形狀爲 $x=\frac{\left(\frac{1}{5}+6\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{0}, y=-\frac{\left(\frac{3}{5}-13\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{0}$.

卽不能有根, 因以$\frac{1}{5}$代原方程式中之 p. 則(1),(2)兩式如次。

$$-\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y-\frac{14}{5}=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y+\frac{33}{5}=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

(3)式之各項,以 7 除之. 2 乘之, 則$-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}y-\frac{4}{5}=0$.

與(4)式矛盾,故不能有根。

〔二〕 $p=2$.

根之形狀爲 $x=\frac{0}{0}, y=\frac{0}{0}$. 卽根爲不定。

因以 2 代原方程式中之 p. 則(1),(2)兩式如次。

$$-x+5y-3=0\dots\dots\dots\dots(5)$$

$$x-5y+3=0\dots\dots\dots\dots(6)$$

以 -1 乘(5),(6)兩式中之一式,則二式完全相同,顯見根爲不定。

例題 6. 解 $(m-3)x-(2m+1)y-3m+2=0$ .... (1)

$(m-1)x+(3m-1)y+2m=0$ .... (2)

解 $$\frac{1}{(m-3)(3m-1)+(m-1)(2m+1)}$$

$$=\frac{x}{-2m(2m+1)-(3m-1)(-3m+2)}$$

$$=\frac{y}{(m-1)(-3m+2)-2m(m-3)}.$$

即 $$\frac{1}{5m^2-11m+2}=\frac{x}{5m^2-11m+2}=\frac{y}{-5m^2+11m-2}.$$

即 $$\frac{1}{(5m-1)(m-2)}=\frac{x}{(5m-1)(m-2)}=\frac{y}{-(5m-1)(m-2)}$$

$$\therefore x=\frac{(5m-1)(m-2)}{(5m-1)(m-2)}=1, \qquad y=-\frac{(5m-1)(m-2)}{(5m-1)(m-2)}=-1.$$

根之研究

〔1〕 $(5m-1)(m-2)\neq 0$. 即 $m\neq\frac{1}{5}$ 及 $m\neq 2$.

有根一組為 $x=1, y=-1$.

〔2〕 $(5m-1)(m-2)=0$. 即 $m=\frac{1}{5}$ 或 $m=2$. 其區別如次。

〔一〕 $m=\frac{1}{5}$.

根之形狀為 $x=\frac{0}{0}, y=\frac{0}{0}$. 以 $\frac{1}{5}$ 代原方程式中 x 與 y 之係數之 m. 無一為 0. 知根為不定。

因以 $\frac{1}{5}$ 代 m. 則(1),(2)兩式同為 $-2x-y+1=0$. 兩未知數,僅有一式,故根為不定。

〔二〕 $m=2$.

根之形狀亦爲 $x=\frac{0}{0}, y=\frac{0}{0}$. 以2代原方程式中 x 與 y 之係數之 m. 無一爲0知根爲不定。

因以2代 m. 則(1),(2)兩式如次。

$$-x-5y-4=0.$$

$$x+5y+4=0.$$

以 -1 乘此二式中之一式，則兩式完全相同，根爲不定顯而易見。

注意 三元以上聯立一次方程式之根之研究，異常繁雜，出乎初等代數學之範圍，故於本編無此研究。

問題七

次之方程式中二元聯立之研究

1. 設 $x+3y=20-7m$ 之根，等於次之兩方程式 $2x-3y=11-4m$, $3x+2y=21-5m$ 之根，問 m 之值幾何。

2. 解 $ax+by=2ab$, $bx-ay=a^2-b^2$.

3. 設 $Kx-6y=5K-3$, $2x+(K-7)y=-7K+29$ 之 x 與 y 相等，問 K 之值幾何，又 x 與 y 之值幾何。

4. 解 $(a+h)x+(b-h)y=c$, $(b+k)x+(a-k)y=c$.

5. 有未知數爲 x 之二次三項式. 以 $\frac{5+2\sqrt{3}}{6}$ 或 $\frac{5-2\sqrt{3}}{6}$ 代其 x. 則其式之值俱爲0. 又以2代其 x. 則其值爲37. 求此二次三項式。

〔引導〕 先假定二次三項式爲 ax^2+bx+c. 如題以各數一一代其 x. 求 a, b, c.

6. 設 $(5m+11)x-(m+4)y+12=0$, $(m+15)x+(2m-1)y-20=0$ 之 y 之值爲 x 之值之3倍，問 m 之值幾何，又 x, y, 之值各幾何。

7. 設以 x^2+4x+3 除 x^6+px+q 能得整式，問 p 與 q 之值各若

干。

8. 設 $a+bx^3$ 之 x 爲 10. 則其式之值爲 100. 又 x 爲 11. 則其式之值爲 120. 問 x 爲 12. 其式之值幾何。

9. 設以 ax^2+bx+c 乘 x^2+px+q. 其乘積中 x^3 與 x 之係數俱爲 0. 問 p 與 q 之值如何。

10. 解 $7x+5y+z+74=0,\quad 2x-4y-z-20=0$

$3x-3y+z+18=0.$

11. 解 $(a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2,\quad bx=ay.$

12. 解 $(a^2+9)x+(b^2-9)y=(b^2+7)x+(a^2-7)y=c.^2$

13. 解 $ax-ay-z=0,\ bx+by-z=0,\ x+y-2a=0.$

14. 解 $\dfrac{x+z-y}{c+a}=\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=1.$

15. 解 $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\quad \dfrac{x}{3m}+\dfrac{y}{6n}=\dfrac{2}{3}.$

16. 解 $x-ay+a^2z=a^3,\quad x-by+b^2z=b,^3$

$x-cy+c^2z=c.^3$

17. 解 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c},\quad lx+my+nz=s.$

18. 解 $2x+3y-4z=1,\quad x-2y+z=2,\quad 3x-y-z=3.$

19. 設方程式 $x^2+y^2+Gx+Fy+C=0.$

有三組之值 $\begin{cases}x=3.\\y=0.\end{cases}\begin{cases}x=0.\\y=2.\end{cases}\begin{cases}x=1.\\y=1.\end{cases}$ 皆能恰合,問 G, F, C 之值各幾何。

解次之各方程式

20. $(b+c)x+(b-c)y=2ab,\quad (c+a)x+(c-a)y=2ac.$

21. $bx+ay=2ab,\quad a^2x+b^2y=a^3+b.^3$

22. $axy=c(bx+ay),\quad bxy=c(ax-by).$

23. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3$,
$a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$.

24. $x+y+z=0$, $ax+by+cz=1$, $a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$.

25. $x+y+z=a+b+c$, $bx+cy+az=a^2+b^2+c^2$,
$b^2x+c^2y+a^2z=a^3+b^3+c^3$.

26. $ax+cy+bz=a^2+2bc$, $cx+by+az=b^2+2ca$,
$bx+ay+cz=c^2+2ab$.

27. $x+y+z=2a+2b+2c$, $ax+by+cz=2bc+2ca+2ab$,
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

28. $ax+by+cz=m$, $a^2x+b^2y+c^2z=m^2$, $a^3x+b^3y+c^3z=m^3$.

29. $(m-n)x+(n-l)y+(l-m)z=0$, $mx+ny+lz=mn+nl+lm$,
$x+y+z=l+m+n$.

30. $(3m+1)x+(5m-2)y=4m-3$, $(9-m)x+2(m+2)y=m+1$.

31. $(3m+1)x+(5m-2)y=m^2-3m+7$.
$(9-m)x+2(m+2)y=m^2-8m+17$.

32. $(m-3)x+(2m+1)y+m-1=0$,
$(m-1)x-(3m-1)y-2m+3=0$.

33. $(m-5)x+(3m-1)y+2m+4=0$,
$(m+1)x-(4m-3)y+2m-12=0$.

34. 設$(m+1)x+(2m+3)y=pm+q$,
$(3m+2)x+(5-m)y=rm+s$ 之 m 爲任何數，求 p, q, r, s 之關係及 x, y 之值。

39. 應用問題之解法及問題之研究.

例題 1. 以每斤價銀 a 圓之甲酒與價銀 b 圓之乙酒，和成每斤 c 圓之丙酒 d 斤，問用甲酒乙酒各幾何。

解 設甲酒爲 x 斤，乙酒爲 y 斤，則甲酒之共價爲 ax 圓，乙酒之共價爲 by 圓，而丙酒共價爲 cd 圓，依題得次之方程式

$$x+y=d \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad ax+by=cd \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

解 (1), (2) 兩式得 $\dfrac{-1}{b-a}=\dfrac{x}{(c-b)d}=\dfrac{y}{(a-c)d}$.

$$\therefore \quad x=\frac{(c-b)d}{a-b}, \quad y=\frac{(a-c)d}{a-b}.$$

答　甲酒 $\dfrac{(c-b)d}{a-b}$ 斤，乙酒 $\dfrac{(a-c)b}{a-b}$ 斤.

問題之研究.

此問題須注意之事項，各酒之價 a, b, c 及斤數 d 皆為正數，答之斤數亦為正數。

因甲乙酒之斤數 $\dfrac{(c-b)d}{a-b}$, $\dfrac{(a-b)d}{a-b}$ 為正數，故有次之條件。

〔1〕 $a>b$. 須 $c>b$, $a>c$. 即 $a>c>b$.

〔2〕 $a<b$. 須 $c<b$, $a<c$. 即 $a<c<b$.

故成立此問題，c 之值須在 a 與 b 之間，若 c 非 a 與 b 之間之數，則 x 與 y 之值為負數，即為不能之問題。

〔3〕 若 $a=b$. 有次之二種區別。

(一)　c 與 a 不等於 b. 即不能之問題。

(二)　c 與 a 等於 b. 則於 $x+y=d$ 之範圍內，x 與 y 之值，可多至無窮，即不定之問題。

此事項從事實上考之，亦顯而易見。

例題 2.　每一點鐘，甲行 a 里，乙行 b 里，今乙先行 m 里，甲自後追之，問行幾點鐘即追及乙。

解　設甲行之時間為 x 點鐘，則甲所行之里數為 ax. 同時間乙所行之里數為 bx. 依題得次之方程式。

$$ax=bx+m.$$

化得　$(a-b)x=m$. $\therefore x=\dfrac{m}{a-b}$.　答甲行 $\dfrac{m}{a-b}$ 點鐘追及乙。

問題之研究

〔1〕 $a>b$. 因 m 爲正數，故$\frac{m}{a-b}$爲正數，卽甲行$\frac{m}{a-b}$點鐘追及乙。

〔2〕 $a=b$. 則 $x=\frac{m}{0}$ 卽不能有答。

因甲永遠不能追及乙，故爲不能之問題。

〔3〕 $a<b$. 則 $x=-\frac{m}{b-a}$. 此表示甲於$\frac{m}{b+a}$點鐘以前追及乙，非甲於乙後追乙，故爲不能之問題。

問題八

1. 自鳴鐘之短針在長針之前 a 分畫，問歷若干時間，其長針在短針之前 b 分畫。

2. 有甲乙二人，甲年 a 歲，乙年 b 歲，問從今起幾年之後，甲之歲數爲乙之歲數之 2 倍。

3. 從某數之$\frac{1}{n}$減 a. 其餘數之 a 倍等於 b. 求某數。

4. 甲乙二人，同時於一處向某地而行，每一點鐘，甲行 m 里，乙行 n 里，甲於正午行至 P 處，其時乙行至 Q 處，P 與 Q 之距離 d 里，問已行幾點鐘時間。

5. 有每斤價銀 a 圓之茶 n 斤，問用每斤價銀 b 圓之茶幾許與之混和，卽得每斤 c 圓之茶。

6. 有數爲 a. 分爲四數，第一數以 n 加之，第二數以 n 減之，第三數以 n 乘之，第四數以 n 除之，其和較積商皆相等，問四數各若干，又 $a=90, n=2$.則四數各若干。

7. 有甲乙丙三工人，甲能於 $2m$ 日造成一器，甲乙合造僅須 n 日，甲丙合造，則須$\left(m-\frac{1}{2}n\right)$日，問三人合造須幾日。

8. 有銀 P 圓，分與貧民 n 人，男 1 人得 7 角 5 分，女 1 人得 5 角，問男女各幾人。

9. 甲乙兩地相距 a 里，有人從甲地往乙地，第一日行全路之 $\frac{1}{m}$，第二日行餘路之 $\frac{1}{n}$，第三日以後所行之路，皆順序為逐次之餘路之 $\frac{1}{m}$ 及 $\frac{1}{n}$ 行至第 $2p$ 日，問距甲地共有路程若干。

10. 有銀若干圓，甲乙丙丁四人順次分取，甲所得之數，比總銀數之四分之一少 a 圓，乙所得之數，比甲分取後所餘銀數之半多 b 圓，丙所得之數為甲之 c 倍，丁所得之數為最後賸餘之 d 圓，問甲得幾圓。

11. 有自鳴鐘在第 p 點鐘之後，短針與長針間隔 d 分，求其時為 p 點幾分。

12. 分某數為 n 等分，其各分之連乘積，等於分其數為 $n+1$ 等分各分之連乘積之 n 倍，求某數。

13. 有甲乙丙三人，分銀若干圓，甲所得之數，比總銀數之 $\frac{1}{n}$ 多 $\frac{a}{n}$ 圓，乙所得之數，比甲分取後之餘數之 $\frac{1}{n}$ 多 $\frac{a}{n}$ 圓，丙所得之數，比甲乙分取後之餘數之 $\frac{1}{n}$ 多 $\frac{a}{n}$ 圓，而銀適盡，求總銀數。

14. 甲在 A 地，乙在 B 地，同時順 AB 方向同往某地，每一點鐘，甲行 a 里，乙行 b 里．知 A, B 二地之距離為 d 里，二人行至 B 地之右某處相遇，問其處距 B 地幾里。

15. 有分數為 $\frac{a}{b}$．其分母分子同加某數，則等於 p．求某數。

16. 有甲乙丙三工人，甲造成一器之時間為乙丙合造之時間之 m 倍，乙造成一器之時間為甲丙合造之時間之 n 倍，丙造成一器之時間為甲乙合造之時間之 p 倍，求證 $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$.

17. 有酒缸能容酒 a 升，今從缸中取出酒 b 升，以水 b 升攙入，如是取出攙入 n 回，問缸中餘酒幾升。

附　錄

問題之答及解法指南

今分載各問題之答於次，遇稍難解之問題，并指示解法之途徑，惟文字方程式之繁雜者，或從省略，學者可以本書之例題為標準而解之。

問題一

1. $-\frac{169}{81}$.

2. $(3x+2)(x-5)=3x^2-13x-10$, $(x-1)^2+2x^2-88=3x^2-2x-87$. 以上二式之右邊作等式，依法化之，得 $x-7$.

3. 左邊 $=x^2+20x+100+x^2+24x+144$.

右邊 $=x^2+18x+81+x^2+24x+143$.

用此作等式，依法化之，得 $x=-10$.

4. 以分母之最小公倍數 $2\times5\times21$ 乘兩邊，卽化去分母。$x=17$.

5. 以分母之最小公倍數 $7\times5\times4$ 乘兩邊，卽化去分母。$x=10$.

6. 以分母之最小公倍數 5×6 乘兩邊，卽化去分母。$x=-5$.

7. 3.

8. $4.\dot{3}=4\frac{3}{9}=4\frac{1}{3}$, $.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. 化各係數為分數而後去分母，$x=28$.

9. 以分母之最小公倍數 6×7 乘兩邊，卽化去分母，$x=-23$.

10. 左邊 $=\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{7}x-\frac{5}{2}+1\right\}+5\right]+\frac{4}{5}$

$$=\frac{3}{5}\left[\frac{2}{21}x-1+5\right]+\frac{4}{5}=\frac{2}{35}x+\frac{12}{5}+\frac{4}{5}.$$

故原方程式為 $\frac{2}{35}x+\frac{16}{5}=-2$. $x=-91$.

11. 化係數之小數爲分數,然後去分母。 $x=12$.

12. 以分母之最小公倍數 5×7 乘兩邊。

得 $(15x+2)(35x+3)=(15x-2)(35x+28)+15$.

即 $525x^2+115x+6=525x^2+250x-56+15$.

$x=\frac{1}{5}$.

13. $.1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$, $.75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, $.\dot{1}=\frac{1}{9}$.

化各係數爲分數而後解之, $x=-13$.

14. 以分母之最小公倍數 $15\times7\times4$ 乘兩邊,卽化去分母。 $x=0$.

15. 左邊$=\frac{50x-4}{3}+\frac{13-30x}{20}+\frac{80x-18}{12}$. 以分母之最小公倍數 60 乘之,卽化去分母。 $x=\frac{1}{10}$.

16. 以分母之最小公倍數 2×3 乘兩邊。

得 $(x+15)(x-4)=(x+14)(x-6)+42$. 解之,則 $x=6$.

問題二

1.	5.	2.	3.	3.	2.	4.	6.
5.	5.	6.	$\frac{4}{7}$.	7.	1.	8.	7.

9. 甲所得爲 x 圓,則乙所得爲 $2x$ 圓,丙所得爲 $6x$ 圓。

方程式 $x+2x+6x=450$. 甲 50 圓,乙 100 圓,丙 300 圓。

10. 甲與乙 x 圓, 方程式 $15-x=\frac{1}{2}(18+x)$. 4 圓。

11. 乙所有爲 x 圓,則甲所有爲 $(800-x)$ 圓。

方程式 $\frac{1}{3}(800-x-x)=x+x$. 甲 700 圓。 乙 100 圓。

12. 田地值 x 圓，方程式 $\frac{3}{7}x+3000\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}(x+3000)$.

4200 圓.

13. 銀數爲 x 圓， 方程式 $\frac{x-7}{10}=\frac{x+17}{12}$. 127 圓.

14. 財產總數爲 x 圓，方程式 $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+600$, 2400 圓.

15. 以 x 代今之歲數，方程式 $x-8=\frac{5}{7}(x+8)$, 48 歲.

16. 所求之年數爲 x, 方程式 $(45-x)+(37-x)=8(14-x)$.
5 年前.

17. 子之年爲 x 歲，則父之年爲 $3x$ 歲. 方程式 $3x-4=4(x-4)$.
父 36 歲，子 12 歲.

18. 先以 x 代父子年齡之和，從方程式 $x=\frac{1}{2}(x+25+25)$
得 $x=50$. 既得父子年齡之和，然後以 x 代父之年齡，則子之年齡爲
$50-x$. 又作方程式 $x-(50-x)=\frac{1}{3}\{(x+20)+(50-x+20)\}$.
$\therefore x=40$. 父 40 歲 子 10 歲.

19. 女數爲 x. 則男數爲 $4x$. 方程式 $4x-10=5(x-10)+10$.
男 120 人， 女 30 人.

20. 投考人數爲 x. 則及格人數爲 $\frac{2}{11}x+30$. 不及格人數爲
$\frac{9}{11}x-30$. 方程爲 $\frac{2}{11}x+30=\frac{5}{17}\left(\frac{9}{11}x-30\right)$ 660 人.

21. 一位之數字爲 x. 則十位之數字爲 $\frac{3}{4}x$. 二位之數爲

$10\left(\frac{3}{4}x+x\right)$　方程式 $5\left(x+\frac{3}{4}x\right)-1=10\left(\frac{3}{4}x\right)+x$, 34.

22.　一位之數字爲 x. 則十位之數字爲 $3x$. 二位之數爲 $10(3x)+x$
方程式 $3(3x+x)+7(3x-x)=10(3x)+x-10$.　62.

23.　一位之數字爲 x. 則十位之數字爲 $x+3$. 二位之數爲
$10(x+3)+x$.　方程式 $10(x+3)+x+8=12(x+3)$,　52.

24.　一位之數字爲 x. 則十位之數字爲 $3x+1$. 二位之數爲
$10(3x+1)+x$, 方程式 $\frac{1}{36}\left[10(3x+1)+x\right]=x$,　72.

25.　一位之數字爲 x. 則十位之數字爲 $x-3$. 二位之數爲
$10(x-3)+x$.　方程式 $10(x-3)+x+26=9x+10$.　47.

26.　十位之數字爲 x. 則一位之數字爲 $11-x$. 二位數爲
$10x+11-x$. 交換數字之二位數爲 $10(11-x)+x$.
方程式 $10(11-x)+x=10x+11-x+27$.　47.

27.　第一偶數爲 x. 則次之偶數爲 $x+2$.
方程式 $x+x+2=86$.　42,　44.

28.　第一整數爲 x. 則次之整數爲 $x+1$.
方程式 $(x+1)^2-x^2=17$.　8,　9.

29.　5 點鐘後, 長短兩針相重時之分數爲 x. 則短針進行之分數爲 $\frac{x}{12}$. 因 5 點鐘時兩針之位置之差爲 25 分, 自 5 點鐘起, 長針之進行比短針之進行多 25 分, 兩針即相重。 方程式 $x-\frac{x}{12}=25$.
5 點 $27\frac{3}{11}$ 分.

30.　5 點鐘後長短兩針第一次成直角時, 長針所指之分數爲 x, 則短針之位置在 $25+\frac{x}{12}$ 分畫處, 其時兩針之距離爲 15 分畫.
方程式 $25+\frac{x}{12}-x=15$.　5 點 $10\frac{10}{11}$ 分.

31. 11點鐘後長短兩針反對成一直線時,長針所指之分數爲x.則短針之位置在$\left(55+\frac{x}{12}\right)$分畫處,其時兩針之距離爲30分畫。

方程式 $55+\frac{x}{12}-x=30$. 11點$27\frac{3}{11}$分。

32. 以x代所求之日數,則甲乙丙辦某事之成績,一爲$\frac{x}{8}$.一爲$\frac{x}{6}$.一爲$\frac{x}{12}$.方程式$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)x=\frac{3}{4}$. 2日。

33. 以x代所求之鐘點數,則合辦三事甲之成績爲$\frac{x}{18}$.乙之成績爲$\frac{x}{24}$.丙之成績爲$\frac{x}{36}$ 方程式$\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}\right)x=3$. 24點鐘.

34. 丙一人獨辦一事之日數爲x,則丙每日之成績爲$\frac{1}{x}$.

方程式$\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$. $26\frac{2}{3}$日。

35. 第一整數爲x.則次之各整數爲$x+1,x+2,x+3$.
方程式$x+x+1+x+2+x+3=22$. 4, 5, 6, 7.

36. 布半匹之價爲x圓.則$\frac{17+x}{12}$爲一日之工銀數,$\frac{9.5+x}{7}$亦爲一日之工銀數,作等式解之,則$x=1$. 1圓.

37. 以x代梨數,則$300-x$爲柿數.
方程式 $.025x+.02(300-x)=.03\times300-1.5$. 梨100枚.柿200枚.

38. 乙所有之數爲x圓.則甲所有之數爲$1\frac{1}{3}x$圓$=\frac{4}{3}x$圓。

丙所有之數爲 $1\frac{1}{3}\times 1\frac{1}{3}x$ 圓 $=\frac{16}{9}x$ 圓，從方程式

$x+\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}x=6290$ 得 $x=1530$. 故丙所有之數爲

$\left(1530\times\frac{16}{9}\right)$ 圓，卽 2720 圓。

39. 所求日數爲 x. 方程式 $80-1.2x=95-1.8x$. 25 日。

40. 20 圓銀票之數爲 x. 則 5 圓銀票之數爲 $20-x$.
方程式 $20x+5(20-x)=250$. 各 10 張。

41. 兔之跳數爲 x. 則犬之跳數爲 $\frac{5}{6}x$.

方程式 $\frac{1}{9}(100+x)=\frac{1}{7}\left(\frac{5}{6}x\right)$. 1400 跳。

42. 每升 1 圓 2 角之酒爲 x 升，則每升 7 角 5 分之酒爲 $(15-x)$ 升。
方程式 $1.2x+.75(15-x)=1.05\times 15$. 1 斗，5 升。

43. 雞蛋每枚之價爲 x 釐，則跌價後每枚爲 $.8x$ 釐。
方程式 $\frac{3500}{x}=\frac{3472}{.8x}-24$. 以 X 代 $\frac{1}{x}$. 則 $3500X=4340X-24$.

解之得 $X=\frac{24}{840}$ $\therefore$ $x=\frac{840}{24}=35$. 3 分 5 釐。

44. 原有學生數爲 x 人， 方程式 $\left(1-\frac{5}{27}\right)x+120=\frac{28}{27}x$.

540 人。

45. 所求之升數爲 x. 則桶中共有酒 $(x+24)$ 升。第一日賣出後所

餘之升數爲 $\frac{1}{2}(x+24)+1$. 第二日賣出後所餘之升數爲

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+24)+1\right]+1,$$

第三日賣出後所餘之升數為

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x+24)+1\right\}+1\right]+1=24.$$

三日共賣出1石5斗4升.

46. 地價為x圓, 方程式 $\frac{x}{18}-2=\frac{x}{20}$, 360圓.

47. 以x代女一人所得之圓數,則男一人所得為$(x+2)$圓,童子一人所得為$\frac{x}{2}$圓. 方程式$30(x+2)+50x+20\left(\frac{x}{2}\right)=240$.

男一人9圓,女一人2圓,童子一人1圓.

48. 金表與表鏈共價為x圓,則金表之價為$\left(\frac{3}{5}x+1.98\right)$圓.

表鏈之價為$\left(\frac{1}{3}x-.2\right)$圓, 而$\left(\frac{2}{5}x-1.98\right)$圓亦為表鏈之價.

作等式解之$x=26.4$.

故表鏈之價為$\left(26.4\times\frac{1}{3}-.2\right)$圓.即8圓6角.

金表之價為26圓4角－8圓6角.即17圓8角.

49. 甲辦事之點鐘數為x.則乙之鐘點數為$6-x$.

方程式$\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}(6-x)=1$. 3點鐘.

50. 甲借x圓.則乙借$(1500-x)$圓.

方程式$\frac{5}{100}x+\frac{6}{100}(1500-x)=80$. 甲1000圓. 乙500圓.

51. 以x代作工之日數,則$30-x$為曠工之日數.

方程式 $.8x-.4(30-x)=18.$ 25日。

52. 以x代距離哩數。方程式 $\frac{\frac{x}{2}}{3}+\frac{\frac{x}{2}}{4}=\frac{x}{3\frac{1}{2}}+\frac{5}{60}$. 14哩。

53. 以x代所求之升數，則酒精之升數爲$\frac{2}{3}x+4$，水之升數爲

$\frac{1}{3}x-4$，又爲$\frac{1}{4}x-1$，作等式解之，得$x=36$. 3斗6升.

54. 以x代薄酒斗數，則厚酒爲$(14-x)$斗，薄酒中之酒爲

$\frac{12}{12+18}x$斗，厚酒中之酒爲$\frac{9}{9+3}(14-x)$斗。

方程式$\frac{12}{30}x+\frac{9}{12}(14-x)=7$.

薄酒1石。厚酒4斗。

55. 原兵數爲x人，方程式$(80-20)x=10(x+2000)$. 400人。

56. 尾長爲x寸，則脊長爲$(x+4)$寸，從方程式$4+\frac{x+4}{2}=x$

得$x=12$.

故全長爲$(4+12)$寸$\times 2$卽3尺2寸。

57. 總數爲x圓，則分與甲後所餘之數爲$\left(\frac{3}{4}x-100\right)$圓。

又分與乙後所餘之數爲$\left[\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}x-100\right)-10\right]$圓，此卽丙所得

之250圓，作等式解之，得$x=1000$. 1000圓。

58. 乙之速度爲x哩。則甲之速度爲$(x+5)$哩。

方程式 $2\frac{1}{3}(x+5)=3x-5$. 甲 20 哩, 乙 25 哩.

59. 橫爲 x 丈. 則縱爲$(x-6)$丈.

方程式$(x+3)(x+6+3)=x(x+6)+81$. $x=9$.

故面積爲 $9\times(9+6)$平方丈. 卽 135 平方丈.

60. 正方形之一邊爲 x 步. 方程式$(x+5)(x-3)=x^2$. $x=7.5$.

故面積爲 56.25 平方步.

61. 長方形之闊爲 x 寸, 則長爲$(2x-1)$寸.

方程式 $x(2x-1)=(x-6)(2x-1-6)+246$. $x=16$.

故面積爲 $16\times(2\times16-1)$平方寸. 卽 496 平方寸.

62. 排成方陣一邊之人數爲 x, 則總人數爲 x^2+16. 又$(x+1)^2-29$ 亦爲總人數,作等式解之,得 $x=22$. 故兵數爲(22^2+16)人. 卽 500 人.

63. 以 x 代中間之奇數, 則連續三奇數爲 $x-2$, x, $x+2$.

方程式 $x-2+x+x+2=2(x+2)+7$. 9, 11, 13.

64. 中空方陣外面一列之人數爲 x. 則恰能容於此方陣內之中實方陣每列之人數爲 $x-10$. 方程式 $x^2-(x-10)^2=1000$. 55 人.

65. 因如題移轉數字之位置,其末位比原數之末位少 1. 知原數之中央數字爲 2. 以 x 代原數之首位數字. 則原有之三位數爲 $1000x+23$. 移轉後之三位數爲 $300+10x+2$.

方程式 $100x+23-(300+10x+2)=171$. 523.

66. 總銀數爲 x 圓. 則分與甲後所餘之圓數爲 $\frac{3}{4}x-81$. 分與乙後所餘之圓數爲$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x-81\right)-81$. 由是推得分與丁後之式如次.

$$\frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x-81\right)-81\right\}-81\right]-81=0. \quad 700 \text{ 圓.}$$

67. 金之重爲 x 兩, 則銀之重爲$(10.6-x)$兩. 因金與銀在水中爲原重之 $\frac{18}{19}$ 與 $\frac{9}{10}$ $\therefore \frac{18}{19}x+\frac{9}{10}(10.6-x)=9.9$. 金 7 兩 6 錢. 銀 3 兩.

問題三

1. 去分母則 $2x-y=3$, $2x-3y=5$. $x=1$, $y=-1$.

2. 先以 Y 代 $\frac{1}{y}$ 而後還原. 從 $x+3Y=3\frac{1}{2}$, $3x-2Y=8\frac{2}{3}$

求得 $x=3$, $Y=\frac{1}{6}$. $\therefore$ $x=3$, $y=6$.

3. 以 X 代 $\frac{1}{x}$, 以 Y 代 $\frac{1}{y}$, 則 $4X-3Y+5=10$, $6X+3Y=10$.

求得 $X=\frac{3}{2}$, $Y=\frac{1}{3}$. $\therefore$ $x=\frac{2}{3}$, $y=3$.

4. 從第一第二兩節得 $3x=2y$. 從第二第三兩節得 $2x+y=1$.

解此兩方程式, 得 $x=\frac{2}{7}$, $y=\frac{3}{7}$.

5. 先從第一第二兩式消去 z, 又從第二第三兩式消去 z. 然後從含未知數 x 與 y 之兩方程式求之, $x=5$, $y=-1$, $z=-3$.

6. 先化第二第三兩式之分母, 得次之兩式.

$2x+y+16z=4$, $20x+9y-6z=12$, 以此兩式與第一式依解法解之, 得 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{6}$.

7. 變題式爲 $x+2y+3z=6$, $3x+y+2z=6$, $2x+3y+z=6$.

解之. $x=y=z=1$.

8. 三式相加得 $2(x+y+z)=15$. $\therefore$ $x+y+z=\frac{15}{2}$. 從此式一一以題之三式減之, 即得 x, y, z. $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=\frac{13}{2}$.

9. 2 乘第一式. 以第二式加之, 得 $4x+5y+7z=16$.

又以第一式,與第三式相加,得 $6x-y-2z=3$.

2 乘第二式,以第四式加之,得 $10x+13y+5z=28$.

從此三式求 x, y, z. 以其值代入第一式,卽求得 u.

$x=y=z=u=1$.

10. 以 X, Y, Z 代題式中之 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. 得次之三式:

$2X+3Y+Z=9$, $5X-4Y+Z=2$, $7X+2Y-5Z=4$

解之。得 $X=Y=Z=1$. $\therefore$ $x=y=z=1$.

11. 以 X 代各式中之 $\frac{1}{x}$, 化去分母, 得次之三式。

$60X+5y+4z=60$, $12X+y+4z=28$, $9X+3y-2z=5$.

解之, 得 $X=\frac{1}{3}$, $y=4$, $z=5$. 卽 $x=3$, $y=4$, $z=5$.

12. 第一式 $\times 60$. 則 $40x-24y+10x+2y=20-4y+10+30x+30y$.

第二式 $\times 2$. 則 $2x-4y-3y+5x=11x+11y+6x-6y$.

上之兩式化簡,卽 $10x-24y=15$, $10x=-12y$.

解簡式得 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{5}{12}$.

問題四

1. 以 x 代鶴數, y 代龜數,則 $x+y=160$, $2x+4y=420$.

鶴 110 隻, 龜 50 尾.

2. 甲原有 x 圓,乙原有 y 圓,則 $x+100=y-100$,
$6(x-150)=y+150$. 甲 250 圓, 乙 450 圓。

3. 步行之速度爲 x 日本里, 人力車之速度爲 y 日本里。

方程式 $\frac{7}{x}-\frac{7}{y}=5$, $\frac{1.5}{x}=\frac{3.5}{y}$. 步行 $\frac{4}{5}$ 日本里, 人力車 $\frac{28}{15}$ 日本里。

4. 甲原有 x 圓,乙原有 y 圓,則 $x+50=2(y-50)$, $x-10=y-30$.

甲 110 圓, 乙 130 圓。

5. 以 x 代人數, y 代一人所得之圓數。

方程式 $(y-2)(x+5)=xy$, $(y+4)(x-4)=xy$. 10 人, 6 圓。

6. 酒 1 斤原價爲 x 圓,醬油 1 斤原價爲 y 圓。

方程式 $\frac{3}{10}\times 30x+\frac{2}{10}\times 50y=13$, $\frac{25}{100}(30x+50y)=13-.5$.

酒之原價 1 圓, 醬油之原價 4 角。

7. 大數爲 x 圓, 小數爲 y 圓。

方程式 $x+y=180$, $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=4(x-y)-93$. 108 圓, 72 圓。

8. 牛 1 頭之價爲 x 圓,馬 1 匹之價爲 y 圓。

方程式 $10x+15y=2550$, $1\frac{2}{10}\times 10x+1\frac{1}{10}\times 15y=2925$.

牛 120 圓, 馬 90 圓。

9. 以 x 代原有會員之數, y 代每人所出之圓數,

方程式 $(y-.1)(x+5)=xy$, $(y+.15)(x-6)=xy$.

原有會員 50 名, 每人出會費 1 圓 1 角。

10. 5 角, 2 角, 1 角銀幣之數爲 x, y, z. 方程式如次:

$x+y+z=50$, $.5x+.2y+.1z=16.5$, $10x+y+10z=365$.

5 角銀幣 25 枚, 2 角銀幣 15 枚, 1 角銀幣 10 枚。

11. 甲之日數爲 x, 乙之日數爲 y, 則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$,

$$\frac{18}{x}+\frac{18}{y}+\frac{20}{x}=1.$$ 甲 50 日, 乙 75 日。

12. 平均之速度爲 x 哩,從甲地開行至乙地須 y 點鐘,則兩地之距離爲 xy 哩;從 $xy=(x+5)(y-2)$, $xy=(x-5)(y+2.5)$ 求之,得 $x=45$.

$y=20$. 平均速度 45 哩, 距離(45×20)哩,即 900 哩。

13. 甲茶每斤原價爲 x 圓,乙茶每斤原價爲 y 圓。方程式如次

$3x+5y=7.6,\quad 6x+\frac{8}{10}\times11y=14.24.$ 甲 1 圓 2 角, 乙 8 角。

14. 銀數及人數爲 x 圓 y 人, 方程式如次。

$x-6y=-7,\quad x-5y=12.$ 107 圓, 19 人。

15. 甲原有爲 x 圓, 乙原有爲 y 圓, 則 $x+y=1200,\ \frac{5}{7}x=\frac{5}{8}y.$

甲 560 圓, 乙 640 圓。

16. 甲酒 1 升之價爲 x 圓, 乙酒 1 升之價爲 y 圓。方程式如次:

$\frac{2x+3y}{2+3}=.82,\ \frac{3x+7y}{3+7}=.79.$ 甲酒 1 圓, 乙酒 7 角。

17. 以 x 代兄之歲數, y 代弟之歲數,因兄在 y 歲之時。弟爲 $\frac{y}{2}$ 歲, 知二人歲數之差爲 $\frac{y}{2}$. 故弟在 x 歲之時, 兄爲$\left(x+\frac{y}{2}\right)$歲。

方程式 $x-y=\frac{y}{2},\ x+\frac{y}{2}+x=91.$ 兄 39 歲, 弟 26 歲。

18. 以 x 代甲數, y 代乙數, 則 $x+y=1492,\ x=25y+10.$

甲 1435, 乙 57.

19. 甲乙丙每日之工價圓數爲 x, y, z. 方程式如次:

$6(x+y)=12,\ 12(x+z)=21.6,\ 9(y+z)=14.4.$

甲 1 圓 1 角, 乙 9 角, 丙 7 角。

20. 以 x, y, z 代每 1 分鐘甲乙丙三管各注入水之量, 則三管齊開注水滿池所須之時間爲 $\frac{1}{x+y+z}$ 分鐘。

方程式 $x+y=\frac{1}{20},\ x+z=\frac{1}{18},\ y+z=\frac{1}{15}.$

上之三式相加, 2 除之, 則 $x+y+z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{18}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{31}{180}.$

$\therefore\ \dfrac{1}{x+y+z}=11\dfrac{19}{31}$分。

21. 1 公斤 1 哩之運費爲 x 法郎,乘車 1 哩之定價爲 y 法郎,因攜帶物件 25 公斤無運費,則帶 50 公斤之物件乘車 1 哩之費爲 $(25x+y)$ 法郎。

方程式 $200(25x+y)=25$, $150(10x+y)=16\dfrac{1}{2}$. $17\dfrac{1}{2}$ 法郎。

22. 以 x 爲左端三個數字後附二無效數字之數, y 爲右端兩個數字所成之數,則原有之五位數爲 $x+y$.

方程式 $\dfrac{1}{100}x+10=4y$, $1000y+\dfrac{x}{100}=x+y+34758$.

原數 21456.

雜題

1. $\dfrac{5}{4}$. 2. -6. 3. 2. 4. 1.

5. 4. 6. -66. 7. $x=3$, $y=-1$.

8. 左邊$=\dfrac{12x-2-3x+5}{20}=\dfrac{1}{20}(9x+3)$. $\therefore 9x+3=6x+9$, $x=2$.

9. 3. 10. 6. 11. $\dfrac{13}{48}$. 12. 4.

13. $x=3$, $y=4$, $z=6$. 14. $x=4$, $y=0$, $z=5$.

15. $x=51$, $y=76$, $z=1$. 16. $x=1$, $y=2$, $z=3$.

17. $x=28$, $y=44$, $z=-36$. 18. $x=1$, $y=2$, $z=3$, $m=4$.

19. $x=\dfrac{373}{2292}$, $y=\dfrac{373}{1173}$, $z=\dfrac{373}{836}$, $t=\dfrac{373}{493}$.

20. 以 x 代乙陣外面一列之人數,則 $x^2-(x-10)^2$ 爲乙陣之共人數,而 $(x+6)^2-x^2$ 爲甲陣之共人數,故 $x^2-(x-10)^2=(x+6)^2-x^2$.

$x=17$. 兵士之總數,爲 $2\{x^2-(x-10)^2\}$ 人,即 480 人。

21. 以 x 代買馬之圓數, y 代買車之圓數。

從 $x+y=400$，$\frac{25}{100}\times x+\frac{4}{10}\times y=\frac{364}{1000}\times 400$. 求得 $x=96$.

賣馬之價爲 $1\frac{25}{100}\times 96$ 圓，卽 120 圓。

22. 以 x 代火藥之斤數，則硝石爲 $\left(\frac{x}{2}+6\right)$ 斤，硫黃爲 $\left(\frac{x}{3}-5\right)$ 斤，木炭爲 $\left(\frac{x}{4}-3\right)$ 斤，從 $\frac{x}{2}+6+\frac{x}{3}-5+\frac{x}{4}-3=x$，求得 $x=24$.

硝石 18 斤，硫黃 3 斤，木炭 3 斤。

23. $x=-\frac{165}{59}$，$y=-\frac{127}{59}$.　　24. $x=-1$，$y=z=-3$.

25. $x=\frac{437}{356}$，$y=\frac{54}{356}$，$z=\frac{545}{356}$.

26. 先從 $5p+2q=87$ 及 $20p+2q=12$. 求得 p 與 q 之值爲 -5 與 56. 然後以 3.5 代其 x，得 $-5\times 3.5+2\times 56=94.5$，又從 $-5x+2\times 56=0$ 得 $x=22.4$.

27. 以 x 代看鐘時之分數，則 6 分鐘後長針所指之分畫數爲 $x+6$. 又看鐘時短針所指之分畫數爲 $50+\frac{x}{12}$. 在 3 分鐘前，短針所指之分畫數爲 $50+\frac{x}{12}-\frac{3}{12}$. 因位置相反有 30 分畫之差，故

$50+\frac{x}{12}-\frac{3}{12}-(x+6)=30$. 看鐘時 10 點 15 分.

28. 以 x 代買書 1 册之圓數，y 代書之册數。

方程式 $(x-.2)(y+4)=xy$，$(x+.2)(y-2)=xy+1.2$.

每册 1 圓 2 角。

29. 以 x，y，z. 代甲乙丙各管注水滿池所須之鐘點數。

方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{8}{15}$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{9}{20}$.

甲管 3 點鐘，乙管 4 點鐘，丙管 5 點鐘.

30. 定速爲 x 浬，由甲港行至乙港之時間爲 y 點鐘，則航路爲 xy 浬；從 $(x+2)(y-4)=xy$. 及 $(x-2)(y-6)=xy$. 求得 $x=10, y=24$. 定速 10 浬。航路 240 浬。

31. 以 x 代第一種合金之兩數，y 代第二種合金之兩數。

從 $x+y=1.4+1.2$, $\frac{5}{5+4}x+\frac{8}{8+7}y=1.4$. 求得 $x=.6, y=2$.

第一種 6 錢，第二種 2 兩。

32. 以 x, y, z 代甲乙丙三人所借之圓數.

從 $x+y+z=5500$, $\frac{1}{10}x=\frac{15}{100}y=\frac{5}{100}z$ 求之。

甲 1500 圓，乙 1000 圓，丙 3000 圓。

33. 以 x 代去年通學生之數，y 代去年寄宿生之數。

從 $x+y=1040$ 及 $4\frac{1}{2}\%x-15\%y=1040\times3\frac{3}{4}\%$.

求得 $x=1000$. 故今年通學生爲 $(1+4\frac{1}{2}\%)\times1000$ 人，卽 1045 人。

34. 以 x 代甲車每秒鐘所行之碼數，y 代乙車每秒鐘所行之碼數.

從 $12(x-y)=132$ 及 $30(x-3y)=132$. 求得 $x=14.3$, $y=3.3$.

甲 $29\frac{1}{4}$ 哩，乙 $6\frac{3}{4}$ 哩。

35. 以 x 代 1 點鐘時間甲管注入水之石數，y 代 1 點鐘時間乙管注入水之石數；從 $4x+5y=9$ 及 $7x+3.5y=12.6$. 求得 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{5}$.

故二管齊開注水滿池之時間爲 $\frac{21}{\frac{3}{2}+\frac{3}{5}}$ 點鐘，卽 10 點鐘。

36. 以 x, y, z 代百位十位一位之數字，則原數爲 $100x+10y+z$. 從次之方程式求之：

$$100x+10y+z=48(x+y+z),$$

$$100x+10y+z-198=100z+10y+x.$$

$$x+z=2y.$$

原數 432.

37. 以 x, y, z 代甲乙丙各造一器所須之日數,從次之方程式求之.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30},$$

$$20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+14\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1,$$

$$24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+16\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.$$

甲 60 日，乙 100 日，丙 150 日.

38. 以 x 代乙追及甲在途所行之鐘點數, y 代丙在乙後出發相差之鐘點數.從 $5x=4(x+2)$ 及 $5x=6(x-y)$. 求得 $y=\frac{8}{6}=1\frac{1}{3}$.

丙出發比乙遲 10 點 20 分.

問題五

1. 化 $3x^2+4x+3=(x-2)(3x-5)$ 為 $a(x-\alpha)=0$ 之形.(α 為方程式之根)今 a 之值為正數,則從 3 代 x 結果之正負,定根之小於 3 大於 3.(詳於第 27 節)因 $3-\alpha>0$. 故 $3>\alpha$.

2. $x>\frac{5}{7}$.　　3. $x>-12$.

4. $a>b$ 時, $x>\frac{8}{a-b}$, $a<b$ 時, $x<\frac{8}{a-b}$.

5. $x<-\frac{13}{10}$.　　6. $x=\frac{2m+1}{3}$, $m<-\frac{1}{2}$.

7. $x=\frac{2}{3}p$. $p>0$, 則根為正; $p=0$, 則根為 0; $p<0$, 則根為負.

8. 從 $ax+b=0$ 得 $x=-\frac{b}{a}$. 從 $a'x+b'=0$ 得 $x=-\frac{b'}{a'}$, 兩方

程式之根相等，故$-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b'}{a'}$. 化之得 $ab'-a'b=0$.

9. 從第一方程式得 $x=\dfrac{8m}{13}$. 從第二方程式得 $x=\dfrac{9m}{8}$. 兩方程式之根相等，故$\dfrac{8m}{13}=\dfrac{9m}{8}$.化之得$\left(\dfrac{8}{13}-\dfrac{9}{8}\right)m=0$. 因$\dfrac{8}{13}-\dfrac{9}{8}$與 m. 必須有一爲 0. 今$\dfrac{8}{13}-\dfrac{9}{8}\neq 0$. 故 $m=0$.

10. 從第一方程式得 $x=\dfrac{ab-b}{a-b}$. 從第二方程式得 $x=\dfrac{b}{a-b}$.

$\therefore\ \dfrac{ab-b}{a-b}=\dfrac{b}{a-b}$. 去分母，則 $ab-b=b$. 化之得 $(a-2)b=0$.

11. $x=\dfrac{5}{8}p$. 從 p 之大於 0 等於 0 小於 0. 定根之爲正爲 0 爲負。

12. $x=\dfrac{6p+7}{p-8}$. 當研究原方程式之分母 $2p-1$, $p-3$ 爲 0 不爲 0. 以及 $6p+7$ 與 $p-8$ 之大於 0 等於 0 小於 0 定其根。

13. 化 $2p+3=3a-q$ 爲 $3a-q-2p-3=0$. 以 2 代其 x 須爲負數，故要件爲 $6-q-2p-3<0$. 卽 $2p+q>3$.

14. 化 $2ax+p=2px+3a$ 爲 $2(a-p)x+p-3a=0$. 以 1 代 x. 其左邊之值，須與 x 之係數之符號不同.(見第 27 節)今 x 之係數爲 $2(a-p)$. 以 1 代 x, 則左邊爲 $2a-2p+p-3a$. 卽 $-a-p$. 故 a 與 p 之關係如次：

〔1〕 $a>0$, $p>0$, 則 $-a-p$ 爲負數；因 $2(a-p)$ 須爲正數，故 p 之值須爲小於 a 之正數。

〔2〕 $a<0$, $p<0$, 則 $-a-p$ 爲正數；因 $2(a-p)$ 須爲負數，故 p 之絕對值須小於 a 之絕對值。

〔3〕 $a>0$, $p<0$, 則 $2(a-p)$ 爲正數；因 $-a-p$ 須爲負數，故 p 之絕對值須小於 a 之值。

〔4〕 $c<0, p>0$. 則 $2(a-p)$爲負數; 因 $-a-p$ 須爲正數; 故 a 之絕對値須大於 p 之値。

問題六

學者宜自研究根之正負。

1. $-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$. a 與 b 俱爲 0, 則根爲不定; a 與 b 有一不爲 0. 則有一定之根。

2. $-\dfrac{a^2+b^2}{2a}$. a 不爲 0, 則根有一定之値; a 爲 0, b 不爲 0, 則不能有根。a 與 b 俱爲 0. 則根爲不定;

3. $a+b$. a 與 b 有一爲 0 不可解。

4. b. $b-a$ 與 $b-c$ 俱不宜爲 0. 有一爲 0. 不能成等式。

5. b^2. $a+b$ 與 $b+c$ 俱不宜爲 0。

6. $-\dfrac{a+b}{2}$.

7. abc. a, b, c 俱不宜爲 0.

8. 先化題式爲$\dfrac{x-a-c}{b}-1+\dfrac{x-b-c}{a}-1+\dfrac{x-a-b}{c}-1=0$. 又化得$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\left(x-a-b-c\right)=0$. 左邊兩因數必有一爲 0. 若 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, 則根爲不定;若$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\neq0$. 則 $x=a+b+c$. a, b, c, 俱不宜爲 0, 有一爲 0, 或俱爲 0, 不能成等式。

9. a, b, c, 俱爲 0, 則根爲不定; a, b, c 有一不爲 0, 不能有根。

10. $\dfrac{c+1}{c-1}$. $c-1$ 與 $c+1$ 俱不宜爲 0.

11. a. a 與 b 有一爲 0, 則根爲不定; a 不宜等於 b, 亦不宜等

於 $-b$.

12. 先化題式爲 $\frac{x-2c}{a+b-c}-1+\frac{x-2b}{a+c-b}-1+\frac{x}{a+b+c}-1=$ $\frac{3(x-2a)}{b+c-a}-3$. 又化得 $\frac{x-a-b-c}{a+b-c}+\frac{x-a-b-c}{a+c-b}+\frac{x-a-b-c}{a+b+c}=$ $\frac{3(x-a-b-c)}{b+c-a}$. 又以 $2s$ 代 $a+b+c$.則 $\left\{\frac{1}{2(s-c)}+\frac{1}{2(s-b)}+\frac{1}{2s}\right\}\times$ $(x-2s)=\frac{3}{2(s-a)}(x-2s)$.移項,得 $\left\{\frac{1}{2(s-c)}+\frac{1}{2(s-b)}+\frac{1}{2s}-\frac{3}{2(s-a)}\right\}$ $(x-2s)=0$. 左邊兩因數,必有一爲 0,若不含 x 之因數爲 0,則根爲不定;若含 x 之因數爲 0,則 $x=a+b+c$.題式之各分母不宜有一爲0.

13. 去題式各分母,則 $a(a-b)x+(a+b)b(x-2b)=2(a^2-b^2)x$ $-(a+b)(a^2-b^2)$. 移項化簡,得 $(3b^2-a^2)x=(a+b)(3b^2-a^2)$. 若 $3b^2-a^2$ 爲 0,則根不定;$3b^2-a^2$ 不爲 0,則 $x=a+b$.

14. $\frac{c^2-abc}{ab+ac+bc-c}$. 分母分子俱爲 0,則根不定;分母爲 0,分子不爲 0,不能有根。

問題七

學者宜用所已得之知識加以研究,其標準見於前之諸例題。

1. 從第二第三兩式求 x 與 y 之,値以其値代入第一式,求 m 之値,得 $m=2$。

2. $x=\frac{3a^2b-b^3}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^3+3ab^2}{a^2+b^2}$. 若 a 與 b 俱爲 0,則根不定;若 a 與 b 有一不爲 0,則有一定之根。

3. 從第一第二兩式求得 x,y 之値,作等式化之,得 $K=3$ 或 $\frac{21}{4}$.

又變第一式爲 $(K-6)x=5K-3$ 或 $(K-6)y=5K-3$. 以 K 之值代入求之，得 $x=y=-4$ 或 -31.

4. $x=y=\dfrac{c}{a+b}$.

5. 先設二次三項式爲 ax^2+bx+c. 以 $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{6}$ 與 $\dfrac{5-2\sqrt{3}}{6}$ 遞代其 x，俱令等於 0. 又以 2 代其 x，令等於 37. 依解聯立方程式之法求 a, b, c 之值；以代 ax^2+bx+c 之 a, b, c. 得 $36x^2-60x+13$.

6. 以 $3x$ 代題式中之 y，化爲含 x 與 m 兩未知數之聯立方程式求之，得 $m=-1, x=4$，從 x 之值得 $y=12$.

7. 因 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$，故 $x+1$ 與 $x+3$ 皆能除 x^6+px+q 適盡；即 x^6+px+q 含有 $x+1$ 與 $x+3$ 兩因數；即 -1 與 -3 爲 $x^6+px+q=0$ 之二根。以 -1 與 -3 代其 x. 得 $(-1)^6+p(-1)+q=0$. 及 $(-3)^6+p(-3)+q=0$. 由此兩方程式求得 $p=364$, $q=363$.

8. $143\dfrac{327}{331}$. 先從 $a+b\times10^3=100$ 及 $a+b\times11^3=120$ 求得 a 與 b 之值；然後於 $a+bx^3$ 中以各值代入，即得。

9. 令乘積中 x^3 之係數 $ap+b$ 及 x 之係數 $cp+bq$，皆等於 0，求 p 與 q，得 $p=-\dfrac{b}{a}, q=\dfrac{c}{a}$.

10. $x=-\dfrac{94}{17}$, $y=-\dfrac{72}{17}$, $z=-\dfrac{240}{17}$.

11. $x=a$, $y=b$.

12. $x=y=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

13. $x=a+b$, $y=a-b$, $z=2ab$.

14. $x=\dfrac{2a+b+c}{2}$, $y=\dfrac{2b+a+c}{2}$, $z=\dfrac{2c+a+b}{2}$.

15. 以 X 代 $\frac{x}{3m}$, 以 Y 代 $\frac{y}{6n}$, 則 $3X+6Y=1$, $X+Y=\frac{2}{3}$. 解此二式而後還原,得 $x=3m$, $y=-2n$.

16. $x=abc$, $y=ab+ac+bc$, $z=a+b+c$.

17. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=K$. 則 $x=aK$, $y=bK$, $z=cK$. 以 x, y, z 之值代入題之第二式。得 $l(aK)+m(bK)+n(cK)=s$.

$\therefore\ K=\frac{s}{al+bm+cn}$.

由此得 $x=\frac{as}{al+bm+cn}$, $y=\frac{bs}{al+bm+cn}$, $z=\frac{cs}{al+bm+cn}$.

18. $x=-1$, $y=z=-3$.

19. 從 $9+3G+C=0$ 及 $4+2F+C=0$ 及 $1+1+G+F+C=0$. 求 G, F, C. 得 $G=-9$, $F=-11$, $C=18$.

20. $x=y=a$.

21. $x=a$, $y=b$.

22. 由視察卽知有一組答數爲 $x=0$, $y=0$. 以 xy 除第一第二兩式之兩邊,則 $c\left(\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\right)=a$ 及 $c\left(\frac{a}{y}-\frac{b}{x}\right)=b$.

解之得 $x=\frac{(a^2+b^2)c}{a^2-b^2}$, $y=\frac{(a^2+b^2)c}{2ab}$.

23. 從第一式之第一第二兩節化得 $bx=ay$. 又從第一第三兩節得 $(a+b)x+by=a^3-b^3$. 解此二式, 則 $x=a(a-b)$, $y=b(a-b)$. 以 x 與 y 之值代入第三式。化得 $z=\frac{a+b+c-(a-b)(a^3+b^3)}{c^2}$.

24. $x=\frac{a}{(a-b)(a-c)}$, $y=\frac{b}{(b-c)(b-a)}$, $z=\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

25. $x=b,\ y=c,\ z=a.$　　26. $x=a,\ y=b,\ z=c.$

27. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b.$

28. $x=\dfrac{m(m-b)(m-c)}{a(a-b)(a-c)},y=\dfrac{m(m-a)(m-c)}{b(b-a)(b-c)},z=\dfrac{m(m-b)(m-a)}{c(c-b)(c-a)}.$

29. $x=l,\ y=m,\ z=n$

30. $x=\dfrac{3m+10}{11(m-2)},y=\dfrac{7(m-4)}{11(m-2)}$. 若 $m=1$. 則根不定.又 $m=2$. 不能有根.

31. $x=\dfrac{31-3m}{11},y=\dfrac{4m-23}{11}$, 若 $m=1$, 或 $m=2$, 則根不定.

32. $x=\dfrac{m+2}{5m-1},y=\dfrac{-(3m-5)}{5m-1}$. 若 $m=2$, 則根不定;又 $m=\dfrac{1}{5}$. 不能有根.

33. $x=-\dfrac{2m}{m-1},\quad y=-\dfrac{2}{m-1}$. 若 $m+2$, 則根不定; 又 $m=1$. 不能有根.

34. $10p=7q+r,\ p+q=s,\ x=3p-2q,\ y=q-p.$

問題八

1. 以 x 代所求之鐘點數, 方程式如次:

$$x-\frac{x}{12}=\frac{a+b}{60}.\quad \frac{1}{55}(a+b)\text{點鐘.}$$

2. 所求之年數爲 x. 從方程式 $a+x=2(b+x)$ 得 $x=a-2b$. $(a-2b)$ 年後. 須研究 a 與 b 之值.

3. 以 x 代某數, 從方程式 $\left(\dfrac{x}{n}-a\right)a=b$ 得 $x=\dfrac{a^2+b}{a}n.$

4. 以 x 代所求之鐘點數．方程式爲 $mx-nx=d$．$\dfrac{d}{m-n}$ 點鐘。須研究 m 與 n 之比較。

5. 以 x 代每斤 b 圓之茶之斤數。方程式爲 $an+bx=c(n+x)$，$\dfrac{a-c}{c-b}n$ 斤。須研究 a, b, c 之大小。

6. 以 x, y, z, u 代所求之四數，從方程式 $x+n=y-n=nz=\dfrac{u}{n}$，$x+y+z+u=a$．求得四數如次：

$$x=\frac{an}{(n+1)^2}-n,\quad y=\frac{na}{(n+1)^2}+n,\quad z=\frac{a}{(n+1)^2},\quad u=\frac{an^2}{(n+1)^2}.$$

以 90 代 a．以 2 代 n．得 18，22，10，40.

7. 以 x 代日數，因甲作工 1 日之成績爲 $\dfrac{1}{2m}$．乙作工 1 日之成績爲 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2m}$ 即 $\dfrac{2m-n}{2mn}$．丙作工 1 日之成績爲 $\dfrac{1}{m-\frac{1}{2}n}-\dfrac{1}{2m}$．即 $\dfrac{2m+n}{2m(2m-n)}$．從 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2m-n}{2mn}+\dfrac{2m+n}{2m(2m-n)}$ 得所作之日數爲 $\dfrac{2mn(2m-n)}{4m^2+n^2}$．須研究 m 與 n 之大小。

8. 以 x, y 代男女之數，從 $x+y=n$ 及 $.75x+.5y=p$ 求之。男 $(4p-2n)$ 人，女 $(3n-4p)$ 人。

9. 行 1 日後所餘里數爲 $a\left(1-\dfrac{1}{m}\right)$．行 2 日後所餘里數爲 $a\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$．行 3 日後所餘里數爲 $a\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$．故 $2p$ 日後所餘爲 $a\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^p$ 里。以 x 代所求之里數，從 $a-x=a\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^p\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^p$ 求之，

得 $x=a\left\{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^{p}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p}\right\}$.

10. 以 x 代甲所得之圓數，y 代總銀數。

從 $x=\frac{1}{4}y-a$ 及 $\frac{1}{2}\left(y-x\right)-b=cx+d$ 求之，

甲得 $\frac{2(2a-b-d)}{2c-3}$ 圓。

11. 設長針之位置在 x 分畫處，則短針在 $\left(5p+\frac{x}{12}\right)$ 分畫處。

從 $x-\left(5p+\frac{x}{12}\right)=d$ 得所求之鐘點爲 p 點 $\frac{12}{11}\left(5p+d\right)$ 分。

從 $\left(5p+\frac{x}{12}\right)-x=d$ 得所求之鐘點爲 p 點 $\frac{12}{11}\left(5p-d\right)$ 分。

12. 以 x 代某數，從 $\left(\frac{x}{n}\right)^{n}=n\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ 求之，

得 $x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

13. 設總銀數爲 x 圓，則甲分取後之餘數爲 $\left(\frac{n-1}{n}x-\frac{a}{n}\right)$ 圓。

乙分取後之餘數爲 $\left\{\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}x-\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right\}$ 圓。

從 $\frac{n-1}{n}\left\{\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}x-\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right\}-\frac{a}{n}=0$. 求得總銀數

$\frac{3n^2-3n+1}{(n-1)^3}a$ 圓。

14. 以 x 代所求之里數，從 $\frac{x}{b}=\frac{d+x}{a}$. 求得相遇處距 B 地 $\frac{bd}{a-b}$ 里。

15. 以 x 代某數，從 $\frac{a+x}{b+x}=p$. 求得 $x=\frac{bp-a}{1-p}$.

16. 以 x, y, z 代甲乙丙各人獨造一器之時間。

從 $mx=y+z$, $ny=x+z$, $pz=y+z$.

得 $(m+1)x=x+y+z$, $(n+1)y=x+y+z$, $(p+1)z=x+y+z$.

故 $\dfrac{x}{x+y+z}=\dfrac{1}{m+1}$, $\dfrac{y}{x+y+z}=\dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{z}{x+y+z}=\dfrac{1}{p+1}$.

以此三式相加，則 $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{p+1}=1$.

17. 第一回餘酒爲$(a-b)$升，第二回餘酒爲$\dfrac{a-b}{a}(a-b)$升，第三回餘酒爲$\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2(a-b)$升，故最後餘酒爲$\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{n-1}(a-b)$升，即$\dfrac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$升。