大學叢書

高等代數學通論

波赫耳著
余介石譯

商務印書館發行

大學叢書

高等代数學通論

波赫耳著
余介石譯

商務印書館發行

一九三五年二月初版
一九五〇年三月四版

㊞(5082 1平)

大學叢書(教本)
高等代數學通論一冊
Introduction to Higher Algebra

平裝 基價貳拾肆元
印刷地點外另加運費

原著者 M. Bocher
譯述者 余介石
發行人 陳懋解 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

(本書校對者胡達聰)

原著者序

當美國學子進修高等算學時,每每闇於代數中主要之理,至於其證法,更無待言矣.蓋彼於平直方程組,僅有初步知識,對二次方式之理,則毫無所知.在此種情形下之學子,於受代數學上之訓練時,往往一躍而作代數學中較專門部份之研究,如方程式理論,不變式(invariant)理論等科,但彼輩對代數之原理,既無眞實之了解,故其作業遂不得不流爲純然機械之計算,本書之目的,卽在指導學生研習高等代數,一方面使其能明代數學中證法之意義,幷悉其中最基本事理之證法,在他一方面,使其能熟習往昔未嫻之代數中重要諸結果.

此書之目標,確如書名所示,實爲高等代數之一引論,而非其綱要,著者之努力,寧求建立一充分廣闊之基礎,爲讀者他日進研之助,而不在僅論一理,使之達於邏輯上之完備.故對於重要之理,如加羅亞氏(Galois)之理論,及不變式之系統研究,雖皆缺去,亦不必引爲遺憾也.如此則教材不得不有所選擇,玆所選者,皆因其在幾何及解析中,大有裨助之理,而代數與幾何之關係,全書始終甚重視之.但同時著者深記本書所應論者,首爲代數,而非解析幾何,故所提及之幾何材料,皆

屬偶及,自無系統可言.

習本書者應預修者,僅爲初等代數中二次方程及在其前各部份,至於行列式之知識以及算學歸納法,則在大學一年級時,有一二星期,即不難授畢.然此書初非爲未成熟之讀者而作,學生宜有二三載之高等算學訓練,尤須習過解析幾何及微積分始能合用.事實上,關於解析幾何,尤應有良好之初步知識.

各節後習題,爲本書之重要部份,蓋不僅予學子以自行思考其所習科目之機會,且在若干情形中,至少欲使其得數種補充定理之綱要.例如西薇斯德之秩欠定律(Sylvester's law of nullity) (見 §25 後第 8 題), 直交變換 (orthogonal transformations) (§§ 52, 59 後諸題) 及四次二元方式 (biquadratic binary form) 之不變式原理 (§ 90 後諸題) 皆是.

初習第一至第七諸章時,或覺以略去 §§ 10, 11, 18, 19, 20, 25, 27, 34, 35 爲宜.此後讀者即可進修二次方式 (quadratic form) 之理 (第八章至第十三章), 但如欲逕習第十四至第十九諸章中所論之較普遍問題,亦無不可.

本書中最高深及特殊之部份,自爲論初等除式(elementary divisors) 諸章 (第二十章至第二十二章).如有僅欲明此而不欲習其他部份者,應首先明瞭 §§ 19 (略去其中定理一), 21—25, 36, 42, 43 之內容.

在此種之著作中,似不宜列載若干參考書籍,而誌明取

材所自之舉,亦可不必.但克倫尼克(Kronecker)及夫奴柏努斯(Frobinuis)二大算學家之著述,對於此類書籍之性質,有斷然之影響,故其姓氏,應特爲標出.著者更對同事奧兹谷德(Osgood)教授,謹致謝忱,因其於第十四至十六諸章,有所指示與批評也.

近十年中著者在哈佛(Harvard)大學,講授此科,結果遂成是書.然苟非得余昔日弟子度發爾(Duval)君之助,此書或迄未成編,此亦余所深感者也.

德譯本序言

此譯本大部份皆力求忠實,較之原書僅缺數小註,因其僅與美國有關,而爲德讀者,所不感興趣者也.然譯本中曾補入若干習題,爲原本所無.定理之次序,皆與原書相同,以便二書可以對照.

1909, 伯克 (Beck) 識

近十五年來,因是書之倡,代數學有廣大之發展,故書中頗有可使簡短之處.惟原著者已逝,無由商取其同意,故仍其舊,未加改訂,僅於書末,加一補註.譯者爲輔助本書,使其易解起見,有一小册,名 (Elementarste Algebra, eine Einführung in die Axiomatik), 可供預習之需.

1924, 伯克

士達德(Study)氏序

余友譯是書旣成,將出而問世,囑綴數語於書端,以作介紹.本書著者,雖曰有此盛意,余實愧不敢當,且亦殊可不必.蓋以著者聲望之隆,凡睹其名者卽可知是書內容之完善,而毋待余之辭費也.

顧著述此書之目的,在充教材之用,於此容可稍貢數語.吾人現有之算學教本,殊鮮佳者.就目前號稱爲良好教本而論,其內容能適合大多數要求者,實不易得.考其原因,乃由於近來算學之進步極速.研究斯學者,又多傑出之士,內容遂日新月異,致昔所認爲良好之教本,於今已不免有陳腐之嫌矣.算學進展旣速,材料日益豐富,著述者旣須顧及教材之完善,又須求內容之明達,故算學進展速,編製益覺不易.苟僅對於材料,有妥善之整理與支配,定理得以證明,不得卽認爲已盡著述之能事.此外更應使習算者知何由可得算學之眞理,初學者對於一理之結果及預習事項,往往無分析能力,是宜以自己之眼光,洞燭一理之成立,從自己之立場,對算學之美,有活潑之感覺.

著書者欲滿足上述之要求,克服一切困難,非有教學之

天才不可,但能兼有算學天才,編製天才,教學天才三者,實屬難能人事.以余個人觀之,本書對此要求,皆能勝任愉快,此至足慶幸者也.

本書除高次方程式理論,*尙付闕如外,其他代數上普通講授材料,無不備具,用作教授初學之課本,旣不嫌少,亦不覺多,實吾人至今尙缺之良書也.此書附論幾何甚詳.蓋以代數中若干名詞,出於幾何,爲求初學解徹底明瞭起見,不得不從詳也.總之著者不輕加無益之材料,以累讀者,更不避一切煩勞,以助初學之易解.再本書名詞之命名,均經著者之精密考慮,極爲適當,尤爲特色.凡欲得精密簡明之解釋,循序漸進之練習材料,使初學者能逐漸爲獨立之研究,實屬捨此書莫屬.想此書問世後,當不難得多數之讀者,以顯其良好成績也.

士達德識

---

*即指加羅亞氏之理論,如欲知其理,可閱 L. E. Dickson: Modern Algelaic Theories, chap. VII—X. Burnside and Pantan: Theory of Equations, vol. II. Cojori: Modern Theory of Equations, chap. X—XIX. 諸書.

譯者序

此書目的及價值，已詳原序及士達德(Study)氏序中，不待譯者再贅．譯者在國立中央大學，曾講授此課二次，即以是書爲教本，就經驗所及，覺其頗適合我國學子程度，而能助讀者精進，緣不揣譾陋，從事迻譯，以供我國習算者之參考．原書間有微細之錯誤(p. p. 91, 111, 130, 145, 162, 212, 274, 303)，今皆據伯克(beck)氏德譯本第二版(1932)爲之訂正，伯氏譯本中，增添之附註及習題，亦逐條補入．又原書中定理，頗多留待讀者自證，此爲讀者練習之機會，譯者何敢強作解人．惟其中間有數則，須參考他書，始能明其證法者，則特爲補出，列入附錄，以便於讀者．但代數學基本定理，任何方程式論之書籍，殆無不言及，故其證明，仍行略去．

譯述本書時，得國立中央大學算學系主任周家樹教授，金陵大學算學系主任余光烺教授之指導甚多，至爲心感．張濟華，程道彌，彭少如，陸子芬，徐子豪，劉古傑，黃祖瑜，李修睦，張伯康諸先生，對譯稿亦多臂助匡正之處，謹同此志謝．追思五載前，隨故教授杜子荃先生後，研習此科，當日情景，猶歷歷如在目前，今譯稿成，而未由就正，尤足令人愴懷靡已者也．

民國二二年春譯者謹識，

時次國立中央大學算學系．

目　次

高等代數學通論

第一章

多項式及其基本性質

1. 一元多項式. 一含x之整有理函數,吾人常簡稱之爲含x之多項式,即指由下式

$$(1)\qquad c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+\cdots\cdots+c_kx^{\alpha_k}$$

所定之一函數,其中諸α爲正整數或零,而諸c爲任何常數,可實可虛.吾人可設諸α中,無二者相等,如此幷不致喪失普遍性.此情形旣合,則可稱$c_ix^{\alpha_i}$諸式爲多項式之項,c_i稱爲是項之係數,而α_i爲其次數.在係數不爲零之項中,其最高次數,稱爲此多項式之次數.

於此應注意適所定之概念,如項,係數,次數,非就此多項式之本身而言,乃對於定此多項式之特殊算式(1)立論,因吾人固易懸想,同一含x之函數,得於呈(1)形而完全相異之二算式中,以任一式表之也.然不久卽可見(參看下文定理五)除在(1)中,顯可插入或移去係數爲零之項外,不復能有他種可能情形.

將(1)中諸項,依降冪排列之,苟遇缺去之項,則以零係數者補充,如是則可書多項式成模範式

$$(2)\qquad a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

但吾人須牢記如此形狀之多項式,未必即爲 n 次者;欲其如是,則需 $a_0\neq 0$, 亦僅需 $a_0\neq 0$ 即可.

定義. 有二多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$, 如對於 x 之任何值,二者皆等,則稱爲恆等(identically equal),而以 $f_1\equiv f_2$ 表之.如一多項式 $f(x)$, 對 x 之任何值皆爲零,則稱爲恆等於零,而以 $f\equiv 0$ 表之.

吾人習初等代數時,應已熟知多項式之加法,減法及乘法;*換言之,卽已知二多項式 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 時,可作表其和,較及積之諸新多項式也.

定理一. 如多項式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

於 $x=a$ 時爲零,則必有得他一多項式

$$\phi_1(x)\equiv a_0x^{n-1}+a_1'x^{n-2}+\cdots\cdots+a'_{n-1},$$

使
$$f(x)\equiv(x-a)\phi_1(x).$$

因按題設 $f(a)=0$, 故有

$$f(x)\equiv f(x)-f(a)\equiv a_0(x^n-a^n)+a_1(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-a).$$

今據初等代數所述二多項式相乘之法則,可得

$$x^k-a^k\equiv(x-a)(x^{k-1}+ax^{k-2}+\cdots\cdots+a^{k-1}).$$

*除法之問題較爲複雜,容於§63中討論之.

是以

$$f(x)\equiv(x-\alpha)[a_0(x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1})$$
$$+a_1(x^{n-2}+\alpha x^{n-3}+\cdots\cdots+\alpha^{n-2})+\cdots\cdots+a_{n-1}].$$

今以 $\phi_1(x)$ 表方括號中之多項式,定理即得證明.

設有 x 之另一值 β, 異於 α, 而亦能使 $f(x)$ 爲零.則有

$$f(\beta)=(\beta-\alpha)\phi_1(\beta)=0;$$

但因 $\beta-\alpha\neq0$, 故 $\phi_1(\beta)=0$. 於是遂得以適所證之定理,施之於多項式 $\phi_1(x)$, 而得一新多項式

$$\phi_2(x)\equiv a_0x^{n-2}+a_1''x^{n-3}+\cdots\cdots+a''_{n-2},$$

使 $$\phi_1(x)\equiv(x-\beta)\phi_2(x),$$

因而 $$f(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\phi_2(x).$$

由此法繼續推之,得一通則如下:

定理二. 如有 k 個相異常數, $\alpha_1, \alpha_2,\cdots\cdots\alpha_k$, 及

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n \qquad (n\geqq k)$$

一多項式,而

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots\cdots=f(\alpha_k)=0,$$

則 $$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_k)\phi(x),$$

式中 $$\phi(x)\equiv a_0x^{n-k}+b_1x^{n-k-1}+\cdots\cdots+b_{n-k}.$$

就 $n=k$ 之特例論之,可見如多項式 $f(x)$ 對 x 之 n 個相異值 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$ 均爲零,則

$$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

於是可見如 $a_0\neq0$, 則除 $\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n$ 諸值外,其他之 x 值,均不能

使 $f(x)=0$. 故得證明

定理三. 使一含 x 之 n 次多項式爲零之相異 x 值,其數不能多於 n.

多項式之無有次數者,其中係數必皆爲零,因此種多項式顯爲恆等於零,遂可得一基本結果如下:

定理四. 一含 x 之多項式恆等於零之充要條件,乃其係數均爲零.

又因二含 x 之多項式恆等之充要條件爲二式之差恆等於零,故有

定理五. 二含 x 之多項式恆等之充要條件,乃二式中相當項之係數各相等.

此定理示明一多項式之項,係數,次數等事,僅視是多項式之本身而定,如前所述,并與是式之如何表法無涉.

2. 含若干元之多項式. 如一 (x, y) 之函數,能以下列形式

$$c_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1}+c_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2}+\cdots\cdots+c_kx^{\alpha_k}y^{\beta_k}$$

(式中諸 α 及 β 爲正整數或零)表之者,則稱爲多項式.

推廣言之,一 $(x_1, x_2\cdots\cdots x_n)$ 之函數稱爲多項式者,應得由呈下狀之式決定

$$(1)\qquad c_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_1}\cdots\cdots x_n^{\nu_1}+c_2x_1^{\alpha_2}x_2^{\beta_2}\cdots\cdots x_n^{\nu_2}+\cdots\cdots$$
$$+c_kx_1^{\alpha_k}x_2^{\beta_k}\cdots\cdots x_n^{\nu_k},$$

式中諸 $\alpha, \beta, \cdots\cdots\nu$ 等爲正整數或零.

吾人可假定無二項中之諸 x 上指數盡各相等者,如此幷不失其普遍性;換言之,即如在

$$\alpha_i=\alpha_j,\ \beta_i=\beta_j,\cdots\cdots\mu_i=\mu_j$$

時,必有 $$\nu_i\neq\nu_j.$$

既有此假設,即可稱 $c_ix_1^{\alpha_i}x_2^{\beta_i}\cdots\cdots x_n^{\nu_i}$ 爲多項式中之項 c_i 稱爲其係數. α_i 爲此項對於 x_1 之次數, β_i 爲對於 x_2 者,餘類推,而 $\alpha_i+\beta_i+\cdots\cdots+\nu_i$ 則稱爲此項之總次數 (total degree),簡稱次數.在係數不爲零之項中,x_i 之最高次數,稱爲此多項式對於 x_i 之次數,最高總次數,稱爲此多項式之次數.

此時對於適所定之各概念,亦如在第一節中開始所述之情形,僅可暫視爲對表此函數一特殊算式(1)而言,非就函數本身論也.但不久即可見此種辦法,不至發生歧義.

未進修下述各理以前,請注意按上述之定義,則一多項式中,係數盡皆爲零者無有次數.

當吾人述一 n 元之多項式時,幷不必需此一切 n 元實際上均能出現.諸元中之一或若干,在諸項中,可爲零指數者,因之毫未表露.故一元多項式,甚或一常數,均可視爲元數較多之一多項式之特例.

一多項式中,各項次數盡相等者,稱曰齊次 (homogeneous).此種多項式,常稱爲形式 (form), *幷視其中所含元數多寡,別

* 此名詞用法,尙不一致.若干著作家,效法克倫尼克 (Kronecker),稱一切多項式爲形式.而英國著述者又每稱齊次多項式爲 (quantics).

之爲二元 (binary), 三元 (ternary), 四元 (quaternary) 以至於 n 元 (n-ary).

形式又可按其次數分類.按其次數之爲一,爲二,爲三等等,而稱爲一次 (linear) 形式,二次 (quadratic) 形式,三次 (cubic) 形式等.但遇一多項式中係數盡爲零時,雖爲無次者,吾人相約稱之爲一次形式,二次形式,三次形式等,均無不可.

如一多項式中係數盡爲實數,則稱之曰實係數多項式 (real polynomial), 然在吾人之研究中,固可與變數以虛數值也.

有時爲便利計,每需將一含若干元之多項式,依其中某一變數之降冪排列之.吾人遂得書含若干元之多項式成下之標準形

$$\phi_0(x_2,\cdots\cdots x_n)x_1{}^m+\phi_1(x_2,\cdots\cdots x_n)x_1{}^{m-1}+\cdots\cdots+\phi_m(x_2,\cdots\cdots x_n),$$

諸 ϕ 爲含 $n-1$ 元 $(x_2,\cdots\cdots x_n)$ 之多項式.

吾人習初等代數時,已知多項式之加法,減法及乘法,所得結果,仍爲多項式.

定義. 任含若干元之二多項式,如對諸元之一切值均能相等,則稱爲恆等.如對諸元之一切值均爲零,則稱爲恆等於零.

定理一. 一任含若干元之多項式恆等於零之充要條件,乃其一切係數盡爲零.

此條件爲充足者,理甚顯然.今以算學歸納法,證其亦爲一必要條件.因吾人已知在一元時此定理成立(見 §1 定理

四),故如設 $n-1$ 元時成立,而能證 n 元時亦成立,則此理可謂完全證明.

今設

$$f(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv\phi_0(x_2,\cdots\cdots x_n)x_1^m+\phi_1(x_2,\cdots\cdots x_n)x_1^{m-1}$$
$$+\cdots\cdots+\phi_m(x_2,\cdots\cdots x_n)$$

恆等於零.與 $(x_2,\cdots\cdots x_n)$ 以任意定值 $(x_2',\cdots\cdots x_n')$, 則 f 變爲僅含 x_1 一元之多項式,且按假設,對於 x_1 之一切值,此式均爲零.是以按 §1 定理四知其中諸係數必盡爲零,卽

$$\phi_i(x_2',\cdots\cdots x_n')=0 \qquad (i=0,\ 1,\cdots\cdots m)$$

但 $(x_2',\cdots\cdots x_n')$ 爲任定之一組值,故可見 $\phi_0,\ \phi_1,\cdots\cdots\phi_m$ 諸多項式對所含元之一切值均爲零.且據已定之假設,本定理於 $n-1$ 元之多項式爲眞,故知 $\phi_0,\ \phi_1,\cdots\cdots\phi_m$ 中係數盡爲零,然此等係數,原爲 f 之係數.吾人之定理,遂得證明.

因二多項式之差恆等於零時,二者爲恆等式,必且如此始爲恆等,故立可更得一定理如下:

定理二. 二多項式恆等之充要條件,爲二者中相當項係數各等.

其次復有

定理三. 設 f_1 及 f_2 爲任含若干元之二多項式,次數各爲 m_1 與 m_2, 則乘積 f_1f_2 之次數爲 m_1+m_2.

對於一元多項式,此理顯見爲眞.如假設對含 $n-1$ 元者爲眞,而能證明對含 n 元者亦眞,則由算學歸納法之理,知本

定理已完全證明.

今先取二多項式皆爲齊次者之情形論之.則按初等代數中方法,知二者相乘之結果中,各項之次數皆爲 m_1+m_2.故吾人只須證明乘積中至少有一項之係數不爲零,即爲已足.爲達此目的計,將 f_1 及 f_2 依 x_1 之降冪排列如下:

$$f_1(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_0'(x_2,\cdots x_n)x_1^{k_1}+\phi_1'(x_2,\cdots x_n)x_1^{k_1-1}+\cdots\cdots$$

$$f_2(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_0''(x_2,\cdots x_n)x_1^{k_2}+\phi_1''(x_2,\cdots x_n)x_1^{k_2-1}+\cdots\cdots$$

於此吾人得假設 ϕ_0' 及 ϕ_0'' 二者均不爲恆等於零.因 f_1 及 f_2 爲齊次,故 ϕ_0' 及 ϕ_0'' 亦然,而次數各爲 m_1-k_1 及 m_2-k_2.在乘積 f_1f_2 中含 x_1 最高次之項應爲

$$\phi_0(x_2,\cdots\cdots x_n)\phi_0''(x_2,\cdots\cdots x_n)x_1^{k_1+k_2},$$

但吾人假設本定理對於含 $n-1$ 元之多項式能成立,故 $\phi_0'\phi_0''$ 應爲次數等於 $m_1+m_2-k_1-k_2$ 之一多項式.此乘積中係數不爲零之任一項,與 $x_1^{k_1+k_2}$ 相乘後,得 f_1f_2 中之一項,次數爲 m_1+m_2,而係數異於零.故本定理對於齊次式已能成立.

次乃論通例,書 f_1 及 f_2 成下狀

$$f_1(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi'_{m_1}(x_1,\cdots x_n)+\phi'_{m_1-1}(x_1,\cdots x_n)+\cdots\cdots,$$

$$f_2(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi''_{m_2}(x_1,\cdots x_n)+\phi''_{m_2-1}(x_1,\cdots x_n)+\cdots\cdots,$$

式中 ϕ_i' 與 ϕ_j'' 皆齊次多項式,或次數各爲 i 與 j,或爲恆等於零.但題設 f_1 及 f_2 各爲 m_1 次與 m_2 次,故 ϕ_{m_1}'',與 ϕ_{m_2}'' 不得爲恆等於零,而應各有次數 m_1 及 m_2.

乘積 f_1f_2 中最高次數項必爲乘積 $\phi_{m_1}'\phi_{m_2}''$ 中之項,但

後者乃齊次式之乘積,可歸於適已論之情形內,故次數爲 m_1+m_2. 是以乘積亦如是,而定理得以證明.

將此理繼續推之,更得下

系. 有 k 個多項式,次數各爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_k$, 則其乘積之次數爲 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$.

今更敍明顯然可見之二理,以其頗佔重要地位也.

定理四. 如二或若干多項式之乘積恆爲零,則至少必有一因式恆爲零.

因苟各因式均不恆等於零,則必各有一定次數,故按定理三知其積應有一定之次數,而不得恆爲零.

吾人得自一恆等式中,抽去一已知爲不恆等於零之因式,其理由蓋卽在此.

定理五. 設 $f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲一不恆等於零之多項式,而凡使 f 不等於零之諸點皆使另一多項式 $\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲零,則 ϕ 必恆等於零.

只須注意 $f\phi\equiv0$. 則可由定理四推得此理矣.

習　題

1. 如 f 及 ϕ 爲任含若干元之多項式,由 $f^2\equiv\phi^2$ 一恆等式能推斷 f 及 ϕ 有若何之關係.

2. 如 f_1 及 f_2 爲含 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 之多項式,對於 x_1 之次數,各爲 m_1 及 m_2, 試證二者之乘積,對於 x_1 之次數應爲 m_1+m_2.

3. 幾何解釋. 論只含一實元之函數時,其元(即變數)所可取之各值,得按幾何理就一直線上之點表之;吾人謂一點 x 者,即與此線上某一定原點 O 相去之距離 x 爲單位(按 x 之正負而定其在右或在左)之意.同理,含二實元之函數中,其元之各組值,在幾何上,以一平面上之點表示,含三實元者中,以空間內點表示;各種情形中,一點所表之一組值,即該點之直角坐標也,然遇四元或四元以上之情形,則殆無法作其幾何表示矣.

複元(complex variable) $x=\xi+\eta i$ 之值,由二實元 ξ 及 η 決定,每對一組實元 (ξ,η) 之值,有 x 之一值與之相應,而僅有一值與之相應.故一複元之各值,得以平面上點表之,而 (ξ,η) 即表其笛卡兒坐標.但論及多於一複元之函數,此種幾何表示爲不可能,因即在二複元如 $x=\xi+\eta i$, $y=\xi_1+\eta_1 i$ 時,已與 (ξ,η,ξ_1,η_1) 四實元相當也.

吾人謂 $x=a$ 一點之鄰近(neighbor hood)者,乃指介於 $x=a-\alpha$ 及 $x=a+\alpha$ (α 爲一隨意(arbitrary)正常數,可大可小)二點間之一段線,或指爲坐標 x 能合於不等式 $|x-a|<\alpha$ * 之一切點,其意亦同.

同理,謂爲 (a,b) 一點之鄰近者即指坐標 (x,y) 能適合不等式

---

* 吾人以符號 $|Z|$ 表 Z 之絕對值,即 Z 爲實數時,指其數值,Z 爲虛數時指其模(modulus).

$$|x-a|<\alpha, \qquad |y-b|<\beta$$

之一切點，α 及 β 皆正常數.此種鄰近域爲一長方形之內部，以 (a, b) 爲心，而各邊與坐標軸平行.

空間一點 (a, b, c) 之鄰近，指坐標 (x, y, z) 能適合於不等式

$$|x-a|<\alpha, \quad |y-b|<\beta, \quad |z-c|<\gamma$$

之一切點.

在上述各情形中，須注意鄰近域可大可小，視 α, β, γ 諸常數之選取而定.

如論一複元 $x=\xi+\eta i$，則所謂一點 a 之鄰近者，乃指在複元平面上表複量之一切點，其複坐標 x 適合於不等式 $|x-a|<\alpha$ 者，α 仍指一正實常數.因 $|x-a|$ 等於 x 及 a 間之距離，故 a 點鄰近域，爲以 a 爲心 α 爲半徑，所作圓之內部.

此處所引入之術語，爲便利計，應加推展，使能適用於任意若干實元或複元之情形.吾人當討論 n 個自變 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 數時，可稱此等元之一組特值爲 n 維空間內一點. (a point in space of n dimensions). 於此有實點 (real points) 及虛點 (imaginary point) 之別，即視該組特值是否皆爲實數而定.至於就幾何意義言，果否有多於三維空間之事，殊非吾人引用此等名詞時所計及之問題.吾人之用此，純爲代數意義上之約定，因一方面此種名詞較普通代數名詞爲簡明，在他一方面，又可引起吾人心目中三維或較低維空間內之幾何圖象，而得暗示若干新關係，此種新關係非如此則頗不易自行表露也.

謂爲 $(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ 一點之鄰近者,乃指合於不等式

$$|x_1-a_1|<\alpha_1,\ |x_2-a_2|<\alpha_2,\cdots\cdots|x_n-a_n|<\alpha_n$$

之一切點,式中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 均爲正實數.

在 $(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ 爲一實點之特例,可論此點之實鄰近域,意即凡合於上述諸不等式之一切實點 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$.

今證明下之重要定理,以示一點鄰近之觀念如何用之於代數中:

定理一. 一多項式 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 恆等於零之充要條件,乃此式能在 $(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ 一點鄰近均爲零.

此條件爲必要者,其理甚顯.今自 $n=1$ 之情形起,證其亦爲充足.

如此可設 $f(x)$ 在 $x=a$ 一點之某鄰近域中盡行爲零.如 $f(x)$ 不爲恆等於零,則必有一定次數,命之爲 k,是以不能在 k 點以上之處均爲零(參看§1定理三).然而此理不能成立,因其能在無窮點,即 $x=a$ 鄰近內一切點之處均爲零故也.如此吾人之定理,已得證明.

再進至 $n=2$ 之情形,設

$$f(x,y)\equiv\phi_0(y)x^k+\phi_1(y)x^{k-1}+\cdots\cdots+\phi_k(y)$$

爲一多項式,在 (a, b) 一點某鄰近域,如

$$|x-a|<\alpha,\qquad |y-b|<\beta$$

者之內,盡皆爲零.命 y_0 爲適合下不等式

$$|y_0-b|<\beta$$

之任意一常數.則 $f(x, y_0)$ 爲只含 x 之一多項式,對於適合 $|x-a|<\alpha$ 之 x 值,均等於零.故由定理中 $n=1$ 之情形,知 $f(x, y_0)\equiv 0$.即

$$\phi_0(y_0)=\phi_1(y_0)=\cdots\cdots=\phi_k(y_0)=0$$

諸多項式 ϕ,既於 $y=b$ 之鄰近均能等於零,故由定理中之 $n=1$ 情形,知其應恆等於零.由此可知任與 x 以一切值,$f(x, y)$ 能對於 y 任何值均爲零,是即 $f\equiv 0$,而定理得以證明.

用算學歸納法,可推證 n 元時之情形,其術顯爲上述者之推廣,故留待讀者自爲之.

按適所證之定理,立可推出下之

定理二. 有二多項式均含 $(x_1, \cdots\cdots x_n)$ 諸元,其恆相等之充要條件,乃二者能於 $(a_1, a_2\cdots\cdots a_n)$ 一點鄰近內均爲相等.

習　題

1. §1 之定理三又可述之如下:如 f 爲一元多項式,其次數已知不能逾 n,如 f 能於 $n+1$ 個相異點處爲零,則必恆等於零.

此理得推廣如下,試加證明:

設 f 爲含 (x, y) 之一多項式,已知其對於 x 之次數不逾 n,對於 y 之次數不逾 m,如 f 能在 $(n+1)(m+1)$ 個相異點:

$$(x_i, y_j)\qquad\qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots\cdots n+1 \\ j=1, 2, \cdots\cdots m+1 \end{pmatrix}$$

處爲零,則必恆爲零.

2. 推廣題一中之理至於含任意若干元之多項式.

3. 試由本節中定理一以證定理四;更由此結果推出 §2 之定理三.

4. *如吾人僅論實係數多項式及實點之實隣近域,本節所述之定理一及二,仍能成立否?

---

*德譯本將此題移入 §6 之後　譯者註.

4. 齊次坐標 (Homogeneous coördinate). 欲定一平面上一點之位置,雖僅需二量即足,但有時用三量定之,更爲便利,此時只須知之者所成比,而不必定其值.今以 x, y, t 表三量,而用下之方程式定三量之比

$$\frac{x}{t}=X, \quad \frac{y}{t}=Y,$$

式中 X, Y 爲一平面上一點之笛卡兒坐標.例如 $(2, 3, 5)$ 所表之點,橫標爲 $\frac{2}{5}$,縱標爲 $\frac{3}{5}$.任意含三數之一組,如與 $(2, 3, 5)$ 成比例,則表同一之點.故對每一含三數之組(其例外下文卽將提出),皆有一點相應,而僅有一點與之相應,對於一點,則有無窮含三數之組相應,但均彼此成比例.

如 $t=0$,則上述定義,殆無意義可言;但吾人可設想 $(2, 3, 1)$, $(2, 3, 0.1)$, $(2, 3, 0.01)$, $(2, 3, 0.001)$,……諸點,其笛卡兒位標爲 $(2, 3)$, $(20, 30)$, $(200, 300)$, $(2000, 3000)$……,卽可見諸點均在過原點而斜率爲 $\frac{3}{2}$ 之一直線.如 t 趨於零,x 及 y 爲異於零之定值,則 (x, y, t) 一點,沿過原點而斜率爲 y/x 之直線,漸趨遠處.故稱 $(x, y, 0)$ 爲以 y/x 爲斜率之直線上之無窮遠點,甚爲順適.如 t 由負值趨於零,此點仍沿同一之直線前進,但方向相異.吾人對於此二種情形,并不需有所區別,而常謂某一直線上僅有唯一之無窮遠點.如一點遠移所依之線,與適所論者平行,則其齊次坐標亦趨於同一之值 $(x, y, 0)$ 如上所述者,此理頗易驗明.論無窮遠點時,吾人不曰在某定直線上,

而曰在某方向上,其故卽在是.吾人更約定坐標成比例之二無窮遠點,可視若相合爲一,蓋是等坐標,可視爲當一點遠去時,表此點之諸坐標各所趨之限也.*

如 $x=y=t=0$, 則不得稱其能表一點,蓋以任何點之坐標,皆可使之小至如吾人所期,故 $(0,0,0)$ 可視爲任何定點或變點之坐標所趨之極限.

用齊次坐標,則方程式

$$AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$$

變爲

$$A\frac{x^2}{t^2}+B\frac{xy}{t^2}+C\frac{y^2}{t^2}+D\frac{x}{t}+E\frac{y}{t}+F=0,$$

或

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxt+Eyt+Ft^2=0,$$

而爲一二次之齊次方程式;在任何代數方程式中,以坐標 x,y,t 代 X,Y, 所記得之方程式爲齊次,且次數同於原方程式者,理至明顯.此卽是種坐標,享有齊次一名之故,亦卽其主要便利點之一端也.

方程式

$$Ax+By+Ct=0$$

---

*吾人論無窮遠點時,純係自邏輯之立場出發,亦§3中之論虛點或 n 維空間內點然;換言之,卽認一組量爲一"點",而此組量初非任何實在點之坐標也.此二種情形,亦有其不同之處,蓋"無窮遠點"之坐標,乃實在一點者之極限也.

又吾人特指二無窮遠點當坐標成比例時,可視爲相合,且僅當其如此時方可,此事亦純出於約定,且甚便利而能合吾人之意.但如欲另作規約時,亦不妨視一切之無窮遠點,盡皆相合.此事在邏輯上,亦無不可通之處.

在一般情形下,表一直線,但如 $A=B=0, C\neq 0$, 則不能表實在之幾何軌跡.然在此種情形,凡一切無窮遠點能適合之,此外之任何點則否.故吾人稱之爲無窮遠直線之方程式.讀者如用截距 (intercept) 表一直線之方程式,則甚易見當此直線遠去時,其齊次方程式當漸趨於 $t=0$ 之形狀.

在三維空間中,笛卡兒坐標爲 X, Y, Z 之點,可以四齊次坐標 x, y, z, t 表之,而後者之比,由方程式

$$\frac{x}{t}=X,\ \frac{y}{t}=Y,\ \frac{z}{t}=Z$$

確定. $(x, y, z, 0)$ 一點,可稱爲方向餘弦等於

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

之直線上之"無窮遠點". $(0, 0, 0, 0)$ 不能視作一點,而 $t=0$ 則稱爲無窮遠平面.

將上述之術語推衍成通例,則有時應視 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ 爲在 $n-1$ 維空間內之齊次坐標,所表之一點,而非 n 維空間中之坐標,如此始便於用.二點之坐標成比例者,視爲相合,一點之坐標中,如最後一數爲零,則稱爲無窮遠點,但 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 之情形,不得視爲一點.此種術語僅可與齊次多項式聯合幷用,但有更須注意者,卽術語之採擇,視孰爲便利而定,可完全任意,不受羈束也.例設 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 爲一二次齊次多項式,則 $f=0$ 可視爲定一平面上之錐線(以 x_1, x_2, x_3, 爲齊次坐標),亦可視爲定一空間內之二次錐面(以 x_1, x_2, x_3 爲普

通笛卡兒坐標).

一維空間內,亦可用齊次坐標.即吾人可藉 x, t 二坐標,以定一直線上之點,坐標之比 x/t 即非齊次坐標 X,亦即是點距原點之遠也.此種表示法,常與二元形式之理論,聯合幷用.

5. 多項式之綿續性 (Continuity).

定義. 設有函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$,今任與一正量 ϵ,不拘其小至若何程度,如能就 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 一點定一鄰近域,使凡在是鄰近域內,任意一點之函數值與在 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 一點之值相較,所得差之絕對值,均小於 ϵ,則此函數爲在 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 一點綿續.

換言之,即如任與一正量 ϵ,均可求得一正數 δ,使凡 $(x_1, \cdots\cdots x_n)$ 之一切值,合於不等式

$$|x_1 - c_1| < \delta, \ |x_2 - c_2| < \delta, \cdots\cdots |x_n - c_n| < \delta$$

時,均有

$$|f(x_1, \cdots\cdots x_n) - f(c_1, \cdots\cdots c_n)| < \epsilon$$

之關係,則 f 在 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 一點爲綿續

定理一. 如二函數均在一點綿續,則其和亦於是點爲綿續.

設 f_1 及 f_2 均爲在 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 一點綿續之二函數,而 k_1 及 k_2 各爲其在是點之值.如此則無論選取任何小之一正量 ϵ,均可得 δ_1 及 δ_2,使

$$|x_i-c_i|<\delta_1 \text{ 時} \qquad |f_1-k_1|<\tfrac{1}{2}\epsilon,$$

$$|x_i-c_i|<\delta_2 \text{ 時} \qquad |f_2-k_2|<\tfrac{1}{2}\epsilon.$$

今取 δ 爲 δ_1 及 δ_2 中之小者,由上可見

$$|x_i-c_i|<\delta \text{ 時} \qquad |f_1-k_1|+|f_2-k_2|<\epsilon;$$

且因

$$|A|+|B|\geqq|A+B|, \text{ 故知當 } |x_i-c_i|<\delta \text{ 時},$$

$$|f_1-k_1+f_2-k_2|=|(f_1+f_2)-(k_1+k_2)|<\epsilon.$$

是以 f_1+f_2 在 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 一點爲綿續.

系. 如有限個函數,均在一點爲綿續,則其和在是點亦爲綿續.

定理二. 如二函數均在一點綿續,則其積亦於是點爲綿續.

設 f_1 及 f_2 爲題述之二函數, k_1 及 k_2 爲此二函數在 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 一點各得之值,而該點設爲函數綿續性所在之點.今須證者,乃任與一小數 ϵ, 應可定 δ 之值,使

$$(1) \qquad |f_1f_2-k_1k_2|<\epsilon$$

一式,在 $|x_i-c_i|<\delta$ 時均能成立.取 η 爲一正常數,吾人復將限其大小,使其在某範圍內者,又選 δ_1 及 δ_2 二正常數,使

$$|x_i-c_i|<\delta_1 \text{ 時} \qquad |f_1-k_1|<\eta,$$

$$|x_i-c_i|<\delta_2 \text{ 時} \qquad |f_2-k_2|<\eta,$$

更以 δ 爲 δ_1 及 δ_2 二數中之小者.則在 $|x_i-c_i|<\delta$ 時,有

$$|f_1f_2-k_1k_2|=|f_2(f_1-k_1)+k_1(f_2-k_2)|$$

$$\leqq |f_2|\,|f_1-k_1|+|k_1|\,|f_2-k_2|\leqq\{|f_2|+|k_2|\}\eta.$$

是以當 $|x_i-c_i|<\delta$ 時,

$$|f_2|=|k_2+(f_2-k_2)|\leqq|k_2|+|f_2-k_2|<|k_2|+\eta,$$

吾人遂可書

$$(2)\qquad |f_1f_2-k_1k_2|<\{|k_1|+|k_2|\}\eta+\eta^2.$$

如 k_1 及 k_2 不均爲零,則取 η 小至適合下之二不等式

$$\eta<\frac{\epsilon}{2\{|k_1|+|k_2|\}},\qquad \eta<\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}.$$

如 $k_1=k_2=0$, 則只須以

$$\eta<\sqrt{\epsilon}$$

一不等式限之足矣.在此二種情形中,不等式(2)均化爲(1)之形狀,而定理得以證明.

系. 如有限數之函數,均在一點爲綿續,則其乘積亦於是點爲綿續.

今就綿續之定義觀之,則可見任何常數,均得視爲$(x_1,\cdots\cdots x_n)$之綿續函數,對於諸元之任意値或其中任一元言,均無不合.是以由上述之系,知任何呈 $Cx_1^{k_1}\cdots\cdots x_n^{k_n}$ 形狀之函數,其中諸 k 爲正整數或零,在一切點均爲綿續.今將此系之理施於定理一,則得

定理三. 任何多項式,對其中諸元之任何値,均爲綿續函數.

今更舉此定理之簡單應用,以爲之殿.

定理四. 如 $f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲一多項式而 $f(c_1,\cdots\cdots c_n)\neq 0$, 則必可得 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 一點之一鄰近域,使域內任何點,均不使 f 爲零.

設 $k=f(c_1,\cdots\cdots c_n)$. 則因 f 在 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 一點之綿續性,知可得一正量 δ,使在 $|x_i-c_i|<\delta$ 一鄰近域中任何處,不等式

$$|f-k|<\tfrac{1}{2}|k|$$

能成立.在如此之鄰近域中, f 不能爲零;因如在某點爲零,則應有

$$|f-k|=|k|<\tfrac{1}{2}|k|,$$

按 $k\neq 0$ 之假設,知其決不能合.

6. 代數學之基本定理. 本書至是,尙未用及凡代數方程式皆有一根之理,此理普通稱代數學之基本定理.今以較貼切之語述此理如次:

定理一. 如 $f(x)$ 爲一 n 次之多項式而 $n\geqq 1$, 則至少有一 x 值,使 $f(x)=0$.

此定理雖爲基本要義,然與本書後文所研究者,大部份幷無甚關係.且其證法要點非代數的,或僅有一部份爲代數的.是以其證於此不錄,讀者如欲知此,可取任何關於一複變數函數論之教本研閱之.但吾人有時爲便利計,仍需假設此定理之眞.由此定理所卽可引出之數事,今分述於下:

定理二. 如 $f(x)$ 爲一 n 次之多項式,卽

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

則可得一組常數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$, 使

$$f(x) \equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

而僅可得如此之一組常數.

對於一次之多項式,此定理顯然爲眞.今按算學歸納法,假設此理對於次數小於 n 之多項式,均無不合,如吾人能推證此理對於 n 次多項式亦合,則因其對於一次式時,已能成立,故得推之於二次,三次等多項式.

按定理一吾人知至少有一 x 值,使 $f(x)=0$. 稱此值爲 α_1, 則按 §1 之定理一,可書

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)\phi(x),$$

而
$$\phi(x) \equiv a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}.$$

因 $\phi(x)$ 爲一 $n-1$ 次之多項式,而吾人曾假設本定理對此等多項式爲眞,故有 $n-1$ 個常數 $\alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$, 使

$$\phi(x) \equiv a_0(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

是以
$$f(x) \equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

故本定理之前半,已得證明.

今設此種之常數有二組如 $\alpha_1, \cdots\cdots\alpha_n$ 及 $\beta_1, \cdots\cdots\beta_n$. 則有

$$(1)\qquad f(x) \equiv a_0(x-\alpha_1)\cdots\cdots(x-\alpha_n) \equiv a_0(x-\beta_1)\cdots\cdots(x-\beta_n)$$

於此恆等式中,令 $x=\alpha_1$. 如是則得

$$a_0(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots\cdots(\alpha_1-\beta_n)=0.$$

但因 $a_0 \neq 0$, 故 α_1 必等於 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\beta_n$ 中諸量之一者.今設諸

β 排列次序時,合於 $\alpha_1=\beta_1$, 在恆等式 (1) 中,消去二端中 $a_0(x-\alpha_1)$ 之因子(見 §2 中定理四). 如是得

$$(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)\equiv(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n).$$

但吾人曾假設待證之理,對於 $n-1$ 次之多項式爲眞,故 $\beta_2,\cdots\cdots\beta_n$ 諸常數,實與 $\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$ 諸常數相同,即使未能一致,亦僅次序上之相異而已,吾人之定理,至是遂得證明.

定義. 上述定理中所定之 $\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n$ 諸常數稱爲多項式 $f(x)$ 之根,或曰方程式 $f(x)=0$ 之根. 如諸根中有 k 個彼此相等,則該根稱爲 k 級 (k-fold) 根,

按 §1 中定理一即可知欲 $f(x)$ 爲零,必在諸根所表之點方可.

定理三. 如 $f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲一不恆等於常數之多項式,則有無窮數點 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 使 $f\neq0$, 如 $n>1$, 則又有無窮數點,使 $f=0$.

此定理之等一部分,顯見爲眞,因 f 旣非恆等於零,則必可得一使其不爲零之點,而可定此點之一鄰近,小至相當程度,俾使 f 在此鄰近域內,均不爲零(按 §5 定理四). 如此所定之鄰近域,自含有無窮數點.

欲證 f 可在無窮數點處爲零,宜先選定諸元之一,使在 f 中至低爲一次者. 吾人可設此元爲 x_1, 不至失題理之普遍性. 如此則可書

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv F_0(x_2,\cdots x_n)x_1^k+F_1(x_2,\cdots x_n)x_1^{k-1}+\cdots+F_k(x_2,\cdots x_n),$$

式中 $k\geqq 1$ 而 F_0 不恆爲零.設 $(c_2,\cdots\cdots c_n)$ 爲使 F_0 不爲零之一任意點.則 $f(x_1, c_2,\cdots\cdots c_n)$ 爲一僅含 x_1 之 k 次多項式.故按定理一,知至少有一 x_1 之值使該式爲零.設 c_1 爲如是之一值,則 $f(c_1, c_2,\cdots\cdots c_n)=0$. 且按定理中已證明之部分,知有無窮數點使 $F_0\neq 0$, 故對 $c_2,\cdots\cdots c_n$ 諸量,有無窮數種選取方法.於是本定理得以完全證明.

今不證而僅述一定理.以作本章之殿,備後文引用計也.此理簡言之,即謂一代數方程式之諸根,皆爲諸係數之綿續函數:

定理四. 如 α 爲多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad \begin{pmatrix} a_0\neq 0 \\ n>0 \end{pmatrix},^{*}$$

之根,則不論吾人所取 α 點之鄰近 $|x-\alpha|<\epsilon$, 小至若何程度,均可在 $n+1$ 維空間內,取 $(a_0, a_1,\cdots\cdots a_n)$ 之一鄰近域,小至某程度,使以其中任何點 $(b_0,b_1\cdots\cdots b_n)$ 爲係數之多項式

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

至少有一根 β, 在 α 點之鄰近域 $|x-\alpha|<\epsilon$ 內.

此定理之證明,* 見 Weber's Algebra 第一卷, §44.

---

* 如吾人只設此多項式至少爲一次,本定理仍可成立.換言之.即 $a_0, a_1,\cdots\cdots$ 諸係數中,得有爲零者.

* 參看附錄一. 譯者註.

習　題**

定義. 若一多項式之各項係數,全爲實數,則謂之實係數多項式.

1. 若僅言實多項式,而僅論及實點之鄰域,則§3定理一及二是否仍爲眞確?

2. 設 $a+ib$ 爲實多項式 $f(x)$ 之 k 級重根,則 $a-ib$ 亦爲一級重根,式中 a, b 爲實數.

3. 一元 n 次實多項式,當 n 爲奇數時,至少有一實根.

4. 若 $f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲一實多項式,且不恆等於一常數,則有無數實點,可使 $f\neq 0$,且如 n 異於1而 f 對於 x_1 之次數爲一奇數,則亦有使數實點可無爲零.

** 本習題係德譯本中增入.

第　二　章

行列式之數種特性

7. 定義數則　吾人假設讀者已習知行列式(determinant)之配法,故在此只須提明,一n級行列式者,即含n^2元素

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n} & a_{n2} \cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij}之一種n齊次多項式耳.有須與此種行列式並論者,即一組n^2之元素,如行列式中次序排列,但不合併之成一多項式.此種n^2個元素組成之平方整列(array)稱爲長方陣(matrix).(或簡稱方陣).今更對此名詞,立一較廣之定義如下:

定義一.　一組mn個量,排成一m行(*row*),n列(column)之長方整列,稱爲一長方陣.如$m=n$,則稱爲一n級正方陣(a square matrix of order n.)

吾人常用雙線,列於此種整列之二側,如下形:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{mn} \end{matrix}\right\|.$$

有時可用圓括弧,如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

卽在一正方陣時,吾人愼勿與行列式混爲一談.事實上,長方陣並非一量*而爲一組量合成.正方陣與行列式之相異.可就對易行列之一事見之.此舉對於行列式,無所改易,但施於正方陣時,則另得他一正方陣.今立一定義如下:

定義二. 下之二正方陣

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}\right\|, \qquad \left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

*但須與§21者所論者比較.

其中任一式,乃由他式對易行列而得者,互稱為共軛*(conjugate).

正方陣與行列式雖係相異之二事,已如上述,然每一行列式皆可定一正方陣,稱為該行列式之方陣(the matrix of the determinant),反之每一方陣亦可定一行列式,稱為該正方陣之行列式(the determinant of the matrix).

將一長方陣中,截去若干行列,則另得數長方陣.在此等長方陣中,有若干為正方陣;其行列式稱為此長方陣所含之諸行列式.如此長方陣有m行n列,則其所含行列式之級,可自1(卽元素本身)至m與n二整數中之小者†.在若干重要之問題中,某級以上之行列式均為零,且宜特定已知長方陣中諸不為零行列式中之最高級.因是故需立下之

定義三. 如一長方陣至少含一r行行列式不為零,而其所含之一切高級者則盡為零,吾人稱此長方陣之秩(rank)為r.

如一長方陣之元素盡為零,則稱為0秩者.

一行列式之方陣之秩,吾人簡稱為該行列式之秩.

今請再述若干關於行列式之子式(minor)之定義;**子式

---

*英語亦作 transposed.

†如$m=n$,則諸行列式中僅有一最高級者,此卽上文稱該正方陣之行列式者也.

**德譯本列其後一語為定義四,而將下之定義四,五,六順次改為定義五,六,七.　譯者註.

或子行列式*者，卽由一行列式截去若干行列所得之式也。

一行列式中每一元素皆與某一首餘子式 (first minor) 相當，其理甚顯；換言之，卽截去該元素所在之行與列而得者也。如是則每一 n 級行列式中各元素，皆可視爲其 $n-1$ 次餘子式†[$(n-1)$ *th* minor]，故可得一法，使一已知行列式中，每一一行子式與一 $n-1$ 行[$(n-1)$- rowed]子式相配。

同理，對於一 n 級行列式 D 中之一二行子式 M，皆得以一 $n-2$ 行子式 N 與之相配，後式卽於 D 中截去 M 所在之二行二列而得者也。M 及 N 二子式，互稱爲相餘 (complementary)。例如在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{28} & a_{24} \\ a_{3:} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad 與 \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

二子式爲相餘。

---

*子行列式亦有人稱爲下行列式 (unterdeterminanten) (Baltzer ,netts)。但此名另有其他意義（下行列式之別，在相差一 -1 之乘冪），故吾人寧可名之爲子行列式。又此名常與德文中所用者有別。德國著作家常喜稱爲補式 (complement)，如代數補式然。現舉諸名詞，可參閱 E. Pascal 著之"行列式" H. Latzmann 之德本譯本 1900 年在 Leipzig 出版。

†在一 k 次子行列式均可得 $(n-k)$ 列之子行列式。

同法每一三行子式皆得與一$n-3$行子式相配,餘可類推.一般言之,遂得下之

定義四. 如D爲一n級之行列式,M爲其中一k行子式,則自D中截去M所在之各行列而得之$n-k$行子式N,稱爲M之相餘子式(complement).

反言之,M顯爲N之相餘子式.

今暫就一行子式論之,此卽元素本身.設以a_{ij}表行列式D中第i行第j列之元素.又命D_{ij}爲其相當一餘子式.吾人當能憶及有時所論者爲a_{ij}之餘因式(cofactor) A_{ij}而非其子式D_{ij}.二者之關係,則由方程式$A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$定之.

同理,爲便利計,有時須論者,非一已知子式之相餘子式,而爲其代數餘子式(algebraic complement),後者在上述情形中卽爲餘因式,在普通情形下,可立下之

定義五. 如M爲D中之m行子式,而係於原式中取$k_1\cdots\cdots k_m$諸行,$l_1\cdots\cdots l_m$諸列所成者,則M之代數餘子式由下之方程式決定:

M之代數餘子式$=(-1)^{k_1+\cdots\cdots+k_m+l_1+\cdots\cdots+l_m}$〔$M$之相餘因式〕.下之特例,尤爲重要:

定義六. 一行列式之主子式(principal minor)者,卽自D中截去諸行原有之次序,與截去諸列者同之一式也.

在此種情形中,如用定義五之記法,則有

$$k_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+k_m=l_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_m,$$

是以知任何主子式之代數餘子式實與其普通相餘子式相同.

上文述及之諸理中,吾人均暗設所論之各子式,次數均小於行列式本身之次數 n.—n 次行列式 D 之 n 行子式卽該行列式本身.如按前之定義,則此種子式無相餘子式可言.在此種情形中吾人定其相餘子式爲1,且按定義五,知卽爲其代數餘子式.

習題

如 M 及 N 爲二相餘子式,則 M 與 N 互爲代數餘子式,或 $-N$ 爲 M 之代數餘子式,且 $-M$ 爲 N 之代數餘子式,試證明之.

8. 拉普拉斯(Laplace)展開式 一行列式可藉其中任一行或列之元素及其相當餘因式,展成一含低次行列式之式,拉普拉斯氏創有一更廣之展開法,乃用任意 k 行或列中所含之 k 行行列式,與其相當代數餘子式而成者,前所述之法,卽其一特例.欲論此展開法,須先明下之預備定理.

定理一. 如移動行列式 D 中之行列,使某一子式 M 遷至左上角內,但 M 及其相餘子式 N 中行列之次序勿使改動,則此種移動後,D 之號是否改變,視 $-N$ 抑係 N 爲 M 之代數餘子式而定.

欲證此理,可如常法從左上角起,依次標明行列,而令 M 中所視之行列.依由小而大之次序排定,各爲 $k_1 \cdots\cdots k_m \cdots\cdots$ 及

$l_1\cdots\cdots l_m$,欲實施上理中所述之移動,應首移標明爲k_1之行至第一行.如是需踰越k_1-1行,故行列式改號k_1-1次.次移標明爲k_2之行至第二行.此舉應踰越k_2-2行,而行列式因之改號k_2-2次.如是繼續爲之,直至標明爲k_m之行,移至第m行乃止.再依同法,以移動各列.最後結果,等於以

$$(-1)^{k_1+\cdots+k_m+l_1+\cdots+l_m-2(1+2+\cdots+m)}=(-1)^{k_1+\cdots+k_m+l_1+\cdots+l_m}$$

乘D.以此與§7之定義五相較,則吾人之定理,顯然爲眞.

引 如M爲行列式D之一子式,則M與其代數餘子式之積,展開時與D之展開式一部份相等.

設

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

並設M之級爲m,而N爲M之相餘子式.今先就一特例,卽M立於D之左上角內時,證明本引,此時N亦爲其代數餘子式,而居D之右下角.在此應證明者,卽M中與N中各任取一項之乘積,必爲D中一項,而是項在MN中不至出現兩次.M中任何項,均可書爲

$$(-1)^{\mu}a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{ml_m},$$

式中$l_1, l_2,\cdots\cdots l_m$諸整數,不過$1, 2,\cdots\cdots m$諸整數之另一種排列,而$\mu$爲此種排列中反式(inversion)之數.同理$N$中任何項均可書爲

$$(-1)^{\nu}a_{m+1,\, l_{m+1}}\, a_{m+2,\, l_{m+2}} \cdots\cdots a_{n,\, l_n},$$

式中 $l_{m+1}\ldots\ldots l_n$ 即 $m+1, \cdots\cdots n$ 諸整數之另一種排列,而 ν 為此種排列中反式之數.此二項之乘積

$$(-1)^{\mu+\nu}a_{1 l_1}\, a_{2 l_2} \cdots\cdots a_{n\, l_n},$$

可見為 D 中之一項,因諸因子 a 係自 D 中第一,二 $\cdots\cdots n$ 列取得,且無二者同行,而 $\mu+\nu$ 乃 $l_1, l_2, \cdots\cdots\cdots l_n$ 排列中與自然排列 $1, 2, \cdots\cdots n$ 相較之反式數也.

M 居 D 左上角內之特殊情形時,本引已得證明,今請進論其通例.吾人可移動行列,俾 M 居於左下角,而 N 移至右下角.按定理一知此舉或並不影響 D 中各項之號或使各項均改號,視 N 抑係 $-N$ 為 M 之代數餘因式而定.乘積 MN 中,既盡係移動後行列式展式內各項.其故已如上述.是以 M 與其代數餘因式相乘之積中盡係 D 本身展式中之各項,本題遂得證明.

拉普拉斯展開法即可由上理推出,今述之如下:

定理二. 從一行列式 D 中,任意取出 m 行(或 m 列),而自此長方陣中,組成一切之 m 行行列式.取此等子式各與其代數餘因式之積,而求總和,即得 D 之值.

上引已闡明各乘積展開時,所含皆係 D 中各項,故在此只須證示 D 中各項必在諸乘積之一中出現,而僅在其一中出現足矣.此理實則至為顯明;因 D 中每項均含有 D 之 m 行內各一元素,由定理所述,即可據此以組成 m 行之行列式,且

因此等元素所在之列,各不相同,是以知其必在一 m 行之行列式如 M 者之內,而僅在一式內. D 之此項中其他元素,顯見均在 M 之相餘子式內,故此項可於 MN 中得之,而定理中所述其他諸項,則決不含此.

習　題

1. 自一 n 級 r 秩之正方陣中取 s 行(或列),試證所得長方陣之秩不能逾 $r+s-n$.

2. 試推廣上題之理.

9. 乘法定理　按拉普拉斯展開式,立可將任二行列式之乘積,表爲一行列式,其級二已知者之和,如

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11}\cdots\cdots b_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}\cdots\cdots b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} & 0\cdots\cdots 0 \\ p_{11}\cdots\cdots p_{1n} & b_{11}\cdots\cdots b_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ p_{m1}\cdots\cdots p_{mn} & b_{m1}\cdots\cdots b_{mm} \end{vmatrix},$$

而式中諸 p 可爲任意值.因如將大行列式依首 n 行中諸 n 行行列式展開之,則見展式各項,除上列方程式左端者外,餘均爲零.

由上之結果可推得一更重要之公式,能以一同級之行列式表二行列式之乘積.爲求達此鵠的計,取上式中諸 p 之

值如次:

$$當\ i \neq j\ 時,\ p_{ij}=0;\qquad 但\ p_{ii}=-1,$$

今欲列式簡便,乃取二三級行列式乘積論之,則有

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

今以 a_1 乘第一列而加於第四行;以 a_2 乘而加於第五列;以 a_3 乘而加於第六列,卽可化約此六行行列式.如是則見第四行中尾三數爲零,次乃以 b_1, b_2, b_3 分別乘第二列,而各加於第四,五,六諸列.終以 c_1, c_2, c_3 分別乘第三列.而各加於第四,五六諸列.上之行列式遂化爲

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 a_1+\alpha_2 b_1+\alpha_3 c_1 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & \alpha_1 a_3+\alpha_2 b_3+\alpha_3 c_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_1 a_1+\beta_2 b_1+\beta_3 c_1 & \beta_1 a_2+\beta_2 b_2+\beta_3 c_2 & \beta_1 a_3+\beta_2 b_3+\beta_3 c_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_1 a_1+\gamma_2 b_1+\gamma_3 c_1 & \gamma_1 a_2+\gamma_2 b_2+\gamma_3 c_2 & \gamma_1 a_3+\gamma_2 b_3+\gamma_3 c_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

而此式立可化爲一三行列式如下:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1+\alpha_2 b_1+\alpha_3 c_1 & \alpha_1 a_2+\alpha_2 b_2+\alpha_3 c_2 & \alpha_1 a_3+\alpha_2 b_3+\alpha_3 c_3 \\ \beta_1 a_1+\beta_2 b_1+\beta_3 c_1 & \beta_1 a_2+\beta_2 b_2+\beta_3 c_2 & \beta_1 a_3+\beta_2 b_3+\beta_3 c_3 \\ \gamma_1 a_1+\gamma_2 b_1+\gamma_3 c_1 & \gamma_1 a_2+\gamma_2 b_2+\gamma_3 c_2 & \gamma_1 a_3+\gamma_2 b_3+\gamma_3 c_3 \end{vmatrix},$$

如此遂得以一三級行列式表二三級者之乘積,所用之方法顯見爲普遍者,如是故得二n級行列式相乘之法則如下:

定理　二n級行列行式之乘積,得以一n級者表之,其中第j行列之元素,乃以第一因式中第i行各元素分別乘第二因式中第j列行相當元素,然後相加之總和.

吾人應注意如將二已知行列式,或任取一而對易本式中行列,結果不改其積之值,但形式則異.例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 41 \\ 34 & 73 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 39 \\ 39 & 69 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & 50 \\ 33 & 66 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 48 \\ 38 & 63 \end{vmatrix} = 66;$$

同理可見任何二同級行列式之乘積,均可書爲四不同之形式.

10.　加邊行列式 (Bordered Determinant).　如對於一n

級行列式加一行或若干行并同數之若干列,每行列各含 n 量,其空角則以零補足之,所得者稱爲加邊行列式.例如就一二行行列式.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

得構下之加邊行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & u_1 \\ \gamma & \delta & u_2 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & u_1 & u_1' \\ \gamma & \delta & u_2 & u_2' \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ v_1' & v_2' & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & u_1 & u_1' & u_1'' \\ \gamma & \delta & u_2 & u_2' & u_2'' \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_1' & v_2' & 0 & 0 & 0 \\ v_1'' & v_2'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \cdots\cdots$$

在第二例中如用拉普拉司法按首二行中各行列式以展開該加邊行列式,則得其值爲

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix},$$

此量并不含有原行列式之 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 諸元素.以同法按末三行之行列式展開第三例,則見其值爲零.

上述之論斷應用於通例,亦無不合,故有下之結果:

定理一. 如一 n 級行列式,緣以 n 行及 n 列,則結果所得之值僅與緣入之量有關.

定理二. 如一 n 及行列式,緣以多於 n 之行數及列數,則結果之值常爲零.

故一行列式所緣行列數小於n之情形,殊堪注意.下理即論此層者:

定理三. 如一n級行列式,緣以p行及p列$(p<n)$之自變數,則結果爲含此等緣入量之$2p$次多項式,其係數爲原行列式中之p餘子式;反言之,原行列式之一切p餘子式至少爲此多項式中一項之係數.

今取$n=4$而$p=2$之特例論之.令

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

依拉普拉斯氏法(§8)按末二行所含各行列式以展開此行列式,則得

$$D \equiv \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' \end{vmatrix} + \cdots\cdots \text{至 6 項}.$$

如再將此等四行行列式,依拉普拉斯方法按其中末二行所含行列式展開,并將結果列爲一u及v之多項式,即可

見本定理爲眞.此處之證法,僅爲大略,其應加詳之處,留待讀者自行補足.

11. 附屬行列式(Adjoint Determinants)及其子式.

定義. 在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

中取 a_{ij} 之餘因式 A_{ij} 構成新行列式

$$D'=\begin{vmatrix} A_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots A_{nn} \end{vmatrix},$$

則稱爲 D 之附屬式.

D 及 D' 中之相當子式云者,乃自二者內截取相同位置之行列所得之式,D 及 D' 亦可爲任意二同級行列式.既有此定義,則可立下基本定理.

定理. 如 D' 爲任意一行列式 D 之附屬式,而 M 及 M' 各爲 D 及 D' 之相當 m 行子式,M' 則等於 D^{m-1} 與 M 之代數餘子式二者相乘之積.

今先就M及M'二子式各在D及D'之左上角時之特例論之.如是則可書

$$M'=\begin{vmatrix} A_{11}\cdots\cdots A_{1m}\cdots\cdots\cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}\cdots\cdots A_{mm}\ \cdots\cdots A_{mn} \\ 0\cdots\cdots\cdots 0\quad 1\ 0\cdots\cdots 0 \\ 0\cdots\cdots\cdots 0\quad 0\ 1\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots\cdots\cdots 0\quad 0\ 0\cdots\cdots 0 \end{vmatrix},$$

今將 D 中行列對易,成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

而按§9中定理構成乘積$M'D$.則有

$$M'D=\begin{vmatrix} D & 0\cdots\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & D\cdots\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots\cdots D & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ a_{1,m+1} & a_{2,m+1}\cdots\cdots a_{m,m+1} & a_{m+1,m+1}\cdots\cdots a_{n,m+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots\cdots\cdots a_{mn} & a_{m+1,n}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D^m \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} \cdots\cdots\cdots a_{n,m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+1,n} \cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

今視$a_{11}\cdots\cdots a_{nn}$爲$n^2$自變數.則適所書之方程式成一恆等式,而$D$既非恆等於零,故可消去,而得

$$(1) \qquad M' \equiv D^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} \cdots\cdots\cdots a_{n,m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+1,n} \cdots\cdots\cdots a_{n,n} \end{vmatrix},$$

(1)式表出之行列式,適爲M之代數餘子式.故本定理已於此特例中證明.吾人更須注意即在$m=n$時此證法仍能適用;可參看下文系二.

今轉向M及M'二子式,不居於D及D'左上角之情形論之,設以a表確定M或M'諸行列位置各數之和,位置之先後,仍如常法,由左上角起.則按§7定義五得

(2) M之代數餘式$=(-1)^a$〔M之相餘子式〕.

茲更調動行列,使行列式M移至D之左上角內,命移動後之D爲D_1,則有(參看§8定理一)

$$(3) \qquad D_1 = (-1)^a D$$

D_1中之餘因式等於$(-1)^a A_{ij}$,因二相鄰行或互易,則使

其一切餘因式改號也.故 D_1 之附屬式,卽吾人稱爲 D_1' 者,可依改 D 爲 D_1 之法,就 D' 中以調動其行列,再將每元素前冠以 $(-1)^a$ 卽得.

今將業已證明之特種情形,施於 D_1 及其附屬式 D_1',此時 M_1 及 M_1' 二 m 行子式適各在 D_1 及 D_1' 之左上角內.如是卽得

(4)　　$M_1'=D_1^{m-1}$〔M_1之代數餘子式〕.

更因 M_1 爲主子式,其代數餘子式卽爲其普通相餘子式,而後者適與 D 中子式 M 之普通相餘子式互等.故據(2)式可得

(5)　　M_1 之代數餘子式 $=(-1)^a$〔M 之代數餘子式〕.

但 M_1' 與 M' 相異處,僅在每元素前所冠之 $(-1)^a$ 一因式,故有

(6)　　$$M_1'=(-1)^{ma}M'.$$

再按(3),(5)及(6)以化簡(4).則有

$(-1)^{ma}M'=(-1)^{a(m-1)}D^{m-1}(-1)^a$〔$M$ 之代數餘子式〕.

自方程式二端消去因式 $(-1)^{ma}$,卽得本定理之證明.

今更特指出若干特例,因其常有應用,故有提出之價值.

系一. 如 a_{ij} 爲一 n 級行列式 D 中任一元素,而 α_{ij} 爲 D 附屬式中相當元素 A_{ij} 之餘因式,則必

$$\alpha_{ij}=D^{n-2}a_{ij}.$$

此理實係上述普遍定理於 $m=n-1$ 時之一特例，但敍述稍有變易，蓋曾以餘因式 a_{ij} 代 $n-1$ 行子式 $(-1)^{i+j}a_{ij}$ 也.

系二. 如 D 爲任一 n 級行列式，而 D' 爲其附屬式，則

$$D'=D^{n-1},$$

此即 $m=n$ 之特例.

系三. 設 D 爲任一 n 級行列式，S 爲就其截去第 i 及第 k 二行與第 j 及第 l 二列後之二餘子式，更以 A_{ij} 表在 D 中第 i 行第 j 列之元素之餘因式，則

$$\begin{vmatrix} A_{ij} & A_{il} \\ A_{kj} & A_{kl} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j+k+l}DS.$$

此即 $m=2$ 時之特例.

第　三　章

平 直 關 係 論

12. 定義及預備定理　有二組常數$(a_1, b_1, c_1, d_1,)$及(a_2, b_2, c_2, d_2),如其一中各元素,乃由於以同一之常數因數乘他組中相當元素而得,則常稱爲二者成比例.例如$(1, 2, 3, 4)$及$(2, 4, 6, 8)$卽是.通常每設任一組皆可由他組演出,在多數情形,確係如此;但如二組常數爲$(1, 2, 3, 4)$及$(0, 0, 0, 0)$之時,吾人可以0乘第一組中各數而得第二組,但不能自第二組返求第一組.

爲若干方面便利計,可立一與上述者相當之定義如下:

定義一.　有二組常數

$$x_1', x_2', \cdots\cdots\cdots\cdots x_n,$$

$$x_1'', x_2'', \cdots\cdots\cdots\cdots x_n'',$$

如能得不均爲零之二常數c_1及c_2,使

$$c_1 x_i' + c_2 x_i'' = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots n).$$

諸式均成立,則稱此二組數成比例.

如 $c_1 \neq 0$,則有

$$x_1' = -\frac{c_2}{c_1}x_1'', \quad x_2' = -\frac{c_2}{c_1}x_2'', \cdots\cdots\cdots\cdots x_n' = -\frac{c_2}{c_1}x_n'',$$

如 $c_2 \neq 0$, 則有

$$x_1'' = -\frac{c_1}{c_2}x_1', \quad x_2'' = -\frac{c_1}{c_2}x_2', \cdots\cdots\cdots\cdots x_n'' = -\frac{c_1}{c_2}x_n',$$

至於 $x_1', x_2', \cdots\cdots\cdots\cdots x_n',$

$0, \ 0, \cdots\cdots\cdots\cdots 0.$

二組常數,顯成比例,因吾人可取 $c_1=0$ 而 c_2 等於任何異於零之常數,則得一組 c 值,合於定義中所需者.

平直關係 (linear dependence) 可視爲比例一概念之推廣.吾人不僅取二組常數,而論 m 組常數,遂有下之

定義二. 有 m 組 n 個常數

$$x_1^{[i]}, x_2^{[i]}, \cdots\cdots\cdots\cdots x_n^{[i]}, \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots\cdots m),$$

如能得不盡爲零之 m 個常數 $c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots c_m$, 使

$$c_1x_j' + c_2x_j'' + \cdots\cdots\cdots + c_mx_j^{[m]} = 0. \qquad (j=1, 2, \cdots\cdots\cdots n).$$

諸式均成立,則諸組數稱爲平直相關.

否則諸組數稱爲平直無關 (linearly independent).

同法可將習見之二多項式成比例一種概念,加以推廣如下:

定義三. 有 m 個多項式(不論其中所含有若干元) $f_1, f_2, \cdots\cdots\cdots f_m$, 如能得 m 個不盡爲零之常數 $c_1, c_2 \cdots\cdots\cdots c_m$, 使

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_mf_m \equiv 0$$

成立,則此等多項式稱爲平直相關.

否則稱爲平直無關.*

下述諸定理.幾可不證自明,然頗關重要,均特爲提出之:

定理一. 如 m 組常數(或 m 個多項式)爲平直相關,則可以將其一表爲其他之平直式,但非任何數(或式)皆得如此.該組常數(或該多項式)稱爲視他數(或式)成平直相關.

吾人只須省憶諸 c 中至少有一不爲零,則此理顯然可見.由諸 c 構成之關係,用該 c 遍除,即得所需者.

定理二. 如諸組常數(或諸多項式)間,有一部分之若干組(或式)爲平直相關.則此 m 組常數(或此 m 個多項式)亦爲平直相關.

因如有 l 組常數(或 l 個多項式)爲平直相關($l<m$),則可取由此所定之 l 個 c 及 $m-l$ 個零合成所需之 m 個 c.

定理三. 如 m 組常數中有一組盡含零(或 m 個多項式中有一恆等於零),則此 m 組(或 m 個多項式)爲平直相關.

因吾人可定與此組數(或此多項式)相關之 c 爲零以外之任何常數,而命其他之 $m-1$ 個 c 盡爲零即得.

13. 常數組成平直相關之條件 論 m 組 n 常數

$$(1) \qquad x_1^{[i]},\ x_2^{[i]},\ \cdots\cdots\ x_n^{[i]} \quad (i=1,2,\cdots\cdots m)$$

時,應別爲 $m\leq n$ 及 $m>n$ 二種情形述之

* 吾人當可進論 m 組 n 個多項式之平直相關情形.就此廣義觀點立論,本書所述之二種情形,皆成特例.

(a) $m \leqq n$ 在此請證下之基本定理:

定理一. 當 $m \leqq n$ 時,m 組 n 常數如(1)者能成平直關係之充要條件,乃方陣

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1' & x_2' & \cdots\cdots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \cdots\cdots & x_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{[m]} & x_2^{[m]} & \cdots\cdots & x_n^{[m]} \end{array} \right\|$$

中一切 m 行行列式盡爲零.

此條件爲必要者,理甚顯然.因苟此 m 組常數爲平直相關,則諸行之一,必可以他行之平直式表示之.故在任何之 m 行行列式中,用適宜常數乘諸行,而自上述之一行就相當元素分別減去,則是行中元素盡爲零.故此行列式爲零.

今請進證此條件亦爲充足者.故吾人先假定上之長方陣中一切 m 行行列式盡爲零.更命此方陣之秩爲 $r>0$ *(參較§7定義三).吾人可設而亦應設在此方陣左上角上之 r 行行列式不爲零,如是於不損論證之普遍性;因諸組之次序,及諸相當常數在組中之次序,均可變易,而無所妨礙,如此即可使不爲零之一 r 行行列式移居此位置中.

---

* 普通言之應有 $r=m-1$,但 r 可爲小於 m 之任何值.然方陣中元素盡爲零之情形應除外,在此時之平直關係甚爲明顯,可以立見.

吾人今須證明首$r+1$組常數爲平直相關.再依據§12之定理二,則可由適所述情形推此m組之平直關係性.

命在方陣左上角內之$r+1$行行列式中,與末列相當之餘因式爲$c_1, c_2, \cdots\cdots c_{r+1}$.吾人如省憶其$r+1$行行列式均爲零之事,則可得下列諸關係如

$$c_1 x_j' + c_2 x_j'' + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_{r+1} x_j^{[r+1]} = 0. \quad (j = r+1, r+2, \cdots\cdots n).$$

更因一行列式中某列元素與他列相當元素之餘因式相乘後之總和亦爲零,故知上方程式於$j=1, 2, \cdots\cdots r$時亦能成立.

由是卽可建立此首$r+1$組常數之平直相關性,因c_{r+1}卽在方陣左上角中之r行行列式,而不爲零也.

(b) $m>n$. 用下述之簡易方法,卽可化此種情形爲適已討論者.對每組n個常數中,均加$m-n$個零.如是則有m組m個常數.諸組數所成之方陣只含一m行行列式,且因其中至少有一列盡爲零,故是式必爲零.故此m組m個常數爲平直相關,因之原有之m組n個常數亦爲平直相關,遂得定理如下:

定理二. m組n個常數,於$m>n$時,常爲平直相關.

習　題

試定下列各組常數,孰爲平直相關,孰爲平直無關?

$$1.\quad \begin{cases} 3a, & -2b, & -3c, & 6d, \\ a, & 0, & -c, & 4d, \\ 0 & -b, & 0, & -3d. \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 1, & 0, & 0, & 5, \\ 1, & 2, & 6, & 7, \\ 3, & 1, & 3, & 16. \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} 5, & 2, & 1, & 3, & 4, \\ 0, & 3, & 0, & 0, & 8, \\ 15, & 7, & 3, & 9, & 7. \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} 5, & -7, & 0, & 1, & -1, \\ 1, & -3, & -2, & 3, & -1, \\ 4, & 0, & 7, & -9. & 2. \end{cases}$$

14. 多項式之平直關係. 設有 m 個多項式

$$f_1, f_2, \cdots\cdots\cdots f_m,$$

而不論其任含幾元.則此等多項式成平直相關之充要條件,顯係即爲其中 m 組係數應爲平直相關.故上節所得之定理,立可應用於多項式之情形.

習題

試定下列諸多項式,孰爲平直相關?孰爲平直無關?

$$1.\quad \begin{cases} 16x \qquad +30z, \\ 6x+2y+5z-4, \\ 15x+9y \qquad -18. \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 3x_1+4x_2-4x_3+6x_4, \\ 7x_1 \qquad +3x_3+7x_4, \\ 2x_1-x_2 \qquad\qquad -3, \\ -5x_1+9x_2-x_3+4x_4+8. \end{cases}$$

$$3.\quad\begin{cases}2x^2+\ 8xy\ +6y^2+14x+12y-4,\\ 7x^2\qquad\quad +\ y^2+6x\ -4y,\\ 3x^2-\ 6xy\ +3y^2-5x\qquad\ +7,\\ 5x^2+20xy\ +15y^2+35x+30y-10.\end{cases}$$

15. 幾何解釋　在§§12, 13中所論之含 n 個常數之各組,苟非某一組中常數均爲零,則宜視作 $n-1$ 維空間內點之齊次坐標.如是則可言此等點之平直相關或無關,甚爲便利.此種平直關係之幾何意義,易自下述對於 $n=4$ 時之各定理中見之.

在此情形下,二點可以此各含四常數之二組

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1,$$

$$x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2.$$

者表之,而於二組數成比例時相合,且僅如是方能相合.是以有

定理一.　二點當而僅當相合時,始成平直相關.

今設有空間內三點 $P_1,\ P_2,\ P_3$,其坐標各爲 $(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2)$,與 $(x_3,\ y_3,\ z_3,\ t_3)$,爲成平直相關,則必可得不盡爲零之三常數 $c_1,\ c_2$ 與 c_3,使

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0,$$

$$c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3=0,$$

$$c_1z_1+c_2z_2+c_3z_3=0,$$

$$c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3=0.$$

定諸點之次序,俾 $c_3\neq 0$,而就 $x_3,\ y_3,\ z_3,\ t_3$,解之:

$$(1)\quad \begin{cases} x_3 = k_1x_1 + k_2x_2, \\ y_3 = k_1y_1 + k_2y_2, \\ z_3 = k_1z_1 + k_2z_2, \\ t_3 = k_1t_1 + k_2t_2, \end{cases}$$

式中 $k_1 = -c_1/c_3$, $k_2 = -c_2/c_3$. 今苟

$$Ax + By + Cz + Dt = 0.$$

爲經過 P_1 及 P_2 二點之任一平面，則有

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 = 0.$$

再以 k_1 乘第一方程式，以 k_2 乘第二方程式，則按(1)中諸方程式可得

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + Dt_3 = 0.$$

是以過 P_1 及 P_2 之任一平面，亦必經過 P_3，是以三點共在一直線上.

今再證明任意三點共在一直線上者必爲平直相關.吾人可設三點爲相異者，否則由定理一立知爲平直相關矣.吾人已知如三點爲平直相關，則過二點之直線必含有第三點.故如令

$$x' = k_1x_1 + k_2x_2,$$

$$y' = k_1y_1 + k_2y_2,$$

$$z' = k_1z_1 + k_2z_2,$$

$$t' = k_1 t_1 + k_2 t_2.$$

而 k_1 與 k_2 爲不盡爲零之二常數,則坐標爲 (x', y', z', t') 之 P' 點必在直線 P_1P_2 上,苟更能證明吾人可定常數 k_1 及 k_2 之值使 P' 與 P_3 相合,則定理可以證明矣.命 $ax+by+cz+dt=0$ 爲過 P_3 一點之任一平面,但不經過 P_1 或 P_2,則 P_3 由此平面與 P_1P_2 相交而得.故如吾人已知在 P_1P_2 上之 P' 點,如能在此平面中,則必與 P_3 點,而論證遂備.欲 P' 在此平面上,則有 $ax'+by'+cz'+dt'=0$.以上式所定 x', y', z', t' 之值代入.得

$$k_1(ax_1+by_1+cz_1+dt_1)+k_2(ax_2+by_2+cz_2+dt_2)=0.$$

但因此平面不經過 P_1 或 P_2,故二括號內之值不爲零.是以可使 k_1 及 k_2 有異於零之值,俾此方程式能合.如是遂得證明.

定理二. 三點當而僅當共在一直線上時,始爲平直相關.*

下述諸定理之證明,留待讀者自行補充.**其中有數則,由平直相關之定義,卽可證明.其外若干則,宜用§13中所述平直相關之條件馭之,較爲易解.

定理三. 四點當而僅當共在一平面上時,始爲平直相關.

定理四. 五點或更多之點常爲平直相關.

下之討論,當可示明他種之幾何應用.

---

*本定理并未謂該三點僅能聯成唯一之直線(可參看其餘諸定理).德譯本註.

**參看附錄二.譯者註.

一組 n 個普通[†]數量,不過卽一有 n 枝偏量(components)之一複素(complex)量(參看§21).故吾人所述平直相關之第一定義,實與下語相當:

有 m 個複素量

$$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots a_m,$$

如能得 m 個不盡爲零之普通量 $c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots c_m$ 使

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots\cdots\cdots + c_ma_m = 0,$$

則諸量稱爲平直相關.

有 n 枝偏量之一複素量之最簡便幾何表示,乃爲 n 維空間內之一矢量(vector),* 而引入矢量之平直相關等概念.今述 $n=3$ 時之情形,以見此種平直相關之幾何意義.

定理五. 二矢量當而僅當共在一直線上時成平直相關.

定理六. 三矢量當而僅當共在一平面上時爲平直相關.

定理七. 四矢量或更多之矢量常爲平直相關.

如欲究多項式平直關係之幾何解釋,則必取使其爲零所得之方程式論,而不能僅論多項式本身.如多項式爲平直

---

† 於此可採二種不同觀點,視吾人認所謂普通量者乃指實量,抑係指普通複素量而定.

* 此外當然尚可有他種幾何解釋.例如在 $n=4$ 時,吾人可視複素量爲四維數(quaternions),而論二,三或四個四維數平直相關之意義.

相關,則稱所成之方程式亦爲平直相關.乃視自變數爲直角坐標,則方程式所示,乃維數等於元數之空間內之幾何軌跡.例如在二元或三元時,則各得平曲線或曲面.二軌跡之時,殊無足討論,因必相合,始有平直關係也.在三平直相關之軌跡時,易見任一軌點與他二點之交點相遇,而不能另交於他點.下述諸定理,已足示平直相關之幾何意義矣.

(1) 在平面內:

定理八. 三圓*當而僅當共軸(coaxial)時,始成平直相關.

定理九. 四圓當而僅當共有一正交圓(orthogonal circle)(實或虛)時,始成平直相關.

定理十. 四圓當而僅當其中一二兩圓交點與三四兩圓交點共在另一圓上時,始成平直相關.

定理十一. 五圓或更多之圓,常爲平直相關.

(2) 在空間內(用齊次坐標):

定理十二. 三平面當而僅當相截成一直線時,始有平直關係.

定理十三. 四平面當而僅當在一點相遇時,始有平直關係.

定理十四. 五平面或更多之平面常爲平直相關.

---

*當諸圓距離漸遠,以致消失.吾人僅能由其方程式及未消失之半徑,以辨此等圓. 德譯本註.

第四章

平直方程式

16. 非齊次之平直方程式. 在行列式之任何淺易討論中,即使甚爲簡略,亦必述及一組含 n 元之 n 個一次方程式,且知只須諸元之係數不爲零,即可用行列式解之.此種解法,係依據克里曼(Cramer)規則,茲述之如下:

克里曼法則. 如在下列諸方程式

$$a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=k_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=k_n$$

中行列式

$$a=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

不爲零,則諸方程式有而僅有一解如下:

$$x_1=\frac{a_1}{a},\ x_2=\frac{a_2}{a},\cdots\cdots x_n=\frac{a_n}{a},$$

式中a_i爲一n行行列式,該式係自a內以$k_1, k_2, \cdots\cdots k_n$諸元素易第$i$列諸元素而得者.

此法則之證明,吾人設爲已知,* 對於下文卽將討論之平直方程式普遍原理,此法則甚爲重要.

取一組含n元之m個方程式:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n+b_1=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n+b_m=0, \end{aligned}$$

論之,式中m及n可爲任何正整數.如此則有三種情形

(1) 此等方程式可以無解,此時稱爲不相容(inconsistent).

(2) 此等方程式只有一解.

(3) 此等方程式不只一解,在此種情形下,不久卽可闡明其必有無窮數之解.

今取下列二方陣:

$$\mathbf{a}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mn}\end{matrix}\right\|,\qquad \mathbf{b}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\ b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mn}\ b_m\end{matrix}\right\|.$$

---

* 大多數英美教科書中所述之證法,僅足示明如此等方程式有一解,則可由克里曼公式得之.至於此等公式是否果適合一切情形,則每未論及,然不難由直接代入以驗之也.此種核驗,留待讀者自爲之.

a稱爲此組方程式之方陣，b稱爲增廣方陣(augmented matrix).

a中所含之一切行列式，均必含於b內，是以a之秩決不能高於b者.故可分二種情形論之.

I. a之秩=b之秩.

II. a之秩<b之秩.

今請先論第二種情形.

設r爲b之秩.則b中至少含一不爲零之r行行列式.且此行列式內必有一列爲諸b，否則此式亦在a中，而與吾人之假設矛盾矣.今爲明確計，設此不爲零之r行行列式，位於b之右上角內.此種假設，幷與普遍性無妨，因諸方程式及$x_1,\cdots\cdots x_n$諸二者之次序，均各可任換，而使該行列式至所設之位置內也.更命諸已知方程式之左端，各爲$F_1, F_2,\cdots\cdots F_m$，而自其中除去常數項所得諸齊次多項式，各爲$f_1, f_2,\cdots\cdots f_m$，以期布式較簡.如此則有下之諸恆等式：

$$F_i \equiv f_i + b_i \qquad (i=1, 2,\cdots\cdots m).$$

先取首r個恆等式論.因a之秩小於r，故$f_1, f_2,\cdots\cdots f_r$諸多項式爲平直相關.即

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots\cdots + c_r f_r \equiv 0,$$

是以 $$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \cdots\cdots + c_r F_r \equiv c_1 b_1 + \cdots\cdots + c_r b_r = C.$$

但因b之秩爲r，故$F_1,\cdots\cdots F_r$諸多項式爲平直無關，因之$C \neq 0$.由是知題設諸方程式不相容，因苟能相容者，則選取適當之之$x_1,\cdots\cdots x_n$諸值，可使諸F均爲零，將此等值代入上之恆等

式,則將有

$$0=C\neq 0,$$

之矛盾結果矣.

今再論第一種情形.設 r 上爲 **a** 與 **b** 二者共有之秩,則 **a** 中至少有一 r 行行列式不爲零.此行列式亦必在 **b** 中.設其位於此二方陣之左上角內.今因二方陣中一切 $r+1$ 行行列式均爲零,故首 $r+1$ 個 F 爲平直相關,是以得

$$c_1F_1+c_2F_2+\cdots\cdots+c_rF_r+c_{r+1}F_{r+1}\equiv 0;$$

更因 $F_1,\cdots\cdots F_r$ 爲平直無關,故 c_{r+1} 不能爲零;吾人遂得將此遍除全式,而以 $F_1,\cdots\cdots F_r$ 之平直式表 F_{r+1} 矣.如以 F_{r+2} 或其餘諸 F 之一代 F_{r+1},上之論證,依然成立.是以有

$$F_{r+l}\equiv k_1^{[l]}F_1+\cdots\cdots+k_r^{[l]}F_r\quad (l=1,2,\cdots\cdots m-r).$$

由此可見凡一點 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 能使 $F_1,\cdots\cdots F_r$ 均爲零者,亦必能使其餘之一切 F 盡爲零.換言之,卽已知方程組中首 r 個方程式之解,必爲全組之解.

更察已知方程式中之首 r 個.與 $x_{r+1},\cdots\cdots x_n$ 各以定値 $x'_{r+1},\cdots\cdots x_n'$,而將各方程式中第 r 項以後移至右端如

$$a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,\,r+1}x'_{r+1}-\cdots\cdots-a_{1n}x_n'-b_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{r1}x_1+\cdots\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,\,r+1}x'_{r+1}-\cdots\cdots-a_{rn}x_n'-b_r.$$

注意此等方程式右端皆爲已知常數,而左端係數所成行列式不爲零,故在此克里曼規則可以應用,而得一解.故此已知

之方程式組爲相容,而得下之定理:

定理一. 一組平直方程式爲相容之充要條件,乃此組之方陣與其增廣方陣有相等之秩.

由上之研究,更可得

定理二. 在一組平直方程式中,如其方陣與增廣方陣有相等之秩 r,則諸未知數中有 $n-r$ 個之值,可以任意命定,其餘諸未知數卽隨之以定,而爲唯一解.

$n-r$ 個未知數之可以任定其值者,其選擇亦可隨意爲之,但須其餘未知數係數所成方陣之秩爲 r.

習　題

試將下列各方程組之解完全求出:

1. $$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 4x-2y-z+3=0, \\ 2x-y-4z+4=0, \\ 10x-5y-6z+10=0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 4x-y+z+5=0, \\ 2x-3y+5z+1=0, \\ x+y-2z+2=0, \\ 5x-z+2=0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x-3y+4z-w=3, \\ x+2y-z+2w=1, \\ 3x-y+2z-3w=4, \\ 3x-y+z-7w=4. \end{cases}$$

17. 齊次平直方程式. 今取上節中諸方程式皆爲齊次者,即諸 b 盡爲零之一種特殊情形論之,

$$a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0.$$

上節中之 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$, 在此情形下,所異者僅有一列之零;是以二者之秩相等,因而可稱爲此組方程式之秩.上節之定理一及二在此變爲

定理一. 一組齊次平直方程式必有一解或多解.

定理二. 如一組 n 元之齊次平直方程式,以 r 爲秩,則有 $n-r$ 個未知數之值可任意命定,而其餘者隨之以定,且爲唯一之解.*

如此等方程式之秩爲 n, 則應只有一解,而顯爲 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$. 且因其秩絕不能大於 n, 故有

定理三. 欲一組含 n 元 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 之齊次平直方程式,能於 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 外,另有他解之充要條件,乃其秩小於 n.

系一. 如方程式之數小於未知數之個數,則必有 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 以外之他解.

---

* 參看 § 16 定理二中末一語.

系二. 如方程式之數等於未知數之個數,則其有 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$ 以外他解之充要條件,乃係數所成行列式爲零.

今論方程式數適比未知數個數少一,且諸方程式爲平直無關之特例,則應證下之

定理四. 有一組 $n-1$ 個含 n 元之齊次平直方程式,且爲平直無關者,* 則凡適合諸方程式之一組値 $x_1,\cdots\cdots x_n$ 必與由下述方法構成之一組 $n-1$ 行行列式成比例,卽先自係數所成方陣中先截去第一列,次截去第二列,如是繼續爲之,所成各行列式前更互間冠以正負號.

今命自方陣中截去第 i 列後所成之 $n-1$ 行行列式爲 a_i. 因此等方程式爲平直相依,故 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$ 中,至少有一不爲零.設此式爲 a_i. 今與 x_i 以一任意定値 c,而移各方程式中第 i 項至於右端,則得

$$a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1,\,i-1}x_{i-1}+a_{1,\,i+1}x_{i+1}+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=-a_{1i}c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1,\,1}x_1+\cdots\cdots+a_{n-1,\,i-1}x_{i-1}+a_{n-1,\,i+1}x_{i+1}+\cdots\cdots$$
$$+a_{n-1,\,n}x_n=-a_{n-1,\,i}c.$$

是以
$$x_k=\frac{(-1)^{i-k}\cdot c\cdot a_k}{a_i}\qquad (k=1,2,\cdots\cdots n),$$

---

* 如諸方程式爲平直相關,此定理雖仍可成立,但徒成辭費,因在此時問題中所述之諸行列式皆爲零也.

由此可見 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 與 $(a_1, -a_2, a_3,\cdots\cdots(-1)^{n-1}a_n)$ 諸行列式成比例,卽爲吾人所欲證者.

至是已由平直關係論推得平直齊次方程式之理.但後者亦可用以返求平直關係論中更多之結果.下之定理在後文中有致用處,今卽舉以爲例.

定理五. 設有一組點 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 不論點數爲有限或爲無限,如能於其中求出 k 點,使一切他點視之成平直相關,則任一組 $k+1$ 點,皆有平直關係.

設 $(x_1',\cdots\cdots x_n'), (x_1'',\cdots\cdots x_n''),\cdots\cdots(x_1^{[k]},\cdots\cdots x_n^{[k]})$ 卽爲此組中任何點均視之成平直相關之 k 點,幷令

$$(X_1',\cdots\cdots X_n'),\ (X_1'',\cdots\cdots X_n''),\cdots\cdots(X_1^{[k+1]},\cdots\cdots X_n^{[k+1]})$$

爲組中任 $k+1$ 點.則可書

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} X_1^{[i]} = c_1^{[i]}x_1' + c_2^{[i]}x_1'' + \cdots\cdots + c_k^{[i]}x_1^{[k]}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n^{[i]} = c_1^{[i]}x_n' + c_2^{[i]}x_n'' + \cdots\cdots + c_k^{[i]}x_n^{[k]}. \end{array}\right. \quad (i = 1, 2,\cdots k+1).$$

如 $(X_1^{[i]},\cdots\cdots X_n^{[i]})$ 不在首 k 點之列,則按假設知上式成立,如係此等點之一,則更顯見爲眞.故吾人應證得能求出不盡爲零之 $k+1$ 個常數 $C_1, C_2,\cdots\cdots C_{k+1}$, 使

$$C_1X_j' + C_2X_j'' + \cdots\cdots + C_{k+1}X_j^{[k+1]} = 0 \qquad (j = 1, 2\cdots\cdots n).$$

將(1)中所定之諸 X 值代入上式,則見如

$$C_1c_1'+C_2c_1''+\cdots\cdots+C_{k+1}c_1^{[k+1]}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1c_k'+C_2c_k''+\cdots\cdots+C_{k+1}c_k^{[k+1]}=0,$$

則諸方式可適合,但適所得方程式之數少於其中未知數之個數,故可得一組不盡爲零之諸 C, 使能適合.(見定理三系一).

習 題

試將下列方程組之解完全求出:

$$1.\quad \begin{cases} 11x+8y-2z+3w=0,\\ 2x+3y-z+2w=0,\\ 7x-y+z-3w=0,\\ 4x-11y+5z-12w=0.\end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 2x-3y+5z+3w=0,\\ 4x-y+z+w=0,\\ 3x-2y+3z+4w=0.\end{cases}$$

18. 齊次平直方程式諸解中之基本系 (Fundamental systems). 設 $(x_1',\cdots\cdots x_n')$ 爲方程組

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

之一解,則 $(cx_1',\cdots\cdots cx_n')$ 亦爲一解,如與 c 以各不同之值,則除

諸 x 盡爲零之情形外,可得無窮組解.此等解或已包含(1)之一切解(參看上節之定理),但在通例,每不如是.

設(1)有 $(x_1',\cdots\cdots x_n')$ 及 $(x_1'',\cdots\cdots x_n'')$ 二組解,則 $(c_1x_1'+c_2x_1'',\cdots\cdots c_1x_n'+c_2x_n'')$ 亦爲一解.如二組已知解成比例,則所得顯見與上述由一組中求得幷無不同;但如此二組解爲平直無關,則與 c_1 及 c_2 以一切各值,可得一二進無窮組之解;然僅有此,在一般情形下,猶未足包含(1)之一切解也.同理可見如吾人能得三組平直無關之解,則可由之構成三進無窮組之解,餘可類推.如依此法推行,能得有限數組平直無關之解,使一切解皆可藉此表出,則此有限數之解,稱爲基本系.

定義. 如 $(x_1^{[i]},\cdots\cdots x_n^{[i]})(i=1,2,\cdots\cdots k)$ 爲(1)之 k 個解而適合下述二條件:

(a) 爲平直無關.

(b) 凡(1)中一切解,皆可表爲下形

$$(c_1x_1'+c_2x_1''+\cdots\cdots+c_kx_1^{[k]},\cdots\cdots c_1x_n'+c_2x_n''+\cdots\cdots+c_kx_n^{[k]}).$$

則稱爲構成一基本系.

定理一. 如方程式(1)之秩爲 $r<n$,則有無窮數之基本系,每系各含 $n-r$ 個解.

假設在方程式(1)之方陣中左上角內 r 行行列式不爲零,而取首 r 個方程式論之.此等方程式之任一解,均爲其餘諸式之解.將第 r 項以後各項,各遷至他端,幷與 $(x_{r+1},\cdots x_n)$

以一組不盡爲零之值 $(x'_{r+1},\cdots\cdots x_n')$；則按克里曼規則，可得此等 r 個方程式之唯一解．設 $(x_1',\cdots\cdots x_n')$ 爲求得之解．再設 $(x_{r+1},\cdots\cdots x_n)$，另有一組不盡爲零之定值 $(x''_{r+1},\cdots\cdots x_n'')$，則另得一組解 $(x_1'',\cdots\cdots x_n'')$．如是繼續至推得 $n-r$ 組解

$$\begin{array}{l} x_1',\cdots\cdots\cdots\cdots x_r', \quad x'_{r+1}\cdots\cdots\cdots\cdots x_n', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{[n-r]},\cdots\cdots x_r^{[n-r]},\ x_{r+1}^{[n-r]},\cdots\cdots x_n^{[n-r]} \end{array}$$

乃止．

如所取之 $n-r$ 組 $(x_{r+1},\cdots\cdots x_n)$ 之值，使行列式

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x'_{r+1}\cdots\cdots\cdots\cdots x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{r+1}^{[n-r]}\cdots\cdots x_n^{[n-r]} \end{vmatrix}$$

不爲零，則所成 $n-r$ 組解爲平直無關，且此種取法，顯見有無窮之多．如此吾人可得無窮組含 $n-r$ 數之解，且每組均合於基本系定義中之條件 (a)．

今再證此等解更合於條件 (b)，可取 $(X_1,\cdots\cdots X_n)$ 爲所論之 r 個方程式之任一解．諸 X 中之末 $n-r$ 個，必視已取 $(x_{r+1},\cdots\cdots x_n)$ 之值之 $n-r$ 組數成平直相關係，因常數之組數已較多於每組中之元素之數（參看 §13 定理二），且行列式 (2) 不爲零故也．故得

(3)　$X_i=c_1x_i'+c_2x_i''+\cdots\cdots+c_{n-r}x_i^{[n-r]}(i=r+1,\ r+2,\cdots\cdots n)$.

今視 $x_{r+1},\cdots\cdots x_n$ 爲已知數,按克里曼法則解(1)中首 r 個方程式,則可得結果如下式:

$$x_j=A_j'x_{r+1}+A_j''x_{r+2}+\cdots\cdots+A_j^{[n-r]}x_n \qquad (j=1,2,\cdots\cdots r).$$

與 $x_{r+1},\cdots\cdots,x_n$ 以特值,則有

$$(4)\quad \begin{cases} x_j' = A_j'x'_{r+1}+A_j''x'_{r+2}+\cdots\cdots+A_j^{[n-r]}x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (j=1,2\cdots\cdots r) \\ x_j^{[n-r]}=A_j'x_{r+1}^{[n-r]}+A_j''x_{r+2}^{[n-r]}+\cdots\cdots+A_j^{[n-r]}x_n^{[n-r]} \\ X_j=A_j'X_{r+1}+A_j''X_{r+2}+\cdots\cdots+A_j^{[n-r]}X_n. \end{cases}$$

以 $c_1,\cdots\cdots c_{n-r}$ 等數分別乘首 $n-r$ 個方程式而加之,則按(3)可得

$$c_1x_j'+\cdots\cdots+c_{n-r}x_j^{[n-r]}=A_j'X_{r+1}+\cdots\cdots+A_j^{[n-r]}X_n.$$

是以據(4)式有

(5)　$X_j=c_1x_j'+\cdots\cdots+c_{n-r}x_j^{[n-r]} \qquad (j=1,2,\cdots\cdots r)$

合(3)與(5)則吾人之定理,得以證明.

如此可見方程組(1)之一切解構成能合於§17所述定理五中條件.由是得

定理二. 如一組齊次平直含 n 元之方程式,以上爲秩,則任取 $n-r+1$ 組解,皆成平直相關.

今請證下之定理以爲殿.

定理三. 有一組齊次平直方程式,含 n 元而以 r 爲秩,則其一組解成基本系之充要條件如下:

(a) 平直無關,

(b) 含有 $n-r$ 個解.

按定義即知 (a) 爲一必要條件. 欲明 (b) 亦爲必要者,首須注意因定理二之故,平直無關之解數,決不能多於 $n-r$. 故吾人只須證凡在 $l<n-r$ 時,l 個平直無關之解不能成一基本系. 因苟能如此,則按 §17 定理五,可知任一組 $l+1$ 個解應爲平直相關,而任一組 $n-r$ 個解亦復如是,(因 $n-r\geqq l+1$ 故). 但就定理一可知此結論不眞.

今再證 (a) 及 (b) 二條件亦爲充足者,命

$$(x_1^{[i]},\ x_2^{[i]},\cdots\cdots x_n^{[i]})\qquad (i=1,\ 2,\cdots\cdots n-r)$$

爲題設方程組內一組 $n-r$ 個平直無關之解,并令此組解中任一解爲 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$. 按定理二知吾人可得 $n-r+1$ 個不盡爲零之常數 $(c_1,\cdots\cdots c_{n-r+1})$, 使

$$c_1x_j'+c_2x_j''+\cdots\cdots+c_{n-r}x_j^{[n-r]}+c_{n-r+1}x_j=0\qquad (j=1,2\cdots\cdots n)$$

但因 $n-r$ 個已知點爲平直無關,故必 $c_{n-r+1}\neq 0$; 故由適所作諸方程式,已證明 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 一解得以 $n-r$ 個已知解表出成平直式,此即示明此 $n-r$ 個解成一基本系也.

習題

1. 試證一組齊次平直方程式之一切基本系之解,均已盡含於由定理

一證法所定無窮組之內.

2. 已知空間之平面之齊次坐標方程式,如此等方程式之秩爲3,其相關位置若何?爲2則若何?爲1又應如何?

3. 已知空間之平面之非齊次坐標方程式,設其方陣及增廣方陣二者之秩,各取種種可能數值,則此二平面之相關位置若何?

第五章

關於方陣之秩之數定理

19. 一般之方陣. 欲證一已知方陣之秩爲r,吾人首應示明其中至少有一不爲零之r行行列式,更須證明其中一切$r+1$行行列式盡爲零.如按下之定理,則第二步手續,得因之減省不少:

定理一. 在一已知方陣中,如有一r行行列式不爲零,而以此爲首餘子式之一切$r+1$行行列式均爲零,則其一切之$r+1$行行列式必盡爲零.

吾人可設此不爲零之r行行列式位於方陣之左上角內,題理之普遍性,并不因之而失.設方陣爲

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mn} \end{matrix}\right\|,$$

而取其中首$r+1$行內之$r+1$組量,每組各含n個.此等$r+1$

組量爲平直相關,由§13定理一之證明,卽可知之,該定理雖言一切 $r+1$ 行行列式均爲零,但證明中所需者僅爲此間所假設爲零之行列式.且因方陣中首 r 行之 r 組常數爲平直無關,故其第 $r+1$ 行視首 r 行爲平直相關.且按§17定理五可知任 $r+1$ 行皆爲平直相關;再據§13定理一之理,得斷題中方陣之一切 $r+1$ 行行列式盡爲零,如題所言.

此外更有他法,可使決定方陣之秩之手續,化爲簡易者,卽依某種方法變方陣之形而不改其秩.欲述此法,請先立下之定義.

定義一 下述之各種變換法稱爲初等變換(elementary transformation);

(*a*) 對調兩行或兩列;

(*b*) 以一不爲零之常數遍乘一行(或列)中諸元素;

(*c*) 以一常數遍乘一行(或列)中諸元素,而以之各加於另一行(或列)中各相當元素.

如由一方陣 **a** 經初等變換成方陣 **b**, 則仍能用初等變換使方陣 **b** 復返於方陣 **a**, 其理甚明.

定義二. 二方陣稱爲相合(equivalent)者,卽可由有限次數之初等變換手續,使其一化爲其他之謂也.

定理二. 如二方陣爲相合,則其秩亦相等.

定義一中(*a*)及(*b*)二變換,顯然不改一方陣之秩,因此種手續,不影響於方陣中任何行列式之爲零與否也.故欲證本

定理,只須證明方陣之秩不因變換(c)而改,斯爲已足.

今設此變換手續,乃以k乘方陣a中第q行,加之於第p行而得b.設r爲方陣a之秩.玆請先證其秩不能因變換而增,換言之,卽方陣b中一切$r+1$行行列式,仍盡爲零.按假設方陣a中一切$r+1$行行列式盡爲零,而其中有不因此變換而改者,卽不含有第p行或兼含第p及第q二行者是.其他種行列式,卽含第p行而不含第q行者,經此變換後成$A\pm kB$之形,其中A與B均a之$r+1$行行列式,故均爲零.是以知變換(c)決不能增一方陣之秩.且也,b之秩亦決不能低於a者,否則使b返a之變換(c)能使b之秩增加,此事爲不可解,吾人適已論及矣.

用初等變換,每易使方陣,大爲化簡,故上述之理,用於決定方陣之秩之時,每甚便利

習題

試定下列各方陣之秩:

1. $$\begin{Vmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{Vmatrix}$$

2. $$\begin{Vmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{Vmatrix}$$

3. 任何以r爲秩爲方陣，均可用初等變換化爲一種形式，使其中在第i行第i列之元素，於$i\leqq r$時爲1，其他元素，則盡爲零，試證之。

4. 由是推證二m行n列之方陣，如爲等秩，則必爲相合.

5. 試證如方陣

$$\begin{Vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

之秩爲0或1，其充要條件，乃可得$m+n$個常數$\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_m$, $\beta_1,\cdots\cdots\beta_n$，使$a_{ij}=\alpha_i\beta_j$.

20. 對稱方陣 (Symmetrical matrices).

定義. 正方陣

$$\mathbf{a}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

(及其行列式)中，如位於主對角線兩側而成對稱之元素相等，換言之，卽當$a_{ij}=a_{ji}$時，稱爲對稱者.

今以M_i表$\mathbf{a}$之一i行主子式.本節之主旨，在示明對稱方陣之秩，可察其主子式而定.下述之定理，所述卽此事.

定理一. 如對稱方陣$\mathbf{a}$中一r行主子式M_r不爲零，而加某行及同序之列，及加某二行及同序之二列於M_r所得之一切主子式盡爲零，則$\mathbf{a}$之秩爲r.

設此不爲零之子式位於 a 之左上角內,而以 $B_{\alpha\beta}$ 表加第 α 行第 β 列於 M_r 所得之行列式.如能證明當 α 及 β 取一切不等之值時, $B_{\alpha\beta}=0$, 則本定理已證明.試參較 §19 定理一卽知.使 α 及 β 取二不相等之值,而以 C 表將 a 中第 α,β 二行及第 α,β 二列加於 M_r 所得之行列式.如是按假設有 $M_r\neq0$, $B_{\alpha\alpha}=0$, $B_{\beta\beta}=0$, $C=0$. 更令 M_2' 爲 C 之附屬式中一二行子式,而與 C 中之 M_r 相當者.按 §11 之推理二卽得

$$M_2'=CM_r=0$$

但
$$M_2'=B_{\alpha\alpha}B_{\beta\beta}-B^2_{\alpha\beta}$$

是以
$$B_{\alpha\beta}=0.$$

定理二. 如對稱方陣 a 中一切 $r+1$ 行主子式皆爲零,且一切 $r+2$ 行主子式亦然,則 a 之秩必小於 r.

如 $r=0$, 則主對角線中元素盡爲零,且一切二行主子式亦均爲零.

換言之,卽
$$a_{ii}\cdot a_{jj}-a_{ij}^2=0,$$

且因 $a_{ii}=a_{jj}=0$ 故 $a_{ij}=0$. 由是知一切元素皆零而其秩亦爲零,此定理遂對於特例成立.

今設 $r=k$ 時此理爲眞,卽吾人假設當一切 $k+1$ 行主子式及 $k+2$ 行主子式皆零時, a 之秩必小於 $k+1$. 如是可知當一切 $k+2$ 行及 $k+3$ 行主子式皆爲零時, a 之秩小於 $k+2$, 因在此種情形中,如一切 $k+1$ 行子式皆零,則按假設知其秩小於 $k+1$, 如有若干 $k+1$ 行子式不爲零,則按上述定理知

其秩適為 $k+1$. 如是可知如定理當 $r=k$ 時成立,則當 $r=k+1$ 時亦必成立.但吾人已證當 $r=0$ 時之情形,故本定理對任何 r 值,均無不合.

定理三. 如一對稱方陣 $\mathbf{a}$ 之秩 $r>0$, 則 $\mathbf{a}$ 中必有一不為零之 r 行主子式.

因其中一切 $r+1$ 行主子式皆零,如其一切 r 行主子式亦盡為零,則按上述之理,其秩必為 $r-1$ 或較小之數矣.

今述一特殊性質之定理,以為本章之殿,此理於後文中有致用處(參看 §50 第4至第6諸題).

定理四. 如一對稱方陣 $\mathbf{a}$ 之秩為 $r>0$, 吾人可移動各行(但同時應將各列移動,使 $\mathbf{a}$ 仍為對稱)使下列一組量

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\cdots\cdots M_r$$

中無二者相繼為零,且 $M_r\neq0$; M_0 為單位數,而其他諸 M,則為移動後 $\mathbf{a}$ 之右上角內之主子式,其次數由下標 r 表之.

依定義 $M_0\neq0$. 暫將主對角線中一切元素均為零之特例置諸不論,而取 a_{ii} 一元素異於零之情形研究.試將第 i 行及列移於第一行及列處,則得 $M_1\neq0$. 如是第一行及列已定,但其他仍可自由移動.今試究對 M_1 加一行及同序之列所成之二行主子式.對於此等行列式均為零之情形,仍暫置諸不論,而設僅留第一第 i_1 二行列,而盡截去其餘所得之二行行列式不為零.今將第 i_1 行及第 i_1 列移至第二行列處,則得 $M_2\neq0$, 次乃取以 M_2 為首餘子式之三行行列式.如非在某階

段時,一切某級主子式,凡爲吾人應討論者,均等於零,則吾人顯可照前法進行,以移易行列,使 M_0, M_1,………M_r 諸量,無爲零者.在第一種情形中,吾人可移置首 k 行及 k 列,使 M_0, M_1,………M_k 諸量,無爲零者,但以 M_k 爲首子式之一切 $k+1$ 行主子式,則皆爲零,故無論如何移動其餘之 $n-k$ 行列,所得均爲 $M_{k+1}=0$.今更取以 M_k 爲次餘子式之 $k+2$ 行主子式觀之.* 此等行列式,按定理一,不應盡爲零,否則 a 之秩將爲 $k<r$.換言之,即在 $M_{k+1}=0$ 之時,可移動諸行與列,使 $M_{k+2}\neq 0$.如此可見將 a 之行列作適當移動,使諸 M 中無二量相繼爲零.上理既明,則可知如 $M_{r-1}=0$,吾人可使 $M_r\neq 0$,縱使 $M_{r-1}\neq 0$,仍可使 $M_r\neq 0$ 因按題設,† 將二行及同序之二列,加於 M_{r-1} 而得之一切行列式均爲零,且如加一行及同序之列者,亦皆爲零,則 a 之秩按定理一應爲 $r-1$ 矣.

如將一對稱行列式,依上理移動,使諸 M 中無二者相繼爲零,且 $M_r\neq 0$,則稱爲成法式 (normal form).

習題

1. 試定下列諸方陣之秩:

---

* 此處暗設 $k=r-1$ 時 $r<n$,否則 M_{k+2} 無意義可言.$r=n$ 之情形,於此決不能有,蓋如是則將有 $M_{k+1}=a\neq 0$ 矣.

† 此處吾人復假設 $r<n$,因如 $r=n$,則有 $M_r=a\neq 0$.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & b & d \\ 1 & 0 & c & e \\ b & c & 2bc & cd+be \\ d & e & cd+be & 2de \end{Vmatrix}.$$

2. 一反稱 (Skew-symmetric) 行列式或方陣者，乃式中 $a_{ij}=-a_{ji}$ (因而 $a_{ii}=0$) 之謂.

試聯立關於此種方陣之數定理，如本節之定理一,二,三.

3. 試就易行爲列之影響,以證一奇次反稱行列式常爲零.

4. 試證奇次反稱行列式之秩，常爲偶數.

第六章

平直變換與方陣運算

21. 以方陣爲複素量 在§7中吾人曾謂一m行n列之方陣非一單純量,而爲一組mn個量合成.如量一詞之意義,僅限於普通代數中之實量及複素量,則此種陳述語確能成立.然苟少加思考,則可見算術及代數中量之概念,乃由正整數之原始概念,漸次推展而成,即在一較早階級中,所絕不承認爲數之物(例如負數),亦可將量一詞加於其上,吾人今僅欲論其一種推廣,斯即爲複素量,因如此可用另一種更遠之眼光,以視方陣也.

如有二件或多件種類不同之物,皆爲可數或可度者,而取其所成之某合體論之,則得一複素量之實例,如5馬3牛7羊是也.欲記此種複素量,有一便利之法,如$(5,3,7)$,但約定第一位置表馬之數,第二位置表牛之數,第三位置表羊之數.在複素量之抽象理論中,吾人不必確定實物如馬牛等,而僅考一組量(二合量,三合量等),而就其在符號中所據之位置以別之,此種複素量,常可用一字母表示,如

$$\alpha=(a,\ b,\ c)$$

形,頗爲便利,亦猶在普通代數中,以一字母表含有二數之分數也(例如$\frac{2}{3}$).此處之 a, b, c 等單純量,稱爲複素量之第一第二第三分量 (component);二複素量於而僅於其相當分量各等時,始稱爲相等.同理,一複素量於而僅於其相當分量均爲零時,始稱爲等於零.

既稱此種一組量爲複素量,行且見對此種量施得代數運算,而得其效用,此卽此種稱之價值之所在也.二複素量之

$$\alpha_1=(a_1,\ b_1,\ c_1),\quad \alpha_2=(a_2,\ b_2,\ c_2),$$

和差者,卽下列二複素量

$$\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ c_1+c_2),\ \alpha_1-\alpha_2=(a_1-a_2,\ b_1-b_2,\ c_1-c_2)$$

之謂也.*

至於二複素量乘積,其意義之決定,殊不如上理之簡單.吾人應首定一法則,使得由二量,產生一第三量,稱爲前二者之積.此種法則,有無窮定法,而每一法則,可定一種不同之複素量系統.†

今取方陣之論題研究.一 m 行 n 列之方陣,僅爲一組含 mn 量(吾人設爲初等代數中之實量或普通複素量),而依一定次序排列而成,故按適所述之觀點立論,則成一含 mn 分

* 此乃和差二字之自然意義,就上述實例可見.

† 在特例可取初等代數之普通複素數系統言,此爲一種二合量之情形,而 $\alpha_1=(a_1,\ b_1)$, $\alpha_2=(a_2, b_2)$ 二者之積,乃由公式 $\alpha_1\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+a_2b_1)$ 決定.關於他詳細之點.可參看 Burkhardt 著 Funktionentheorie §§2, 3.

量之一複素量;如再加下列諸定義,卽成上所略述之複素量理論之一特殊應用.

定義一. 一方陣爲零,必於而僅於其元素皆爲零時始可.

定義二. 欲二方陣相等,必二者有同數之行列,而其中任何元素,均與他者中相當元素等值,且僅於此時,二方陣方能相等.

定義三. 有二含 m 行 n 列之方陣,其和(或差)云者,乃取此二已知方陣中相當元素之和(或差),而構成一含 m 行 n 列之方陣也.

吾人爲使代數中普通量(如實量及普通複素量)與方陣二者有別起見,每稱前者爲計値量(scalars).

二方陣乘法之定義,留待次節討論,今先立一方陣與一計値量乘法之定義.

定義四. 如 **a** 爲一方陣*而 k 爲一計値量,則乘積 k**a** 或 **a**k 云者,乃以 k 遍乘 **a** 中各元素所成之方陣也.

下之定理,顯可由上述定義直接推出.

定理. 普通代數學中定律,對於方陣之加減及其與計値量之之乘法,無不適用。

例如命 **a**, **b**, **c** 爲方陣, k, l 爲計値量,則有

---

*本書始終以黑體字表方陣。

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c},$$

$$k\mathbf{a}+k\mathbf{b}=k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$k\mathbf{a}+l\mathbf{a}=(k+l)\mathbf{a}.*$$

習 題

如r_1及r_2各爲二方陣之秩,而R爲其和者,試證

$$R\leqq r_1+r_2.$$

22. 方陣之乘法. 此前所論者爲m行n列之方陣.今爲陳述簡便起見.此後單就正方陣立論.此即$m=n$之情形也.此種限制,并無喪失普遍性之虞,只須約定凡遇m行n列之方陣,而$m\neq n$時,可以零補足所缺之行或列,使成正方陣,其級爲m及n二數中之大者,而認此與原式相當.

今當前之問題,即:吾人如何定二同級方陣之乘積?就邏輯立場論之,此種定義之設立,可以任意爲之,而無所限制,吾人所選取上之定義,并非以先天上有何優勝之處,不過因其致用較便耳.今選下之定義,乃由於行列式乘法定理所詔示†者也.

定義一. 二n級正方陣之乘積$\mathbf{ab}$者,乃一n級方陣,其

---

*吾人應補明者一式,即$(-1)\,\mathbf{a}=\mathbf{a}$,此不過記號上之事.

†就歷史上言,此定義係揆力(Cayley)所創,乃由於併合平直變換所得結果之詔示,可參看§23.

中第 i 行第 j 列之元素,爲取 a 中第 i 行各元素,依次乘 b 中第 j 列相當元素,然後相加而得.

今以 a_{ij} 及 b_{ij} 各指 a 及 b 中第 i 行第 j 列之元素或簡稱爲此等方陣中之 (i, j) 元素,則按吾人之定義,乘積 ab 中之 (i, j) 元素爲

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nj}, \tag{1}$$

而方陣 ba 中之 (i, j) 元素,則爲

$$a_{1j}b_{i1}+a_{2j}b_{i2}+\cdots\cdots+a_{nj}b_{in}. \tag{2}$$

上列 (1), (2) 二量,在一般情形,每非相等,故得

定理一. 方陣之乘法,每不合於對易 (commutative) 律,換言之,即在一般情形下:

$$\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}.$$

今更取第三方陣 c, 使其中 (i, j) 元素爲 c_{ij}, 而構成乘積 (ab) c. 則其中 (i, j) 元素爲

$$\begin{aligned}
&(a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots\cdots+a_{in}b_{n1})c_{1j}\\
&+(a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\cdots\cdots+a_{in}b_{n2})c_{2j}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nn})c_{nj}.
\end{aligned} \tag{3}$$

但在他方面,則 a(bc) 方陣中之 (i, j) 元素爲

$$\begin{aligned}
&a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+\cdots\cdots+b_{1n}c_{nj})\\
&+a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+\cdots\cdots+b_{2n}c_{nj})\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_{in}(b_{n1}c_{1j}+b_{n2}c_{2j}+\cdots\cdots+b_{nn}c_{nj}).
\end{aligned} \tag{4}$$

因(3)(4)二量常等,故得

定理二. 方陣之乘法,爲可締合者(associative).換言之,即

$$(ab)c=a(bc).$$

最後可見方陣 a(b+c) 中之 (i,j) 元素,適爲 ab 及 ac 二方陣中 (i,j) 元素之和,故又有

定理三. 方陣之乘法,有配分(distributive)性,換言之,即

$$a(b+c)=ab+ac.$$

除對易,締合,分配諸律外,初等代數中當有一律,用處甚多,此律即:一乘積中至少應有一因式爲零,方能等於零.吾人僅須取一簡單之例,即可示明此律在方陣算法,不復成立.例如

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}=0,$$

其中諸 a 及 b,可爲任意值.是以有

定理四. 如二或數方陣之積爲零,吾人不得因之推斷其中必有一因式爲零.

故一方程式各項均有之不爲零因式,在方陣算法中,不得消去.

今述一結果,乃由行列式乘法定理及吾人所選二方陣乘法定義中,立可推出者.

定理五. 二或數方陣乘積所成方陣之行列式,卽諸方陣行列式之乘積.

前在§7定義二中所立一方陣共軛式之概念,甚爲重要,下述定理,卽關於此概念者,其用頗廣.

定理六. 任意若干方陣乘積之共軛式,乃其共軛式依相反次序乘得之積.

欲證此理,首須注意當二方陣相乘之時,由定義立可推知其爲眞確.故如設$n-1$個方陣之時,本定理成立,而能進證n個相乘之時亦成立,則在任何情形,均無不眞.今書

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\cdots\cdots\mathbf{a}_n,$$

則按所設應有

$$\mathbf{b}'=\mathbf{a}'_n\cdots\cdots\mathbf{a}'_3\,\mathbf{a}'_2,$$

式中符標卽示明共軛式.由是可得

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\cdots\cdots\mathbf{a}_n)'=(\mathbf{a}_1\mathbf{b})'=\mathbf{b}'\mathbf{a}'_1=\mathbf{a}'_n\cdots\cdots\mathbf{a}'_2\mathbf{a}'_1,$$

而本定理已證明.

今更立一定義,以作一結束:

定義二. 如一正方陣之行列式爲零,則稱爲降秩(singular)方陣.

如按本節開始時之約定,則一切非正方之方陣皆爲降秩者

習題

1. 定義. 如能得一不爲零之方陣 **b**, 使 **ab**=0 或 **ba**=0, 則 **a** 稱爲零之除式 (divisor of zero).

任何方陣,如其中有一行或一行盡爲零則必爲零之除式,試證明之.

2. 如能用初等變換法(見 §19 定義一) 使 **a** 化爲 **b**, 則必有一滿秩 (non-singular) 方陣 **c**, 使

$$\mathbf{ac}=\mathbf{b}.$$

或有一滿秩方陣 **d**, 使

$$\mathbf{da}=\mathbf{b}.$$

3. 如一方陣中元素皆實數,而此方陣與共軛式之積爲零,則此式本身必爲零.

4. 如 **a** 及 **b** 二方陣之相當元素,爲共軛虛數,而 **b**′ 爲 **b** 之共軛方陣,若更有

$$\mathbf{ab}'=0, \quad \text{則必} \quad \mathbf{a}=\mathbf{b}=0.$$

23. 平直變換(Linear transformation). 吾人於將進究方陣理論之先,謹於本節及下節中,討論一極有關聯之科目,卽平直變換是,此項研究,亦可視爲方陣理論之一種重要應用.

在代數及解析學中,吾人每引入含新未知數或變數之函數,以代討論中原有之未知數或變數.如所用函數爲齊次平直者,則此種變換,或變數替換,不特甚簡,且在若干特殊方面上,亦極重要.此種變換,稱爲齊次平直變換 (homogeneous linear transformation),或簡稱平直變換.如 $x_1 \cdots\cdots x_n$ 爲原有變數,而 $x'_1 \cdots\cdots x'_n$ 爲新變數,則得變換之公式爲

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

正方陣 $$\mathbf{a} = \begin{Vmatrix} a_{11} \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

稱爲此變換之方陣,其行列式每以a表之,而稱爲變換之行列式.因此變換.由方陣完全可定,故吾人得稱爲變換 **a**,亦不至生混淆.

在大多數用及變換之情形,在研求之過程中,每需能復返於原有之變數,爲求達此鵠的起見,則不特需以 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 之函數表 $x'_1, x'_2, \cdots\cdots x'_n$, 且更需能表 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 爲 $x'_1, x'_2 \cdots\cdots x'_n$ 之函數. 在平直變換之情形,此種需要,每易達到.因變換之方程式,可稱爲 $x_1, \cdots\cdots x_n$ 之非齊次平直方程式,如此變換之行列式 a 不爲零,則可解得

$$\mathbf{A} \begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}}{a}x_1' + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{A_{n1}}{a}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}}{a}x_1' + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{A_{nn}}{a}x'_n \end{cases}$$

式中 $A_{11} \cdots\cdots A_{nn}$ 各爲a中元素 $a_{11}, \cdots\cdots a_{nn}$ 等之餘因式.

變換 **A** 稱爲變換 **a** 之逆 (inverse) 式,但須牢記僅於 $a \neq 0$

之時,方能有此.當 $a=0$ 時之平直變換稱爲異變換 *(singular transformation). 如 a 爲非異者,則 **A** 亦然,因其行列式爲 a^{-1} 故也(參看 §11 推論二).

定義. 下列之特殊平直變換

$$x'_1=x_1,\ x_2'=x_2,\cdots\cdots\cdots\cdots x_n'=x_n,$$

其方陣爲

$$\mathbf{I}=\left\|\begin{array}{ccc}1 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots & 0\\ 0 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots & 1\end{array}\right\|$$

者,稱爲么變換(identical transformation).

此種變換之行列式爲 1.

今轉就平直變換合併之情形論之.如於引入原有變數 x 之一組函數 x' 後,更作第二變換,引入第三組變數 x'',而爲變數 x' 之函數者,將此二變換合併,顯可直接使變數 x'' 由 x 表出.苟所合併之二變換爲平直者,則可見結果所得之變換,仍爲平直.是公式在此頗重要,今爲簡便計,姑就三變數之情形討論,然吾人旋卽可見此種特例殊足爲普遍情形之代表.

---

*其他著者亦稱此種變換爲 ausgeartet. 德譯本註.

設

$$
\mathbf{a}\begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3. \end{cases}
\qquad
\mathbf{b}\begin{cases} x''_1=b_{11}x'_1+b_{12}x'_2+b_{13}x'_3, \\ x''_2=b_{21}x'_1+b_{22}x'_2+b_{23}x'_3, \\ x''_3=b_{31}x'_1+b_{32}x'_2+b_{33}x_3'. \end{cases}
$$

爲二平直變換,將a中之諸x'值代入b中,則得

$$
\begin{cases} x_1''=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12}+a_{31}b_{13})x_1 \\ \qquad +(a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{32}b_{13})x_2 \\ \qquad +(a_{13}b_{11}+a_{23}b_{12}+a_{33}b_{13})x_3, \\ x_2''=(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22}+a_{31}b_{23})x_1 \\ \qquad +(a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{32}b_{23})x_2 \\ \qquad +(a_{13}b_{21}+a_{23}b_{22}+a_{33}b_{23})x_3, \\ x_3''=(a_{11}b_{31}+a_{21}b_{32}+a_{31}b_{33})x_1 \\ \qquad +(a_{12}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{32}b_{33})x_2 \\ \qquad +(a_{13}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{33}b_{33})x_3. \end{cases}
$$

由此可見此變換之方陣爲ba. 是以得

定理. 如用以a爲方陣之平直變換,使變數x化爲變數x',更另用一以b爲方陣之平直變換,使x'再化爲x'',則以ba爲方陣之平直變換,可逕使x化爲x''*.

24. 直射變換(Collineation). 今取平直變換之重要幾

*此結果如藉下述符號記法,則甚易記憶,且此法便利之時甚多.變換**a**可用符號方程式 $x'=\mathbf{a}(x)$ 記之,變換**b**,則以 $x''=\mathbf{b}(x')$ 記之.如是則二變換之合併,可記爲 $x''=\mathbf{b}(\mathbf{a}(x))$ 或更簡記之爲 $x''=\mathbf{ba}(x)$.

何應用論之.爲說理簡明計,先論三變數之情形,此三變數可視爲一平面上點之齊次坐標.

設有一組方程式

$$
(1)\qquad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1t, \\ y' = a_2x + b_2y + c_2t, \\ t' = a_3x + b_3y + c_3t, \end{cases}
$$

卽可藉以決定平面上點之變換;換言之,如 (x, y, t) 表已知之任意點.則由(1)式可求得另一點 (x', y', t') 之坐標,而可視爲係自第一點變換而得者.此時僅有一例外情形,卽當求得 x', y', t' 之值盡爲值之時是,此時該點并未嘗變成他一點.但此種特外情形,僅當變換(1)之行列式爲零時,始克有之.故吾人討論,宜以非異平直變換爲限.在此種情形下,不特任何點 (x, y, t) 均有一定點 (x', y', t') 與之對應,且得反推,而知任何點 (x', y', t'),亦有一確定對應點 (x, y, t),因此時變換(1)有一反式

$$
(2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_1}{D}x' + \dfrac{A_2}{D}y' + \dfrac{A_3}{D}t', \\[2ex] y = \dfrac{B_1}{D}x' + \dfrac{B_2}{D}y' + \dfrac{B_3}{D}t', \\[2ex] t = \dfrac{C_1}{D}x' + \dfrac{C_2}{D}y' + \dfrac{C_3}{D}t' \end{cases}
$$

式中 D 爲(1)之行列式,而 A_i, B_i, C_i 皆 D 中之餘因式.

直線

$$
(3)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma t = 0
$$

上之諸點(x, y, t)經平直變換(1),化爲他直線.*

$$(4)\quad \frac{\alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1}{D}x'+\frac{\alpha A_2+\beta B_2+\gamma C_2}{D}y'+\frac{\alpha A_3+\beta B_3+\gamma C_3}{D}t'=0$$

上之點,按公式(2)卽可知之.反言之,按(1)式可見(4)上之點,皆與(3)上者成對應.故知此變換確立(3)與(4)二直線上諸點間之一種一一對應(one-to-one correspondence)因有此直線變爲直線之性質,故此種變換,稱爲直射變換.有時亦稱爲投影變換(projective transformation),因吾人可證明,如就空間內一點射出之直線,將一平面,投影於他平面,則得此種變換也.

上所論二維空間之情形,不需若何改變,卽可應用於三維空間.因在變換式

$$(5)\quad \begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1z+d_1t, \\ y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t, \\ z'=a_3x+b_3y+c_3z+d_3t, \\ t'=a_4x+b_4y+c_4z+d_4t, \end{cases}$$

中,只須其行列式不爲零,卽可得一種對於空間諸點之一一變換,此變換使平面變成平面,故直線亦變成直線,而稱爲空間之直射變換或射影變換.此觀念當可推廣至於高維空間.

一維空間內之情形,亦同一重要.當變換式

$$(6)\quad \begin{cases} x'=a_1x+b_1t \\ t'=a_2x+b_2t \end{cases},$$

*讀者可指出方程式(4)確表一直線,卽各項係數,不盡爲零.德譯本註.

中行列式不爲零時,可得一種對於一直線上諸點之一一變換.吾人稱此爲是線上之投影變換,蓋在此時,直射變換一詞,殊嫌不當也.

一,二,三維空間中之投影變易式 (6), (1), (5) 等,亦可用非齊次坐標代齊次者,而表示之,但在大多數情形,此法不甚合用.若此則可得公式如下:

(7) $$X'=\frac{a_1X+b_1}{a_2X+b_2},$$

(8) $$\begin{cases} X'=\dfrac{a_1X+b_1Y+c_1}{a_3X+b_3Y+c_3}, \\ Y'=\dfrac{a_2X+b_2Y+c_2}{a_3X+b_3Y+c_3}, \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} X'=\dfrac{a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1}{a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4}, \\ Y'=\dfrac{a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2}{a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4}, \\ Z'=\dfrac{a_3X+b_3Y+c_3Z+d_3}{a_4X+b_4Y+c_4Z+d_4}. \end{cases}$$

但在特例,當分母化爲常數時,則此種分數式,亦甚便於用.此種特例,稱爲倣射變換 (affine transformation),其特徵可以一語表之,即一切有限處之點,變換後仍在有限處也.* 此種倣射變換,在力學上頗爲重要,即稱爲齊次形變 (homogeneous strain) 者是,讀者可參看 Webster 著 Dynamics (Leipzig, Teubner), pp. 427—444.

異變換之詳細討論,著者意欲留待讀者自行研究(見本

* 如取 (8), (9) 二式中分子中常數均爲零之更特殊情形論之,此時即爲原點在變換後仍爲原點之倣射變換,并可見 (8) 及 (9) 二公式各成 (6) 與 (1) 之形式.是以(6)式當以 x, t 表齊次坐標時,可視爲直線上普遍之射影變換,如以 x, t 表非齊坐標,則應視爲平面上之一種特殊倣射變換.同理 (1)式可視爲一平面上之普遍射影變換,或空間之特殊倣射變換.

節末之第1題),但於此亦述一相關之定理.

定理一. 如用一異變換,將$P_1, P_2, \cdots\cdots$等點化爲P_1', P_2',$\cdots\cdots$等點,則在一維空間內時,諸P'點相合爲一;在二維空間內時,諸P'點共在一直線上;在三維空間內時,諸P'點共在一平面上,餘可類推.

例如取二維空間者論之.因直射變換(1)中行列式爲零,故(1)中右端之式爲平直相關;換言之,即可得不盡爲零之三常數k_1, k_2, k_3,使不論x, y, t值如何,均有

$$k_1x' + k_2y' + k_3t' = 0. \tag{10}$$

是以由此變換所得之一切點(x', y', t')均在直線(10)之上.對於一維,三維或多維之情形,證法亦相似.

定理二. 一直線上之任意三相異點,均可用一射影變換,使之化爲此線上他任意三相異點,但此種變換,僅有其一.

設原取之三點爲P_1, P_2, P_3,其齊次坐標各爲(x_1, t_1),(x_2, t_2) (x_3, t_3),而所化成之點爲P_1', P_2', P_3',坐標爲(x_1', t_1'), (x_2', t_2'), (x_3', t_3').取射影變換.

$$x' = \alpha x + \beta t,$$

$$t' = \gamma x + \delta t.$$

設其化已知點(x, t),爲另一點(x', t'),後者之位置,視$\alpha, \beta, \gamma, \delta$,諸常數之值而定.如吾人可求得一組七常數,即$\alpha, \beta, \gamma, \delta$四數及均不爲零之$\rho_1, \rho_2, \rho_3$三數,使下列之六方程式

$$\begin{cases}\rho_1 x'_1=\alpha x+\beta t_1,\\ \rho_1 t'_1=\gamma x_1+\delta t_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_2 x'_2=\alpha x_2+\beta t_2,\\ \rho_2 t'_2=\gamma x_2+\delta t_2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_3 x'_3=\alpha x_3+\beta t_3,\\ \rho_3 t'_3=\gamma x_3+\delta t_3.\end{cases}$$

成立,且除可以遍乘之一常數外,僅能有一種之如此常數,則本定理爲已證明.

因諸 x 及 t 均爲已知,故得含七未知數之二個齊次平直方程式.故除零解外,必有他解,而解數多寡,則視係數所成方陣之秩而定.將諸式移項而加以整理,則得

$$\begin{array}{llllll}
x_1\alpha+t_1\beta & & -x'_1\rho_1 & & & =0,\\
 & x_1\gamma+t_1\delta & -t'_1\rho_1 & & & =0,\\
x_2\alpha+t_2\beta & & & -x'_2\rho_2 & & =0,\\
 & x_2\gamma+t_2\delta & & -t'_2\rho_2 & & =0,\\
x_3\alpha+t_3\beta & & & & -x'_3\rho_3 & =0,\\
 & x_3\gamma+t_3\delta & & & -t'_3\rho_3 & =0.
\end{array}$$

此等方程式之方陣之秩爲 6. 今取首六列而反其號之行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & t_1 & 0 & 0 & x'_1 & 0\\ x_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 & x'_2\\ 0 & 0 & x_1 & t_1 & t'_1 & 0\\ 0 & 0 & x_2 & t_2 & 0 & t'_2\\ x_3 & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3 & t_3 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

論之.因 P_1, P_2, P_3, 三點相異,故可得均不為零之二常數 c_1, c_2, 使

$$c_1x_1+c_2x_2+x_3=0,$$

$$c_1t_1+c_2t_2+t_3=0.$$

是以如將 c_1 乘第一行,將 c_2 乘第二行,而加諸第五行,更用 c_1 乘第三行,用 c_2 乘第四行,而加諸第六行,則得

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & t_1 & 0 & 0 & x'_1 & 0 \\ x_2 & t_2 & 0 & 0 & 0 & x'_2 \\ 0 & 0 & x_1 & t_1 & t'_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & t_2 & 0 & t'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1x'_1 & c_2x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1t'_1 & c_2t'_2 \end{vmatrix}=c_1c_2\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{vmatrix}^2\cdot\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ t'_1 & t'_2 \end{vmatrix},$$

因 P_1', P_2' 及 P_1, P_2 各為相異點,故此式不為零.

同法可見將方陣中截去第六列及第五列所得之二行列式,亦皆不為零.均按 §17 定理四,知諸方程式有一組解,其中 ρ_1, ρ_2, 及 ρ_3 均不為零,而一切解均與此組者成比例.凡此諸解,顯然直線上同一之投影變換.

推論 適所得之變換為非異者.

按定理一即可知之,因其不使 P_1, P_2, P_3 化為一點也.

習 題

1. 討論一,二,三,維空間中之異投影變換;特別注意變易式方陣之秩對於下列二事之影響:(一)變換後無相應點之諸點之分佈情形;(二)此變換所不能化成之諸點之分佈情形.

2. 有四點共在一平面上,其中無三點共在一直線上者,試證有而僅有一直射變換,使化成此平面上另四點,亦無三點共在一直線上.

3. 試證在n維空間中之相當定理,并證明之.

4. 用一非異平直變換,可由一組,齊次坐標系化爲他一組,試證明之.并論一,二,三維空間之情形.

5. 一空間之投影變換,在一切平面上,有二維投影變換之效用,在一切直線上,有一維投影變換之效用,且此平面及直線之位置,并不改變.

[提示. 取p與p'爲二相應平面,而在二者上,各取一對垂直坐標軸,并以(x_1, y_1, t_1)及(x'_1, y'_1, t'_1)各表據此坐標軸所得之二組坐標系.再用第4題之結果,證明一平面對他平面上之變換,得由以x_1, y_1, t_1表x'_1, y'_1, t'_1之齊次平直多項式示之.]

25. 方陣運算法續論 今請進論方陣之其他性質,但留若干則,置於節末之習題中,待讀者之自行研究.

由平直變換之理,即可示明方陣之數種性質.其第一事如下:

定理一. 方陣.

$$I=\left\|\begin{array}{cccc}1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1\end{array}\right\|$$

對於任何方陣a,有下列之特性:

$$\mathbf{I}\mathbf{a}=\mathbf{a}\mathbf{I}=\mathbf{a}.$$

因對於a爲方陣之平直變換,無論在其前或其後施以I爲方陣之么變換,結果均與原式無異也.

爲吾人不欲用平直變換之觀念,亦可實施乘法求Ia或aI,卽得直接證明本定理.

據此定理,可知I在方陣算法中之功用,與1在普通代數中者相同. I每稱爲么方陣(unit matrix)或不易因式(idem-factor)者,卽職是故.

今更取任何滿秩平直變換及其反式論之.此二式不拘用何種次序,相乘均得么變換.故得次之定理.

定理二. 如

$$\mathbf{a}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

爲一以a爲行列式之滿秩方陣,而A_{ij}表a中元素之餘因式,一如常法,則方陣

$$\left\|\begin{matrix} \frac{A_{11}}{a}\cdots\cdots\cdots\frac{A_{n1}}{a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{A_{1n}}{a}\cdots\cdots\cdots\frac{A_{nn}}{a} \end{matrix}\right\|$$

稱爲 $\mathbf{a}$ 之反式 (inverse),常記爲 $\mathbf{a}^{-1}$,此式亦爲一滿秩方陣,而有下之特性:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1}=\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}=\mathbf{I}.$$

此理示吾人以如何確定方陣正負整指數乘冪之意義之方法如下:

定義一. 如 p 爲任何正整數而 $\mathbf{a}$ 爲任何方陣,則 $\mathbf{a}^p$ 表示 p 個因式之連乘積 $\mathbf{a}\mathbf{a}\cdots\cdots\mathbf{a}$. 如 $\mathbf{a}$ 爲一滿秩方陣,則其負指數及零指數乘冪之意義,由公式

$$\mathbf{a}^{-p}=(\mathbf{a}^{-1})^p,\quad \mathbf{a}^0=\mathbf{I}$$

確定.

由此定義,卽可得

定理三. 指數定律

$$\mathbf{a}^p\mathbf{a}^q=\mathbf{a}^{p+q},\quad (\mathbf{a}^p)^q=\mathbf{a}^{pq}$$

當指數 p 及 q 爲正指數時,對於任何方陣皆合,當指數 p 及 q 爲任何指數時,對於任何滿秩方陣皆合.

至是可就二方陣相除之問題論之.以除爲乘之反,其理至順,但在此乘法非復可以對易,因是遂有二種除法;從一側以 $\mathbf{b}$ 除 $\mathbf{a}$, 可得一方陣 $\mathbf{x}$, 使

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}\mathbf{x},$$

從他側除之,則一方陣 $\mathbf{y}$, 使

$$\mathbf{a}=\mathbf{y}\mathbf{b}.$$

因有此種含混之故,除法一名詞,在此遂不常用.但下之定理,固顯然可見:

定理四. 如 a 爲任何方陣, b 爲任何滿秩方陣,則必有而僅有一方陣 x,合於方程式

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}\mathbf{x},$$

另有而亦僅有一方陣 y,合於方程式

$$\mathbf{a}=\mathbf{y}\mathbf{b},$$

而此二方陣各由公式

$$\mathbf{x}=\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a},\quad \mathbf{y}=\mathbf{a}\mathbf{b}^{-1}$$

定之.

有一種特殊方陣,頗爲重要,其形如下:

$$\left\|\begin{matrix} k & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & k \end{matrix}\right\|.$$

此種方陣稱爲倍么方陣 (scalar matrices),其故就下文可見.

如以 k 記適所書之倍么方陣,并設 a 爲與 k 同級之任何方陣,則易得下之公式

$$(1)\qquad \mathbf{k}\mathbf{a}=\mathbf{a}\mathbf{k}=k\mathbf{a}.$$

如於倍么方陣 $\mathbf{k}$ 外,更取一倍么方陣 $\mathbf{l}$, 即其中主對角線內諸元素盡為 l 者,又可得二公式如次

$$\mathbf{k}+\mathbf{l}=\mathbf{l}+\mathbf{k}=(k+l)\mathbf{I}, \tag{2}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{l}=\mathbf{l}\mathbf{k}=kl\mathbf{I}. \tag{3}$$

由公式(1)可知倍么方陣與他方陣相乘時,得以普通計值量代之;(2)與(3)二式則表示倍么方陣之結合,不特能合於普通計值量之算律,且在此種情形中,更得以其主對角線中之計值量代此等方陣,但運算既畢,結果所得之計值量,須仍換為相當之倍么方陣.

因此種理由,故在方陣算法中,一切倍么方陣,均得以相當之計值量代之,而視算法中所有之諸計值量,為其相當倍么方陣之代表.依此法時,么方陣 $\mathbf{I}$ 可以符號 $\mathbf{1}$ 代之.

定義二. 一方陣 $\mathbf{a}$ 之附屬(adjoint)方陣 $\mathbf{A}$ 者,乃指另一同級之方陣,其中第 i 行第 j 列處之元素為 $\mathbf{a}$ 中第 j 行第 i 列元素之餘因式.*

當 $\mathbf{a}$ 為滿秩時,易知

$$\mathbf{A}=a\mathbf{a}^{-1}, \tag{4}$$

但須注意雖一切方陣,均各有一附屬式,然僅有滿秩方陣方能有逆式.

方程式(4)又可書如下形

---

*在附屬行列式時,行列之對易,既非必要,亦甚不便,在此則不可省,是宜注意.

(5) $$\mathbf{Aa}=\mathbf{aA}=\alpha\mathrm{I},$$

此式不僅於 a 爲滿秩方陣時爲眞,卽當 a 之行列式爲零時,亦得成立,試由直接乘法,卽可知之.

最後乃至數重要定理,論二已知方陣相乘所成積之秩.第一事須注意此乘積之秩,不能由其因式之秩完全定出.此理可由甚多之題中見之.例如在 §22 之公式(5)中,其因式之秩,在一般情形下爲二與一,而其積之秩爲零,但在下式中,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & 0 & a_{32} \end{Vmatrix}$$

其因式之秩,在一般情形下,與上述之例相同,卽爲二與一,但其積之秩則爲一.

如此例所示,諸因式之秩,(甚且合諸方陣之級計之),不足以定其積之秩;但此等秩之間,尙有數重要不等式之關係,今且論其一則.

欲究此理,可取

$$\mathbf{a}=\begin{Vmatrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{Vmatrix} b_{11}\cdots\cdots\cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\cdots\cdots\cdots b_{nn} \end{Vmatrix}$$

二方陣及其積ab論之.

定理五. 乘方陣ab中之任何k行行列式,等於b中之若干k行行列式,各以含諸a之一多項式,然後相加,又可等於a中之若干k行行列式,各乘以含諸b之一多項式,然後相加.

因方陣ab中任何k行行列式,均可以一法分為諸k行行列式之和,使每行列式各行,均含有諸b之一,爲公共因子.*在各行列式中,取出此等公共因子後,所餘卽爲一諸a之行列式,苟其不恆等於零,則必爲a中之k行行列式,就他一方面觀之,亦可另以一法,分ab中任何k行行列式.爲若干k行行列式,使每行列式中各行,均含有諸a之一,爲公共因子.自各行列式中,取出此等公共因子後,所餘卽爲一諸b之行列式,苟其不恆等於零,則爲b中之一k行行列式.

按適所證之定理,顯見如a或b中之一切k行行列式均爲零,則ab中之k行行列式,亦復如是.故有

定理六. 二方陣乘積之積,不能高於任何因式中者.†

在一種重要情形中,卽當a或b二方陣,有一爲滿秩者之時,藉此定理,可完全確定乘積之秩.首設a爲滿秩者,而以r及R各表b及ab之秩,按定理六,知$R \leqq r$.但吾人亦可視

---

*讀者可實行書出方陣ab,卽可見此語及下文之成立.

†故如r_1及r_2爲二因式之秩,而R爲其乘積之秩,則有$R \leqq r_1$,$R \leqq r_2$此爲西薇斯德"秩欠定律(Sylvester's Law of nullity)"之一部份,其他一部份,可以$R \geqq r_1+r_2-n$一式表之,式中n爲諸方陣之級;此理見本節末第8題.西氏稱一方陣中級與秩之差,爲其秩欠,其述秩欠定律如下:二方陣乘積之秩欠至小亦應與各因式者相等,至大不得過於二因式者之和.

b 爲 $\mathbf{a}^{-1}$ 與 **ab** 之積,再應用定理六,則得 $r \leqq R$. 合此二結果,可斷 $r=R$.

在他一方面,如 **b** 爲滿秩者,可以 r 及 R 各表 **a** 及 **ab** 之秩,按定理六得 $R \leqq r$; 再將此定理施之於

$$(\mathbf{ab})\mathbf{b}^{-1}=\mathbf{a}$$

一式,又有 $r \leqq R$. 是以仍得 $r=R$.

吾人遂得下之結論:

定理七. 如一 r 秩之方陣,自任一側以一滿秩方陣乘之,則其乘積之秩亦爲 r.

習題

1. 試證二同級方陣 **a** 與 **b** 爲相合之充要條件,乃可得二滿秩方陣 **c** 與 **d**, 使

$$\mathbf{dac}=\mathbf{b}.$$

可參較 § 22 後第 2 題及 § 19 後第 4 題.

2. 試證二同級方陣 **a** 與 **b** 爲相合之充要條件,乃可得 **c**, **d**, **e**, **f** 四方陣,使

$$\mathbf{dac}=\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}=\mathbf{fbe}.$$

3. 試證凡 r 秩之方陣,均可書爲 r 個一秩方陣之和.*

* 季布茲 (Gibbs) 稱一秩方陣爲一疊數 (dyad), 因其 (參看 § 19 後第 5 題) 可視爲 $(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ 及 $(b_1, b_2, \cdots\cdots b_n)$ 二複素數之積也.若干疊數之和,則稱爲疊多項式 (dyadic polynomial) 或簡稱爲疊式(dyadic)是以一切方陣均爲一疊數.反之亦然. $n=3$ 時之季布茲氏理論.見 (Gibbs-Wilson) 二氏所著 Vector Analysis 第五章中.其中專用幾何之解釋.構成疊數之複素量 (a_1, a_2, a_3) 及 (b_1, b_2, b_3), 視之爲三維空間中之矢量.此種理論,與哈密爾敦 (Hamilton) 在四維數 (Quaternions) 中之平直矢量函數理論相當.

〔提示.　注意§19後第3題中之特殊方陣,能依如此方法書出.〕

4　試證一方陣爲零之除式之充要條件(參看§22後第1題),乃此方陣爲降秩.

〔提示.　可取等性方陣論之.〕

5.　試證注意若干方陣乘積之逆式,乃此等方陣逆式,依相反次序乘得之積.

由是試推出一相關之定理,以論任意若干方陣乘積之附屬式,此等方陣可爲降秩,亦可爲滿秩,

對於行列式上,□推得何種定理?

□　試證一滿秩方陣反式之共軛式,乃其共軛式之反式;任何方陣附屬式之共軛式,乃其共軛式之附屬式.

7.　如一方陣如任何方陣相乘時,均有對易性,則必爲一倍方陣,試證明之.

8.　如 r_1 r_2 各爲二 n 級方陣之秩,R爲其積之秩,試證

$$R \geqq r_1 + r_2 - n^*$$

〔提示.　先設相乘二方陣之一,呈§19後第3題中之形式,更用§8後第1題,以證明此定理.次乃用本節第1題以化歸通例.〕

26.　組(Sets)系(Systems)及羣(Groups)　此三名詞乃算學各科中所必遇及數觀念之專門術語.第一二兩詞,涵義甚廣,可視爲建立一切算學之邏輯基礎.*在本節中將略釋此三種觀念之意義,而示其對本章所論之特題,有何應用之處.

算學中所論之對象——吾人用對象(object)一詞,從其最

---

* 可參看定理六下附註.

** 著者於1904年在 St. Lious Congress of arts and science 演講 The Fundamental Conceptions and methods of mathematics,即係以通俗之敍述,論此間所牽涉之觀點.該演講詞,曾重刊入 Bull Amer. Soc., 1904 年十二月份中.

廣義——其變化之類種甚多.在一方面,吾人已論及一部份之較重要者,例如自正整數至於複素量與方陣間一切排列之各種量.次乃就幾何中,不特述及點,線,曲線,曲面,并曾討論移位(displacement)〔如轉移(rotation)及平移(translation)等〕,直射變換等事,實則一般之幾何變形也.次則在算學各部份中,曾論及代換之理(Theory of substitutions,)即研究某等對象各種次序上變易之原則,此種代換本身亦成爲算學研究之對象.終則力學中力,偶力,速度等對象,亦嘗言及.

此等對象,以及其他之能供算學上搜討者,出現於吾人之前時,每每倂合成組,而非孤立.此等對象所成之組〔有時亦稱爲類(Class)〕中所含對象或元素(elements)之數,或爲有限或爲無限.今舉數例:

(一) 一切質數.

(二) 與空間二已知直線相遇之一切直線.

(三) 一已知立方體之一切對稱軸面.

(四) 施於五文字上之一切代換.

(五) 將一平面,依其上垂線所作之一切旋轉.

既略明組之廣義觀念,次宜注意在若干算學問題中,論及一組對象時,常需藉一規則或數規則,使組中各對元素得以合倂成他對象,此對象或仍屬於原組中,或不屬於斯,則視所處之情形而定.此種倂合規則之例如下:普通代數學及方陣算法中之加法及乘法,幾何中藉二點以定一線之法;使二

次移位合成一次移位之法等.

如此之一組及其關聯之結合法，可稱爲一算學之系(mathematical system)，或簡稱爲一系*.

至是請論一種重要系,其名曰羣(group),羣之定義如下:

定義. 有一系含一組元素及一種併合法則,記之爲 $\circ$ 者,如能適合下之條件,則稱爲一羣:

(1) 如 a 與 b 爲組中二元素,或相同,或相異,則 $a \circ b$ 亦爲此組中一元素.†

(2) 能適於締合律,卽當 a, b, c 爲此組中任意三元素時,均有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(3) 此組中含一元素 i,稱爲么元素 (identical element) 與任何元素合併,均不使後者改變,卽

$$i \circ a = a \circ i = a.$$

(4) 取任何元素 a, 則組中必含另一元素 a',稱爲 a 之逆

---

*此定義之所涵,已足供此後之用.但在一般情形,除併合之規則外,每更需有各種關係 (relations),介乎系中各元素之間.甚且僅需有一或數種關係,而不必有併合規則.自此觀點論之,有正整數　大於小於之關係,卽可合成一系;而不必有任何結合規則,如加法乘法等事.更有可注意者,卽結合規則,亦可視爲三對象間之一種關係;關於此點,可參看上文所引之演講.

† 適於條件(1)之一組,有時稱爲有"羣性(the group property)."較舊書籍之論此理者,僅揭出此一條件,其餘則僅暗設,而不明言.

元素(inverse elment)使

$$a'\circ a=a\circ a'=i.$$

例如正負數及零,以加法為併合規則時,成為一羣.其中以零為么元素,任何元素之逆,卽其負數.此等元素,如以乘法為併合規則,幷不成羣,因(1),(2),(3)諸條件雖能適合(此時之么元素為1),而條件則否,因零無逆數也.

又以加法為合併法則時,則一切實數所成之組為一羣,但依乘法合併則否,因在此例中,零無逆數也.苟除去組中之零,而以乘法為合併法則,亦成一羣,但依加法併合時則否.

今舉一只含有限個元素之羣之例,卽

$$+1,\ -1,\ +\sqrt{-1},-\sqrt{-1},$$

四數,依乘法合併之.

如欲幾何中求羣之例,可視平面為一剛體,而依其上直線之方向,以作平移.每一平移,均可藉在是平面中一矢之長短及方向二者以表明之.繼續作如此之二平移時,顯見與一同類之平移相當,而可按力之平行四邊形定律,合併二已知矢所成之矢表之.若是之一切平移,為適所述者,如加入么平移(null translation),卽使此平面上切點均不變者,則易見其成為一羣.此么平移卽么元素,二平移之長短相等而方向相反者互為逆式.

以上所論之羣.不僅能合於定義中之四條件,更能滿足於一第五條件,卽其中合併律為可對易者.此種羣稱為對易

(commutative) 羣或亞伯羣(abelian group).但在一般情形中.一羣未必有此特性.例如一切定級之滿秩方陣.依乘法結合時所成之羣,卽非亞伯羣之一例;一切定級方陣,其行列式之值爲± 1者,仍依乘法結合時,所成之羣,爲又一例.後者稱爲前者之子羣(subgroup),因其中元素,皆在前者之內,且二者中所用之合併規則,亦復相同也.後者更有一子羣,卽一切定級方陣,其行列式之值爲 $+1$ 者.* 而依乘法合併之.

吾人應更申明,以平直變換式直射變換,亦易構成非亞伯羣.自他一方面言之,如以加法代乘法爲合併律,則亦可用方陣構成一亞伯羣.

27. 同形性 (**Isomorphism**).

定義. 設於第一羣中取任意二元素 a 及 b, 第二羣之對應元素爲 a' 及 b', 則 $a' \circ b'$ 與 $a \circ b$ 對應,如於二羣之元素間,能建立若此之一與一對應關係,則二者稱爲同形(isomorphic).†

今舉數例,以釋明此定義,其間陳述之證明,則留待讀者

---

*此種方陣名曰單餘方陣 (unimodular matrices);如欲更精確,則可稱爲正單餘方陣 (properly unimodular matrices),以別於行列式值爲 -1 之負單餘方陣 (improperly unimodular matrices.) 於此應注意後者本身不成一羣,甚且未有羣性.

†其更完備之名詞爲單同形(simply isomorphic), 但本書僅論此種.

†此種同形之觀念,顯見能推於任何二系,只須其間合併規則之條數相同可矣.例如一切倍么方陣與一切計值量所成二系,而以加法乘法二者爲合併規則卽爲同形.因是故倍么方陣與計值量二者間,不必加以區別.

自行補充.在各例內,如不致發生誤解時,變換中之合併律,每略去之,不復提出.

第一例. (a) 四元素爲

$$1,\quad \sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},$$

按乘法爲合併律所成之羣.

(b) 依一直線作 $0°, 90°, 180°, 270°$ 之四旋轉所成之羣.

將二羣中元素,依上所書之次序相配,則可證明其爲同形.

第二例. (a) 含下列四方陣.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

依乘法合併所成之律.

(b) 下列四變換所成之羣,么變換.一平面中之反射 (reflection), 在與第一平面直交之他一平面中之反射;依此平面交線,作 $180°$ 之旋轉.

(c) 過一點而互相垂直之三直線,依之各作 $180°$ 之旋轉,以及么變換所成之羣.

第一例中之二羣,雖與第二例中之三羣,所含元素之數雖等,但并不爲同形.因第一例之羣中,有平方不爲么元素之二元素,故甚易明.

第三例. (a) 一切實量所成之羣,以加法爲合併律.

(b) 一切 k 級含實元素之倍么方陣所成之羣,以加法爲

合併律.

(c) 空間內與一行直線平定之一切平移所成之羣.

第四例, (a) n 級之一切滿秩方陣所成之羣,以乘法爲合併律.

(b) 含 n 元之一切非異齊次平直變換所成之羣.

吾人或將以 $n-1$ 維空間內之一切非異直射變換所成羣,爲一羣幾何變換之與上述末二羣同形者.實則不然,因直射變換與平直變換間之關係,如前所定者,非一與一之對應也;每一平直變換,皆有一直射變換與之相當,但每一直射變換,則有無數平直變換與之相當,只須平直變換中相當係數盡成比例足矣.* 如欲得一與諸 n 級滿秩方陣所成羣同形之幾何變換羣,只須視 $x_1\cdots\cdots x_n$ 諸變數爲 n 維空間內之非齊次坐標,而論對諸 x 之非異齊次平直變換所生之幾何變換.此等變換,爲 n 維空間內之倣射變換,使原點不變者,關於此點,可參考 §24 中之第二註.是以一切 n 級滿秩方陣與 n 維空間內直射變換羣之某一子羣同形,但對於 $n-1$ 維空間內一切非異直射變換所成羣則否.

此二羣尙有主要區別,其一有賴於 n^2 個參變數(即此平

* 此事幷不足證明二羣不同形,因當可設想二者元素間有他種之一與一對應關係,且由此可建立二者之同形性.即下文旋將指出二羣所賴之參變數個數不同之事.亦不足解決此問題.於此應參考 §25 後第 7 題中結果,即可示明此二羣非同形,因據此可知非異直射變換中僅有么換變,能與一切直射變換對易,而一切有倍么方陣之平直變換,則皆有此特性也.

直變換之n^2個係數)而其他則僅賴n^2-1個參變數.

然吾人亦可自一稍異之眼光,以論此事,而得一方陣之羣,與$n-1$維空間中一切非異直射變換同形.爲求達此鵠的計,設一方陣中之各元素,得由以一相同而不爲零之量,乘他一方陣之各元素而成,則稱此二方陣爲相等.當採此新觀點論方陣時,宜用一種新術語及記法.今從芝加哥之穆爾(E. H. Moore)先生之建議,稱之爲分式方陣(fractional matrices)而書爲

$$\left\|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right\|, \text{等式.}$$

設分式方陣之加法與乘法規則,與普通方陣者相同,吾人卽可謂$n-1$維空間內之一切非異直射變換所成之羣與一切n級分式方陣之行列式不爲零者*所成之羣同形.

今再取一例,卽第二例中之諸羣,與以

$$\left\|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right\|,$$

---

*吾人應注意苟非此行列式之値爲零,則分式方陣之行列式殆無値可言,因如以c遍乘此種方陣之各元素,其式不變,而其行列式已被c^n相乘矣.故在特例,單餘分式方陣(unimodular fractional matrix)爲不可能之事.然一分式方陣,仍有秩可言.

四分式方程爲元素,以乘法爲合併律,所成之羣同形.此四元素,如視爲普通方陣,則尙不能適合羣之第一條件.

讀者如欲進窺平直變換羣之理論,應取下三書研究之,不特能引起興趣,亦定能獲益,此三書中,彼此相重複之處極少.

Weber, Algebra, Vol. II.

Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder

Lie-Scheffers, Vorlesungen über continuirliche Gruppen.

習　題

1. 定義. 如一羣含n元素而僅含n個,則稱其級(order)爲n.

如一n級之羣有一子羣,試證後者之級必爲n之一因子.

[提示. 以$a_1,\cdots\cdots a_k$記子羣中之元素,而以b記羣中任意他一元素.試證$ba_1, a_2,\cdots\cdots ba_k$必爲羣中之元素,彼此相異,且與諸$a$亦相異.如除此等元素外,尙有其他元素,設其一爲$c$,而論$ca_1,\cdots\cdots ca_k$諸元素,如是類推.]

2. 試證如a爲一有限羣(group of finite order)中任何元素,則將a自乘至若干次,必可得么元素.

定義. a之最小乘冪,能使之爲么元素者,稱爲該元素之次數(period).

3. 試證一n次羣中諸元素之次數,必爲n之因子(自1至n均在內).

4. 定義. 如一羣中各元素,均爲一元素之各次乘冪,則稱爲循環羣(Cyclic group).

試證一切n級循環羣,均與依一軸旋轉過$0, \omega, 2\omega\cdots\cdots(n-1)\omega$諸角之羣同形,式中$\omega=2\pi/n$,反之一切如此之旋轉羣,均爲一循環羣.

5. 試證任何級爲質數之羣必爲一循環羣.

6. 試證一切4級之羣,或為循環羣,或與上述第二例中諸羣同形.後者稱為四元非循環羣 [fours group (Vierergruppe)].

7. 試求諸羣,使一切6級羣,必與其一或其他同形.

8. 試求諸羣,使一切8級羣,必與其一或其他同形.

第七章

不變式　初步原理及例

28. 絕對不變式,幾何代數及算術不變式　當一幾何圖形經過一變換後,即可發現其諸性質之中消失者有之,未嘗更變者亦有之.今如此諸性質不特不為單獨一變換所改易,雖一組變換中任一變換亦不能改易之,則對該組變換而言,此諸性質即謂為不變之性質.若該組變換為一羣移位,則兩直線之平行與垂直及一曲線之為圓諸性質,將均為不變者,蓋在移位後平行仍為平行,垂直仍為垂直,曲線之為圓者亦未嘗有所更變也.至若此組變換為一羣之非異變換,則上所述者均將不復為不變矣.性質之對非異直射變換而為不變者,於幾何學之進展中,佔極重要之位置,故與以專名,即所謂投影(projective)或敍述(descriptive)性質是也.例如點之共線共面,線之共面共點等,以及直線與曲線或曲面之相切,二曲線或二曲面,及一曲線與一曲面之相切等性質皆是.

定義一　若一幾何圖形中之相關度量,不為某組變換中一切變換所更易,則對此組變換而言,該量即謂為不變式

(invariant).

例如兩點間之距離及兩線間之角度,對一羣移位而言,均為不變式.

由上所述之幾何不變式,自可引入代數不變式.取二多項式

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1, \\ A_2x+B_2y+C_2, \end{cases}$$

對其中之x, y施以下列一組之變換

$$(2)\qquad \begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta+\alpha, \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta+\beta. \end{cases}$$

式中α,β及θ均為參變量,而可有任何值.則變換(2)將使(1)變為二新多項式

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1'x'+B_1'y'+C_1', \\ A_2'x'+B_2'y'+C_2'. \end{cases}$$

(3)式中之係數,當可以(1)式中之係數及參變量α,β,θ表之,而吾人可得關係式

$$(4)\qquad \begin{cases} A_1'B_2'-A_2'B_1'=A_1B_2-A_2B_1, \\ A_1'A_2'+B_1'B_2'=A_1A_2+B_1B_2. \end{cases}$$

故按下列之定義,吾人將謂二代數式

$$(5)\qquad A_1B_2-A_2B_1,\quad A_1A_2+B_1B_2$$

乃多項式(1)對於變換(2)之不變式.

定義二. 於一組多項式中,若對其中變數$(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$

施以某組變換中一切變換.而係數之某一函數竟不更易,則該函數稱爲對該組變換之不變式(其較確定之名詞應爲絕對不變式(absolute invariant).

(x, y) 既爲平面上一點之坐標,則可視變換(2)所代表者當爲該平面上之一羣移位.如此則上例對幾何不變式之關係,更覺顯然.今不論(1)中二多項式本身,而取其爲零時所表之二直線,則上所述者,爲二直線之移位,(5)式本身雖無幾何意義,如使之爲零,則表此二直線平行及垂直之充要條件.此爲對於移位不變性質,於上已言之矣.復次吾人可注意(5)式中二變式之比,乃此二直線交角之正切,亦一幾何不變式也.

今再舉一例,不論二直線,而論一直線及一點,就代數方面言之,即自含一多項式及一對變數之系

$$(6)\qquad \begin{cases} Ax+By+C, \\ (x_1, y_1) \end{cases}$$

着手.於此吾人須假設當 (x, y) 受某一變換時,變數 (x_1, y_1) 亦然.如按下列定義三言之,此 (x_1, y) 及 (x_1, y_1) 稱爲同步變數(cogredient variables).今若對系(6)施以變換羣(2)中任一變換則可得一新系

$$(7)\qquad \begin{cases} A'x'+B'y'+C', \\ (x'_1, y'_1,), \end{cases}$$

而易知有

$$A'x'_1+B'y'_1+C'=Ax_1+By_1+C.$$

按下列之定義四吾人插 $Ax+By_1+C$ 乃系(6)之同步不變式(covariant).此種同步不變式,仍無直接之幾何意義,但若令其爲零,則得點 (x_1, y_1) 在直線 $Ax+By+C=0$ 上之充要條件,顯爲一種不變之性質.

由此例吾人可立下列之普遍定義:

定義三. 今有數組變數

$$(x, y, z,\cdots\cdots), (x_1, y_1, z_1\cdots\cdots), (x_2, y_2, z_2,\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

若某中一組受某一變換時,其他各組亦受此同一之變換,則此數組變數,謂之爲數組同步變數.

定義四. 若一系中含有變數 $(x, y, z\cdots\cdots)$ 之若干多項式及變數 $(x, y, z\cdots\cdots)$ 之若干組同步變數,當變數 $(x, y, z\cdots\cdots)$ 受一組變換中之任一變換時,此多項式之係數及同步變數所組成之某一函數,恆不更易,則對此組變換而言,該函數稱爲此系之同步不變式[或絕對同步不變式(absolute covariant)].

此後更將闡明不變式僅同步不變式之特例.

於幾何不變式中因本身性質關係必爲整數者,吾人稱爲算術不變式(arithemetical invariants). 如多角形頂點之個數,則無論其對一羣移位或一羣非異直射而論,均爲一算術不變式.他如一代數曲線與一直線之實交點之最多個數,對一羣之非異實直射變換(real non-singular collineation)而言

亦然.

在代數中算術不變式,亦佔甚重要之位置,此後即可見之,例如 n 元式之次數,若對所有之非異線性變換而言,即為一例.*

習 題

1 試證 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, 及 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

若對變換 (2) 而言,乃為

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2,), \quad (x_3, y_3)$$

一系之同步不變式

2. 試證 $A+C$ 及 B^2-AC

若對變換 (2) 而言,乃多項式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

之不變式,上之不變式能與以何種之幾何意義?

3. 試證 A^2+B^2 對變換 (2) 而言,乃為多項式

$$Ax+By+C$$

之一不變式.

由是說明 $$\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

乃系 (6) 之同步不變式,並解演其幾何意義.

---

*實則對於一切平直變換論,此式均為一不變式,但此變換之諸係數不得均為零.

29. 相合(Equivalence).

定義一. 設 A 及 B 爲二幾何巧合形(configuration)或二代數式,或二組代數式.若於某一組變換中有一變換能換 A 爲 B,復有一變換能換 B 爲 A,則對此組變換而言,A 與 B 稱爲相合,且僅當合此條件時,始得稱爲相合.

由是可知對一切移位而言,幾何圖形相合之概念,當與歐氏幾何中二圖形相等或相合之概念同,此理即本定義之一例.

復次,吾人由 §24 之定理二,即可知對一切非異投影變換而言,則在同一直線上二組之三點當爲相合者.

上述二例中,組中之變換,適成一羣.如是則相合之條件大爲化簡,蓋俟 A 爲 B 之變換,當有一逆變換,亦屬於此組中,而此逆變換,可使 B 爲 A.故得定理如下:

定理. A 與 B 對於某一羣變換能相合之充要條件,爲在此羣中有使 A 爲 B 之一變換.

此定理極關重要,因吾人所遇之相合問題中,變換組均成爲一羣也.

爲意義確定計,吾人試取幾何變換羣研究之.若二幾何巧合形對此羣而爲相合,則其一者之一切不變式,必與他者之相當不變式相等.例如二三角形對移位羣能相合,則其一者之諸邊,諸角,必與他者之相當邊及相當角各等.他若高,中

線等之長度與夫內切圓之半徑等量,亦皆爲不變式.幾何學中之一主要問題,卽求在三角形之諸不變式中,選出最少數之一部份,使此部份苟相等,卽可決定二三角形之相合.例如二邊及其夾角,二角及其夾邊,或三邊,卽其例也.此三種不變式中任取其一,均可稱爲此三角形對移位羣之不變式全系(complete system of invariants),蓋若二三角形中此等不變式相等,則其他之一切不變式亦將全等也.於玆所述之概念,可更作一普遍之定義如下:

定義二. 二幾何巧合形或二代數式,如當共有某組不變式時卽成相合,則此組之不變式成爲一不變式全系.*

由此定義,可知一幾何巧合形或代數式之所有不變式,恆爲其不變式全系所單純確定.

最後吾人試縱觀不變式及相合諸概念,在方陣上之致用.設吾人所研究之方陣乃n次者,† 至所論之變換則爲能化$\mathbf{A}$爲$\mathbf{B}$者如下形:

$$(1) \qquad a\mathbf{A}\mathrm{b}=\mathbf{B},$$

式中a及b乃爲任何n級滿秩方陣.今以符號(a, b)表此變換,

---

*於代數不變式之專門理論中,此名詞之意義稍異.範圍亦較狹.在此理論中應述及整有理之相對不變式(參看§31)其中所謂一組代數方式之不變式全系者,乃該組代數式中其他一切不變式,均可以此全系中諸不變式之整有理函數表出之意.欲知其詳,可參看 Clebsch 所著之 Binäre Formen P. 109.

†吾人如欲假定此方陣爲僅含有實元素者,亦未嘗不可.

則易知此諸符號可爲下之關係式所連合:

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = (\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2).$$

由此關係式,即可知此諸變換成爲一羣.

自相合之普遍定義言,所謂 A, B 二方陣之相合,必於而僅於適合 (1) 之二滿秩方陣 a, b 能存在時方可. 試參看 §25 後題 1, 即可知玆所述相合之定義與前所論者實同爲一事.

30. 一組點或一組一次方式之秩爲不變量.

若(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), (x_3, y_3, z_3, t_3)爲一共線之三相異點,則方陣

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{matrix}\right\|$$

之秩爲 2. 今將空間作一非異直射變換,則可得另一三相異點,仍爲共線者,故其方陣之秩應仍爲 2. 由此可知一組點之秩,不因非異直射變換而改易.

復次,設

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t &= 0. \end{aligned}$$

乃爲共過一點而僅一點相共之四平面,則其方陣之秩爲 3. 經一非異直射變換後,所得之四平面,仍共過一點而僅有一

點相共,故其係數方陣之秩仍爲3,故一組平面之秩對此種變換亦爲不變.今更將上理推廣之.

定理一. m 點

$$(x_1,^{[i]} x_2,^{[i]} x_3,^{[i]} \cdots\cdots x_n{}^{[i]}) \qquad (i=1, 2, 3, \cdots\cdots m)$$

所成方陣之秩,對非異平直變換爲不變式.

設非異平直變換:

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 = c_{11}\, x_1 + \cdots\cdots + c_{1n}\, x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n = c_{n1}\, x_1 + \cdots\cdots + c_{nn} x_n. \end{cases}$$

將 $(x_1,^{[i]} x_2,^{[i]} \cdots\cdots x_n{}^{[i]})$ 諸點變爲 $(X_1,^{[i]} X_2,^{[i]} \cdots\cdots X_n{}^{[i]})$ 諸點.今若 $(x_1,^{[i]} x_2,^{[i]} \cdots\cdots x_n{}^{[i]})$ 諸點中有 k 點爲平直相關者;爲便利計,卽取此 k 點爲首列之 k 點.則可得不盡爲零之 k 個常數 $(c_1, c_2, \cdots\cdots c_k)$ 使關係式.

$$(2) \qquad c_1 x_j' + c_2 x_j'' + \cdots\cdots + c_k x_j^{[k]} = 0, \quad (j=1,2\cdots\cdots n)$$

成立.

又由變換(1)得

$$X_j^{[i]} = c_{j1} x_1{}^{[i]} + \cdots\cdots + c_{jn} x_n{}^{[i]},$$

故 $$c_1 X_j' + c_2 X_j'' + \cdots\cdots + c_k X_j^{[k]} = c_{j1}(c_1 x'_1 + c_2 x_1'' + \cdots\cdots + c_k x_1{}^{[k]})$$
$$+ \cdots\cdots + c_{jn}(c_1 x'_n + c_2 x_n'' + \cdots\cdots + c_k x_n^{[k]}) \quad (j=1, 2, \cdots\cdots n).$$

由(2)式可知上式爲零,因而 $(X_1,^{[i]} X_2,^{[i]} \cdots\cdots X_n{}^{[i]})$ 中之首列 k 點,亦爲平直相關者.今(1)旣爲非異平直變換,則原始一組點

之取定當可任意爲之,是以吾人知若此組中有 k 點爲平直相關者,則他組中之相當點亦然.

今若 x 之方陣之秩爲 r, 則爲 x 所表之 m 點中至少有一組 r 點爲平直相關者,而含有 $r+1$ 點之各組,則均爲平直無關.是以於 X 所表之點中亦然,故其方陣之秩亦必爲 r.

定理二. m 一次方式,

$$f_i(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots\cdots+a_{in}x_n$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots m)$$

之方陣之秩對於非異平直變換爲不變式.

此定理之證明與定理一極相似,讀者可自爲之.

在此須注意適所論之諸不變式均爲算術之不變式之例.

31. 相對不變式及同步不變式 吾人將先就含有 n 元之 n 個一元方式

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

研究之.

定義一. 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

謂之爲系(1)之消元式(resultant).

今對系(1)施以平直變換.

$$(2)\qquad\begin{cases} x_1=c_{11}x'_1+\cdots\cdots+c_{1n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}x'_1+\cdots\cdots+c_{nn}x'_n. \end{cases}$$

則可得另一方式系

$$(3)\qquad\begin{cases} a'_{11}x'_1+\cdots\cdots+a'_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n1}x_1'+\cdots\cdots+a'_{nn}x'_n, \end{cases}$$

而
$$a'_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}c_{nj}.$$

由此公式及行列式乘法之理,吾人卽可推得

$$(4)\qquad\begin{Vmatrix} a'_{11}\cdots\cdots a'_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n1}\cdots\cdots a'_{nn} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} c_{11}\cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\cdots\cdots c_{nn} \end{Vmatrix}.$$

此結果可述之如下:

定理一. 對一含有 n 變數之 n 個一次方式系,施以平直變換,若系之方陣爲 **a**,變換之方陣爲 **c**,則變換後所得之系之方程必爲 **ac**.*

今取(4)式兩端之行列式觀之,卽可知(1)式之消元式並

*由定理一及定義二,可知平直變換必須呈(2)之形式,且 x 能以 x' 表之,其逆不眞.德譯本註.

非絕對不變式,然其因平直變換而改易之情形亦甚簡單,申言之,卽僅乘以此變換之行列式耳.由此卽可引得下之定義:

定義二. 設一方式或一系方式經過非異平直變換後,其係數之某一有理函數*僅被變換之行列式μ次(μ爲整數†)所乘,則該函數爲此方式或此一系方平之μ權(weight μ)相對不變式.‡此等方式則名之曰底方式(ground forms).

於此可知絕對不變式卽權爲零之相對不變式.

由上述之事實,吾人可將適所論消元式之理改行,申述如下:

定理二. 凡一組含n元之n平直方式,其消元式爲1權之相對不變式.

今再就相對同步不變式論之:

定義三. 設一系中含有若干n元方式及$(y_1,\cdots\cdots y_n)$,$(z_1\cdots\cdots z_n)$,$\cdots\cdots$諸點,而此等坐標均爲方式中$(x_1\cdots\cdots x_n)$諸元之同步變數,若令$(x_1\cdots\cdots x_n)$諸元經非異平直變換後,其同步變數及方式係數所組成之某一有理函數,僅被變換行列式μ

---

*除此等有理不變式外,吾人尙須研究所謂無理不變式者(參看§90),卽式中指數μ之値不必爲有理數者.

†μ爲整數之條件,可不必列入假設中,蓋因其可以證明也,μ之不能爲分數,其證明甚簡易.至若欲證其不爲無理數及虛數,則將出於代數範圍之外矣.

‡此由定義,可知若對行列式爲$+1$之平直變換羣而言,則相對之不變式,將不復與絕對不變式有別,參看§81題7.

次冪*(μ為整數)所乘,則該函數稱曰此組方式及點之μ權相對不變式.†

吾人可視不變式爲同步不變式之極端情形,卽系中點之數爲零之時也.他一極端情形,則爲系中無式,故可得下列之定理.

定理三 行列式

$$\begin{vmatrix} x'_1 \cdots\cdots\cdots x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{[n]} \cdots x_n^{[n]} \end{vmatrix}$$

乃爲$(x'_1\cdots\cdots x'_n)\,(x''_1\cdots\cdots x''_n),\cdots\cdots(x_1^{[n]}\cdots\cdots x_n^{[n]})$諸點所成系之$-1$權相對同步不變式.

蓋若施以變換

$$x_1 = c_{11}X_1 + \cdots\cdots + c_{1n}X_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = c_{n1}X_1 + \cdots\cdots + c_{nn}X_n,$$

可得

*參看定理一之附註,德譯本註.

†於多數討論同步不變式之書中,常用同一文字$(x_1\cdots\cdots x_n)$表一點之坐標及方式中之元,此法固無害,且有時更覺便利,顧吾人終願用一符號能明示方式之元,與點之坐標,除此并無他種關係.

$$\begin{vmatrix} x'_1 \cdots\cdots x'_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{[n]} \cdots x_n^{[n]} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}X'_1+\cdots\cdots+c_{1n}X'_n, \cdots\cdots, c_{n1}X'_1+\cdots\cdots+c_{nn}X'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{11}X'^{[n]}_1+\cdots+c_{1n}X_n^{[n]}, \cdots, c_{n1}X_1^{[n]}+\cdots+c_{nn}X'^{[n]}_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} \cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots\cdots c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X'_1 \cdots\cdots X'_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_1^{[n]} \cdots\cdots X_n^{[n]} \end{vmatrix}.$$

或 $$\begin{vmatrix} X'_1 \cdots\cdots X'_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_1^{[n]} \cdots\cdots X_n^{[n]} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} \cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots\cdots c_{nn} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 \cdots\cdots x'_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_1^{[n]} \cdots\cdots x_n^{[n]} \end{vmatrix},$$

故定理得以證明.

又有一種極簡之情形,即系中僅含有一方式及一點者:

定理四. 系之含有一方式 $f(x_1\cdots\cdots x_n)$ 及一點 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$ 者,則

$$f(y_1,\cdots\cdots y_n)$$

爲對於平直變換之一絕對同步不變式

書 f 爲一較明顯之式如

$$f(a_1, a_2,\cdots\cdots; x_1,\cdots\cdots x_n),$$

式中 $a_1, a_2,\cdots\cdots$ 乃 f 之諸係數,今設經變換後之係數爲 $a'_1, a'_2,$ $\cdots\cdots$,則有

$$f(a'_1, a'_2,\cdots\cdots; x'_1, \cdots\cdots x'_n) \equiv f(a_1, a_2,\cdots\cdots; x_1,\cdots\cdots x_n).$$

不論 x 值若何,此式常爲眞.故以諸 y 易諸 x 後亦然,但諸

x 與諸 y 乃同步變數,故如此易入後,諸 x 遂化爲諸 y. 是以

$$f(a'_1, a'_2, \cdots\cdots; y'_1 \cdots\cdots y'_n) \equiv f(a_1, a_2, \cdots\cdots; y_1, \cdots\cdots y_n),$$

而定理得以證明.

本節中所論不變式及同步不變式之三例,均爲方式係數及點之坐標之多項式. 此種不變式吾人稱爲整有理 (integral rational) 不變式及同步不變式.*

定理五 一整有理不變式之權不得爲負數.†

設 $a_1, a_2, \cdots\cdots; b_1, b_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots$ 爲一系方式之係數而 c_{ij} 爲變換之係數,則易知經變換後所得之諸係數 $a_1, a'_2, \cdots\cdots; b'_1, b'_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots$, 必爲諸 a, 諸 b, 及諸 c_{ij} 之多項式. 今令 I 乃一 μ 權之整有理不變式,即

$$I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots; b'_1, b'_2; \cdots\cdots) = c^\mu I(a_1, a_2, \cdots\cdots; b_1, b_2 \cdots; \cdots),$$

式中 c 爲變換之行列式. 今設 μ 爲負數, 命 $\mu = -\nu$, 則

$$(5) \qquad c^\nu I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots; b'_1, b'_2 \cdots; \cdots) = I(a_1, a_2 \cdots\cdots; b_1, b_2 \cdots; \cdots).$$

此式除使 $c \neq 0$ 之 c_{ij} 各值外均可成立, 亦爲前式. 但上式之兩端旣均爲諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 及諸 c_{ij} 之多項式,則由 §2 定理五可推知其實爲一恆等式.

今與諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 以定值使 $I(a_1, a_2 \cdots\cdots; b_1; b_2 \cdots\cdots; \cdots\cdots) \neq 0$; 則 $I(a'_1 \cdots\cdots; b'_1 \cdots\cdots; \cdots\cdots)$ 僅爲含 c_{ij} 之多項式,由 (5)式可知其不

*一切有理不變式及同步不變式均可由整有理者之商組成之, 參看 §78, 4, 5 諸題.

†且亦不可爲零,參看 §79 定理五.

能恆爲零.是則恆等式(5)之形式所示者乃含c_{ij}二多項式乘積竟成一常數,且其一多項式c^{ν}次數又異於零,是爲不可能之事.

後文吾人約定不變式及同步不變式,諸不變式及諸同步不變式(不論爲絕對者,相對者,或算術者),均對一切非異平直變換而言,如欲論對實平直變換言,則將特爲申明.

最後,吾人再論本節中所述之諸不變式及同步不變式之相關幾何意義.今所論者以含四元之情形爲限.若令四元一次方式爲零,則其所代表者爲四平面;故其消元式之爲零,乃表示此四平面共過一點之充要條件.定理三中同步不變式之爲零,乃四點共面之充要條件.定理四中同步不變式之爲零,則爲(y_1, y_2, y_3, y_4)點在曲面$f=0$上之充要條件.今後可見以上各例均爲投影性質;參看§§ 80, 81.

32. 關於一次方式之數定理.

定理一. 含n元之n個一次方式之二系,當二者消元式非零時,對非異之平直變換成相合.

設

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots\cdots+a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} b_{11}x_1+\cdots\cdots+b_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1+\cdots\cdots+b_{nn}x_n \end{cases}$$

爲二系,其消元式各爲

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad b=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

由假設,可知其均不爲零,各施變換

$$\mathrm{a}\left\{\begin{array}{l} x'_1=a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n=a_{n1}x_1+\cdots\cdots+a_{nn}x_n. \end{array}\right. \qquad \mathrm{b}\left\{\begin{array}{l} x'_1=b_{11}x_1+\cdots\cdots+b_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n=b_{n1}x_1+\cdots\cdots+b_{nn}x_n. \end{array}\right.$$

於 (1), (2) 則將均變爲法式 (normal forms).

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llll} x'_1, & & & \\ & x'_2, & & \\ \cdots\cdots & & & \\ & & & x'_n. \end{array}\right.$$

今 a, b 既均不爲零,故 a, b 各有其逆變換,以之施於 (3), 則可使之復變爲 (1) 與 (2), 由是可知變換 $\mathrm{b}^{-1}\mathrm{a}$ 可化 (1) 爲 (2).

定理二. 於一含 n 元之 n 一次方式系中,除其消元式乘羃與一常數之積外,無他種有理不變式.*

設 (1) 爲已知系,其消元式爲 a, 並設一行列式爲 c 之非異平直變換,可使 (1) 變爲

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a'_{11}x'_1+\cdots\cdots+a'_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n1}x'_1+\cdots\cdots+a'_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

* 此系具有算術不變式,已於 § 30 定理二中述之.

令(4)之消元式爲a',則有

$$a' \equiv ac,$$

令$I(a_{11},\cdots\cdots a_{nn})$爲系(1)之任一$\mu$權以有理不變式,並書

$$I' = I(a'_{11}\cdots\cdots a'_{nn}),$$

則
$$I' \equiv c^{\mu} I.$$

茲暫設$a \neq 0$,並就使(1)爲法式(3)之特殊變換研究之.在此特款中易知$a'=1$,因而$ac=1$,此理亦不難直接見之.設此特款中I'之值爲k,則必有

$$k = c^{\mu} I = a^{-\mu} I$$

或(5)
$$I = ka^{\mu}.$$

凡使$a \neq 0$之a_{ij}諸值均能滿足上式,而式中k之值則未嘗與a_{ij}諸係數有關.且μ既不爲負(參看§31定理五),則由§2定理五可推知(5)式乃一恆等式.是以知I不過爲消元式乘冪與一常數之自乘積,而定理遂得證明.

系. 含有n元之m個一次方式系,於$m<n$時,(除常數外)無他種整有理不變式.

蓋以若具有不變式,則此不變式必亦爲已知系中加入$n-m$新方式所成之n個一次方式系之不變式;是以必爲此系之消元式乘冪與一常數之乘積,此消元式之冪必爲零,因之此不變式必爲一常數;否則此不變式中將含有新加入之方式之係數,而不復爲原系之不變式矣.

習　題

1. 設有含n元之$n+1$一次方式之二系,其方陣之秩則均爲n,若此二系對非異變換成相合,則其充要條件,爲自一系任取n方式所得之消元式,必與他系中相當方式之消元式成比例,試證明之.

2. 試推廣上之定理.

3. 若一系中有含n元之m $(m>n)$一次方式,則其中任何整有理不變式,必爲自此諸方式中,每取n方式之消元式所成之齊次函數,試證明之.

4. 在本節諸定理,及上三題中,若以含點之系易方式之系,則可得數相類定理.試加申述與證明.

33. 交比(Cross-ratio),**調合分段**(Harmonic division). 今取共線之相異四點.

$$(x_1, t_1),\ (x_2, t_2),\ (x_3, t_3),\ (x_4, t_4) \tag{1}$$

而研究之.自§31之定理三可知

$$\begin{aligned} &x_1t_2-x_2t_1, \quad x_1t_3-x_3t_1, \quad x_1t_4-x_4t_1, \\ &x_3t_4-x_4t_3, \quad x_4t_2-x_2t_4, \quad x_2t_3-x_3t_2, \end{aligned} \tag{2}$$

六行列式中各式均爲 -1 權之同步不變式.故任二式之比乃一絕對同步不變式.以之與§28後題1中之諸絕對同步不變式相較,吾人甚冀其或亦有幾何意義.但於此情形中,甚易知其不然,蓋若四點中任一者之二坐標,同乘以一常數後,則點之位置雖未改而行列式(2)中有二者之比已變.

但欲去適所述之弊,亦非難事,只須另作一式.*

---

*分母中第二因式之改號,并非必要,然爲一種理由之故,已爲一般所通用,此理由於後文卽可見之.

$$(3) \qquad (1, 2, 3, 4) = \frac{(x_1t_2 - x_2t_1)\,(x_3t_4 - x_4t_3)}{(x_2t_3 - x_3t_2)\,(x_4t_1 - x_1t_4)},$$

則仍爲四點(1)之同步不變式,名曰其交比或非調和比 (anharmonic ratio). 若爲更正確之陳述則應曰四點,依(1)式之次序排列時之交比.*

爲定四點交比之幾何意義計,先設四點乃爲有限點而 $t_1 t_2 t_3 t_4 \neq 0$, 以此積同除$(1, 2, 3, 4)$之分子分母,則即可得以諸點之非齊次坐標 X_i 表其交比之式:

$$(4) \qquad (1, 2, 3, 4) = \frac{(X_1 - X_2)(X_3 - X_4)}{(X_2 - X_3)(X_4 - X_1)},$$

終乃書此諸點爲 P_1, P_2, P_3, P_4, 則得

$$(5) \qquad (1, 2, 3, 4) = \frac{P_1P_2}{P_3P_2} \Big/ \frac{P_1P_4}{P_3P_4} = \frac{P_2P_1}{P_4P_1} \Big/ \frac{P_2P_3}{P_4P_3}.$$

如以文字說明斯式,即可謂四點之交比,乃第二點分第一第三兩點之比,與第四點之第一第三兩點之比,而取二比所成之比也.且亦爲第一點分第二第四兩點與第三點分第二第四兩點所成二比之比.

於茲吾人須記明 C 點分 A, B 兩點之比爲 AC/BC, 故如 A, B 爲 C 所內分, 此比爲負. 如爲外分,則此比爲正.

如吾人約定無窮遠點分其線上二有限點 A, B 所成比爲 $+1$ (斯亦自然之規約, 蓋若一點離 A, B 愈遠,則其分 A, B

---

* 若此四點之次序更變,則其交比之值亦異,如 $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 4, 3, 2)$ 等即是.參看本節末之習題1.

所成之比愈與 $+1$ 相近也),返顧式(3),易知當第二第四兩點趨於無窮遠時,(5)式下前一語仍確,如第一第三兩點趨於無窮時則後一語爲確.是以四相異點之交比,不論在何種情形下,恆有其幾何意義.

若四點 P_1, P_2, P_3, P_4 所處地位,使 $(1,2,3,4)=-1$ 之情形特爲重要,在此時有

$$(1,2,3,4)=(1,4,3,2)=(3,2,1,4)=(3,4,1,2)=(2,1,4,3)$$
$$=(2,3,4,1)=(4,1,2,3)=(4,3,2,1)=-1.$$

此式僅爲 P_1, P_3 及 P_2, P_4 二對點間之關係,而與二對點之次序無涉,故吾人謂此四點互相調分 (divide each other harmonically).自交比之幾何意義觀之,當四點均爲有限時,則 P_1, P_3 及 P_2, P_4 二對點之互相調分必在而僅在 P_2,及 P_4 內分外分 P_1, P_3 成同比之時,且必在而僅在 P_1 及 P_3 內分外分 P_2, P_4 成同比之時.若 P_2 或 P_4 在無窮遠處,則僅前一語有意義,當 P_1 或 P_3 在無窮遠處時,則吾人僅能用第二語.

在此四點中,苟有三點如 P_1, P_2, P_3 者相合,而 P_4 爲該線上之任一點,此時亦得視爲二點相互調分之極限情形,爲便利計,應將此等情形亦歸入調合分段一名詞之內.故吾人應作下之定義:

定義　在同一直線上之 P_1, P_3, 及 P_2, P_4 二對點若爲相異者,且其依 P_1, P_2, P_3, P_4 次序所成交比爲 -1,或至少須三點相合時,則稱爲互相調分.

此後卽可見彼二對點之互相調分爲過一維度間內之投影性質.

在二維三維或高維空間內之幾何中,二坐標(或一非齊次坐標)不足以定點,而應增加.交比在此中,仍有重要之應用.例如,取三維空間內之一直線上之四相異點時,令此諸點爲 P_1, P_2, Q_1, Q_2, 並設 P_1, P_2 之坐標各爲

(x_1, y_1, z_1, t_1) 及 (x_2, y_2, z_2, t_2), 則 Q_1, Q_2 之坐標可書作

$$(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2),$$

$$(x_1+\mu x_2, y_1+\mu y_2, z_1+\mu z_2, t_1+\mu t_2).$$

今設

$$Ax+By+Cz+Dt=0 \tag{6}$$

爲任一平面,過 Q_1 而不過 P_2, 則當有

$$(Ax_1+By_1+Cz_1+Dt_1)+\lambda(Ax_2+By_2+Cz_2+Dt_2)=0,$$

因 P_2 不在 (6) 上,故又可作

$$\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+Dt_1}{Ax_2+By_2+Cz_2+Dt_2}=-\lambda.$$

變爲非齊次坐標,則得

$$\frac{AX_1+BY_1+CZ_1+D}{AX_2+BY_2+CZ_2+D}=-\lambda\frac{t_2}{t_1},$$

若 P_1M_1 及 P_2M_2 乃自 P_1 及 P_2 至平面 (6) 上之垂線,則有

$$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}=\frac{P_1M_1}{P_2M_2}=\frac{AX_1+BY_1+CZ_1+D}{AX_2+BY_2+CZ_2+D}=-\lambda\frac{t_2}{t_1}.$$

依完全相關之法可得

$$\frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}=-\mu\frac{t_2}{t_1}.$$

故
$$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}\bigg/\frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}=\frac{\lambda}{\mu}.$$

此乃四點依 $P_1, Q_1 P_2, Q_2$ 之次序時之交比.

易知若 Q_1 或 Q_2 二點之一在無窮遠處,則上述論證之要點依然有效,故其交比仍爲 λ/μ.

當 P_1, P_2 二點中有一在無窮遠時可書 Q_1 及 Q_2 之坐標爲 $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1,)$ 及 $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \tau_2)$ 則得將此情形化爲適所論之款,此時 P_1 及 P_2 之坐標爲

$$\left(\xi_1-\frac{\lambda}{\mu}\xi_2, \eta_1-\frac{\lambda}{\mu}\eta_2, \zeta_1-\frac{\lambda}{\mu}\zeta_2, \tau_1-\frac{\lambda}{\mu}\tau_2\right),$$

$$(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2,\ \tau_1-\tau_2)$$

據上之論證可知四點依 Q_1, P_1, Q_2, P_2 之次序所成交比爲 λ/μ. 而此種次序之變更,並不致易其交比,故在各種情形中,均有下之結果:

定理一. 取四相異點.

$$P_1 \qquad (x_1, y_1, z_1, t_1),$$

$$P_2 \qquad (x_2, y_2, z_2, t_2),$$

$$Q_1 \qquad (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2),$$

$$Q_2 \qquad (x_1+\mu x_2, y_1+\mu y_2, z_1+\mu z_2, t_1+\mu t_2),$$

則其依 P_1, Q_1, P_2, Q_2 之次序所成交比爲 λ/μ.

由此定理,更可推出另一結果:

定理二. 一線上四點之交比爲對空間內非異直射變換之不變式.*

蓋定理一中 P_1, P_2, Q_1, Q_2 中四點被一非異直射變換化爲

$$P'_1 \qquad (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1),$$

$$P'_2 \qquad (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2),$$

$$Q'_1 \qquad (x'_1, +\lambda x'_2, y'_1+\lambda y'_2, z'_1+\lambda z'_2, t'_1+\lambda t'_2),$$

$$Q'_2 \qquad (x'_1+\mu x'_2, y_1+\mu y'_2, z'_1+\mu z'_2, t'_1+\mu t'_2).$$

四點後依 P_1', Q'_1, P'_2, Q'_2, 之次序所成交比仍爲 λ/μ.

在二維空間內或推廣至於 n 維空間內仍有得與定理一及二相類之定理,且可用同法證之.

習題

1. 將 (2) 中六行列式書作.

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4), \quad (3, 4), \quad (4, 2), \quad (2, 3)$$

並書

$$A=(1, 2)\ (3, 4) \qquad B=(1, 3)\ (4, 2) \qquad C=(1, 4)\ (2, 3).$$

試證由四點之所有不同次序中,可得而僅可得六相異之交比,卽於 A, B, C 中每次取二者所成之六比之負値.

2. 試證 $A+B+C=0$, 更推證明若 λ 爲四點之一交比.則其餘五比必爲

$$\frac{1}{\lambda}, \ 1-\lambda, \ \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

3. 試證四點之六交比除下列之二種情形外常爲相異値.

---

* 此理亦可由 § 24 後習題 5 得之.

(α) 四點成調和比之情形,其交比之值爲 $-1, 2, \frac{1}{2}$.

(β) 四等交比點 (equianharmonic points) 其交比之值爲 $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

4. 應用一線上四點交比爲對該線之非異直射變換爲不變式之理,以證明 §24 定理二.

5. 共過一線之四平面之交比云者,乃不過此交線之任一直線,與此諸面相遇之四交點所成交比.

若四平面之方程式爲

$$p_1=0,\qquad p_1+\lambda p_2=0,\qquad p_2=0,\qquad p_1+\mu p_2=0$$

(p_1 及 p_2 均爲 x, y, z, t 之齊次平直多項式.) 則不過此交線之任一直線與諸面相遇之四點所成交比爲 λ/μ, 試證此理, 因以闡明上述定義之合法.

6. 試證過一線四平面之交比爲對於非異直射變換之不變式

34. 平面坐標 (Plane-coördinate) 及逆步變數 (Contragredient variables). 若 u_1, u_2, u_3, u_4 爲四常數, 並 x_1, x_2, x_3, x_4 爲在空間一點之齊次坐標,則方程式

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0 \tag{1}$$

代表一平面.諸 u 之值既可定一平面之位置,故可視作該平面之坐標,吾人將謂之曰平面坐標,亦猶諸 x(每組值可定一點者)之稱爲點坐標 (point-coördinate) 然.吾人既曰 (x_1, x_2, x_3, x_4) 一點.故亦可謂 (u_1, u_2, u_3, u_4) 平面,諸 u 易知其與齊次坐標相類,蓋若均乘以常數,則其所定之面仍不改易也.

今若視 x 必爲常數,而令諸 u 變更,可取一切可能之諸組值,與諸 x 之一組固定值卽可適合(1).是方程式在此代表一族平面,其數無限,而每一平面由諸 u 之一組特別值確定

之,但均過一定點 (x_1, x_2, x_3, x_4). 故此方程式(1)可視爲用平面坐標表一點之方程式(equation of a point in plane-coördinates), 蓋以過該點之動面之諸坐標均能滿足之,亦猶當諸 x 變易諸 u 爲常數時,此式表用點坐標表直線方程式.因凡在該面*上之動點之坐標均能滿足之.

依同理,諸 n 之一高次齊次方程式,在一般情形爲包一曲面之動面坐標所滿足.此方程式將稱爲用平面坐標表該曲面之方程式.†

今若對空間施以直射變換.

$$\mathbf{c} \qquad x'_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 + c_{i4}x_4 \qquad (i=1, 2, 3, 4).$$

吾人並假設此變換行列式非零,並命各餘子式爲 C_{ij}. 則變換 $\mathbf{c}$ 之逆定理可書之爲

$$\mathbf{c}^{-1} \qquad x_i = \frac{C_{1i}}{c}x'_1 + \frac{C_{2i}}{c}x'_2 + \frac{C_{3i}}{c}x'_3 + \frac{C_{4i}}{c}x'_4. \quad (i=1, 2\ 3, 4).$$

將此式代入上之方程式中,則可見平面(1)變爲

$$(2) \qquad u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3 + u'_4x'_4 = 0,$$

式中

$$\mathbf{d} \qquad u'_i = \frac{C'_{i1}}{c}u_1 + \frac{C_{i2}}{c}u_2 + \frac{C_{i3}}{c}u_3 + \frac{C_{i4}}{c}u_4 \qquad (i=1, 2, 3, 4).$$

由是可知諸 u 亦經過一平直變換,但與諸 x 之所經者有異,

---

* 同理,於二維空間內取方程式 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$, 則當 u_1, u_2, u_3 爲常數時,此式乃用點坐標 (x_1, x_2, x_3) 所表之一線,若 u_1, u_2, u_3 爲常數時,則爲用線坐標 (u_1, u_2, u_3) 所表之一點.

† 此理有一例,將於 § 53 中見之.

卽變換之方陣乃c^{-1}之共軛式(§7. 定義二),此平面坐標之變換d僅爲點坐標之變換所表之直射變換之另一表示方法.按下之定義,此二組變數x及u稱之逆步變數(contragredient variable).

定義一. 有含n元之二組變數若當其一者受一非異之變換時,他者必受另一變換,其方陣則爲前者逆變換之方陣之共軛式,則稱之爲逆步變數.

按上所論四元情形之理由,於此卽可使下定理成立:

定理.* 若二組逆步變數$x_1, \cdots\cdots x_n$及$u_1 \cdots\cdots u_n$受一平直變換而成$x'_1, \cdots\cdots x'_n$及$u'_1, \cdots\cdots u'_n$,則

$$u_1x_1+u_2x_2+\cdots\cdots+u_nx_n$$

將變爲

$$u'_1x'_1+u'_2x'_2+\cdots\cdots+u'_nx'_n,$$

普通常將逆步不變式(contravariants)之概念引入,以與逆步變數者相連,亦猶同步不變式之引入,以與同步變數相連也.吾人因此而立下之定義.

定義二. 有含$(x_1 \cdots\cdots x_n)$諸方式變一系及若干對於x之變數$(u'_1, \cdots\cdots u'_n)$, $(u''_1, \cdots\cdots u''_n)$, $\cdots\cdots$,如諸u及諸方式係數之任一函數,因對諸x施非異平直變換後之改易,僅爲乘以該變換行列式μ次(μ爲整數),則謂之爲μ權逆步不變式.

---

*此理實爲二組元一次方式(bilinear forms)理論中之一特別定理,參看次章.

故n元之n個一次方式消元式爲1權不變式之定理,如欲另爲他一語記述,亦可謂爲:若有n組各含n元$(u'_1, \cdots\cdots u'_n)$, $(u^{[n]}_1, \cdots\cdots u^{[n]}_n), \cdots\cdots$,而各組均爲變數$(x_1, \cdots\cdots x_n)$之逆步變數,則諸$u$之行列式爲1權逆步不變式.*

此後可見逆步不變式之概念,雖有便利處,然非必需,蓋以逆步變數常可視爲諸一次方式之諸係數,當採此觀點時,逆步不變式卽僅爲一不變式.

如一式中除諸方式之係數及逆步變數外,更含有若干組同步變數†,則稱爲混合不變式 (mixed concomitants), 若吾人視諸逆步變數爲諸一次方式之諸係數,則此更廣之概念,遂化爲吾人習見之同步不等式矣.

35. 空間之直線坐標 (Line-coördinates in space). 一直線爲其線上之二點 (y_1, y_2, y_3, y_4) 及 (z_1, z_2, z_3, z_4) 所確定.然此八坐標,於決定該線時,顯然不完全需用;下文中卽可知

$$p_{12}, \quad p_{13}, \quad p_{14}, \quad p_{34}, \quad p_{42}, \quad p_{23}.$$

而

$$(1) \qquad p_{ij} = \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix}$$

等六量可完全決定一線並將用之作直線坐標.

換言之,此諸p乃長方陣

* 逆變式中亦含諸係數之例,見第十二章.

† $u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots\cdots + u_nx_n$卽爲一例,上述之定理,卽示其爲一絕對混合不變式.

$$\left\|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}\right\|$$

中之各二行行列式,但去其第一及第三兩列所得者須改號耳.且吾人旣假設y及z二點爲相異者,則此六p不盡爲零.

此六p值合於關係式,

$$(2)\qquad p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0,^*$$

此式可直接推知,或依拉普拉斯方法將爲零之行列式

$$\left|\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}\right|$$

依其首二行中子式展開,卽易證明.

至於諸p何以確能用作直線坐標,則可由下二定理闡明:

定理一. 已知一直線,則其直線坐標p_{ij},除得以一異於零之常數相乘外,卽可完全決定.

由諸p之定義(1)可知如以異於零之任意因數相乘不致影響該點之位置也.

故欲證吾人之定理,只須示明若以該線上之他二點,

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4),\ (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$$

代適所用之二點以定諸p,則如是所定之直線坐標

*參看§33後題2.

$$P_{ij}=\begin{vmatrix} Y_i & Y_j \\ Z_i & Z_j \end{vmatrix}$$

必與諸p_{ij}成比例,蓋Y及Z二點既與y,z二相異點共線,則應爲平直相關,而吾人可書

$$Y_i=c_1y_i+c_2z_i,\quad Z_i=k_1y_i+k_2y_i,\qquad (i=1,2,3,4)$$

由是

$$P_{ij}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = Kp_{ij},$$

式中$K\neq0$,因Y及Z乃相異點故也.

定理二. 任意六常數p_{ij},能滿足關係式(2)且不盡爲零者,則爲一線而僅爲一線之直線坐標.

諸數何以不能爲若干線之坐標,由下即可知之:設此諸p乃一線之坐標,並於其上取二相異點y及z.則此諸點之坐標,即可如是決定,而使關係式(1)成立.爲確定計,設$p_{12}\neq0$.* 今試研究坐標爲$c_1y_i+c_2y_i$之點.先與c_1及c_2之值爲$-z_1$及y_1,繼復命其值爲$-z_2$及y_2,則吾人可得

(3) $\qquad (0,p_{12},p_{13},p_{14}),\ (p_{21},0,p_{23},p_{24})$

二點,並按定義知 $\qquad p_{ij}=-p_{ji}$

此二點乃爲相異者,以其前者中爲第一坐標爲零,次者中則否,又次者中之第二坐標爲零,前者則否.此二點即可決

* 將公式稍加修改,則此證法對諸p中任何者不爲零之情形,均可應用.

定該線,且因又其爲諸 p 所確定,故吾人可知是直線爲諸 p 所單純確定.

至是僅再須示明彼任意一組滿足 (2) 式之諸 p_{ij}, 苟不盡爲零,確能定一直線.欲證此理,吾人再設 $p_{12}\neq 0$, * 並視二點 (3) 爲相異者如上,則被此等值所決定之直線必以

$$p_{12}^2,\ p_{12}\,p_{13},\ p_{12}\,p_{14},\ -p_{13}\,p_{42}-p_{14}\,p_{23},\ p_{12}\,p_{42},\ p_{12}p_{23}$$

爲坐標.用關係式(2)可將此諸量中第四者變爲 $p_{12}\,p_{34}$,吾人應憶一線之坐標,可爲一異於零之任意常數所乘,即知實有一線,以 p_{ij} 爲坐標.

如於三維空間幾何學作有系統之研究,此種直線坐標所佔位置之重要,與點坐標或平面坐標者相等;且於相關之代數理論中,吾人可參見有不變式性質之式內,直線坐標之引入,亦猶點坐標之於同步不變式內,及平面坐標之於逆步不變式,若吾人願視此諸式爲一普通同步不變式,亦無不可,蓋以直線坐標僅爲二點坐標之函數故也.但由是所得之同步不變式乃一種特例,因二點之坐標僅於配合如 (1)式時始出現也.

今取四點

$$(x_i,\ y_i,\ z_i,\ t_i) \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

爲例.此十六坐標之行列式由 § 31 定理三知爲 -1 權之同步

---

* 將公式稍加修改,則此證法對諸 p 中任意者不爲零之情形,均可應用.

不變式.設以p'_{ij}及p''_{ij}各爲首二點及末二點所定之線之坐標,將適所論之四次行列式,按拉普拉斯氏法依其首二行子式展開,可得

$$(4)\qquad p'_{12}p''_{34}+p''_{12}p'_{34}+p'_{13}p''_{42}+p''_{13}p'_{42}+p'_{14}p''_{23}+p''_{14}p'_{23},$$

此乃一式有不變性質且僅含直線坐標者.

吾人入手所用之爲零四次行列式,乃四點共面之條件,故(4)之爲零乃二線p'及p''共面或謂爲相遇於一點之充要條件.

習題

1. 若點坐標受下列之平直變換.

$$x'_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+c_{i3}x_3+c_{i4}x_4 \qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

則直聯坐標將受平直變換如下:

$$\begin{aligned}p'_{ij}=&(c_{i1}c_{j2}-c_{i2}c_{j1})p_{12}+(c_{i1}c_{j3}-c_{i3}c_{j1})p_{13}+(c_{i1}c_{i4}-c_{i4}c_{j1})p_{14}\\&+(c_{i3}c_{j4}-c_{i4}c_{j3})p_{34}+(c_{i4}c_{j2}-c_{i2}c_{j4})p_{42}+(c_{i2}c_{j3}-c_{i3}c_{j2})p_{23}.\end{aligned}$$

試證明之.

2. 一平面可由

$$(y_1, y_2, y_3, y_4),\ (z_1, z_2, z_3, z_4),\ (w_1, w_2, w_3, w_4),$$

三點決定,試證此三點之方陣之三次行列式,可用作該平面之坐標,此諸坐標與§34中所定之平面坐標無異.

3. 一線之由其上二點決定者,可稱曰射線(ray).故本節中之直線坐標當可名之曰射線坐標(ray-coördinates),一線之爲二平面相交所定者,可稱之曰軸(axis).若(u_1, u_2, u_3, u_4)及(v_1, v_2, v_3, v_4)二平面之平面坐標,試討論其交線之交線坐標(axis-coördinates),

$$q_{12},\ q_{13},\ q_{14},\ q_{34},\ q_{42},\ q_{23},$$

式中

$$q_{ij}=u_iv_j-u_jv_i.$$

4. 示明取題3中所書次序之諸q,對任一線而言者,與取下列次序

$$p_{34},\ p_{42},\ p_{23},\ p_{12},\ p_{13},\ p_{14}$$

之諸p成比例,因以證明射線坐標實無若何之差別.

5. 一點可由三平面.

$$(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4),\ (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4),\ (w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4),$$

相交所決定.試證此諸平面之方陣中諸三次行列式,可用作該點之坐標,且此種位標與普通之點坐標無別.

由是,述明所有同步不變式均可視作不變式.

第八章

二組元一次方程式

36. 代數上之理論. 下五章將專論二次方式,茲先略論 $2n$ 變數特種二次方程式稱爲二組元一次方式者,顧其名卽可知其爲一次方式及二次方式之轉鍵.

定義一. 若一多項式有 $2n$ 個變數 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots\cdots y_n)$, 且各項均爲 x 及 y 之一次式,則稱爲二組元一次方式.

例如, $n=3$ 時之二組元一次方式最普遍形爲

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+a_{13}x_1y_3\\ &+a_{21}x_2y_1+a_{22}x_2y_2+a_{23}x_2y_3\\ &+a_{31}x_3y_1+a_{32}x_3y_2+a_{33}x_3y_3 \end{aligned}$$

此式可簡記爲 $\sum\limits_1^3 a_{ij}\,x_i\,y_j$; 一般二組元一次方式具有 $2n$ 個變數者,可表以

$$(1)\qquad \sum_1^n a_{ij}\,x_i\,y_j$$

方陣

$$\mathbf{a}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{matrix}\right\|$$

稱爲方式(1)之方陣；其行列式稱爲方式(1)之行列式,其秩稱爲(1)之秩.* 且當而僅當此行列式爲零時,稱爲異一二組元一次方式.

吾人可注意方式(1)得由諸 y 之一組 n 個一次式具方陣 $\mathbf{a}$ 者,各乘以 $x_1, x_2,\cdots\cdots x_n$, 再相加卽成.又可由諸 x 之 n 聯立一次式,以 $\mathbf{a}$ 之共軛式爲方陣者,各乘以 $y_1, y_2\cdots\cdots y_n$, 相加而得.

依第一法而論,易見(參看§31定理一)若諸 y 經過一方陣爲 $\mathbf{d}$ 之平直變換,則得一新二組元一次方式,其方陣爲 $\mathbf{ad}$. 依第二法而論,易見若諸 x 經過方陣爲 $\mathbf{c}$ 之一平直變換,則得一新二組元一次方式,其方陣之共軛式爲 $\mathbf{a'c}$, 字上強音符號,用以表示共軛方陣.此二組元一次方式本身之方陣,則爲(參看§22之定理六) $\mathbf{c'a}$.†

---

*有須注意者,若已知一二組元之一次方式之方陣,則此式完全決定,故吾人若言二組元一次方式 $\mathbf{a}$ 絕不致誤解,若兩二組元一次方式之方陣爲 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$, 則此二方式之和,以 $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ 爲其方陣.以 $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ 爲方陣之二組元一次方式,非爲二式之乘積,但有時稱爲符號乘積(symbolic product).

†此等結果,卽不用以前之定理,亦極易證明.

總此二者言之,卽得

定理一. 在一以a爲方陣之二組元一次方式(1)內,若使諸x經過一以c爲方陣之平直變換,諸y經過一以d爲方陣之平直變換,則得一新二組元一次方式,其方陣旣爲c′ad,內中c′爲c之共軛方陣.

取諸方陣之行列式而論,卽得:

定理二. 一二組元一次方式經變換後,其行列式以諸x及諸y所經變換之行列式乘積乘之.*

參合定理一及§25定理七可得下之重要結果:†

定理三. 一二組元一次方式之秩對於諸x及諸y之非異平直變換爲不變式.

定義二. 如一二組元一次方式之方陣爲對稱,則此二組元一次方式名爲對稱.

定理四. 若使諸x及諸y經過同一平直變換,則對稱二組元一次方式仍爲對稱.

因若使諸x及諸y所經之平直變換之方陣爲c,則依定理一知所得之新二組元一次方式之方陣爲c′ac. 注意a爲對稱方陣,故與其自身共軛,依§22之定理六,顯見c′ac亦與其自身共軛,故經過變換後之新二組元一次方式,仍爲對稱.

---

*由此定理,可知一二組元一次方式之行列式,在廣義爲一相對不變式.此等不變式之諸底古式,包含數組變數,稱爲組合不變式(combinant).

†此種結果,亦可由§30之定理二得來.

習題

1. 兩二組元一次方式,對於諸 x 及諸 y 之非異平直變換成相合之充要條件,爲此二組元一次方式有相同之秩,試證明之.

2. 一二組元一次方式能分解爲兩平直方式乘積之充要條件,乃此二組元一次方式之秩爲零或爲一,試證明之.

3. 任何二組元一次方式之秩如爲 r, 均能因諸 x 及諸 y 之非異平直變換,而化成標準方式,如

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ry_r$$

試證明之.

4. 若吾人專指實二組元一次方式及實平直變換而言,則以上諸題所論是否仍確?

5. 方式

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n$$

不因諸 x 及諸 y 之平直變換而變之充要條件,乃此諸平直變換互爲逆步,試證明之.

37. 幾何上之一應用. 取 (x_1, x_2, x_3) 及 (y_1, y_2, y_3) 爲平面上二點之齊次坐標而論二組元一次方式

$$\sum_1^3 a_{ij}\, x_i\, y_j=0 \tag{1}$$

若 (y_1, y_2, y_3) 爲一定點 P, 則 (1) 爲諸 x 之一次式,而成一直線 p 之方程式,於此僅有一例外情形,即當視 (1) 爲諸 x 之一次方程式,其係數均爲零之時,但若此方式之行列式非爲零,此種情形不能發生.如此吾人易見若在 (1) 內之二組元一次方式爲非異,則由方程式 (1), 對於平面上每一定點 P, 必可使而僅可使一直線 p 與之相當.

反言之,命

$$(2)\qquad Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$$

爲一直線 p, 苟在 (1) 內之二組元一次方式爲非異,則由 (1) 必有而僅有一點 P 與 (2) 相當. 因若 P 點爲 (y_1, y_2, y_3), 其相當之直線爲 (1), 則此直線與 (2) 合一之充要條件爲

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=\rho A,$$

$$a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3=\rho B,$$

$$a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3=\rho C,$$

式內 ρ 乃異於零之一常數, 與 ρ 以一定値, 則此組方程式必有而僅有一解 (y_1, y_2, y_3), 蓋因行列式 a 不等於零, ρ 値改換時, 諸 y 僅依同一比例而變換也. 因得

定理. 若二組元一次方式 (1) 爲非異,則由此可得平面上點與直線成一與一對應性.

此種對應性,稱爲對射變換 (correlation).

習題

1. 就二組元一次方式之秩爲零或爲一之兩種情形而討論平面上之異對射變換.

2. 考察在三維空間內之相當方程式, 卽由使 $n=4$ 之二組元一次方式爲零而得之方程式, 並就方式之秩之各種可能假設加以討論.

3. 由三點或更多之點經過非異對射變換而得相當之三線或更多之線, 如遇於一點, 則其充要條件, 爲此等諸點同在一直線上. 試證明之.

4. 試明任何相交於一點之四線之交比,與其由非異對射變換所得相當四點之交比相同.

5. 設 P 爲平面上任意一點,並設 p 爲由 P 經過非異對射變換而得之相當直線.試證相當於 p 上各點之直線經過 P 點之充要條件,乃該二組元一次方式之爲對稱.

6. 試證關於直線及點在三維空間內之相當定理並證明之,試示此處之充要條件乃方式之爲對稱或反稱.*

---

* 由對稱之二組元一次方式所定之對射變換,稱爲極對射 (reciprocation). 參照下章公式,卽知在此情形之下各點在平面內,與其對一已知錐線所定之極線 (polar) 相應;在空間內與其對一已知二次曲面而定之極面 (polar-plane) 相應.反稱 (skew-symmetric) 二組元一次方式,在平面內僅爲一特種異對射,但在空間內則得一重要對射,在一般情形下爲非異者,此種對射常稱爲配零系 (nulls system). 關於此理可參閱各種論直線幾何之書籍,但通常多係從他方面論之.

第 九 章

自幾何方面引入二次方式之研究

38. 二次曲面及其切線與切面. 設 (x_2, x_2, x_3) 爲平面上之齊次坐標,依據 §4 可見任何錐線之方程式均得書如

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

同理,在三維空間內任何曲面方程式可書如

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$$
$$+ 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + 2a_{42}x_4x_2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

若除係數 $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{34}, a_{42}, a_{23}$ 之外,再加設其他六常數 $a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{43}, a_{24}, a_{32}$, 而定之以下式

$$a_{ij} = a_{ji},$$

則此種方式可使之更爲對稱,而二次曲面之方程式卽可書如

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x\ x_3 + a_{24}x_2x_4$$
$$+ a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 + a_{34}x_3x_4$$
$$+ a_{41}x_4x_1 + a_{42}x_4x_2 + a_{43}x_4x_3 + a_{44}x_4^2 = 0$$

或更可使之大爲化簡，書如

$$(1)\qquad \sum_1^4 a_{ij}x_ix_j=0.$$

定義一． 十六 a 值依上列次序而成之方陣，稱爲二次曲面 (1) 之方陣，此方陣之行列式，稱爲此二次曲面之判別式 (discriminant)，此方陣之秩，稱爲此二次曲面之秩，且若判別式爲零，則謂爲異二次曲面．

於此有一基本問題如下：若 (y_1, y_2, y_3, y_4) 及 (z_1, z_2, z_3, z_4) 爲兩點，則直線 yz 交曲面 (1) 於何點？

直線 yz 上，除 y 而外之任何點之坐標均可書如

$$(z_1+\lambda y_1,\ z_2+\lambda y_2,\ z_3+\lambda y_3,\ z_4+\lambda y_4)$$

此點在 (1) 上之充要條件爲

$$\sum_1^4 a_{ij}(z_i+\lambda y_i)(z_j+\lambda y_j)=0,$$

或展開之，得

$$(2)\qquad \sum_1^4 a_{ij}z_iz_j+2\lambda\sum_1^4 a_{ij}y_iz_j+\lambda^2\sum_1^4 a_{ij}y_iy_j=0.$$

若點 y 不在 (1) 上，則此式爲 λ 之二次方程式，此式之每一根，卽相當於直線 yz 與該二次曲面之一交點．由此吾人卽知任一直線經過不是一二次曲面上之一點 y 者，與此二次曲面必相交而僅相交於相異之兩點，或僅相交於一點．

自他一方面言之，若 y 在 (1) 上，且若 $\Sigma a_{ij}x_iz_j\neq 0$，則方程

式(2)變爲一一次方程式.在此情形之下,直線與二次曲面仍相交而僅相交於相異之兩點,此兩點之一爲 y, 他一點相當於一次方程式(2)之根.

終若 $\Sigma a_{ij} y_i y_j = \Sigma a_{ij} y_i z_j = 0$, 則方程式(2)一左邊變爲一常數,故(2)或對於 λ 無解,則直線僅交曲面於一點 y, 或對於 λ 有無窮解, (若 $\Sigma a_{ij} z_i z_j = 0$) 則直線上各點,均在曲面上.

綜合以上結果即可云:

定理一. 若一二次曲面及一直線爲已知,則下之三種情形必居其一:

(1) 此直線交此曲面而僅變此曲面於相異之兩點,則此直線稱爲割線 (secant).

(2) 此直線交於曲面,而僅交此曲面於一點,則此直線稱爲切線 (tangent).*

(3) 直線上任何點,均在曲面上,則此直線稱爲此曲面之母線 (ruling).†

此三種情形,均可發生,得由一簡例示明之,即以曲面

$$y^2 + z^2 - zt = 0$$

而論,其三坐標軸分別表明此三種情形.

若謂一切線爲與二之曲面交於相重之兩點 (two coinci-

* 下文即可辨明何謂眞切線,何謂假切線 (pseudo-tangents).

† 亦作組織線 (generator), 蓋就下文可見全曲面可由此種直線移動而成也.

dent points), 有時頗覺便利.

由定理一之證明, 吾人更可推得以下之結果:

定理二. 若 (y_1, y_2, y_3, y_4) 爲曲面 (1) 上之一點, 則在

$$(3) \qquad \sum_1^4 a_{ij} x_i y_j \equiv 0 \, ^*$$

時, 經過 y 之任何直線, 必爲 (1) 之切線, 或爲 (1) 之母線; 否則經過 y 之任何直線而在平面

$$(4) \qquad \sum_1^4 a_{ij} x_i y_j = 0$$

內者, 必爲 (1) 之切線或母線, 而所有經過 y 之其他各線, 則爲割線.

由此立即可得一重要基本定理:

定理三. 若在曲面 (1) 上有一點 y, 滿足恆等 (3), 則 (1) 爲錐面 (cone), 而以 y 爲頂點 (vertex); 逆言之, 若 (1) 爲錐面, 以 y 爲頂點, 則恆等式必能滿足.

至是可取切面論之, 而立定義如下:

定義二. 若平面 p 上經過定點 P 點任何一線, 均爲二次曲面 (1) 之切線或母線, 則此平面 p 謂爲在 P 點相切於 (1).

依此定義, 卽見若 (1) 爲錐面, 則任何經過其一頂點之平面, 必在此頂點與 (1) 相切. 苟如是, 則吾人已將普通幾何上不

* 於此須注意, 因有關係式 $a_{ij}=a_{ji}$ 故 $\Sigma a_{ij} x_i y_j \equiv \Sigma a_{ij} y_i x_j$.

稱爲切面者,認爲切面.關於切線之定義,亦有此相當之不便處.故吾卽將於眞切面眞切線及假切面假切線間,加以區別.

定義三. 直線或平面與一二次曲面相切,而切點非爲其頂點則稱爲眞 (true) 切線或眞切面;所有其他切線或切面,皆稱爲假 (pseudo) 切線或假切面.

習題

1. 試證若 P 爲一二次曲面 S 上一點,而非爲其頂點,並設 p 爲此點之切面,則以下之三種情形必居其一:

(a) p 上有二線且僅有二線爲 S 之母線,且此二母線相交於 P.

(b) p 上有一線且僅有一線爲 S 之母線,且此母線經過 P 點.

(c) p 上任何一線,均爲 S 之母線.

2. 試證

(a) 在第一題 (a) 種情形中,此二次曲面非爲一錐面;反言之,若此二次曲面非爲一錐面,則 (a) 種情形,必將發生.

(b) 在第一題 (b) 種情形中,則 p 於其內母線上之各點與 S 相切.

(c) 在第一題 (b) 種情形中,S 爲一錐面有一而僅有一頂點,且該頂點爲在 p 內母線上之一點;反言之,若 S 爲一錐面,有一而僅有一頂點,則第一題 (b) 種情形必將發生.

(d) 在第一題 (c) 種情形中,則在 p 內有一線 l,其各點(但無他點)均爲 S 之頂點;且 S 爲二平面,其一爲 p,一則交 p 於 l.

39. 共軛點 (Conjugate points) 及極面 (Polar planes). 若兩點爲其所聯直線與一二次曲面

$$(1)\qquad \sum_{1}^{4} a_{ij}x_ix_j=0$$

之兩交點所調分,則此兩點對此曲面稱爲共軛點,爲包括所有極限情形起見,吾人立一定義如下:

定義. 兩相異之點在下列情形時,稱爲對曲面(1)之共軛點.

(a) 此兩點之聯線爲(1)之切線或割線,且此兩點爲此聯線與(1)之交點所調分;或

(b) 此兩點之聯線爲(1)之母線.

兩相合之點均在(1)上,則稱爲共軛點.

設兩點之坐標爲 (y_1, y_2, y_3, y_4) 及 (z_1, z_2, z_3, z_4) 並先設此兩點相異,且均不在(1)上,而聯此兩點之直線爲(1)之割線時立論.在此情形下,直線 yz 與(1)之交點可書如

$$(z_1+\lambda_i y_1,\ z_2+\lambda_i y_2,\ z_3+\lambda_i y_3,\ z_4+\lambda_i y_4) \qquad (i=1, 2)$$

內中 λ_1 及 λ_2 爲 §38 中方程式(2)之兩根.調分之充要條件,乃爲交比 λ_1/λ_2 有 -1 之值;即 $\lambda_1+\lambda_2=0$;據此結果或就 §38 之方程式(2),均可得

$$\sum_1^4 a_{ij}y_iz_j=0. \tag{2}$$

在所有其他各種 y 及 z 爲共軛點之情形中,關係式(2)亦必能滿足;反言之,凡若此條件滿足,則兩點共軛,其理均留待讀者自證之.是以得

定理一. 兩點 y 及 z 對(1)共軛之充要條件爲(2)式能滿足.

由此定理吾人立即可書出與一已知點 y 共軛之點 x 所成軌跡之方程式,如

$$(3)\qquad \sum_1^4 a_{ij}x_iy_j=0$$

故除此式左邊恆等於零之情形而外,此軌迹爲一平面,稱爲點 y 之極面.吾人從上節已見若(1)爲錐面,y 爲其頂點,則(3)之左邊恆等於零.此爲其恆等於零之惟一情形;因若 y 爲一二次曲面上任何一點,而非其頂點,則(3)表該點之切面;若 y 不在(1)上,則(3)之左邊顯見不能恆等於零.蓋以諸 y 代諸 x,即不能爲零矣.本上所論,即得下之定理:

定理二. 若(1)非爲錐面,任何一點 y 有一確定極面(3);若(1)爲一錐面,則除頂點外之任何點,有一確定極面(3),但對於頂點時,(3)之左邊恆等於零.

一平面對於一二次曲面之一已知點之極面,吾人須注意此種性質實爲投影性質,蓋一空間之直射變換,將兩共軛點化成之點仍對於變化後之曲面相共軛.

定理三. 有 P_1 及 P_2 二點,若 P_1 之極面經過 P_2,則逆言之,P_2 之極面亦必經過 P_1.

因由假設可知 P_1 及 P_2 爲共軛點,因之立得結果如上.

40. 二次曲面以其秩而分類. 上節定理二又可述之如次:二次曲面

$$(1)\qquad \sum_1^4 a_{ij}x_ix_j=0$$

爲一錐面，而 (y_1, y_2, y_3, y_4) 爲其頂點（或其頂點之一）之充要條件，乃

$$\sum_{1}^{4} a_{ij} x_i y_j \equiv 0. \tag{2}$$

恆等式(2)與下之四方程式相合

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 = 0, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 = 0, \\ a_{41}y_1 + a_{41}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

此組方程式有一公解而非 (0, 0, 0, 0) 之充要條件，乃其係數所成之行列式等於零．吾人須注意此行列式，卽爲二次曲面之判別式 a．因得

定理一． 一二次曲面之一錐面之充要條件，乃爲其判別式等於零．

故若二次曲面之秩爲四，則此曲面非錐面．

若其秩爲三，方程式組(3)有一解，且除此解之倍値而外，僅有此一解，則此曲面爲一普通錐面，而僅有一頂點．

若其秩爲二，方程式組(3)有兩組平直獨立之解（參閱§18），而所有解，均與此兩組解成平直相關，故此曲面爲一錐面，其頂點構成一全直線．

若其秩爲一，方程式組(3)有三組平直獨立之解，所有他解，均與之成平直相關，此時吾人得一錐面，其頂點構成一全平面．

若其秩爲零,則嚴格言之此二次曲面不復存在;但(1)之軌跡,仍可視之爲一錐面,空間各點均爲其頂點.

二次曲面之爲一錐面,乃一投影性質,其理甚明;並一點之爲一錐面之頂點,亦同爲此種性質.由上所述之分類,吾人可得

定理二. 一二次曲面之秩,不因非異直射變換而改變.

題習

1. 定義. 若平面p爲P對一二次曲面之極面,則P稱爲p之極點(pole).

試證若二次曲面非爲降秩(non-singular),則每一平面必有而僅有一極點.

2. 試證若二次曲面爲一錐面,則不經過其頂點之平面無極點.

然則對於經過頂點之平面又如何?

41. 化二次曲面之方程式爲法式(Normal form).

經過非異直射變換,交比既爲不變式,則一二次曲面S,一點P不在S上,及其關於S之極面,經過任何非異直射變換後,變爲一二次曲面S',一點P',及其關於S'之極面.一點(y_1, y_2, y_3, y_4)不在二次曲面$\sum_1^4 a_{ij}x_ix_j=0$上,即不能在其極面$\sum_1^4 a_{ij}x_iy_j=0$上,吾人由上式內,將諸x代以諸y,即可知之.茲施以直射變換,使此點變爲原點,而其極面變爲無窮遠面.* 則此二次曲

*由前述有一直射變換,可化任意平直獨立五點爲他任意平直獨立之五點之理,即可知如此之直射變換,可有無窮之方法決定之.參閱§24之題2及題3.

面變成中心 (central) 二次曲面，而其中心卽爲原點，蓋若任何直線之經過原點與此二次曲面之交點，爲原點及在此線上之無窮遠點所調分.

點 (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) 關於變換後二次曲面

$$\sum_1^4 a'_{ij} x'_i x'_j = 0$$

之極面方程式爲

$$\sum_1^4 a'_{ij} x_i' y_j' = 0.$$

若該點卽爲原點 $(0, 0, 0, 1)$，上式約爲

$$a'_{14}x'_1 + a'_{24}x'_2 + a'_{34}x'_3 + a'_{44}x'_4 = 0.$$

欲此方程式代表一無窮遠平面，必須

$$a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0, \quad a'_{44} \neq 0.$$

因之二次曲面，變爲

$$\begin{aligned} & a'_{11}x'^2_1 + a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{13}x'_1x'_3 \\ & + a'_{21}x'_2x'_1 + a'_{22}x'^2_2 + a'_{23}x'_2x'_3 \\ & + a'_{31}x'_3x'_1 + a'_{32}x'_3x'_2 + a'_{33}x'^2_3 \\ & + a'_{44}x'^2_4 = 0. \end{aligned}$$

尙有與此微有不同之約法，卽將點 (y_1, y_2, y_3, y_4) 化 x_1 軸上之無窮遠點，並使其極面爲平面 x_2x_3. 吾人易明由此卽可將式內含 x_1 之項捨平方之項而外，餘均去之.

同理，吾人可除去含 x_2 及 x_3 之項. 由此吾人卽知任何二次曲面可用一直射變換化爲一形式，其方程式中除含 x_i^2

之項,係數不爲零外,不復含其他有 x_i 之項.

若與 i 以 1,2,3,4 四値,吾人即得二次曲面方程式之四相異法式,且每式既可由若干方法得之,故能否同時作此四化約,遂成爲一問題.此事在一般情形爲可能,而化法如下:設 y 爲一點,不在一二次曲面上,及 z 爲 y 之極面上一點,亦不在曲面上.則 z 之極面含 y.設 w 爲任意一點,在 y 及 z 之極面之交線上,但不在此二次曲面上.則其極面經過 y 及 z 此三極面遇於一點 u,且易明 y, z, w, u 不在一平面上.四面體 $yzwu$ 稱爲二次曲面之極 (polar) 或自配 (self-conjugate) 四面體,蓋因其有一特別性質,即其任一頂點,均爲其對面之極點也.

若吾人變換四點 y, z, w, u,使爲原點及在三軸上之無窮遠點,則與上列數變換有同等之效力,即二次曲面方程式,因之約爲

$$a'_{11}x'^2_1+a'_{22}x'^2_2+a'_{33}x'^2_3+a'_{44}x'^2_4=0$$

吾人於此節,暗設上述作法之三點 y, z, w 確可求得,而不在二次曲面上,若二次曲面非爲錐面,則有無窮之方法可作,但一錐面無自配四面形,故在此情形之下,上之約法爲不可能.

習題

1. 試證若一二次曲面之判別式爲零,則此曲面之方程式,常能用適當之直射變換,約爲某形式,俾其中不含坐標 x_4.

[提示.用此章之結果,說明若一二次錐面之頂點爲原點,則 $a_{14}=a_{24}$

$=_{34}=a_{44}=0$].

2. 證明若錐面有一有限點之頂點,則第一題之直射變換可表以下列形式

$$x'_1=x_1+\alpha x_4,$$

$$x'_2=x_2+\beta x_4,$$

$$x'_3=x_3+\gamma x_4$$

$$x'_4=x_4.$$

[指示. 用非齊次坐標.]

第十章

二次方式

42. 普遍二次方式及其極. n個變數之普遍二次方式,乃爲

$$(1)\qquad \sum_{1}^{n} a_{ij}x_ix_j \equiv a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots\cdots + x_{2n}x_2x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n^2.$$

式中 $a_{ij}=a_{ji}$.* 二組元一次方式 $\sum_{1}^{n} a_{ij}y_iz_j$ 稱爲(1)之極方式(polar form).使(1)經過平直變換

$$C\left\{\begin{array}{l} x_1 = c_{11}x'_1 + \cdots\cdots + c_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + \cdots\cdots + c_{nn}x'_n, \end{array}\right.$$

---

*注意此種限制,乃爲便利起見,非爲必須,若無此種限制,則二次方式之普遍性仍無所損益也.

即得一新二次方式

$$(2)\qquad \sum_{1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j.$$

(2)之極方式爲 $\Sigma a'_{ij}y'_i z'_j$. 若使(1)之極方式中諸 y 及諸 z 經同一平直變換 c, 卽得新二組元一次方式 $\sum_{1}^{n}\bar{a}_{ij}y'_i z'_j$. 茲更證明 $\bar{a}_{ij}=a'_{ij}$.

吾人已知有恆等式

$$(3)\qquad \sum_{1}^{n} a_{ij}x_i x_j \equiv \sum_{1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j,$$

$$(4)\qquad \sum_{1}^{n} a_{ij}y_i z_j \equiv \sum_{1}^{n} \bar{a}_{ij}y'_i z'_j,$$

各式可視爲諸 x', 諸 y' 及諸 z' 之恆等式,且諸 x, 諸 y 及諸 z 各爲諸 x', 諸 y' 及諸 z' 中同文字者之多項式之縮寫. 若設 $y'_i=z'_i=x'_i(i=1, 2,\cdots\cdots n)$, 則上書之最後一恆等式化爲

$$\sum_{1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{1}^{n} \bar{a}_{ij}x'_i x'_j$$

總合此式及(3), 卽得

$$\sum_{1}^{n} \bar{a}_{ij}x'_i x'_j \equiv \sum_{1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j$$

因之 $\qquad \bar{a}_{ij}=a'_{ij}$ 且 $\bar{a}_{ij}+\bar{a}_{ji}=a'_{ij}+a'_{ji}$.

a'_{ij} 及 a'_{ji} 不過爲一二次方式之係數, 吾人原命 $a'_{ij}=a'_{ji}$, 且在 §36 之定理四內, 吾人已證 $\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ji}$, 故得 $\bar{a}_{ij}=a'_{ij}$.

由此事實及(4), 吾人立可更得下之結果:

$$\sum_{1}^{n} a'_{ij} y'_i z_j \equiv \sum_{1}^{n} a_{ij} y_i z_j$$

即爲：

定理. 極方式

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} y_i z_j$$

乃爲二次方式

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

及兩點 $(y_1 \cdots\cdots y_n)$, $(z_1 \cdots\cdots z_n)$ 組成之系之絕對同步不變式.

43. 二次方式之方陣及判別式.

定義. 方陣.

$$\mathbf{a} = \left\| \begin{matrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

稱爲二次方式

(1) $$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

之方陣. **a** 之行列式稱爲 (1) 之判別式 (discriminant); 且 **a** 之秩稱爲 (1) 之秩. 若判別式等於零, 則 (1) 稱爲異二次方式.

(1) 之方陣卽爲其極之方陣. 且如前節所示, 若 (1) 內諸 x 經一平直變換, 且在 (1) 之極方式內諸 y 及諸 z 亦經此同一

平直變換,則經變換後之新二次方式之方陣,與新二組元之一次方式之方陣同.但在§36之定理一內,吾人已知當變數經過平直變換時,二組元一次方式之方陣之如何改變.故得下之定理:

定理一. 若在以a為方陣之二次方式(1)內,吾人使諸x經過以c為方陣之平直變換,即得以c′ac為方陣之新二次方式,內中c′為c之共軛式.

與§36內所述者同理,從此立可更得次之結果:

定理二. 一二次方式之秩,經非異平直變換後不變.

定理三. 一二次方式之判別式,乃為二權相對不變式.

44. 二次方式之頂點(vertices).

定義. 所謂二次方式

$$(1)\qquad \sum_{1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

之頂點者,乃

$$(2)\qquad \sum_{1}^{n} a_{ij}x_i c_j \equiv 0$$

之一點$(c_1, c_2, \cdots\cdots c_n)$,但諸$c$不得盡為零.

一二次方式,於其所有之頂點上,顯然為零.

吾人茲舉定理如下,此不過換一形式以述此定義耳.

定理一. $(c_1, c_2, \cdots\cdots c_n)$為(1)之頂點之充要條件,乃諸$c$不盡等於零,復滿足於下之聯立方程式

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&a_{11}c_1+\cdots\cdots+a_{1n}c_n=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}c_1+\cdots\cdots+a_{nn}c_n=0.
\end{aligned}
$$

因(3)之消元式,即爲(1)之判別式,吾人更得

定理二. 一二次方式有頂點之充要條件,乃其判別式爲零;且若方式之秩爲 r, 則必有 $n-r$ 平直獨立之頂點,凡與此等之點平直相關者,亦均爲頂點.

在特別情形,若一二次方式之判別式爲零,且此行列式內各元素之元相餘式亦照常法以 A_{ij} 記之,則諸 A 全不爲零時 $(A_{i1}, A_{i2},\cdots\cdots A_{in})$ 爲一頂點.

下之恆等式,頗爲重要(參閱§38之公式(2)).

$$
(4)\qquad \sum_1^n a_{ij}(z_i+\lambda y_i)(z_j+\lambda y_j)\equiv
$$

$$
\sum_1^n a_{ij}z_iz_j+2\lambda\sum_1^n a_{ij}z_iy_j+\lambda^2\sum_1^n a_{ij}y_iy_j.
$$

此式可視爲所含各文字之恆等式.

若 $(c_1\cdots\cdots c_n)$ 爲二次方式 $\sum_1^n a_{ij}x_ix_j$ 之頂點,且在(4)中以諸 c 代諸 y, 則此恆等式右邊最後二項爲零,即得

$$
(5)\qquad \sum_1^n a_{ij}(z_i+\lambda c_i)(z_j+\lambda c_j)\equiv\sum_1^n a_{ij}z_iz_j.
$$

反之,若(5)能成立,則 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 必爲一頂點;蓋若先於(4)內以諸 c 代諸 y, 然後減去(5),可得

$$2\lambda\sum_{1}^{n} a_{ij} z_i c_j + \lambda^2 \sum_{1}^{n} a_{ij} c_i c_j \equiv 0$$

此式對於λ爲恆等亦各對 z 然,故有

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} z_i c_j \equiv 0$$

如此得證明下之定理:

定理三. $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 爲二次方式(1)之頂點爲充要條件,乃 $z_1, \cdots\cdots z_n$ 及 λ 爲獨立變數而能滿足(5).

習 題

1. 若 $(c_1, \cdots\cdots c_n)$ 爲(1)之頂點, $(y_1, \cdots\cdots y_n)$ 爲使二次方式爲零之任意一點,則二次方式在所有與 c 及 y 平直相關之點均爲零,試證明之.

2. 試述上題之逆理,並證明之.

45. 化二次方式爲平方之和. 若在二次方式

$$(1) \qquad \phi(x_1, \cdots\cdots x_n) \equiv \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

內,係數 a_{ij} 異於零,吾人可以下列蘭格倫日 (Lagrange) 所創之變換,以化簡此方式.

下列二式之差

$$\phi(x_1, \cdots\cdots x_n) - \frac{1}{a_{ij}}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{in}x_n)^2$$

顯見對 x_i 爲獨立,記之以 ϕ_1, 即得

$$\phi \equiv \frac{1}{a_{ii}}(a_{i1}x_1 + \cdots\cdots + a_{in}x_n)^2 + \phi_1.$$

若施以非異平直變換

$$
(2)\qquad \begin{cases} x'_1 = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{in}x_n. \\ x'_2 = \qquad\qquad x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_i = \quad x_1{}^* \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{cases}
$$

則二次方式ϕ化為方式

$$
(3)\qquad \frac{1}{a_{ii}}x'_1{}^2 + \phi_1(x'_2, \cdots\cdots x'_n)
$$

式中除 $x'_1{}^2$ 一項而外,再無含 x'_1 之項.

易見此種化簡,普通可有多種方法行之,僅當原有二次方式內所有平方項之係數盡為零時,始為不可能.

除所得之二次方式 ϕ_1 所有平方項之係數盡皆為零之時外,吾人可使變數 $x'_2, \cdots\cdots x'_n$ 經過適當之非異平直變換,俾對此方式,施同一化法.若書 $x''_1 = x'_1$, 則此種變換,亦可視為諸 x':$(x'_1, x'_2, \cdots\cdots x'_n)$ 之非異平直變換.如此化(3)為方式

$$
(4)\qquad \frac{1}{a_{ii}}x''_1{}^2 + \frac{1}{a'_{jj}}x''_2{}^2 + \phi_2(x''_3, \cdots\cdots x''_n).
$$

茲再應用此種化法於ϕ_2,進行如前,吾人易見繼續用非異平直變換數次,方式ϕ可終化為方式:

$$
(5)\qquad c_1x_1{}^2 + c_2x_2{}^2 + \cdots\cdots + c_nx_n{}^2
$$

此等繼續變換,可合成單一非異平直變換,如此遂得

* 當 $i=1$ 時,此行應除去. 德譯本註.

定理. 任何 n 變數之二次方式,可用一非異平直變換,化爲方式(5).

此證明至是尙未完全,蓋若在變換中任何一步,二次方式 ϕ_i 已至平方項係數皆爲零之特別情形時,則所用之法,不能再施.在未討論此點之前,吾人先以一數字之例,示上述方法之步驟.

例.

$$\phi\equiv\left\{\begin{array}{l}2x_1^2+x_1x_2+8x_1x_3\\ +x_2x_1-3x_2^2+9x_2x_3\\ +8x_3x_1+9x_3x_2+2x_3^2\end{array}\right\}\equiv\frac{1}{2}(2x_1+x_2+8x_3)^2+\phi_1$$

式中 $\phi_1\equiv-\frac{1}{2}(x_2+8x_3)^2-3x_2^2+18x_2x_3+2x_3^2$

$$\equiv\left\{\begin{array}{l}-\frac{7}{2}x_2^2+5x_2x_3\\ +5x_3x_2-30x_3^2\end{array}\right\}$$

$$\equiv-\frac{2}{7}\left(-\frac{7}{2}x_2+5x_3\right)^2-\frac{160}{7}x_3^2$$

故用非異平直變換

$$\left\{\begin{array}{l}x'_1=2x_1+x_2+8x_3\\ x'_2=-\frac{7}{2}x_2+5x_3\\ x'_3=x_3\end{array}\right.$$

方式 ϕ 化爲 $\frac{1}{2}x'^2_1-\frac{2}{7}x'^2_2-\frac{160}{7}x'^2_3.$

此僅爲變換法之一種.在第一步,吾人有三法可任意採用,在第二步,則有二法.

茲再完成普通定理之證明.設 ϕ 所有平方項之係數皆爲零,* 但 $a_{12} \neq 0$. 則

$$\phi(x_1 \cdots\cdots x_n) \equiv 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1(a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n)$$
$$+ 2x_2(a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n) + \sum_3^n a_{ij}x_ix_j$$
$$\equiv \frac{2}{a_{12}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots a_{1n}x_n)(a_{21}x_1 + a_{23}x_3$$
$$+ \cdots\cdots + a_{2n}x_n) + \phi_1,$$

式中
$$\phi_1 \equiv -\frac{2}{a_{12}}(a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n)(a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n)$$
$$+ \sum_3^n a_{ij}x_ix_j.$$

非異平直變換

$$\begin{cases} x_1 = & a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = {}_{21}x_1 & + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \\ x'_3 = & x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x'_n = & x_n \end{cases}$$

因化 ϕ 成方式

$$\frac{2}{a_{12}}x'_1x'_2 + \phi_1(x'_3, \cdots\cdots x'_n),$$

更用非異平直變換

* 不論其他係數 a_{ii} 爲零與否,凡當 $a_{11} = a_{22} = 0$ 時,此法均可用.

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1 + x'_2 \\ x''_2 = x'_1 - x'_2 \\ x''_3 = \qquad x'_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x''_n = \qquad\qquad x'_n \end{cases}$$

化 ϕ 成方式 $\dfrac{1}{2a_{12}}x''^2_1-\dfrac{1}{2a_{12}}x''^2_2+\phi_1(x''_3,\cdots\cdots x''_n)$.

上之變換,係根據 $a_{12}\neq0$ 之假設.若 $a_{12}=0$, 而 $a_{ij}\neq0$, 則僅需於記號,微加改動,卽可得相似之化法.於此僅有一例外情形,此種化法不能應用,卽二次方式所有係數均為零之時,但在此種情形之下,固無再約之可能,亦無再約之必要矣.

由此可見,凡遇蘭格倫日氏之化法不合用時,上述之法卽可應用,吾人之定理,因得完全成立.

習題

1. 已知 $n=5$ 之一二次方式,而 $a_{ij}=|i-j|$, 化之為方式(5).

2. 化二次方式

$$9x^2-6y^2-8z^2+6xy-14xz+18xw+8yz+12yw-4zw$$

為方式(5).

3. 若 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$ 為使一二次方式異於零之任意一點,則可得(且有無窮多方法)一平直變換,變此點為 $(0,0\cdots\cdots0,1)$, 其極線為 kx_n, 試證明之;並說明此種變換必消去二次方式中除 x_n^2 項外之其他一切含 x_n 各項,此時 x_n^2 之係數不為零.

4. 題3所述之變換,乃為能得該題所需之結果之唯一方法,試證明之.

5. 此節所述兩種化法,乃為題3所述之變換之特別情形,試證明之.

46. 法式及二次方式之相合. 在前節所述化簡法中,經過若干步驟後,ϕ 每可化成方式

$$c_1x_1^2+\cdots\cdots+c_kx_k^2+\phi_k(x_{k+1},\cdots\cdots x_n),$$

其中方式 ϕ_k 恆等於零.在此種情形之下,無再化之必要,且 ϕ 所化成之方式(5),如前節者,有一特點,即 $c_{k+1}=c_{k+2}=\cdots\cdots=c_n=0$,而在前之諸 c 則均異於零.此種情形,何時可發生,亦甚易明.

為達此目的計,注意§45中式(5)之方陣

$$\begin{Vmatrix} c_1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & c_2\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots c_n \end{Vmatrix}$$

此方陣之秩適與異於零之諸 c 之數相等;其理甚明,且因化簡後方式之秩與原有方式之秩相等,吾人遂得以下之結果:

定理一. 用非異平直變換,化一二次方式成方式

$$c_1x_1^2+\cdots\cdots+c_rx_r^2$$

而式中諸 c 均異於零,其充要條件,乃此二次方式之秩為 r.

方式(1)包含 r 個係數 $c_1\cdots\cdots c_r$. 若吾人注意變換

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{c_1}}\,x'_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = \sqrt{\dfrac{k_r}{c_r}}\,x'_r, \\ x_{r+1} = x'_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x'_n, \end{cases}$$

對 (1) 之影響,(式中 $k_1,\cdots\cdots k_r$ 為參變數,但均不為為零),則見諸 c 之值,除不得為零,無他限制. (2) 為非異變換而可化 (1) 為方式

$$(3)\qquad k_1x'^2_1+\cdots\cdots+k_rx'^2_r$$

由此吾人證得

定理二. 用一非異平直變換,可化一秩為 r 之二次方式成方式(3),式中常數 $k_1,\cdots\cdots k_r$ 可為任意規定,但須均不為零.

若在特別情形,使諸 k 之值為 1, 則得

定理三. 用一非異平直變換,可化任一二次方式成法式

$$(4)\qquad x_1^2+\cdots\cdots+x_r^2$$

由此即推出

定理四. 兩二次方式對非異平直變換相合之充要條件,乃其有相等之秩.

由秩為不變式之謂,易見此條件之充足者,蓋因若兩式之秩相等,則此兩式即能化為同一法式(4)也.

以法式(4),與其他由(3)式使諸k為特別值,所得之任何方式相較,除對稱而外,無他特殊便利可言.例如下之法式

$$x_1^2+\cdots\cdots+x_{r-1}^2-x_r^2$$

亦可用以代(3)在幾何研究中,易得實軌跡.

最後吾人須注意一事,即原有之方式,雖為實方式此節所用之變換,未必亦為實變換.

習 題

應用此節所得之結果於二次曲面.

47. 可約性. 若一二次方式恆等於兩平直方式之積,如

$$(1)\qquad \sum_1^n a_{ij}x_ix_j\equiv(b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n)(c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n)$$

時,則此二次方式,稱為可約(reducible).吾人現求此種情形之充要條件.先設恆等式(1)成立,再分別論(1)中右邊兩因子為平直獨立及成比例之兩種情形論之.在第一種情形之下,諸b不盡與相當諸c成比例,且僅須變換記號,吾人可使

b_1, b_2 不與 c_1, c_2 成比例. 此理既明, 卽得非異變換

$$\begin{cases} x'_1 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots\cdots + b_nx_n \\ x'_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n \\ x'_3 = \qquad x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = \qquad\qquad x_n \end{cases}$$

變二次方式為

$$x'_1x'_2$$

此方式之秩顯見為 2, 因知原方式之秩亦為 2.

轉論第二種情形, 卽 (1) 中兩因子成比例之時, 於此易見 (1) 可書如

$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j = C(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots\cdots + b_nx_n)^2, \qquad \text{式內 } C \neq 0.$$

若非 b 均為零(在此情形二次方式之秩為零)吾人可設 $b_1 \neq 0$, 而不失其普通性, 在此時取非異平直變換

$$\begin{cases} x'_1 = b_1x_1 + \cdots\cdots + b_nx_n \\ x'_2 = \qquad x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = \qquad\qquad x_n \end{cases}$$

卽化二次方式成

$$Cx'^2_1,$$

而其秩爲1.

由此吾人已明若一二次方式爲可約,其秩爲 0,1, 或 2. 吾人茲欲證明逆理,即任何二次方式以此三數之一爲其秩,必爲可約.

以0爲秩之二次方式顯爲可約.

用一非異平直變換,可化一以1爲秩之方式成方式 $x_1'^2$,即

$$\sum_1^n a_{ij}x_i x_j = x_1'^2$$

於此吾人若對 x_1' 值代以其含諸 x 之式,即顯見此方式爲可約.

以2爲秩之方式,可化成方式 $x_1'+x_2'^2$, 即

$$\sum_1^n a_{ij}x_i x_j \equiv x_1'^2+x_2'^2 \equiv (x_1'+\sqrt{-1}x_2')(x_1'-\sqrt{-1}x_2')$$

於此再對 x_1' 及 x_2' 代以其含諸 x 之式,即知其可約. 因得

定理. 一二次方式爲可約之充要條件,乃其秩不得大於2.

48. 二次方式之整有理不變式. 吾人已知一二次方式之判別式 a, 爲二權不變式 a 之任何整冪,或更普遍言之,此等冪與任何常數之積,亦爲不變式.吾人茲將證其逆理:

定理. 一二次方式之任何有理整不變式,乃爲其判別式之冪與常數之積.

吾人先設

(1) $$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

爲非異二次方式,並設 c 爲變此二次方式成法式

(2) $$x'^2_1 + x'^2_2 + \cdots\cdots + x'^2_n$$

之平直變換之行列式. 命 $I(a_{11},\cdots\cdots a_{nn})$ 爲任一有理整不變式,其權爲 μ, 並以 k 記從 (2) 推得之不變式之值,則 k 顯見爲常數,換言之,即對 (1) 之係數 a_{ij} 爲獨立. 故

$$k = c^{\mu} I$$

且判別式 a 之權爲 2, 對方式 (2) 之值爲 1, 故有

$$1 = c^2 a,$$

上二式各自乘二次及 μ 次,即得

$$k^2 = c^{2\mu} I^2, \quad 1 = c^{2\mu} a^{\mu}$$

由此立得

(3) $$I^2 = k^2 a^{\mu}$$

無論係數 a_{ij} 之值若何,只須 $a \neq 0$, 此式均能成立. 參閱 §2 之定理五,即立見此式對諸 a_{ij} 爲恆等. (3) 中右邊之多次式對 a_{11} 之次數爲 μ;* 因此 I^2 對於 a_{11} 之次數必爲偶數,而 μ 必爲一偶數. 命 $\mu = 2\nu$, 吾人由 (3) (參閱 §2 之習題 1) 可推知恆等式

$$I \equiv k a^{\nu}, \qquad I \equiv -k a^{\nu}$$

* 吾人此處假設 $k \neq 0$, 否則此定理更顯然爲眞.

必有一能成立,且任取其一,上定理均能成立.

比較§46之定理四與此節之結果,顯見§29所云不變式全系觀念之不同,就§29之定義2言,將見二次方式之秩本身卽此方式之不變式全系;據此定義下之附註而言,此方式之判別式本身,亦爲不變式全系.

49. 化二次方式爲平方項之和之第二法. 欲化一二次方式爲平方項之和,除蘭格倫日之法外,尙有其他多種方法,吾人玆將述一效用最廣者.此法依據下之三定理.其中第一定理之證明,本於克倫尼克(Kronecher),由此得一極簡之法,證得以r爲秩之任何二次方式,可僅書以r個變數表之,此理在§46之定理一內,曾用別法證明.

定理一. 若二次方式

$$\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv\sum_1^n a_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

之秩爲$r>0$,且若定諸變數$x_1,\cdots\cdots x_n$之次序,使其方陣左上角內之r行行列式異於零,* 則用一能使

$$x'_i=x_i \qquad (i=r+1,\cdots\cdots n)$$

且化(1)成方式

$$\sum_1^r a_{ij}x'_i x'_j$$

之非異平直變換得引入$x'_1,\cdots\cdots x'_n$諸新變數.

---

* 從§20之定理三,易見此種排列爲可能.

在是應注意此爲一 r 個變數之二次方式,其中所有各變數之係數與在已知方式(1)內者相同.

欲證此定理,吾人先用 §44 之方程式(3),求方式(1)之頂點 $(c_1,\cdots\cdots c_n)$ 因此等方程式之方陣左上角內之 r 到行列式異於零,故 $c_{r+1},\cdots\cdots c_n$ 可爲任意值,其他諸 c 則因是完全決定.若吾人設 $c_{r+1}=c_{r+2}=\cdots\cdots=c_{n-1}=0$, $c_n=1$, 即得一頂點

$$(c_1,\cdots\cdots c_r,\ 0,\cdots\cdots 0,\ 1).$$

用此頂點於 §44 之恆等式(5)內,即有

$$\phi(x_1+\lambda c_1,\cdots\cdots x_r+\lambda c_r,\ x_{r+1},\cdots\cdots x_{n-1},\ x_n+\lambda)\equiv\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)$$

若吾人使 $\lambda=-x_n$, 此種恆等式化爲

$$\phi(x_1-c_1x_n,\cdots\cdots x_r-c_rx_n,\ x_{r+1},\cdots\cdots x_{n-1},\ 0)\equiv\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)$$

於是吾人若行非異平直變換*

$$\begin{cases} x'_i=x_i-c_ix_n & (i=1,\cdots\cdots r) \\ x'_i=x_i & (i=r+1,\cdots\cdots n) \end{cases}$$

則二次方式(1)化爲

$$\phi(x'_1\cdots\cdots x'_{n-1},\ 0)\equiv\sum_1^{n-1}a_{ij}\,x'_i\,x'_j$$

此爲一 r 秩而亦含有 $n-1$ 個變數之二次方式,由排列時使其方陣左上角 r 列行列式異於零,用適所述之法,可化之成方式

$$\sum_1^{n-2}a_{ij}\,x''_i\,x''_j$$

*此變換當與 §41 之習題2相較.

式中所用之變換爲非異平直變換,且其中

$$x''_i = x'_i \qquad (i=r+1,\cdots\cdots n-1)$$

再加公式 $x''_n = x'_n$,

吾人可視之爲含 n 個變數之非異平直變換.此種變換,可與前所用之變換合併,而成一非異變換

$$x''_i = x_i \qquad (i=r+1,\cdots\cdots n-1)$$

此變換式卽化(1)成方式

$$\sum_1^{n-2} a_{ij} x_i'' x_j''$$

如此逐步演證,最後卽得證明定理.

在下二定理中,吾人仍照常例以 A_{ij} 代表二次方式(1)行列式中 a_{ij} 之元相餘式.

定理二. 若 $A_{nn} \neq 0$, 用一非異平直變換,引入新變數 $x'_1,\cdots\cdots x'_n$, 其中

$$x'_n = x_n$$

幷使(1)成方式

$$\sum_1^{n-1} a_{ij} x'_i x'_j + \frac{a}{A_{nn}} x'^2_n$$

欲證此理,吾人先察二次方式

$$\sum_1^{n} a_{ij} x_i x_j - \frac{a}{A_{nn}} x_n^2$$

其判別式爲

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-1,1}\cdots a_{n-1,n-1}, & a_{n-n,n} \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{n,n-1} & a_{nn}-\dfrac{a}{A_{nn}} \end{vmatrix} = a - A_{nn}\frac{a}{A_{nn}} = 0.$$

因此用前定理所用之非異變換 $x'_n = x_n$, 即得

$$\sum_1^n a_{ij}\, x_i\, x_j - \frac{a}{A_{nn}}\, x_n^2 \equiv \sum_1^{n-1} a_{ij}\, x_i' x_j',$$

或

$$\sum_1^n a_{ij}\, x_i\, x_j \equiv \sum_1^{n-1} a_{ij}\, x_i' x_j' + \frac{a}{A_{nn}}\, x_n'^2.$$

定理三. 若 $A_{nn}=A_{n-1,\,n-1}=0,\ A_{n,\,n-1}\neq 0$ 則用一非異變換,可引入新變數 $x_1',\cdots\cdots x_n'$, 其中

$$x'_{n-1}=x_{n-1}, \qquad x'_n = x_n,$$

而使(1)成方式

$$\sum_1^{n-2} a_{ij}\, x_i' x_j' + \frac{2a}{A_{n,\,n-1}}\, x'_n\, x'_{n-1}.$$

設吾人以 B 代表由 a 抽去最後兩列及最後兩行所得之行列式,則(參閱 §11 之系三)有

$$(2) \qquad aB = \begin{vmatrix} A_{n-1,\,n-1} & A_{n-1,\,n} \\ A_{n,\,n-1} & A_{nn} \end{vmatrix} = -A_{n,\,n-1}^2 \neq 0$$

茲再取二次方式

$$(3)\qquad \sum_1^n a_{ij}x_ix_j-\frac{2a}{A_{n,\,n-1}}x_nx_{n-1},$$

其判別式

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1,\,1}\cdots\cdots a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n}-\dfrac{a}{A_{n\,n-1}} \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{n,\,n-1}-\dfrac{a}{A_{n,\,n-1}} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a-A_{n,\,n-1}\frac{a}{A_{n,\,n-1}}-A_{n,\,n-1}\frac{a}{A_{n,\,n-1}}-B\left(\frac{a}{A_{n,\,n-1}}\right)^2.$$

依 (2) 易見此值爲零. 不獨行列式 (4) 爲零, 卽抽去其最後一列與最後一行及其倒數第二列及倒數第二行, 所得之兩主子式 A_{nn} 及 $A_{n-1,\,n-1}$ 亦均爲零. 由 (4) 抽去最後兩列及最後兩行所得之子式爲 B, 據 (2) 知此值異於零. 由此卽知 (參閱 § 20 之定理一) 行列式 (4) 之秩爲 $n-2$. 再依定理一, 吾人可用一非異平直變換, 其中

$$x'_{n-1}=x_{n-1},\qquad x'_n=x_n$$

以化 (3) 成方式

$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j-\frac{2a}{A_{n,\,n-1}}x_nx_{n-1}\equiv\sum_1^{n-2}a_{ij}x_i'x_j',$$

故
$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j\equiv\sum_1^{n-2}a_{ij}x_i'x_j'+\frac{2a}{A_{n,\,n-1}}x'_nx'_{n-1}.$$

系. 若定理三之條件成立,則用一非異平直變換,二次方式(1)得化爲方式

$$\sum_{1}^{n-2} a_{ij} x_i' x_j' + \frac{2a}{A_{n,\,n-1}} (x'^2_{n-1} - x'^2_n)$$

欲明此理,僅須用定理三之化法,再加用非異變換

$$\begin{cases} x'_i \;\;= x''_i & (i=1,\,2,\cdots\cdots n-2) \\ x'_{n-1} = x''_{n-1} - x''_n \\ x'_n \;\;= x''_{n-1} + x''_n \end{cases}$$

卽可.

此三定理既得,化簡二次方式之完全方法卽明,若(1)爲異二次方式,吾人先依定理一化之成

$$\sum_{1}^{r} a_{ij} x_i x_j,$$

式中 r 卽爲方式之秩.若非此式之判別式內所有之 r 列主子式均等於零,則對 $x_1,\cdots\cdots x_r$ 可作一適當之排列,依定理二之化法爲可能,而此種化法可視爲含有 n 變數之非異平直變換.若所有 $(r-1)$ 一行主子式爲零,則諸元相餘式 A_{ij} 中必有一異於零,且對使諸變數之次序,作適當排列後,卽可使此異於零之元相餘式之 $A_{r,\,r-1}$. 如此則定理三系中之化法爲可能.如此逐步推演,終得如 §46 之定理一之結果,卽一秩爲 r 之二次方式,常能用一非異平直變換,化成方式

$$c_1 x_1^2 + \cdots\cdots + c_r x_r^2.$$

有堪注意者,此節變換之排置,有適與§45相反之處,因吾人在此逐步不變方式內與變換無關之係數,但變與變換有關之諸變數;在§45則變動與變換無關之諸係數,但不變其變數.

第十一章

實二次方式

50. 定號律. 吾人茲欲研究實二次方式及實平直變換對之之影響.

吾人首須注意,前章所用之運算,均爲有理運算(卽加,減,乘,除),但有一特例,卽在§46之公式(2)內有根號.在特別情形如§45之化法(或§49之另一化法)祇含有理運算.因凡實量經有理運算之後,仍爲實量,故有

定理一. 用一實非異平直變換,可化r秩之實二次方式爲方式

(1) $$c_1x_1'^2+c_2x_2'^2+\cdots\cdots+c_rx_r'^2,$$

式中$c_1,\cdots\cdots c_r$爲異於零之實常數.

吾人在前章已見此種結果,可由若干化法得之,且化簡後諸係數$c_1,\cdots\cdots c_r$之値,因化法不同而各異.但此等諸係數之正負號,若不論發現之次序,則不因所取之化法而改,此卽下文雅科比(Jacobi)及西薇爾斯忒(Sylvester)所發明之定理,西氏稱之爲二次方式之定號律(law of inertia):

定理二. 若一 r 秩之實二次方式,因兩實非異平直變換而各化爲方式(1)及

(2) $$k_1x_1''^2+k_2x_2''^2+\cdots\cdots+k_rx_r''^2$$

則(1)中諸正 c 之數,等於(2)中諸正 k 之數.

欲證此理,吾人先定諸 x' 及諸 x'' 之次第,依使前諸 μ 個 c 及前諸 ν 個 k 爲正,其餘之諸 c 及諸 k 爲負.若吾人能證 $\mu=\nu$,則吾人欲證之定理自成立.若 μ 不等於 ν,則兩整數 μ 及 ν 之中,必有一較大,茲設 $\mu>\nu$. 吾人將證由此假設必得矛盾之結果.

吾人如視諸 x' 及諸 x'',僅爲諸 x 之某種平直方式之簡式,則(1)及(2)兩者均與原有之二次方式恆等,卽亦互爲恆等.此種恆等式可書如

(3) $$c_1x_1'^2+\cdots\cdots+c_\mu x_\mu'^2\big|-c_{\mu+1}\,|x_{\mu+1}'^2-\cdots\cdots-|\,c_r\,|x_r'^2$$
$$\equiv k_1x_1''^2+\cdots\cdots k_\nu x_\nu''^2-|\,k_{\nu+1}\,|x''^2_{\nu+1}-\cdots-|k_r|x_r''^2.$$

吾人再察含 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 之平直齊次聯立方程式

(4) $$x_1''=0,\cdots\cdots x_\nu''=0,\quad x_{\mu+1}'=0,\cdots\cdots x_n'=0.$$

於此得方程式之數,爲 $\nu+n-\mu<n$. 依據 §17 定理三之系,可知吾人解此諸方程式,必能得不盡於零之一解.命 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$ 爲如此之一解,又諸常數 $y_1,\cdots\cdots y_n$ 代諸變數 $x_1,\cdots\cdots x_n$ 後之 x_i' 及 x_i'' 諸值,以 y_i',y_i'' 記之.在(3)中以諸 y 代諸 x 卽得

$$c_1y_1'^2+\cdots\cdots+c_\mu y_\mu'^2=-|\,k_{\nu+1}\,|y''^2_{\nu+1}-\cdots\cdots-|\,k_r\,|y_r''^2$$

式之左邊不能爲負,式之右邊不能爲正,故二者須均等於零;

此事僅於

$$y_1'=\cdots\cdots y_\mu'=0$$

方爲可能,但從(4)吾人亦有　$y_{\mu'+1}=\cdots\cdots=y_n'=0$

即$(y_1,\cdots\cdots y_n)$爲含n變數一組適合平直齊次方程式

$$x_1'=0,\quad x_2'=0,\quad \cdots\cdots x_n'=0$$

之不盡爲零之一解.則此等方程式之行列式必須爲零,即變換諸x爲諸x'之變換,乃爲異平直變換.由此即得一矛盾結果,定理於是證明.

對於任何實二次方式,均可求得二相關整數P及N,即該式用任何實非異平直變換化爲(1)後,其中正係數與負係數之數也.此二數對實非異平直變換,顯爲二次方式之算術不變式,蓋因用如此變換可互化之兩實二次方式必能同化爲方式(1)*.

適得之兩算術不變式P及N,與前所得之算術不變式r,非互爲獨立,蓋有關係式

$$P+N=r \tag{5}$$

聯絡之,故兩不變式P及N,非盡爲必需者,而可任意捨棄其一.但實際上,既不用P,亦不用N,爲便利起見,多用二者之差

$$s=P-N$$

稱爲二次方式之標數 (signature).

定義. 所謂二次方式之標數者,即用一任意實非異平

* P有時稱爲二次方式之定號指數 (index of inertia)

直變換,化一二次方式爲方式(1)後,正係數之數與負係數之數之差也.

因上用之整數 P 及 N 爲算術不變式,故其差 s 亦爲算術不變式.但須注意,s 不必爲正整數.吾人由此證得

定理三. 一二次方式之標數,對實非異平直變換,爲算術不變式.

習題

1. 一二次方式之秩 r 及標數 s,必同爲奇數或同爲偶數;且

$$-r\leqq s\leqq r$$

試證明之.

2. 任意二整數 r 及 s(r 爲正數或爲零)能滿足習題一之條件者,可視爲一二次方式之秩及標數,試證明之.

3. 一秩爲 r,標數爲 s 之實二次方式,可分解爲兩一次因子之充要條件,乃

$$r<2;$$

$$\text{或}\quad r=2,\quad s=0,$$

試證明之.

4. 若記諸 x 之使在下組

$$A_0=1,\quad A_1=a_{11},\quad A_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\cdots\cdots A_r=\begin{vmatrix}a_{11}\cdots\cdots a_{1r}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}\cdots\cdots a_{rr}\end{vmatrix}$$

內,無兩相鄰之兩 A 爲定,並使 $A_r\neq 0$,則一以 r 爲秩之二次方式稱爲依規則排列 (regularly arranged) (參閱 § 20 之定理四). 若爲實方式且諸 A 之中有一爲零,則兩相鄰之 A 之符號相反.

[提示. 在此習題及以下諸習題可參考 § 49 之作法.]

5. 若爲零之諸 A 可任意視爲正號或負號,則一依規則排列之實二次方式之標數等於一貫諸 A 內不變號 (permanences) 之數減變號 (variations) 之數,試證明之.

6. 設由下列諸方程式

$$\operatorname{sgn} x=+1 \qquad x>0$$

$$\operatorname{sgn} x=\ \ 0 \qquad x=0$$

$$\operatorname{sgn} x=-1 \qquad x<0$$

所定之代數式,稱爲 $\operatorname{sgn} x$ (讀爲 signum x), 則一以 r 爲秩,且依規則排列之實二次方式之標數爲

$$\operatorname{sgn}(A_0A_1)+\operatorname{sgn}(A_1A_2)+\cdots\cdots+\operatorname{sgn}(A_{r-1}A_r).$$

試證明之.

51. 實二次方式之分類. 在前節已見對於實非異變換,一實二次方式有兩不變式,——即爲其秩及其標數.本節所欲樹立之主要結果(定理二)即爲此二不變式成一全系.

若在 §46 內,諸 c 及諸 k 爲實數,必須且僅須每 c 與其相當之 k 有相同之符號,(2) 即爲實變換.故從該節之理,吾人所能推出者,即若一秩爲 r 之二次方式,能用一實非異平直變換,化爲方式

$$c_1x_1^2+\cdots\cdots+c_rx_r^2$$

亦必能用一實非異平直變換,化爲方式

$$k_1x_1^2+\cdots\cdots+k_rx_r^2$$

式中諸 k 爲任意異於零之已知常數,但有與相當之 c 有同號之限制.若以 P 及 N 代諸正 c 及負 c 之數,則排列此變換可使在前之 P 個 c 爲正,在後之 N 個 c 爲負.於是在前之 P 個 k

可取爲 $+1$,在後之 N 個 k 可取爲 -1. 從 §50 之方程式(5)及(6)可知 P 及 N 可以方式之秩及標數表示之,如公式

$$(1)\qquad P=\frac{r+s}{2},\qquad N=\frac{r-s}{2}$$

因得下之定理:

定理一. 秩爲 r 及標數爲 s 之實二次方式,可用一實非異平直變換,化爲方式

$$(2)\qquad x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_p^2-x^2_{p+1}-\cdots\cdots-x_r^2$$

式中 P 由(1)定之.

至是吾人能證明下之定理:

定理二. 兩實二次方式,對一實非異平直變換爲相合之充要條件,乃此兩式有相等之秩及相等之標數.

此爲必要條件,及從秩及標數爲不變式易見之.此爲充足條件,蓋若兩方式有相同之秩,及相同之標數,可同化爲法式(2),於此理卽可得之.

定義. 對於實非異平直變換,與一已知方式爲相合之所有諸實二次方式,自亦互爲相合,而稱爲成一集* (class).

例如每一實非異二次方式含四個變數,必能化爲五法式

---

*凡當含有互換之觀念時,此名稱亦可同樣用之.

$$
(3)\qquad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2 \\ x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2 \\ x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2 \\ -x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2 \end{cases}
$$

中之一,此等諸法式必屬於定値爲

$$s=4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\quad r=4$$

五集中之一.

然若在若干幾何問題中,吾人不論二次方式之本身如何,但論使此等方式等於零之諸方程式,則因兩方程式若左邊僅爲異號,則爲相同,適所分三集之數,約減少一半.

由此可知,有實方程式之非異二次曲面,僅有三集,使(3)中之前三方式等於零,即得其法式.若用非齊次坐標,此等方程式爲

$$X^2+Y^2+Z^2=-1$$

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

$$X^2+Y^2-Z^2=1$$

第一式代表一虛球,第二式代表一實球,第三式代表一正雙曲線繞其共軛軸旋轉所成之一枝雙曲體.并易證得此最後之曲面,亦可由任一直線如

$$Y=1,\qquad X=\pm Z$$

繞 Z 軸旋轉而成.由此遂得

定理三. 實方程式之非異二次曲面,有且僅有三集.在第一集內,盡爲虛曲面;在第二集內盡爲實曲面,但其母線爲虛;在第三集內,盡爲實曲面,且經過其實點之母線亦盡爲實.*

如用實非異直射變換,可彼此互化之二次曲面,視爲相合,據此見解,上之分類已爲完備.較爲普通之分類,不採投影性之觀點,在第二集內尙有橢圓面 (ellipsoids), 兩枝雙曲面 (biparted hyperboloid) 及橢圓抛物面 (elliptic paraboloids) 之別;在第三集內,尙有一枝雙曲面 (unparted hyperboloids) 及雙曲抛物面 (hyperbolic paraboloids) 之別.

習題

1. 含 n 變數之實二次方式有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 集,試證明之.
2. 依據此節所述,試給據有實方程式之異二次曲面一完全分類.

52. 有定方式及無定方式. (Definite and indefinite forms).

定義. 所謂一無定方式者,即一實二次方式,若用一實非異平直變換化爲法式(2),其中正負號均有之.其他均稱爲有定†方式;有定方式亦依在法式內所有之項全爲正或全爲

---

*若吾人不論實二次方式,但論實齊次二次方程式如上所述者,則不能用 s, 必用 $|s|$ 爲不變式.吾人可用所謂二次方式之範數 (characteristic) 者以代 $|s|$, 該數卽兩整數 P 及 N 中之較小者,蓋卽 $(\frac{1}{2}r-|s|)$ 也.

†若干著作家,專對非異方式用有定一名詞,對異有定方式則稱爲半有定 (semidefinite) 方式.

負而分正負二種.

換言之,若$s=\pm r$,則秩爲r,標數爲s之實二次方式爲有定二次方式,否則爲無定二次方式.*

有定及無定二名詞,實由下之基本性質而立:

定理一. 一無定二次方式,對於諸變數之若干實值爲正,對於其他之實值爲負.一正有定方式對於諸變數所有之實值爲正或爲零;一負有定方式對於諸變數所有之實值則爲負或爲零.

此定理中關於有定方式之部分,可直接從定義推得.欲證關於無定方式之部分,可設該方式因一實非異平直變換化爲法式.

$$(1)\qquad x_1'^2+x_2'^2+\cdots\cdots+x_P'^2-x'^2_{P+1}-\cdots\cdots-x_r'^2.$$

視諸x'爲諸x某種實平直變換之簡式,吾人可取下之一組$n-P$個齊次平直方程式.

$$(2)\qquad x'_{P+1}=0,\quad x'_{P+2}=0,\cdots\cdots x'_n=0.$$

因此等皆爲實方程式,且方程式之數較變數之數爲多,故必有非全等於零之一解.命$(y_1,\cdots\cdots y_n)$爲如此之一解.此解不能適合諸方程式.

$$(3)\qquad x_1'=0,\cdots\cdots x_P'=0$$

蓋因方程式(2)及(3)連合成含n變數之一組平直齊次方程式,且其行列式卽爲化已知二次方式成法式(1)之平直變換

*換言之,有定方式爲條件,乃其標數爲零.參閱§51定理三之註.

之行列式,不能爲零.於是由變換後之方式(1),吾人可見若於已知二次方式內以$(y_1,\cdots\cdots y_n)$代諸變數$(x_1,\cdots\cdots x_n)$,此方程將有正值.

同理,選諸x爲諸方程式

$$x_1'=0,\cdots\cdots x_p'=0,\quad x_{r+1}'=0,\cdots\cdots x_n=0$$

非全爲零之一實解,吾人可見該二次方式即有負值.

吾人茲將轉述若干定理,讀者若注意$n=4$時之幾何意義,將對此等定理,更感受趣味.

定理二. 若一無定方式在實點$(y_1,\cdots\cdots y_n)$爲正,且在實點$(z_1,\cdots\cdots z_n)$爲負,則必有與此兩點平直相關,而自身互爲獨立之兩實點,使此二次方式爲零,但兩點之中,無一爲此方式之頂點.

二次方式

$$\sum_1^n a_{ij}\,x_i\,x_j \tag{4}$$

在點$(y_1+\lambda z_1,\cdots\cdots y_n+\lambda z_n)$爲零之條件,乃

$$\sum_1^n a_{ij}\,y_i\,y_j+2\lambda\sum_1^n a_{ij}\,y_i\,z_j+\lambda^2\sum_1^n a_{ij}\,z_i\,z_j=0$$

因從假設,(4)在y爲正,在z爲負,即有

$$\left(\sum_1^n a_{ij}\,y_i\,z_j\right)^2-\left(\sum_1^n a_{ij}\,y_i\,y_j\right)\left(\sum_1^n a_{ij}\,z_i\,z_j\right)>0$$

故上之λ二次方式有兩相異之實根.

命此二根爲λ_1及λ_2,則

(5)　$(y_1+\lambda_1 z_1,\cdots\cdots y_n+\lambda_1 z_n),\quad (y_1+\lambda_2 z_1,\cdots\cdots y_n+\lambda_2 z_n)$

為二實點與使(4)為零之兩點 y 及 z 平直相關者.

次須注意

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} y_i+\lambda_1 z_i & y_j+\lambda_1 z_j \\ y_i+\lambda_2 z_i & y_j+\lambda_2 z_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\lambda_1 \\ 1\lambda_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i y_j \\ z_i\, z_j \end{vmatrix}$$

因兩點 y 及 z 為平直獨立,故可選擇兩整數 i, j 使(6)之右邊第二行列式異於零.則在(6)之左邊行列式亦必異於零;故知諸點(5)為平直獨立.

終證諸點(5)之中無一為頂點,為簡明起見,記之以

$$(Y_1,\cdots\cdots Y_n),\quad (Z_1,\cdots\cdots Z_n),$$

並設 $\lambda_1-\lambda_2=1/\mu$, 即得

$$zi=\mu Y_i-\mu Z_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

故有

$$(7)\qquad \sum_1^n a_{ij}\, z_i\, z_j=\mu^2\sum_1^n a_{ij}\, Y_i\, Y_j-2\,\mu^2\sum_1^n a_{ij}\, Y_i\, Z_j + \mu^2\sum_1^n a_{ij}\, Z_i\, Z_j,$$

因兩點 Y 及 Z 由使(4)為零所得,故(7)之右邊第一項及最後一項為零.若 Y 及 Z 為一頂點,則中間一項亦必為零,但因從假設(7)之左邊為負,故此為不可能.定理因之得證.

為欲所論完全起見,再加下之顯然確鑿之系.

系. 凡與 y 及 z 平直相關,而使該二次方式為零之點,皆必與上述定點中言及之點之一或其他,成平直相關;且此

等點無一爲頂點者.

吾人茲將述一定理,在二次方式論中佔極重要之位置.

定理三. 一實二次方式爲有定二次方式之充要條件,乃除諸頂點及 $(0,\cdots\cdots 0)$ 一點而外,無一實點能使該二次方式爲零.

先設有一實二次方式,除其頂點及 $(0,\cdots\cdots 0)$ 一點外無其他實點,能使之爲零.若其爲無定二次方式,則吾人能(定理一)得二點 y 及 z,一使之爲正,一使之爲負.由此(定理二)吾人即能求得二實點,與 y 及 z 二點平直相關,且使二次方式爲零.因從定理二可知此二點爲平直獨立,故無一能爲點 $(0,\cdots\cdots 0)$.且無一能爲頂點.由此吾人可知必爲有定方式,充足條件,遂得以成立.

尚有待證者,即爲有定方式,只能於其頂點爲 $(0,\cdots\cdots 0)$ 爲零.

設(4)爲有定方式,且設 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$ 爲使之爲零之任意一實點,則

$$\sum_1^n a_{ij}(x_i+\lambda y_i)(x_j+\lambda y_j)\equiv\sum_1^n a_{ij}\,x_i\,x_j+2\lambda\sum_1^n a_{ij}\,x_i\,y_j$$

若 y 既非頂點亦非點 $(0,\cdots\cdots 0)$, $\Sigma a_{ij}\,x_i\,x_j$ 將不恆等於零.且吾人能得一實點 $(z_1,\cdots\cdots z_n)$ 使

$$k=\sum_1^n a_{ij}\,z_i\,y_j\neq 0$$

若命
$$c=\sum_1^n a_{ij}\,z_i\,z_j,$$
即得

$$\sum_1^n a_{ij}(z_i+\lambda y_i)(z_j+\lambda y_j)=c+2\lambda k. \tag{8}$$

對於λ之某一實值，此方程式之左邊即為二次方式(4)在某實點之值.故λ之值雖異，而方程式左邊不變號，但(8)之右邊對於λ之大正值須負值須變號.由此即明由假設 y 非頂點非點$(0,\cdots\cdots 0)$而得矛盾之結果；定理得以證明.

系. 欲一非異有定二次方式對諸變數之實值為零，僅當諸變數均為零時始可.

此系有一簡單之應用，即據此可得

定理四. 一非異有定二次方式內平方項之係數均異於零.

蓋若設(4)即為非異有定方式；且 $a_{ii}=0$，則此方式將於
$$x_1=\cdots\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots\cdots=x_n=0,\quad x_i=1$$
一點為零，但因此點非為$(0,\cdots\cdots 0)$，故此為不可能.

習　題

1. 定義. 所謂一直交變換* (orthogonal transformation) 者，即一化諸變數$(x_1,\cdots\cdots x_n)$為諸變數$(x_1',\cdots\cdots x_n')$為平直變換，而使

---

* 此種變換之方陣，稱為直交方陣，其行列式稱為直交行列式.

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=x_1'^2+x_2'^2+\cdots\cdots+x_n'^2$$

任何直交變換爲非異變換,且其行列式之値必爲 +1 或 −1,試證明之.

2. 所有包含 n 變數之直交變換成一羣,試證明之;且所有包含 n 變數行列式之 +1 之直交變換亦如是,試證明之.

3. 一平直變換爲直交變換之充要條件,乃其能使每兩點 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$ 及 $(z_1,\cdots\cdots z_n)$ 間"距離"

$$\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2+\cdots\cdots+(y_n-z_n)^2}$$

爲不變式,試證明之.

4. 若 $n=3$, 且視 x_1, x_2, x_3 爲空間內之非齊次垂直坐標, 則一直交變換代表一剛性移動, 使原點不變, 或代表此種移動與經過原點一平面內之反射結合所得之移動.

若變換之行列式爲 +1, 則爲第一種情形,若變換之行列式爲 −1, 則爲第二種情形,試說明之.

5. 若照常以 c_{ij} 代表一平直變換內之係數直交變換之充要條件, 乃爲

$$c_{1i}^2+c_{2i}^2+\cdots\cdots+c_{ni}^2=1 \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots n),$$

$$c_{1i}\,c_{1j}+c_{2i}\,c_{2j}+\cdots\cdots+c_{ni}\,c_{nj}=0 \quad \begin{cases} i=1,\ 2,\cdots\cdots n \\ j=1,\ 2,\cdots\cdots n, \end{cases} j\neq i.$$

試證明之.

若每一 c 之上下標對調* (interchanged), 則此等仍爲直交變換之充要條件, 試證明之.

---

* 此處對於變換之 n^2 個係數, 有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 關係式, 此卽示明所有之係數可以其中

$$n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

個係數表之,或謂爲以 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 他種參數表之亦可.欲悉開來氏 (Cayley) 對於此問題之討論,可參閱巴斯加書 (Pascal's book) § 47 之 Die Determinanten). 但開來氏公式,除於極限情形外,並不包含一切之直交變換.

第十二章

二次方式與一或數平直方式合成之組

53. 平面及直線與一二次曲面之關係. 若平面

$$(1) \qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

爲二次曲面

$$(2) \qquad \sum_1^4 a_{ij}x_ix_j=0$$

之眞切面,則必有一點 (y_1,y_2,y_3,y_4) (名爲切點 point of contact) 在 (1) 內,使其極面

$$(3) \qquad \sum_1^4 a_{ij}x_iy_j=0$$

與 (1) 相合.從初等解析幾何,吾人巳知兩一次方程式代表同一平面之充要條件,乃爲此兩方程式之係數成比例,於是從 (1) 及 (3) 之相合,推得下列諸方程式

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4-\rho u_1=0, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4-\rho u_2=0, \\ a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4-\rho u_3=0, \\ a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4-\rho u_1=0 \end{cases}$$

從點y合在(1)內之事實,吾人更能推出關係式

$$u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3+u_4y_4=0 \tag{5}$$

方程式(4)及(5)乃依(1)爲(2)眞切面之假設而得.若(1)爲假切面,則二次曲面必爲一錐面,而此錐面之頂點,必在(1)上,故(4),(5)兩式仍成立.命y爲此頂點,方程式(5)即能適合.(3)之左邊恆等於零,故若命$\rho=0$,則(4)亦必滿足.由此吾人已明在各種情形中,若(1)爲(2)之切面,則必有五常數y_1,y_2,y_3,y_4,ρ存在,能滿足方程式(4)及(5),且前四者不全爲零.因得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & a_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} 0. \tag{6}$$

反言之,若此方程式能成立,則必有不盡爲零之五常數y_1,y_2,y_3,y_4,ρ存在能適合於方程式(4)及(5).吾人可進斷y_1,y_2,y_3,y_4亦不能盡爲零,否則從諸方程式(4)及諸u非全等於零之事實,可見ρ必爲零.由此可見若方程式(6)能適合,則在平面(1)內必有一點(y_1,y_2,y_3,y_4)存在,此點之坐標及某常數ρ,必能滿足(4).若$\rho=0$,此即表示二次曲面爲以y爲頂點之錐面,(1)至少亦須爲一假切面.若$\rho\neq0$,由諸方程式(4),即明y之極面(3)及平面(1)相合.吾人再從幾何方面觀察,或以y_1,y_2,y_3,y_4各乘諸方程(4)而相加,即可示明y點在此二次曲面上;故在

此種情形,(1)爲眞切面.

因得下之定理:

定理一　方程式(6)乃平面(1)與二次曲面(2)相切之充要條件.

從此定理,不能分別錐面之眞切面及假切面.對於非異二次曲面,假切面爲不可能,故在此種情形,可視方程式(6)爲二次曲面平面坐標之方程式.

若二次曲面之秩爲3,卽一有獨一頂點之錐面,經過此頂點任何平面之坐標 (u_1,u_2,u_3,u_4) 必能滿足(6).故在此種情形,此種方程式代表一單獨點,非爲二次錐面*(quadric cone).*

若(2)之秩小於(3),則因空間內任一平面必經過一頂點而爲一切面,故其坐標必能滿足(6).如注意方程式(6)可書爲

$$\sum_{1}^{4} A_{ij}\, u_i\, u_j = 0,$$

式中諸 A 照通常規定,代表判別式(2)中之元相餘式,則上之事實,亦可顯明.

吾人玆將轉論一直線與二次曲面(2)相切之情形.吾人定此直線爲平面(1)及

(7)　$$v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4=0$$

之交線.

---

* 用平面坐標,一單獨方程式,實不足以代表一錐面.

若此兩平面之交線爲(2)之眞切線,則必有一點$(y_1\ y_2, y_3, y_4)$在其上使其極面(3)經過此種直線,此點卽爲切點.故必能書此極面之方程式爲

$$\sum_1^4 (\mu u_i + \nu v_i) x_i = 0, \tag{8}$$

事實上,如特別選擇常數μ及ν,不獨可使(8)之係數與(3)之係數成比例,且可使之相等:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 - \mu u_1 - \nu v_1 = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 - \mu u_2 - \nu v_2 = 0, \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 - \mu u_3 - \nu v_3 = 0, \\ a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 - \mu u_4 - \nu v_4 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

因y點在平面(1)及(7)之交線上,故又有關係式

$$\begin{cases} u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 = 0 \\ v_1y_1 + v_2y_2 + v_3\ y_3 + v_4y_4 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

因六方程式(9)及(10)得由不盡爲零之六常數$y_1, y_2, y_3, y_4, \mu, \nu$適合之,故吾人最後得推出關係式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & a_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & a_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

此方程式乃由假設(1)及(7)之交線爲(2)之眞切面而得.若此直線爲一假切面,或爲(2)之母線,(11)均能成立,此理留待讀者自證之.

學者更可自證,若(11)能成立,則(1)及(7)之交線必爲一眞切線,或假切線,或母線,因是遂得下之定理:

定理二. 平面(1)及(7)之交線爲(2)之切線或母線之充要條件,乃方程式(11)能成立.

展開(11)之行列式,易見其爲六個直線坐標q_{ij}(參閱§35之習題3)之二次方式.故若曲面非爲錐面,或爲單獨頂點之錐面,則方程式(11)可視爲二次曲面之眞線坐標方程式.若(2)之秩爲2,二次曲面成二平面,(11)卽爲此二平面交線之方程式.至若秩爲1或0,則(11)恆能適合.

習　題

1. 若兩平面互爲極點,則稱爲一非異二次曲面之共軛(conjugate)面.

若(2)爲非異二次曲面,則(1)與(7)對此面爲共軛之充要條件,乃下之行列式爲零

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = -\sum_1^4 A_{ij}\, u_i\, v_j.$$

試證明之.

欲使此定理對於異二次曲面亦合,將如何推廣共軛面之定義?

2. 若(2)爲非異二次曲面,則三平面交點在(2)上之充要條件,乃爲(2)之判別式再加三平面中係數爲邊綫所成之七次行列式爲零.試證明之.

3. 設由幾何方面,證明一直線與一非異二次曲面相切之充要條件,乃凡經過此直線之二切面必相合;若(2)爲非異曲面,(1)及(7)之交線與(2)相切之充要條件,乃

$$\left(\sum_1^4 A_{ij}\,u_i\,u_j\right)\left(\sum_1^4 A_{ij}\,v_i\,v_j\right)-\left(\sum_1^4 A_{ij}\,u_i\,v_j\right)^2=0,$$

試證明之.

4. 從代數方面說明習題3之條件與(11)相合.

54. 附屬二次方式及其他不變式. 茲進論 n 變數之情形,吾人先及一組合一二次方式及一單獨平直方式

$$(1)\qquad \sum_1^n a_{ij}\,x_i\,x_j,$$

$$(2)\qquad \sum_1^n u_i\,x_i,$$

由前節之幾何考察提示,吾人試作代數式

$$(3)\qquad \sum_1^n A_{ij}\,u_i\,u_j\equiv-\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} & u_1\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} & u_n\\ u_1\cdots\cdots u_n & 0\end{vmatrix}$$

易見此爲$(u_1,\cdots\cdots u_n)$諸變數之二次方式;其方陣爲(1)之方陣之附屬方陣.吾人卽稱(3)爲(1)之附屬方式(adjoint).

若$n=4$,(3) 之爲零,乃爲一投影關係之充要條件,從此事實.易見 (3) 爲不變式.實則吾人將證下之定理:

定理一. 附屬方式(3)乃爲(1),(2)一對方式之二權不變式.

從§34吾人已見諸u爲諸x之逆步變數,吾人亦可稱(3)爲逆步不變式(參閱§34之定義二).

欲證此定理,吾人必先使諸x經一平直變換

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1=c_{11}x_1'+\cdots\cdots+c_{1n}x_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}x_1'+\cdots\cdots+c_{nn}x_n' \end{cases}$$

其行列式吾人令之爲c,且以a'_{ij}及u'_i各表(1)及(2),因此變換所得之新二次方式及一次方式之係數.

吾人再加一補助變數t,並注意$x_1,\cdots\cdots x_n$, t之二次方式

$$(5)\qquad \sum_1^n a_{ij}\,x_i\,x_j+2\,t(u_1x_1+\cdots\cdots+u_n\,x_n).$$

此式之判別式,即爲(3)內之行列式,即爲(1)之附屬行列式加以負號.

茲使諸變數$x_1,\cdots\cdots x_n$, t受公式(4)所定之平直變換及新加之公式

$$(6)\qquad t=t'$$

此種變換之行列式爲c,且變方式(5)爲

$$\sum_{1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j + 2t'(u_1' x'_1 + \cdots\cdots + u'_n x'_n)$$

從(5)之判別式爲二權不變式之事實,吾人推出欲得之關係式:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} \cdots\cdots a'_{1n} & u'_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a'_{n1} \cdots\cdots a'_{nn} & u'_n \\ u'_1 \cdots\cdots u'_n & 0 \end{vmatrix} \equiv c^2 \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} & u_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} & u_n \\ u_1 \cdots\cdots u_n & 0 \end{vmatrix},$$

適所用之方法可立卽推廣而證明下述較爲普遍之定理:

定理二. 若有含一 n 變數之二次方式及 p 個平直方式之一組,則由二次方式之判別式再將平直方式之係數增加 p 行及 p 列,所得之 $(n+p)$ 次行列式爲二權不變式.

此定理留待讀者自證.

若二次方式(1)之判別式 a 異於零,吾人卽能作一二次方式,使其方陣爲(1)之方陣之逆.此種二次方式稱爲(1)之逆(inverse)方式或倒(reciprocal)方式,此式不過(1)之附屬式除以判別式 a 而得.關於此,吾人將證下之定理:

定理三. 若(1)爲非異二次方式,則必因非異變換.

(7) $$x'_i = a_{i1}x_1 + \cdots\cdots + a_{in}x_n \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

而化爲其逆式.

因
$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j \equiv \sum_1^n x_ix'_i$$

但從 (7) 可得
$$x_i = \frac{A_{i1}}{a}x'_1 + \cdots\cdots + \frac{A_{in}}{a}x'_n$$

故
$$\sum_1^n a_{ij}x_ix_j \equiv \sum_1^n \frac{A_{ij}}{a}x'_ix'_j$$

卽爲所欲證者.

注意,若 (1) 爲實二次方式,則 (7) 亦爲實變換;從此卽得

定理四. 一實非異二次方式及其逆式有相同之標數.

習　題

1. 已知一二次方式 $\sum a_{ij}x_ix_j$ 及兩平直方式 $\sum u_ix_i$ 及 $\sum v_ix_i$.

$$\sum_1^n A_{ij}u_iv_j \equiv - \begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} & u_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} & u_n \\ v_1\cdots\cdots\cdots v_n & 0 \end{vmatrix}$$

爲此組之二檔不變式.試證明之,

2. 若平直方式之數多於 2 時,試推廣習題 1 之定理.

3. 若一二次方式,因以 c 爲方陣之平直變換而變爲另一二次方式,則前者之附屬式,必因以 c 之附屬行列式之共軛式爲方陣之平直變換,而化爲後者之附屬式.試證明之.

4. 求證關於二組元一次方式之一相似定理.

5. 試述關於二組元一次方式而與定理三相似之定理,且證明之.

55. 附屬方式之秩. 設二次方式 $\sum_1^n a_{ij}x_ix_j$ 之判別式 a 之秩爲 r，其附屬式 $\sum_1^n A_{ij}u_iu_j$ 之判別式 A 之秩爲 R. 則若 $r<n-1$, a 之所有 $n-1$ 次之行列式盡爲零；但此皆爲 A 之元素，故 $R=0$. 若 $r=n-1$, A 至少有一原素異於零，而 A 之所有之二次行列式盡爲零（因依 §11 此等行列式各皆含 a 爲其因子）故 $R=1$. 故 $r=n$, 則 $R=n$; 蓋若 R 小於 n, 則有 $A=0$, 因之 $a=0$（因 $A=a^{n-1}$）. 但依據 $r=n$ 之假設，此爲不可能. 是以得

定理一. 若一含 n 個變數之二次方式及其附屬式之秩各爲 r 及 R, 則

若 $r=n$, $\quad R=n$.

若 $r=n-1$, $\quad R=1$

若 $r<n-1$, $\quad R=0$.

吾人更注意於 $r=n-1$ 之情形，於此吾人已見 $R=1$, 卽附屬式爲下一平直方式之平方.

$$\sum_1^n A_{ij}u_iu_j \equiv \left(\sum_1^n c_iu_i\right)^2 \equiv \sum_1^n c_ic_ju_iu_j$$

比較係數，卽得

$$A_{ij}=c_ic_j$$

所有之諸 c, 不能盡爲零，否則當有 $R=0$, 設 $c_\lambda \neq 0$, 則因

$$A_{\lambda\lambda}=c_\lambda{}^2\neq 0$$

可見$(A_{\lambda 1},\cdots\cdots A_{\lambda n})$不能全爲零.於是(參閱§44)$(A_{\lambda 1},A_{\lambda 2},A_{\lambda n})$點及$(c_1, c_2,\cdots\cdots c_n)$點爲原二次方式之頂點.因得下之定理:

定理二. 若含n變數之一二次方式之秩爲$n-1$,則其附屬式爲一平直方式之平方,且此平直方式之係數爲原方式頂點之坐標.

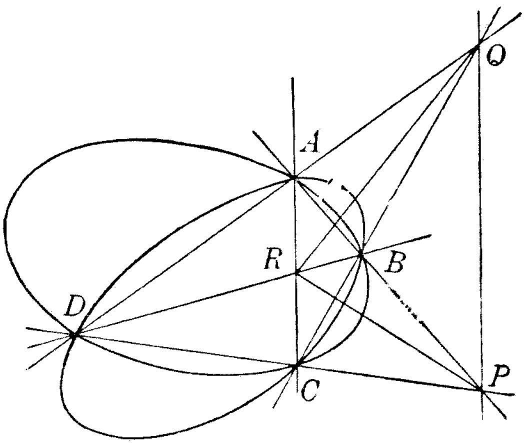
因在吾人所論之情形,二次方式所有之頂點與任一點平直相關,故除一常數而外,本是定理已可完全決定問題中之平直方式矣.

第十三章

一對二次方式

56. 一對錐線. 此節對於一對二次方式之研究,由幾何方面作一簡短介紹,且爲簡單起見,專論二度空間.

命 u 及 v 爲兩錐線,並設此兩錐線相交且僅相交於相異之四點 A, B, C, D, 取經過此四點之一切錐線論之,吾人稱此等錐線成一束 (pencil). 易見在此一束之中有且僅有三



異錐線(卽一對直線合成之錐線).卽 AB, CD; BC, DA; $AC. BD$; 三對直線也.吾人命 P, Q 及 R 各爲此等錐線之"頂點".

從完全四邊形(complete quadrilateral)之調和性*,易見割線 PAB 及 PCD 爲直線 QR 所調分.於是對此束中任一錐線而言,QR 爲 P 之極線.同法,對此束中任一錐線而言,PR 爲 Q 之極線,且 PQ 爲 R 之極線.由此易見三角形 PQR 對此束中任一錐線而言,爲一自極三角形(閱 §41).於是若變移 P, Q, R 使成爲原點及 x 軸上 y 軸上之無窮遠點,則此束中任一錐線之方程式化爲僅含平方項之方式.吾人由此引得下之結果:

定理. 若兩錐線相交,且僅相交於相異之四點,則必有一非異直射變換存在,可化此兩錐線之方程式成法式

$$\begin{cases} A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = 0, \\ B_1x_1^2 + B_2x_2^2 + B_3x_3^2 = 0. \end{cases}$$

若欲以分析方法,實行此種變換,必先書錐線 u 及 v 之方程式如下形

$$(1) \qquad \sum_1^3 a_{ij}\, x_i\, x_j = 0, \qquad \sum_1^3 b_{ij}\, x_i\, x_j = 0.$$

則此錐線束可書如

$$(2) \qquad \sum_1^3 (a_{ij} - \lambda\, b_{ij}) x_i\, x_j = 0,$$

或更精密言之,與 λ 以不同之値,此方程式代表此束內錐線 v 以外之一切其他錐線.束內之異錐線可由使(2)之判別式爲零而得之.

* 參閱任一關於近代幾何之書籍.

$$
(3)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & a_{13}-\lambda b_{13} \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & a_{23}-\lambda b_{23} \\ a_{31}-\lambda b_{31} & a_{32}-\lambda b_{32} & a_{33}-\lambda b_{33} \end{vmatrix}=0.
$$

此方程式稱爲此錐線之λ方程式,展開之,則得下形

$$
(4)\qquad -\Delta'\lambda^3+\Theta'\lambda^2-\Theta\lambda+\Delta=0,
$$

式中Δ, Δ'各爲u及v之判別式,且

$$
\Theta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

而Θ'可由Θ調換文字a, b得之.并易證(參閱下節)諸係數Θ及Θ'以及Δ及Δ'爲二權不變式.

除v之判別式Δ'爲零之時外,方程式(4)爲三次,且在吾人所論之情形中.三根顯爲不同,若代入(2)式,則得此束中之三異錐線.

若交點之數,不加限制,此時任二錐線之理論,將如何從方程式(3)推得*,吾人於此,暫置不論,此理將於第二十二章中,視爲初等除式(elementary divisors)法之應用而論及之,本節之唯一目的,卽在作一幾何預備,以便領悟以下各節耳.

57. 一對二次方式之不變式及其λ方程式. 吾人取一對二次方式.

---

*關於兩錐線之λ方程式(l'équation en λ)之初步討論,法文之解析幾何上,有詳備之敍述.例如可閱 Briot et Bouquet, Leçons de Géométrie analytique, 第 14 版, p. 349, 或 Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique, Vol. I, p. 459.

$$\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv\sum_1^n a_{ij}\,x_i\,x_j,$$

$$\psi(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv\sum_1^n b_{ij}\,x_i\,y_j,$$

以及自此構成之二次方式束* (pencil)

$$\phi-\lambda\psi\equiv\sum_1^n(a_{ij}-\lambda b_{ij})x_ix_j.$$

此束之判別式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11}\cdots\cdots a_{1n}-\lambda b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}-\lambda b_{n1}\cdots\cdots a_{nn}-\lambda b_{nn} \end{vmatrix}\equiv F(\lambda),$$

乃為 λ 之多項式,在一般情形下為 n 次,而可書如

$$F(\lambda)\equiv\Theta_0-\Theta_1\lambda+\cdots\cdots+(-1)^n\Theta_n\lambda^n.$$

此多項式之諸係數本身亦為諸 a_{ij} 之諸 b_{ij} 之多項式,Θ_0 及 Θ_n 僅各為 ϕ 及 ψ 之判別式,而 Θ_k 乃為以 ψ 之判別式中相當 k 列代替 ϕ 之判別式中諸列所能得之諸相異行列式之和.

定理一. $F(\lambda)$ 之諸係數 $\Theta_0,\cdots\cdots\Theta_n$ 乃為一對二次方式 ϕ,ψ† 之二權有理整不變式.

*維也斯特拉斯 (Weierstrass) 及克倫尼克 (Kronecker) 及其他著作家常名此束為二元一次方式,或二次方式,由是本文始有意義.照幾何上用語而言,則取 (Büschel) 一名為適宜,因可知其聚多種非平直之方式也.吾人時用此名,時用彼名,蓋在歷史上之適當,及算學上之確切,兩無軒輊也.

† 參閱 §90 之習題 13.

欲證此,吾人先察以c爲行列式而變換ϕ及ψ各爲ϕ'及ψ'之一平直變換,內中

$$\phi'\equiv\sum_1^n a_{ij}'x_i'x_j',$$

$$\psi'\equiv\sum_1^n b_{ij}'x_i x_j'.$$

乃將Θ_i中諸a及諸b加以重音符號所得諸a'_{ij}及諸b'_{ij}之多項式,吾人以Θ_i'記之,若能建立諸恆等式

$$\Theta_i'\equiv c^2\Theta_i \qquad (i=0, 1,\cdots\cdots n)$$

定理亦卽證明,此可立卽從$\phi-\lambda\psi$之判別式$F(\lambda)$爲二權不變式之理得之,蓋若以$F'(\lambda)$代表$\phi'-\lambda\psi'$之判別式,從此理卽有

$$F'(\lambda)\equiv c^2F(\lambda).$$

此爲λ之恆等式,亦爲諸a及諸b之恆等式.吾人可以等號連式中兩邊同次λ之係數,卽得所欲建立之恆等式.*

方程式 $$F(\lambda)=0$$

吾人稱爲一對方式ϕ,ψ之λ方程式.因吾人已見若ϕ及ψ經過一非異平直變換,F之變化,僅爲以一異於零之常數乘之,故λ方程式之根,不因此種變換而改,但此等諸根爲諸Θ

*在此吾人得兩二次方式組之不變式所用之方法,將見應用至廣.若有n變數之一k次方式之μ權有理整不變式I,吾人作成方式$\lambda_1\phi_1+\cdots\cdots+\lambda_p\phi_p$之不變式$I$,卽得關於一組含$n$變數$k$次之$p$個方式$\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots\phi_p$之較多不變式.此$I$將爲諸$\lambda$之多項式,如上理易見其係數各爲諸$\phi$之諸組$\mu$權有理整不變式.

之無理函數,因之亦爲諸 a 及諸 b 之無理函數.吾人故得述此結果如下:

定理二. 對於非異平直變換,一對二次方式之λ方程式之諸根,爲此一對方式之絕對無理不變式.

顯見λ方程式任一根之重次性,不因非異平直方式而改變,由此得

定理三. λ方程式諸根之重次性,對於非異平直變換爲一對二次方式之算術不變式.

若
$$\phi \equiv a_1x_1^2+\cdots\cdots+a_nx_n^2,$$
$$\psi \equiv \quad x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2,$$
λ方程式之諸根爲 $a_1,\cdots\cdots a_n$. 此例明示定理二之諸絕對不變式可有任意值,及定理三之諸算術不變式,除顯有各爲正整數而擬爲 n 之限制以外,無其他之限制.

58. λ方程式無重根時,化得法式之法. 雖此節所論之主要部分,乃關於λ方程式無重根之情形,但吾人入手時,先樹一應用較爲普遍之定理.

定理一. 若 λ_1 爲含 n 變數之一對二次方式 ϕ,ψ 之λ方程式之單根,則用一非異平直變換,ϕ 及 ψ 各能化爲方式

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda_1c_1z_1^2+\phi_1(z_2,\cdots\cdots z_n) \\ \quad c_1z_1^2+\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n) \end{cases}$$

式中 c_1 爲一異於零之常數,且 ϕ_1 及 ψ_1 爲含 $n-1$ 變數 $z_2,\cdots\cdots z_n$ 之二次方式.

欲證此理,吾人可取方式束

$$(2)\qquad \phi-\lambda\psi\equiv\phi-\lambda_1\psi+(\lambda_1-\lambda)\psi$$

習之,因 λ_1 爲一對方式 ϕ,ψ 之 λ 方程式之一根,故 $\phi-\lambda_1\psi$ 爲異方式,且使經過一適當非異平直變換後可書爲缺少一變數,例如 x_1' 之方式

$$\phi-\lambda_1\psi\equiv\phi'(x_2',\cdots\cdots x_n')$$

若此變換化 ψ 爲 $\psi,'$ 則有

$$(3)\qquad \phi-\lambda\psi\equiv\phi'(x_2',\cdots\cdots x_n')+(\lambda_1-\lambda)\psi'(x_1',\cdots\cdots x_n')$$

此式右邊二次方式之判別式,不能包含 $\lambda_1-\lambda$ 之因式至一次以上,蓋依假設 λ_1 非爲 ϕ 及 ψ 之 λ 方程式之重根.從此可知二次方式 ψ' 內 $x_1'^2$ 之係數不能爲零,蓋否則(3)式右邊之判別式之左上角內含有一零,而 $\lambda_1-\lambda$ 將爲此行列式第一行及第一列內所有諸元素之因式,結果此行列式必包含 $(\lambda_1-\lambda)^2$.

因 ψ' 內 $x_1'^2$ 之係數異於零,吾人可用蘭格倫日氏化法(§45之公式(2)及(3))得一非異平直變換如下形

$$\begin{cases} z_1=\gamma_1x_1'+\gamma_2x_2'+\cdots\cdots+\gamma_nx_n' \\ z_2=\qquad\quad x_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n=\qquad\qquad\qquad\qquad x_n' \end{cases}$$

以化 ψ' 成方式

$$c_1z_1^2+\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)\qquad (c_1\neq 0)$$

此變換化(3)式之右邊為

$$\psi'(z_2,\cdots\cdots z_n)+(\lambda_1-\lambda)\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)+(\lambda_1-\lambda)c_1z_1^2.$$

結合此兩平直變換,且書

$$\phi'(z_2,\cdots\cdots z_n)+\lambda_1\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)\equiv\phi_1(z_2,\cdots\cdots z_n),$$

即可得一非異平直變換,有下列化得之作用:

$$\phi(x_1,\cdots x_n)-\lambda\psi(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_1(z_2,\cdots z_n)-\lambda\psi_1(z_2\cdots z_n)+(\lambda_1-\lambda)c_1z_1^2.$$

若吾人於此,以等號連兩邊λ之係數及不含λ之諸項,易見確能化ϕ,ψ成諸方式(1);定理因得證明.

吾人茲設ψ為非異方式,此可使λ方程式確為n次.吾人更設此方程式之諸根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_n$,各不相同,則依適所證明之定理,可用一非異平直變換,化方式ϕ,ψ成諸方式(1).可見此兩方式之λ方程式,與含$n-1$變數之一對方式ϕ_1,ψ_1之λ方程式,所不同者,僅為前者多一因式$\lambda_1-\lambda$.於是一對方式ϕ_1,ψ_1之λ方程式以$\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_n$為其諸根,且均為單根.故可應用定理一之化法於兩方式ϕ_1,ψ_1用$z_2,\cdots\cdots z_n$之一非異平直變換即化之成兩方式

$$\lambda_2c_2z_2'^2+\phi_2(z_3',\cdots\cdots z_n'),$$

$$c_2z_2'^2+\psi_2(z_3',\cdots\cdots z_n').$$

此種平直變換中,再加公式

$$z_1'=z_1,$$

即可視為$z_1,\cdots\cdots z_n$之一非異平直變換,而可化ϕ,ψ為兩方式

$$\lambda_1c_1z_1'^2+\lambda_2c_2z_2'^2+\phi_2(z_3',\cdots\cdots z_n'),$$

$$c_1z_1'^2+\quad c_2z_2'^2+\psi_2(z_3',\cdots\cdots z_n')$$

如此逐步推演,吾人卽得樹立下之定理:

定理二. 若ϕ,ψ爲$(x_1,\cdots\cdots x_n)$之二次方式,其中第二式爲非異方式,且若兩式之方程式之諸根$\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_n$各爲相異,則有一化$\phi$及$\psi$各爲

$$\lambda_1c_1x_1'^2+\lambda_2c_2x_2'^2+\cdots\cdots+\lambda_nc_nx_n'^2$$

$$c_1x_1'^2+\quad c_2x_2'^2+\cdots\cdots+\quad c_nx_n'^2$$

之非異平直變換存在,式中$c_1,\cdots\cdots c_n$爲異於零之諸常數.

因諸c均異於零,故

$$x_i''=\sqrt{c_ix_i'}\qquad\qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

爲非異平直變換.實行此種變換,吾人更得下之結果:

定理三. 在與定理二相同諸條件之下,ϕ及ψ可用一非異平直變換,化爲兩法式

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n^2,$$

$$x_1^2+\quad x_2^2+\cdots\cdots+\quad x_n^2.$$

從此吾人立卽推得

定理四. 若在兩對二次方式ϕ,ψ及ϕ',ψ'之內,ψ及ψ'均爲非異方式,且若此二對方式之兩λ方程式,均無重根,則此兩對方式,能相合之充要條件,乃此兩λ方程式有相同之諸根,或謂第一對方式之諸不變式$\Theta_0,\Theta_1,\cdots\cdots\Theta_n$與第二對方式之諸不變式$\Theta_0',\Theta_1'\cdots\cdots\Theta_n'$成比例,其理亦同.

習　題

在定理三諸條件之下,欲化成法式,實有僅一化法,其中能變動者,祇爲法式內諸x中若干x之符號,試證明之.

59. ψ爲非異及有定時化爲法式之法. 吾人玆論兩實二次方式ϕ,ψ,而ψ爲有定及非異之情形,吾人主要之問題,乃在用一實平直變換化此一對方式成爲法式,爲欲達此目的計,吾人先證

定理一. 若ψ爲有定及非異方式,則一對實二次方式ϕ,ψ之λ方程式不能有虛根.

因此若爲可能,命$\alpha+\beta i$(α及β爲實數)爲此λ方程式之一複根,其中$\beta\neq 0$. 則$\phi-\alpha\psi-i\beta\psi$將爲一異二次方式,且因非異平直變換

$$\begin{cases} x_1'=(p_{11}+iq_{11})x_1+\cdots\cdots+(p_{1n}+iq_{1n})x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'=(p_{n1}+iq_{n1})x_1+\cdots\cdots+(p_{nn}+iq_{nn})x_n \end{cases}$$

化爲k個平方之和,內中$k<n$,

$$(1)\qquad \phi-\alpha\psi-i\beta\psi\equiv x_1'^2+x_2'^2+\cdots\cdots+x_k'^2.$$

命

$$(2)\qquad y_i=p_{i1}x_1+\cdots\cdots+p_{in}x_n,$$

$$(3)\qquad z_i=q_{i1}x_1+\cdots\cdots+q_{in}x_n,$$

致有

$$x_i'=y_i+iz_i.$$

使(1)式兩邊i之係數互等,即得

$$(4)\qquad -\beta\psi\equiv 2y_1z_1+2y_2z_2+\cdots\cdots+2y_kz_k$$

吾人茲使(4)式之右邊為零,以定$x_1,\cdots\cdots x_n$,例如用諸方程式

$$y_1=y_2=\cdots\cdots=y_k=0.$$

注意(2)式即可知吾人於此有含n變數之k個平直齊次方程式,可得$x_1,\cdots\cdots x_n$不全等於零之實值適合此等方程式.從(4)易見諸變數之此等諸值,足以使ψ為零,但此為不可能(參閱§52定理三之系),蓋因ψ依假設為有定非異方式也.

定理二. 若ψ為一非異有定二次方式,且ϕ為一任意實二次方式,則一對二次方式ϕ,ψ,可用一實非異平直變換,化為法式

$$(5)\qquad \begin{cases}\phi\equiv\pm(\lambda_1x_1'^2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n'^2),\\ \psi\equiv\pm(\quad x_1'^2+\cdots\cdots+\quad x_n'^2),\end{cases}$$

式中$\lambda_1,\cdots\cdots\lambda_n$為$\lambda$方程式之諸根,在此兩式內,用上號或用下號,則視$\psi$之為正方式或負方式而定之.

此定理之證明與§58定理二之證明頗為相似.適如§58之定理一,吾人必須先證ϕ及ψ,可用一實非異平直變換化為諸方式

$$(6)\qquad \begin{cases}\lambda_1c_1z_1^2+\phi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)\\ \quad c_1z_1^2+\psi\,(z_2,\cdots\cdots z_n).\end{cases}\qquad (c_1\neq 0)$$

欲證此理,吾人可取方式束

$$\phi-\lambda\psi\equiv\phi-\lambda_1\psi+(\lambda_1-\lambda)\psi.$$

因據定理一λ_1爲實數,故$\phi-\lambda_1\psi$爲一實異二次方式,而能因一實非異平直變換化爲缺一變數之方式

$$\phi-\lambda_1\psi\equiv\phi'(x_2',\cdots\cdots x_n').$$

若此變換,化ψ爲ψ_1',即有

$$(7)\qquad \phi-\lambda\psi\equiv\phi'(x_2',\cdots\cdots x_n')+(\lambda_1-\lambda)\psi'(x_1',\cdots\cdots x_n').$$

現所論之情形,與§58內所論之情形,較有主要差異之點,於此可以見之,蓋此時λ_1,可爲(7)之右邊之判別式之一重根,故如欲示明ψ'內$x_1''^2$之係數,異於零,必須另有不同之方法,爲達此目的計,僅須注意ψ及ψ'爲一非異有定方式,故依§52定理四,知ψ'內之平方項係數,均須異於零.

由此已明ψ'內$x_1'^2$之係數異於零,故能以蘭格倫日氏化法施之於ψ_1'而化ϕ,ψ二方式爲(6)式之手續得以完成.—如§58之定理一,但須注意吾人所用之變換,乃爲實變換.

(6)內ϕ_1,ψ_1乃爲$n-1$變數$z_2,\cdots\cdots z_n$之實二次方式.更因

$$\psi(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv c_1z_1^2+\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)$$

爲非異有定方式,ψ_1亦爲非異有定方式.蓋若ψ_1爲異方式,或無定方式,則能求得$z_2,\cdots\cdots z_n$不全爲零之諸值,使$\psi_1=0$;且此諸值再加$z_1=0$之值將使$\psi=0$,但據§52定理三之系,此事爲不可能.

顯見兩方式ϕ_1,ψ_1之λ方程式,較兩方式ϕ,ψ之λ方程式,僅少$\lambda-\lambda_1$一因式,其餘完全相同,故知ϕ_1,ψ_1之λ方程式

之諸根為$\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_n$，若吾人用對$\phi,\psi$所施之方法(吾人適見$\phi_1,\psi_1$滿足$\phi,\psi$所有之條件)以化$\phi_1$及$\psi_1$，即得

$$\phi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)\equiv\lambda_2 c_2 z_2'^2+\phi_2(z_3',\cdots\cdots z_n'),$$

$$\psi_1(z_2,\cdots\cdots z_n)\equiv c_2 z_2'^2+\psi_2(z_3',\cdots\cdots z_n').$$

如此逐步推演，終得以一實非異平直變換，化ϕ及ψ為諸方式

$$(8)\qquad\begin{cases}\phi\equiv\lambda_1 c_1 y_1^2+\cdots\cdots+\lambda_n c_n y_n^2,\\ \psi\equiv\quad c_1 y_1^2+\cdots\cdots\qquad c_n y_n^2.\end{cases}$$

因ψ為有定方式，諸常數$c_1,\cdots\cdots c_n$全為正數或全為負數，視ψ為一正方式或負方式而定，更行實非異平直變換

$$x_i'=\sqrt{|c_i|}\,y_i\qquad\qquad(i=1,2,\cdots\cdots n),$$

諸方式(8)可代為諸方式(5)，定理遂得證明.

習 題

1. 若ϕ為一秩為r含n變數之實二次方式，則能用一含n變數之實直交變換，化之為方式

$$c_1x_1^2+c_2x_2^2+\cdots\cdots+c_rx_r^2.$$

(參閱§52之習題).

2. 習題一之直交變換之行列式，可任意使之為$+1$或-1，試證明之.

3. 依據以下各要點，討論實二次曲面之數量分類:

取非齊次垂直坐標方程式，並示若變換至其他有同一原點之一組垂直坐標，則此方程式可化為一種方式，其二次諸項必為以下五種方式之一(諸A為諸正常數)，

$$A_1x_1^2+A_2x_2^2+A_3x_3^2,$$

$$A_1x_1^2+A_2x_3^2-A_2x_3^2,$$

$$A_1x_1^2+A_2x_2^2,$$

$$A_1x_1^2-A_2x_2^2,$$

$$A_1x_1^2.$$

於是對於如此所得之各非齊次方式,更加以他種坐標變換,即終得各種初等立體解析幾何書中所論之諸橢圓體,雙曲面,拋物面,錐面,柱體及平面之各種標準式.

第十四章

一般多項式之若干性質

60. 因式及可約性. 本節將介紹關於以下所論之數種重要基本概念.

定義一. 無論含有若干元之多項式f,其因式或除式云者,乃一多項式ϕ,而滿足一恆等式

$$f\equiv\phi\psi$$

ψ亦爲一多項式.

此後卽可見凡異於零之常數爲各多項式之因式,凡多項式爲恆等於零之多項式之因式;若一多項式僅爲異於零之常數,則其因式僅有常數.

吾人並須注意不恆爲零而含 $x_1,\cdots\cdots x_n$ 之多項式,不能以實際含其他變數之多項式爲因式.

可約性之概念,吾人曾論其特例(§47)今立其定義如下:

定義二. 一多項式如恆等於不爲常數之二多項式之乘積,則稱爲可約.

論實多項式時,可約性之概念,常需一較狹義之確定.因

此吾人須論實數域中可約性之概念,此概念可定之如下:

定義三. 如一實多項式恆等於不爲常數之他二實多項式之乘積,則此實多項式謂爲在實數域中可約.

於代數學多數部分中,可約性概念,尚有其他修正,頗爲重要.爲闡明此理計,吾人先立下之定義:

定義四. 設 a 與 b 爲一組中任意二數,如 $a+b$, $a-b$, ab 以及 $b\neq 0$ 時之 a/b 均爲該組中之數,則稱此組數構成一有理之數域 (domain of rationality).

例如一切實數及虛數,構成一有理之數域,所有實數亦然.除僅含零之一數之一組外,其他有理之數域,最簡單者爲自然數域,即所有正與負之有理數所成者.而較複雜之有理之數域則爲含所有呈 $a+b\sqrt{-1}$ 形之數者.式中 a 及 b 不僅爲實數,且爲有理數.此種例證,爲數無限.均足以使上定義之意更加清晰.*

定義五. 一多項式其所有之係數,均在一有理之數域 R 中,如恆等於均不爲常數之二多項式之乘積,且此二多項式之諸係數,亦均在此數域內,則該多項式在此數域內,謂之可約.

---

* 諸已知數 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 依有理方法(加,減,乘及除)所得之一切數構成之有理之數域以 $R(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)$ 表之.據此記法,自然數域可簡書之爲 $R(1)$; 適所述之數域可書爲 $R(1, \sqrt{-1})$ 或更簡作 $R(\sqrt{-1})$. 如不用無限個變數,則此種記法並不能應用於一切情形(例如實數域).

此後卽可見定義二及三均僅爲此定義之特例,各定義中有理之數域,卽爲一切數所成數域,及一切實數所成數域.今以例證明此三定義,請注意多項式 x^2+1. 據定義二爲可約,蓋以其恆等於 $(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ 也.然其在實數數域及自然數域內,則均爲不可約者.自另一方面言之,x^2-2 於實數數域內爲可約.而於自然數域內則爲不可約者.至若 x^2-4 乃在自然數域內爲可約者.

可約概念,經此等修正後,不復再論,吾人以下之二定義作本節之結束:

定義六. 若二多項式之公因式均爲常數,則此二多項式謂爲互質.

定義七. 若一多項式依二種方法分解成因式後,各有 n 個因式,且可排列此諸因式,使 k 值自 1 至 n 時,二者中第 k 個因式常成比例,則此二種分解法謂爲無主要區別 (not essentially different).

習　題

1. 如含 (x,y) 之多項式呈下形

$$f(x)+y,$$

式中 $f(x)$ 爲只含 x 之多項式,則爲不可約,試證明之.

呈下形

$$f(x)+y^2$$

之多項式是否亦如是?

2. 如含任意若干元之多項式f, ϕ, ψ滿足恆等式

$$f=\phi\psi$$

並如f及ϕ之係數，均在某一有理之數域內，則$\phi\neq0$時ψ之係數必亦在此同一之數域內，試證明之.

61. 一般行列式及對稱行列式之不可約性.

定理一. 如行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

之n^2元素均視作自變數時，則此行列式爲不可約之多項式.

因苟設其爲可約，而令

$$D\equiv f(a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots a_{nn})\,\phi(a_{11}, \cdots\cdots a_{nn}),$$

式中f及ϕ均不爲常數. 將D依其第一列之元素展開時，易知其爲a_{11}之一次式. 故二f及ϕ多項式必有一爲a_{11}之一次式，而其他則爲a_{11}之零次式. 依同理，可證如a_{ij}爲D之任一元素，則二多項式f及ϕ必有一爲a_{ij}之一次式，而他者則不含有此變數.

設二多項式中之含有a_{ij}者以f記之，a_{ii}爲D之主對角線中任一元素. 則ϕ必不含第i行或第i列之任一元素. 否則f既爲a_{ii}之一次式而ϕ爲零次，故其乘積D中必有含形如$a_{ii}\,a_{ij}$或$a_{ii}\,a_{ji}$之乘積之諸項，但由行列式之定義，此爲不可

能.是以多項式f及ϕ之中,如有一含有D之主對角線中任一元素,則此多項式必含有與此元素同列之所有諸元素及與此元素同行之所有諸元素,而此諸元素中無一再能出現於他多項式之內.

今設f含有a_{ii}而ϕ含有主對角線上之他一元素a_{jj},則a_{ij}及a_{ji}將旣不在f內復不在ϕ中,而爲不可能之事.故如f含有主對角線中任一元素,則必包含其中所有其他各元素,因必包含所有元素,故吾人之定理得以證明.

定理二. 如對稱行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11},\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1},\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

之$\frac{1}{2}n(n+1)$個元素,視作自變數,則爲一不可約之多項式.

上定理之證法於此殆字字可用,所異者僅D爲其主對角線上各元素之一次式,而爲其他各元之二次式.因此差異,證法必須稍有更變,讀者可自爲之.

習題

1. 如$p<n$而諸a,諸u及諸v均視作自變數,則一般加邊行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} & u_{11}\cdots\cdots u_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} & u_{n1}\cdots\cdots u_{np} \\ v_{11}\cdots\cdots v_{1n} & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{p1}\cdots\cdots v_{pn} & 0\cdots\cdots 0 \end{vmatrix}$$

爲不可約者.

2. 在習題1中行列式內令 $a_{ij}=a_{ji}$, $u_{ij}=v_{ji}$ 所得之加邊對稱行列式,如 $p<n$ 則爲不可約.

3. 如於 i 及 j 具某數值時,有 $a_{ij}=a_{ji}$,但非對於 i 及 j 之一切值皆然,且不如是時之諸 a 皆爲自變數,則吾人尙可謂

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

爲不可約乎?

4. 試示一偶凡反稱行列式(§20後習題2,3)爲完全平方,因以證明一反稱行列式恆爲可約.

〔提示.用§11系3,§76定理六及其後習題1.〕

如諸元數均爲實數,且就實數數域中可約性立論,則此定理尙須若何修正否?

62. 相當之齊次及非齊次多項式. 將一齊次多項式與他非齊次多項式相提並論,常甚便利,此二多項式間之關係猶之表一平面曲線或曲面之齊次坐標及非齊次坐標兩種方程式中左邊之關係.此諸多項式,據下之定義,吾人將稱爲彼此相當(corresponding).

定義. 設有一含任意若干變數 $(x_1,\cdots\cdots x_{n-1})$ 之 k 次非齊次多項式,以新變數 x_n 之冪乘式中各項,使其均爲 k 次,得一新多項式,如是所得之齊次多項式稱與已知之非齊次多項式相當.

例如二多項式

(1) $$2x^3+3x^2y-5xz^2-yz+2z^2+x-3y-9,$$

(2) $$2x^3+3x^2y-5xz^2-yzt+2z^2t+xt^2-3yt^2-9t^3$$

互爲相當.

在此須注意如 $\phi(x_1,\cdots\cdots x_{n-1})$ 爲 k 次之非齊次多項式,則其相當之齊次多項式可書作

$$x_n^k\phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

對每一非齊次多項式,恆有一而僅有一齊次多項式與之相當.反之,對一含 n 元之齊次多項式則常有相異之 n 個非齊次多項式與之相當,此諸非齊次多項式乃由令每一變數爲1所得者.例如上例中與2式相當者不僅爲(1),且亦有

(3) $$2+3y-5z^2-yzt+2z^2t+t^2-3yt^2-9t^3$$

(4) $$2x^3+3x^2-5xz^2-zt+2z^2t+xt^2-3t^2-9t^3$$

(5) $$2x^3+3x^2y-5x-yt+2t+xt^2-3yt^2-9t^3$$

但有須注意者,如一齊次多項式各項中,均含某一變數,則令此變數爲 1 之結果不得爲其相當之非齊次多項式之一切項中均含有各變數,則無相當之非齊次多項式.例如多項式

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

卽合於此種情形.

定理一. 如二相當多項式之一者爲可約,則他者亦然,且此二多項式之諸因式亦互爲相當.

因如令 $\phi(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲一 $(k+l)$ 次之齊次多項式,並設其可分解爲 k 次及 l 次二因式,如

$$(6)\qquad \phi_{k+l}(x_1,\cdots\cdots x_n)\equiv\psi_k(x_1,\cdots\cdots x_n)\chi_l(x_1,\cdots\cdots x_n).$$

今設問題中之相當非齊次多項式,爲令 $x_n=1$ 所得者.則有

$$(7)\ \phi_{k+l}(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},1)\equiv\psi_k(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},1)\chi_l(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},1).$$

由假設知左端多項式之次數,並不因此運算而改變,且 (6) 式右端諸因式之次數,均未嘗降低,故 (7) 式右端之諸因式均非爲常數.故非齊次多項式亦爲可約;更因(7)式右端兩因式,各爲 k 及 l 次,故顯爲 (6) 式右端二因式之二相當函數.

今令 $\Phi_{k+l}(x_1,\cdots\cdots x_{n-1})$ 爲一非齊次多項式,並設

$$\Phi_{k+l}(x_1,\cdots\cdots x_{n-1})\equiv\Psi_k(x_1,\cdots\cdots x_{n-1})X_l(x_1,\cdots\cdots x_{n-1}),$$

式中下標表多項式之次數.令齊次多項式 $\phi_{k+l},\psi_{k+l},\chi_{k+l}$ 相當於 Φ,Ψ,X, 則當 $x_n\neq0$ 時

$$\Psi_{k+l}\left(\frac{x_1}{x_n}\cdots\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)=\Psi_k\left(\frac{x_1}{x_n}\cdots\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)X_l\left(\frac{x_1}{x_n}\cdots\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

以 x_n^{k+l} 乘此方程式得

$$\phi_{k+l}(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},x_n)=\psi_k(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},x_n)\chi_l(x_1,\cdots\cdots x_{n-1},x_n),$$

此方程式當 $x_n\neq0$ 時卽能成立,故由§2之定理五知其爲一恆等式,由此吾人之定理得以證明.

今述含任意若干元之非齊次二次多項式可約之條件,以明本定理應用方法之簡單例證.將 §47 中核驗之法施於相當之齊次多項式,吾人立可得任一非齊次二次多項式是

否為可約之核驗方法.

定理二. 如 f 及 ϕ 為非齊次多項式而 F,Φ 為其相當齊次多項式,則 F 及 Φ 為互質之充要條件,乃 f 及 ϕ 為互質.

蓋若 f 及 ϕ 有一不為常數之公因式 ψ,則由定理一知與 ψ 相當之齊次多項式 Ψ,必為 F 及 Φ 之公因式,且顯見其亦非為常數.反之,如 F 及 Φ 之公因式 Ψ 不為常數,則由定理一,知 f 及 ϕ 必具有與 Ψ 相當之一公因式,故此公因式不能僅為常數.

63. 多項式之除式 今先論含一變數之二多項式:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \\ \phi(x) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m \end{cases}$$

於初等代數中,吾人已習知如何以 ϕ 除 f 得一商式 $Q(x)$ 及一餘式 $R(x)$.此處之要點含於下之定理中:

定理一. 若 f 及 ϕ 為 x 之二多項式,且 ϕ 不恆等於零.則可得一對且僅得一,對多項式 Q 及 R 合於恆等式

$$(2)\qquad f(x) \equiv Q(x)\phi(x) + R(x)$$

且必 $R \equiv 0$* 或 R 之次數較 ϕ 為低.

吾人先證至少可得一對合於定理中所述諸條件之多項式 Q,R.

如 f 之次數較 ϕ 為低(或 $f \equiv 0$),則適所述者顯然為真,蓋

* 據吾人已採用之定義,須記恆等於零之多項式無次數之可言.

吾人可令$Q\equiv 0$, $R\equiv f$也.

因此設f之次數至少與ϕ相等.書f及ϕ如(1)形並可設

$$a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ n \geqq m.$$

引. 如ϕ之次數不較f爲高,則可得二多項式Q_1及R_1合於恆等式

$$f(x)\equiv Q_1(x)\phi(x)+R_1(x),$$

且如R_1不恆等於零,則R_1之次數必較ϕ爲低.

如令

$$Q_1(x)\equiv\frac{a_0}{b_0}x^{n-m},$$

則此引顯然爲眞.

如$R_1\equiv 0$,或其次數較ϕ爲低,則可用此二多項式Q_1及R_1爲吾人定理中之多項式Q及R.設其不然,則對於二函數R_1及ϕ,再應用此引得

$$R_1(x)\equiv Q_2(x)\phi(x)+R_2(x),$$

式中R_2爲不恆爲零,則較R_1之次數爲低.因此可書

$$f(x)\equiv[Q_1(x)+Q_2(x)]\phi(x)+R_2(x)$$

如$R_2\equiv 0$,或其次數較ϕ爲低,則可以Q_1+Q_2及R_2爲吾人定理中之二多項式Q及R.如其不然,則對於R_2及ϕ再應用此引.循是以往,吾人可得一貫降次多項式R_1, R_2,……,故經若干步驟後可得一多項式R_i或恆爲零或較ϕ之次數爲低.合併至此所得之諸恆等式,得

$$f(x)\equiv[Q_1(x)+\cdots\cdots+Q_i(x)]\phi(x)+R_i(x),$$

此恆等式足以證明本定理之一部份,卽謂至少可得一對適合所述之多項式Q及R.*

今設除定理中兩式Q,R外,尙可得合於相同諸條件之第二對多項式Q',R'自(2)中減去含Q',R'之相似恆等式,得

$$(3)\qquad 0\equiv(Q-Q')\phi+(R-R')$$

由此吾人可推得所欲證之理,卽

$$Q\equiv Q',\ R\equiv R'.$$

蓋若Q及Q'不相恆等,則(3)式右端第一項必至少爲m次,而第二項中則並不含有x之冪高至m者.

今轉就含若干變數之多項式:

$$(4)\quad\begin{cases}f(x_1,\cdots x_k)\equiv a_0(x_2,\cdots x_k)x_1^n+a_1(x_2,\cdots x_k)x_1^{n-1}\cdots+a_n(x_2,\cdots x_k),\\ \phi(x_1,\cdots x_k)\equiv b_0(x_2,\cdots x_k)x_1^m+b_1(x_2,\cdots x_k)x^{m-1}+\cdots+b_m(x_2,\cdots x_k)\end{cases}$$

論之.則依普通方法,以ϕ除f所得之商式及餘式非爲多項式,而爲分數有理函數.爲避免此事計,應述吾人之定理如下:

定理二. 如f及ϕ爲含$(x_1,\cdots\cdots x_k)$之二多項式,其中ϕ不恆等於零,則可得諸多項式Q,R,P,其中末式,既不恆等於零,且亦不含有變數x_1,而諸式合於恆等式.

$$(5)\qquad P(x_2,\cdots x_k)f(x_1,\cdots x_k)\equiv Q(x_1,\cdots x_k)\phi(x_1,\cdots x_k)+R(x_1,\cdots x_k)$$

*讀者須注意適所用之方法僅爲普通長除法(long division).

且如R不恆爲零,則其中x_1之次數必較ϕ中x_1之次數爲低.

此定理之證法,與定理一之證法,同一線索.

如f中x_1之次數較ϕ中者爲低(或如$f\equiv 0$),則此定理顯然爲眞,蓋此時吾人可令$P\equiv 1$, $Q\equiv 0$, $R\equiv f$故也.

因此設f中x_1之次數至少與ϕ中者相同.書f及ϕ如(4)而可設

$$a_0 \not\equiv 0,\ b_0 \not\equiv 0,\ n \geqq m.$$

引. 如ϕ中x_1之次數不較f中者爲高,則可得二多項式Q_1, R_1,合於恆等式

$$b_0(x_2,\cdots x_k)\,f\,(x_1,\cdots x_k) \equiv Q_1(x_1,\cdots x_k)\phi(x_1,\cdots x_k)+R_1(x_1,\cdots x_k),$$

且如R_1不恆等於零,則其中x_1之次數中較f中者爲低.

如令

$$Q_1 \equiv a_0(x_2,\cdots\cdots x_k)x_1^{n-m}$$

則此引顯然爲眞.

如$R_1\equiv 0$或其中x_1之次數較ϕ中者爲低,則多項式Q_1, R_1, b_0卽可用作吾人定理中之多次式Q, R, P.設其不然,則再應用此引於R_1及ϕ二函數,得

$$b_0(x_2,\cdots x_k)R_1(x_1,\cdots x_k) \equiv Q_2(x_1,\cdots x_k)\phi(x_1,\cdots x_k)+R_2(x_1,\cdots x_k),$$

式中R_2爲不恆爲零,則其中x_1之次數必較R_1中者爲低.因此可書

$$b_0^2 f \equiv (b_0 Q_1 + Q_2)\phi + R_2.$$

如 $R_2\equiv 0$,或其中 x_1 之次數較 ϕ 中者爲低,則可以 $b_0Q_1+Q_2, R_2, b_0^2$ 爲吾人定理中之多項式 Q, R, P. 如其不然則再用此引於 R_2 及 ψ. 循是以往,吾人可得一貫對於 x_1 降次之諸多項式 R_1, R_2……..故經若干步驟後可得一多項式 R_i 或恆等於零,或其中 x_1 之次數較 ϕ 中者爲低.合併至此所得之諸恆等式,得

$$b_0^i f\equiv(b_0^{i-1}Q_1+b_0^{i-2}Q_2+\cdots\cdots+Q_i)\phi+R_i.$$

此恆等式卽可證明吾人欲證之定理,且亦可建立附增之結論:

系. 定理中所云存在之多項式 P,可以 b_0 之冪充之.

吾人須注意在此若再加定理二中第二層所述多項式 Q,R,P 僅有一組之語,則顯爲謬誤.蓋以恆等式(5)可與 $(x_2,\cdots x_n$ 之任一多項式相乘後其形式仍不變也.但於此宜參看 §73 後習題.

64. 多項式之特性變換. 設 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 爲含齊次坐標 (x_1, x_2, x_3, x_4) 之 k 次齊次多項式,則方程式 $f=0$ 必代表一 k 次曲面.如 f 中含 x_4^k 項之係數爲零,則此曲面經過原點;如含 x_1^k (或 x_2^k, 或 x_3^k) 項之係數爲零,則此曲面經過 x_1 軸 (或 x_2 軸, 或 x_3 軸) 上之無窮遠點.以對於曲面施以非異直射變換使不在此曲面上之不共面之四點,變爲原點及三坐標軸上之三無窮遠點,則易知可將曲面之此種特性除去,且此種方法,爲數無窮.吾人玆證此種事實,推廣至 n 變數之情形.

引. 如 $f(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲缺 x^k_m 項之 k 次齊次多項式,則必

可得使變數$(x_1,\cdots\cdots x_n)$之一非異平直變換,化f爲一新式f_1其中x'^k_m項之係數異於零,而其他變數k次冪之係數不變.

在此定理之證明中,取最後變數x_n爲變數x_m易知仍不失其普遍性

如是可就非異變換

$$x_i=x'_i+a_i\,x'_n \qquad (i=1\cdots\cdots n-1)$$

$$x_n=x'_n$$

研究之.此變換可使f變爲

$$f_1(x'_1,\cdots\cdots x'_n)\equiv f(x'_1+a_1\,x'_n,\cdots\cdots x'_{n-1}+a_{n-1}\,x'_n,\,x'_n),$$

且顯見其中含$x_1^k,\cdots\cdots x^k_{n-1}$諸項之係數未嘗變更.

今f_1中除含x'^k_n之一項外,其他各項均至少含有$x'_1,\cdots\cdots x'_{n-1}$諸變數中之一,故含$x'^k_n$項之係數將爲

$$f_1(0,\cdots\cdots0,1)=f(a_1,\cdots\cdots a_{n-1},1)$$

如吾人能示明可選擇$a_1,\cdots\cdots a_{n-1}$諸常數使此量不爲零,則此引得以證明.

設任取一點$(b_1,\cdots\cdots b_n)$其中$b_n\neq0$;並取該點之一鄰域小至充分程度,使在此域中之任一點x_n均不爲零,則f既不恆等於零,故吾人在此域中可得一點$(c_1,\cdots\cdots c_n)$(如此,則$c_n\neq0$)使有

$$f(c_1,\cdots\cdots c_n)\neq0$$

今取$c_1/c_n,\cdots\cdots c_{n-1}/c_n$各爲$a_1,\cdots\cdots a_{n-1}$之值,則因$f$既爲齊次式,是以

$$f(a_1,\cdots\cdots a_{n-1},1)\neq 0$$

而吾人之引得已證明.

定理一. 如$f(x_1,\cdots\cdots x_n)$為一k次齊次多項式,則可得一非異平直變換,使f變為諸項係數均不為零之一$x_1'^k,\cdots\cdots x_n'^k$新形式$f_1$.

此定理之證明,可由上引立即得之.蓋吾人僅須逐次施行變換,先使x_1^k之係數,次使x_2^k之係數等等均變為異於零之數,在引中已示明.此等變換之存在而為非異者,如是即得所需之變換.為確定此理計,吾人僅須注意首次變換所得x_1^k之係數將不為以後諸變換所更易;而第二次變換所得x_2^k之係數亦然;以下類推.

定理二. 如$f(x_1,\cdots\cdots x_n)$為k次多項式不必為齊次.則必可得諸變數$(x_1,\cdots\cdots x_n)$之一非異平直齊次變換,化此多項式使對於諸變數$(x_1,\cdots\cdots x_n)$各為k次.

如f為齊次則與定理一同.如f為非齊次,則可書之作下形:

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_k(x_1,\cdots x_n)+\phi_{k-1}(x_1,\cdots x_n)+\cdots+\phi_1(x_1,\cdots x_n)+\phi_0,$$

式中各ϕ均為齊次多項式,其次數以下標表之,否則恆等於零.今僅須應用定理一於非恆等為零之齊次多項式ϕ_k即可.

對此定理及為此定理特例之定理一,可作下之推廣而

至一組函數之情形:

定理三. 如有各爲$k_1,k_2,\cdots\cdots k_m$次之一組多項式

$$f_1(x_1,\cdots\cdots x_n),\ f_2(x_1,\cdots\cdots x_n),\cdots\cdots f_m(x_1,\cdots\cdots x_n).$$

則必可得一非異平直齊次變換,使此諸多項式對於$x_1',\cdots\cdots x'_n$諸變數各爲$k_1,\cdots\cdots k_m$次.

此定理之證明,可用證明定理一,二所用之同一方法;或應用定理二於乘積$f_1f_2\cdots\cdots f_m$亦可.

*最後吾人當須注意本節諸定理,當諸多項式均爲實式,且僅經實平直變換時,仍得爲眞確.

習　題

若實多項式$f(x_1,\cdots\cdots x_n)$之次數爲奇數,則有無數實點,使其值爲零.

---

*此段及下之習題,均照德譯本補入.　譯者註.

第十五章

一元多項式及二元方式之因式與公因式

65. **一元多項式及二元方式因式分解之基本定理.** §6之定理二可述之如下:

定理一. 當 $n>1$ 時 n 次之一元多項式恆爲可約.並有一法,且僅有一有主要區別之法,可分解之成爲 n 個平直因式之乘積.

應用 §62 之理,吾人由此可推出關於二元方式

$$(1) \qquad a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}x_2+\cdots\cdots+a_nx_2^n$$

之一相似定理.先設 $a_0 \neq 0$. 則據 §62 之定義,可知非齊次多項式

$$(2) \qquad a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

與(1)相當.分解(2),可得

$$a_0(x_1-\alpha_1)(x_1-\alpha_2)\cdots\cdots(x_1-\alpha_n),$$

如取乘積爲 a_0 之 n 常數 $\alpha''_1, \alpha''_2\cdots\cdots\alpha''_n$, 則又可得

$$(3) \qquad (\alpha''_1x_1-\alpha'_1)(\alpha''_2x_1-\alpha''_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_n),$$

式中爲簡便計已書

$$\alpha''_i a_i = \alpha'_i \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots n).$$

由 §62 之定理一,吾人可推出二元方式(1)恆等於

(4) $$(\alpha''_1 x_1 - \alpha'_1 x_2)(\alpha''_2 x_1 - \alpha'_2 x_2)\cdots\cdots(\alpha''_n x_1 - \alpha'_n x_2)$$

且此外不能有其他有主要區別 (essentially different) 之方法可分(1)爲諸平直因式,蓋若有之,則令 $x_2=1$, 必有一法可分(2)爲諸平直因式,與(3)相異矣.假設 $a \neq 0$ 時吾人之定理得以證明.

今轉論 $a_0=0$ 之情形,更設

$$a_0 = \cdots\cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0,$$

式中 $k \leqq n$. 則方式(1)具下形:

(5) $$a_k x_1^{n-k} x_2^k + \cdots\cdots + a_n x_2^n,$$

即等於 k 個因式 x_2 及 $n-k$ 次之二元方式

$$a_k x_1^{n-k} + \cdots\cdots + a_n x_2^{n-k}$$

之乘積.此方式之第一係數既不爲零,則由適所論,知其必可分解成爲 $n-k$ 個平直因式.於茲可見此二元方式之形亦可書之如(4),其惟一特點即在此情形,諸常數 α'' 中有 k 個爲零.讀者可證此種分解不能有主要不同之二方法.既證明後,則可得結論:

定理二. 當 $n>1$ 時 n 次之二元方式恆爲可約.並有一法且僅有一有主要區別之法,可分解之成爲 n 個平直因式之乘積.

習題

1. 任何高於二次之一元實多項式,在實數域中恆爲可約.並有一法且僅有一有主要區別之法,可分解之成爲諸質因式.試證明之.

2. 試證對於二元方式之相當定理.

66. 正整數之最大公因數.* 本節將論二正整數 a 及 b 之最大公因數之求法,此題與次節中代數方面之問題頗相仿佛.歐几里得(Euclid)對此問題之解法如下:

如以 b 除 a* 得商 q_0 及餘數 r_1,則可書

$$a=q_0b+r_1,$$

如將此除法行至不可能時爲止,則式中 $r_1<b$.

再以 r_1 除 b 得商 q_1 及餘數 r_2,如行此除法至不可能時爲止,則此 r_2 必小於 r_1.由此繼續推演,吾人可得下列一組之方程式,其中 r_1, r_2……逐漸減小,則最後之除法中,必不剩留餘數.

$$(1)\quad \begin{cases} a\ \ =q_0b\ +r_1 & r_1<b, \\ b\ \ =q_1r_1+r_2 & r_2<r_1, \\ r_1\ =q_2r_2+r_3 & r_3<r_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ r_{\rho-2}=q_{\rho-1}r_{\rho-1}+r_\rho & r_\rho<r_{\rho-1}, \\ r_{\rho-1}=q_\rho r_\rho & 0<r_\rho. \end{cases}$$

---

* 此節所用之除數(divisor)名詞,乃爲算術上之意義,非如§60所言之代數意義.若有一整數 c 存在,使 $a=bc$,則整數 b 稱爲整數 a 之除數.

* 雖 $a<b$ 此亦爲可能,此時有惟一之特點即爲商數爲零而餘數爲 a.

由此組中之第一方程式,可知 a, b 之每一公因數必爲 r_1 之因數;由第二方程式可知 b 及 r_1 之每一公因數必爲 r_1 之因數,餘可類推;最後,可知 $r_{\rho-2}$ 及 $r_{\rho-1}$ 之每一公因數必爲 r_ρ 之因數.故 a 及 b 之各公因數必爲 r_ρ 之因數.

自另一方面言之由(1)中之最後一方程式可知 r_ρ 之各因數必爲 $r_{\rho-1}$ 之因數;由逆序之第二方程式可知 r_ρ 及 $r_{\rho-1}$ 之各公因數必爲 $r_{\rho-2}$ 之因數;餘可類推;最後可知 r_1 及 r_2 之各公因數必爲 b 之因數,而 r_1 及 b 之各公因數必爲 a 之因數.故 r_ρ 之各因數必爲 a 及 b 之公因數.

但 r_ρ 之最大公因數卽爲 r_ρ 本身,故得結論如下:

定理一. 於歐几里得算法(1)中,a 及 b 之最大公因數爲 r_ρ.

於特殊情形時,a 及 b 爲互質之充要條件乃爲 $r_\rho=1$.

今再由方程式(1)推出一重要公式,使 r_ρ 可以 a, b 及諸 q 表之.

由(1)中第一方程式有

$$r_1=a-q_0b.$$

以此值代入第二方程式中,得 r_2 之值爲

$$r_2=-q_1a+(q_0q_1+1)b.$$

由此繼續推演,吾人可以 a 及 b 表諸 r 中之任一數,最後之 r_ρ 自亦可如此.茲爲表示普遍公式便利計,吾人引入下之符號:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
[\ \ ]=1, \\
[\alpha_1]=\alpha_1, \\
[\alpha_1, \alpha_2]=\alpha_1\alpha_2+1, \\
[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3+\alpha_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[\alpha_1,\cdots\alpha_n]=[\alpha_1,\cdots\alpha_{n-1}]\alpha_n+[\alpha_1,\cdots\alpha_{n-2}].
\end{cases}
$$

將見以上所求之 r_1 r_2, r_3 諸值均包含於公式

$$(3)\qquad r_k=(-1)^{k-1}[q_1, q_2,\cdots q_{k-1}]a+(-1)^k[q_0, q_1, q_2,\cdots q_{k-1}]b$$

之中.如設當 $k\leqq k_1$ 時此式爲眞,而可證此 $k=k_1+1$ 時亦眞,則由算學歸納法,可證此式於 $k\leqq\rho$ 時必眞.於下式

$$r_{k_1+1}=r_{k_1-1}-q_{k_1}r_{k_1}$$

中,代 r_{k_1} 及 r_{k_1-1} 以由(3)所得之值,而用(2)式中定義整理其結果,則此理立可推得.

故吾人已建立公式

$$r_\rho=Aa+Bb,$$

式中 $\quad A=(-1)^{\rho-1}[q_1, q_2\cdots\cdots q_{\rho-1}],\quad B=(-1)^\rho[q_0, q_1,\cdots\cdots q_{\rho-1}].$

諸 q 既均爲整數,則顯見 A 及 B 亦爲整數.

適所得結論,於 a 及 b 爲互質時,有重要之應用.於此 $r_\rho=1$, 並有

$$(5)\qquad Aa+Bb=1.$$

反之,如有適合於(5)之二整數 A 及 B 存在,則 a 及 b 爲互

質，否則(5)之左端將有一大於1之因數矣.

定理二. a 及 b 爲互質之充要條件，乃可得二整數 A 及 B，使

$$Aa+Bb=1.$$

習　題

1. 試證　　$[a_1, a_2, \cdots\cdots a_n]=[a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots a_1]$.

[提示. 用算學歸納法.]

2. 上文所求之二整數 A 及 B，其數值各小於 $\frac{1}{2}b$ 及 $\frac{1}{2}a$，試證明之.

[提示. 示明 $a/b=[q_0, \cdots\cdots q_\rho]/[q_1, \cdots\cdots q_\rho]$，並證第二分數乃爲一既約分數.]

3. 試證吾人僅可得一對整數 A 及 B 適合關係式 $Aa+Bb=1$，且 A 及 B 之數值必各小於 $\frac{1}{2}b$ 及 $\frac{1}{2}a$.

67. 二一元多項式之最大公因式. 於茲試以二多項式

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n, \\ \phi(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m, \end{cases}$$

以代替上節中二整數 a 及 b. 此二多項式之最大公因式卽指其最大次數*之公因式而言. 於算法中(但 f 及 ϕ 均恆爲零之情形除外)卽可見此最大公因式除一任意常數因式可以乘入外，卽可完全決定.

設 f 及 ϕ 均不僅爲常數而 f 之次數至少與 ϕ 相等，換言之，卽設

---

* 多數英美教科書均用最高公因式一名詞；但於茲最大二字，幾無指及多項式值之可能，蓋多項式之值可因其中變數之具相異諸值而有無窮之多也，故此習用之名詞似以保留爲佳.

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad n \geqq m > 0.$$

如在§66中對於 a 及 b 之情形,吾人應用歐几里得之算法於 f 及 ϕ,則可得一組恆等式

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x) \equiv Q_0(x)\phi(x) + R_1(x), \\ \phi(x) \equiv Q_1(x) R_1(x) + R_2(x), \\ R_1(x) \equiv Q_2(x) R_2(x) + R_3(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{\rho-1}(x) \equiv Q_\rho(x) R_\rho(x) + R_{\rho+1}. \end{cases}$$

爲劃一起見,書

$$\phi(x) \equiv R_0(x).$$

則 $R_0, R_1, R_2 \cdots\cdots$ 爲次數逐漸降低之諸多項式,而經有限步驟後,必可得一僅爲常數之餘式,此餘式吾人已書之爲 $R_{\rho+1}$.

由此算法,可推知亦如在§66中情形,f 與 ϕ 之各公因式必爲所有諸 R 之一因式,而自另一方面言之,連續 R 之各公因式必爲在其前所有諸 R 之一因式,故亦爲 f 及 ϕ 之因式.據此如 f 與 ϕ 有一不爲常數之公因式,則此公因式必亦爲 $R_{\rho+1}$ 之因式,故 $R_{\rho+1}=0$. 反之,如 $R_{\rho+1}=0$, 則多項式 $R_\rho(x)$ 之本身即爲 R_ρ 與 $R_{\rho+1}$ 之因式,故亦爲 f 與 ϕ 之公因式.由是可得二定理:

定理一. 有均不爲常數之兩一元多項的 f 與 ϕ,其互質之充要條件,乃在歐几里得算法(2)中之 $R_{\rho+1} \neq 0$.

定理二. 在歐几里得算法(2)中,如 $R_{\rho+1}=0$, 及 $R_\rho(x)$ 爲 f 與 ϕ 之最大公因式.

應用此二定理,吾人不特可計算兩一元多項式之最大公因式,且可計算有限數個一元多項式之最大公因式.例如欲求 $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 之最大公因式,可先依上法以求 f 與 ϕ 之最大公因式 $R_\rho(x)$, 次再依同一方法計算 $R_\rho(x)$ 與 $\psi(x)$ 之最大公因式.

由恆等式(2)可計算各餘式,而以 f, ϕ 及諸商式 Q 表之.在此所得之公式與 §66 中全同,而得 $R_{\rho+1}$ 之值如下:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad R_{\rho+1}\equiv&(-1)^\rho[Q_1(x),\ Q_2(x),\cdots\cdots Q_\rho(x)]f(x)\\
&+(-1)^{\rho+1}[Q_0(x),\ Q_1(x)\cdots\cdots Q_\rho(x)]\phi(x).
\end{aligned}
$$

今設 f 與 ϕ 爲互質,則可以 $R_{\rho+1}$ 除(3)而得

$$
(4)\qquad F(x)f(x)+\Phi(x)\phi(x)\equiv1,
$$

式中

$$
(5)\qquad \begin{cases}
F(x)\equiv\dfrac{(-1)^\rho}{R_{\rho+1}}[Q_1(x),\ Q_2(x),\cdots\cdots Q_\rho(x)],\\[2ex]
\Phi(x)\equiv\dfrac{(-1)^{\rho+1}}{R_{\rho+1}}[Q_0(x),\ Q_1(x),\cdots\cdots Q_\rho(x)].
\end{cases}
$$

由 §66 之定義二,可知 F 及 Φ 均爲 x 之多項式.故 f 與 ϕ 互質之必要條件乃有適合於(4)之二多項式及 Φ 存在.此且亦爲充足之條件;蓋由(4)式可知 f 與 ϕ 之各公因式必爲 1 之因式,故必爲常數.故吾人已證明定理:

定理三. 多項式 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 互質之充要條件,乃可得適合於(4)之二多項式 $F(x)$ 及 $\Phi(x)$*

如注意由(5)所定之 F 及 Φ 之次數,則可使此陳述更爲精密.因此故試先留意如 $a_1,\cdots\cdots a_n$ 爲 $k_1,\cdots\cdots k_n$ 次多項式,則由§66之(2)式可知 $[a_1,\cdots\cdots a_n]$ 之次數必不大於 $k_1,\cdots\cdots k_n$. 今設 $R_i(x)$ 之次數爲 m_i 而 f 及 ϕ 各爲 n 及 m 次如前.則(參看2) $Q_0, Q_1, Q_2,\cdots\cdots$ 之次數必爲 $n-m,\ m-m_1,\ m_1-m_2,\cdots\cdots$. 故由(5)可知 F 及 Φ 之次數各不大於

$$(m-m_1)+(m_1-m_2)+\cdots\cdots(m_{\rho+1}-m_\rho)=m-m_\rho,$$

及 $$(n-m)+(m-m_1)+(m_1-m_2)+\cdots\cdots(m_{\rho-1}-m_\rho)=n-m_\rho.$$

因 $m_\rho>0$, 是以 F 之次數小於 m, 而 Φ 之次數小於 n.

反之,今再證如 F_1 爲次數小於 m 之多項式,而 Φ_1 爲次數小於 n 之多項式,且合於

(6) $$F_1(x)\cdot f(x)+\Phi_1(x)\phi(x)\equiv 1,$$

則 $$F_1(x)\equiv F(x),\qquad \Phi_1(x)\equiv\Phi(x).$$

欲證此理可自(4)減(6),得

$$(R-F_1)f\equiv(\Phi_1-\Phi)\phi.$$

如分此恆等式之兩邊成爲諸平直因式,則因 f 與 ϕ 既爲互質, f 必爲 $\Phi_1-\Phi$ 之一因式,而 ϕ 必爲 $F-F_1$ 之一因式.然此種情形僅當 $\Phi_1-\Phi$ 及 $F-F_1$ 恆爲零時方可成立,否則二

---

*吾人所與此定理之證法,僅用於 f 及 ϕ 均不爲常數之時,但如 f 或 ϕ 爲常數時,則立見此定理顯然爲眞.

者之次數必各較 f 及 ϕ 爲低,故吾人已證明定理:

定理四. 如 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲互質,且均不爲常數,則可得且僅可得一對次數各小於 f 及 ϕ 之多項式 $F(x)$ 及 $\Phi(x)$,適合於恆等式(4).

下節中將述及此處所闡明原理之普遍應用,在未進修此普遍應用之先,讀者須就兩二次多項式

$$f(x)\equiv a_0x^2+a_1x+a_2 \qquad a_0\neq 0,$$

$$\phi(x)\equiv b_0x^2+b_1x+b_2 \qquad b_0\neq 0$$

之特殊情形而熟習所發生諸觀念.

如直接應用歐几里得算法以求此二多項式互質之條件,則必須就 $a_1b_0-a_0b_1$ 爲零與否之二種情形分別研究比較此諸結果,卽可知於所有情形中,吾人所求之條件爲:

$$(a_2b_0-a_0b_2)^2+(a_1b_0-a_0b_1)(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0.$$

如求在何種情形之下,有適合恆等式(4)之二多項式爲:

$$F(x)\equiv p_0x+p_1,$$

$$\Phi(x)\equiv q_0x+q_1$$

存在者,更由此入手以求前之條件,則更簡潔而迅速.

末述一方法,吾人將應用之於下節中普遍情形.

68. 二一元多項式之消元式. 取

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad a_0\neq 0, n>0.$$

$$\phi(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m \qquad b_0\neq 0,\ m>0.$$

由 §67 之定理四可知此二多項式爲互質之條件,乃爲有諸常數 $p_0, p_1\cdots\cdots p_{m-1}$, $q_0, q_1,\cdots\cdots q_{n-1}$ 存在,並使

$$(p_0x^{m-1}+p_1x^{m-2}+\cdots\cdots+p_{m-1})(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n)$$
$$+(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1})(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m)\equiv 1.$$

令含 x 同次冪項之係數相等,則見適所書之恆等式相合於下列一組方程式:

$$(1)\begin{cases}
a_0p_0 + b_0q_0 = 0,\\
a_1p_0+a_0p_1 + b_1q_0+b_0q_1 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_mp_0+a_{m-1}p_1+\cdots+a_1p_{m-1}+b_mq_0+b_{m-1}q_1+\cdots+b_0q_m = 0,\\
a_{m+1}p_0+a_mp_1+\cdots+a_2p_{m-1} + b_mq_1 +\cdots+b_0q_{m+1} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_np_0+a_{n-1}p_1+\cdots+a_{n-m+1}p_{m-1} + b_mq_{n-m} +\cdots+b_1q_{n-1} = 0,\\
\qquad a_np_1 +\cdots+a_{n-m+2}p_{m-1} + b_mq_{n-m+1}+\cdots+b_2q_{n-1} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad a_np_{m-1} + b_mq_{n-1} = 1.
\end{cases}$$

吾人爲確定計,於書此諸方程式時已設 $n\geqq m$, 如其不合此情形,則雖有變動亦無關係.此等諸式乃爲含 $m+n$ 個未知數 $p_0\cdots\cdots p_{m-1}$ $q_0,\cdots\cdots q_{n-1}$ 之一組 $n+m$ 個平直方程式,在調動行列及移列之後,其行列式爲

$$R\begin{pmatrix} a_0,\cdots\cdots a_n \\ b_0,\cdots\cdots b_m \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n\ 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0\ a_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n\ 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\cdots\cdots 0\ a_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ b_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_m \\ 0\cdots\cdots\cdots 0\ b_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_m 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_m\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \end{vmatrix}$$

在此須留意此行列式乃爲具有 $m+n$ 行及列者.

如 $R\neq 0$ 則方程組(1)有一且僅有一解.而 f 與 ϕ 爲互質.如 $R=0$, 則初視之似有二種情形(參閱 §16): 即此組方程式或無解,或竟有無窮數個之解.但後者之情形實際上絕不能發生,蓋由 §67 之定理四已知次數各不大於 $m-1$ 及 $n-1$ 而適合該節中(4)式中二多項式及 F 及 Φ 者爲數不能多於一對也.據此,如 $R=0$. 則此組方程式無解而 f 與 ϕ 有一公因式.

R 稱爲 f 與 ϕ 之消元式*

---

*須留意 f 與 ϕ 之消元式,可爲 f 與 ϕ 消元式之負者.此種變號在多數情形中,不生若何之影響.

依上所述消元式一名詞之確定,乃根據 f 及 ϕ 至少均爲一次之假設.今倘欲將此定義推廣至於此諸多項式之一或均爲常數之情形.除去極端情形 $m=n=0$ 外,吾人仍繼續用行列式 R 爲消元式之定義.故如 $m=0, n>0$, 則有

$$R\begin{pmatrix} a_0, \cdots\cdots a_n \\ b_0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_0^{\,n}.$$

如 $b_0 \neq 0$, 則 $R \neq 0$, 且於此情形中,f 與 ϕ 仍爲互質,蓋以常數 ϕ 除常數外無他因數也,但如 $b_0=0$, 則 $R=0$, 而 f 之各因式必亦爲 ϕ 之因式,蓋以此時之 ϕ 恆爲零也.

同理,當 $n=0$, $m>0$ 時,則有

$$R\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0, \cdots\cdots b_m \end{pmatrix} = a_0^{\,m},$$

而可見 f 與 ϕ 互質之充要件條爲 $R \neq 0$.

最後,當 $n=m=0$ 時,則仍以符號 $R\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ 表消元式,而以下式:

$$R\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{當 } a_0 \text{ 及 } b_0 \text{ 均不爲零之時,} \\ 0 & \text{當 } a_0 = b_0 = 0 \text{ 之時} \end{cases}$$

確定之.至是可作一十分普遍之敍述:

定理. 二一元多項式互質之充要條件爲其消元式異於零.

倘有其他方法,可得此結論,可參看 §76 後習題中第 4 題.

69. 以行列式所表最大公因式.

定義. 二一元多項式之第 i 次子消元式(subresultant) R_i 者,即自此二多項式之消元式中截去首 i 行及末 i 行並首 i 列及末 i 列所得之行列式也.

例如二多項式之次數各爲5及3,則消元式 R 爲八級行列式,R_1 爲六級者,R_2 爲四級者,而 R_3 爲二級者,如下所示:

$$R=\left|\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b^0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
 & R_1= & R_2= & R_3= & & & & \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|.$$

今但述下之結論,其證明留待讀者自爲之:*

引. 如 $f(x)$ 與 $\phi_1(x)$ 爲二多項式,且合於

$$f(x)\equiv(x-\alpha)f_1(x),\quad \phi(x)\equiv(x-\alpha)\phi_1(x),$$

則 f_1 與 ϕ_1 之消元式及其逐次子消元式必各等於 f 及 ϕ 之逐次子消元式.

---

* 見附錄三. 譯者註.

定理一. $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之最大公因式之次數,等於諸子式消元式. $R_0=R, R_1, R_2\cdots\cdots$ 中首不為零之下標.

定理二. 如二多項式 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 最大公因式之次數為 i, 則可在 f 與 ϕ 之 i 次子消元式中,含 f 係數之末列中最後之元素,代以 $f(x)$, 恰在其上者,代以 $xf(x)$, 在此上者,再代以 $x^2f(x)$, 餘可類推,而含 ϕ 係數之第一列中最後之元素,代以 $\phi(x)$, 恰在其下者代以 $x\phi(x)$, 餘照此類推.如此卽得此最大公因式.

例如 f 與 ϕ 之次數各為5與3, 而 $i=1$ 時,則其最大公因式為

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & xf(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & f(x) \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \phi(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & x\phi(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2\phi(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & x^3\phi(x) \end{vmatrix}.$$

70. 若干方程式之公根. 消元法.

取方程式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0 \qquad a_0\neq 0,$$

$$\phi(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m=0 \qquad b_0\neq 0,$$

其根各為 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots\beta_m$; 並設 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 已分

解成為諸平直因式如下:

$$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n),$$

$$\phi(x)\equiv b_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_m).$$

因由 §65 之定理一,知此諸因式為單純確定.故顯見必於且僅於 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有公因式時,方程式 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 始有公根,即僅當 f 與 ϕ 之消元式 R 為零時,二式方有公根.

在初等代數中自二方程式 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 中消去 x 之意義為:求 f 與 ϕ 係數間之一關係或使當此二方程式同時適合時,則此關係式必為眞,亦即求此二方程式有公根之必要條件也,但在多數情形中當消去變數時,吾人所求之係數關係式不僅當此二方程式有公根式為眞,即反而言之,當其為眞時,此諸方程式亦必有公根.由此廣義之觀點,則自 $f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 二方程式中消去 x 者,其意義不過求此二方程式有公根之充要條件耳.是以其消去法之結果如 $R=0$.今試復自稍異之立場論此問題.

設於方程式

$$(1)\qquad a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0\qquad a_0\neq 0,$$

$$(2)\qquad b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0\qquad b_0\neq 0.$$

視異冪之 x 為相異之未知數,則有含五未知數 x, x^2, x^3, x^4, x^5 之兩非齊次平直多項式先遍乘(1)以 x, 繼以 x^2, 而輪流以 x, x^2, x^3, x^4 遍乘(2),則得一組含七未知數之八個非齊次平直方程式:

$$
\begin{aligned}
a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2 \qquad\qquad &=0,\\
a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x \qquad &=0,\\
a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5 &=0,\\
b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3 &=0,\\
b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x \qquad &=0,\\
b_0x^5+b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2 \qquad\qquad &=0,\\
b_0x^6+b_1x^5+b_2x^4+b_3x^3 \qquad\qquad\qquad &=0,\\
b_6x^7+b_1x^6+b_2x^5+b_3x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad &=0.
\end{aligned}
$$

如 x 之一值同時能適合 (1) 及 (2), 則顯見亦可適合以上所有諸方程式. 故此諸方程式爲聯立而由 §16 之定理一, 得

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0\\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_5\\
0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3\\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0\\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0\\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}=0.
$$

故此行列式爲零, 乃 (1) 與 (2) 有公根之必要條件.

此種方法卽所謂西薇斯德氏之析配消元法* (Sylvister's Dialytic Method of Elimination).

於此可見上行列式與 (1) 及 (2) 之消元式全等.故由西薇斯得之方法可求二方程式有公根之條件,而與上所求者相同,卽 $R=0$ 是也.然此條件並未嘗證其爲充足者,僅證其爲必要耳.故西薇斯得之方法,雖曰簡便,究嫌不甚完善尙有殘缺之處.

由 §69 卽可得二方程式 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 公根之數,並一方程式以計算此諸公根.

71. **$a_0=0$ 及 $b_0=0$ 之情形.** 於玆有一重要之點須注意者,據吾人所與之定義知僅當 f 及 ϕ 確爲 n 及 m 次時,卽僅當 $a_0\neq 0$ $b_0\neq 0$ 時,行列式 $R\begin{pmatrix}a_0,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}$ 方爲二多項式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_n,$$

$$\phi(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots b_m$$

之消元式.例如多項式

$$f(x)\equiv a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n,$$

$$\phi(x)\equiv b_0x^m\quad+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m$$

之消元式非爲 $(m+n)$ 次之行列式 $R\begin{pmatrix}0,a_1,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}$,而於 $a_1\neq 0$, $b_0\neq 0$ 時爲 $(m+n-1)$ 次之行列式 $R\begin{pmatrix}a_1,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}$ 於 a_1 或 b_0 爲

*爲簡便計,吾人取 $n=5$ 及 $m=3$ 時之特例,然此方法實完全爲普遍者.

零時爲一更低次之行列式.*

設以 R 表 $(m+n)$ 次行列式 $R\begin{pmatrix}a_0,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}r$ 爲 f 及 ϕ 之消元式而論 $a_0=0$, $a_1\neq 0$, $b_0\neq 0$ 之情形. 因 R 之第一行之各元素除最末者外均爲零,故可書

$$R=(-1)^{m+n-1}b_0r.$$

同理,可知如 f 爲 $n-i$ 次而 $b_0\neq 0$, 則可書

$$R=\pm b_0{}^i r,$$

又如 ϕ 之次數爲 $m-i$, 而 $a_0\neq 0$, 則得

$$R=a_0{}^i r.$$

據此,可知除當 $a_0=b_0=0$ 之情形而外, R 與 r 相異者僅爲一異於零之因式.

定理. $R\begin{pmatrix}a_0,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots a_m\end{pmatrix}$ 雖僅於 $a_0\neq 0$ 及 $b_0\neq 0$ 時(或當 $m=0$, 或 $n=0$ 時)方爲 f 與 ϕ 之消元式,但即使 $a_0=0$ 或 $b_0=0$ 時,其消元式之值爲零,仍爲 f 與 ϕ 有公因式之充要條件,僅須 a_0 及 b_0 均不爲零即可.

於此顯然可見此最後限制不能捨去,蓋如 $a_0=b_0=0$, 則此行列式第一行之元素均將爲零,是不論 f 及 ϕ 有公因式

* 試以二多項式 $f(x)=(\alpha+\beta)x^2+x-\beta$ 及 $\phi(x)=\alpha x+1$ 爲例. 如 $\alpha+\beta\neq 0$ 及 $\alpha\neq 0$, 則其消元式爲 $(\alpha^2-1)\beta$. 但如 $\alpha=-\beta\neq 0$, 則其消元式爲 $1-\alpha^2$.

與否,此行列式恆爲零矣.*故如吾人不欲有此例外,則僅能言 R 爲零乃 f 與 ϕ 有公因式之必要條件.

72. 兩二元方式之消元式. 今吾人可論二元方式

$$f(x_1, x_2)\equiv a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}x_2+\cdots\cdots+a_nx_2^n \qquad (n\geqq 1),$$

$$\phi(x_1, x_2)\equiv b_0x_1^m+b_1x_1^{m-1}x_2+\cdots\cdots+b_mx_2^m \qquad (m\geqq 1).$$

更書一元多項式

$$F(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,$$

$$\Phi(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m,$$

以資比較行列式 $\qquad R\begin{pmatrix}a_0,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}$

僅當 a_0 及 b_0 均異於零時方爲 F 與 Φ 之消元式.然在各種情形吾人將仍稱之爲兩二元方式 f 與 ϕ 之消元式.

定理. 兩二元方式有一異於常數之公因式之充要條件爲其消元式等於零.

*由二方程式有公根理論(參看 § 70)一方面以觀此問題並加入無窮大根 (infinite roots) 一概念,則雖此最後之特別亦可免去.若 $a_0\neq 0$ 方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

必有相異或相等之 n 個根,如令 a_0 趨近於零,則作一變換 $x'=\frac{1}{x}$ 後卽可知其一根或數根之絕對值愈變愈大.故如 $a_0=0$ 則自可謂此方程式有無窮大根.因此如吾人視共有無窮大根之二方程式爲有公根,則可謂:

無論何種情形下二方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0 \qquad n>0,$$

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m=0 \qquad m>0,$$

有公根之充要條件爲 $R\begin{pmatrix}a_0,\cdots\cdots a_n\\ b_0,\cdots\cdots b_m\end{pmatrix}$ 等於零.

如 a_0 與 b_0 均異於零，則據 §62 之定義可知非齊次多項式 F 及 Φ 與於方式 f 及 ϕ 相當，據該節之定理二可知在此情形 f 與 ϕ 有異於常數之公因式之充要條件爲其消元式等於零.

自另一方面言之，如 $a_0=b_0=0$，則 f 及 ϕ 有一公因式 x_2，而其消元式顯然爲零.

對於諸 a 或諸 b 均爲零之情形亦可作相類之說明.

至是所未論者，僅有下列二情形

(1) $a_0 \neq 0$; $b_0=b_1=\cdots\cdots=b_k=0$, $b_{k+1} \neq 0$ $(k<m)$,

(2) $b_0 \neq 0$; $a_0=a_1=\cdots\cdots=a_k=0$, $a_{k+1} \neq 0$ $(k<n)$.

於情形(一)中 F 固相當於 f，如書

$$\phi(x_1, x_2) \equiv x_2^{k+1}\phi_1(x_1, x_2),$$

則 Φ 相當於 ϕ_1. 在此(參看 §71)，可知 $R \neq 0$ 乃 F 與 Φ 爲互質之充要條件. 故據 §62 之定理二可知其亦爲 f 及 ϕ 互質之充要條件，但因 x_2 不爲 f 之因式，故二方式 f 及 ϕ 必於且僅於 f 及 ϕ_1 爲互質時始爲互質，由是得證明吾人之定理.

至若情形(2)中之證法，亦與適所述者相同.

第十六章

二元或多元多項式之因式

73. 二元多項式之僅含一變數因式. 上章中吾人已知一元多項式當其次數高於一時則恆爲可約,多項式之含有二元或多元者,在一般情形,爲不可約,吾人已於二次方式之特例中見之.

令$f(x, y)$爲含二元之多項式,并設其已按x之冪排列:

$$f(x, y) \equiv a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}(y)x + a_n(y),$$

此諸a爲含y之多項式.

定理一. 僅含y之多項式$\psi(y)$能爲$f(x, y)$之因式之充要條件,乃其爲所有諸a之因式.

此條件顯爲充足者.欲證其爲必要者,試先設$\psi(y)$爲$f(x, y)$之因式,則

$$(1) \quad a_0(y)x^n + \cdots\cdots + a_n(y) \equiv \psi(y)[f_0(y)x^n + \cdots\cdots + b_n(y)],$$

式中諸b均爲y之多項式,與y以任一特殊值,則(1)變爲x之恆等式,故可由之以推出下列諸方程式:

$$\begin{cases} a_0(y)=\psi(y)b_0(y) \\ a\ (y)=\psi(y)b_1(y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n(y)=\psi(y)b_n(y) \end{cases}$$

此諸方程式對於y爲任意值,均能成立,故爲恆等式,是以$\psi(y)$爲所有諸a之一因式.

定理二. $f(x, y)$及$\phi(x, y)$爲x與y之任意二多項式,如僅含*y之不可約多項式$\psi(y)$爲乘積$f\phi$之一因式,則ψ必爲f或ϕ之因式.

令 $$f(x, y)\equiv a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(y),$$

而 $$\phi(x, y)\equiv b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m(y);$$

則 $$f(x, y)\phi(x, y)\equiv a_0b_0x^{n+m}+(a_0b_1+a_1b_0)x^{n+m-1}$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^{n+m-2}+\cdots\cdots+a_nb_m.$$

欲證ψ爲f或ϕ之因式,必證其爲所有諸a或所有諸b之因式.如其不然,則於$a_0, a_1,\cdots\cdots a_n$一貫函數中,必可得最先不以$\psi$爲因式之$a$.稱此函數爲$a_i$.於$b_0, b_1,\cdots\cdots b_m$一貫函數中亦必求得最先不以$\psi$爲因式之$b$.稱此函數爲$b_j$.今$a_i$與$b_j$不能被$\psi$整除,而$a_0,\cdots\cdots a_{i-1}$, $b_0,\cdots\cdots b_{j-1}$則能如此,若能證明此種假設發生矛盾,則吾人之定理可以證明.因此試論乘積$f\phi$中$x^{(n-i)+(m-j)}$之係數,如吾人已約定諸a與諸b之下標大於n及m者爲零,則此係數可書作

*斯卽爲一平直多項式.

$$a_0b_{i+j}+\cdots+a_{i-1}b_{j+1}+a_ib_j+a_{i+1}b_{j-1}+\cdots+a_{i+j}b_0.$$

因按假設$f\phi$可被ψ整除,則由定理一知適所書之式必亦可被ψ整除.在a_ib_j以前及其後所有各項,顯見其可被ψ整除,故此項必亦可被ψ整除,故在函數a_ib_j之諸平直因式中必有ψ.但由§65定理一知函數a_ib_j分解成諸平直因式之方法,就主要區別而言,僅有一法,而此分解之法,乃分成a_i與b_j諸平直因式.因ψ既不爲此諸因式之一,矛盾遂生,而吾人之定理得以證明.

此定理有一重要之系如下:

系. 設$f(x,y)$與$\phi(x,y)$爲x,y之多項式,而$\psi(y)$爲僅含y之多項式.如ψ爲乘積$f\phi$之因式而與ϕ互質,則ψ爲f之一因式.

如ψ爲不可約,則此系與上定理相同.故設ψ已分解成不爲常數之諸不可約因式;換言之,即分解成諸一次因式如下:

$$\psi(y)\equiv\psi_1(y)\psi_2(y)\cdots\cdots\psi_k(y)$$

今取一恆等式,以表示ψ爲$f\phi$之因式.

$$f(x,y)\phi(x,y)\equiv\psi_1(y)\psi_2(y)\cdots\cdots\psi_k(y)G(x,y). \tag{2}$$

斯即表明$\psi_1(y)$乃$f\phi$之一因式,故由定理二知其必爲f或ϕ之一因式.ψ與ϕ既爲互質,故ψ_1不爲ϕ之因式.是以ψ_1爲f之因式:

$$f(x,y)\equiv\psi_1(y)f_1(x,y).$$

以此代入(2),因 ψ_1 不恆爲零,故可得消去之而有

$$(3)\qquad f_1(x, y)\phi(x, y)\equiv\psi_2(y)\cdots\cdots\psi_k(y)G(x, y).$$

由此可推知 ψ_2 爲 $f_1\phi$ 之因式,故必爲 f_1 之因式:

$$f_1(x, y)\equiv\psi_2(y)f_2(x, y).$$

以此代入(3)而消去 ψ_2. 繼續推演,即可得下之恆等式:

$$f(x, y)\equiv\psi_1(y)\psi_2(y)\cdots\cdots\psi_k(y)f_k(x, y)\equiv\psi(y)f_k(x, y)$$

以證明本系.

習題

如 $f(x, y)$ 與 $\phi(x, y)$ 爲二多項式,設有任意二組多項式

$$P_1(y),\quad Q_1(x, y),\quad R_1(x, y),$$
$$P_2(y),\quad Q_2(x, y),\quad R_2(x, y).$$

(a) 故合恆等式:

$$P_1(y)f(x, y)\equiv Q_1(x, y)\phi(x, y)+R_1(x, y),$$
$$P_2(y)f(x, y)\equiv Q_2(x, y)\phi(x, y)+R_2(x, y);$$

(b) 捨常數外, P_1, Q_1 無復公因式,而 P_2, Q_2 亦捨常數外,無復公因式;

(c) R_1 與 R_2 中 x 之次數,均較 ϕ 中者爲低;

則是二組多項式彼此成比例(參看§63定理二).

74 二元多項式最大公因式之算法. 今論含 x 與 y 之二多項式

$$f(x, y)\equiv a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n(y),$$

$$\phi(x, y)\equiv b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m(y),$$

并設 $a_0\not\equiv 0$, $b_0\not\equiv 0$, $n\geqq m>0$.

聯合上節中定理一與§67之結論,則可使吾人求得 f 與

ϕ所有僅含y之公因式,蓋以此諸因式必爲所有諸a及所有諸b之公因式也.

故尙有待續究者,僅在立一方法,以求f與ϕ之不僅含y之公因式.今將示明吾人可由最大公因式之算法求之.

以ϕ除f(參看§63定理二),得恆等式

$$P_0(y)f(x, y)\equiv Q_0(x, y)\phi(x, y)+R_1(x, y)$$

式中R_1如不恆爲零,則其中x之次數必較ϕ中者爲低.如$R_1\not\equiv 0$,則以R_1除ϕ,得恆等式

$$P_1(y)\phi(x, y)\equiv Q_1(x, y)R_1(x, y)+R_2(x, y)$$

式中R_2如不恆爲零,則其中x之次數必較R_1中者爲低.如$R_2\not\equiv 0$,則以R_1除R_2.繼續推之,可得下列一貫恆等式,其中$R_1, R_2,\cdots\cdots$中x之次數逐漸降低,而經有限次步驟後,卽可達於一與x無關之R,設爲$R_{\rho+1}$,

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}P_0(y)f(x, y)\equiv Q_0(x, y)\phi(x, y)+R_1(x, y),\\ P_1(y)\phi(x, y)\equiv Q_1(x, y)R_1(x, y)+R_2(x, y),\\ P_2(y)R_1(x, y)\equiv Q_2(x, y)R_2(x, y)+R_3(x, y),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P_{\rho-1}(x)R_{\rho-2}(x, y)\equiv Q_{\rho-1}(x, y)R_{\rho-1}(x, y)+R_\rho(x, y),\\ P_\rho(y)R_{\rho-1}(x, y)\equiv Q_\rho(x, y)R_\rho(x, y)+R_{\rho+1}(y).\end{array}\right.$$

定理一. f與ϕ有含x之公因式之充要條件爲

$$R_{\rho+1}(y)\equiv 0.$$

欲證明此定理,吾人試先留意由恆等式(1)中之第一式,知 f 與 ϕ 之任一公因式必爲 R_1 之因式,更由次式,知其必亦爲 R_2 之因式,如此類推.最後可見 f 與 ϕ 之各公因式必爲所有諸 R 之因式.但 $R_{\rho+1}$ 不含有 x. 故如 f 與 ϕ 有一公因式含 x,則 $R_{\rho+1}(y)\equiv 0$.

反之,設 $R_{\rho+1}(y)\equiv 0$, 幷令

$$(2)\qquad R_\rho(x, y)\equiv S(y)G(x, y),$$

式中 G 無僅含 y 之因式*. 由恆等式(1)可知 $P_\rho(y)$ 爲

$$Q_\rho(x\ \ x)S(y)G(x, y)$$

之因式,且由假設 G 既無僅含 y 之因式,則由 §73 定理二之系知 $P_\rho(y)$ 必爲 $Q_\rho S$ 之因式,即

$$(3)\qquad Q_\rho(x, y)S(y)\equiv P_\rho(y)H(x, y).$$

先後將(2),(3)代入恆等式(1)中,因 $P_\rho(y)\not\equiv 0$, 故自可從其結果中消去 $P_\rho(y)$ 而得

$$R_{\rho-1}(x, y)\equiv H(x, y)G(x, y).$$

是以 G 不僅爲 R_ρ 之因式且亦爲 $R_{\rho-1}$ 者.據此可將(1)中最後恆等式前之一式,書爲

$$P_{\rho-1}(y)R_{\rho-2}(x, y)\equiv J(x, y)G(x, y).$$

由 §73 定理二之系,可知 $P_{\rho-1}(y)$ 爲 J 之因式,故於適所書之恆等式中可將 $P_{\rho-1}(y)$ 消去,即見 G 爲 $R_{\rho-2}$ 之因式矣.

如是繼續推之,可知 G 爲所有諸 R 之因式,故終必爲 f 與

* 如 R_ρ 無僅含 y 之因式,則 S 變爲常數.

ϕ之公因式.復次,由(2)知G至少爲x之一次式,否則R_ρ將不含x而吾人已假定以$R_{\rho+1}$爲諸R中首不含有x者.

如是吾人之定理遂得證明.

如上所述,f與ϕ之每一公因式,必亦爲諸R之一因式,故如ψ爲f與ϕ之公因式,則由(2)可得

$$G(x, y)S(y) \equiv \psi(x, y)K(x, y).$$

因此,如ψ無僅含y之因式,則由§73定理二知S必爲K之因式.故於適所書之恆等式中消去S,即可見ψ爲G之因式,此即

定理二. 於歐几里得之算法中如$R_{\rho+1}\equiv 0$,f與ϕ之最大公因式而不有僅含y之因式者,爲自$R_\rho(x, y)$中除去所有僅含y之因式所得之多項式$G(x, y)$.

吾人須留意如$R_{\rho+1}$爲異於零之常數,則f與ϕ爲互質;但其逆理不眞,僅取簡單之例,如

$$f \equiv 2x^2+3y^2, \quad \phi \equiv x$$

即可見之.

回顧恆等式(1),於此諸恆等式之第一式中,只須移項即可以f與ϕ(幷P_0, Q_0)表R_1之值.將此值代入第二恆等式,即得以f與ϕ幷若干諸P與諸Q表R_2之值.如是繼續推之,最後可得下式:

$$R_{\rho+1}(y) \equiv F(x, y)f(x, y) + \Phi(x, y)\phi(x, y) \tag{4}$$

式中F及Φ爲(x, y)之多項式.

75. 二元多項式之因式.

定理一. 如$f(x, y)$與$\phi(x, y)$為含x及y之二多項式,而不可約多項式$\psi(x, y)$為乘積$f\phi$之一因式,則ψ必為f或ϕ之因式.

如ψ不同時含有x與y,則此定理化為§73定理二.故於此僅有ψ同時含二變數之情形,尚待論及.在此種情形時,f與ϕ二多項式至少有一含x,且至少為x之一次式.可設此多項式為f,而不失為普遍性.如ψ為f之因式,則吾人之定理為眞.設ψ不為f之因式;則因ψ為不可約,故f與ψ為互質,苟吾人應用最大公因式之算法於f及ψ(如吾人於上節中之對f與ϕ),則首先不含x之餘式$R_{\rho+1}(y)$應不恆為零.故上節中之恆等式(4)今變為

$$(1)\qquad R_{\rho+1}(y) \equiv F(x, y)f(x, y)+\Psi(x, y)\psi(x, y).$$

如以$\phi(x, y)$乘此式,則其第二邊變為以ψ為因式之多項式,蓋由假設,$f\phi$以ψ為因式也.故吾人可書

$$(2)\qquad R_{\rho+1}(y)\phi(x, y) \equiv \psi(x, y)X(x, y).$$

因ψ為不可約,故$R_{\rho+1}$中常數以外之因式,不能為ψ之因式.是以由§73定理二之系,知$R_{\rho+1}$為$X(x, y)$之一因式.因$R_{\rho+1}$不恆為零,故得自(2)中消去之,而有一呈下形之恆等式:

$$\phi(x, y) \equiv \psi(x, y)X_1(x, y);$$

此卽示ψ為ϕ之一因式,故吾人之定理,得以證明.

應用此定理若干次,卽可得

系. 如任意若干個二元多項式之乘積

$$f_1(x, y) f_2(x, y) \cdots\cdots f_k(x, y)$$

能被一不可約之多項式 $\psi(x, y)$ 所整除,則 ψ 至少必爲諸 f 中之一之因式.

至是吾人可進論二元多項式可約性全部中之基本定理矣.

定理二. 一不恆爲零之二元多項式可分解成若干均不爲常數之不可約因式之乘積,其方法有一,而僅有一有主要區別之法.

一多項式 $f(x, y)$ 分解成諸不可約因式乘積之方法,至少有一,可證明如下.如 f 爲不可約,則無分解之可能且亦不必需.如 f 爲可約,則有

$$f(x, y) \equiv f_1(x, y) f_2(x, y),$$

式中 f_1 與 f_2 均不爲常數.如 f_1 與 f_2 均爲不可約,則吾人已得分解 f 之一方法,而爲所欲者.如其不然,則因 f_1 及 f_2 二多項式既不可約,可再分解之,使各成均不爲常數之二因式之乘積.故得以三或四因式乘積之式表 f.如所有此諸因式均不可約,則此已爲所求之 f 分解式.如其不然,則將可約者再分解之成二因式之乘積,以後類推.此種手續,在有限次之步驟後,必至停止,因每當吾人分解一多項式成二因式時,此因式之次數必較原有多項式式低也.故用此方法,終可將 f 分成諸不可約因式之乘積,而諸因式均不爲常數.

今設可有二法，分解f成不可約因式之乘積，而諸因式均不為常數，則

$$f(x,y)\equiv f_1(x,y)f_2(x,y)\cdots\cdots f_k(x,y)$$
$$\equiv \phi_1(x,y)\phi_2(x,y)\cdots\cdots\phi_l(x,y).$$

因ϕ_1為f之一因式，則由定理一之系，知必為$f_1, f_2,\cdots\cdots f_k$諸多項式中一者之因式．設對諸$f$作相當排列使$\phi_1$為$f_1$之因式．則因$f_1$為不可約者，故$f_1$與$\phi_1$僅相異一常數因式；且因$\phi_1\not\equiv 0$，故可自上恆等式中，將其消去，而得

$$c_1f_2f_3\cdots\cdots f_k\equiv\phi_2\phi_3\cdots\cdots\phi_l.$$

同理，此恆等式中可知f_2與諸ϕ中之一僅相差一常數因式，設其為ϕ_2．消去ϕ_2得

$$c_1c_2f_3\cdots\cdots f_k\equiv\phi_3\cdots\cdots\phi_l.$$

如是繼續推之，如$l<k$則諸ϕ將先消盡如$l>k$則諸f將先消盡．但此二情形均不可能，因最後吾人將得一恆等式，其一邊為常數，而另一邊則為異於常數之多項式矣．故必有$k=l$．再者易知諸f可排列成如是之次序，俾各f均與其相當之ϕ成比例，斯即吾人所謂二因式分解法無主要差異之意義也（參看§60定義七）．

故吾人之定理得以證明．

定理三． 如(x,y)之二多項式f與ϕ為互質，則僅可得有限對之(x,y)值，能使f與ϕ同時為零*．

---

*就幾何方面言之，此定理即謂二代數平面曲線$f(x,y)=0$, $\phi(x,y)=0$，如僅當其共有一代數曲線全部時方可有無窮個交點．

蓋以如f及ϕ於在

$$(3)\qquad (x_1, x_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots$$

諸點上同時爲零,且如此諸點之個數爲無限,則其中將有無窮個相異值之諸x,或有無窮個相異值之諸y.如對符號,作適當選擇,吾人可設其有無窮個相異值之諸y.由是易知f及ϕ至少必爲x之一次式,因不恆爲零而僅含y多項式,絕不能有無窮個y值,使之爲零也.故可如§74應用最大公因式之算法於f及ϕ,而得[參看§74(4)]具下形之恆等式:

$$(4)\qquad F(x, y)f(x, y)+\Phi(x, y)\phi(x, y)\equiv R_{\rho+1}(y)\not\equiv 0.$$

因(4)之第一邊,在所有(3)中諸點上均爲零,故必有無窮個相異之y值可使$R_{\rho+1}(y)$爲零,但此爲不可能之事.

適所證明之定理,有一重要之系,即如f與ϕ爲(x, y)之二不可約多項式,并方程式$f=0$與$\phi=0$有相同之軌跡,則f與ϕ僅差一常數因式.但如f與ϕ非不可約,則此理不必爲眞,試就

$$f\equiv xy^2, \qquad \phi\equiv x^2y$$

一例,即可見之;蓋f及ϕ雖不成比例,但$f=0$, $\phi=0$二曲線卻同爲二坐標軸,是以$f=0$與$\phi=0$二曲線在此實爲相同.然由下之規約,則以前所述之理,得在所有各種情形中,均能成立.

設f已分解成諸不可約之因子

$$f\equiv f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}\cdots\cdots f_k^{\alpha_k},$$

式中之$f_1, \cdots\cdots f_k$爲(x, y)之不可約多項式,且其中無有二多

項式互成比例者.則曲線$f=0$必含有

$$f_1=0,\ f_2=0,\cdots\cdots f_k=0$$

所表之k枝.今對各枝,各附以其相當之一正整數α_i,而稱之爲該枝之重合性(multiplicity);故由代數方程式所確定之二曲線,僅當其包含相同之不可約諸枝,且此各枝於二種情形中有相同之重合性時,吾人始可得視之爲相同.由此規約,吾人可得下系:

系. 如f與ϕ爲(x,y)之多項式,且均不恆爲零,則二曲線$f=0,\phi=0$相同之充要條件,爲f與ϕ僅相差一常數因式.

習題

1. 令$f(x),\phi(x),\psi(x)$爲x之多項式,其係數在某一有理之數域內.如ψ在此數域內爲不可約,而爲乘積$f\phi$之一因式,則ψ必爲f或ϕ之因式,試證明之.

2. 令$f(x)$爲x之多項式,此多項式不恆爲零,而其係數在某一有理之數域內.則f可分解成係數在此數域內之若干多項式之乘積,而此諸多項式,在此數域內爲不可約,且均不爲常數.至於此種分法有一,而僅有一有主要區別之法.

3. 推廣本節中之結果,至係數在某一有理之數域內之二元多項式.

76. 三元或多元多項式之因式. 以上所得之結果,可推廣之至三元多項式,而對於所用之方法,無需作主要之修正.故吾人依此等定理證明時應取之次序,逐條列舉於下,至其中多數之證明,則留待讀者自爲之.如欲至推廣至n變數之情形,亦殊不難,茲亦完全留待讀者自求(參看第1題).

令 $f(x, y, z)$ 爲三元多項式,幷設其已依 x 之羃排列.

$$f(x, y, z) \equiv a_0(y, z)x^n + a_1(y, z)x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n(y, z)$$

式中諸 a 爲 (y, z) 之多項式.

相當於 §73 之定理一與二者,有

定理一. 含 (y, z) 之一多項式,爲 f 之因式之充要條件,乃此式爲所有諸 a 之因式.

定理二. 如 $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x, y, z)$ 爲 (x, y, z) 之任意二多項式,而僅含 (y, z) 之一不可約多項式 $\psi(y, z)$ 爲乘積 $f\phi$ 之一因式,則 ψ 必爲 f 或 ϕ 之因式.

系. 設 $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x, y, z)$ 爲 (x, y, z) 之多項式,而 $\psi(y, z)$ 爲僅含 (y, z) 之一多項式.如 ψ 爲乘積 $f\phi$ 之一因式,但與 ϕ 爲互質,則 ψ 必爲 f 之一因式.

二三元多項式最大公因式之求法,恰如二元之情形,所得之一組恆等式與 §74 中之 (1) 相似,不過此時諸 P 與 $R_{\rho+1}$ 爲 (y, z) 之函數,而諸 R 與諸 Q 爲 (x, y, z) 之函數耳.相當於 §74 中之定理一與二者,有

定理三. $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x, y, z)$ 有一含 x 之公因式之充要條件,爲 $R_{\rho+1}(y, z) \equiv 0$.

定理四. 如 $R_{\rho+1}(y, z) \equiv 0$,則 $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x, y, z)$ 中,不有僅含 (y, z) 之因式之最大公因式,爲自 $R_\rho(x, y, z)$ 中除去所有僅含 (y, z) 之因式而得之多項式 $G(x, y, z)$.

自求 $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x,y,z)$ 最大公因式之算法中,吾人亦可

引出與§74中(4)相似之恆等式.

$$(1)\quad R_{\rho+1}(y, z) \equiv F(x, y, z)f(x, y, z) + \Phi(x, y, z)\phi(x, y, z).$$

相當於§75中之定理一與二者,有

定理五. 如$f(x, y, z)$與$\phi(x, y, z)$爲任意二多項式,而不可約之多項式$\psi(x, y, z)$爲乘積$f\phi$之一因式,則ψ必爲f或ϕ之一因式.

系. 有任意若干個多項式之乘積

$$f_1(x, y, z)f_2(x, y, z)\cdots\cdots f_k(x, y, z),$$

能被一不可約多項式$\psi(x, y, z)$所整除,則ψ至少必爲諸f中之一之因式.

定理六. 一不恆爲零之三元多項式,可分解成若干均不爲常數之不可約因式之乘積,其方法有一,而僅有一有主要區別之法.

但至§75之定理三時,則不容推廣至三變數時之情形;蓋以在該定理之證明中所需之$R_{\rho+1}(y)$在此變爲$R_{\rho+1}(y, z)$,而吾人不復謂此函數不能在無窮個點(y, z)上爲零矣.苟吾人一思二曲面在一般情形相交,成一曲線,即可知不特此證法失效,更可明此定理本身顯然不能推廣.

然此定理,可以下理代之:

定理七. 如$f(x, y, z)$與$\phi(x, y, z)$爲任意之二個三元多項式其中ϕ爲不可約,并如f在ϕ爲零之所有點(x, y, z)上均爲零,則ϕ必爲f之一因式.

證明此定理時,吾人可設ϕ確含有諸變數中之一,設之爲x,如此不失題理之普遍性;蓋以如ϕ均不含變數x, y, z,則此定理顯然爲眞,但無甚意義.

設ϕ不爲f之因式,則因ϕ既爲不可約,故f與ϕ爲互質.而由上之恆等的(1),知$R_{\rho+1}(y, z)\neq 0$.設書

$$(2)\quad \phi(x, y, z)\equiv b_0(y, z)x^m+b_1(y, z)x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m(y, z)\quad (m\geqq 1).$$

在此式中,可設$b_0(y, z)\neq 0$.而不失題理之普遍性.故

$$(3)\qquad R_{\rho+1}(y, z)b_0(y, z)\neq 0.$$

於是可求得一點(y_1, z_1)使

$$(4)\qquad R_{\rho+1}(y_1, z_1)\neq 0,\quad b_0(y_1, z_1)\neq 0.$$

故$\phi(x, y_1, z_1)$爲僅含x之多項式,且至少必爲一次,是以於x之某一值x_1時爲零(參看§6中定理一).即

$$\phi(x_1, y_1, z_1)=0.$$

於是由假設得

$$f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

今就恆等式(1)觀之,可知

$$R_{\rho+1}(y_1, z_1)=0.$$

然此與(4)矛盾.故吾人之定理得以證明.

如對一可約之代數曲面各部份,均附以一重合性,而恰如吾人於上節中述及對平面曲線所施之同一方法,則卽可推出下列之

系. 如f與ϕ爲(x, y, z)之多項式且均不恆爲零,則

$$f=0, \quad \phi=0$$

二曲面相同之充要條件,爲多項式 f 與 ϕ 僅相差一常數因式.

定理七更可推廣如下:

定理八. 如 $f(x, y, z)$ 與 $\phi(x, y, z)$ 爲任意之二三元多項式,而在點 (x_0, y_0, z_0) 上均爲零,且其中 ϕ 爲不可約,并如在 (x_0, y_0, z_0) 之鄰域 N 內,f 在 ϕ 爲零之所有點上均爲零,則 ϕ 爲 f 之一因式.

設 ϕ 含有 x 而可書作 (2) 之形狀.試先論 $b_0(y_0, z_0)\neq 0$ 之情形.此處之證法與定理七之證法極爲相似.

吾人於此可得關係式 (3) 如前,且由此可推知在 (y_0, z_0) 一隣域 M 可小至吾人所欲者之內,均可求得一點 (y_1, z_1) 使關係式 (4) 在此點上爲眞.

今取方程式

(5) $$\phi(x, y_1, z_1)=0$$

論之,書 ϕ 如 (2) 之形,卽可見如取 (y_0, z_0) 之隣域 M 小至充分程度時,吾人卽可使 (5) 之諸係數與

$$\phi(x, y_0, z_0)=0$$

之係數,二者相差,小至吾人所欲(參看 §5 定理三).今由假設 x 旣爲方程式 (6) 之一根,故如取 M 小至充分程度卽可使 (5) 有一根 x_1,而此根與 x_0 之差,可小至吾人之所欲(參看 §6 定理四).因此易知所與之 (x_0, y_0, z_0) 隣域 N 內,可求得一點

(x_1, y_1, z_1)，而在此點上，有

$$\phi(x_1, y_1, z_1)=0.$$

於是由假設

$$f(x_1, y_1, z_1)=0.$$

而由恆等式(1)可得

$$R_{\rho+1}(y_1, z_1)=0.$$

此式與(4)矛盾.故在$b_0(y_0, z_0)\neq 0$之假設下吾人之定理得以證明.*

如欲論$b_0(y_0, z_0)=0$之情形，設以k表$\phi(x, y, z)$之次數，并設對此多項式施以非異平直變換

$$(7)\qquad \begin{cases} x=\alpha_1 x'+\beta_1 y'+\gamma_1 z' \\ y=\alpha_2 x'+\beta_2 y'+\gamma_2 z' \\ z=\alpha_3 x'+\beta_3 y'+\gamma_3 z' \end{cases}$$

此變換可使ϕ中x之次數與ϕ之總次數k相等(參看§64定理二).

設此變換使點(x_0, y_0, z_0)變爲點(x_0', y_0', z_0'). 則因(7)爲非異者，故可取(x_0', y_0', z_0')之一甚小隣域N'，使其中所有各點，均相當於所與之(x_0, y_0, z_0)隣域N中諸點.

又由(7)式，ϕ已變爲

*若吾人用§6定理四之推廣，如該處附註所論者，則對於(2)中所有諸b在點(y_0, z_0)上不皆爲零之情形，適所用之證法，實可應用.但如所有諸b在此點上均爲零，則此極端情形，倘須加特殊處理，如吾人行將述及者.讀者宜就此極端情形之幾何意義考之.

$$(8)\quad \phi'(x', y', z') = b_0' x'^k + b_1'(y', z')x'^{k-1} + \cdots\cdots + b'_k(y', z'),$$

式中b_0'爲異於零之常數.設以$f'(x', y', z')$表f經過變換後所得之多項式.則因f在鄰近域N內,ϕ爲零時f亦爲零,故易知在鄰近域N'(與N之一部分相當者)內,ϕ'爲零時f'亦爲零.因形如(8)之ϕ',其首項係數爲異於零之常數,故在點(y_0', z_0')上不爲零,是以此定理已經證明之一部分,能應於f'及ϕ'之上.而推知ϕ'爲f'之因式,即

$$f'(x', y', z') \equiv \phi'(x', y', z')\psi'(x', y', z')$$

於此吾人更就式(7)解得以x, y, z表x', y', z'之諸值,以之代入,則可見ϕ爲f之一因式;而吾人之定理得以證明.

習題

1. 試述在n元多項式之情形時本節中之八定理,幷加以證明.

2. 推廣§73後習題之結果至n元多項式之情形.

3. 如吾人僅論係數在某一有理之數域內諸多項式之情形,試推廣上二題之結果.

4. 二一元多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n,$$

$$\phi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots\cdots + b_m$$

之消元式,有時定之爲諸a及諸b之最低次多項式R而適合於恆等式

$$Ff + \Phi\phi = R$$

者,式中F與Φ爲$(a_0, \cdots\cdots a_n;\ b_0, \cdots\cdots b_m;\ x)$之多項式;而以恆等式乃爲其中所有變數之恆等式.試證如是所確定之消元式與§68中吾人所確定者,僅差一不爲零之常數因式.

第十七章

整有理不變式之普遍定理

77 不變式因式之不變性. 今論以 $f(x_1,\cdots x_n;\ a_1, a_2,\cdots)$ 代表之 k 次普遍 n 元方式,其中諸 x 爲變數,諸 a 爲係數.由諸 a 之適當改換,此記號可以代表該類任意之如此一方式.故如對此種方式施一平直變換,則所得之新方式爲一 n 元方式與原有方式具相同之次數而可以相同之函數符號: $f(x_1',\cdots\cdots x'_n;\ a'_1, a'_2,\cdots\cdots)$ 代表之.此新方式對諸 a 而言,易知其爲齊次且爲平直;即各 a' 均爲諸 a 之齊次平直多項式也.且亦易知各 a' 均爲變換中諸係數之 k 次齊次多項式.

僅據不變式之定義,即可知一方式或一組方式之若干整有理相對不變式之乘積,必亦爲一整有理相對不變式.此理之逆卽爲本節所欲證者.今先論在單一方式之簡單情形.

定理一. 如 $I(a_1, a_2,\cdots\cdots)$ 爲 n 元方式

$$f(x_1,\cdots\cdots x_n;\ a_1, a_2,\cdots\cdots)$$

之一整有理不變式且爲可約,則其所有因式,均爲不變式

於此僅須證明I之所有不可約因式,均爲不變式卽足.

令$f_1, f_2, \cdots\cdots f_l$爲$I$之諸不可約因式.

對f施以平直變換

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + \cdots\cdots + c_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + \cdots\cdots + c_{nn}x'_n, \end{cases}$$

吾人稱此變換之行列式爲c,并以$a'_1, a'_2 \cdots\cdots$代表已經變換後方式之係數,則有恆等式

$$(1) \qquad I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv c^{\lambda} I(a_1, a_2, \cdots\cdots);$$

此恆等式又可書如

$$f_1(a'_1, a'_2, \cdots)\cdots f_l(a'_1, a'_2, \cdots) \equiv c^{\lambda} f_1(a_1, a_2, \cdots)\cdots f_l(a_1, a_2, \cdots).$$

此恆等式之右端爲諸c及諸a之多項式,且已分成諸不可約因式,蓋因由§61之定理一可知行列式c乃爲不可約者.故左端各因式必等於右端諸因式中若干因式之乘積.卽

$$(2) \qquad f_i(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv c^{\lambda_i} \phi_i(a_1, a_2, \cdots\cdots) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots l)$$

式中諸ϕ爲多項式.

今令 $$c_{11} = c_{22} = \cdots\cdots = c_{nn} = 1,$$

并設其他諸c均爲零.則該變換變爲幺變換行列式$c=1$,而各a'與其相當之a等.故恆等式(2)變爲

$$f_i(a_1, a_2, \cdots\cdots) \equiv \phi_i(a_1, a_2, \cdots\cdots) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots l).$$

將 ϕ_i 之此值代入(2)即可見 f_i 爲一不變式,吾人之定理遂得證明.

今可述其普遍定理如下:

定理二. 如 $I(a_1, a_2, \cdots\cdots; b_1, b_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots)$ 爲一組方式

$$f_1(x_1, \cdots\cdots x_n;\ a_1, a_2, \cdots\cdots)$$

$$f_2(x_1, \cdots\cdots x_n;\ b_1, b_2, \cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之一整有理不變式且爲可約者,則其所有諸因式均爲不變式.

此定理之證明,實際上與定理一者相同,

習　題

如一組方式

$$f_1(x_1, \cdots\cdots x_n;\ a_1,\ a_2, \cdots\cdots)$$

$$f_2(x_1, \cdots\cdots x_n;\ b_1,\ b_2, \cdots\cdots)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及一組點 $(y_1, \cdots\cdots y_n)$, $(z_1, \cdots\cdots z_n)$, $\cdots\cdots$ 之整有理同步不變式 $I(a_1, a_2, \cdots\cdots; b_1, b_2, \cdots\cdots; y_1, \cdots\cdots y_n; z_1, \cdots\cdots z_n; \cdots\cdots)$ 爲可約,則其所有諸因式亦爲同步不變式(或不變式).

78. 研究相對不變式較爲普遍之一方法. 當時 n 方式施以平直變換時,如其諸係數之一多項式 I, 僅被該變換 i 行列式之乘冪所乘,則吾人稱之爲該方式之一相對不變式.

今如 I 被該變換之係數之多項式所乘,則所得者究爲何類函數之問題自隨之以起.吾人或以由是可得一種函數較以往所論之不變式,爲更普遍.但實際上吾人所得者,仍爲同類之函數,在下之定理即可證明:

定理 設以一元方式 f 中諸係數 $(a_1, a_2, \cdots\cdots)$ 成一不恆爲零之多項式 I,而對 f 施以平直變換

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + \cdots\cdots + c_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + \cdots\cdots + c_{nn}x'_n, \end{cases}$$

後所得新方式之係數爲 $(a'_1, a'_2, \cdots\cdots)$.如

$$I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv \psi(c_{11}, \cdots\cdots c_{nn}) I(a_1, a_2, \cdots\cdots),$$

式中 ψ 爲諸 c 之多項式,且此式對諸 a 與諸 c 爲恆等,則必爲此變換之行列式之羃.

今先證當 $c \neq 0$ 時 $\psi \neq 0$ 若 ψ 可爲零,則令 $d_{11}, \cdots\cdots d_{nn}$ 爲諸 c_{ij} 之一組特值,使

$$\psi(d_{11}, \cdots\cdots d_{nn}) = 0,$$

但

$$\begin{vmatrix} d_{11} \cdots\cdots d_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n1} \cdots\cdots d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

則變換

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x'_1 + \cdots\cdots + d_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = d_{n1}x'_1 + \cdots\cdots + d_{nn}x'_n, \end{cases}$$

有一逆變換

$$\begin{cases} x'_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots\cdots + \delta_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots\cdots + \delta_{nn}x_n. \end{cases}$$

今取使 $I(a_1, a_2, \cdots\cdots) \neq 0$ 之諸 a 之一組特值. 則必有

$$I(a'_1, b'_2, \cdots\cdots) = \psi(d_{11}, \cdots\cdots d_{nn}) I(a_1, a_2, \cdots\cdots) = 0$$

對此施以逆變換, 可得

$$I(a_1, a_2, \cdots\cdots) = \psi(\delta_{11}, \cdots\cdots \delta_{nn}) I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) = 0.$$

卽與吾人之假設相矛盾.

至是已證明 ψ 僅當 $c=0$ 時方可爲零, 再設 ψ 已分解成爲諸不可約之因式, 如

$$\psi(c_{11}, \cdots\cdots c_{nn}) \equiv \psi_1(c_{11}, \cdots\cdots c_{nn}) \psi_2(c_{11}, \cdots c_{nn}) \cdots\cdots \psi_\lambda(c_{11}, \cdots\cdots c_{nn})$$

則因 $\psi_i = 1$ 時 ψ 必爲零, 而僅於 $c=0$ 時 ψ_i 始爲零. 故由相當於 §76 定理七, 而關於 n 變數之定理可知 ψ_i 必爲 c 之一因式. 但 c 爲不可約. 故 ψ_i 僅能與 c 相異一常數因式而可書

$$\psi \equiv Kc^\lambda$$

至是僅須證明常數K之值爲1. 因此故可取恆等式

$$I(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv Kc^{\lambda} I(a_1, a_2, \cdots\cdots),$$

論之, 幷與諸 c_{ij} 以其在么變換中所具之值. 如此則 $c=1$. 而諸 a' 各與其相當之諸 a 相等. 故適所書之恆等式變爲

$$I(a_1, a_2, \cdots\cdots) \equiv KI(a_1, a_2, \cdots\cdots);$$

而由此可推知 $K=1$.

習　題

1. 當一 n 之方式及一點經過一平直變換後, 如此方式之係數 a_1, a_2, ……與該點坐標 $(y_1, \cdots\cdots y_n)$ 之一多項式 I 僅被此變換之諸係數之某一有理函數 ψ 所乘, 則 ψ 必爲該變換之行列式之正乘羃或負乘羃, 而 I 爲一同步不變式, 試證明之.

2. 試推廣本節中定理, 至一組方式之不變式之情形.

3. 試推廣習題1之理至一組方式及一組點之情形.

4. 一方式或一組方式之各有理不變式必爲二整有理不變式之比, 試證明之.

5. 試推廣第4題之理至同步不變式之情形.

79. 不變式及同步不變式之齊權性. 於多種硏究中, 對所論之諸變數吾人恆欲各附以一定之權 (weight) 尤以在不變式及同步不變式之探討中爲甚. 對於若干變數之乘積, 附誌之權, 爲其各因式之權之和, 且設此權不因此積被常數因式所乘而改. 例如認 z_1, z_2, z_3 之權, 各爲 w_1, w_2, w_3, 則

$$5z_1 z_2 z_3^2$$

之權爲

$$w_1 + w_2 + 2w_3$$

如吾人對各變數均附以一定之權,則在論多項式時其各項之權亦定.而諸項中權最大,而係數亦不爲零者,吾人即設其權爲該多項式之權.如所有各項之權更爲皆等,即稱此多項式爲齊權(isobaric).

據此定義,須知僅無權之多項式,始可恆等於零,而彼可化成一異於零之常數之多項式,其權爲零.復次,如二多項式之權各爲 w_1 與 w_2, 則其乘積之權爲 w_1+w_2*

吾人將首先應用權之概念於一種情形,其中所論變數爲 n 元方式

$$f(x_1,\cdots\cdots x_n;\ a_1,a_2,\cdots\cdots)$$

中諸係數 $a_1,a_2,\cdots\cdots$. 吾人將見宜有 n 個相異方法,以定此諸 a 之權而每一決定之法與變數 $x_1,\cdots\cdots x_n$ 中之一相當.

定義一. 如 a_i 爲一 n 元方式中

$$a_i x_1^{p_1} x_2^{p_2}\cdots\cdots x_n^{p_n}$$

一項之係數,則吾人定 a_i 對變數 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 之權各爲 $p_1,p_2,\cdots\cdots p_n$.

於二元方式

$$a_0x_1^k+a_1x_1^{k-1}x_2+\cdots\cdots+a_kx_2^k$$

之情形中,諸係數之下標,表示其對於 x_2 之權,至於其對 x_1

*多項式次數之概念,僅爲權之概念之特例,此時其中所有變數之權,均設爲1.苟如是,則齊權之概念變爲齊次之概念.

之權,等於其下標與方式次數之差.

今再取二次方式

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

以作第二例.於此任一係數對一變數如 x_j 之權,等於 j 在該係數之下標中出現之次數.*

特殊之平直變換

$$(1)\qquad \begin{cases} x_i = x'_i \\ x_j = kx'_j \end{cases} \qquad (i \neq j)$$

對於權之研究頗足資助.如 a_i 爲一係數,對 x_j 爲 λ 權,則此係數所在之項必含有 x_j^{λ},因而

$$a'_i = k^{\lambda} a_i$$

此卽

定理一. 一 n 元方式中一係數對於 x_j 之權,等於在經過特殊變換(1)後,乘該係數之 k 之乘冪之指數.

由此卽可推知一含 n 元方式中諸係數 $(a_1, a_2, \cdots\cdots)$ 而對於 x_j 爲 λ 權之齊權多項式,在該方式受特變換(1)後,僅被 k^{λ} 所乘.

且此理之逆亦然,蓋如一 n 元方式受特殊變換(1)後之係數爲 $a'_1, a'_2, \cdots\cdots$,幷設 $\phi(a_1, a_2, \cdots\cdots)$ 爲一多項式,而有

---

* 於高次方式中,其係數亦可藉與此相似之符號之重複下標以誌之.如此則各係數之權立卽可由其下標中讀出.

$$\phi(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv k^\lambda \phi(a_1, a_2, \cdots\cdots)$$

之性質者，則因上式爲諸 a 之恆等式，且亦爲 k 之恆等式，故吾人可推知 ϕ 爲 λ 權之齊權式如下．設將 ϕ 中諸項依其權而彙集之，則可書 ϕ 爲

$$\phi(a_1, a_2, \cdots\cdots) \equiv \phi_1(a_1, a_2, \cdots\cdots) + \phi_2(a_1, a_2, \cdots\cdots) + \cdots\cdots$$

式中 $\phi_1, \phi_2 \cdots\cdots$ 爲具 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ 權之齊權多項式．故

$$\phi(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv k^{\lambda_1} \phi_1(a_1, a_2, \cdots\cdots) + k^{\lambda_2} \phi_2(a_1, a_2, \cdots\cdots) + \cdots\cdots.$$

但自另一方面觀之

$$\phi(a'_1, a'_2, \cdots\cdots) \equiv k^\lambda \phi(a_1, a_2, \cdots\cdots) \equiv k^\lambda \phi_1(a_1, a_2, \cdots\cdots) + k^\lambda \phi_2(a_1, a_2, \cdots\cdots) + \cdots\cdots.$$

比較此二恆等式之右端卽可見

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots\cdots$$

此卽吾人所欲證者．由是已建立下之定理：

定理二． 一 n 元方式之係數之多項式 ϕ，在該方式變形如 (1) 之變換後，僅被 k^λ 所乘之充要條件，乃 ϕ 對於 x_j 爲 λ 權之齊權多項式．

由斯定理卽可示明在 §31 中所述權一名詞之用法，實與本節中所確定者相符．蓋據 §31 之定義，一 n 元方式之整有理不變式在該方式受變換 (1) 後僅被 k^λ 所乘者，謂之爲 λ 權，故由定理二知其對 x_j 必爲 λ 權之齊權多項式．此卽：

定理三． 如 I 爲方式 f 之一整有理不變式而據 §31 之

定義爲λ權,則由本節中之定義其對 f 中各變數 x_j 必亦爲λ權,且對此諸變數中之任一言,亦爲齊權.

今論二次方式

$$a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2$$

之判別式

$$a_0a_2-a_1^2$$

以作本定理之例證,此判別式不論其對 x_1 或 x_2 均爲2權之齊權多項式.

讀者應依同一方法以論普遍二次方式之判別式.

如吾人所須討論者不僅爲單一方式,而爲一組方式,所有本節中所論者,均可推廣至該種情形,於茲僅述與定理三相當之定理.

定理四. 如 I 爲一組方式之一整有理不變式,而據§31之定義爲λ權,則對該組中各變數 x_j 必亦爲λ權,且對此諸變數中之任一言之亦爲齊權.

讀者可取一組平直方式之消元式,及在第十二與第十三章中所得諸不變式,以作本定理之例證.

由§31定理五已知一整有理不變式之權不能爲負.此理今則更覺顯然.因係數之權無有能爲負者故也.且不特此,吾人今尚可進述下理:

定理五. 一方式或一組方式之整有理不變式不能爲零權.

因若就不變式中,係數異於零之任意一項論之.此項中含有該組方式中若干係數之乘積.此諸係數中,無一具有負權,故此項之權.至少必與其中一者之權相等.但此諸係數中之任一對某一變數而言,至少爲1權.故該不變式對於某一變數亦必至少具有1權,因而對任一變數亦然.

最後,爲欲將本節所論者可推廣至同步不變式之情形計,特再立下之定義:

定義二. 如數組變數 $(y_1,\cdots\cdots y_n)$, $(z_1,\cdots\cdots z_n)$,$\cdots\cdots$與一組 n 元方式中之變數 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 爲同步變數,則對 x_j 而言,吾人與 y_j, $z_j\cdots\cdots$ 以 -1 權,而所有其餘之諸 y 諸 z, 等等以 0 權.

在此尙須注意,當吾人施變換(1)後,各變數亦均被 k 之羃所乘,而其指數則爲該變數之權.故易*將本節中所論者推廣至此種情形,而得下之定理:

定理六. 如 I 爲一組方式與一組點之整有理同步不變式,據 §31 之定義爲λ權,則對該組中各變數必亦爲λ權,且對此諸變數中之任一言之亦爲齊權.

吾人茲注意彼二元二次方式之極式

$$a_0y_1z_1+a_1(y_1z_2+y_2z_1)+a_2y_2z_2$$

乃爲零權之齊權多項式,此卽本定理之一例.至若普遍二次方式之極式,亦復如是,讀者可自明之.

*於此尙須略加注意於負權諸項發生之可能性.

80. 幾何性質及齊次原則. 平面曲線或曲面之多數幾何性質常取其方程式中係數之一整有理函數等於零,以表示之,斯乃習見之事實也.例如取曲面

$$(1)\qquad f(x,y,z;\ a_1,a_2,\cdots\cdots)=0$$

而研究之,式中 f 爲非齊次坐標 x,y,z 之 k 次多項式,$a_1,a_2,\cdots\cdots$爲此多項式之諸係數;更論關係式

$$(2)\qquad \phi(a_1,a_2,\cdots\cdots)=0,$$

式中 ϕ 爲一多項式,且設其對 $a_1,a_2,\cdots\cdots$諸係數至少爲一次式.由§6之定理三,可知有 (x,y,z) 之無窮個 k 次多項式,其係數可適合關係式(2),但多項式中係數之不適合此關係式者爲數亦爲無限.換言之,即 (x,y,z) 之所有 k 次多項式可分成 A 與 B 二類,前者之特徵,爲能使條件(2)適合,後者之特徵,則爲此條件之不適合.由是吾人可謂(2)乃 f 具有某一性質之充要條件,此性質即爲屬於 A 類.

然由一簡單之例即可明 f 之此種性質,不必定能與曲面(1)之一幾何性質相當.爲例證此理計,設 $k=1$ 則有

$$f\equiv a_1x+a_2y+a_3z+a_4,$$

而先論諸 a 之多項式:

$$\phi=a_4$$

ϕ 之爲零,乃屬於 (x,y,z) 之一次齊次多項式之充要條件,故表示此多項式之一性質.此同一條件,$a_4=0$,復表示平面 $f=0$ 之一性質,即經過原點是也.

然若取多項式

$$\phi_1 \equiv a_4 - 1$$

以代函數 ϕ,則此多項式之為零,亦為 f 具某一性質之充要條件,斯性質即其常數項之值為1是也.但吾人不能藉此以分平面為二類,因吾人可書任一平面(除經過原點者外)之方程式,使常數項為1,或以一常數遍乘此方程式,即可使其常數項異於1.

由適所論,可知謂一曲面具有某一性質,實即謂其屬於某一類曲面.*

定理一. 方程式(2)當而僅當 ϕ 為齊次時,始可為表示曲面(1)有一幾何性質之充要條件.

因如 ϕ 為非齊次者,則設書之為

$$\phi \equiv \phi_n + \phi_{n-1} + \cdots\cdots + \phi_1 + \phi_0,$$

式中 ϕ_n 為 n 次之齊次多項式,至於所有其餘不恆為零之諸 ϕ 亦均為齊次多項式,而各式之次數則均以其下標誌之.設 $a'_1, a'_2 \cdots\cdots$ 為諸 a 之一組值,而可使 ϕ_n 及其餘之諸 ϕ_i 中至少有一皆不為零,幷就曲面

$$(3) \qquad f(x, y, z;\ ca'_1,\ ca'_2, \cdots\cdots) = 0$$

論之,對此曲面之條件(2)乃

---

* 此簡短之敘述,絕不可認有確定性質一概念之意,蓋如不藉某種性質,則不能決定某特殊之類.

$$c^n\phi_n(a'_1, a'_2,\cdots\cdots)+c^{n-1}\phi_{n-1}(a'_1, a'_2,\cdots\cdots)+c\phi_1(a'_1, a'_2,\cdots\cdots)$$
$$+\phi_0(a_1', a'_2,\cdots\cdots)=0.$$

此爲 c 之 n 次方程式,因其首項係數後,至少有一係數不爲零,故至少必有一根 $c_1 \neq 0$. 但自另一方面言之,吾人復可求得一值 $c_2 \neq 0$, 而不爲此方程式之根. 故設 $c=c_1$ 則曲面(3)能適合條件(2).設 $c=c_2$ 則不能適合. 但 c 值之更變,僅使方程式(3)被一常數所乘,而其所代表之曲面,則未嘗更變. 如是則得一曲面,旣可視之爲能適合條件(2),復又謂其不能適合. 換言之,卽如 ϕ 非齊次式,則(2)幷不能表示曲面(1)之一性質.

今設 ϕ 爲 n 次之齊次多項式,且將係數能適合方程式(2)之多項式,歸入 A 類係數不能適合此方程式者,歸入 B 類. 苟可示明由是卽能分(1)所表諸曲面爲二類,申言之,如 a'_1, $a'_2,\cdots\cdots$爲 A 類中多項式之係數,而 $a''_1, a''_2,\cdots\cdots$爲 B 類中多項式之係數,則二曲面

$$f(x, y, z;\ a'_1,\ a'_2,\cdots\cdots)=0,$$
$$f(x, y, z;\ a''_1, a''_2,\cdots\cdots)=0,$$

不能相同,如是吾人之定理卽爲證明. 今設其爲相同,則係數 $a'_1, a_2',\cdots\cdots$必與 $a''_1, a''_2,\cdots\cdots$成比例(參看§76定理七之系),

$$a''_1=ca'_1,\ a''_2=ca'_2,\cdots\cdots$$

而有
$$\phi(a''_1, a''_2,\cdots\cdots)=c^n\phi(a'_1, a'_2,\cdots\cdots).$$

但由假設

$$\phi(a'_1, a'_2\cdots\cdots)=0,\ \phi(a''_1, a''_2,\cdots\cdots)\neq 0$$

知此爲不可能.故吾人之定理得以證明.

本定理可自各方面推廣之.先設以一組代數曲面代替單一之曲面(1),而ϕ爲所有此諸曲面係數之多項式.則依同理,可示明當而僅當ϕ分別對於各曲面係數爲齊次式時方程式$\phi=0$始爲表此組曲面有一幾何性質之充要條件.

自另一方面言之,吾人復可用齊次坐標以書曲面之方程式,前所得諸結論不必變動,顯見仍爲眞:

定理二. 設

$$f_1(x, y, z, t;\ a_1, a_2, \cdots\cdots),\ f_2(x, y, z, t;\ b_1, b_2, \cdots\cdots), \cdots\cdots$$

爲(x, y, z, t)之一組齊次多項式,而其係數爲$a_1, a_2, \cdots\cdots;\ b_1, b_2, \cdots\cdots$;等等,并設

$$\phi(a_1, a_2, \cdots\cdots;\ b_1, b_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots)$$

爲諸a,諸b,等等之一多項式.則方程式$\phi=0$當而僅當多項式ϕ單對於諸a諸b等等皆爲齊次式時,始可爲

$$f_1=0, \quad f_2=0, \cdots\cdots$$

一組曲面有某幾何性質之充要條件.

最後吾人須注意本節中所有諸結論,均可推廣至平面中之代數曲線;且更可推廣之,使適用於任意幾維之空間.

習　題

於定理二中如除曲面$f_1=0$, $f_2=0, \cdots\cdots$外,更有一組點

$$(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad (x_2, y_2, z_2, t_2), \cdots\cdots$$

且ϕ不僅爲諸a,諸b,等等之多項式,且亦爲此諸點坐標之多項式,則

$\phi=0$ 僅當 ϕ 單對於諸 a, 諸 b 等等, 且更單對於 (x_1, y_1, z_1, t_1) 對於 (x_2, y_2, z_2, t_2) 等等皆爲齊次式時, 始可爲該組曲面及點, 有某幾何性質之充要條件, 試證明之.

81. 齊次不變式. 由上節之研究, 即可知僅有分別對於各底方式中係數爲齊次之整有理不變式, 在幾何應用中始占重要之位置.* 此種不變式吾人稱之爲齊次不變式 (homogeneous invariants), 吾人易見已往所論之各不變式均爲屬於此種者.

對於一齊次不變式權與各種次數間有一重要關係式, 可由下定理中得之:

定理一. 如有次數各爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots$ 之一組 n 元方式

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, \cdots\cdots x_n;\ a_1, a_2, \cdots\cdots), \\ f_2(x_1, \cdots\cdots x_n;\ b_1, b_2, \cdots\cdots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

---

* 對此敍述, 絕不可過於重視其字面之意義. 如吾人於所研究之幾何應用中, 視變數爲齊次坐標, 幷令其底方式爲零, 而論其軌跡, 則此敍述固爲眞. 此確爲論不變式之幾何解釋之一普通方法; 但他種解釋亦屬可能, 例如不以變數 (x, y) 爲一直線上之齊次坐標, 不以二元二次方式

$$f_1=a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2,$$
$$f_2=b_1x^2+2b_2xy+b_3y^2$$

爲零, 視爲一直線上之二對點, 而視 (x, y) 爲平面中之非齊次坐標以論二錐線 $f_1=1$, $f_2=1$, 由此種解釋, 則不變式

$$a_1a_3-a_2^2+b_1b_3-b_2^2,$$

雖非單對諸 a 或諸 b 爲齊次者, 但其爲零, 仍有幾何之意義.

而

$$I(a_1,\ a_2,\cdots\cdots;\ b_1,\ b_2,\cdots\cdots;\cdots\cdots)$$

爲該組之一λ權齊次不變式,且對於 a 爲 α 次對於 b 爲 β 次等等,則必有

(2) $$m_1\alpha+m_2\beta+\cdots\cdots=n\lambda.$$

對方式(1)施以平直變換

$$\begin{cases} x_1=c_{11}x'_1+\cdots\cdots+c_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}x'_1+\cdots\cdots+c_{nn}x'_n, \end{cases}$$

而誌其行列式爲 c, 則可得

$$f_1(x'_1,\cdots\cdots x'_n;\ a'_1,\ a'_2,\cdots\cdots),$$

$$f_2(x'_1,\cdots\cdots x'_n;\ b'_1,\ b'_2,\cdots\cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

且由假設知 I 爲一λ權之不變式,故更得有

(4) $$I(a'_1,\ a'_2,\cdots;\ b'_1,\ b'_2,\cdots;\cdots)\equiv c^\lambda I(a_1,\ a_2,\cdots;\ b_1,\ b_2,\cdots;\cdots).$$

此中諸 a' 爲諸 c_{ij} 之 m_1 次齊次多項式,諸 b' 爲 m_2 次者,餘可類推,今 I 之本身對於諸 a 爲 α 次齊次多項式,對於諸 b 爲 β 次齊次多項式,等等,則可見(4)之左端,乃諸 c_{ij} 之 $m_1\alpha+m_2\beta+\cdots\cdots$ 次齊次多項式.以此與(4)之右端中諸 c_{ij} 之次數相等,則因後者顯見 $n\lambda$. 故吾人之定理得以證明.

此種齊次不變式所以重要之故,尚有一理由,即非齊次之整有理不變式,亦可建立於其上也,今述之如下定理:

定理二. 如將方式組(1)之一整有理不變式書作

$$I \equiv I_1 + I_2 + \cdots\cdots + I_k$$

式中諸 I_i 各爲諸 a, 諸 b, 等等之多項式,而單對諸 a, 諸 b 等等爲齊次,且諸 I_i 中無二者之和可有此性質,則函數

$$I_1,\ I_2, \cdots\cdots I_k$$

中各者均爲方式組(1)之一齊次不變式.

此定理可由不變式之定義立即推出.蓋由恆等式

$$\begin{aligned} I_1(a'_1, a'_2, \cdots; b'_1, b'_2, \cdots; \cdots) + \cdots + I_k(a'_1, a'_2 \cdots; b'_1, b'_2, \cdots; \cdots) \\ \equiv c^\lambda [I_1(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots) \\ + \cdots + I_k(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots)], \end{aligned}$$

即可推出恆等式

$$I_1(a'_1, a'_2, \cdots; b'_1, b'_2 \cdots; \cdots) \equiv c^\lambda I_1(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_k(a'_1, a'_2, \cdots; b'_1, b'_2, \cdots; \cdots) \equiv c^\lambda I_k(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots)$$

也.

在單一之 n 元方式之情形中,且亦僅在此情形中,吾人可得下之定理:

定理三. 單一 n 元方式之整有理不變式恆爲齊次者.

設
$$f(x_1,\cdots\cdots x_n;\ a_1,\ a_2,\cdots\cdots)$$
爲底方式,并設 I 爲其不變式,由定理二可書
$$I\equiv I_1+I_2+\cdots\cdots I_k$$
式中 $I_1,\cdots\cdots I_k$ 均爲齊次不變式.設此諸齊次不變式各爲諸 a 之 $\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_k$ 次.諸式之權必相等而等於 I 之權,後者稱之爲 λ.於此如吾人設 f 之次數爲 m,則由定理一可得
$$m\alpha_1,=n\lambda,\ m\alpha_2=n\lambda,\cdots\cdots m\alpha_k=n\lambda,$$
因 $m>0$,故由是可推知
$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_k.$$
斯卽 $I_1,\cdots\cdots I_k$ 爲同次,而 I 爲齊次者.

定理四. 如有一組 n 元方式 $f_1,f_2,\cdots\cdots$ 及其係數之多項式 ϕ 則當而僅當 ϕ 爲此組方式 f 之齊次不變式時,方程式 $\phi=0$ 始爲 $n-1$ 維空間中一組軌跡
$$f_1=0,\ f_2=0,\cdots\cdots$$
具有一投影性質之一充要條件.

如 ϕ 爲齊次不變式,則其爲零,乃具有一幾何性質之一充要條件(參看§80),而此性質必爲一投影性質,蓋以當吾人對軌跡施以非異直射變換後,ϕ 僅被一異於零之常數相乘也.

自另一方面言之,設 $\phi=0$ 爲具有一投影性質之一充要條件.則爲證明 ϕ 爲不變式(由§80知其必爲齊次者)計設

$a_1, a_2, \cdots\cdots$ 爲 f_1 之係數, $b_1, b_2, \cdots\cdots$ 爲 f_2 之係數, 餘可類推; 並設平直變換.

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = c_{11} + x'_1 + \cdots\cdots + c_{1n}x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1} + x'_1 + \cdots\cdots + c_{nn}x'_n, \end{cases}$$

將 f_1 變爲 f'_1 而以 $a'_1, a'_2, \cdots\cdots$ 爲其係數; f_2 變爲 f'_2 而以 $b'_1, b'_2, \cdots\cdots$ 爲其係數,餘可類推. 因諸 a', 諸 b', $\cdots\cdots$ 爲諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 及諸 c 之多項式, 故對於經變換後諸方式所作之多項式 ϕ 爲

$$\phi(a'_1, a'_2, \cdots\cdots; b'_1, b'_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots),$$

而其本身可視爲諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 及諸 c 之多項式. 自此觀點立論, 而設吾人已分解 ϕ 成諸不可約因式,

$$(6) \qquad \phi(a'_1, a'_2, \cdots; b'_1, b'_2 \cdots; \cdots) \equiv \phi_1(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \\ \cdots c_{11}, \cdots c_{nn}) \cdots \phi_k(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots c_{11}, \cdots c_{nn}).$$

顯見右端中至少有一因式含有諸 c. 設 ϕ_1 爲如是之因式, 并設吾人已排列之成諸 c 之多項式, 而其係數乃諸 a, 諸 b, 等等之多項式. 設

$$\psi(a_1, a_2, \cdots\cdots; b_1, b_2, \cdots\cdots; \cdots\cdots)$$

爲此諸係數中之一者, 不恆等於零, 且以此爲係數之項中, 至少有一 c 之指數大於零. 今與諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 以諸值, 而誌之爲諸 A, 諸 B, $\cdots\cdots$, 使 ϕ 與 ψ 均不爲零, 并取點

$$(A_1,\ A_2,\cdots\cdots;\ B_1,\ B_2,\cdots\cdots;\cdots\cdots)$$

之一鄰域 N, 使在此域中無論何處均有

(7) $$\phi(a_1,\ a_2,\cdots\cdots;\ b_1,\ b_2,\cdots\cdots;\cdots\cdots)\neq 0$$

(8) $$\psi(a_1,\ a_2,\cdots\cdots;\ b_1,\ b_2,\cdots\cdots;\cdots\cdots)\neq 0$$

今如諸 a 諸 $b\cdots\cdots$ 不出鄰域 N 以外,試究在何種條件下,始可有 $\phi_1=0$, 若此方程式能適合,則自 (6) 式可知對於變換後之軌跡, ϕ 亦爲零,但自 (7) 式知其對於原有軌跡, ϕ 不爲零. 由假設 ϕ 之爲零爲一投影性質之充要條件,變換 (5) 既使先不爲零之 ϕ 爲零,故必爲一異變換.申言之,若諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 在鄰域 N 內, 則 ϕ_1 爲零時 (5) 之行列式 c 必亦爲零. 復次諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 在 N 內 ϕ_1 不爲零, 蓋以吾人如與諸 a, 諸 b, $\cdots\cdots$ 以在是域內之值, 則 ϕ_1 變爲諸 c_{ij} 之多項式,且由 (8) 知其至少爲一次式, 故如取爲 c_{ij} 爲適當之值, 則此式爲零. 是以吾人可應用與 §76 之定理八相似, 而關於三變數以上之定理, 推知 ϕ_1 乃爲行列式 c 之一因式, 因此 ϕ_1 僅爲 c 之常數倍數, 蓋以該行列式爲不可約故也(參看 §61 定理一).

適對 ϕ_1 所應用之論證,仍可應用於在 (6) 右端中因式之至少必爲諸 c_{ij} 一次式者. 據此, 則 (6) 化爲

(9) $$\phi(a'_1,\ a'_2,\cdots;\ b'_1,\ b'_2,\cdots;\cdots)\equiv c^{\lambda}X(a_1,\ a_2,\cdots;\ b_1,\ b_2,\cdots;\cdots)$$

而 X 中不復含有諸 c_{ij}, 爲定此多項式 X 計, 可含諸 c_{ij} 之值爲 0 及 1 使 (5) 變爲么變換. 則諸 a', 諸 b', $\cdots\cdots$ 變爲諸 a, 諸 b,

$\cdots\cdots$, 而 $c=1$; 於是由 (9) 可得

$$\phi(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots) \equiv \chi(a_1, a_2, \cdots; b_1, b_2, \cdots; \cdots).$$

將 χ 之此值代入 (a) 內, 卽可知 ϕ 實爲一不變式.

爲避免一切誤解起見, 吾人於此更申言曰, 如有含方式 f_i 中係數之二或若干多項式 $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots$, 則雖 $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots$ 非不變式, $\phi_1=\phi_2=\cdots\cdots=0$ 諸方程式亦可表軌跡 $f_i=0$ 有一投影性質之充要條件. 例如二直線

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$$

相合之充要條件乃方陣

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$$

中三個二次行列式爲零, 但此三者無一爲不變式. 又如二次曲面能分成相異式相合二平面之充要條件, 乃其方陣中所有三次行列式爲零, 但此諸行列式均非不變式. 在此種情形中, 吾人仍可取某一逆步變式, 卽此二次方式之附屬方式, 而以其恆爲零, 表示此條件當單一方程式 $\phi=0$ 不足以表示此條件時, 此種方法——以一同步不變式或逆步不變式之恆爲零, 以表示一投影關係——爲吾人所習用者之模例. 此外尙有他種情形, 而以二或若干不變式之爲零, 以表示此條件, 可參看 §90 之第6題.

習　題

1. 如於定理一中吾人之組內不僅包含底方式(1)，而更有

$$(y_1, \cdots\cdots y_n),\quad (z_1, \cdots\cdots z_n), \cdots\cdots$$

數點，且不僅有一不變式 I 復有一 λ 權之同步不變式，而對於諸 a 爲 α 次，對於諸 b 爲 β 次，等等，又對諸 y 爲 η 次，對諸 z 爲 ζ 次，等等，則必有

$$m_1\alpha + m_2\beta + \cdots\cdots = n\lambda + \eta + \zeta + \cdots\cdots,$$

試證明之.

2. 試推廣定理二至同步不變式之情形. 定理三亦得作如是之推廣乎?

3. 試推廣定理四至同步不變式之情形.

4. 試示單一奇次二元方式之一整有理不變式必爲偶次者.

5. 試示單一二元方式之一整有理不變式之權，絕不能小於該方式之次數.

6. 試以同步不變式或逆步不變式恆等於零之形式，表示 (a) 二線及 (b) 二面相合之條件.

7. 設含一組 n 元方式中係數之一多項式，對各方式之係數，均爲齊次，而當該組方式受一行列式爲 $+1$ 之平直變換後，其式不變，則此多項式必爲該組方式之一不變式，試證明之.

8. 推廣習題7至同步不變式之情形.

82. 二元方式之消元式及判別式. 如吾人視 (x_1, x_2) 爲一度空間中之齊次坐標，則令兩二元方式

$$f(x_1, x_2) \equiv a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots\cdots + a_nx_2^n,$$

$$\phi(x_1, x_2) \equiv b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1}x_2 + \cdots\cdots + b_mx_2^m$$

爲零所得之方程式，表示一直線上之數組點. 由 $f=0$ 所得之

諸點乃f之諸平直因式在其上爲零之諸點,而與$\phi=0$相當之諸點亦爲ϕ之諸平直因式,在其上爲零者.且當而僅當兩個二元平直方式之成比例時,此二方式顯於同一點爲零,故二方程式$f=0, \phi=0$之軌跡,當而僅當f與ϕ有一異於常數之公因式時,始有一公點.是以由§72可知二軌跡$f=0, \phi=0$有一公點之充要條件,乃二元方式f, ϕ之消元式R爲零.

然此二軌跡具有一公點之性質,乃一投影性質,故§81之定理四可得

定理一. 兩二元方式之消元式,爲此一對方式之齊次不變式.

由§68中所得呈行列式形狀之R顯見R對諸a爲m次,對諸b爲n次.故自§81之公式(2)可得

$$\lambda=mn.$$

定理二. 兩個二元方式,一爲m次,一爲n次,其消元式爲mn權.

下之幾何問題可導入單一二元方式之一重要不變式.

設一方式f非恆爲零,分解之成平直因式(參看§65中公式(4))

$$f(x_1, x_2)\equiv(\alpha''_1x_1-\alpha'_1x_2)(\alpha''_2x_1-\alpha'_2x_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_nx_2).$$

若此諸平直因式中無二者互成比例,則方程式$f=0$代表n個相異點.然如此諸因式中有二者成比例,則謂f有相重平直因式,而於此情形內方程式$f=0$所表之n點中,有二或若干者相合.今試究在何種條件下,此種情形方可發生.

今求其偏導微函數：

$$
(1)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\equiv \alpha''_1(\alpha''_2x_1-\alpha'_2x_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_nx_2)\\
\qquad +\alpha''_2(\alpha''_1x_1-\alpha'_1x_2)(\alpha''_3x_1-\alpha'_3x_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_nx_2)\\
\qquad +\cdots\cdots+\alpha''_n(\alpha''x_1-\alpha'_1x_2)\cdots\cdots(\alpha''_{n-1}x_1-\alpha'_{n-1}x_2),\\
\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\equiv -\alpha'_1(\alpha''_2x_1-\alpha'_2x_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_nx_2)\\
\qquad -\alpha'_2(\alpha''_1x_1-\alpha'x_2)(\alpha''_3x_1-\alpha'_3x_2)\cdots\cdots(\alpha''_nx_1-\alpha'_nx_2)\\
\qquad -\cdots\cdots-\alpha'_n(\alpha''_1x_1-\alpha'_1x_2)\cdots\cdots(\alpha''_{n-1}x_1-\alpha'_{n-1}x_2).
\end{cases}
$$

自此諸式觀之可知 f 之任一相重平直因式必為諸偏導微函數之一因式.

反之,如諸偏導微函數有一公因式,則由公式

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\equiv nf\ ^*$$

可知其必為 f 之一因式,此公式可由

$$
(2)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\equiv na_0x_1^{n-1}+(n-1)a_1x_1^{n-2}x_2+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x_2^{n-1},\\
\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\equiv a_1x_1^{n-1}+2a_2x_1^{n-1}x_2+\cdots\cdots\cdots+na_nx_2^{n-1}
\end{cases}
$$

立即導出.

但由(1)知 f 之平直因式除 f 相重因式外,無可為 $\partial f/\partial x_1$ 之因式者,故吾人得證明

* 此乃尤拉氏(Euler)之齊次函數定理.

定理三. <u>f 有一相重因式之充要條件,乃 $\partial f/\partial x_1$ 與 $\partial f/\partial x_2$ 之消元式爲零.</u>

定義. <u>$\partial f/\partial x_1$ 與 $\partial f/x_2$ 之消元式,稱爲 f 之判別式.</u>

由(2)可知 f 之判別式可書作 $2n-2$ 次之行列式,其中元素不爲零者,均爲 f $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 諸係數與一數值之乘積.是以此判別式乃諸 a 之多項式.且其爲零,乃軌跡 $f=0$ 有一投影性質(卽此軌跡之二點相合)之充要條件,故由§81之定理四可知此判別式,乃一齊次不變式,而其次數與權則實不難決定.因此吾人可得下之定理:

定理四. <u>n 次二元方式之判別式爲該方式之一齊次不變式,其次爲 $2(n-1)$, 其權爲 $n(n-1)$.</u>

判別式之定義有時需稍加修改.設不書二元方式 f 爲上之形式卽其中係數爲 $a_0, a_2, \cdots\cdots a_n$, 而引入二項式係數以表之如下形:

$$f(x_1,\ x_2) \equiv a_0 x_1{}^n + n a_1 x_1{}^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{2!}\ a_2 x_1{}^{n-2} x_2{}^2 + \cdots\cdots$$
$$+ n a_{n-1} x_1 x_2{}^{n-1} + a_n x_2{}^n.$$

如是則可書

$$\frac{1}{n}\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv a_0 x_1{}^{n-1} + (n-1)\, a_1 x_1{}^{n-2} x_2 + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2!} a_2 x_1{}^{n-3} x_2{}^2$$
$$+ \cdots\cdots + a_{n-1}\ x_2{}^{n-1},$$

$$\frac{1}{n}\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv a_1 x_1{}^{n-1} + (n-1)\, a_2 x_1{}^{n-2} x_2 + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2!} a_3 x_1{}^{n-3} x_2{}^2$$
$$+ \cdots\cdots + a_n x_2{}^{n-1}.$$

於此吾人可定f之判別式爲適所書兩二元方式之消元式.苟如是則吾人所得之判別式爲諸a之多項式,而與上所定之判別式,僅相差一數值因式.且定理三與四對之顯見仍爲眞.若將此最後之定義應用於二元二次方式之情形中,則可知所得者確與本書前數章中所稱爲判別式者相同.

習題

1. n與m次兩二元方式之消元式爲不可約者,試證明之.

[提示: 當$b_0=0$時R等於a_0乘次數爲n與$m-1$之兩個二元方式之消元式.試示如後者之消元式爲不可約,則R亦然,并自$n=1$, $m=1$之情形始用歸納法推演.]

2. 用本章中方法以證明第十二章中之加邊行列式爲2權不變式.

3. 下述之柏組(Bézout)消元法乃習見者:

如f與ϕ爲x之多項式,而均爲n次,則對於x值,使f及ϕ均爲零者,

$$f(x)\phi(y)-\phi(x)f(y)$$

亦爲零,而與y無關.又此式可被$x-y$除盡,蓋以其當$x=y$時爲零也.故

$$F(x, y)=\frac{f(x)\phi(y)-\phi(x)f(y)}{x-y}$$

爲x之$(n-1)$次多項式,而當x爲f與ϕ之公根時,此式對於y之所有値均爲零.依y之冪將F排列之,可得下式

$$\begin{aligned}F=&c_{00}+c_{01}x+c_{02}x^2+\cdots\cdots+c_{0,\,n-1}x^{n-1}\\&+y(c_{10}+c_{11}x+c_{12}x^2+\cdots\cdots+c_{1,\,n-1}x^{n-1})\\&+y^2(c_{20}+c_{21}x+c_{22}x^2+\cdots\cdots+c_{2,\,n-1}x^{n-1})\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+y^{n-1}(c_{n-1,\,0}+c_{n-1,\,1}x+c_{n-1,\,2}x^2+\cdots\cdots+c_{n-1,\,n-1}x^{n-1}).\end{aligned}$$

如此函數之爲零與y無關,則y各冪之係數必爲零.據此可得n個方程

式,而吾人可由之以消去 n 個量, $1, x, x^2, \cdots\cdots x^{n-1}$, 而得一呈行列式形之消元式

$$R=\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01}\cdots\cdots\cdots\cdots c_{0,\,n-1} \\ c_{10} & c_{11}\cdots\cdots\cdots\cdots c_{1,\,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-1,\,0}, & c_{n-1,\,1}\cdots\cdots c_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix}=0.$$

在此情形中,吾人可藉輔助函數 F 化消元式為 n 次行列式,但由西薇斯德氏方法,所得為 $2n$ 次.

試討論此方法,而使之嚴密,并特應用之於齊次變數之情形.

4. 如 f 與 ϕ 為 (x, y) 之 n 與 m 次多項式且為互質,則曲線 $f=0$, $\phi=0$ 之交點不能多於 mn.

[提示: 先示吾人可將坐標軸轉動,使其交點中無二者之橫坐標相等,而在變換後,此二曲線之方程式單對於 y 為 n 與 m 次.然後以西薇斯德氏之析配消元法自此二方程式中消去 y.]

5. 二元三次方式之任一整有理不變式必為其判別式之羃與一常數之乘積,試加證明.

[提示: 先示明如其判別式不為零,則可用非異平直變換將任意二元三次方式化為模範式 $x_1^3-x_2^3$ 用 § 48 中法以證明之.]

第十八章

對稱多項式

83. 基本概念. Σ與S函數

定義一. 如於一多項式 $F(x_1,\cdots\cdots x_n)$ 中,雖任意對調其變數 $(x_1,\cdots\cdots x_n)$,而此式并不改變者,則稱爲對稱多項式.

但證明一多項式之對稱時,不必取諸變數之一切可能排列討論之.如吾人能證明此式不因對調諸變數中之任意一對而變者,卽爲已足,蓋以任意之一排列 $(x_a,x_b,\cdots\cdots x_k)$,恆可自 $(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)$ 中諸 x 作兩兩對調而得也.例如設 $a\neq 1$,則以 x_1,與 x_a 對調;繼復以排列中之第二者與 x_2 對調,如是繼續前往卽可得之,由是可得下之定理:

定理一. 一多項式爲對稱之充要條件,乃此式不因對調其變數中任意二者而變.

有一種對稱多項式,甚爲重要,是爲Σ函數,其定義如下:

定義二. 冠Σ於任意一項之前,意卽爲取改變其下標所得之一切相似項與該項之和.

例如

$$\Sigma x_1^{\alpha}\equiv x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots\cdots+x_n^{\alpha},$$

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\equiv x_1^{\alpha}x_2^{\beta}&+x_1^{\alpha}x_3^{\beta}+\cdots\cdots+x_1^{\alpha}x_n^{\beta}\\&+x_2^{\alpha}x_1^{\beta}+x_2^{\alpha}x_3^{\beta}+\cdots\cdots+x_2^{\alpha}x_n^{\beta}\qquad(\alpha\fallingdotseq\beta)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+x_n^{\alpha}x_1^{\beta}+x_n^{\alpha}x_2^{\beta}+\cdots\cdots+x_n^{\alpha}x_{n-1}^{\beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}\equiv x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}&+x_1^{\alpha}x_3^{\alpha}+\cdots\cdots+x_1^{\alpha}x_n^{\alpha}\\&+x_2^{\alpha}x_3^{\alpha}+\cdots\cdots+x_2^{\alpha}x_n^{\alpha}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+x_{n-1}^{\alpha}x_n^{\alpha}.\end{aligned}$$

顯見指數$\alpha,\beta,\cdots\cdots\cdots\cdots$之次序,并無關係.例如$\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}\equiv\Sigma x_1^{\beta}x_2^{\gamma}x_3^{\alpha}$.

如就對稱多項式中任意一項觀之,可易知此多項式必包含由此項對調諸x所得之一切項.此諸項之集合,僅爲適所確定諸Σ中一者與一常數之乘積.同理,可知該對稱多項式中所有其餘諸項,必成數組,而各爲一Σ與常數之乘積.斯卽

定理二. 任意一對稱多項式,必爲若干Σ之平直組合,而其係數則爲常數.

在此諸Σ中以諸x乘羃之和爲最簡單,爲簡明計恆用符號:

$$S_k \equiv \Sigma x_1{}^k \equiv x_1{}^k + x_2{}^k + \cdots\cdots + x_n{}^k \qquad (k=1,2,\cdots\cdots).$$

而有時爲便利計,令 $S_0=n$.

定理三. 諸 x 之任意對稱多項式,可以若干 S 之多項式表之.

因任意一對稱多項式爲若干 Σ 之平直組合,故欲證明吾人之定理,僅須示明任意 Σ 恆可以若干 S 之多項式表之卽足.令

$$S_\alpha \equiv x_1{}^\alpha + x_2{}^\alpha + \cdots\cdots + x_n{}^\alpha,$$

$$S_\beta \equiv x_1{}^\beta + x_2{}^\beta + \cdots\cdots + x_n{}^\beta.$$

故如 $\alpha \neq \beta$, 則

$$S_\alpha S_\beta \equiv x_1{}^{\alpha+\beta} + x_2{}^{\alpha+\beta} + \cdots\cdots + x_n{}^{\alpha+\beta} + x_1{}^\alpha x_2{}^\beta + x_1{}^\alpha x_3{}^\beta + \cdots\cdots$$

$$\equiv S_{\alpha+\beta} + \Sigma x_1{}^\alpha x_2{}^\beta.$$

由此可得公式:

(1) $$\Sigma x_1{}^\alpha x_2{}^\beta \equiv S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

如 $\alpha=\beta$, 則有

$$S_\alpha{}^2 \equiv x_1{}^{2\alpha} + x_2{}^{2\alpha} + \cdots\cdots + x_n{}^{2\alpha} + 2x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha + 2x_1{}^\alpha x_3{}^\alpha + \cdots\cdots$$

$$\equiv S_{2\alpha} + 2\Sigma x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha.$$

故

(2) $$\Sigma x_1{}^\alpha x_2{}^\alpha \equiv \frac{1}{2}(S^2{}_\alpha - S_{2\alpha}).$$

同理,由 $\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ 與 S_γ 之相乘可得下之公式,其中三整數 α, β, γ 乃設爲相異者:

$$(3)\quad \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma} \equiv S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta}S_\gamma - S_{\alpha+\gamma}S_\beta - S_{\beta+\gamma}S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$(4)\quad \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}x_3^{\gamma} \equiv \frac{1}{2}(S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha}S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma}S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}),$$

$$(5)\quad \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}x_3^{\alpha} \equiv \frac{1}{6}(S_\alpha^3 - 3\,S_{2\alpha}S_\alpha + 2\,S_{3\alpha}).$$

在此二特例中所應用之證法,可推廣至下述之普遍情形:

如以二對稱多項式

$$(6)\qquad \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots\cdots x_k^{\kappa}, \qquad S_\lambda \equiv \Sigma x_1^{\lambda} \qquad (k<n)$$

相乘,則可得各種項,而易見其均包含於下諸多項式之一,或他者中,至各多項式,實際上可各以

$$(7)\qquad \Sigma x_1^{\alpha+\lambda}b_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa}, \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta+\lambda}\cdots x_k^{\kappa}, \cdots \Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa+\lambda},$$
$$\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa}x^{\lambda}_{k+1}$$

表之.今二多項式(6)之乘積既爲對稱,故其形狀必爲

$$c_1\Sigma x_1^{\alpha+\lambda}x_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa} + c_2\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta+\lambda}\cdots x_k^{\kappa} + \cdots + c_k\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa+\lambda}$$
$$+ c_{k+1}\Sigma x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_k^{\kappa}x^{\lambda}_{k+1},$$

式中 $c_1, \cdots\cdots c_{k+1}$ 均爲正整數.

移項可得

$$\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x^{\lambda}{}_{k+1} \equiv \frac{1}{c_{k+1}} [\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_k^{\kappa} \cdot \Sigma x_1^{\lambda} - c_1 \Sigma x_1^{\alpha+\lambda} x_2^{\beta} \cdots x_k^{\kappa}$$

$$- c_2 \Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta+\lambda} \cdots x_k^{\kappa} - \cdots - c_k \Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_k^{\kappa+\lambda}].$$

故如吾人之定理對$\Sigma x_1^{\alpha} \cdots x_k^{\kappa}$為眞，則其對$\Sigma x_1^{\alpha} \cdots x_{k+1}^{\lambda}$亦必為眞．但已知其對$k=1$為眞（由諸$S$之定義卽可知之），故其對$k=2$為眞，而對$k=3$亦然，餘可類推．是則吾人之定理已完全證明．

84．初等對稱函數　符號$\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots x_n^{\nu}$可用之以誌$n$變數之任意$\Sigma$．如$\beta=\gamma=\cdots\cdots=\nu=0$，斯卽變為$\Sigma x_1^{\alpha}$或$S_{\alpha}$；如$\gamma=\cdots\cdots=\nu=0$，則變為$\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$；餘可類推．

今就$\Sigma x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \cdots\cdots x_n^{\nu}$而論之，式中一切$\alpha, \beta, \cdots\cdots \nu$為0或1．如是則有下列$n$種情形：

$\alpha=1,\qquad \beta=\gamma=\cdots\cdots=\nu=0,\qquad \Sigma x_1,$

$\alpha=\beta=1,\qquad \gamma=\cdots\cdots=\nu=0,\qquad \Sigma x_1 x_2,$

………………………………………………………………

………………………………………………………………

$\alpha=\beta=\cdots\cdots=\mu=1,\qquad \nu=0,\qquad \Sigma x_1 x_2 \cdots\cdots x_{n-1},$

$\alpha=\beta=\cdots\cdots=\nu=1,\qquad x_1 x_2 \cdots\cdots x_n.$

$\alpha=\beta=\cdots\cdots=\nu=0$之極端情形，無可注意．今以$p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$各表此$n$個對稱多項式．彼等卽所謂初等對稱函數，(elementary symmetric functions) 是也.

定理一. 諸 x 之一任意對稱多項式,必可以諸 p 之多項式表之.

因諸 x 之一任意對稱多項式,恆可以諸 S 之多項式表之,故僅須證明各 S 可以諸 p 之多項式表之卽足.

設引入一新變數 x 而就多項式

$$f(x;x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)\equiv(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$$

$$\equiv x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^np_n$$

論之.用 f 之分解成因子後形狀,吾人可書

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv\frac{f}{x-x_1}+\frac{f}{x-x_2}+\cdots\cdots+\frac{f}{x-x_n}.$$

當 $x=x_i$ 時 f 恆為零,故可書

$$f\equiv(x^n-x_i^n)-p_1(x^{n-1}-x_i^{n-1})+\cdots\cdots$$

據此

$$\frac{f}{x-x_i}\equiv x^{n-1}+(x_i-p_1)x^{n-2}+(x_i^2-p_1x_i+p_2)x^{n-3}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv nx^{n-1}+(S_1-np_1)x^{n-2}+(S_2-p_1S_1+np_2)x^{n-3}+\cdots\cdots.$$

但自另一方面觀之,則有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv nx^{n-1}-(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}-\cdots\cdots.$$

故於此二式中,令 x 同次冪項之係數相等,可得

$$\begin{cases} S_1 - np_1 \equiv -(n-1)p_1, \\ S_2 - p_1S_1 + np_2 \equiv (n-2)p_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} - p_1S_{n-2} + p_2S_{n-3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}np_{n-1} \equiv (-1)^{n-1}p_{n-1}, \end{cases}$$

或

$$(1)\begin{cases} S_1 - p_1 \equiv 0, \\ S_2 - p_1S_1 + 2p_2 \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{n-1} - p_1S_{n-2} + p_2S_{n-3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}(n-1)p_{n-1} \equiv 0. \end{cases}$$

今復就

$$x_i^n - p_1x_i^{n-1} + p_2x_i^{n-2} - \cdots\cdots + (-1)^n p_n \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots n).$$

諸恆等式論之. 以 $x_1^{k-n}, \cdots\cdots x_n^{k-n}$ 分乘諸此恆等式而將其結果相加,則得

$$(2) \quad S_k - p_1S_{k-1} + p_2S_{k-2} - \cdots + (-1)^n p_n S_{k-n} \equiv 0 \ (k = n, n+1, \cdots).$$

公式 (1) 與 (2) 卽所謂牛頓氏公式 (Newton's Formulœ) 也. 由此諸式吾人可陸續計算 $S_1, S_2, \cdots\cdots$ 之値, 以諸 p 之多項式表之:

$$(3) \quad \begin{cases} S_1 \equiv p_1, \\ S_2 \equiv p_1^2 - 2p_2, \\ S_3 \equiv p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

故吾人之定理得以證明.

於茲須注意如所與 k 之值小於 n,則不能從(2)推得牛頓氏公式.然如將符號

$$p_{n+1}\equiv p_{n+2}\equiv\cdots\cdots\equiv 0$$

引入,則此毋需用及相異之二組公式矣.如是則牛頓氏公式之全部,可包含於下之形狀中:

$$(4)\ S_k-p_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}p_{k-1}S_1+(-1)^k kp_k\equiv 0\quad (k=1,2,\cdots).$$

用此符號,顯見以諸 p 表明諸 S 之公式(3),完全與諸 x 之數 n 無關.

上節中以諸 S 表諸 Σ 之公式,亦與 n 無關,是吾人得建立

定理二. 如用符號 $p_{n+1}\equiv p_{n+2}\equiv\cdots\equiv 0$ 及形如(4)之牛頓氏公式,則以諸 p 之多項式,表任意一 Σ 之式,與諸 x 之數 n 無關.

設有 k 個 n 元多項式

$$f_1(x_1,\cdots x_n),\ f_2(x_1,\cdots x_n),\cdots f_k(x_1,\cdots x_n).$$

苟能得一不恆爲零之 k 元多項式

$$F(z_1,\cdots z_k),$$

當代此中各 z 以其相當之 f,而化爲諸 x 之多項式時,則爲恆爲零,如

$$F(f_1,\cdots f_k)\equiv 0,$$

當是時而僅當是時,吾人謂諸 f 間有一有理關係式.

定理三. n 元之諸初等對稱函數 $p_1,\cdots p_n$ 間,無有理之關係式.

因如設 $F(z_1,\cdots z_n)$ 爲一任意之 n 元多項式,而不恆爲零,並試此多項式在 $(a_1,\cdots a_n)$ 一點不爲零.茲取 $(x_1,\cdots x_n)$ 爲方程式

$$x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n a_n=0$$

之根.則當諸 x 爲如此諸值時,諸 p 之值爲 $a_1,\cdots a_n$,故 $F(p_1,\cdots p_n)$ 對如此諸 x 之值並不爲零,是視作諸 x 之多項式時,不恆爲零.故吾人之定理得以證明.

系. 以初等對稱函數 $p_1,\cdots p_n$ 之多項式,表示 $(x_1,\cdots x_n)$ 之對稱多項式時,其方法僅有一.

因如 f 爲一對稱多項式,而吾人可有二式表之,如

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_1(p_1,\cdots p_n),$$

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_2(p_1,\cdots p_n),$$

則將此二恆等式相減時,吾人必可得諸 x 之一恆等式

$$\phi_1(p_1,\cdots p_n)-\phi_2(p_1,\cdots p_n)\equiv 0.$$

然除

$$\phi_1(z_1,\cdots z_n)\equiv\phi_2(z_1,\cdots z_n)$$

時,由此卽得諸 p 間之一有理關係式.故可知表 f 之二式,實係相同.

習　題

1. 試用初等對稱函數,以表示下列諸對稱多項式:

$$\Sigma x_1^2 x_2, \qquad \Sigma x_1^2 x_2^2, \qquad \Sigma_1^3 x_2^2 x_3.$$

2. 以 $S_1, \cdots\cdots S_n$ 之多項式,表示 $(x_1, \cdots\cdots x_n)$ 之任意對稱多項式之方法,有一而僅限於一,試證明之.

85. 對稱多項式之權與次數. 今將於各初等對稱函數 p_i 附以與其下標相等之一權,參看§79.

定理一. 諸 x 之一 m 次齊次對稱多項式,若以諸 p 表之,則爲 m 權之齊權式.

設

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \cdots x_n) \equiv \phi(p_1, p_2, \cdots p_n)$$

爲如是之多項式.因 p_1 爲諸 x 之一次齊次多項式,而 p_2 爲二次者,餘可類推,故當 ϕ 中之任意一項,以諸 x 表出時,則必爲一齊次多項式,而其次數則等於該項原有之權.例如 $6p_1^2p_2p_3^3$ 一項之權爲13,而諸 x 表出後,則爲13次之齊次多項式.據此可知一組齊權之項,當以諸 x 表出後,因由§84之定理三,知其必不能化爲恆等於零,故必爲齊次式,且其次數則與其原有之權相等.故如 ϕ 非齊權,則 f 不爲齊次,吾人之定理遂得證明.

系. 如 f 爲 m 次之非齊次式,則 ϕ 爲 m 權之非齊權式.

定理二. 設有 $(x_1, \cdots x_n)$ 之一種對稱多項式,則以初等對稱函數 $p_1, \cdots p_n$ 表出後,此式對諸 p 之次數必與其先對諸 x 中任一者之次數相等.

設 f 爲此對稱多項式,而書

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)\equiv\phi(p_1,p_2\cdots p_n),$$

并設f對於x_1(因對稱關係,故對於任一x皆然)爲m次,而ϕ對於諸p爲μ次.吾人之所欲證者,卽爲$m=\mu$.因諸p爲x_1之一次式,故顯見$m\leqq\mu$.

如ϕ爲非齊次者,則可將其中相同次數之諸項歸爲一組,而使之變爲若干齊次多項式之和.此種諸p之各齊次多項式,均可以諸x之對稱多項式表之(可代諸p,以其用諸x所表之值).如吾人之定理對諸p之齊次多項式爲眞,則立可知在普遍情形中,此理亦爲眞.

因此設ϕ爲齊次多項式.當$n=1$時,此定理顯然爲眞,蓋此時$p_1\equiv-x_1$也.故如設當諸x之個數爲$1,2,\cdots n-1$時,此理爲眞,而能證明其當諸x之個數爲n時亦眞,則可用算學歸納法,將吾人之定理,作全部之證明.

職是之故,試先假設p_n不爲ϕ中各項之因式.則$\phi(p_1,\cdots p_{n-1},0)$不恆等於零,但仍爲$(p_1,\cdots p_{n-1})$之$\mu$次齊次多項式.今設$x_n=0$.由此有$p_n=0$,而可得恆等式

$$(2)\qquad f(x_1,\cdots x_{n-1},0)\equiv\phi(p_1',\cdots p'_{n-1},0)$$

式中$p_1',\cdots p'_{n-1}$爲$(x_1,\cdots x_{n-1})$之諸初等對稱函數.且$f(x_1,\cdots x_{n-1},0)$爲x_1之m_1次對稱多項式,而$m_1\leqq m$.由當諸x之數爲$n-1$時,吾人定理爲眞之假設,則自(2)可以推知$\mu=m_1\leqq m$;但由上觀之,已知μ絕不能小於m,故必有$\mu=m$,而吾人之定理得以證明.

於此僅有p_n爲ϕ中各項因式之情形尙未論及.設$p_n{}^k$爲ϕ因式所含之p_n最高冪,則

$$\phi(p_1,\cdots p_n)\equiv p_n{}^k\phi_1(p_1,\cdots p_n),$$

式中ϕ_1爲$\mu-k$次之多項式.以諸p被諸x所表示之値代入其中,得

$$(3)\qquad f(x_1,\cdots x_n)\equiv x_1{}^k x_2{}^k\cdots x_n{}^k f_1(x_1,\cdots x_n),$$

式中

$$(4)\qquad f_1(x_1,\cdots x_n)\equiv\phi_1(p_1,\cdots p_n).$$

自(3)可知f_1爲x_1之$m-k$次,而由(4)則因ϕ_1不以p_n爲一因式,故f_1中x_1之次數與ϕ_1中諸p之次數相等,即

$$m-k=\mu-k.$$

由是知$m=\mu$,而吾人之定理得以證明.

本節中二定理,不特在理論上甚爲重要,且在以諸p表對稱多項式値時,此理可直接應用,使計算化爲簡便.

今以例爲證,試取對稱函數

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\Sigma x_1{}^2x_2x_3$$

論之.f既爲爲x之四次齊次式,故由定理一知其必亦爲諸p之4權齊權式.因其更爲x_1之二次式,故由定理二知其爲諸p之二次式.故

$$(5)\qquad \Sigma x_1{}^2x_2x_3\equiv Ap_1p_3+Bp_2{}^2+Cp_4,$$

式中A,B及C與n一數無關(見§84定理二),而可用普通之待定係數法以決定之.

取 $n=3$, 則 $p_4=0$. 令 $x_1=0, x_2=x^3=1$, 則得 $p_1=2, p_2=1, p_3=0$. 以此諸值代入 (5), 得 $B=0$.

令 $x_1=-1, x_2=x_3=1$, 則得 $p_1=1, p_2=-1, p_3=-1$, 而 $A=1$.

今設 $$n=4, x_1=x_2=x_3=x_4=1.$$

由此可求得 $p_1=4, p_2=6, p_3=4, p_4=1$.

以此代入 (5) 得 $C=-4$. 故

$$\Sigma x^2{}_1x_2x_3 \equiv p_1p_3-4p_4.$$

習　題

1. 對稱函數

$$f(x_1,\cdots x_n)\equiv\Sigma x_1{}^2x_2x_3+\Sigma x_1{}^2x_2{}^2+\Sigma x_1x_2x_3x_4$$

爲諸 x 之四次齊次式, 而爲 x_1 之二次式;故當以諸 p 表出後, 則必與上例具相同之形狀,如 $Ap_1p_3+Bp_2{}^2+Cp_4$. 試計算 A, B 及 C 之值.

2. 如 $f(x_1,x_2,x_3)\equiv(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$, 試證

$$f(x_1,x_2,x_3)\equiv-27\,p^2{}_3-4\,p_2{}^3+18\,p_1p_2p_3-4\,p_1{}^3p_3+p_1{}^2p_2{}^2.$$

86. 二一元多項式之消元式與判別式.

設

$$f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

$$\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n),$$

$$\phi(x)\equiv x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots\cdots+b_m$$

$$\equiv(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_m),$$

爲 x 之二多項式. 幷取 mn 個因式之乘積

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots\cdots(\alpha_1-\beta_m)\\(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots\cdots(\alpha_2-\beta_m)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_n-\beta_1)(\alpha_n-\beta_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\beta_m)\end{array}\right.$$

論之.此乘積當而僅當諸α中至少有一與諸β中一者相等時方為零.故其為零,乃f與ϕ有公因式之充要條件也.復次,乘積(1)既為α之對稱多項式,且對於諸β亦然,故必可以諸α及諸β之初等對稱函數表之,故為諸a及諸b之多項式.如吾人留意乘積(1)可書為

$$\phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2)\cdots\phi(\alpha_n),$$

則此理自更顯然.

於此形狀中,此式乃諸α之對稱多項式,而以諸b之多項式為其係數,故僅須以諸a代諸α卽足.

由是可見乘積(1)乃可以諸a及諸b之多項式$F(a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots b_m)$表之,而其為零,乃$f$與$\phi$有公因式之充要條件.於§68中吾人已求得諸$a$與諸$b$之一多項式,而該式為零,亦卽$f$與$\phi$有公因式之充要條件,此卽$f$與$\phi$之消元式$R$.

吾人今由下之定理,以明此二多項式之相同:

定理一. 乘積(1)與f及ϕ之消元式R僅相差一常數因式,而此消元式對於諸a與諸b,為一不可約多項式.

為證此理計,吾人試先示明此處稱為$F(a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots b_m)$之乘積(1)為不可約者.此理可證之如下:設$F$為可約,而令

$$F(a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots b_m)\equiv F_1(a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots b_m)F_2(a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots b_m)$$

式中F_1與F_2為異於常數之多項式.則因諸a及諸b乃諸α及諸β之對稱多項式,故F_1與F_2必可以諸α與諸β之對稱多

項式ϕ_1與ϕ_2表之,而吾人可書

$$\phi_1(\alpha_1,\cdots\alpha_n;\ \beta_1,\cdots\beta_m)\phi_2(\alpha_1,\cdots\alpha_n;\ \beta_1,\cdots\beta_m)$$

$$\equiv\begin{cases}(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_m)\\(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_m)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_n-\beta_1)(\alpha_n-\beta_2)\cdots(\alpha_n-\beta_m).\end{cases}$$

此恆等式右端諸因式均為不可約者,故ϕ_1必為此若干之二項式因式所組成,而ϕ_2則為其餘諸式所組成.然此為不可能,蓋以ϕ_1與ϕ_2均非對稱也.故F為不可約.

今因$F=0$乃$f(x)$與$\phi(x)$有公因式之充要條件,而$R=0$亦然.則諸a與諸b之任一組值可使$F=0$者,必亦可使$R=0$.故由關於$n+m$個變數而與§76定理七相似之定理,知F必為R之因式.復次,F既為諸α及諸β之多項式,而對於各α為m次,對於各β為n次,則由§85定理二知其對於諸a必為m次,對於諸b必為n次.但試考察§68中之行列式即可知R中諸a之次數不能大於m,而諸b之次數不能大於n.今F既為R之因式,而次數又不較R為低,是二式之相異,僅能為一常數.故吾人之定理得以證明.

至是吾人可轉論下之問題矣:在何種條件下多項式$f(x)$始有重次之平直因式乎?用如上之同一符號,即可知乘積

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n)\\ (\alpha_2-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha_{n-1}-\alpha_n)\end{array}\right\}\equiv P(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n)$$

之爲零,乃其充要條件也. P不對諸α爲對稱,蓋以將其二下標對調,則P變爲$-P$也. 然如取P^2以代P立論,則可得一對稱多項式,且能以諸α之多項式表之

$$[P(\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n)]^2\equiv F(a_1,\cdots\cdots a_n).$$

且$F=0$亦爲$f(x)$有重次平直因式之充要條件.

自另一方面觀之,可知$f(x)$之有重次平直因式,必當而僅當$f(x)$與$f'(x)$有一公共平直因式之時.故$f(x)$有重次平直因式之充要條件,乃$f(x)$與$f'(x)$之消元式爲零.此消元式吾人卽稱之爲$f(x)$之判別式Δ.其爲f諸係數之多項式,當甚顯然.

定理二. F與Δ二多項式僅相差一常數因式,而均爲不可約者.

此定理之證法與定理一之證法相似,讀者可自爲之.

習　題

1. 試用對稱函數以計算對於二多項式

$$x^2+a_1x+a_2,$$
$$x^2+b_1x+b_2$$

之乘積(1),并以此結果,與其行列式形狀之消元式比較.

2. 試將§85後習題2之結果,與用行列式表多項式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

之消元式比較,而驗明定理二.

第十九章

對於若干對變數爲對稱之多項式

87. 基本概念. Σ與S函數. 上章中所習用之變數$(x_1,\cdots x_n)$如吾人不視爲n度空間中一點之坐標,而視之爲一直線上n點之坐標,亦無不可.實則此種解釋亦對稱函數理論之普通應用所習見者(參看§86).自此觀點立論,即可由研究在一平面中之n點

$$(1)\qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots (x_n, y_n)$$

而易於將對稱函數之概念加以推廣.

定義. 如在含(1)中諸點各坐標之多項式

$$F(x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots\cdots x_n, y_n)$$

中,雖任意對調此諸對變數,而此式并不改變者,則該多項式稱爲關於此諸對變數爲對稱之多項式.

於此顯見示多項式F爲對稱時,不必取諸下標之一切可能排列討論之,亦猶此諸點在一直線上之情形然.吾人僅須亦明,雖對調(1)中諸點之任意一對,而F并不改變即足.

今吾人將引用符號Σ,一如在單一變數之情形.例如

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \equiv x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} + x_2^{\alpha_1} y_2^{\beta_1} + \cdots\cdots + x_n^{\alpha_1} y_n^{\beta_1},$$

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \equiv x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} + x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_3^{\alpha_2} y_3^{\beta_2} + \cdots\cdots,$$

餘可類推.

$\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots\cdots$ 諸對指數書寫時之次序易知其幷無關係;且一切諸對變數(1)之任一種對稱多項式亦爲若干Σ之平直組合,凡此皆與單一變數之情形,未嘗有異.

今更應用符號

$$S_{kl} \equiv \Sigma x_1^k y_1^l \equiv x_1^k y_1^l + x_2^k y_2^l + \cdots\cdots + x_n^k y_n^l \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, \cdots\cdots \\ l=0, 1, \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

定理. 任一對稱多項式 $F(x_1, y_1; \cdots\cdots x_n, y_n)$ 恆可以諸 S 之多項式表之.

此定理之證法,與§83之定理三完全相似,讀者可自爲之.

88. 若干對變數之初等對稱函數. 如與諸 α 及諸 β 以適當之值,則 n 對變數之任一 Σ 函數恆可書作

(1) $$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} y_n^{\beta_n}$$

定義 函數(1)於而僅於

$$\alpha_i + \beta_i = 0 \text{ 或 } 1 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots n)$$

時,稱爲諸對變數 $(x_1, y_1), \cdots\cdots (x_n, y_n)$ 之初等對稱函數,但一切之諸 α 與諸 β 不盡爲零.

吾人將用下之符號,以表此諸初等對稱函數:

$$p_{10} \equiv \Sigma x_1, \quad p_{01} \equiv \Sigma y_1,$$

$$p_{20}\equiv\Sigma x_1x_2,\quad p_{11}\equiv\Sigma x_1y_2,\quad p_{02}\equiv\Sigma y_1y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n0}\equiv x_1x_2\cdots x_n\ \cdots p_{i,n-i}\equiv\Sigma x_1\cdots x_iy_{i+1}\cdots y_n,\cdots p_{0n}\equiv y_1y_2\cdots y_n.$$

顯見諸 p_{ij} 之數爲有限,即 $\frac{1}{2}n(n+3)$ 個,而諸 S_{ij} 之數則爲無限.

吾人將附各 p 以其對於諸 x 之權,使等於其第一下標,又附以對於諸 y 之權,使等於其第二下標,當吾人僅謂 p_{ij} 之權時,其意乃指其總權 (total weight); 即其下標之和.

定理. 任一種對稱多項式 $F(x_1,y_1;\cdots\cdots x_n,y_n)$ 恆可以諸 p_{ij} 之多項式表之.

蓋以由 § 87 中之定理,可知任一如是之多項式,恆可以諸 S_{ij} 之多項式表之,故僅須示明諸 S_{ij} 可以諸 p_{ij} 之多項式表之即足.

設

$$\xi_1\equiv\lambda x_1+\mu y_1,\quad \xi_2\equiv\lambda x_2+\mu y_2,\cdots\cdots\xi_n\equiv\lambda x_n+\mu y_n,$$

而求此諸 ξ 之初等對稱函數:

$$\pi_1\equiv\Sigma\xi_1\equiv\lambda\Sigma x_1+\mu\Sigma y_1\equiv\lambda p_{10}+\mu p_{01},$$

$$\begin{aligned}\pi_2\equiv\Sigma\xi_1\xi_2&\equiv\Sigma(\lambda x_1+\mu y_1)(\lambda x_2+\mu y_2)\\&\equiv\lambda^2\Sigma x_1x_2+\lambda\mu\Sigma x_1y_2+\mu^2\Sigma y_1y_2\\&\equiv\lambda^2p_{20}+\lambda\mu p_{11}+\mu^2p_{02},\end{aligned}$$

$$\pi_3\equiv\Sigma\xi_1\xi_2\xi_3\equiv\lambda^3p_{30}+\lambda^2\mu p_{21}+\lambda\mu^2p_{12}+\mu^3p_{03},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi_n \equiv \Sigma\xi_1\xi_2\cdots\cdots\xi_n \equiv \lambda^n p_{n0} + \lambda^{n-1}\mu p_{n-1,1} + \lambda^{n-2}\mu^2 p_{n-2,2} + \cdots\cdots + \mu^n p_{0n}.$$

更令 $$\sigma_k \equiv \Sigma\xi_1^k \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots).$$

如設 α 及 β 爲正整數,或零,但均不爲零.

則 $$\sigma_{\alpha+\beta} \equiv \Sigma\xi_1^{\alpha+\beta} \equiv \lambda^{\alpha+\beta}\Sigma x_1^{\alpha+\beta} + \lambda^{\alpha+\beta-1}\mu\Sigma x_1^{\alpha+\beta-1}y_1 + \cdots\cdots$$
$$\equiv \lambda^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta,0} + \lambda^{\alpha+\beta-1}\mu S_{\alpha+\beta-1,1} + \cdots\cdots.$$

但由 §84 之定理一,吾人可書

$$\sigma_{\alpha+\beta} \equiv F(\pi_1, \pi_2, \cdots\cdots \pi_n),$$

式中 F 爲一多項式.故

$$\lambda^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta,0} + \lambda^{\alpha+\beta-1}\mu S_{\alpha+\beta-1,1} + \cdots \equiv \Psi(p_{10}, \cdots p_{0n}, \lambda, \mu),$$

式中 Ψ 爲一多項式.今視此對於 (λ, μ) 爲恆等式,而令其中含有 $\lambda^\alpha\mu^\beta$ 之項之係數相等,則可得諸 x 與諸 y 之一恆等式

$$S_{\alpha\beta} \equiv \Phi(p_{10}, \cdots\cdots p_{0n}),$$

此中 Φ 乃諸 p 之一多項式.故吾人之定理得以證明.

§84 之定理三,在若干對變數之情形中,卽不復爲眞,蓋以 $\frac{1}{2}n(n+3)$ 個 p_{ij} 間,實有關係式存在也;例如 $n=2$,則多項式

$$4p_{20}p_{02} - p_{20}p_{01}^2 - p_{10}^2p_{02} + p_{10}p_{11}p_{01} - p_{11}^2$$

當諸 p 以其爲諸 x 所表之值代入後,應恆爲零.但當 $n=3$ 時,不復恆等於零.

由適所論觀之,易知對於若干對變數爲對稱之多項式以 p_{ij} 表之時,不爲單純確定.

對本節之所論若欲有作更深之探討,讀者可參閱淖托氏代數學 (Netto's Algebra) 第二卷 p.63.

習　題

1. 如一多項式對於若干對變數(x_i, y_i)爲對稱,且爲諸x之n次齊次式,諸y之m次齊次式,則該多項式必可以諸p_{ij}之一多項式表之,且對於諸x爲n權齊權式,諸y爲m權齊權者,試證明之.

2. 試用待定係數法及習題1,將對稱多項式

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3$$

以諸p_{ij}表之.

3. 如於$(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\cdots\cdots x_n, y_n, z_n)$之一多項式不因諸下標對調而變,則該多項式稱爲$n$點$(x_i, y_i, z_i)$之對稱多項式.

試將本節中諸結果及上節中者,推廣至此種多項式.

89. 二元對稱函數. $(x_1, y_1),\cdots\cdots(x_n, y_n)$諸對變數可視之爲在一直線上$n$點之齊次坐標,亦猶視之爲在一平面內$n$點之非齊次坐標然.如是則自可僅取各對變數爲齊次之諸對稱多項式論之.此等多項式吾人將稱之爲二元對稱函數 (binary symmetric functions).上節中諸p_{ij},多不在其列.然其中最後之$n+1$個$(p_{n0}, p_{n-1,\,1},\cdots\cdots p_{0n})$,則均爲此各對變數之一次齊次式.吾人將稱之爲初等二元對稱函數 (elementary binary symmetric functions).

定理一. $(x_1, y_1;\cdots\cdots x_n, y_n)$之任何二元對稱函數恆可以$(p_{n0}, p_{n-1,\,1},\cdots\cdots p_{0n})$之一多項式表之.

如將此二元對稱函數分爲諸Σ,則易見此各Σ亦爲二

元對稱函數,吾人或可簡稱之爲二元Σ(binary Σ).故在此僅須證明吾人之定理對於各二元Σ爲眞即足.普遍之二元Σ可書作

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} y_n^{\beta_n} \qquad (\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \alpha_n),$$

如吾人以 m 表此Σ對任一對變數之次數,則

$$m = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \cdots\cdots = \alpha_n + \beta_n.$$

試暫設諸 y 中無爲零者,幷令

$$X_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad X_2 = \frac{x_2}{y_2}, \cdots\cdots X_n = \frac{x_n}{y_n}.$$

今取此諸 X 之初等對稱函數:

$$P_1 = \Sigma X_1 \qquad = \frac{p_{1,n-1}}{p_{0n}}$$

$$P_2 = \Sigma X_1 X_2 \qquad = \frac{p_{2,n-2}}{p_{0n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = X_1 X_2 \cdots\cdots X_n = \frac{p_{n0}}{p_{0n}}$$

論之吾人可書

$$(1) \qquad \frac{\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} y_n^{\beta_n}}{p_{0n}^{m}} = \Sigma X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots\cdots X_n^{\alpha_n}$$
$$= \Phi(P_1, \cdots\cdots P_n),$$

式中Φ爲諸 P 之 α_1 次式(見 §85 定理二),蓋以吾人已設 $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \alpha_n$ 也.因此故可書

$$(2) \qquad \Phi(P_1, \cdots\cdots P_n) = \frac{\phi(p_{0n}, p_{1,n-1}, \cdots\cdots p_{n0})}{p_{0n}^{\alpha_1}},$$

式中 ϕ 爲 α_1 次之齊次多項式.

故由(1)與(2)可得

$$(3)\quad \Sigma x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}\cdots\cdots x_n^{\alpha_n}y_n^{\beta_n}=p_{0n}^{\beta_1}\phi(p_{0n},\ p_{1,\ n-1},\cdots\cdots p_{n0}).$$

此方程式,僅當諸 y 中有一爲零時不能成立.(3)之各端既均可視爲諸 x 與諸 y 之多項式,則由§2中定理五可以推知此式爲一恆等式,而吾人之定理得以證明.

由§85中定理一可知 Φ 爲諸 P 之 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$ 權齊權式.故以諸 p_{ij} 表 $\Sigma x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}\cdots\cdots x_n^{\alpha_n}y_n^{\beta_n}$ 時,如就諸 x 以計諸 p_{ij} 之權,則所得必爲此 $(n+1)$ 個 p_{ij} 之 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$ 權齊權式.今返就一組之此種 Σ 論之,即得

定理二. 二元對稱函數爲 n 個 x (或 y) 之 k 次齊次式,如以 $p_{n0},\ p_{n-1,\ 1},\cdots\cdots p_{0n}$ 表之,則爲對於諸 x (或 y) 之 k 權齊權式.

於定理一之證明內,吾人已知(3)中之多項式 ϕ 乃諸 p 之 α_1 次齊次多項式;故 $\Sigma x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\alpha_n}y_n^{\beta_n}$ 乃爲諸 p 之 $\alpha_1+\beta_1=m$ 次齊次多項式.故

定理三. 對於各對變數爲 m 次之任何二元對稱函數,如以 $p_{n0}\ p_{n-1,\ 1},\cdots\cdots p_{0n}$ 表之,則爲諸 p 之 m 次齊次多項式.

習　題

1. 試證 $p_{n0},\cdots\cdots p_{0n}$ 間無有理關係式存在,故僅有一法,可將二元對稱函數以諸 p 之一多項式表之.

2. 所謂三元對稱函數云者,乃指n點之齊次坐標(x_i, y_i, z_i)之一對稱多項式而言.

試將本節中諸結論,推廣至三元對稱函數,參看§88後第3題.

90. 二元方式之消元式及判別式. 本節之目的在述明如何由對稱函數之立場,以研究二元方式之消元式及判別式.

設

$$f(x_1, x_2) \equiv a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots\cdots + a_nx_2^n$$

$$\equiv (\alpha_1''x_1 - \alpha_1'x_2)(\alpha_2''x_1 - \alpha_2'x_2)\cdots\cdots(\alpha_n''x_1 - \alpha_n'x_2),$$

$$\phi(x_1, x_2) \equiv b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1}x_2 + \cdots\cdots + b_mx_2^m$$

$$\equiv (\beta_1''x_1 - \beta_1'x_2)(\beta_2''x_1 - \beta_2'x_2)\cdots\cdots(\beta_m''x_1 - \beta_m'x_2),$$

爲兩二元方式.在此各式均先書成未分解因式時之形狀,次復書爲已分解因式時之形狀.由此二方式之比較卽可知

$$(\alpha_1', \alpha_1''),\quad (\alpha_2', \alpha_2''),\cdots\cdots(\alpha_n', \alpha_n'')$$

n點之初等二元對稱函數爲

$$a_0, -a_1, a_2, \cdots\cdots(-1)^n a_n;$$

而 $$(\beta_1', \beta_1''), (\beta_2', \beta_2''),\cdots\cdots(\beta_m', \beta_m'')$$

m點者,則爲 $$b_0, -b_1, b_2, \cdots\cdots(-1)^m b_m.$$

今試就二平直因式

$$\alpha_i''x_1 - \alpha_i'x_2,\quad \beta_j''x_1 - \beta_j'x_2$$

論之.此二平直因式成比例之充要條件爲行列式

$$\alpha_i''\beta_j' - \alpha_i'\beta_j''$$

等於零.作所有此等行列式之乘積:

$$P\equiv\begin{Bmatrix}(\alpha_1''\beta_1'-\alpha_1'\beta_1'')(\alpha_2''\beta_1'-\alpha_2'\beta_1'')\cdots\cdots(\alpha_n''\beta_1'-\alpha_n'\beta_1'')\\(\alpha_1''\beta_2'-\alpha_1'\beta_2'')(\alpha_2''\beta_2'-\alpha_2'\beta_2'')\cdots\cdots(\alpha_n''\beta_2'-\alpha_n'\beta_2'')\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\(\alpha_1''\beta_m'-\alpha_1'\beta_m'')(\alpha_2''\beta_m'-\alpha_2'\beta_m'')\cdots(\alpha_n''\beta_m'-\alpha_n'\beta_m'')\end{Bmatrix}.$$

此乘積之爲零,乃f中至少有一平直因式與ϕ中一平直因式成比例之充要條件,亦卽f與ϕ有一不爲常數之公因式之充要條件.

故顯見吾人可將P化爲簡單之形狀

$$P\equiv f(\beta_1',\beta_1'')f(\beta_2',\beta_2'')\cdots\cdots f(\beta_m',\beta_m'').$$

此形狀表其爲諸a之m次齊次多項式,且爲(β_i',β_i'') m點之對稱多項式.復次,此式又爲各點坐標之n次對稱函數.故由§89中定理三知其可以(β_i',β_i'')諸點之初等二元對稱函數,卽諸b之一n次齊次多項式表之.是吾人已示明乘積P實可以諸a及諸b之一多項式表之,而此式對於諸a爲m次齊次式,對於諸b爲n次齊次者.

於§72中吾人已求得諸a與諸b之另一多項式,其爲零亦乃f與ϕ有公因式之充要條件,卽所謂消元式R是也.今由下之定理卽可明此二多項式之相同.

定理一. 乘積P與f及ϕ之消元式R,相差僅一常數因式,至此消元式乃爲諸a與諸b之不可約多項式.

用與§86定理一證法相同之方法,吾人可示明P式如

以諸 a 及諸 b 之一多項式表示時，則不可約.今 $P=0$ 與 $R=0$ 旣均爲 f 與 ϕ 有公因式之充要條件，故諸 a 及諸 b 之任意一組值，可使 $P=0$ 者，必亦可使 $R=0$. 故由 § 76 中定理七知 P 必爲 R 之一因式.但吾人已知 P 對於諸 a 爲 m 次，對於諸 b 爲 n 次.返觀 § 68 中之行列式，知 R 亦然.故 P 不特爲 R 之因式，且亦爲同次者，故二者相差，僅能爲一常數因式.至是吾人之定理得以證明.

今試考在何種條件下，二元方式 $f(x_1, x_2)$ 始可有重次之平直因式.如用上文所採之同一符號，即可知乘積

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1''\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2'')(\alpha_1''\alpha_3'-\alpha_1'\alpha_3'')\cdots\cdots(\alpha_1''\alpha_n'-\alpha_1'\alpha_n'')\\ (\alpha_2''\alpha_3'-\alpha_2'\alpha_3'')\cdots\cdots(\alpha_2'\alpha_n'-\alpha_2'\alpha_n'')\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha''_{n-1}\alpha_n'-\alpha_n'{}_{-1}\alpha_n'')\end{aligned}\right\}\equiv P_1(\alpha_1', \alpha_1'', \cdots\cdots \alpha_n', \alpha_n'')$$

之爲零，乃其充要條件也. P_1 不爲諸對 α 之對稱式，蓋以將其二下標對調，則 P_1 變爲 $-P_1$. 然如以 $P_1{}^2$ 代 P_1 立論，則可得一二元對稱函數，而能以諸 a 之一多項式表之如下

$$[P_1(\alpha_1', \alpha_2''; \cdots\cdots \alpha_n', \alpha_n'')]^2 \equiv F(a_0, \cdots\cdots a_n).$$

且 F 之爲零，乃當而僅當 P_1 爲零時始可.故 $F=0$ 乃 $f(x_1, x_2)$ 有重平直因式之充要條件.

但 $f(x_1, x_2)$ 之判別式 Δ (參看 § 82) 之爲零，亦一充要條件.故得

定理二. F 與 Δ 僅相差一常數因式，且均爲不可約者.

此定理之證法,實與定理一者相似,讀者可自爲之.

書二元方式f與ϕ成其分解因式後之形狀,而施以平直變換

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' \\ x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2', \end{cases}$$

則可得二新二元方式

$$(A_1''x_1' - A_1'x_2')(A_2''x_1' - A_2'x_2')\cdots\cdots(A_n''x_1' - A_n'x_2'),$$

$$(B_1''x_1' - B_1'x_2')(B_2''x_1' - B_2'x_2')\cdots\cdots(B_m''x_1' - B_m'x_2'),$$

式中
$$A_i'' = \alpha_i''c_{11} - \alpha_i'c_{21},\quad B_j'' = \beta_j''c_{11} - \beta_j'c_{21},$$

$$A_i' = -\alpha_i''c_{12} + \alpha_i'c_{22},\quad B_j' = -\beta_j''c_{12} + \beta_j'c_{22},$$

故
$$A_i''B_j' - A_i'B_j'' = c(\alpha_i''\beta_j' - \alpha_i'\beta_j''),$$

式中c乃變換(1)之行列式.

因平直變換(1),可視爲使諸α及諸β變爲諸A及諸B者,故由適所書之恆等式,可知$\alpha_i''\beta_j' - \alpha_i'\beta_j''$在某種意義下,可視爲1權不變式.然此式不能以諸$a$及諸$b$之有理式表出.如是之式,吾人稱之曰無理不變式(irrational invariant).

f與ϕ之消元式既爲mn個此種1權不變式之乘積,則易知消元式之本身,爲mn權之不變式.故由此吾人可得此理之一新證法,而與§82中所述者無關.

在一二元方式消元式之情形中,可應用與此相似之證法.

習題

依下之步驟以闡明二元四次方式

$$f(x_1, x_2)=a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4$$
$$=(a_1''x_1-a_1'x_2)(a_2''x_1-a_2'x_2)(a_3''x_1-a_3'x_2)(a_4''x_1-a_4'x_2)$$

之不變式之理論:

1. 首論2權無理不變式

$$A=(a_1''a_2'-a_1'a_2'')(a_3''a_4'-a_3'a_4''),$$
$$B=(a_1''a_3'-a_1'a_3'')(a_4''a_2'-a_4'a_2''),$$
$$C=(a_1''a_4'-a_1'a_4'')(a_2''a_3'-a_2'a_3''),$$

其和為零,而其負值之諸比乃(a_1', a_1''), (a_2', a_2''), (a_3', a_3''), (a_4', a_4'')四點之交比.

2. 次論其他之2權無理不變式

$$E_1=B-C,\quad E_2=C-A,\quad E_3=A-B;$$

并證明E_1, E_2, E_3之任一齊次對稱多項式,必為(a_i', a_i'')四點之二元對稱函數,因而為f之整有理不變式.

3. 在特例

$$G_2=E_1E_2+E_2E_3+E_3E_1,\quad G_3=E_1E_2E_3$$

乃二齊次整有理不變式,其權為4與6,而其次數乃2與3. 試證

$$G_2=-36g_2,\quad G_3=432g_3,$$

式中

$$g_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$
$$g_3=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3.$$

此g_2及g_3乃f之最簡單不變式.*

4. 試證f之判別式Δ可自公式

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2$$

得之.

---

*斯二者為不變式一種最先一例,而為揆力(Cayley)與布爾(Boole)在1845時所求得者.

5. 如$\Delta\neq 0$,則$g_3=0$乃$f=0$所表四點成調和列點之充要條件;而$g_2=0$乃其爲等交比點之充要條件,試證明之(參看§33後之第3題).

6. $g_2=g_3=0$乃f至少有一三重平直因式之充要條件,試證明之.*

7. 如λ爲一絕對無理不變式

$$\lambda=-\frac{A}{B},$$

即$f=0$所表各點之諸交比中之一,試證絕對有理不變式

$$I=\frac{g_2{}^3}{\Delta}$$

必可書作

$$I=\frac{4}{27}\,\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda-1)^2\lambda^2},$$

8. 二個四次二元方式之判別式均不爲零,則二者相合之充要條件,乃不變式I對此二方式具相同之值,試證明之.

9. 有二個四次二元方式其g_2與g_3均不爲零,此二式對於行列式爲$+1$之平直變換能相合之充要條件,乃g_2與g_3對此二方式之値爲相同,試證明之.

10. 如一個四次二元方式之判別式不爲零,則必可用行列式爲$+1$之平直變換,將其化爲模範式

$$4\,x_1{}^3x_2-g_2x_1x_2{}^3-g_3x_2{}^4,$$

試證明之.

11. 一個四次二元方式之任何整有理不變式,必爲g_2及g_3之一多項式,試證明之.

12. 試依適述對於單一四次方式之步驟,以闡明一對二元二次方式之不變式之理論.

13. 一對n元二次方式之任一整有理不變式,必爲§57中諸不變式$\Theta_0,\cdots\cdots\Theta_n$之一整有理函數,試證明之.

* 在此須注意軌跡$f=0$有一投影性質,而以二整有理不變式之爲零表之;參看§81之最後一段.

[提示:先示明如二次方式中諸係數之若干整有理函數不爲零,則必可得一行列式爲+1之平直變換,可化此對方式爲

$$\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\cdots\cdots+\alpha_nx_n^2,$$

$$\beta_1x_1^2+\beta_2x_2^2+\cdots\cdots+\beta_nx_n^2.$$

次再示明此對二次方式之任一整有理不變式,必可以(α_1, β_1), (α_2, β_2), $\cdots(\alpha_n, \beta_n)$之二元對稱函數表之,而諸$\Theta$實乃其初等二元對稱函數.]

第二十章

初等除式及諸λ方陣之相合

91 諸λ方陣及其初等變換. 初等除式(elementary divisors)之理論,爲西薇斯德(Sylvester),斯密斯(H. J. S. Smith)以及維也斯特拉斯(Weierstrass)所創尤以維氏之力爲多,但有若干重要部份,則爲克倫尼克(Kronecker),夫奴柏努斯(Frobenius),以及其他諸人所完成.本書所用之方法*,其目的在研究元素爲單獨變數λ之多項式之諸長方陣(吾人可設其爲方陣而不失普遍性).此等方陣,吾人稱爲λ方陣(λ-matrix)†.—λ方陣之行列式爲λ之多項式,且若此行列式恆等於零,吾人卽稱此方陣爲異λ方陣.所謂一λ方陣之秩者,卽此方陣中不恆等於零之最大行列式之級.

---

*於此之觀點有多種可能之重要變化.第一,吾人可取諸方陣之諸元素爲任意若干變數之多項式.第二,吾人限制諸多項式之諸係數在某一有理之數域內.第三,設諸多項式之諸係數爲整數,吾人可從數論方面推及本題.最簡單之情形卽爲方陣之諸元素本身爲整數;閱§91之習題2,§92之習題3,以及§94之習題2.

†一束二次方式之方陣,乃爲λ方陣重要之例,第二十二章將述普通理論對於λ方陣之應用.

吾人於此亦如在§19,應論及數種初等變換,其定義如下:

定義一. 所謂一λ方陣之初等變換者,即屬以下諸形式之任一變換:

(*a*) 兩行或兩列之調換.

(*b*) 以異於零之同一常數,遍乘一行(或一列)內所有各元素.

(*c*) 以同一λ多項式乘一行(或一列)內所有各元素所得之積,加於其他一行(或一列)內所有之各相當元素.

吾人若能以一初等變換,化第一方陣爲第二方陣,則顯見能用一初等變換,使第二方陣復返於第一方陣.由此即得下之定義:

定義二. 若能用初等變換有限次數化兩λ方陣中之一爲其他,則此兩方陣稱爲相合λ方陣.

吾人於此可見與一已知方陣爲相合之諸方陣互爲相合;且如在§19內所云兩相合之λ方陣常有同秩.

然一λ方陣之秩,非爲經過任何變換後,唯一不變者.欲明此理,吾人先述

引一. 若一λ方陣$\mathbf{a}$中所有之一切i級行列式,有一因式爲多項式$\phi(\lambda)$,從$\mathbf{a}$用初等變換化得之任何λ方陣內所有之i級行列式亦必有此因式.

若所用之變換,屬於定義一之(a)及(b)二條,此引題爲眞確,蓋此等變換對於 a 之諸 i 級行列式,除乘以異於零之常數外,無其他影響.若屬(c)條,吾人設爲以多項式$\psi(\lambda)$遍乘 q 列內之元素,再將所得之乘積加於 p 列內之相當各元素.a 內不含 p 列或兼含 p 及 q 兩列之任何 i 級行列式,自不受此種變換之影響.不含 q 列但含 p 列之 i 級行列式經過變換後可書如 $A\pm\psi(\lambda)B$ 之形,式中 A 及 B 爲 a 之 i 級行列式;故此引爲眞.

定理一. 若 a 及 b 爲秩爲 r 之兩相合λ方陣,且若 $D_i(\lambda)$ 爲 a 內諸 $i(i\leqq r)$ 級行列式之最大公約式,則亦爲 b 內諸 i 級行列式之最大公約式.

蓋據上引,$D_i(\lambda)$ 爲 b 內所有諸 i 級行列式之因式;且若此等諸行列式有較高次之因式,則此因式,據引中所云,亦必爲 a 內諸 i 級行列式之因式;此理與假設相反.

適所證明之定理,示明諸最大公約式 $D_1(\lambda),\cdots D_r(\lambda)$ 對於諸初等變換,均爲不變式,或更推廣言之,對於由有限次數初等變換所能組得之諸初等變換,亦爲不變式.實則此等諸式隨秩 r 而成一不變式全系.欲證此理,吾人茲往證示如何用諸初等變換,以化一λ方陣爲一簡單法式.

引二. 若一λ方陣之第一元素* $f(\lambda)$ 不恆等於零,且亦

* 所謂一方陣之第一元素者,即在左上角一元素也.

非爲其他所有諸元素之因式,則可得一相合方陣,使其中第一元素,次數低於f者而不恆等於零.

先設在第一行內有一元素$f_1(\lambda)$不能爲$f(\lambda)$除盡,并設j爲其所在之列.以f除f_1并命商爲q,餘數爲r,則有

$$f_1(\lambda)\equiv q(\lambda)f(\lambda)+r(\lambda).$$

於是若以$-q(\lambda)$遍乘第一列內各元素,再將所得之乘積加於j列內之相當各元素卽得一相合方陣,其中j列之第一元素爲次數低於$f(\lambda)$之一多項式$r(\lambda)$.吾人兹若調換第一列及j列,則得在吾人所論之情形之下,使此引爲眞確.

若在第一列內有一元素,不能爲λ除盡,則顯可用一相似之證明.

終設第一列及第一行內之各元素,均可爲$f(\lambda)$所除盡,但在i行及j列有一元素不能爲$f(\lambda)$所除盡.再設在第一行及第j列之元素爲$\psi(\lambda)f(\lambda)$,且以$-\psi(\lambda)$乘第一列內各元素而加其乘積於j列內各元素,卽得一相合方陣.在此方陣內,$f(\lambda)$仍在左上角,j列之第一元素爲零;i行之第一元素未變,故仍能爲$f(\lambda)$所除盡;但在i行j列之元素亦仍不能爲f所除盡.兹加j列之諸元素於第一列之相當各元素,得他一相合方陣.$f(\lambda)$仍在左上角,而i行之第一元素不能爲$f(\lambda)$所除盡.至是此種方陣屬於適所述之情形,卽第一列內有一元素不能爲$f(\lambda)$所除盡,故本引得以成立.

引三. 若有一諸元素不盡恆等於零之方陣,則可得一

相合方陣,有以下之三種性質者:

(a) 第一元素 $f(\lambda)$ 不恆等於零.

(b) 第一行及第一列內其他所有諸元素恆等於零.

(c) 不在第一行及第一列內之任何元素能爲 $f(\lambda)$ 所除盡.

蓋吾人可先調換行列,使異於零之元素,佔左上角之位置.若此元素非爲所有其他諸元素之因式,吾人可依引二得一相合方陣,使有異於零而次較低之第一元素.若此元素非爲其他所有諸元素之因式,吾人可依法重演.每步演算中,吾人均降低第一元素之次數,故經有限次演算以後,必可使其第一元素爲其他所有諸元素之因式,演算卽止於此.吾人遂能用 (c) 條(定義一)之諸變換化第一行及第一列內所有諸元素,除第一元素而外,爲零,其他所有諸元素仍均可爲第一元素所除盡,引論因得成立.

最後,須注意適所證得之引內,$f(\lambda)$ 爲變簡後之方陣內,所有其他諸元素之因式,故依定理一必爲原方陣內所有諸元素之最大公約式.

適所證得之引,示明一秩爲 $r>0$, 級爲 n 之λ方陣

$$(1)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{11},\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1},\cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

可用諸初等變換化為方式

$$
(2)\qquad \left\|\begin{matrix} f_1(\lambda) & 0\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & b_{11}\cdots\cdots\cdots b_{1,n-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & b_{n-1,1},\cdots b_{n-1,n-1} \end{matrix}\right\|,
$$

式中$f_1(\lambda)\neq 0$, 且$f_1(\lambda)$為所有諸b之因式. 前書之方陣必須以r為秩, 故$(n-1)$級之方陣

$$
(3)\qquad \left\|\begin{matrix} b_{11},\cdots\cdots b_{1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1,1}\cdots b_{n-1,n-1} \end{matrix}\right\|,
$$

以$r-1$為秩. 故若$r>1$可用諸初等變換化(3)為方式

$$
(4)\qquad \left\|\begin{matrix} f_2(\lambda) & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & c_{11}\cdots\cdots c_{1,n-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & c_{n-2,1}\quad c_{n-2,n-2} \end{matrix}\right\|,
$$

式中$f_2(\lambda)\neq 0$, 且$f_2(\lambda)$為所有諸c之因式. 依定理一, 知(4)中所有諸元素之最大公約式$f_2(\lambda)$, 亦必為所有諸b之最大公約式,故能為$f_1(\lambda)$所除盡.

茲須鄭重注意變(3)為(4)之諸初等變換, 可視為(2)之

諸初等變換,而保持此方陣之第一行及第一列不變者.由此連續用此種初等變換,吾人已化(1)爲方式

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & c_{11}\cdots\cdots c_{1,n-2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & c_{n-2,1}\cdots c_{n-2,n-2} \end{Vmatrix},$$

式中f_1及f_2均不恆等於零,f_1爲f_2之因式,f_2爲所有諸c之因式.

若$r>2$,吾人可以同法施於諸c所成之$n-2$級行列式其秩顯爲$r-2$者.如此逐漸推演,終化方陣(1)成方式

$$(6)\qquad \begin{Vmatrix} f_1(\lambda) & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & f_2(\lambda)\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots f_r(\lambda) & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \end{Vmatrix},$$

式中諸f均不恆等於零,且各爲在後一式之因式.

至此吾人已用之初等變換,僅屬定義一之(a)及(c)二

條.用(b)條之變換,吾人更可化簡各多項式$f_i(\lambda)$,使其中最高次數之λ之係數爲一.由此吾人證得下之定理:

定理二. 任何以r爲秩以n爲級之λ方陣,可用諸初等變換,化爲法式.

$$(7)\qquad \left\|\begin{array}{cccc} E_1(\lambda) & 0\cdots\cdots0 & & 0\cdots\cdots0 \\ 0 & E_2(\lambda)\cdots0 & & 0\cdots\cdots0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & E_r(\lambda) & 0\cdots\cdots0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots0 & & 0\cdots\cdots0 \end{array}\right\|,$$

式中各多項式$E_i(\lambda)$內最高次λ之係數爲一,且$E_i(\lambda)$爲$E_{i+1}(\lambda)$之因式,對$i=1,2,\cdots r-1$時均合.

依定理一,原方陣之諸i級行列式$(i\leqq r)$之最大公約式,與由此方陣化得之法式(7)內之諸i級行列式之最大公約式相同.在(7)內諸i級行列式,除值爲i個E之乘積者外,餘者皆爲恆等於零.命

$$(8)\qquad E_{k_1}(\lambda)\,E_{k_2}(\lambda)\cdots E_{k_i}(\lambda)$$

爲如此乘積之一,并設$k_1, k_2,\cdots k_i$諸整數依大小順序排列.顯有$k_1\geqq1$, $k_2\geqq2,\cdots k_i\geqq i$.故$E_1$爲$E_{k_1}$之因式,$E_2$爲$E_{k_2}$之因式,等等.如是顯見

$$E_1(\lambda)\,E_2(\lambda)\cdots\cdots E_i(\lambda)$$

爲(8)之因式，且本身亦爲(7)中一i級行列式，故爲(7)之諸i級行列式之最大公約式，卽得

定理三. 若$i\leqq r$，則一秩爲r之λ方陣中，諸i級行列式之最大公約式爲

$$D_i(\lambda)\equiv E_1(\lambda)\ E_2(\lambda)\cdots\cdots E_i(\lambda),$$

式中諸E乃爲與已知方陣相合之法式(7)中諸元素.

在此應注意定此最大公約式時，應使其中λ最高次項之係數爲一.

至是吾人可論下之基本定理：

定理四. 兩n次λ方陣相合之充要條件，乃此兩方陣，同以r爲秩，且任i爲自1至r之一值，一方陣中諸i級行列式，與他一方陣中諸i級行列式，有相同之最大公約式.

謂此爲必要條件，卽重述定理一也. 欲證其爲充要條件，先設兩方陣同化爲法式(7)，對第二方陣化得之法式內諸E，加重音符號以示區別. 若定理中之諸條件均能適合，則依定理三，有

$$E'_1(\lambda)\equiv E_1(\lambda),$$

$$E'_1(\lambda)E'_2(\lambda)\equiv E_1(\lambda)E_2(\lambda),$$

$$E'_1(\lambda)E'_2(\lambda)E'_3(\lambda)\equiv E_1(\lambda)E_2(\lambda)E_3(\lambda),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

且因諸E均不恆等於零,故得

$$E'_i(\lambda)\equiv E_i(\lambda) \qquad (i=1,2,\cdots r).$$

由此即知此兩方陣化得之兩方陣為恆等,且因兩方陣同與第三方陣相合,亦互為相合,故此兩方陣為相合.

習題

1. 用初等變換化方陣

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{Vmatrix}$$

成為定理二之法式.

先直接求 $D_i(\lambda)$ 之最大公約式,再由法式求最大公約式以核驗此結果.

2. 所有各元素均為整數之一方陣,其初等變換云者,乃指合於下列任一形式之變換:

(a) 兩行或兩列之互換.

(b) 一列或一行內所有各元素之改號.

(c) 以同一整數乘一行(或一列)內所有各元素,再以所得之乘積加於其他一行(或一列)內之相當各元素.

以此定義為起點,依據此節論λ方陣之步驟,推展諸元素均為整數之方陣之理論.

92. 不變因式及初等除式. 為多數情形中便利起見,茲引入另一種不變式以代前節之不變式 $D_i(\lambda)$,此種不變式,特名為不變因式(invariant factors).吾人先就§91之定理三立得下述之定理,以作此等不變式定義之基礎.

定理一. 一λ方陣以秩爲r,其中諸i級行列式$(i=1,2,3,\cdots r)$之最大公約式,可爲此方陣中諸$(i-1)$級行列式之最大公約式所除盡.

定義一. 若λ方陣之秩爲r,而

$$D_i(\lambda) \qquad (i=1,2,\cdots r)$$

爲其中諸i級行列式之最大公約式,定此等最大公約式時,使最高次λ之係數爲一;且若$D_0(\lambda)\equiv 1$;則多項式

$$(1) \qquad E_i(\lambda)\equiv\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} \qquad (i=1,2,\cdots r)$$

稱爲**a**之i次不變因式(ith invariant factor).

此定義示明諸E確爲不變式,因由§91已證爲不變式之諸D可完全決定諸E也.更將關係式(1)中前i式連乘,卽得公式

$$(2) \qquad D_i(\lambda)\equiv E_1(\lambda)E_2(\lambda)\cdots E_i(\lambda) \qquad (i=1,2,\cdots r).$$

此式表示諸E完全決定諸D,且在§91已見諸D及方陣之秩成一不變式全系,故於諸E亦然.如是得

定理二. 兩λ方陣爲相合之充要條件,乃此兩方陣有相同之秩,* 及一方陣內諸不變因式,各與其他一方陣內之相當不變因式恆等.

因對於非異n次方陣而言,$D_n(\lambda)$與此方陣之行列式所異者,僅在一常數因式,於此易見除一常數因式而外,此方

* 若已知諸E之級,則此條件常不需要.　德譯本註.

陣之行列式即爲所有諸不變式之乘積.此爲極重要之一種情形,不變因式之命名即因諸E爲此時方陣之行列式中諸因式也.

從§91之定理三即明諸不變因式乃在§91定理二內法式中之諸多項式E_i;且因在此法式內,各E爲其後者之一因式,因得重要結論如下:

定理三. 若$E_1(\lambda),\cdots E_r(\lambda)$爲一秩爲$r$之$\lambda$方陣中諸相續不變因式,則諸$E$各爲其後者之因式.

此定理示吾人僅須依升次冪排列一λ方陣中諸不變因式,即得一相當次序,其中同此之兩E,必須恆等.

諸不變因式(如前節之諸D)可稱爲λ方陣之有理(rational)不變式,因此諸因式乃由λ方陣諸元素經過§91中諸初等變換之諸有理手續而得者,而此初等變換僅包含加減乘除等諸有理計算也.維也斯特拉斯最先介紹之諸初等除式(elementary divisors)每爲無理不變式與此等有理不變式不同.*吾人今將進立此等定義.

*德國著作家,宗夫努柏奴斯(Frobenius)之法,對此兩種不變式概稱爲初等除式之名詞.此法微有混淆,而應加以形容詞,如對於維也斯特拉斯原定之初等除式可稱爲簡單初等除式(simple elementary divisors)對於E則可稱爲合成初等除式(composite elementary divisors).在另一方面,布倫尉契(Bromwich)(見Quadratic Forms and their Classification by Means of Invariant-factors,1906年在英國牛津出版)建議以不變因式(invariant factor)一名詞替代初等除式(elementary divisor).但後一名詞已供另用,故在英文中亦應如在德文中,保留維也斯拉特斯初用此名詞時之義,如此似較明晰.

定義二. 若a為r秩之一λ方陣,且$D_r(\lambda)$為a之行列式中諸i級行列式之最大公約式,則$D_r(\lambda)$之諸平直因式

$$\lambda-\alpha,\ \lambda-\alpha',\ \lambda-\alpha'',\cdots\cdots$$

為a之諸平直因式.*

因依公式(2),$D_r(\lambda)$為a之所有諸因式之乘積,故易見各不變因式,即為a中諸平直因式正整數冪或零冪之乘積.故吾人可立下之定義:

定義三. 命a為一r秩之λ方陣,且

$$\lambda-\alpha_1,\ \lambda-\alpha',\ \lambda-\alpha'',\cdots\cdots$$

為其相異諸平直因式.若

$$E_i(\lambda)\equiv(\lambda-\alpha)^{e_i}(\lambda-\alpha')^{e'_i}(\lambda-\alpha'')^{e''_i}\cdots\cdots\quad(i=1,2,\cdots r)$$

為a之諸不變因式,則諸因式如

$$(\lambda-\alpha)^{e_1},\ (\lambda-\alpha)^{e_2},\cdots\cdots(\lambda-\alpha)^{e_r},$$

$$(\lambda-\alpha')^{e'_1}\ (\lambda-\alpha')^{e'_2}\cdots\cdots(\lambda-\alpha')^{e'_r},$$

$$(\lambda-\alpha'')^{e''_1}(\lambda-\alpha'')^{e''_2}\cdots\cdots(\lambda-\alpha'')^{e''_r},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而非僅為常數者,稱為a之初等除式,且各平直因式與其冪

---

*若a為非異方陣,則可見a中諸平直因式即為a之行列式中諸平直因式.

所成之初等除式*稱爲相當.

諸不變因式既可完全決定諸初等除式,反之亦眞,故易見諸初等除式不僅爲不變式,且與秩合成一不變式全系.即

定理四. 兩λ方陣爲相合之充要條件,乃此兩方陣有相同之秩,且一方陣中諸初等除式各與他一中諸相當初等除式恆等.

用定理三吾人推得下之重要結果:

定理五. 與任一某平直因式相當之諸初等除式之次e_i適合於

$$e_i \geqq e_{i-1} \qquad (i=2, 3, \cdots\cdots r)$$

諸不等式.依此定理吾人只須注意諸初等除式之次數,卽可將與任一已知因式相當之諸初等除式,排成一定序.

習題

1. 若$\phi=0,\psi=0$爲兩錐線,而後者爲非異錐線,試示明$\phi-\lambda\psi=0$一束錐線內諸異錐線之數及種類,如何賴二次方式$\phi-\lambda\psi$之方陣中諸初等除式之

---

*適所立之定義,可見與下一定義相當,在此定義中不用不變因式之觀念.

定義. 設$\lambda-\alpha$爲r秩之一λ方陣中平直因式,并設l_i爲**a**之所有諸i $(i\leqq r)$級行列式中因式$\lambda-\alpha$最高冪之指數.若諸整數e_i(必須爲零或爲正數).由

$$e_i=l_i-l_{i-1} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots r)$$

諸式確定,則 $(\lambda-\alpha)^{e_1}, (\lambda-\alpha)^{e_2}, \cdots\cdots (\lambda-\alpha)^{e_r}$

等式,不僅爲常數者,稱爲**a**中與平直因式$\lambda-\alpha$相當之初等除式.

性質以決定.

2. 推廣習題一至三度空間之情形.

3. 將本節所討論各點,應用於元素為整數之諸方陣(參閱§91之第2題).

93. 不變因式及初等除式之實際決定法. 一特殊λ方陣中不變因式之決定,最便易通用之法乃用初等變換化此方陣成§91中定理二之法式,化約之步驟,亦如證明該定理所用者.從此法式,即可求得諸不變因式,且從此等諸不變因式,可計算初等除式,但在普遍情形中,須解若干次數稍高之方程式方可得之.

然在若干重要情形中,則可用他法求諸初等除式,較為簡易.其最顯而易見之法,即將初等除式之定義直接應用於所論之情形.今舉一例,即取一n次之方陣,其中主角線上所有元素均為$\alpha-\lambda$,且除適在主角線中元素之右鄰或上方者為異於零之常數而外,其餘所有元素,均為零:

$$(1)\qquad \left\|\begin{matrix} \alpha-\lambda & c_1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & c_2\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\alpha-\lambda & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \quad\quad 0 & \alpha-\lambda \end{matrix}\right\| \qquad (c_1c_2\cdots c_{n-1}\neq 0).$$

此方陣之行列式為$(\alpha-\lambda)^n$.除去第一行及最後一列所得之行列式為$c_1c_2\cdots c_{n-1}$.於是

$$D_n(\lambda)\equiv(\lambda-\alpha)^n,\quad D_{n-1}(\lambda)\equiv 1,\quad E_n(\lambda)\equiv(\lambda-\alpha)^n.$$

由此可見$(\lambda-\alpha)^n$爲此方陣之惟一初等除式,不變因式則爲$(\lambda-\alpha)^n$及$(n-1)$個1.

此直接方法,有時與初等除式之化法幷用,更爲有利.可參閱此節末後之習題1.

在特別情形中,更可藉下之定理得初等除式之求法,此定理之證明頗易,故留讀者自解:

定理一. 若一λ方陣中所有不在主角線上之諸元素均爲零,且若主角線上非爲常數之各元素,可分解成爲諸相異平直因式之形,如$\lambda-\alpha$, $\lambda-\alpha'$,....者之冪之乘積,則此等平直因式之冪,爲此方陣之諸初等除式.

定理二. 若一λ方陣中,除在若干各不相含之主子式內諸元素外,餘諸元素均爲零,則可從此等主子式之諸初等除式而得此方陣之諸初等除式.

證明此定理時,只須用若干初等變換,化已知方陣成定理一內所言之形式,而各初等變換,可視爲關於題中各主子式所作之初等變換.

在此須注意若以初等除式(elementary divisors)數字代不變因式(invariant factors),則此定理不復成立;關於此點,可參閱下之習題3.但若已知諸初等除式,則諸不變因式,可從之推算而得.

習　題

1. 方陣

$$\left\|\begin{array}{ccc:ccc} \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 1 & 0 & \lambda-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \end{array}\right\|,$$

與

$$\left\|\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-\alpha)^2+\beta^2 \end{array}\right\|$$

爲相合，且其諸初等除式爲

$$[\lambda-(\alpha+\beta i)]^3, \qquad [\lambda-(\alpha-\beta i)]^3,$$

試證明之.

2. 推廣習題1至次數爲 $2n$ 之諸方陣.

3. 求方陣

$$\left\|\begin{array}{cccc} \lambda^2(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right\|$$

之 (a) 諸初等除式 (b) 諸不等因式.

4. 定方陣

$$\begin{Vmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3(\lambda+2) & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3(\lambda-1) & 1-\lambda & 2(\lambda-1) & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

之諸不變因式及諸初等除式.

此方陣與§91末之習題中方陣爲相合否?

5. 試定便利之一有理運算,以便計算定理一及定理二內所述各種方陣之諸不變因式.

94. 相合λ方陣之第二定義. 至此吾人所用λ方陣相合之定義,基於初等變換.此等變換之特性,對於是種定義,殊多不便.吾人茲與一新定義,并證其與舊定義脗合.

定義. 有二n行λ方陣$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,如更有二非異n行λ方陣$\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$存在,其行列式對λ爲獨立,且使

$$(1) \qquad \mathbf{b} \equiv \mathbf{cad}^*,$$

則$\mathbf{a}$與$\mathbf{b}$稱爲相合方陣.

因據假設,方陣$\mathbf{c}$及$\mathbf{d}$之行列式爲常數,且逆方陣$\mathbf{c}^{-1}$及$\mathbf{d}^{-1}$亦將爲λ方陣,但非如一般情形時,λ方陣之逆式中諸元素爲λ之有理分數式.故若書(1)如下形

$$(2) \qquad \mathbf{a} \equiv \mathbf{c}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{d}^{-1},$$

則易見由定義所定方陣$\mathbf{a}$及$\mathbf{b}$之關係爲可逆者,一如在此

*此處及以後,如用符號≡聯接於兩λ方陣,卽示一方陣之任一元素與其他一方陣內之相當元素恆等.

定義中措詞所云.

欲證實適述之定義,吾人先樹立下

引. 若 a 及 b 爲 n 次 λ 方陣,且多項式 $\phi(\lambda)$ 爲 a 之所有 i 次行列式之因式,則亦爲 ab 及 ba 中所有 i 次行列式之因式.

因據 §25 之定理五, ab 及 ba 中任一 i 次行列式,皆由 a 中若干次 i 次行列式作平直齊次之結合而得.

定理一. 若 a 及 b 依本節之定義,爲相合方陣,則依 §91 之定義,亦爲相合方陣.

因在此情形,有兩非異 λ 方陣 c 及 d 存在,能適合 (1) 式,且其行列式爲常數.故依 §25* 之定理七 a 及 b 之秩同爲 r. 命 $D_i(\lambda)$ 爲 $i \leqq r$ 時, a 中諸 i 次行列式之最大公約式.依適述之引, $D_i(\lambda)$ 爲 ca 中之 i 次行列式之因式,故再據上引,亦爲 cad 中 i 次行列式之因式,亦卽爲 b 中 i 次行列式之因式.

吾人更能推得 $D_i(\lambda)$ 爲 b 中 i 次行列式之最大公約式.蓋將適所言之理施於關係式 (2),可見 b 中 i 次行列式之最大公約式爲 a 中 i 次行列式之最大公約式.故不能較 $D_i(\lambda)$ 之次爲高.

至是按 §91 中定理四,卽示明依該節之定義, a 及 b 爲相合方陣.

---

* 吾人何以能應用此定理於λ方陣?

定理二. 若依§91之定義,a及b爲相合,則依本節定義,此兩方陣亦爲相合.

吾人首先示明若用一初等變換,可化一方陣 a 爲方陣 a_1,則以下諸關係式,必有一成立:

$$a_1 \equiv ca, \text{ 或 } a_1 \equiv ad, \tag{3}$$

式中c及d爲非異方陣,其行列式對於λ爲獨立.欲證此理,吾人順次注意§91之定義1內稱爲(a),(b),(c)之各種初等變換.

(a) 設調換 p 列及 q 列.則在么方陣

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 \end{Vmatrix}$$

中調換 p 列及 q 列可得c,如此作成ca,則得上之變換.同理,如調換a中 p 行及 q 行之變換,可由ac得之,c之意義仍同上述.

在此各種情形中,因c中諸元素爲常數,行列式爲 -1,故c可視爲以常數爲行列式之λ方陣.

(b) 如欲以常數 k 乘a之 p 行,吾人可作乘積ca,內中c與么方陣所異者,僅以 k 代任主角線內之第 p 個元素之1.

同理,以 k 乘a之 p 行之變換,可作乘積ac得之,內中c之意義如上.

取k爲異於零之常數，c可視爲以常數爲行列式之λ方陣.

(c)如欲以$\phi(\lambda)$乘a之q行再加所得之乘積於p行，吾人可作乘積ca，c與么方陣所異者，僅以$\phi(\lambda)$代在p列q行處爲零之元素.

同理，照上述c之意義，而作ac，卽得以$\phi(\lambda)$乘p行加乘積於q行之結果.

方陣c以1爲行列式，故爲非異λ方陣.

至此已證明如二λ方陣間，有關係式(3)聯絡之，則可用一初等變換，由其一求得其他，據此可知如兩方陣a及b依§91之定義爲相合，則必須適合下形之關係式：

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{c}_p \mathbf{c}_{p-1} \cdots \mathbf{c}_1 \mathbf{a} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \cdots \mathbf{d}_q,$$

式中諸c及諸d各爲以常數爲行列式之λ方陣，此常數行列式與化a爲b時，所用各初等變換相當.此最後之關係卽爲

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{cad},$$

內中c及d爲以常數爲行列式之非異方陣，故定理得以證明.

現已完全證明相合λ方陣之兩定義相脗合.

習　題

1. 若a爲§91中習題1之方陣，b在§91中定理二內該方陣之法式，決定兩方陣c及d，使關係式(1)成立.

示明c及d之行列式爲常數，以檢驗所得之結果.

2. 將此節之討論，施於元素爲整數之各方陣. 參閱§91中習題2及§92中習題3.

95. λ方陣之乘除. 今將前所論者，稍加推展，以作此章之結束. 在此所述者，可謂爲λ方陣之初等代數學.

定義. 所謂一λ方陣之次者，卽其任一元素中所含λ之最高次.

一k次λ方陣在i行j列之元素可書如

$$a_{ij}\lambda^k+a'_{ij}\lambda^{k-1}+\cdots\cdots+a_{ij}^{[k]},$$

而λ^k之諸係數至少有一(卽諸a_{ij}之一)異於零. 若一方陣中，在i行及j列元素爲$a^{[p]}_{ij}$，則以$\mathbf{a}_p$表之，卽得定理，

定理一. 任一k次之λ方陣可書如方式

$$(1)\qquad \mathbf{a}_0\lambda^k+\mathbf{a}_1\lambda^{k-1}+\cdots\cdots+\mathbf{a}_k \qquad (\mathbf{a}_0\neq 0),$$

式中$\mathbf{a}_0,\cdots\mathbf{a}_k$爲以常數爲元素之方陣；反之，一切呈(1)形之式，均爲k次之λ方陣.

定理二. 兩λ方陣次數各爲k及l，如

$$\mathbf{a}_0\lambda^k+\mathbf{a}_1\lambda^{k-1}+\cdots\cdots+\mathbf{a}_k \qquad (\mathbf{a}_0\neq 0),$$

$$\mathbf{b}_0\lambda^l+\mathbf{b}_1\lambda^{l-1}+\cdots\cdots+\mathbf{b}_l \qquad (\mathbf{b}_0\neq 0)$$

者，其乘積爲$k+l$次之一λ方陣，但$\mathbf{a}_0$及$\mathbf{b}_0$二者中，至少有一爲非異方陣.

因此乘積爲一λ方陣，其形如

$$\mathbf{c}_0\lambda^{k+l}+\mathbf{c}_1\lambda^{k+l-1}+\cdots\cdots+\mathbf{c}_{k+l}$$

內中$\mathbf{c}_0$之值爲$\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$或$\mathbf{b}_0\mathbf{a}_0$，視兩已知方陣相乘之次序而決

定.若a_0及b_0有一爲非異方陣,則依§25之定理七,a_0b_0及b_0a_0均異於零.

下之定理與所謂λ方陣之除法有關.

定理三. 若a及b爲兩λ方陣,且若b書如(1)之形式時,以一非異方陣爲λ最高次冪之係數,則有且僅有一對λ方陣q_1及r_1存在,使關係式

$$a\equiv q_1b+r_1$$

成立,式中或$r_1\equiv 0$,或r_1爲次數低於b者之一λ方陣;又有且僅有一對λ方陣q_2及r_2存在,使關係式

$$a\equiv bq_2+r_2$$

成立,式中或$r_2\equiv 0$或r_2爲次數較低於b者之一λ方陣.

此定理之證明,實與§63中定理一之證明全同.

習　題

定義. 所謂一實方陣者,即諸元素爲實數之一方陣;所謂一實λ方陣者,即諸元素爲λ之實多項式之一方陣;又所謂一實初等變換者,即於§91之定義一內(*b*)中之常數及(*c*)中之多項式,均爲一實値之初等變換也.

若方陣λ方陣及初等變換諸詞,各指實方陣,實λ方陣及實初等變換而言,則此章中諸結果,均仍能成立,試證明之.

第二十一章

數對二組元一次方式及直射變換之相合及分類

96. 數對方陣之相合. 此章及下章論及諸初等除式理論之應用,所涉問題中,僅間接含有λ方陣.主要問題乃爲一對二組元一次方式之理論.此兩方之方陣 a 及 b, 以常數爲元素,且吾人所研究之λ方陣,僅爲從兩已知方式所定一束方式之方陣 $a-\lambda b$. 在此應注意此方陣爲一次,事實上從此以後吾人將專論一次λ方陣.

在一方面,問題雖較簡單,但從以上所論觀之,又見有一種新困難發生.吾人將使二組元一次方式內兩組變數,經過兩非異平直變換.而此等變換中諸係數爲常數,換言之,與λ爲獨立.此等諸變換之結果,即爲以常數元素(參閱 §36) 之某種非異變換乘λ方陣 $a-\lambda b$, 故依 §94 之理,得化此λ方陣爲另一相合λ方陣,後者顯爲一次. §94 之諸變換,遠較適所論及之諸變換爲普遍,故與一已知λ方陣相合之任一一次λ方陣,是否均可由適述之諸變換化得,未能遽決.

由上所論,可明瞭下述定理之重要:

定理一. 若 a_1, a_2, b_1, b_2 爲常數元素之方陣,後兩者爲非異方陣,且若兩一次 λ 方陣.

$$m_1 \equiv a_1 - \lambda b_1, \quad m_2 \equiv a_2 - \lambda b_2$$

爲相合,則必有兩非異方陣 p 及 q 存在,其中諸元素對 λ 爲獨立,且使

$$(1) \qquad m_2 \equiv p\, m_1 q.$$

因 m_1 及 m_2 相合,故有兩非異 λ 方陣, p_0 及 q_0 存在,其行列式爲常數,且使

$$(2) \qquad m_2 \equiv p_0 m_1 q_0.$$

故方陣 q_0 有逆式 q_0^{-1} 亦爲一 λ 方陣.

依 § 95 之定理三,以 m_2, 除 p_0, 以 m_1 除 q_0^{-1}, 如此以求得諸方陣 p_1, p, s_1, s, 使關係式

$$(3) \qquad p_0 \equiv m_2 p_1 + p, \quad q_0^{-1} \equiv s_1 m_1 + s$$

成立,其中 p 及 s 兩方陣內諸元素對 λ 爲獨立.從(2)得

$$p_0 m_1 \equiv m_2 q_0^{-1}$$

以(3)代入此處,即有

$$m_2 p_1 m_1 + p m_1 \equiv m_2 s_1 m_1 + m_2 s,$$

或

$$(4) \qquad m_2(p_1 - s_1) m_1 \equiv m_2 s - p m_1$$

從此恆等式,吾人推得 $p_1 \equiv s_1$, 故有

$$(5) \qquad m_2 s \equiv p m_1$$

蓋若 $p_1 - s_1$ 不恆等於零, $m_2(p_1 - s_1)$ 必爲一 λ 方陣,且至

少爲一次(參閱§95之定理二),從此可知(4)之左邊亦必爲一λ方陣,而至少爲二次.但此爲不可能,蓋(4)之右邊爲一λ方陣,至多只能爲一次也.

若吾人已知p及s同爲非異方陣,即可從(5)推知本定理爲眞;蓋吾人可書(5)如形式

$$(6)\qquad m_2 \equiv p m_1 s^{-1}$$

且p及s^{-1}必爲常數元素之非異方陣.再從(5)吾人可見p及s同爲異方陣,或同爲非異方陣.若吾人能證s爲非異方陣,定理即得由此證明.

爲欲達此目的計,吾人自(3)得q_0^{-1}之值,代入恆等式

$$I \equiv q_0 q_0^{-1},$$

$$(7)\qquad I \equiv q_0 s_1 m_1 + q_0 s.$$

今依§95之定理三以m_2除q_0,爲此可得

$$(8)\qquad q_0 \equiv q_1 m_2 + q,$$

式中q爲常數元素之一方陣.

將此值代入(7),即有

$$I \equiv q_0 s_1 m_1 + q_1 m_2 s + q s.$$

再就(5),即見此式可書如

$$(9)\qquad I - q s \equiv (q_0 s_1 + q_1 p) m_1.$$

由是可推知$q_0 s_1 + q_1 p$必須恆等於零,故有

$$(10)\qquad I = q s.$$

因若$q_0 s_1 + q_1 p$不恆等於零,(9)之右邊必爲一λ方陣,至

少爲一次，但(9)式之左邊則又不含 λ.

方程式(10)示明 s 爲非異方陣，定理由此得以證明.該方程式又示明 q 爲非異方陣，且 $q=s^{-1}$，故方程式(6)變爲

$$m_2 \equiv p m_1 q.$$

故吾人可加下

系. 依公式

$$p_0 \equiv m_2 p_1 + p, \quad q_0 \equiv q_1 m_2 + q$$

之關係，以 m_2 除(2)中之 p_0 及 q_0 所得餘數，即前定理所云存在之兩方陣 p 及 q.

從此關於一次 λ 方陣之定理吾人可推得下列關於數對常數元素之方陣之定理.吾人將述及之初等除式應用，其主要基礎，即建於此定理上.

設 a_1, b_1 及 a_2, b_2 二對方陣，元素均爲常數，若有兩非異方陣 p 及 q 存在，使

$$a_2 = p a_1 q, \quad b_2 = p b_1 q \tag{11}$$

成立，則吾人自可謂此兩對方陣爲相合.

定理二. 若 a_1, b_1 及 a_2, b_2 爲兩對與 λ 獨立之方陣，且若 b_1 及 b_2 爲非異方陣，則此兩對方陣爲相合之充要條件，乃 λ 方陣

$$m_1 \equiv a_1 - \lambda b_1, \quad m_2 \equiv a_2 - \lambda b_2$$

有相同之不變因式——或謂爲有相同之初等除式，亦無不可

蓋若諸對方陣爲相合,則方程式(11)能成立;是以用λ乘第二方程式,而從第一方程式減去之,則得由

$$\mathbf{m}_2 \equiv \mathbf{p}\mathbf{m}_1\mathbf{q}, \tag{12}$$

卽λ方陣 $\mathbf{m}_1$ 及 $\mathbf{m}_2$ 爲相合,故有相同之不變因式,亦卽有相同之初等除式.在他一方面言之,依 $\mathbf{b}_1$ 及 $\mathbf{b}_2$ 爲非異方陣之假設,立卽可知 $\mathbf{m}_1$ 及 $\mathbf{m}_2$ 爲非異方陣,故有相同之秩.故若 $\mathbf{m}_1$ 及 $\mathbf{m}_2$ 有相同之不變因式,或相同之初等除式,兩者卽爲相合.因此兩方陣,同爲一次,故依定理一必有元素對λ獨立之兩非異方陣 $\mathbf{p}$ 及 $\mathbf{q}$ 存在,能滿足恆等式(12).從此恆等式,立得兩方程式(11);而兩對方陣爲相合,定理至此遂得完全證明.

$\mathbf{b}_1$ 及 $\mathbf{b}_2$ 兩方陣同化爲么方陣 $\mathbf{I}$ 之情形較爲重要.在此情形中,$\mathbf{m}_1$ 及 $\mathbf{m}_2$ 各化爲所謂 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 之範方陣(characteristic matrices),其定義如下:

定義. 若 $\mathbf{a}$ 爲一常數元素之 n 級方陣,且 $\mathbf{I}$ 爲 n 級之么方陣,則λ方陣

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{a} - \lambda \mathbf{I}$$

稱爲 $\mathbf{a}$ 之範方陣;$\mathbf{A}$ 之行列式稱爲 $\mathbf{a}$ 之範函數(characteristic function);使此行列式等於零所得之λ n 次方程式,稱爲 $\mathbf{a}$ 之範方程式.

吾人今可從定理二推得下之特殊結果:

定理三. 若 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 爲與λ獨立之兩方陣,如欲有一非

異方陣 p 存在,且使*

$$\mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{p}\mathbf{a}_1\mathbf{p}^{-1}, \tag{13}$$

其充要條件,乃 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ 之範方陣 $\mathbf{A}_1$ 及 $\mathbf{A}_2$ 有相同之不變因式——或謂爲有相同之初等除式,亦無不可.

蓋若 $\mathbf{A}_1$ 及 $\mathbf{A}_2$ 有相同之不變因式(或初等除式),則據定理二知有兩非異方陣 p 及 q 存在,使

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{p}\mathbf{a}_1\mathbf{q}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{p}\mathbf{I}\mathbf{q}.$$

第二方程式亦明吾人 $\mathbf{q} = \mathbf{p}^{-1}$; 將此值代入第一式易見 p 卽爲定理中所云存在之方陣.

在他一方面言之,若方程式(13)得以滿足,立可證明 $\mathbf{A}_1$ 及 $\mathbf{A}_2$ 有相同之不變因式及初等除式.

97. 諸對二組元一次方式之互換. 設吾人有一對含 $2n$ 變數之二組元一次方式

$$\phi_1 \equiv \sum_1^n a'_{ij} x_i y_j, \quad \psi_1 \equiv \sum_1^n b'_{ij} x_i y_j,$$

又有第二對

$$\phi_2 \equiv \sum_1^n a''_{ij} x_i y_j, \quad \psi_2 \equiv \sum_1^n b''_{ij} x_i y_j,$$

幷設 ψ_1 及 ψ_2 爲非異方陣. 吾人將研求在何種條件之下,此兩對方式爲相合,卽在何種條件之下,能先後得諸 x 及諸 y

* 有(13)式關係之兩方陣,有時稱爲相似(similar). 此種相似之觀念,顯見僅爲 §29 中所立之普遍觀念"相合"之特別情形,於此所用諸變換,乃(13)式,以代本章及下章常用較普遍之形式.

之兩非異平直變換，如

$$\mathbf{c}\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + \cdots + c_{1n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{\ 1}x'_1 + \cdots + {}_{nn}x'_n \end{cases}$$

$$\mathbf{d}\begin{cases} y_1 = d_{11}y'_1 + \cdots + d_{1n}y'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = d_{n1}y'_1 + \cdots + d_{nn}y'_n \end{cases}$$

者合之可化 ϕ_1 成 ϕ_2, ψ_1 成 ψ_2.

若吾人以 $\mathbf{c}'$ 代表 $\mathbf{c}$ 之共軛方陣．并各以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ 代表 $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2$, 之方陣，則依 §36 之定理一，可知兩變換 $\mathbf{c}$ 及 $\mathbf{d}$ 各化 ϕ_1 及 ψ_1 所成之方式，以

$$\mathbf{c}\mathbf{a}_1\mathbf{d}, \qquad \mathbf{c}'\mathbf{b}_1\mathbf{d}$$

爲方陣；故若此二者爲方式及 ϕ_2 有 ψ_2, 卽有

(1) $$\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}'\mathbf{a}_1\mathbf{d}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}'\mathbf{b}_1\mathbf{d}.$$

由是據 §96 之定理二，知兩 λ 方陣

$$\mathbf{a}_1 - \lambda\,\mathbf{b}_1, \qquad \mathbf{a}_2 - \lambda\,\mathbf{b}_2$$

有相同之不變因式，及相同之初等除式.

反之，使同一之定理，若此兩 λ 方陣有相同之不變因式(或初等除式)，則有兩常數方陣 $\mathbf{c}'$ 及 $\mathbf{d}$ 存在，能滿足(1)之兩方程式；由此則有諸 x 之平直變換及諸 y 之平直變換存在，

合此兩變換可化 ϕ_1 爲 ϕ_2 及 ψ_1 爲 ψ_2. 從此吾人已證得

定理. 若 ϕ_1, ψ_1 及 ϕ_1, ψ_2 爲兩對含 $2n$ 變數之二組元一次方式,其中 ψ_1 及 ψ_2 爲非異方陣,此兩對方式爲相合之充要條件,乃兩束方陣

$$\phi_1-\lambda\psi_1, \qquad \phi_2-\lambda\psi_2$$

中諸方陣有相同之不變因式——或謂爲有相同之初等除式,* 亦無不可.

習　題

若諸二組元一次方式 $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2$ 爲實方式,且相合之義即謂對於實非異平直變換可相合,此節之定理仍爲眞確,試證明之.

98. 直射變換之相合. 初等除式理論之第二重要應用,乃爲對於直射變換之理論. 爲求簡單起見,吾人僅論兩度空間之情形

$$\mathbf{a}\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

此理將見極爲普遍.

吾人以前視直射變換,僅爲某種幾何圖形之變換. 今可再從其他觀點察之,且研究直射變換之本身時,特別注意已

---

* 爲簡便計,吾人此後稱此等不變因式及初等除式,各爲二對方式 ϕ_1, ψ_1 及 ϕ_2, ψ_2 之不變因式及初等除式.

變換後之諸點及未經變換前之諸點之相互位置.設有一圖形包含 $A_1, A_2,$……諸點,諸點之數如有限或無限,幷設此諸點因一直射變換 a 移爲 $A_1', A_2',$……諸點.此兩組點連合成一幾何圖形.吾人所謂直射變換之性質者,卽爲此圖形之性質也.此種諸性質可爲投影者,亦可爲數量者.若將某一對垂直線變爲他一對垂直線,則爲直射變換之數量性;若將某一三角形變爲其本身,則爲直射變換之投影性.吾人將專論直射變換之投影性.

今舉直射變換中之固定點(fixed points)以爲例,此卽經過變換後與未經變換前位置相同之諸點也.(x_1, x_2, x_3) 一點爲固定點之充要條件,乃

$$x'_1=\lambda_1, \qquad x'_2=\lambda x_2, \qquad x'_3=\lambda x_3$$

代入 a 中,則見有一常數 λ 存在,使

$$
\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1+ \quad & a_{12}x_2+ \quad & a_{13}x_3=0,\\
(1) \qquad a_{2}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+ \quad & & a_{23}x_3=0,\\
a_{31}x_1+ \quad & a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0. &
\end{aligned}
$$

此組方程式之方陣,適爲此平直變換之方陣 a 之範方陣.範函數乃 λ 之三次多項式,若使之爲零,則成一方程式,有一,二,或三個相異之根.命 λ_1 爲其一根,若將此値代入於(1),則此等方程式,有一點或數點之位標可以適合之,——此卽一直射變換 a 之諸固定點也.此等固定點之分佈及個數,爲一直

射變換投影性之一要例;且顯見諸直射變換,關於此方面可有不同之性質,可有三固定點,兩固定點,或竟有無窮數之固定點.

再回論因直射變換a(可爲異或非異方陣)而各成相當之兩組諸點 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 及 $A'_1, A'_2, \cdots\cdots$. 吾人使此諸點經過非異直射變換 c. 使 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 各變爲 $B_1, B_2, \cdots\cdots$, 而 $A'_1, A'_2\cdots\cdots$ 各變爲 $B'_1, B'_2, \cdots\cdots$. 諸 B 所成之圖形與諸 A 所成之圖形有相同之投影性;故若能求得一直射變換 b 變 $B_1, B_2, \cdots\cdots$ 爲 $B'_1, B'_2, \cdots\cdots$ 此種直射變換與直射變換a有相同之投影性質.如此一直射變換,顯可書公式

$$\mathrm{b}=\mathrm{cac}^{-1} \tag{2}$$

表之,又 c^{-1} 變諸點 B_i 爲諸點 A_i, 故變諸點 A_i 爲諸點 A'_i, c 變諸點 A'_i 爲諸點 B'_i.

因公式(2)所涉及之兩直射變換 a 及 b, 就其投影性質言之,并無區別(雖此二變換可有不同之數量性質),吾人據下述定義,稱之爲相合.

定義. 若有一非異直射變換 c 存在,且能滿足關係式(2),則 a 及 b 兩直射變換稱爲相合方陣.

參考 §96 之定理三,即得基本定理:

定理. 兩直射變換相合之充要條件,乃其範方陣有相同之不變因式,——或謂爲有相同之初等除式,亦無不可.

習題

1. 若 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_k$ 為 $n-1$ 度空間內非異直射變換之諸固定點與範方程式之相異 k 根相當，試證此諸點為平直相關.

2. 對於非異直射變換之各種可能情形，討論一直射變換諸固定點之分佈情形：

(a) 在二維空間中，

(b) 在三維空間中.

3. 對於非異直射變換之各種可能情形.

(a) 在二維空間內，一直射變換之諸固定直線.

(b) 在三維空間內，一直射變換之諸固定平面之分佈；并注意此二者與諸固定點之關係.

4. 若存在一實非異直射變換 $\mathbf{c}$ 使 $\mathbf{b}=\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c}^{-1}$，則兩實直射變換 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 謂為相合.

設相合 (equivalence) 一名詞之意義，如適所述，試證本節之定理，對於實直射變換亦成立.

99. 數對二組元一次方式之分類. 吾人再取一對二組元一次方式

$$\phi \equiv \sum_1^n a_{ij} x_i y_j, \quad \psi \equiv \sum_1^n b_{ij} x_i y_j$$

論之，今設其中之第二式為非異方式，而作 λ 方陣

$$(1) \qquad \mathbf{a}-\lambda \mathbf{b}.$$

如用一種記號，與 § 92 中者略有不同，則 (1) 之初等除式可記如

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1}, (\lambda-\lambda_2)^{e_2}, \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{e_k}, \quad (e_1+e_2+\cdots\cdots+e_k=n),$$

而諸平直因式 $\lambda-\lambda_i$，不必盡為相異. 在多數情形，關於此等初等除式最重要之事乃為 $e_1, e_2, \cdots\cdots e_k$ 諸次數. 若吾人欲不

書出初等除式全體,而只須表示其次數,可用一種符號:$[e_1, e_2, \cdots\cdots e_k]$,稱為λ方陣(1)或一對方式$\phi, \psi$之範數(characteristic).於此易見此範數為此對二組元一次方式之一種算術不變式,蓋因相合之兩對二組元一次方式,必有相同之範數.但其逆理不真,蓋欲兩對二組元一次方式為相合,必須兩組初等除式本身之恆等為恆等,不獨兩者次數之必須相等也.

凡有相同範數之一切諸對二組元一次方式,稱為成一組同範式(category).例如含六變數之諸對二組元一次方式,吾人就可下之三種範數

$$[1\ \ 1\ \ 1],\quad [2\ \ 1],\quad [3],$$

別之為相當之三種同範式,幷顯見可能之諸情形,僅此數種,實際上,吾人必須考求此三種同範式,是否確能存在.吾人可書出以下代表此等三種同範式,而含六變數之諸對二組元一次方式,可得此問題之肯定解答:

$$\text{I.}\quad [1\ 1\ 1]\qquad \begin{cases} \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_3 y_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{cases}$$

$$\left\|\begin{matrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{matrix}\right\|.$$

$$\text{II.}\quad [2\ 1]\qquad \begin{cases} \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_1 x_2 y_2 + x_1 y_2 + \lambda_2 x_3 y_3, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \end{cases}$$

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2-\lambda\end{matrix}\right\|.$$

III. [3] $\begin{cases}\lambda_1x_1y_1+\lambda_1x_2y_2+\lambda_1x_3y_3+x_1y_2+x_2y_3,\\ x_1y_1+\quad x_2y_2+\quad x_3y_3,\end{cases}$

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1-\lambda\end{matrix}\right\|.$$

吾人適所書之諸對二組元一次方式,不僅證實三種同範式之存在.且由此可知不僅諸初等除式之次數,可以任意(僅受其和爲三之限制),且在此限制之下,諸初等除式之本身可任意選擇之.且凡含六變數任一對二組元一次方式,其第一次爲非異者,均可用非異平直變換必能化爲上述諸法式之一.

在此之普遍定理如下:

定理. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\lambda_k$ 爲相等或相異之任意諸常數,且 $e_1, e_2, \cdots\cdots e_k$ 爲若干正整數其和爲 n 者,則必有諸對含 $2n$ 變數之二組元一次方式存在,每對中第二方式爲非異方式,且此諸二組元一次方式有初等除式.

$$(2)\qquad (\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2}, \cdots\cdots(\lambda-\lambda_k)^{e_k}.$$

欲證明此定理,可取下列一對二組元一次方式論之.

$$(3)\quad \begin{cases} \phi \equiv \left(\sum_{1}^{e_1} \lambda_1 x_i y_i + \sum_{1}^{e_1} x_{i-1} y_i\right) + \left(\sum_{e_1+1}^{e_1+e_2} \lambda_2 x_i y_i + \sum_{e_1+2}^{e_1+e_2} x_{i-1} y_i\right) \\ \qquad + \cdots\cdots + \left(\sum_{n-e_k+1}^{n} + \lambda_k x_i y_i + \sum_{n-e_k+2}^{n} x_{i-1} y_i\right), \\ \psi \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots\cdots + x_n y_n, \end{cases}$$

此兩者中第二爲非異方式.此等諸式有一λ方陣可簡記如

$$(4)\quad \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_1 & & & \\ & \mathbf{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_k \end{array} \right\|,$$

式中 $\mathbf{M}_1, \cdots\cdots \mathbf{M}_k$ 諸文字,不僅表一項,且表一組項; $\mathbf{M}_i$ 卽表 e_i 級之方陣如下

$$\mathbf{M}_i = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_i - \lambda & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \lambda_i - \lambda & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \lambda_i - \lambda \end{array} \right\|;$$

且方陣(4)中所有諸項,不含於任一組項 $\mathbf{M}_i$ 之內者,均爲零按 § 93 (公式 (1) 及定理二) 吾人卽見 (4) 之諸初等除式卽爲 (2) 中諸式,由此卽得證明本定理.

參考 § 97 卽知任一對含 $2n$ 變數二組元一次方式,以 (2)

為初等除式者均可化為*如(3)式之法式.

---

*尚有若干他種法式,可用以代(3).例如吾人可用方式

$$
(3')\quad \begin{cases}
\phi=\left(\sum\limits_{1}^{e_1}\lambda_1 c_1 x_i y_{e_1-i+1}+\sum\limits_{1}^{e_1-1} d_1 x_i y_{e_1-i}\right) \\
\qquad +\left(\sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2}\lambda_2 c_2 x_i y_{2e_1+e_2-i+1}+\sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2-1} d_2 x_i y_{2e_1+e_2-i}\right) \\
\qquad +\cdots\cdots+\left(\sum\limits_{n-e_k+1}^{n}\lambda_k c_k x_i y_{2n-e_k-i+1}\right. \\
\qquad \left. +\sum\limits_{n-e_k+1}^{n-1} d_k x_i y_{2n-e_k-i}\right), \\
\psi=\sum\limits_{1}^{e_1} c_1 x_i y_{e_1-i+1}\quad +\sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2} c_2 x_i y_{2e_1+e_2-i+1} \\
\qquad +\sum\limits_{e_1+e_2+1}^{e_1+e_2+e_3} c_3 x_i y_{2e_1+2e_2+e_3-i+1} \\
\qquad +\cdots\cdots+\sum\limits_{n-e_k+1}^{n} c_k x_i y_{2n-e_k-i+1},
\end{cases}
$$

代(3),上式中 $c_1,\cdots\cdots c_k$, $d_1,\cdots\cdots d_k$ 諸常數可任意選定,但須各數均不為零.例如可使之均為1.

此對方式之 λ 方陣可書如方式(4),式中 $\mathbf{M}_i$ 代表 e_i 級之方陣:

$$
\mathbf{M}_i=\left\|\begin{matrix}
0 & \cdots\cdots 0 & d_i & c_i(\lambda_i-\lambda) \\
0 & \cdots\cdots d_i & c_i(\lambda_i-\lambda) & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
c_i(\lambda_i-\lambda) & \cdots\cdots 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right\|.
$$

在此應注意諸方陣 $\mathbf{M}_i$ 及諸二組元一次方式(3′)為對稱,在下章吾人討論二次方式之時此事足使上法式更形重要.

與在(3′)已引入之諸常數 c_i 及 d_i 相似之諸常數,亦可在(3)內引入之.

吾人茲再返論諸對二組元一次方式之分類.對於一定個數變數如 $2n$ 個時,顯見僅有有限種數之同範式.如注意初等除式中有無與同一之平直因式相當者,且何者與之相當,吾人即可再分此等同範式為若干類 (classes). 在範數中,諸整數相當於同一平直因式之諸初等除式之次數者,以括弧連接之,即可表出上之分類,例如 $n=8$ 時,範數

$$[(2\ 1)(1\ 1\ 1)2]$$

即示λ方陣恰有三相異平直因式;此中一因式與兩個二次初等除式及一個一次者相當,又一與三個一次者相當,而末一式則與單一二次初等除式相當

兩對相合二組元一次方式,必須屬於同類,但同屬於一類之兩對二組元一次方式,不必為相合.

今舉例以釋上文所述,仍取 $n=3$ 之情形.此時吾人以六類代三同範式,如下表所列:

	a	b	c
I.	[1 1 1]	[(1 1)1]	[(1 1 1)]
II.	[2 1]	[(2 1)]	
III.	[3]		

I, Ib, Ic 三類合成同範式 I, 且皆係以該同範式之法式代表之,所不同者,僅為在 Ia 類中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 三值盡為相異,在 Ib 類中,而僅有二者為相等.在 Ic 類中,三者均相等.同理,

同範式 II 在此分爲 IIa 及 IIb 二類,對此二者,同範式 II 之法式約可合用,但此法式內之 λ_1 及 λ_2 對於 IIa 時爲相異,對於 IIb 時爲相等.最後同範式 III 僅含一類.

有時分類更須詳細.兩二組元一次方式中第二方式 ψ,已一致假設爲非異方式.第一方式 ϕ 可爲異方式或非異方式;且易見 ϕ 爲異方式之充要條件乃 λ 方陣之諸平直方式中諸常數 λ_i 至少有一爲零.由此可見在一類中,一對二組元一次方式或全爲非異方式者,或有一爲異方式.據此兩種情形,吾人更可分諸對二組元一次方式爲子類(subclass).

依此方向,作更進一步之研究,則可考 ϕ 之秩與諸常數 λ_i 之値有何關係.吾人須注意若 $\lambda=0$, ϕ 之方陣,與一束 $\phi-\lambda\psi$ 之方陣相等.於是若 ϕ 之秩爲 r, $\phi-\lambda\psi$ 之方陣之任一 $(r+1)$ 次行列式,不能爲 λ 所除盡.但此方陣至少有一 r 行列式,不能爲 λ 所除盡.由初等除式之定義(參閱 §92 之定義三下附註),可見在初等除式內諸常數 λ_i 之中必須有 $n-r$ 個爲零.因此等敘述之逆亦爲眞,故吾人可言方式 ϕ 之秩爲 r 之充要條件,乃諸初等除式之中,適有 $n-r$ 個爲 λ^{e_i} 之形狀.在範數 $[e_1e_2\cdots\cdots e_k]$ 內,於表此種初等除式次數之諸整數 e_i 上置一小零;幷視兩對二組元一次方式,必須且僅須此諸方式之範數對於此諸零之分佈相合,而其他各方面亦同時,始屬於一類.此處亦可明兩對相合方式必屬於同一類,但反之不眞.

吾人再取 $n=3$ 之情形以爲例.吾人現有十四類,而不僅只有六類矣.

$$[1\ 1\ 1],\ [(1\ 1)1],\ [(1\ 1\ 1)],\ [2\ 1],\ [(2\ 1)],\ [3], \qquad (r=3),$$

$$[1\ 1\ \mathring{1}],\ [(1\ 1)\mathring{1}],\ [2\ \mathring{1}],\ [\mathring{2}\ 1],\ [\mathring{3}], \qquad (r=2),$$

$$[(\mathring{1}\ \mathring{1})1],\ [(\mathring{2}\ \mathring{1})], \qquad (r=1),$$

$$[\mathring{1}\ \mathring{1}\ \mathring{1}], \qquad (r=0).$$

在每種情形,吾人已表出方式 ϕ 之秩 r.由此可知在前六種情形,ϕ 爲非異方式;在後五種情形,則其秩爲二及他値.

習　題

1. 試證諸對含 $2n$ 變數之實二組元一次方式,其中第二方式爲非異方式,且有諸初等除式

$$(\lambda-{}_1\lambda)^{e_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots\cdots\quad (\lambda-\lambda_k)^{e_k} \qquad (e_1+e_2+\cdots\cdots+e_k=n),$$

必能存在,僅須諸初等除式,得配以共軛虛式而排列之(參閱 §93 之習題 1 及習題 2).

2. 將諸對含六變數之實二組元一次方式(各對之第二方式爲非異方式),按初等除式之實虛而分類.

100. 直射變換之分類. 前節所述諸對二組元一次方式之分類,從一較廣之觀點論之,則顯可視爲諸對方陣之分類,各對中第二方陣假設爲非異方陣.據此觀點,即可應用於直射變換之分類,蓋從 §98 可見對於任一直射變換相當於一對方陣,其中有一爲非異,即么方陣 I,他一則爲平直變換之方陣.且 §99 之法式(3)適可應用於吾人現時所論之特殊相合之研究,蓋因方式 ψ 之方陣適爲么方陣也.故吾人可

立述基本定理如下:

定理一. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\lambda_k$ 爲任意相等或相異之數常數,且 $e_1, e_2, \cdots\cdots e_k$ 爲任意諸正整數,和爲 n, 則在 $n-1$ 維空間內有一直射變換存在,其範方陣有下列諸初等除式.

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2}, \cdots\cdots (\lambda-\lambda_k)^{e_k}.$$

於此吾人更可知

定理二. 一切直射變換,如定理一內所述之一種,與方陣爲

$$\begin{Vmatrix} \boxed{\mathbf{M}_1} & & & \\ & \boxed{\mathbf{M}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{M}_k} \end{Vmatrix}$$

之直射變換相合,式中 $\mathbf{M}_i$ 代表 e_i 次之方陣

$$\mathbf{M}_i = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots \lambda_i \end{Vmatrix}.$$

由此吾人可分諸直射變換爲同範式,并可再分諸同範式爲 §99 內之諸類.例如在 $n=3$ 之情形(平面內之諸直射變換),吾人有三同範式,其範數及代表法式如下:

I. [1 1 1]
$$\begin{cases} x'_1=\lambda_1 x_1 \\ x'_2=\qquad \lambda_2 x_2 \\ x'_3=\qquad\qquad \lambda_3 x_3, \end{cases}$$

II. [2 1]
$$\begin{cases} x'_1=\lambda_1 x_1+x_2 \\ x'_2=\qquad \lambda_1 x_2 \\ x'_3=\qquad\qquad \lambda_2 x_3, \end{cases}$$

III. [3]
$$\begin{cases} x'_1=\lambda_1 x_1+x_2 \\ x'_2=\qquad \lambda_1 x_2+x_3 \\ x'_3=\qquad\qquad \lambda_1 x_3. \end{cases}$$

此等諸同範式吾人可再分爲上節中之六類(卽 I_a, I_b, I_c, II_a, II_b, III), 或可分爲上節末頁之十四類. 後一分類法爲在此情形中所需者. 吾人表列此十四類如後;而各附註其特性,此等諸直射變換之法式,有此等性質立可見出,且從此可推知此類中一切諸直射變換,有題中論及之性質,蓋因所云之性質,顯見均爲投影者也. 至於所云之諸性質,確爲範性(characteristic property), 卽可用以分別各類,欲明此理,可注意述及之諸性質中,無一可爲兩類所公有,卽可歸納(posteriori)以知之.

[1 1 1] 相異而不共線在一直線上之三固定點.*

[(1 1)1] 某一直線上所有一切點, 及不在此直線上之

---

*注意現時及以後所言之固定點,乃爲所云之直射變換中僅有之固定點.

一點均爲已定.

[(1 1 1)] 恆等直射變換.

[2 1] 兩相異固定點.

[(2 1)] 某一直線上所有一切點,均爲已定.

[3] 一固定點.

在此各種情形中,均爲非異直射變換,其餘所有諸直射變換爲異變換.在此三種情形中,此平面上有一點 P, 始終不動,其他所有各點移至不過 P 點之一直線 p 上,此直線 p 上任一點與無窮個點相當.

$[1\ 1\ \mathring{1}]$ p 上有兩固定點.

$[(1\ 1)\mathring{1}]$ p 上一切點均爲固定點.

$[2\ \mathring{1}]$ p 上一固定點.

在次述兩種情形中,一點 P 始終不動,其他所有各點移至不過 P 點之一直線 p 上,此直線 p 上任一點均相當於無窮多之點.

$[\mathring{2}\ 1]$ 一固定點.

$[\mathring{3}]$ 無固定點.

所餘他種諸直線變換,頗爲簡單.故按下述言之性質,不僅可別其類,更能完全確定之.

$[(\mathring{1}\ \mathring{1})1]$ 某一直線上之諸點未經變動.其他所有各點,移至不在此直線上之一點.

$[(\mathring{2}\ \mathring{1})]$ 某一直線上之諸點未經變動.其他所有各點,

移至在此直線上之一點.

$[(\mathring{1}\ \mathring{1}\ \mathring{1})]$ 此平面上無一點移動.

此最後之情形,根本卽不成變換.

習　題

1. 依同法,分類一維空間內之投影性質.
2. 類別三維空間內之直射變換.
3. 類別一維,二維及三維空間內之實投影變換(參閱§99之習題1,2).

第二十二章

諸對二次方式之相合及分類

101. 方陣論中之兩定理. 欲應用初等除式之理於二次方式,而闡明其法爲合理,吾人必須暫論方陣普通原則.

定義. 若$\phi(x)$爲一多項式:

$$\phi(x)\equiv a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m,$$

則
$$a_0\mathbf{x}^m+a_1\mathbf{x}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\mathbf{x}+a_m\mathbf{I}$$

稱爲方陣$\mathbf{x}$之多項式,幷以$\phi(\mathbf{x})$*記之.

吾人現述方陣全部理論中之一最重要定理:

定理一. 若$\mathbf{a}$爲一方陣,且$\phi(\lambda)$爲其範函數,則

$$\phi(\mathbf{a})=0.$$

此方程式稱爲哈密爾敦及揆力之方程式(Hamilton-Cayley equation)

命$\mathbf{c}$爲$\mathbf{a}$之範方陣:

---

*注意據此定義,$\mathbf{x}$之多項式中係數,爲計值量.取一λ方陣,其中係數爲方陣,而變數爲計值量者,則可與之相較.此等觀念.均含於下式中:

$$\mathbf{a}_0\mathbf{x}^m\mathbf{b}_0+\mathbf{a}_1\mathbf{x}^{m-1}\mathbf{b}_1+\cdots+\mathbf{a}_{m-1}\mathbf{x}\mathbf{b}_{m-1}+\mathbf{a}_m.$$

$$c=a-\lambda I.$$

此爲一次λ方陣，若n爲方陣a之級，則其附屬方陣，次數不能高於$n-1$：

(1) $$C\equiv C_{n-1}\lambda^{n-1}+C_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+C_0,$$

吾人又可書

(2) $$\phi(\lambda)\equiv k_n\lambda^n+k_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+k_0.$$

玆參照§25之公式(5)，可見

$$aC-\lambda C\equiv\phi(\lambda)I.$$

以(1)及(2)代入，并使次數相同之λ之係數相等，卽有

$$\begin{aligned}
aC_0\qquad &=k_0I,\\
aC_1-C_0&=k_1I,\\
aC_2-C_1&=k_2I,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
aC_{n-1}-C_{n-2}&=k_{n-1}I,\\
-C_{n-1}&=k_nI.
\end{aligned}$$

若吾人依次以$I, a, a^2, \cdots a^n$各乘此諸方程式，再以所得之結果相加，而消去左邊，卽得

$$k_0I+k_1a+k_2a^2+\cdots+k_na^n=0.$$

此卽爲吾人所求之方程式

$$\phi(a)=0.$$

玆欲推出第二定理，吾人先立一僅與計値量相關之引.

引. 若$\psi(x)$爲n次多項式$(n>0)$,且其常數項異於零,則存在一多項式$\chi(x)$次數低於n,且

$$(\chi(x))^2-x$$

可爲$\psi(x)$所除盡.

命$x-a, x-b, x-c, \cdots\cdots$爲$\psi(x)$之相異諸平直因式,則可書

$$\psi(x)\equiv k(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\cdots\cdots \qquad (\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n).$$

因據假設,ψ之常數項異於零,故$a, b, c, \cdots\cdots$諸常數均異於零.吾人更以$\psi_1(x)$代表從ψ中除去$(x-a)^{\alpha}$,所得之式除去$(x-b)^{\beta}$者代以$\psi_2(x)$等等,最後吾人用未定係數組成諸多項式

$$A(x)\equiv A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\cdots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1},$$

$$B(x)\equiv B_0+B_1(x-b)+B_2(x-b)^2+\cdots+B_{\beta-1}(x-b)^{\beta-1},$$

$$C(x)\equiv C_0-C_1(x-c)+C_2(x-c)^2+\cdots+C_{\gamma-1}(x-c)^{\gamma-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

從此諸多項式,吾人作一多項式

$$\chi(x)\equiv A(x)\psi_1(x)+B(x)\psi_2(x)+C(x)\psi_3(x)+\cdots\cdots,$$

此多項式之次數,顯見不能大於$n-1$.今請證明吾人可定$A_i, B_i, \cdots\cdots$諸係數,使多項式$\chi(x)$滿足引中諸條件.

因$\psi_2, \psi_3, \cdots\cdots$均能爲$(x-a)^{\alpha}$所除盡,$(\chi(x))^2-x$爲此因式能除盡之充要條件,乃多項式

$$\phi(x)\equiv(A(x))^2(\psi_1(x))^2-x$$

能爲$(x-a)^\alpha$所除盡.於是有

$$\phi(a)=A_0{}^2k^2(a-b)^{2\beta}(a-c)^{2\gamma}\cdots\cdots-a.$$

故$\phi(x)$能爲$x-a$所除盡之充要條件,乃爲

$$(3)\qquad A_0{}^2=\frac{a}{k^2(a-b)^{2\beta}(a-c)^{2\gamma}}.$$

此分數之分母及分子均異於零,故得A_0之相異兩值,均不爲零.若吾人以此兩值之一爲A_0之值,則$\phi(x)$可爲$x-a$所除盡.$\phi(x)$亦能爲$(x-a)^2$所除盡之充要條件乃$\phi'(a)=0$.此處及以後之重音符號,均代表導微函數,不久即見選擇一適當之A_1.此條件可能而僅能在一種情形之不滿足.如此則$\phi(x)$能爲$(x-a)^3$所除盡之條件,僅爲$\phi''(a)=0$.茲往證此步驟可繼續進行,終可得$\phi(x)$能爲$(x-a)^\alpha$所除盡之條件.爲達此目的計,吾人用數學歸納法,并設$A_0,\cdots\cdots A_{s-1}$,已由$\phi(a)=\phi'(a)=\cdots\cdots=\phi^{[s-1]}(a)=0$諸條件所決定.至此僅須再證$A_s$可由$\phi^{[s]}(a)=0$所決定即足.職是之故,吾人注意

$$(4)\qquad \phi^{[s]}(x)\equiv2A^{[s]}(x)A(x)[\psi_1(x)]^2+R_s(x),$$

式中$R_s(x)$爲$\psi_1,\psi_1',\cdots\cdots\psi_1{}^{[s]}A,A',\cdots\cdots A^{[s-1]}$數字之有理整函數,而係數爲有理數.因

$$A(a)=A_0,\ A'(a)=A_1,\ A''(a)=2!A_2,\cdots\cdots A^{[s-1]}(a)=(s-1)!A_{s-1},$$

由此即知$R(a)$爲已知常數,換言之,即與未定諸常數A_s,

$A_{s+1},\cdots A_{\alpha-1}$均不相關,亦與諸$B$及諸$C$等等無關.故從(4)可見$\phi^{[s]}(a)=0$之充要條件,乃$A_s$之值如下:

$$A_s=\frac{-R_s(a)}{2s!A_0(\psi_1(a))^2} \tag{5}$$

用此公式陸續決定諸係數$A_1, A_2,\cdots A_{\alpha-1}$之值,終以$\phi(x)$能爲$(x-a)^{\alpha}$所除盡之關係以定多項式$A(x)$.如此決定後,如前可見$(X(x))^2-x$爲$(x-a)^{\alpha}$所除盡.

同法,吾人可按$(X(x))^2-x$爲$(x-b)^{\beta}$所除盡之關係,以定$B(x)$內之諸係數;再按$(X(x))^2-x$爲$(x-c)^{\gamma}$所除盡之關係,以定$C(x)$內諸係數,等等.若諸多項式$A, B, C,\cdots\cdots$均已如此決定,則$(X(x))^2-x$能爲$\psi(x)$所除盡,本引得以證明.

定理二. 若$\mathbf{a}$爲n次之非異方陣,則有數n次之方陣b(必須爲非異)存在,且具有下之性質:

$$\mathbf{b}^2=\mathbf{a},$$

$\mathbf{b}$爲含$\mathbf{a}$之多項式而次數小於n.

因$\mathbf{a}$爲非異方陣,其範函數$\phi(\lambda)$必爲n次之多項式,其中常數異於零.由此依據前述之引可由

$$(X(x))^2-\lambda\equiv\phi(\lambda)f(\lambda)$$

以決定一次數小於n之多項式$X(x)$,上式中$f(\lambda)$亦爲一多項式.從此恆等式,即得

$$(X(\mathbf{a}))^2-\mathbf{a}=\phi(\mathbf{a})f(\mathbf{a}),$$

因據定理一知 $\phi(a)=0$, 故上方程式可書如

$$(\chi(a))^2=a.$$

故 $b=\chi(a)$ 爲滿足定理內諸條件之方陣, 定理因得證明.

102. 對稱方陣. 初等除式理論, 對於二次方式之應用乃基於下之命題:

定理一. 若 a_1 及 a_2 爲兩對稱方陣, 且若有兩非異方陣 p 及 q 存在, 合於

$$a_2=pa_1q, \tag{1}$$

則必又有一非異方陣 P 存在, 合於

$$a_2=P'aP, \tag{2}$$

內中 P' 爲 P* 之共軛方陣.

吾人各以 p' 及 q' 代表 p 及 q 之共軛方陣, 取 (1) 之兩邊之共軛方陣, 并注意 a_1 及 a_2 爲對稱方陣, 故其共軛方陣卽爲其本身, 故依 §22 之定理六卽得

$$a_2=q'a_1p', \tag{3}$$

取 (1) 及 (3) 內 a_2 之兩值使之相等, 立卽更推得關係式

---

* 下爲此定理之又一證明, 其簡單遠過於本書所述者.

從 (1) 立卽可知 a_1 及 a_2 有相同之秩. 故依 §46 之定理四, 知以 a_1 及 a_2 爲方陣之兩二次方式爲相合. 若以 p 表化二次方式 a_1 爲方式 a_2 之平直變換之方陣, 則按 §43 之定理一, 知方程式 (2) 能成立.

此證明不能使吾人推知 P 可僅由 p 與 q 表示, 而此層對於吾人甚爲重要.

(4) $$(q')^{-1}pa_1=a_1p'q^{-1}.$$

爲簡明起見,吾人命

(5) $$U=(q')^{-1}p,\quad U'=p'q^{-1},$$

并注意U′爲U之共軛方陣;關於此點,可參閱§25之習題6.如此則方程式(4)可書如

(6) $$Ua_1=a_1U'.$$

從此方程式,立可更推得以下諸方程式:

(7) $$\begin{cases} U^2a_1=Ua_1U'=a_1U'^2,\\ U^3a_1=Ua_1U'^2=a_1U'^3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ U^ka_1=Ua_1U'^{k-1}=a_1U'^k.\end{cases}$$

吾人以任意一組計値量乘方程式(6),(7),及方程式$a_1=a_1$,再加所得之結果.從此可見,若$\chi(U)$爲U之任一多項式,則

(8) $$\chi(U)a_1=a_1\chi(U').$$

從§101之定理二,可見吾人得選多項式

$$V=\chi(U),$$

使V爲非異方陣,且

$$V^2=U.$$

以V′代表V之共軛方陣,則顯有

$$V'=\chi(U'),$$

故吾人可書(8)如下形

$$Va_1 = a_1V',$$

或

$$a_1 = V^{-1}a_1V'.$$

茲吾人以此值代入(1)卽得

$$a_2 = pV^{-1}a_1V'q. \tag{9}$$

從(5)中第一方程式吾人推得公式

$$pV^{-1} = q'V.$$

是以 pV^{-1} 爲 $V'q$ 之共軛方陣,故若命

$$P = V'q,$$

則方程式(9)可書如

$$a_2 = P'a_1P,$$

吾人之定理得以證明.

由適所用之證明,可得下

系. 吾人可取方陣 $V'q$, 爲前定理中之方陣 P, 式中 V 乃 $(q')^{-1}p$ 任一平方根之共軛式,該平方根由 §101 之定理二決定之.

於此可見有一特點,卽 P 視 p 及 q 而定,但與 a_1 及 a_2 無涉.是以若 a_1, a_2, b_1, b_2 爲對稱諸方陣,且有兩非異方陣 p 及 q 存在,使

$$a_2 = pa_1q, \qquad b_2 = pb_1q,$$

則有一非異方陣 P 存在,使

$$a_2 = P'a_1P, \qquad b_2 = P'b_1P.$$

據此及§96之定理二,吾人推得

定理二. 若 a_1, a_2, b_1, b_2 爲諸對稱方陣,其中 b_1, b_2 爲非異方陣,如欲一非異方陣 P 存在,使

$$a_2 = P'a_1P, \qquad b_2 = P'b_1P,$$

且其中 P' 爲 P 之共軛方陣,則其充要條件乃

$$a_1 - \lambda b_1, \qquad a_2 - \lambda b_2$$

諸方陣有相同諸不變因式——或謂爲有相同初等諸除式,亦無不可.

若在特例,$b_1 = b_2 = I$,式中 I 爲么方陣,從(10)中第二方程式,吾人可得公式

$$I = P'P.$$

如此之方陣 P 依據下定義,吾人稱之爲直交方陣(orthogonal matrix).此定義將見與§52後習題內第一題之附註中所有之定義相合:

定義. 所謂一直交方陣者,即一非異方陣,其逆方陣與其共軛方陣相等者.

在適所論之特別情形中,定理二又可述之如下:

定理三. 若 a_1 及 a_2 爲兩對稱方陣,能有一直交方陣 P 存在,使

$$a_2 = P'a_1P$$

之充要條件,乃 a_1 及 a_2 之範方陣有相同之不變因式——或謂

爲有初等諸除式,亦無不可.

若以此定理與 §96 之定理三相比較,易見僅存兩點不同,第一,在此定理內,設 $\mathbf{a}_1$ 及$\mathbf{a}_2$ 爲對稱,第二,$\mathbf{P}$ 須爲直交方陣.

103. 諸對二次方式之相合. 吾人討論下列二次方式

$$\phi_1 \equiv \sum_1^n a'_{ij}x_ix_j, \quad \psi_1 \equiv \sum_1^n b'_{ij}\,x_ix_j,$$

及

$$\phi_2 \equiv \sum_1^n a''_{ij}x_ix_j, \quad \psi_2 \equiv \sum_1^n b''_{ij}\,x_ix_j,$$

其中設 ψ_1 及 ψ_2 兩方式爲非異者.吾人將求在如何條件之下此兩對方式可以相合;卽在何種條件之下,有一平直變換

$$\mathbf{c}\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + \cdots + c_{1n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + \cdots + c_{nn}x'_n \end{cases}$$

存在,可化 ϕ_1 爲 ϕ_2,且同時可化 ψ_1 爲 ψ_2.

若吾人以 $\mathbf{c}'$ 代表方陣 $\mathbf{c}$ 之共軛方陣,以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ 各代表 $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2$ 之共軛方陣,依 §43 之定理一可知變換 $\mathbf{c}$ 化 ϕ_1 及 ψ_1 所成之方式各以

$$\mathbf{c}'\mathbf{a}_1\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c}'\mathbf{b}_1\mathbf{c}$$

爲方陣;故若此等方式卽爲 ϕ_2 及 ψ_2,應有

$$(1) \qquad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}'\mathbf{a}_1\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}'\mathbf{b}_1\mathbf{c}$$

是以依§102之定理二,知下二λ方陣

$$\mathbf{a}_1-\lambda\mathbf{b}_1, \qquad \mathbf{a}_2-\lambda\mathbf{b}_2$$

有相同之不變因式及初等除式.

反之,依同理若此兩λ方陣有相同之不變因式(或初等除式),則有一方陣c存在對λ爲獨立,并能滿足(1)中兩方程式;且由此可知此兩對二次方式爲相合.如是卽證得

定理一. 若ϕ_1,ψ_1及ϕ_2,ψ_2爲含n變數之兩對二次方式,其中ψ_1及ψ_2爲非異方式,此兩對二次方式爲相合之充要條件,乃下列兩束.

$$\phi_1-\lambda\psi_1, \qquad \phi_2-\lambda\psi_2$$

之兩方陣有相同之不變因式,——或謂爲有相同初等除式,* 亦無不可.

此定理之重要特別情形,乃兩方式ψ_1及ψ_2均化爲

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

之時.在此情形,吾人必須用直交變換(參考§52後第1題內之定義),且吾人之定理亦可述之如下:†

定理二. 若$\mathbf{a}_1$及$\mathbf{a}_2$爲兩二次方式之方陣,如欲一化此兩方式中之一爲其他方式之直交變換存在,其充要條件乃

---

* 爲簡單起見,吾人稱此等諸不變因式及諸初等除式各爲兩對方式$\phi_1,\psi_1,\phi_2,\psi_2$之不變因式及初等除式.

† 此定理自可與§102之定理三相合,而立可由該節定理得之.

$\mathbf{a}_1$及$\mathbf{a}_2$之範方陣有相同之不變因式,——或謂爲有相同之初等除式,亦無不可.

欲釋明此節諸定理之意義,吾人再略論同時化兩二次方式爲諸平方之和之問題.在第十三章內吾人熟習此化法有兩種情形爲可能;可參考§58之定理二及§59之定理二卽明.若此二方式有一爲非異,則當此時,可述此種化法爲可能之充要條件.

爲達此目的計,可取下列兩二次方式

$$\phi\equiv k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2,$$

$$\psi\equiv c_1x_1^2+c_2x_2^2+\cdots+c_nx_n^2$$

論之,吾人假設式內諸c之中無一爲零,俾第二方式爲非異方式.一束$\phi-\lambda\psi$之方陣爲

$$\left\|\begin{array}{ccc} k_1-c_1\lambda & 0 & 0\cdots\cdots0 \\ 0 & k_2-c_2\lambda & 0\cdots\cdots0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots k_n-c_n\lambda \end{array}\right\|$$

且此方陣之初等除式爲

$$\lambda-\frac{k_1}{c_1},\qquad \lambda-\frac{k_2}{c_2},\cdots\cdots\ \lambda-\frac{k_n}{c_n}$$

均爲一次.是以與適云之一對方式相合之任一對二次方式,必有一λ方陣,其中諸初等除式均爲一次.

反之,若有一對二次方式,其中第一方式爲非異方式,且其λ方陣之諸初等除式均爲一次,則吾人顯可選k及c之值,使適云之方式ϕ及ψ之λ方陣有此相同之諸初等除式,故亦卽兩已知方式與兩特別方式ϕ及ψ相合.如是吾人已證得下之定理:

定理三. 若ϕ及ψ爲二次方式,且ψ爲非異方式,則ϕ及ψ可用一非異平直變換同時化爲僅有平方項之方式之充要條件,乃此一對方式之初等除式均爲一次.

因若λ方程式無重根,諸初等除式必須爲一次,故§58之定理二,顯爲此定理之特例.

以§59之定理二與適證之定理比較,可見在§59內定理內諸條件之下,諸初等除式必須爲一次.由此得

定理四. 若ψ爲一有定非異二次方式,且ϕ爲一實二次方式,則此對方式所有之諸初等除式必須爲一次.

104. 諸對二次方式之分類. 吾人取一對二次方式

$$(1)\qquad \phi\equiv\sum_{1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\qquad \psi\equiv\sum_{1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

論之,并設ψ爲非異方式如前.照§99記此等方式之諸初等除式如

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\quad(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots(\lambda-\lambda_k)^{e_k}(e_1+e_2+\cdots+e_k=n).$$

吾人稱記號$[e_1e_2\cdots e_k]$爲此一對二次方式之範數;且吾人稱

有同一範數之諸對二次方式,成一同範式(category)*

於此適如二組元一次方式情形,可得下之定理:

定理. 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$爲任意相等或不相等之諸常數,且$e_1, e_2, \cdots e_k$爲任意諸正整數和爲$n$,則有含$n$變數之諸對二次方式存在,其中每對之第二方式爲非異方式,且此等諸對方式有下列諸初等除式

$$(2)\qquad (\lambda-\lambda_1)^{e_1}, \quad (\lambda-\lambda_2)^{e_2}, \cdots (\lambda-\lambda_k)^{e_k}.$$

欲證此定理,先取與§99之法式(3′)相似之一對二次方式如下:

$$(3)\begin{cases}\phi \equiv \left(\sum\limits_{1}^{e_1} \lambda_1 c_1 x_i x_{e_1-i+1} + \sum\limits_{1}^{e_1-1} d_1 x_i x_{e_1-i}\right) \\ \quad + \left(\sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2} \lambda_2 c_2 x_i x_{2e_1+e_2-i+1} + \sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2-1} d_2 x_i x_{2e_1+e_2-i}\right) \\ \quad + \cdots + \left(\sum\limits_{n-e_k+1}^{n-1} \lambda_k c_k x_i x_{2n-e_k-i+1} + \sum\limits_{n-e_k+1}^{n-1} d_k x_i x_{2n-e_k-i}\right), \\ \psi \equiv \sum\limits_{1}^{e_1} c_1 x_i x_{e_1-i+1} + \sum\limits_{e_1+1}^{e_1+e_2} c_2 x_i x_{2e_1+e_2-i+1} \\ \quad + \sum\limits_{e_1+e_2+1}^{e_1+e_2+e_3} c_3 x_i x_{2e_1+2e_2+e_3-i+1} + \cdots + \sum\limits_{n-e_k+1}^{n} c_k x_i x_{2n-e_k-i+1},\end{cases}$$

式中$c_1, \cdots c_k, d_1, \cdots d_k$諸常數可任意選定,但無爲零者.

---

* 例如所有諸對二次方式中,如第二方式爲非異方式,且能同時化諸平方項之和者,成一以[1 1⋯1]爲範數之同範式.試參閱§103之定理三.

此對方式之λ方陣與§99之二組元幷一次方式(3′)之λ方陣相同,故有所求之諸初等除式.

參考§103之定理一,可知由公式(3)可得一法式,當一切各對方式中第二方式爲非異方式,且有如(2)之諸初等除式者,所可化得之法式.

吾人至今所言之諸同範式,可用§99中對於二組元幷一次方式之分類法以分之爲諸類.欲作此分類可如前法,或僅注意諸λ_i之中,何者彼此相等,或更就諸λ_i有幾爲零之情形再分.

於此吾人可明瞭初等除式較§57中之不變式Θ,何以對於吾人爲有用.此諸不變式Θ_i爲諸對方式之λ方程式之係數,且可決定此方程式之根,即λ_i諸常數,同時亦可決定此諸根相重之次數.此諸不變式不能決定初等除式之次數e_i,且僅用諸Θ_i在各種情形,均不能使吾人決定兩對方式能否相合.例如吾人可有同以Θ_i爲不變式之兩對方式,但各以[(1 1) 1 1⋯1]及[2 1 1⋯1]爲範數.* 故將見諸Θ_i僅在特殊意義成一不變式全系.

習題

1. 舉一$n=3$時數值之例,以釋本節最後一語之義.

* 在$n=3$時,可就幾何情形,釋明此理,吾人可言僅用諸不變式Θ_i,不能區別兩錐線相切二次或一次,如用初等除式,則此二種情形,立可辨別.

2. 若兩對相合二次方式,有與同一平直因式相當之兩一次初等除式,則有無窮數平直變換存在,能化兩對方式中之一對為其他一對,試證明之.

3. 試證以習題 2 為一特例之普遍定理,卽若兩對相合二次方式有一範數,其中有一或若干括號出現,則有無窮平直變換存在,能化兩對方式中之一對為其他一對,試證明之.

4. 若兩對相合二次方式有一範數,其中無括號出現,則僅有有限之平直變換存在,化二對方式之中一對為他一對,* 試證明之.

此等變換,彼此有何關係?

105 諸對二次方程式及方式或方程式之束.† 在研究二次方式時,相合及分類之問題,非復如吾人在前兩節內所採之形式.以前吾人多不論二次方式之本身,而究使此等方式為零所得之諸方程式.吾人不僅於兩對方程式中方式相合時,視方程式為相合,且如以異於零之常數乘兩對方式中之一對可得其他之一對時亦然.

吾人茲研究兩二次方式 ϕ, ψ, 其中第二方式假設為非異方式如前,今須探討若以異於零之兩常數 p, q 各乘此兩方式,則對於

$$(1) \qquad (\lambda-\lambda_1)^{e_1}, \quad (\lambda-\lambda_2)^{e_2}, \cdots (\lambda-\lambda_k)^{e_k}$$

諸初等除式有何影響.吾人書

$$\phi_1 \equiv p\phi, \quad \psi_1 \equiv q\psi.$$

* §58 之習題實為此題特例.

† 與此節所述相似之諸問題,亦可在前章論二組元幷一次方式時討論之.

則

$$\phi_1-\lambda\psi_1\equiv p(\phi-\lambda'\psi), \tag{2}$$

式中
$$\lambda'=\frac{q}{p}\lambda.$$

命$\lambda-a$爲方陣$\phi-\lambda\psi$之任意一平直因式,俾a爲諸常數$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$中任一值;并如§92之定義三附註,以$l_i$代表此方陣之所有$i$級行列式之公因式$\lambda-a$之最高指數.則從(2)顯見$l_i$爲方陣$\phi_1-\lambda\psi_1$所有之$i$次行列式之公因式$\lambda'-a$之最高指數.換言之

$$\left(\lambda-\frac{pa}{q}\right)^{l_i}$$

爲方陣$\phi_1-\lambda\psi_1$所有i次行列式之平直因式$\lambda-pa/q$之最高指數.茲返觀§92之定義三附註所述初等除式之定義,可見$\phi_1-\lambda\psi_1$之方陣之初等除式與$\phi-\lambda\psi$之方陣之初等除式,所不同者僅爲以常數$p\lambda_i/q$代常數λ_i.吾人因得結果:

定理一. 若一對二次方式ϕ,ψ中,第二方式假設爲非異方式,且有

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\quad(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots(\lambda-\lambda_k)^{e_k}$$

諸初等除式,更若p,q爲異於零之常數,則一對二次方式$p\phi$,$q\psi$有下列諸初等除式

$$(\lambda-\lambda'_1)^{e_1},\quad(\lambda-\lambda'_2)^{e_2},\cdots(\lambda-\lambda'_k)^{e_k}$$

式中
$$\lambda'_i=\frac{p}{q}\lambda_i.$$

在此有一特點,即範數之觀念雖於用括號外,更用諸小零,以使之細密,此兩對二次方式仍有相同之範數.

由適證之定理,可明如各對齊次二次方程式中之第二方程式爲非異方程式,則可依其範數而分類之,與在前節中,對於諸對二次方式分類之法相同.吾人茲就 $n=3$ 之例,作一說明,在此情形,吾人可認之即爲對於一平面內之諸對錐線之分類,此諸錐線之中有一爲非異錐線者.

在此吾人有三同範式,以下之三法式表示之:*

I. [1 1 1] $\begin{cases}\phi\equiv\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2-\lambda_3x_3^2\\ \psi\equiv\quad x_1^2+\quad x_2^2-\quad x_3^2\end{cases}$

II. [2 1] $\begin{cases}\phi\equiv 2\lambda_1x_1x_2+x_1^2+\lambda_2x_3^2\\ \psi\equiv\quad 2x_1x_2+\qquad x_3^2.\end{cases}$

III. [3] $\begin{cases}\phi\equiv 2\lambda_1x_1x_3+\lambda_1x_2^2+2x_1x_2\\ \psi\equiv\quad 2x_1x_3\quad +x_2^2.\end{cases}$

吾人次分此諸同範式爲類,且察各種情形中之法式,吾人即能就各類特有之諸投影性質以定之,且此等投影性質,爲他集所無.†

---

*吾人選前節公式(3)內 c_i, k_i 諸常數之值,使當 λ_i 諸常數爲實數時,則 $\phi=0$, $\psi=0$ 表實軌跡.但吾人既不注意虛實之問題,是以此事并不重要.

†欲驗下文所述,讀者當先略明錐線相切之理論;例如散夢(Salmon)所著 Conic Sections 內第十四章 p. p. 232—238 即可供參考.

錐線ψ在各種情形,均爲非異,此層無庸述明.

$[1\ 1\ 1]$ ϕ及ψ相交於相異之四點.

$[(1\ 1)\ 1]$ ϕ及ψ有重切點 (double contact).

$[(1\ 1\ 1)]$ ϕ及ψ相合.

$[2\ 1]$ ϕ及ψ在相異之三點相遇,且在此三點之中一點此兩錐線相切.

$[(2\ 1)]$ ϕ及ψ有三次切點 (contact of the third order).

$[3]$ ϕ及ψ有二次切點.

在以上各種情形,ϕ及ψ同爲非異錐線.

在次五種情形,ϕ卽爲相異之兩直線.

$[1\ 1\ \mathring{1}]$ ϕ及ψ相交於四相異之點.

$[(1\ 1)\ \mathring{1}]$ ϕ所成之兩直線均與ψ相切.

$[2\ \mathring{1}]$ ϕ所成之兩直線,一與ψ相切,一與ψ相交,二交點均與切點相異.

$[\mathring{2}\ 1]$ ϕ所成之兩直線均與ψ相交,但均不與ψ相切.

$[\mathring{3}]$ ϕ所成之兩直線與ψ相交,一與之相切.

在以下兩種情形,ϕ變爲一單獨直線.

$[(\mathring{1}\ \mathring{1})\ 1]$ 直線ϕ與ψ相遇於兩相異之點.

$[(\mathring{2}\ \mathring{1})]$ 直線ϕ與ψ相切.

最後吾人有下列一種情形:

$[(\mathring{1}\ \mathring{1}\ \mathring{1})]$ 此處$\phi\equiv 0$,除ψ之外,吾人無其他錐線.

設吾人最後不僅欲將各對二次方式或方程式分類,更

欲將方式或方程式之束分類.取二次方式之束

$$\phi-\lambda\psi$$

論之,式中ϕ及ψ爲二次方式,且ψ爲非異方式,并設一對方式ϕ,ψ之初等除式即由上述,巳知公式(1)所定.若取

$$\phi_1\equiv\phi-\mu\psi,\qquad\psi_1\equiv\phi-\nu\psi$$

一束中任意其他兩方式,以代ϕ,ψ兩方式,μ,ν兩常數之擇,務使$\mu\neq\nu$,而ψ_1爲非異方式,則一對方式ϕ_1,ψ_1是否有同一初等除式(1)之一問題自生.如其有之,則可言(1)爲本束之初等除式.但此種情形,并不成立,故一束二次方式初不能謂其有初等除式.*

但於同一之束中,取二對方式之初等除式,則其間有一簡單關係.欲明此理,吾人可先定上述一對方式ϕ_1,ψ_1之初等除式.爲欲達此目的計,可取$\phi_1-\lambda\psi_1$一式究之.若$\lambda\neq1$,此式可書如

$$\phi_1-\lambda\psi_1\equiv(1-\lambda)\left[\phi-\lambda'\psi\right]\tag{3}$$

式中
$$\lambda'=\frac{\mu-\nu\lambda}{1-\lambda}.$$

玆設$\lambda-\alpha$爲$\phi-\lambda\psi$之方陣中任一平直因式如前,并命l_i爲此方陣所有i次行列式中公因式$\lambda-\alpha$之最高指數.則$\phi-\lambda'\psi$之

---

*此處吾人視一束爲無窮多之二次方式之集合,即於$\phi-\lambda\psi$中予λ以不同之值,所得之一切方式.就此意義言,吾人不能語及一束之初等除式.但若吾人視$\phi-\lambda\psi$爲諸x及λ之多項式,而成一束,則吾人可謂其有諸初等除式,其意即指吾人所謂一對方式ϕ,ψ之諸初等除式也.

方陣之任一i次行列式，當$\lambda=1$時，可書如

$$(\lambda'-a)^{l_i}f(\lambda'),$$

式中f爲λ'之多項式，次數不大於$i-l_i$，故依(3)知$\phi_1-\lambda\psi_1$之方陣之相當i次行列式可書如

$$[\mu-\nu\lambda-a(1-\lambda)]^{l_i}f_1(\lambda),$$

式中f_1爲λ之多項式．於此可見

$$\left[\lambda-\frac{a-\mu}{a-\nu}\right]^{l_i}$$

爲$\phi_1-\lambda\psi_1$之方陣之各i次行列式之因式．依同理逆推，卽明此爲所有諸i次行列式之因式

$$\lambda-\frac{a-\mu}{a-\nu}$$

之最高冪．是以得

定理二． 若一對二次方式ϕ，ψ，其第二方式爲非異方式，諸初等除式爲

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots(\lambda-\lambda_k)^{e_k},$$

且若μ，ν爲相異之兩常數，而ν與所有$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_k$諸常數相異，則下列一對方式

$$\phi_1\equiv\phi-\mu\psi,\quad \psi_1\equiv\phi-\nu\psi$$

中第二方式爲非異方式，且此一對方式有下列諸初等除式

$$(\lambda-\lambda'_1)^{e_1},\quad (\lambda-\lambda'_2)^{e_2},\cdots(\lambda-\lambda'_k)^{e_k}$$

式中
$$\lambda'_i=\frac{\lambda_i-\mu}{\lambda_i-\nu}\qquad (i=1,2,\cdots k).$$

於此可特別注意若於範數 $[e_1\ e_2\cdots e_k]$ 之括弧中指明諸 e 中何者與 λ_i 中各數相當,兩對方式 ϕ, ψ 及 ϕ_1, ψ_1 仍有相同之範數 $[e_1\ e_2\cdots e_k]$. 若吾人以小零表示諸 e 之中,何者與爲零之諸 λ_i 相當,則範數未必相同,蓋因 λ_i 及 λ'_i 常非同等於零也. 故在將二次方式之束分類時,吾人可用第二方式爲非異方式之任一對相異方式之範數,但吾人不必用小零加入此等範數. 此種分類法,自然能應用於所謂非異諸束(non-singular pencils),卽束之所有方式非全爲異方式者.

於此易見適所言者,應用於齊次二次方程式之束亦無重要更動. 吾人於此可舉非異諸束錐線*之分類以爲例. 此束有六類,可就其性質類別之如下:

[1 1 1]　諸錐線經過四相異之點.

[(1 1) 1]　諸錐線經過兩相異之點,且在此兩點,彼此爲二次相切.

[(1 1 1)]　諸錐線相合.†

[2 1]　諸錐線均經過三點,且在其中一點,三錐線相切.

*對於二次曲面之束,有一相似之分類法,可參考布綸尉契(Bromwich所著 Quadratic Forms and their Classification by Means of Invariant Factors 一書中 p.46.

†習慣上常謂爲不成一束.

[(2 1)]　諸錐線均經過一點,且在此點,相切三次.

[3]　諸錐線均經過兩點,且在其中一點此諸錐線相切二次.

習　題

1. 用初等除式決定以下各對錐線之性質:

$$(a)\begin{cases}3x_1^2+7x_2^2 \qquad +8x_1x_2-10x_2x_3+4x_1x_3=0\\ 2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3+6x_1x_3=0.\end{cases}$$

$$(b)\begin{cases}3x_1^2-x_2^2-3x_3^2-3x_1x_2+3x_2x_3+x_1x_3=0\\ 2x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3=0.\end{cases}$$

2. 對於各對方程式,諸對二組元幷二次方程式其第二方程式爲非異者,作一分類,幷就幾何意義說明之.

106. 結論. 在此節內,吾人將指出關於初等除式之數種重要問題,吾人因欲對於所作研究,加相當限制,故此諸問題不得不略而不論.

若ϕ_1, ψ_1及ϕ_2, ψ_2爲兩對二組元幷一次方式,或二次方式,其中ψ_1, ψ_2爲非異方式或方程式,吾人已得一法,區別此兩對方式是否爲相合.若吾人用不變因式,以代初等除式,則所用之方法僅爲有理運算(加,減,乘,除),故在任何實際情形中,均可布算.實則在§93,吾人已述及一實用方法,可定一λ方陣之不變因式,故當兩對二組元幷一次方式或二次方式中第二方式爲非異者時,欲決其是否爲相合之問題,不但在理論上已解決,卽從實際上亦已解決.

在此另有一問題吾人尙未言及,卽若兩對方式可以相合,求一平直變換,以化此兩對方式之一爲其他.此問題吾人仍可視爲從理論上已解決;蓋因吾人已證若兩對方式有相同之初等除式,則存在一平直變換,可化此兩對方式之一成其他,詳細考察此證明,卽可在實際上得決定此平直變換之法.事實上對於二組元幷一次方式所用之步驟,仍僅爲有理者;故若已知兩對相合之二組元幷一次方式,各對中之第二方式爲非異,在任何實際情形吾人必須求一諸 x 及諸 y 之平直變換,以化此一對方式成爲其他一對.雖在實際上,此種變換之步驟尙須更加研求.

在二次方式時,此問題更爲困難,蓋因決定所求之平直變換之步驟,不復爲有理者矣;關於此點可參閱 §101 之引.從一數字實例考之,見此非僅爲吾人所用方法之一缺點,而繫於與問題之本身.例如

$$\phi_1 \equiv 2x_1^2+3x_2^2, \quad \phi_2 \equiv 2x_1^2-3x_2^2,$$

$$\psi_1 \equiv x_1^2+x_2^2, \quad \psi_2 \equiv x_1^2-x_2^2,$$

在此 ϕ_1, ψ_1 及 ϕ_2, ψ_2 兩對方式均有下之初等除式

$$\lambda-2, \qquad \lambda-3.$$

故爲相合.但因 ϕ_1 及 ψ_1 爲有定方式,ϕ_2 及 ψ_2 爲無定方式,故化此兩對方式之一對成他對之平直變換,不能爲實變換(是以其係數不能從已知兩方式之係數作有理式表之).

故吾人在此有一問題,卽實際上,欲化第一對二次方式

爲第二已知方式與前相合者,應作何種平直變換.若諸初等除式業經決定,則有此種實際上之定法,可於上節末附註中所提及布綸尉契論二次方式之書中 p. 312 見之.

在一對二組元幷一次方式或二次方式 ϕ,ψ 之中,吾人常設 ψ 爲非異方式,此種限制,亦爲吾人討論中不完全之一點.雖在若干重要問題,吾人可應用初等除式之法者,常合於此種限制,但終以能免去爲宜.此種限制可作部份之解除,卽不用前所採之束 $\phi-\lambda\psi$,而取較爲普遍之束 $\mu\phi-\lambda\psi$ 以代之,μ 及 λ 均爲參變數.此束之方陣中諸行列式爲 (μ,λ) 之二組元方式,且初等除式之全部題材,易擴充至此種情形,在此諸初等除式爲諸平直二組元方式之整數冪.此方法所不能解決之唯一情形,卽爲不獨 ϕ 及 ψ 均爲異方式,且一束 $\mu\phi-\lambda\psi$ 中每一方式均爲異方式.此種特殊情形(singular case)需用克綸尼克(Kronecker)所述之特殊方法,維也斯特拉斯(Weierstrass)在其原著之論文中,明置此情形於不論.對於二次方式,可參閱前已提及之布綸尉契所著一書.

尙有其他一問題,卽爲應用初等除式之方法於兩實方式 ϕ,ψ,且僅許用實平直變換.在二組元幷一次方式時,此問題無甚困難;可參閱 §§97,99 之諸習題卽明.對於二次方式而言,在 §101 之引之證明內所用無理步驟中,卽見有一重要難點.蓋因此諸無理步驟可以引出虛數也.且此困難非僅爲在研究之方法上發現者.前節曾舉之數字實例,乃表明他事者,

但在此例中,吾人見兩對實二次方式,雖有相同之初等除式,然對實平直變換,不能爲相合,於是知吾人已證得諸定理之本身,至此一復仍爲確實.

吾人於此僅以重要問題爲已足,至於其中基本問題之一,可參考布綸尉契所著書之 p. 69.

關於初等除式之問題,讀者如更欲深研,可參考穆斯(Mutlh 著 Theorie und Anwendung der Elementartheiler Leipzig, Teubner, 1899. 在英文書中上所言之布綸尉契所著書及經馬條茲(Mathews)修訂之司各脫(Scott)著 Deteiminants 中,尚有若干節頗爲有用.

第十一章末習題之補充

一垂直變換之揆力(Cayley)係數乃由不健全之聯立一次方程式組導來.吾謂此組爲不健全者,因由克里曼(Cramer)氏解法所得行列式有一公因式也.在分子分母之公因式消去時,揆力氏解法尚不得謂之完全,他如夫努柏奴斯(Frobenius 在 Crelles Journ. 84 (1878) 所載極佳之解法亦然.在利甫齊直(Lipschitz)研究平方之和時,獲得此種方程組之解法.彼信此與本題無關,故對於垂直變換,彼未利用一般之公式,但對於 a^{n-1}, 僅應用意義兩岐之符號以連貫之,卡騰(Carten)氏之式亦僅在表面上爲普遍耳(閱法國百科叢書(Faanzösische Enzyklopaedie), I. S. 463—464). 至於應用一公式,能化爲最簡,則自

威令(Vahlen)來[見 Math. Ann. 55 (1902)].

當 $n=3$,則由著名之尤拉(Euler)公式,可得甚多之基本導式(見達部(Dardoux)之曲面論(Théorie des Surfaces) IV, 巴黎 1896. 註5) 克來因(Klein) 及沙英菲德(Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, I,§2, §3, 士達德(Study Hauptsätze der Quaternionen Theorien (Mitteil. des Naturw. Vereins für Nenvorpommern und Rügen 1889).

當 $n=4$, 可於布爾策(Daltzer) 行列式論 (Determinanten) 第五版 §14, 6 中尋得揆力之解法.

當 $n=5$時,可於富雷立區(C. Fröhlich)之不變式論文中見之,可參考 Crelle 雜誌編輯人所著空間保形變換(Conformal Transformation)之雜文.

附　　錄

第六節定理四之證明

1.　一方程式之根,因其係數而定,故為諸係數之函數,吾人將往證明根為係數之連續函數.

$$f(z)\equiv z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

中最高項數為1,此定理不失其普遍性,其餘係數為實或複素數.按代數方程之基本定理,$f(z)=0$ 有 n 個根,一 ν 級重根,以 ν 個計之.命 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_m$ 各為其 $\nu_1,\nu_2,\cdots\cdots\nu_m$ 級重根,則

$$f(z)\equiv(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots\cdots(z-\alpha_m)^{\nu_m}\qquad(\alpha_i\neq\alpha_j,\Sigma\nu_i=n)$$

吾人所欲證者,乃任與 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_m$ 諸根各一互不相含鄰域 $k_1,k_2,\cdots\cdots k_m$,均可得諸係數所定點 $(a_1,a_2,\cdots\cdots a_n)$ 之一相當鄰域,使該點在是域中變動時,各根不逾出所在之域以外.換言之,即設係數所定之點變為域中另一點 $(a_1+\delta_1,a_2+\delta_2,\cdots a_n+\delta_n)$ 得方程式

$$g(z)\equiv z^n+(a_1+\delta_1)z^{n-1}+\cdots\cdots+(a_{n-1}+\delta_{n-1})z+(a_n+\delta_n)=0$$

時,有下之二種結果:

(一)　$f(z)=0$ 各根變為 $g(z)=0$ 各根,但各不出其原在之

鄰域 k_i 外;

(二) 在 k_j 內之根,仍為 ν_i 個.

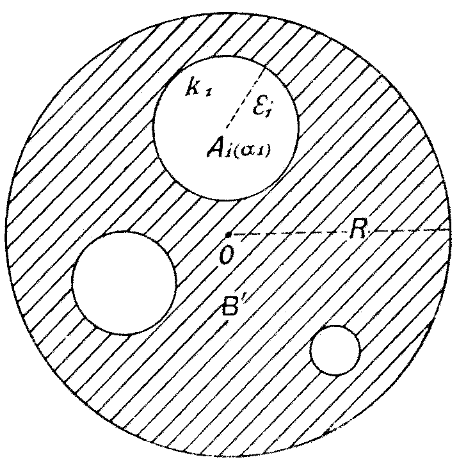
簡言之,即任何根均不能踰越一域 k_i 至於他域 k_j 中,今分段證明如次.

2. 定 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_m$ 諸域.

設在複平面上表 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_m$ 諸根之點各為 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_m$, $A_i A_j$ 諸距離中之最短者為 L. 以 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_m$ 為心, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\epsilon_m$ 為半徑作圓,如諸 ϵ 均小於 $\frac{L}{2}$, 則諸圓必不相交,如是所得之鄰域,稱為 $k_1, k_2, \cdots k_m$, 則此諸域相離,而不合公共部份

所定諸域,常欲其小,為後文證述之用計,更設諸 ϵ 均小於 1.

諸根 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 均為有限值,故可以原點 O 為心,相當



半徑 R 作一大圓，盡涵諸小圓 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_m$ 所成之域．設 OA_1 $OA_2, \cdots\cdots OA_m$ 之最長者爲 ρ，諸 ϵ_i 值最大者爲 ϵ，則只須 $R>\rho+\epsilon$ 可矣．爲後文證述計，更設 $R>1$，此圓幷不過大爲嫌，其所定一域稱之爲 K.

命 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_m$ 之總和爲 B，卽 $B=\Sigma k_i$

又 R 圓中他部分爲 B'，卽 $B=K-B$.

本題所欲證者，卽不論諸 k_i 域半徑 ϵ_i 如何小，常可得一正實數 δ，使

$$|\delta_i|<\delta$$

時，$g(z)=0$ 之根，在 k_i 各域中者之個數不變．今分兩層證明之．

3.　第一：須證明吾人能定 δ，使 $g(z)=0$ 之根不得出 B 以外．

$$g(z)\equiv f(z)+\delta_1 z^{n-1}+\delta_2 z^{n-2}+\cdots\cdots+\delta_n\equiv f(z)+\phi(z)$$

$$\phi(z)\equiv\delta_1 z^{n-1}+\delta_2 z^{n-2}+\cdots\cdots+\delta_n.$$

設 z 爲在 B' 內之一點，則 $|z-\alpha_i|<\epsilon_i$

$$\therefore\quad |f(z)|=|z-\alpha_1|^{\nu_1}\ |z-\alpha_2|^{\nu_2}\cdots\cdots|z-\alpha_m|^{\nu_m}$$

$$\geqq\epsilon_1^{\nu_1}\epsilon_2^{\nu_2}\cdots\cdot\epsilon_m^{\nu_m}\qquad(1)$$

取 δ 爲 $|\delta_i|$ 中最大之數，又按 2 中所設 $R>|z|, R>1$

$$\therefore\quad |\phi(z)|\leqq|\delta_1 z_1^{n-1}|+|\delta_2 z^{n-2}|+\cdots\cdots+|\delta_n|$$

$$=|\delta_1|\,|z|^{n-1}+|\delta_2|\,|z|^{n-2}+\cdots\cdots+|\delta_n|$$

$$\leqq\delta[\,|z|^{n-1}+\cdots\cdots+1]$$

$$<\delta[R^{n-1}+\cdots\cdots+1]<\delta\cdot nR^{n-1}. \qquad (2)$$

且 $\qquad |g(z)|=|f(z)+\phi(z)|>|f(z)|-|\phi(z)|.$

由(1)與(2),更得 $\qquad >\epsilon_1^{\nu_1}\epsilon_2^{\nu_2}\cdots\cdots\epsilon_m^{\nu_m}-\delta_n R^{n-1}$

可見如取 $$0<\delta<\frac{1}{nR^{n-1}}\epsilon_1^{\nu_1}\epsilon_2^{\nu_2}\cdots\cdots\epsilon_m^{\nu_m}, \qquad (3)$$

則 $\qquad |g(z)|>0, \qquad$ 因而 $\qquad g(z)\neq 0.$

換言之,吾人如取 δ 之值由(3)決定者,則 $g(z)=0$ 之根決不能在 B' 以內.

又方程式 $z^n+(a_1+\delta_1)z^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n+\delta_n)=0$ 之根,於 $|\delta_i|<\delta$ 時,其絕對值有一上限,故可使 R 圓大於充分程度,使盡涵此等根.

是則任與鄰域 $k_1, k_2,\cdots\cdots k_m$ 如2中所規定者,必可取 δ 之值小至某程度,使 $g(z)=0$ 之根,不能出 $B=\Sigma k_i$ 之外.

4. $f(z)$ 之諸係數 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_m$ 所定點 $(a_1, a_2,\cdots\cdots a_m)$ 在相當域

$$|(a_i+\delta_i)-a_i|=|\delta_i|<\delta \qquad (i=1, 2,\cdots\cdots m)$$

移動內時,其根雖已可證明必不出 $B=\Sigma k_i$ 之外,但僅據此猶未足以斷在 k_i 內之根不能踰入 k_j 之內,是以更須證明.

第二: 每小域 k_i 內根之個數,不得增減.

今更分層證示其理如下:

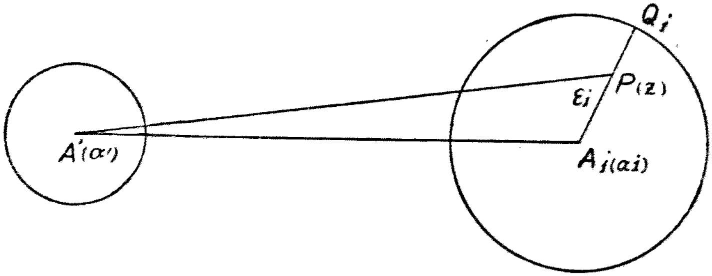
5. 今就 k_i 一域論之.

設原設 $\qquad f(z)\equiv(z-\alpha_i)^{\nu_i}f_1(z)$

$f_1(z)=0$ 之根,無有在 k_i 內者.

取 $\alpha'=\alpha_j(j=1,2,\cdots\cdots i-1,i+1,\cdots\cdots m)$, 則如圖有

$$A'P+PA_i>A_iA'$$



但 $PA_i<A_iQ_i=\epsilon_i\leqq\frac{L}{2}$ (按 2 中原設), $A_iA'\geqq L$

$$\therefore \qquad A'P+\frac{L}{2}\geqq L,$$

即 $$|z-\alpha'|=A'P\geqq L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}.$$

故當 z 在 k_i 域內時

$$|f(z)|=|\pi(z-\alpha')|=\pi|z-\alpha'|<(\tfrac{1}{2}L)^{n-\nu_i} \tag{4}$$

6. 設 $g(z)=0$ 在 k_i 內之根爲 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots\beta_l$, 其級各爲 μ_1, $\mu_2,\cdots\cdots\mu_l$, 則顯有 $\Sigma\mu_i=\mu_1+\mu_2+\cdots\cdots+\mu_l\leqq n$, 且

$$g(z)\equiv(z-\beta_1)^{\mu_1}(z-\beta_2)^{\mu_2}\cdots\cdots(z-\beta_l)^{\mu_l}g_1(z)$$

如 $g_1(z)$ 爲常數,則必 $g_1(z)=1$; 如 $g_1(z)$ 非常數,則 $g_1(z)=0$ 之根必不在 k_i 及 B' 內或 κ (見 3 中結論).

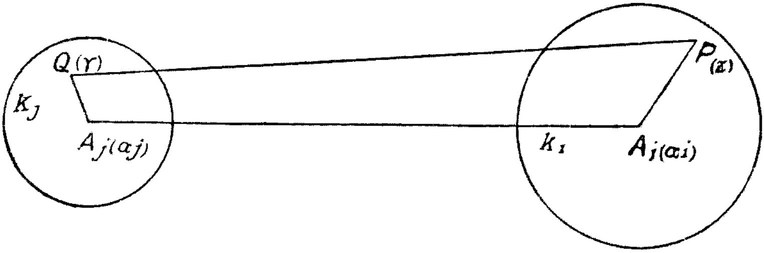
當 z 在 k_i 內時 $\qquad |z-\beta_i|<2\epsilon_i \qquad (5)$

因 z, β_i 爲 k_i 圓內二點, $|z-\beta_i|$ 爲二點間距離,而 $2\epsilon_i$ 即此圓之

直徑故也.再設 $g_1(z)=0$ 之根爲 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\cdots$, 則 γ_i 在

$$B-k_i=k_1+k_2+\cdots\cdots+k_{i-1}+k_{i+1}+\cdots\cdots+k_m$$

內設 M 爲 A_iA_j 諸距離中之最長者如圖有



$$PQ\leqq A_iA_j+A_iP+A_jQ$$

$$\leqq M+\epsilon_i+\epsilon_j\leqq M+\frac{L}{2}+\frac{L}{2}=M+L,$$

即 $$|z-\gamma_i|\leqq M+L<M+L+1.$$

又 $$g_1(z)=\pi(z-\gamma_i), \tag{6}$$

其中因子至多爲 n 個, 又因 $M+L+1>1$, 故 z 在 k_i 內時

$$|g_1(z)|=\pi|z-\gamma_i|<(M+L+1)^n,$$

$$\therefore\quad |g(z)|=\pi|z-\beta_i|^{\mu_i}|g_1(z)|.$$

按 (5) 及 (6) 二式 $$\leqq(2\epsilon_i)^{\Sigma\mu_i}(M+L+1)^n. \tag{7}$$

7. 由 3 中所設 $$g(z)=f(z)+\phi(z),$$

即 $$f(z)=g(z)-\phi(z),$$

$$\therefore\quad |f(z)|\leqq|g(z)|+|\phi(z)|.$$

且 $$f(z)=(z-\alpha_i)^{\nu_i}f_1(z)$$

當 z 在 k_i 上時　　$|z-a_i|=\epsilon_i$, 故

$$|f(z)|=|z-a_i|^{\nu_i}|f_1(z)|\geqq\epsilon_i^{\nu_i}(\tfrac{1}{2}L)^{n-\nu_i}, \qquad \text{(按 (4) 式)}$$

$$\therefore \quad \epsilon_i^{\nu_i}(\tfrac{1}{2}L)^{n-\nu_i}\leqq|f(z)|\leqq|g(z)|+|\phi(z)|.$$

按 (2) 與 (7) 二式　　$$\leqq(2\epsilon_i)^{\Sigma\mu_i}(M+L+1)^n+\delta nR^{n-1}. \tag{8}$$

8. 今請證 $g(z)=0$ 在 k_i 內之根之個數,當較 $f(z)=0$ 者爲少,至多僅應相等.

就 (8) 式觀之,如取　$0<\delta<\dfrac{\epsilon_i^{\nu_i}}{2nR^{n-1}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}L\right)^{n-\nu_i}$,

即得
$$\epsilon_i^{\nu_i}(\tfrac{1}{2}L)^{n-\nu_i}\leqq(2\epsilon_i)^{\Sigma\mu_i}(M+L+1)^n+\frac{\epsilon_i^{\nu_i}}{2nR^{n-1}}\left(\frac{1}{2}L\right)^{n-\nu_i}\cdot nR^{n-1},$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\epsilon_i^{\nu_i}(\tfrac{1}{2}L)^{n-\nu_i}\leqq2^{\Sigma\mu_i}\epsilon_i^{\Sigma\mu_i}(M+L+1)^n.$$

又因 $\Sigma\mu_i\leqq n$　　$$\leqq2^n\epsilon_i^{\Sigma\mu_i}(M+L+1)^n,$$

$$\therefore \quad \epsilon_i^{\Sigma\mu_i-\nu_i}\geqq\frac{L^{n-\nu_i}}{(M+L+1)^n2^{2n-\nu_i+1}}.$$

按 2 中所設 $\epsilon_i<1$, 故若 $\Sigma\mu_i-\nu_i>0$, 則因 μ_i, ν_i 均爲正整數,故 $\Sigma\mu_i-\nu_i\geqq1$

$$\epsilon_i\geqq\epsilon_i^{\Sigma\mu_i-\nu_i}\geqq\frac{L^{n-\nu_i}}{(M+L+1)^n2^{2n-\nu_i+1}}.$$

但 M, L 均爲定數,因之右端爲定數,而此定數竟小於 ϵ_i, 是與假設 ϵ_i 可小至任何程度者不合.

$$\therefore \quad \Sigma\mu_i-\nu_i\leqq0,$$

即 $$\nu_i \geqq \Sigma\mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \cdots\cdots + \mu_l,$$

故如上所云.

9. 在上段所言者,對於諸 k_j 域,莫不皆然,即

$$\nu_1 \geqq \mu'_1 + \mu'_2 + \cdots\cdots + \mu'_l,$$

$$\nu_2 \geqq \mu''_1 + \mu''_2 + \cdots\cdots + \mu''_l,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\nu_m \geqq \mu_1^{(m)} + \mu_2^{(m)} + \cdots\cdots + \mu_l^{(m)}.$$

但 $$\nu_1 + \nu_2 + \cdots\cdots + \nu_m = n$$

$$(\mu'_1 + \mu'_2 + \cdots + \mu'_l) + \cdots + (\mu_1^{(m)} + \mu_2^{(m)} + \cdots + \mu_l^{(m)} = n$$

可見在前列諸式中,如有一不用等式,則

$$\Sigma\nu_i > \Sigma(\mu_1^{(i)} + \mu_2^{(i)} + \cdots\cdots + \mu_l^{(i)})$$

而歸於矛盾,是以知應盡取等號.故每小域 k_i 之根之個數不因 $f(z)=0$ 係數在 $|\delta_i| < \delta$ 域內變遷而增減.

合第一第二之結論,本題遂得完全證明.

平直相關幾何釋例諸定理之證明.

定理一. 二點當而僅當相合時,始成平直相關.

證已見原書

定理二. 三點當而僅當共在一直線上時,始為平直相關.

此理原書已有證明,茲再舉一證法如次:

如 $$(x_1, y_1, z_1, t_1),\ (x_2, y_2, z_2, t_2),\ (x_3, y_3, z_3, t_3)$$

三點成平直相關,則按§13定理一所述,其充要條件為矩陣

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{matrix}\right\|$$

中之一切三次行列式均爲零,故吾人只須證明此事卽共線之充要條件足矣.

令 $\frac{x_1}{t_1}=x_1, \frac{y_1}{t_1}=y_1, \frac{z_1}{t_1}=z_1$, 則按解析幾何理則三點共線之充要條件,乃

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}. \tag{1}$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{vmatrix}=t_1t_2t_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=t_1t_2t_3\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix}=t_1t_2t_3\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix}=t_1t_2t_3\begin{vmatrix} x_1-x_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=t_1t_2t_3\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

可知(1)式爲 $D_1=D_2=D_3=D_4=0$ 之充要條件,而本定理卽得證明.

定理三. 四點當而僅當共在一平面上時,始爲平直相關.

四點 (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), (x_3, y_3, z_3, t_3), (x_4, y_4, z_4, t_4) 共面,則其充要條件乃

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}=0.$$

按 §13 定理一卽知適爲平直相關之充要條件.

定理四. 五點或更多點常爲平直相關.

因按 §13 定理二,知 $k>4$ 卽 $k\geqq5$ 時,

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, & t_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & t_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & t_3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_k, & y_k, & z_k, & t_k \end{matrix}$$

常成平直相關也.

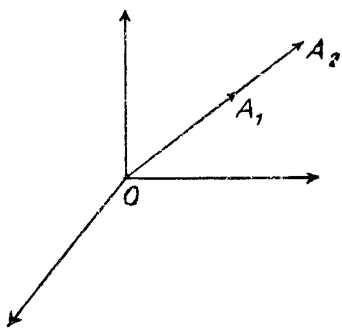
定理五. 二矢量當而僅當共在一直線上時,成平直相關.

蓋如　$a_1=(x_1, y_1, z_1)$, $a_2=(x_2, y_2, z_2)$

成線性相依,則由其充要條件

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$$

示明 A_1, A_2 與 O 共在一直線上,換言之,即 OA_1 OA_2 二矢相合.



定理六. 三矢量當而僅當共在一平面上時,爲平直相關.

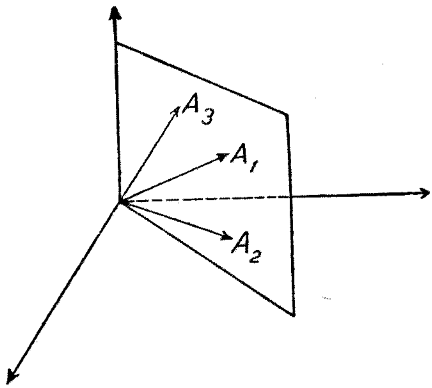
蓋如 $a_1=(x_1, y_1, z_1)$, $a_2=(x_2, y_2, z_2)$, $a_3=(x_3, y_3, z_3)$ 成平直相關,則由其充要條件

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

可知 A_1, A_2, A_3 與 O 共面,換言之,即 OA_1, OA_2, OA_3 三矢量共面.



定理七. 四矢量或更多之矢量常爲平直相關.

因 $k>3$ 即 $k\geqq 4$ 時,

$$a_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

$$a_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k=(x_k,\ y_k,\ z_k)$$

諸矢常成平直相關.

定理八及以後各定理常需用一.

引. 三軌跡如成平直相關,則其一必過他二者之交點,而無其他交點.

設 $f_1=0,\ f_2=0,\ f_3=0$ 爲三軌跡之方程式,則按題設,吾

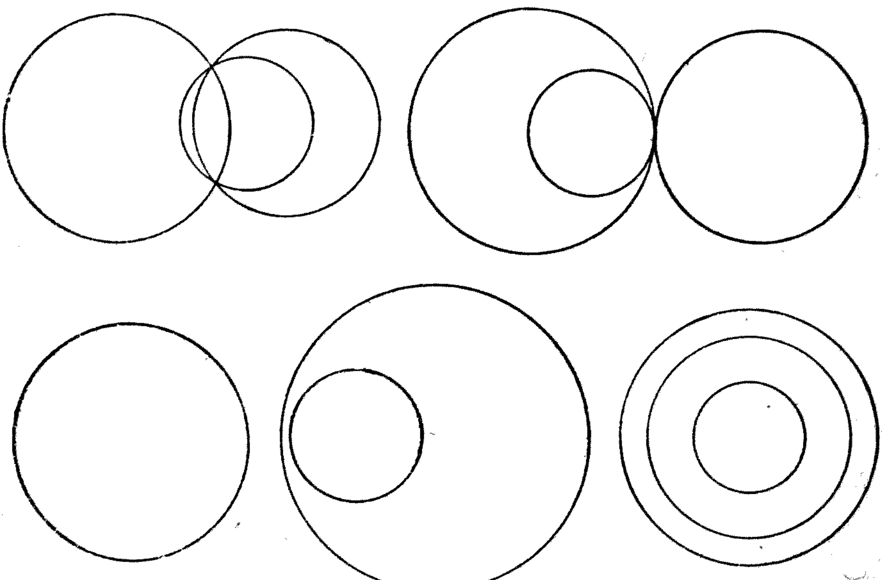
人可得不盡爲零之三數 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 \equiv 0.$$

設 $f_1=0$, $f_2=0$ 之任一交點 P, 則由上式可見其値亦能使 $f_3=0$, 故一切交點均在 $f_3=0$ 上. 且此外 $f_3=0$ 與 $f_1=0$ (或 $f_2=0$) 不能有其他交點. 蓋如有之, 則必在 $f_2=0$ (或 $f_1=0$) 上也.

定理八. 三圓當而僅當共軸時, 始成平直相關.

按上以三圓有二公共點(實或虛,或一重點),故三圓爲共引軸者.



定理九. 四圓當而僅當共有一正交圓(實或虛)時, 始成平直相關.

如諸圓共有一正交圓,其充要條件乃諸圓共有一等冪心 (radical center), 即諸圓兩兩之等冪軸 (radical axis) 咸過一點也.吾人只須證明有三軸過一公共點足矣

設以四圓之方程式爲

$$f_i \equiv x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

則其中三等冪軸之方程式爲

$$f_1-f_2=0, \quad f_2-f_3=0, \quad f_3-f_4=0,$$

茲分證題述條件之充要性如次:

(1) 條件爲充足者.

如三等冪軸共過一點,則應可得不盡爲零之三數 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1(f_1-f_2)+k_2(f_2-f_3)+k_3(f_3-f_4)\equiv 0,$$

即 $$k_1f_1(+k_2-k_1)f_2+(k_3-k_2)f_3-k_3f_4\equiv 0, \tag{2}$$

式中 f_i 之諸係數 $k_1, k_2-k_1, k_3-k_2, -k_3$ 不能不盡爲零,因如此則 $k_1=k_2=k_3=0$ 也.故由(2)知 f_i 爲平直相關.

(2) 條件必要者.

如 f_i 爲平直相關,則應可得不盡爲零之四數 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 使

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_3f_3+\lambda_4f_4\equiv 0, \tag{3}$$

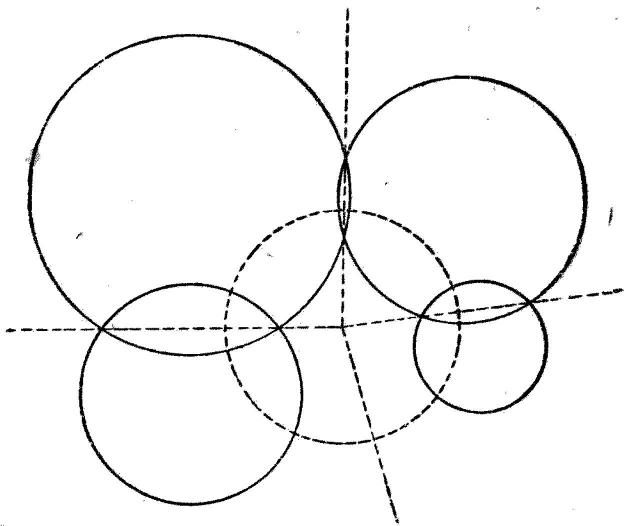
因 f_i 中高次項係數均爲1,故

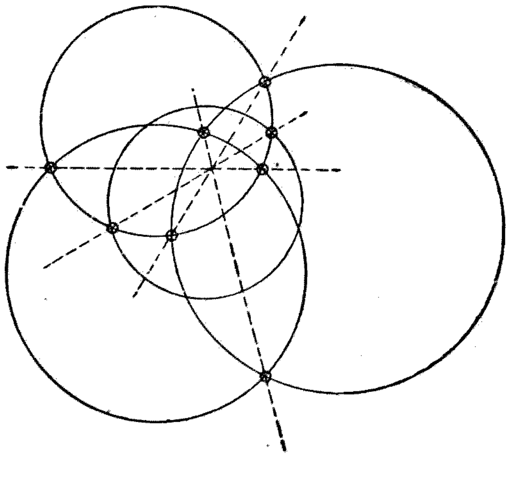
$$\lambda_4=-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

而只須 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 三數不盡爲零足矣.因是(3)式可改書爲

$$\lambda_1(f_1-f_2)+(\lambda_1+\lambda_2)(f_2-f_3)+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(f_3-f_4)\equiv 0,$$

示明 $f_1-f_2=0$, $f_2-f_3=0$, $f_3-f_4=0$ 三等冪軸共過一點.





定理十. 四圓當而僅當其中一二兩圓交點與四交點共在另一圓上時,始成平直相關.

設此四圓分爲 $f_1=0$, $f_2=0$ 及 $f_3=0$, $f_4=0$ 二組.

(1) 條件爲充足者.

此圓既過 $f_1=0$, $f_2=0$ 二圓交點,其方程式爲

$$F\equiv\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=0 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 不盡爲零}),$$

但因其又過 $f_3=0$, $f_4=0$ 之交點,故又有

$$F\equiv\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4=0 \qquad (\lambda_3, \lambda_4 \text{ 不盡爲零}),$$

$$\therefore\quad \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2-\lambda_3 f_3-\lambda_4 f_4\equiv 0,$$

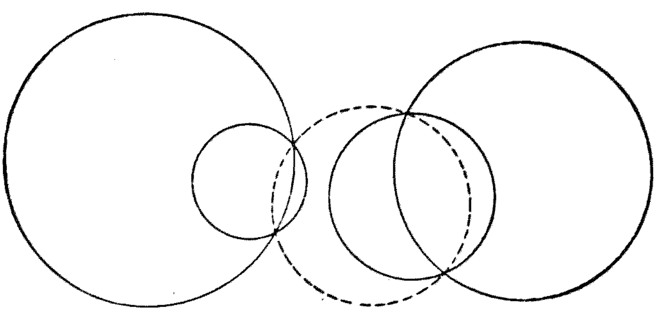
即 f_i 爲平直相關.

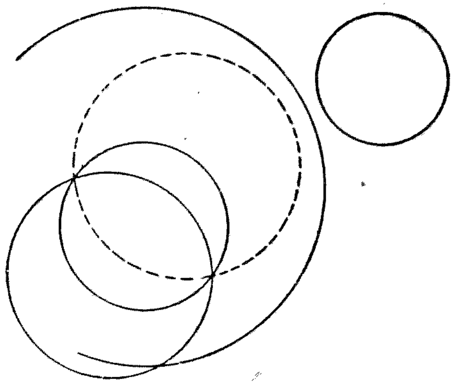
(2) 條件爲必要者.

諸 f_i 爲平直相關,則應可得不盡爲零之四數 k_1, k_2, k_3, k_4 使

$$k_1 f_1+k_2 f_2+k_3 f_3+k_4 f_4\equiv 0,$$

設 $k_1\neq 0$, 則





$$k_1f_1+k_2f_2\equiv-k_3f_3-k_4f_4=0$$

爲過 $f_1=0,\ f_2=0$ 及 $f_3=0,\ f_4=0$ 二組交點之公共圓之方程式.

定理十一. 五圓或更多之圓,常爲平直相關.

因 $$(L,\quad D_i,\quad E_i,\quad F_i)$$

於 $i>4$ 卽 $i\geqq5$ 時,常成平直相關,故 f_i 亦然(§ 14).

定理十二. 三平面當而僅當此相截成一直線時,始有平直關係.

按引申之理自明,因二平面交於一直線,而第三平面應過此.

定理十三. 四平面當而僅當在一點相匯時,始有平直關係.

(1) 條件爲必要者.

因 $f_i(i=1,2,3,4)$ 爲平直相關,故應有不盡爲零之 k_i 四

數,使

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 \equiv 0.$$

故 $f_1=0, f_2=0, f_3=0$ 三平面之交點亦能適合 $f_4=0$; 換言之,卽此四平面共過一點(有限距離點或無窮遠點).

(2) 條件爲充足者.

設 OAB, OBO, OCD, ODA 四平面交於一點 O, 則前二者之交線 OB 與後二者之交線 OD 在一平面 OBD 上.

故平面 OBD 之方程式應爲

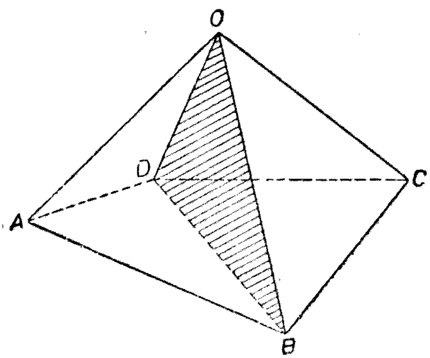
$$F \equiv \lambda_1 f_1 + \lambda_2 k_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 不盡爲零}),$$

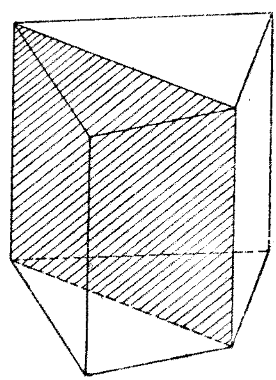
$$\equiv \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0 \qquad (\lambda_3, \lambda_4 \text{ 不盡爲零})$$

$$\therefore \quad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_3 f_3 - \lambda_4 f_4 = 0.$$

卽 f_i 爲平直相關.

又如原設之四平面成一柱形(卽四平面交於無窮遠點),則其兩兩相交之直線亦平行而在另一平面上.遂得證明如上.





定理十四. 五平面或更多之平面,常爲平直相關.

證法與定理十一相同.

用行列式表G. C. D.法之證明

下述之證明,因求式簡理明計,故係就特例立論,然對於通例,亦顯見可合.

1. 引之證明. 設

$$f_1(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$

$$\phi_1(x)=b_0x^2+b_1x+b_2,$$

則

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-\alpha)f_1(x)\\ &=a_0x^5+(a_1-\alpha a_0)x^4+(a_2-\alpha a_1)x^3+(a_3-\alpha a_2)x^2\\ &\qquad+(a_4-\alpha a_3)x-\alpha a_4\\ \phi(x)&=(x-\alpha)\phi_1(x)\\ &=b_0x^3+(b_1-\alpha b_0)x^2+(b_2-\alpha b_1)x-\alpha b_2 \end{aligned}$$

而其消元式R爲

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1-\alpha a_0 & a_2-\alpha a_1 & a_3-\alpha a_2 & a_4-\alpha a_3 & -\alpha a_4 & 0 & 0\\ 0 & a_0 & a_1-\alpha a_2 & a_2-\alpha a_1 & a_3-\alpha a_2 & a_4-\alpha a_3 & -\alpha a_4 & 0\\ 0 & 0 & a_0 & a_1-\alpha a_0 & a_2-\alpha a_1 & a_3-\alpha a_2 & a_4-\alpha a_3 & -\alpha a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1-\alpha b_0 & b_2-\alpha b_1 & -\alpha b_2\\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1-\alpha b_0 & b_2-\alpha b_1 & -\alpha b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_0 & b_1-\alpha b_0 & b_2-\alpha b_1 & -\alpha b_2 & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1-\alpha b_0 & b_2-\alpha b_1 & -\alpha b_2 & 0 & 0 & 0\\ b_0 & b_1-\alpha b_0 & b_2-\alpha b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

吾人只須證明其一次子消元式爲 $f_1(x)$ 及 $\phi_1(x)$ 之結式，即不難類推.

今以 α 乘 R_1 中第一直行，加於第二直行. 再將 α 乘新得之第二直行，加於第三直行，如是繼續至於末一直行，即得證明.

2. 定理一之證明. 設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之 G. C. D. 爲一 k 次式 $G(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_k)$，則

$$f(x)\quad =G(x)f_k(x), \qquad \phi(x)\quad =G(x)\phi_k(x).$$

命

$$\begin{aligned}
f_{k-1}(x)&=(x-\alpha_k)f_k(x), & \phi_{k-1}(x)&=(x-\alpha_k)\phi_k(x),\\
f_{k-2}(x)&=(x-\alpha_{k-1})f_{k-1}(x), & \phi_{k-2}(x)&=(x-\alpha_{k-1})\phi_{k-1}(x),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
f_{k-p}(x)&=(x-\alpha_{k-p+1})f_{k-p+1}(x), & \phi_{k-p}(x)&=(x-\alpha_{k-p+1})\phi_{k-p+1}(x),\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
f_1(x)&=(x-\alpha_2)f_2(x), & \phi_1(x)&=(x-\alpha_2)\phi_2(x),\\
f_0(x)=f(x)&=(x-\alpha_1)f_1(x), & \phi_0(x)=\phi(x)&=(x-\alpha_1)\phi_1(x).
\end{aligned}$$

如是即可由引中之理，推知 $f_k(x), \phi_k(x)$ 之結式 R_k，且因 $f_k(x)$，$\phi_k(x)$ 互質，故 $R_k\neq 0$，又 $f_i(x), \phi_i(x)$ 於 $i<k$ 時均有公因式，故 R_i 於 $i<k$ 時均爲零.

3. 定理二之證明. 今亦就書中所舉特例立論，其證明不致有妨推廣.

就書中 §79 末之式內末一直列觀之，顯可見其展式含有 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 之 G. C. D. 但有應之除者二事，即：

(一) 此式不含有 G. C. D. 以外之他因子,在此只須證明其次數不大於 G. C. D. 者足矣.

(二) 不得爲恆等於零.

可以 x^6 乘第一直行, x^5 乘第二直行,如此類推至以 x^2 乘第五直行,而自末一直行中,盡行減去之,則原式變爲

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5x \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4x+a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2x+b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3x \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=R_1x+\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

首項係數 $R_1 \neq 0$, 而次數適爲1.

譯名對照表

A

Abelian group, 亞伯羣.
Adjoint of a determinants, 附屬行列式
　of a matrix, 附屬方陣;
　of a quadratic form, 附屬二次方式.
Affine transformation, 仿射變換.
Algebraic complement, 代數餘子式.
Anharmonic ratio, 交比.
Associative law for matrices, 方陣之締合律.
Angmented matrix, 增廣方陣.
Axis coördinates, 交線坐標.

B

Bezout's method of elimination, 柏組氏消元法.
Bilinear forms, 二組元并一次方式;
　determinant, matrix, rank of, 二組元并一次方式之行列式,方陣,秩;
　equivalence of, 二組元并一次方式之互換;
　normal forms of, 二組元并一次方式之法式;
　pairs of, 一對二組元并一次方式;
　reducibility of, 二組元并一次方式之可約性;
　singular, 降秩之二組元並一次方式.
Binary forms, 二元方式;
　biquadratic, 二元四次方式;
　cubic, 二元三次方式.
　discriminat of, 二元方式之判別式;
　factors of, 二元方式之因子;
　invariants of, 二元方式之不變式;
　resultant of, 二元方式之消元式;
　symmetric functions, 二元方式之對稱函數.
Biquadratic binary, 四次,二元.
Boole, 布爾.
Bordered determinants, 加邊行列式.
Bromwich, 布綸尉契.

C

Cancellation, 約,對消.
Category of pairs of bilinear forms, 一對二組元并一次方式之範疇;
　of collineations, 直射變換之範疇;
　of pairs of quadratic forms, 一對二次方式之範疇.
Cayley, 揆力.
Characteristic equation, function, matrix, 範方程式,函數,方陣.
Characteristic of a quadratic form, 二次方陣之範數;

of a collineation, 直射變換之範數;
of a pair of bilinear forms, 一對二組元幷一次方式之範數;
of a bair o' quadratic forms, 一對二次方式之範數.
Class of objects, 物之集.
of quadratic forms, 二次式之集.
C factor, (元相餘式) 餘子式.
Cogredient variables, 同步變數.
Collineation, 直射變換.
Combinant, 組合不變式.
Commutative group, 對易律.
law for matrices, 方陣之對易律.
Complement of a minor, 餘子式.
Complete system of invariants, 不變式全系.
Complex quantity, 複素量.
Component of complex quantity, 複素量之分量.
Composite elementary divisors, 合成初等除式.
Concomitants, 混合不變式.
Cone, 錐面.
Conjugate of a matrix, 共軛方陣;
planes, 相配面;
points, 相配點.
Continuity, 綿續性.
Contragredient variables, 逆步變數.
Contravariant, 逆步不變式.
Coördinates, homogeneous, 坐標,齊次.
point, plane, line (axis, ray), 點, 平面,直線 (交線,連線).
Correlation, 對射變換.
Corresponding polynomials, 相當多項式.
Covariant, absolute, 同步不變數,絕對;
integral rational, 整有理;
relative, 相對.
Cramer's Rule, 克里曼法則.
Cross-ratio, 交比.
Cubic, binary, 三次,二元.
Cyclic group, 循環羣.

D

Definite quadratic form, 有定二次方式,
Degree of a polynomial, 多項式之次;
of a λ-matrix, λ方陣之次;
of a products, 乘積之次,
Descriptive property, 叙述性,
Determinant, 行列式;
abjoint of, 附屬行列式;
bordered, 加邊行列式;
Laplace's development of, 拉普拉斯氏展開法;
matrix of, 行列式之方陣;
minors of, 行列式之子式;
of a bilinear form, 二組元幷一次式之行列式;
of a matrix, 方陣之行列式;
of a transformation, 變換之行列式;
orthogonal, 直變行列式;
product of two, 二行列式之乘積;
rank of, 行列式之秩;
skew-symmetric, 反稱行列式;
symmetric, 對稱行列式,
Discriminant of a binary biquadratic, 二元四次方式之判別式;
of a binary cubic, 二元二次方式之

E

F

Forms, 方式;
biquadratic, 四次方式;
cubic 三次方式;
polar, 極方式.
Fours group, 四元非循環羣.
Fractional matrices, 分式方陣,
Frobenius, 夫努伯奴斯.
Fundamental system of solutions, 解之基本系;
theorem of algebra, 代數之基本定理.

G

Generator of a quadric surface, 二次曲線之母線.
Gibbs, 季布兹.
Greatest common divisor of integers, 整數之最大公約數;
of polynomials in one variable, 一元多項之最大公約數;
of polynomials in two variables, 二元多項之最大公約數,
Gorund-form, 底方式,
Group, 羣,
Abelian or commutative, 亞伯羣或對易羣;
cyclic, 循環羣;
fours group, 四元非循環羣;
isomorphic, 同形羣;
sup, 子羣.
Group property, 羣性.

H

Hamilton, 哈密爾敦,
Harmonic division, 調和分段.
Homogeneity, principle of, 齊次原則.
Homogeneous coördinates, 齊次坐標.
invariants, 齊次不變式;
linear equations, 齊次一次方程式;
polynomials, 齊次多項式,

I

Idemfactor, 不易因式,
Identical vanishing (equality) of polynomials, 多項式之恆等於零;
element of a group, 羣之公元;
transformation, 么變換;
Indefinite quadratic form, 不定二次式.
Index of inertia of quadratic form, 二次方式之定號指數,
Invariant, absolute algebraic, 不變式,絕對代數不變式
arithmetical, 算術不變式;
complete system of, 不變式全系;
geometric, 幾何不變式;
homogeneous, 齊次不變式;
integral rational, 整有理不變式;
irrational, 無理不變式;
rational, 有理不變式;
relative algebraic, 相對代數不變式.
Invariant factors of a λ-matrix, λ方陣之不變因式;
of a collineation, 直射變換之不因式;
of a pair of bilinear forms, 一對二組元並一次方式不變因式;
of a pair of quadratic forms, 一對二次方式之不變因式;
Inverse of a transformation, 逆變換;

of a determinant, 行列式之方陣;
of a quadratic form, 二次方式之方陣;
of a quadric surface, 二次曲面之方陣;
of a system of linear equations, 一組一次方程式之方陣;
of a transformation, 變換之方陣;
orthogonal, 直交方陣;
powers of, 方陣之冪;
product of two, 二方陣之乘積;
rank of, 方陣之秩;
rank of product of two, 二方陣乘積之秩;
scalar, 倍么方陣;
similar, 相似方陣;
singular, 降秩方陣;
shew-symmetric, 反稱方陣;
sum or difference of two, 二方陣之和或差;
symmetric, 對稱方陣;
transposed, 共軛方陣;
unimodular, 單餘方陣;
unit, 么方陣;

Minors of a determinant, 行列式之子式;
complementary, 餘子式;
corresponding, 相當子式;
principal, 行列式之主子式.

Mixed concomitants, 混合不變式.

Moore, 穆爾.

Multiplication theorem, 乘法定理.

Multiplicity of roots of an equation, 方程式諸根(重根性)之次數;
of pieces of curves and surfaces, 曲線或曲線之重合性.

Neighborhood of a point, 一點之鄰域.

Newton's formulæ, 牛頓氏公式.

Normal form of a bilinear form, 二組元幷一次方式之法式;
of a binary biquadratic, 二元四次方式之法式;
of a binary cubic, 二元三次方式之法式;
of a λ-marix, λ方陣之法式;
of a matrix, 方陣之法式;
of a pair of bilinear forms, 一對二組元幷一次方式之法式;
of a pair of quadratic forms, 一對二次方式之法式;
of a quadratic form, 二次方式之法式;
of a quadric surface, 二次曲面之法式;
of a real quadratic form, 實二次方陣之法式;
of a symmetrical matrix, 對稱方陣之法式.

N

Nullity, Sylvester's Law of, 西薇斯德之秩欠定律.

Null-system, 配零系.

O

Order of a determinant or matrix, 行列式或方陣之級;
of a group, 羣之級.

Orthogonal transformation, matrix, determinant, 直交變換, 直交方陣, 行列式.

P

Pencil of conics, 錐面束;
of bilinear forms, 二組元井一次方式束;
of quadratic forms, 二次方式束.
Period of an element of a group, 羣中一元之次.
Plane at infinity, 無窮遠平面;
conjugate, 共軛面.
Plane-coördinates, 平面坐標.
Point in space of n dimensions, n維空間中之點;
at infinity, 無窮遠點;
conjugate, 共軛點;
equation of a, 一點之方程式;
neighborhood of a, 一點之鄰近.
Polar plane, 極平面;
form, 極方式;
tetrahedron, 極四面形.
Pole, 極.
Polynomial, definition, degree of, etc., 多項式,多項式定義,多項式之次;
continuity of a, 一多項式之綿續性;
corresponding, 相當多項式;
dyadic, 疊多項式;
in a matrix, 含方陣之多項式;
isobaric, 齊權多項式;
linear dependence of, 多項式之平直相關;
real, 實多項式;
roots of a, 多項式之根;
symmetric, 對稱多項式.
Prime (relatively) polynomials, 質(互質)多項式.
Principal minors, 主子式.
Product, degree of, 乘積,乘積之次;
of determinants, 行列式之乘積;
of matrices, 方陣之乘積.
Projective transformation, 投影變換;
property, 投影性質.
Pseudo-tangent lines and planes, 假切線及切面.

Q

Quadratic forms, 二次方式;
adjoint of, 附屬二次方式;
definite and indefinite, 有定及不定二次方式;
invariants of, 二次方式之不變式;
inverse or reciprocal of, 二次方式之逆;
law of inertia of, 二次方式之定號律;
matrix, discriminant, rank of, 二次方式之方陣,行列式,秩;
normal forms of, 二次方式之標準式;
pairs of, 一對二次方式;
polar of, 二次方式之極式;
real, 實二次方式;
reducibility of, 二次方式之可約性;
reduction of, to sum of squares, 化簡二次方式爲　平方之和;
regularly arranged, 依有法排列之

二次方式;

signature of, 二次方式之標數;

singular, 異二次方式;

vertex of, 二次方式之頂點,

Quadric surface, matrix, discriminant, rank of, 二次曲面, 二次曲面之方陣, 二次曲面之行列式, 二次曲面之秩;

classification of, 二次曲面之分類;

ruling of, 二次曲面之母線;

singular, 特殊二次曲面;

tangent to, 二次曲面之切線;

Quantic, 方式.

Quaternary form, 四元方式.

R

Rank of a matrix or determinant, 方式或行列式之秩;

of a bilinear form, 二組元并一次方式之秩;

of a λ-matrix, λ方陣之秩;

of a quadratic form, 二次方式之秩;

of a quadric surface, 二次曲面之秩;

of a system of homogeneous linear equations, 一次齊次一次方程式之秩;

of a system of points or linear forms, 一組點或一次方程式之秩;

of the adjoint of a quadratic form, 二次方式之附屬式之秩;

of the product of two matrices, 二方陣之乘積之秩;

Rational invariants, 有理不變式;

of a λ-matrix, λ方陣之有理不變式.

Rational relation, 有理關係式;

Rationality domain of, 有理之數域.

Ray coördinates, 交線坐標.

Real polynomials, 實多項式;

matrix, λ-matrix, elementary transformation, 實方陣, 實λ方陣, 實初等變換;

quadratic forms, 實二次方式.

Reciprocal or inverse of a quadratic form, 二次方式之逆式.

Reciprocation, 對射,

Reducibility of a polynomial, 多項式之可約性;

in a domain, 一數域內之可約性;

of bilinear forms, 二組元并一次方式之可約性;

of binary forms, 二元方式之可約性;

of determinants, 行列式之可約性;

of polynomials in one variable, 一元多項式之可約性;

of quadratic forms, 二次方式之可約性.

Regularly arranged quadratic form, 依有法排列之二次方式.

Resultant of linear forms, 一次方式之消元式;

of two binary forms, 兩二元方式之消元式;

of two polynomials in on variable, 含二變數之二多項式之消元式.

Roots of a polynomials or equation, 多項式或方程式之根.

Ruling of a quadric surface, 二次曲面

之母線.

S

S-functions, S-函數.

Σ-functions, ϵ-函數.

Scalar 計値量;

matrix 倍么方陣.

Self-conjugate tetrahedron, 自配四面形

triangle, 自配三角形.

Semidefinite quadratic form, 半定二次方式.

Set of objects 對象組.

Sgn, sgn 函數.

Signature of a quadratic, 二次方式之標數.

Similiar matrices, 相似方陣.

Simple elementary divisors, 單初等除式.

Singular matrix 降秩方陣;

bilinear form, 降秩二組元并一次方式;

conic 異錐面;

linear transformation, 異平直變換;

quadratic form, 降秩二次方式;

quadratic surface, 降秩二次曲面.

Skew-symmetric deternimant, 反稱行列式;

bilinear form, 反稱二組元并一次方式;

matrix 反稱方陣.

Smith, H. I. S. 斯密司.

Subgroup, 子羣.

Subresultant, 子消元式.

Sylvester 西薇斯德.

Symbolic product of bilinear forms, 二組元并一次方式之乘積乘號.

Symmetric determinant and matrix, 對稱行列式及方陣;

bilinear form, 對稱二組元并一次方式;

binary function, 對稱二元函數;

polynomial 對稱多項式;

polynomial in pairs of variables, 一對元之對稱多項式;

ternary function, 對稱三元函數.

System, 組.

T

Tangent lines and planes to quadratic surface, true and pseudo, 二次曲面之切線及切面, 眞切線, 直切面與假切線假切面.

Ternary form, 三元方式;

symmetric function, 三元對稱函數.

Transformation affine, 變換, 仿射變換;

determinant and matrix of, 變換三行列式及方陣

elementary (of a matrix), 方陣之初等變換;

identical, 么變換;

inverse, 逆變換;

linear, 平直變換;

orthogonal, 直交變換;

projective 投影變換;

singular, 異變換.

Transposed matrix, 共軛方陣.

U

Unimodular matrix, 單餘方陣.

Unit matrix, 么方陣.

V

Vertex of a cone, 錐面之頂點.
of a quadratic form, 二次方式之頂點.

W

Weierstrass, 維也斯特拉斯.

Weight of an invariant, 不變式之權;
of a covariant, 同步不變式之權;
of a polynomial, 多項式之權;
of a symmetric polynomial, 對稱多項式之權.