新課程標準師範學校適用
新課程標準鄉村師範學校適用

算學

(4)

基本運算之練習

全一冊

編者 陸子芬
譚秉乾

上海中華書局印行

註冊商標

(9483)

0.48

民國二十六年四月六版

新課程標準師範適用

基本運算之練習（全一冊）

◎實價國幣四角八分
（郵運匯費另加）

編者　陸子芬
　　　譚秉乾

發行者　中華書局有限公司
　　　　代表人　路錫三

印刷者　上海澳門路 中華書局印刷所

總發行處　上海福州路 中華書局發行所

分發行處　各埠中華書局

（九四八三）

$38.40

編輯大意

1. 本書依照部頒師範及鄉村師範課程標準算學教材大綱之次序編輯。

2. 師範生於小學初中已習算術二次,對於初等運算已有相當之根基,故開始即以復習基本運算,使之充分熟練為主,次則補充各種算法以引起其興趣。

3. 整數論在課程標準中已列入代數綱目內,本書不另。

4. 師範生對於算學理論及方法,不僅以自明其義為滿足,異日且須出以教人,故須富有常識及其說明方法,本書即與以多方之指導,分別加以通暢之說明。

5. 本書特別注重練習,除授一新法,隨時附入習題外,又於各章之末,有總括的復習題以為整理,使學者對於體系的觀念,益加明瞭。

6. 習題不偏重計算,兼重理解,蓋一方使學者對於算法有純熟的修養,以便運用自如;一方使學者對於算理有深切的研究,不致略窺門徑。

7. 本書編輯期促,疏略必有不免,切望海內方家多加指正以便隨時修改,是所至幸.

新課程標準師範算學

基本運算之練習

目　次

第一章　緒論

章二章　整數四則

第三章 速算及簡便算

第四章 分數小數四則

1. 分數

2. 小數

第五章 省略算

第六章　乘方與開方

第七章　對數

第八章　複名數

新課程標準師範適用

基本運算之練習

第一章　緒論

1. 算術的定義　算術是討論數的性質和算法的一種學問。他是一切算學的基本,對於日常生活上的實際問題又有極廣泛的應用。因爲社會上事物繁賾至夥,如無數字及算法來整理,必呈淩亂錯雜的現象,而不能求得其因果。所以儘有人一字不識,但却不能不懂得一些算術;否則便不足以處世應物,近代科學家Michelson氏有言:人若不能舉出關於某一事的數字,即不能謂爲明白該事。這話確有至理。由此可以看出算術之如何重要。

2. 數量及單位　凡可以計數,測量權衡的,都叫做**量**。要比較同類二量的大小或多少,首先要選一適宜的量爲標準,這標準叫做**單位**。有了單位,然後看某量是單位的幾倍,便可以用數表示出來。由數的大小,便能定量的大小。

數後附帶量的單位的叫**名數**;不附的叫**不名數**。算術上的運算多用不名數,不過得到結果後加上量的單位,便可應用到名數上面。

3. 數的命法及記法　數命名的方法,叫**命數法**。用數字來表數的方法,叫**記數法**。命數法的基本原則是十進位,共用九個數:一、二、三、四、五、六、七、八、九做基數。法將萬以下的數,每進一位即更一名,萬以上的數,每進四位即更一名,其位次如下:

　　　　　　千百十　千百十
……兆,億億億億,萬萬萬萬,千百十一

兆以上還有京、垓、秭、穰、溝、澗、正、載等位名,都是四位一進。

〔註〕　萬以上位名億、兆等除如上述每四位一進外,還有一種進位,就是每位一進。即十萬爲億,十億爲兆等。但教育部最近已規定一律採用上述四位一進的一種,以免含混不清。

記數時常用**阿剌伯數字**1、2、3、4、5、6、7、8、9、0來記。將位次最高的數字列在最左,順次將位次較低的向右排列,中間或後面所缺的位數,須用零挨次記上。

大數記時和讀時,常恐有位次的錯誤,如自個位起向左每四位數的右下方畫一小撇,則撇的左一位數順次是萬、億、兆等位,如此便不致有何錯誤。

〔例〕 27,3604,9781,0034

兆 億 萬

讀為二十七兆三千六百零四億九千七百八十一萬零三十四。

4. <u>數的演化</u> 算術上所研究的數以整數為基本,在加減乘三法裏整數已夠應用,似可不必再添新數。可是遇着除法,便感覺整數不夠應用。於是便添上**分數**及**小數**。這三種數已夠表示任何連續量及不連續量,於是在初等算術裏便全以研究這三種數的運算為主。但是在減法裏,若是被減數比減數小,所得的差又無法可記。在以前算術裏,常加以限制,說被減數不得比減數小,應比減數大,至少也得相等。我們為使算法普徧起見,不欲多事限制。便叫被減數比減數小時所得的差數為**負數**。前面所說的幾種數,如不是負數,便叫**正數**。正負二種數的交界便是**零**。這樣

共有了正負整數、零、正負分數諸種數。但仍不能包括一切的數。如用開方所得一數的方根,普通與前述諸數不同,如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ 等,我們叫他做**無理數**。前述諸數如正負整數、正負分數等便叫**有理數**。無理數雖無確數來表示,尚可記以近似的數值。若負數開平方,更無數來記,所以普通有負數不能開平方的限制。若我們要除去這項限制,便可說這數是**虛數**。不是虛數的如有理數及無理數等,便可叫**實數**。實數同虛數二者的和叫做**雜數**。雜數是一切數最普遍的形式,若內中所含的實數爲零,便表示虛數;虛數爲零,便表示實數;所以雜數可表示任何種數。 今將諸數的關係列表於次:

$$\text{雜數}\begin{cases}\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{正負整數}\\\text{零}\\\text{正負分數——小數}\end{cases}\\\text{無理數}\end{cases}\\\text{虛數}\end{cases}$$

5. <u>符號</u> 算術上常用的符號分類如次:

(一)**運算符號** 有 $+$、$-$、$\times$、$\div$、$\sqrt{\ }$、$:$、$\pm$、$\sim$ 等。

$+$ 爲**加號**,$-$ 爲**減號**,$\times$ 爲**乘號**,$\div$ 爲**除號**,$\sqrt{\ }$ 爲**根號**,$:$ 爲**比號**,$\pm$ 爲**或加或減號**,$\sim$ 爲**差**

號。

±號放在二數中間,表示由第一數加或減第二數。

～號放在二數中間,表示由第一數減第二數,或由第二數減第一數。

〔例〕 $16\pm4=20$或12。 $16\sim4=12$或-12。

(二)**數性符號** 有+、-、|| 等。

+爲正號,-爲負號,|| 爲絕對値號。

+或-放在一數前面,表示這是正數或負數。

|| 放在一數的兩旁,表示祇算這數的數値,不算符號。

〔例〕 $|+5|=5$, $|-5|=5$.

(三)**關係符號** 有=、>、<、≠、≯、≮等。

=爲等號,>爲大於號,<爲小於號,≠爲不等號,≯爲不大於號,≮爲不小於號。

=放在兩式中間,表示兩邊的數値相等。

>及<放在兩數中間,大數常放在開口的一邊,小數放在閉口的一邊。

≠、≯、≮放在兩數中間,爲反面兩種關

係的合寫法。有時也寫爲 $\gtrless$、$\leqslant$、及 $\geqslant$。

〔例〕 $2+3=1+4$, $5>3$, $3<5$, $5\neq3$, $3\not>5$, $5\not<3$.

〔註一〕 一式繼續演變時,中間聯絡若干等號,我們要深切注意,每一等號兩端的數值是否相等,如有一端不等,雖最後結果對的,也算錯誤。

〔例〕 $12+5+7+9=17+7=24+9=33$. 錯的。

〔註二〕 二數的大小關係,共有等於、大於、小於三種,所以每一種關係的反面常有兩種關係,不能僅寫一種。

〔例〕 $a\not>b$ 表示 $a=b$ 或 $a<b$。

(四)**集合符號** 有 $\overline{\quad}$、( )、[ ]、{ }、| 等括號。$\overline{\quad}$、| 爲**橫括線**及**直括線**,( )爲**括弧**,[ ]爲**括弓**,{ }爲**括帶**。

一式上面記以橫括線,或直寫這式,而把直括線列在右邊,或在這式兩邊包以括弧、括弓或括帶,總表示式內的數應當看做一個數。

(五)**因果符號** 有 $\because$、$\therefore$ 等。

$\because$ 放在一式的前面,表示因爲的意義。

$\therefore$ 放在一式的前面,表示所以的意義。

習題一

1. 說出幾種長度、重量、容積、時間、溫度、貨幣的名數，並各指出他的單位。

2. 舉例說明名數同不名數的區別。

3. 異類的名數能加減麼？ 同類而不同單位的名數能加減麼？ 二名數如何始能加減？

4. 俗說中國人口共有四萬萬或四百兆，應如何記法，又應改讀爲多少？

5. 據曾世英推算中國全國面積爲1117,3558平方公里，讀出這數來！

6. 比一兆少一是什麼數？ 記出來。

7. 十位數裏最大的是什麼數？ 最小的是什麼數？

8. 分別以下各數的種類：

(1) 4.3602　(2) $\sqrt[3]{295}$　(3) $|-32|$　(4) -2004

(5) $\frac{69}{127}$　(6) $-\sqrt{-20}$　(7) $\sqrt{8}$　(8) $3+\sqrt{-4}$

9. 設用 a、b、c 等代表幾個數，寫出以下各式來：

(1) a 減 b 的絕對值。　(2) a 與 b 的差數除以 c。

(3) 負 a 小於正 b。　(4) a 比 b 不大於 c 比 d。

(5) a 減 b，除以 c，加上 d，從 e 裏減去，再乘以 f。

(6) 因爲 a 等於 b，所以兩邊同加 c，或同減 c，同乘以 c，或同除以 c，兩邊的 c 方，或 c 次根都各相等。

第二章　整數四則

6. 加法　將同名的兩數或多數合成一總數的方法,叫做**加法**。第一數叫**被加數**,第二數及以次諸數多叫**加數**,總數叫**和**。

兩數相加的公式爲:

被加數＋加數＝和。

〔註〕　不名數相加,總是泛指同名數而言。異類二名數不能加攏,同類而不同名的二數,也須先化爲同名數,而後始能相加。

7. 加法運算律　兩數及多數相加,須根據以下二定律:

(一)**加法可易律**　**兩數或多數相加,加數次序無論如何顚倒,所得的和總是一樣。**

〔公式〕　$a+b=b+a$.

(二)**加法可羣律**　**多數相加,不論加合的先後,結果常同。**

〔公式〕　$(a+b)+c=a+(b+c)$

〔註〕　以上二定律的眞確,由直覺或和的意義與次序無關便可看出。或用數字及線條來證,也能令小學

生清楚。

8. 加法規則　多數相加,只要把各數的位次上下列齊,然後由最右邊個位數字加起,順次加到左邊去,每位的數字和滿十就進位 1,滿二十就進位 2,類推下去。

〔例〕　求$5120+3849+876+4617$

〔解〕
$$\begin{array}{r}5120\\3849\\876\\+4617\\\hline 22\cdots\cdots\text{個位數字和}\\14\cdots\cdots\text{十位數字和}\\23\cdots\cdots\text{百位數字和}\\12\cdots\cdots\text{千位數字和}\\\hline 14462\end{array}$$

〔簡式〕
$$\begin{array}{r}5120\\3849\\876\\+4617\\\hline 14462\end{array}$$

以上規則根據那一條定律?

9. 加法驗算　根據加法可易律,加數次序任意變更,和總不變;所以要驗算加法是否錯誤,可把加數次序變更後再加一遍,或就前式把各位數字和照另一次序再求一遍,若總和與前相同,便是不錯。

〔例〕
$$\begin{array}{r}5120\\3849\\876\\+4617\\\hline 14462\end{array}$$

〔驗算〕
$$\begin{array}{r}876\\3849\\4617\\+5120\\\hline 14462\end{array}$$
結果不錯

10. 減法　由總數裏面取出一部分數,求另

一部分數的方法,叫做**減法**。總數叫**被減數**,取出的一部分數叫**減數**,所餘的另一部分數叫**差**。

兩數相減的公式爲

被減數－減數＝差。

11. 減法規則　兩數相減,先把位次上下列齊,然後由最右邊個位數字減起,順次算到左邊;若本位數不够減,須在左邊借一數再減。

〔例〕　求 $3056-1829$

〔解〕

$$\begin{array}{r} 3056 \\ -1829 \\ \hline 1227 \end{array}$$

〔說明〕　$16-9=7$, $4-2=2$, $10-8=2$, $2-1=1$。

12. 加減的關係　因爲加法是求幾個數的總數,而減法則爲已知總數及一部分數,求另一部分數,故知**減法是加法的反面算法**。我們叫這兩種算法互爲**逆運算**。設用 a、b、c、代表三個數值,加減的關係,可以表示如下:

加法　　$a+\mathrm{b}=\mathrm{c}$。

減法　　$\begin{cases} \mathrm{c}-a=\mathrm{b}。\\ \mathrm{c}-\mathrm{b}=a。\end{cases}$

以上諸式可用數字代入,或畫線條作給小學生看。

13. 減法驗算　減法可利用他是加法反面

的關係來驗算結果的正誤。法將減數與差加起來,若和與被減數同,便是不錯。

〔例〕 $\begin{array}{r} 3056 \\ -1829 \\ \hline 1227 \end{array}$　　〔驗算〕 $\begin{array}{r} 1829 \\ +1227 \\ \hline 3056 \end{array}$ 結果不錯

習 題 二

用心算求以下各組數的和;愈快愈好:

1. 8、9、7、6、3、8、5　　2. 9、8、9、2、3、6、8、9、7、7

3. 6、9、8、3、4、7、9、2、9、8　　4. 1、4、7、9、3、5、2、8、9、6、7

求以下各題的結果,並驗算一遍:

5. 219+752+6430+28

6. 8,6794+7,0912+3,3678+1,0029+8794

7. 9,4998+7,0732+12,3989+4956+8,9886

8. 1,2345−6789

9. 8970,2341−2998,3672

10. 400,0000,0000−26,0397,8254

11. 把以下二表的空處,用適當的數填上:

被加數	加 數	和
269		540
437	894	
	8702	10236

被減數	減 數	差
	251	674
1000		358
7963	3489	

12.上海市二十四年三月份人口統計共三百五十萬八千八百三十一人,內有外僑六萬六千八百二十三人,問本國人有多少?

13.最近財政部長孔祥熙發表中央二十二年度收支報告,約略如次:

(一)收入之部,

稅項收入	6,2165,8957.14元
債券借款	1,7995,9932.16元
上年度結存	2709,3398.86元

(二)支出之部

黨務支出	558,9584.93元
政務支出	9889,3495.59元
軍務支出	3,7289,5222.52元
債務及賠款	2,4427,8238.64元
其他	4746,5833.79元

求收入總數,支出總數,又結存多少?

14.民國二十二年我國糧食進口驚人之統計如下,試求總數量及價值。

品　名	數　量(擔)	值　價(元)
米　穀	2142,3091	1,5010,7416

小　麥	1771,6296	8714,8667
麥　粉	323,6321	2775,5408
雜　糧	4440,7499	929,1943

(青島工商季刊第二卷第二號)

14.乘法　求某數倍數的方法叫做**乘法**。某數叫**被乘數**,所求倍數的倍次叫**乘數**,得的結果叫**積**。

一　兩數相乘的公式爲

被乘數×乘數＝積。

〔註〕　乘數表示倍數的倍次,所以不得爲名數,又被乘數與積,**須爲同名數**。

15.乘加的關係　乘法是求倍數的方法。某數的若干倍意思就是若干個某數的和,所以**乘法就是同數相加的簡便方法**。

〔例〕　$\begin{cases} 124+124+124+124+124=620 \\ 124\times5=620 \end{cases}$

所以 $ab=a+a+a+\cdots\cdots$ 加到 b 個。

16.乘法運算律　乘法的運算律有三:

(一)乘法可易律　兩數或多數相乘,**被乘數與乘數次序無論如何顛倒,結果總是一樣**。

〔公式〕 $a\times b=b\times a$。

〔註〕 由這定律,所以在不名數運算上被乘數與乘數無分別的必要,我們可總稱之爲積的因數。

(二)乘法可羣律　多數相乘,不論相乘的先後,結果常相同。

〔公式〕 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

(三)乘法分配律　某數與幾個數和差的乘積,等於某數與這幾個數各個乘積的和差。

〔公式〕 $(b+c-d)\times a=b\times a+c\times a-d\times a$

或 $a\times(b+c-d)=a\times b+a\times c-a\times d$

以上三定律可用數值代入來證明。

17.<u>乘法規則</u>　兩個位數相乘,只要熟記九九表。個位數乘多位數,常從最右邊的個位數乘起,順次乘到左邊去。多位數乘多位數,先用乘數的個位數字乘被乘數,所得的部分積從個位寫起,再用乘數的十位數字乘被乘數,所得部分積從十位寫起,如此把乘數的各位數字乘

九　九　表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		4	6	8	10	12	14	16	18
3			9	12	15	18	21	24	27
4				16	20	24	28	32	36
5					25	30	35	40	45
6						36	42	48	54
7							49	56	63
8								64	72
9									81

遍,然後把各部分積總加起來,便得兩數的乘積。

〔例〕 求 416×253

〔解〕

$$\begin{array}{r} 416 \\ \times253 \\ \hline 1248 \\ 2080 \\ 832 \\ \hline 105248 \end{array}$$

〔說明〕

$$\begin{array}{rl} 416 & \\ 253 & \\ \hline 1248 & =416\times3 \\ 20800 & =416\times50 \\ 83200 & 416\times200 \\ \hline 105248 & =416\times(200+50+3) \end{array}$$

〔註〕 以上規則是根據乘法分配律而來,若先用乘數的最高位數字來乘,依次乘到右邊,最後所得的積也是一樣.這由加法可易律便可知道。

〔例〕 求 416×253

〔解〕

$$\begin{array}{r} 416 \\ \times253 \\ \hline 832 \\ 2080 \\ 1248 \\ \hline 105248 \end{array}$$

18.<u>乘法驗算</u> 根據乘法可易律,乘數與被乘數的位置可以互易,而乘積不變,由此可驗算乘法。

〔例〕

$$\begin{array}{r} 416 \\ \times253 \\ \hline 1248 \\ 2080 \\ 832 \\ \hline 105248 \end{array}$$

〔驗算〕

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times416 \\ \hline 1518 \\ 253 \\ 912 \\ \hline 105248 \end{array}$$

結果不錯

習題三

求以下各題的積,並驗算之:

1. 256×32　　2. 796×2000　　3. 40000×5172

4. 2987×3264　　5. 70891×982　　6. 89073×15976

照兩種次序,求以下各題的連乘積,看結果同否?

7. $512\times18\times250$　　8. $3946\times125\times96\times24$

求以下兩題的結果,看相同不相同?

9. $324\times135+324\times79-324\times26$

10. $324\times(135+79-26)$

11.設建築鐵道每哩需鐵 116 噸,每噸鐵價爲 65 元,問建築 128 哩之鐵道需鐵價多少?

12.甲買田 24 畝,每畝價值 132 元;乙買田 32 畝,每畝價值 84 元,問總價相差多少?

19.除法　求甲數裏面能容乙數幾倍的方法,叫做除法。甲數叫做**被除數**,乙數叫**除數**。幾倍的倍次叫做**商**。假若甲數不是乙數的整倍數,那麼除去能容乙數的整倍數外,還有比乙數較小的多剩的數,叫做**餘數**。

兩數相除的公式爲

(一) 整除　　被除數÷除數＝商

(二) 非整除　被除數÷除數＝商＋$\frac{餘數}{除數}$

〔註〕　等分一數為幾份的方法,也叫除;所以除法共有兩種。若被除數與除數同名,商就是不名數;若除數是不名數,被除數與商就同名。

20. 除減的關係　要求甲數裏面能容乙數多少倍,也可由甲數內疊減乙數,看幾次減完,或減幾次所剩的數就比乙數小,這疊減的次數,就是甲數能容乙數的倍數,減後所剩的數,就是除後所得的餘;所以**除法就是由某數內疊減同數的簡法**。

〔例〕　$627-124-124-124-124-124=7$

$627\div124=5+\frac{7}{124}$

兩法同是表示 627 內能容 5 個 124, 尚餘 7。

21. 乘除的關係　乘法是求某數若干倍的倍數。除法則求某數內能容他數幾倍,可見**除法正為乘法的反面算法**。我們也叫這兩種算法互為逆算法,正和加減法互為逆算法相同。設用 a, b, c, d 代表幾個數值,乘除的關係可分別表示如下:

(一) 整除　設　$a\times b=c$。

　　　　　則　$c\div a=b$。

　　　　　　　$c\div b=a$。

(二) 非整除　設　$a\times b+d=c$。

　　　　　　則　$(c-d)\div a=b$。

　　　　　　　　$(c-d)\div b=a$。

　　　　　　　　$c-a\times b=d$。

以上各式可用數值代入來證明。

22.除法運算法　除法內有一條運算律,和乘法分配律相似,就是

除法分配律　諸數的和差,用某數去除,等於諸數各用某數除後,所得商的和差。

〔公式〕　$(b+c-d)\div a=b\div a+c\div a-d\div a$

〔註〕　分數加法就是根據除法分配律而來。又除法和減法一樣,不適合可易律同可羣律。

23.除法規則　要求甲數除以乙數,所得的商同餘,常先看甲數內能含乙數的最高位整倍數是多少,減去這倍數;再看餘數內能含乙數的次高位整整幾倍,再減去這倍數;如此遞次減去,直到減剩的數比乙數較小爲止。那麼甲數所含

乙數各位倍數的和便是商,減剩的數便是餘數。若沒有餘數,餘數便是零。

〔例〕　求　97300÷412 的商及餘數。

```
〔解〕        236           〔說明〕      200＋30＋6
      412)97300            b····412)97300···········c
       —)824                      —)82400··········200b(—
         1490                        14900··········c—200b
       —)1236                     —)12360··········30b (—
          2540                        2540··········c—230b
       —) 2472                    —) 2472···········6b(—
            68                          68··········c—236b
```

由說明可見　$97300-236\times412=68$, 卽商爲 236 餘爲 68。

24.<u>直接運算與間接運算</u>　求兩數的和是根據記數法;求兩數的積是根據九九表,這兩種算法,叫做**直接運算**。若求兩數的差,常利用減法是加法反面的原理,由加法來逆推;要求兩數的商,也利用除法是乘法反面的原理,疊用乘減法,推求出商同餘數。這兩種算法,我們叫他做**間接運算**。

25.<u>除法驗算</u>　由除法是乘法逆運算的道理,要驗算除法作得錯否,祇要看除數與商的積再加上餘數,是否等於被除數而定。

［例］ 97300÷412=236餘68,對不對?

［驗算］ 412×236+68=97232+68=97300 不錯

［另法］ (97300−68)÷236=97232÷236=412。 不錯

習題四

求以下各題的商同餘數並驗算之:

1. 1,7158÷746
2. 8,4099÷97
3. 687,6000÷900
4. 425,9600÷4630
5. 125,7950÷3475
6. 4828,8058÷3094
7. 10,0000÷892
8. 25,8609÷999
9. 123,4567÷6081
10. 800,0965÷193

求以下兩題的結果看相同不相同:

11. 13,9104÷276−8,6112÷276+3,4500÷276
12. (13,9104−8,6112+3,4500)÷276

13.據國民政府主計處於民國二十一年所調查,江西省各縣棉產地面積約195,1000畝,產量為3998,5000斤,問平均每畝可產棉多少斤?

14.據第一次中國教育年鑑發表民國十九年度全國初等教育之入學兒童共計有1094,8979人,教職員有56,8484人,問每一教職員平均可教兒童幾人? 又設全

國人口總數爲4,6490,5269人,則每千人中,已入學兒童平均有多少?

26.方數 幾個同數的乘積,叫做這數的**方數**,有多少數相乘,便叫多少次**方**。如三個 a 相乘就叫 a 的三方,記做 a^3;有五個 a 相乘,就叫 a 的五方,記做 a^5,這右上方的數字,叫做**指數**,也叫這方數的**次數**。

〔註〕 二方常叫**平方**,三方常叫**立方**。

因爲10的方數的指數常與方數在1後零的個數相等。所以位次很多的大數常用指數記法,很簡單的寫出他的近似值。

〔例〕 天狼星距地球八十四兆公里,用數字記出來。

〔解〕 八十四兆記爲84,0000,0000,0000

$$84,0000,0000,0000=84\times1,0000,0000,0000=84\times10^{12}.$$

所以天狼星距地球 84×10^{12} 公里。

27.指數定律 指數定律有三,用文字記式如下:

(一)**相乘律** $a^m a^n=a^{m+n}$ (指數全爲正整數)

(二)乘方律　$(a^m)^n=a^{mn}$

(三)分配律　$(ab)^m=a^mb^m$

〔例〕　$a^3.a^2=aaa{\cdot}aa=aaaaa=a^5=a^{3+2}$

$(a^2)^3=a^2.a^2.a^2=a^{2+2+2}=a^6=a^{2\cdot3}$

$(ab)^3=ab.ab.ab=aaa.bbb=a^3b^3$

使指數為零及負數、分數時，也適合以上三律，就得　$a^0=1$,　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$,　$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$,
由是相除律可寫為　$a^m\div a^n=a^{m-n}$。

28.十進記數法　前面第一章裏面所講的十進記數法，實際就是10的各次方數的係數的簡便寫法。

〔例〕　五萬二千七百九十六

$=5,0000+2000+700+90+6$

$=5\times10^4+2\times10^3+7\times10^2+9\times10+6$

10的各次方數的係數順次是5、2、7、9、6，於是為簡便計，這數就記為5,2796.　所以五位數為10的四次多項式的縮寫。

要求兩數的和、差、積、商，也儘可以把各數寫成10的多項式，然後照代數法求得兩多項式的和、差、積、商，化為一簡單多項式，再縮寫他的數值。

兩數若用多項式法來記,很容易看出他們乘積的位數。如一數為 m 位數,一數為 n 位數,可用 10 的 $m-1$ 次及 $n-1$ 次兩式來記,因為 $10^{m-1}\cdot10^{n-1}=10^{m+n-2}$,所以兩數的乘積可用 10 的 $m+n-2$ 次式來記。若乘積中首項的係數小於 10,則乘積為 $m+n-1$ 位數;若乘積中首項的係數大於 10,則乘積可記為 10 的 $m+n-1$ 次式,也就是表示乘積為 $m+n$ 位數。**所以 m 位數與 n 位數兩數的乘積為 $m+n-1$ 位數或 $m+n$ 位數。**

29. 非十進記數法　非十進記數法與十進記數法相似,也是先將一數化為非十的某數各次方數的倍數的和,然後順次寫下各項係數便得

〔例〕　用 12 進位及 9 進位法記出五萬二千七百九十六。

〔解〕 (1)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 52796 \\ \hline 12 & 4399 \cdots\cdots \text{餘}8 \\ \hline 12 & 366 \cdots\cdots \text{餘}7 \\ \hline 12 & 30 \cdots\cdots \text{餘}6 \\ \hline & 2 \cdots\cdots \text{餘}6 \end{array}$$

$\therefore 52796=2\times12^4+6\times12^3+6\times12^2+7\times12+8$。

所以照十二進位法,五萬二千七百九十六可記為

26678。

$$(2)\quad \begin{array}{r|l} 9 & 52796 \\ \hline 9 & 5866 \cdots\cdots 餘2 \\ \hline 9 & 651 \cdots\cdots 餘7 \\ \hline 9 & 72 \cdots\cdots 餘3 \\ \hline & 8 \cdots\cdots 無餘 \end{array}$$

$$\therefore 52796 = 8\times 9^4 + 0\times 9^3 + 3\times 9^2 + 7\times 9 + 2。$$

所以照九進位法,五萬二千七百九十六可記爲80372。

習題五

求以下各方的數值:

1. 1至10各數的平方　2. 1至10各數的立方

3. 2^{12}　4. 3^9

5. $(4\times 5)^5$　6. $(6^2)^3$

7. 設某年發生蟲害,農產物的損失總額約十七億元,用指數記法來記。

8. 天狼星距地球八十四兆公里,光速每秒鐘爲三十萬公里,問自天狼星發光須隔多少年始到地球?

9. 證明m位數的平方常爲 $2m-1$ 位數或 $2m$ 位數。

10. 證明m位數的立方常爲 $3m-2$ 位數, $3m-1$ 位數,或 $3m$ 位數。

11.用指數記法來記 84648,並證其平方含一切基數及零。

12.用題11法來算9,7779及3,5853。

13.用20進位法來記的12345實在表示什麼數?

14.用8進位法及5進位法來記1,0000。

30.<u>式同演算的次序</u>　用各種運算符號把幾個數連絡起來,表示他們相互間的關係結果叫做式。

單有加減或乘除的式,都自左到右,順次演算。如式內加減乘除四法混合,要先演乘除,後算加減。

〔例一〕　$83-24-16+30=59-16+30=43+30=73$。

〔例二〕　$60\times 9\div 15\div 18=540\div 15\div 18=36\div 18=2$。

〔例三〕　$24-18\div 6+2\times 5=24-3+10=21+10=31$,

〔註〕　**如一式內含有加減乘除以外,還有乘方及開方,應最先算乘方及開方,以次算到乘除,最後纔算加減。**

〔例〕　$100-3\times 4^2=100-3\times 16=100-48=52$。

31.<u>有括號的式</u>　括號是集合符號,凡在這種符號內諸數的和差積商總當看做一個數,所

以

式裏有括號的,當先把括號裏的數算好,然後再照演算次序,同外面的數演算,若式裏括號不止一道,應先從最裏面的一道算起,順次算到外面。

〔例一〕 $120\div(45\div3)\times2=120\div15\times2=8\times2=16$。

〔例二〕 $28\times(5+7)\div21=28\times12\div21=336\div21=16$。

〔例三〕 $\{15-6\div3-[5-(56-2\times3^3)+4]\}\div6$

$=\{15-2-[5-2+4]\}\div6$

$=[13-7]\div6=6\div6=1$。

32.撤去括號法　根據括號定義,括號裏面的數本應當先算好,然後再算到外面,但是有時候先撤去括號再算要比較方便些。現就括號外爲加號、減號、乘號、除號四種分敍如下:

(一)祇含加減法的式,在加號後面的括號如要撤去,裏面的加號仍爲加號,減號仍爲減號。

〔公式〕 $a+(b+c-d)=a+b+c-d$。

理由。在一數的後面加上兩數的和,當然比獨加一數要多些,所以結果等於疊加兩數的和;若加上兩數的差,結果比獨加前數要少,所以

等於加前數再減後數。

(二)祇含加減法的式,在減號後面的括號如要撤去,裏面的加號要改為減號,減號要改為加號。

〔公式〕 $a-(b+c-d)=a-b-c+d$。

理由。在一數後面減去幾數的和,比獨減一數要少,所以結果等於遞次減去這幾數;若減去兩數的差,結果比獨減前數要多,所以等於減前數再加後數。

(三)祇含乘除法的式,在乘法後面的括號如要撤去,裏面乘除號,依舊不變。

〔公式〕 $a\times(b\times c\div d)=a\times b\times c\div d$。

理由。用兩數的積來乘一數,比獨用一數來乘要多,所以結果等於遞次乘上這幾數;若用兩數的商來乘,比獨用前數來乘要少,所以結果等於乘上前數再用後數來除。

(四)祇含乘除法的式,在除號後面的括號,如要撤去,裏面乘除號要互變一下。

〔公式〕 $a\div(b\times c\div d)=a\div b\div c\times d$。

理由。用兩數的積來除一數,比獨用一數

來除,得商較少,所以結果等於遞次用兩數來除;若用兩數的商來除,結果比獨用前數來除得商較多,所以等於用前數除後,再用後數來乘。

以上四公式,逆寫也對,所以諸法則可總述如下:

在加號或乘號後面,撤去或加入括號,裏面運算符號不變;在減號或除號後面撤去或加入括號,裏面符號加減互換乘除互換。

〔註〕 以上法則僅當式裏祇有加減號或僅有乘除號纔能應用。

〔例一〕 $72-(45+13)=72-45-13=27-13=14$。

〔例二〕 $936\div[13\times(18\div2)]=936\div13\div(18\div2)$

$=936\div13\div18\times2=72\div18\times2=4\times2=8$。

習題六

計算以下各式之值:

1. $6072+394-567$
2. $6072-567+394$
3. $6072-(567+394)$
4. $6072-(567-394)$
5. $1848\div66\div6\times12$
6. $1848\div6\times12\div66$
7. $1848\div(66\times6\div12)$
8. $1848\div(66\div6\times12)$

9.　$12+\text{[illegible]}\times 8-6\div 2$　　10.　$[12+4(8-6)]\div 2$

11.　$25\div 5+5\times 10-31-24+1$

12.　$25\div\{5+5\times[10-(31-\overline{24+1})]\}$

13.　$\{[(20-16\div 4)\div 2]+12\times 0\div 3\}\div 8\div 1$

14.　$2^5\div\{5^2+7\times[5\times 1^4-(4-0\div 7)]\}$

以下各題裏的括號先自裏面去起,再先自外面去起,看兩法所得的結果同否?

15.　$9-\{8-[7-6-(5-4-\overline{3-2})-1]\}$

16.　$1\text{[illegible]}6\text{[illegible]}\div\{630\div[70\div(14\div 2)]\}$

17.　$a-\{b+c-[d-(e+\overline{f-g+h})-i]-j+k\}$

18.　$a\div\{b\times c\div[d\div(e\times\overline{f\div g\times h}\div i]\div j\times k\}$

復習題

1.說出數、量的關係及分別。

2.英美各國記載大數,常自個位起向左每三位數的下方畫一小撇,如是,撇的左一位數順次表示什麼位?由這法來定位名,較由四位畫撇來定位名,孰較方便?

3.中央二十四年度支出總概算爲九萬九千萬,記出這數,再用指數記法來記一遍。

4.據中央農事實驗所調查民國二十年水災農產

損失約二十億元,民國二十三年旱災農產損失約十三億六千萬元,又每年受螟蟲損失約二億元,試各用指數記法記出來。

5. 說出加減乘除相互的關係。

6. 加法、乘法的驗算是根據什麼道理?減法除法的驗算是根據什麼道理?

7. 什麼是直接運算? 什麼是間接運算?

8. $a\times b$ 與 a^b 有什麼分別?

9. 說出 1 與 0 的特性。

10. 比十小的某進位記數法記出的數,較用十進位記數法記出的數大還是小?舉一數值的例。

11. 證明 m 位數,n 位數及 p 位數三數的積為 $m+n+p$ 位數,或 $m+n+p-1$ 位數,或 $m+n+p-2$ 位數。

12. 證明 m 位數,除以 n 位數所得的商為 $m-n$ 位數或 $m-n+1$ 位數。

13. 無括號的式演算時應照若何次序?有括號的式呢?

14. 僅含加減法的式,在加號後加入或撤去括號,裏面各項符號,要受什麼影響?在減號後便要怎樣?能各舉一實際問題來證明麼?

15.僅含乘除法的式,在乘號後加入或撤去括號,裏面各項符號要受什麼影響?在除號後便要怎樣?舉一實際問題來說明。

16. $360\div18+360\div20-360\div15=360\div(18+20-15)$?這是不是除法分配律?

第三章　速算及簡便算

33.加減的定理　由加法運算律及括號撤去的影響,得到幾條加減的定理,應用到加減法上,可使算法簡便而迅速。

(一)**一數疊加諸數,可照任何次序相加,或一次加上諸數的和。**

〔公式〕 $a+b+c+d=a+d+b+c=a+(b+c+d)$

(二)**由一數疊減諸數,可照任何次序相減,或一次減去諸數的和。**

〔公式〕 $a-b-c-d=a-d-b-c=a-(b+c+d)$

(三)**雜含加減號的式內,各數帶着數前的符號,可以任意移動位置,而不影響式的總值。**

〔公式〕 $a-b-c+d-e=a-e+d-c-b$

$=a+d-e-c-b$

〔例〕 $96-45+12-24-9=5\ +12-21-9=63-24-9$

$=39-9=30$。

$96-9-24+12-45=87-24+12-45$

$=63+12-45=75-45=30$。

(四)**兩數相加,其一加上某數,其一減去某數,**

然後相加,得數不變。

〔公式〕　$a+b=(a+c)+(b-c)=(a-c)+(b+c)$。

(五)兩數相減,先各加上同數,或各減去同數,然後相減,得數相同。

〔公式〕　$a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$。

4.<u>速加法</u>　要使運算迅速,多半要運用心算,尤其對於加法要練習得純熟無訛。現將速算加法略述數種如下:

(一)諸數相加,凡能合成十或十的方數的,應先加起來。

〔例一〕　$8+6+3+4+7+5+2=(8+2)+(6+4)+(3+7)+5$

$=35$。

〔例二〕　$82+156+18+27+44=(82+18)+(156+44)+27$

$=327$。

〔註〕　一數由稍大的十的方數內減去所得的差,叫這數的**補數**。

〔例〕　24的補數爲76, 428的補數爲572, 9842的補數爲158。

(二)諸數相加,內中若含幾個相同的數,可用乘法來替代加法。

〔例一〕 $7+8+7+7+8=7\times3+8\times2=21+16=37$

〔例二〕 $54+30+54+54=54\times3+30=162+30=192$

(三)幾個連續數相加,若個數是單數,可用個數乘中間一數;若個數是偶數,可用個數之半,乘首末兩數的和。

〔例一〕 $3+4+5+6+7+8+9=6\times7=42$。

〔例二〕 $4+5+6+7+8+9=(4+9)\times3=39$。

〔註〕 本法是根據等差級數求和的公式而來,所以求幾個等差級數的和也用這法。

〔例一〕 $12+15+18=15\times3=45$。

〔例二〕 $83+73+63+53=(83+53)\times2=266$。

(四)兩數相加,若有一加數稍小於十的方數,或其倍數,可先加成十的方數或其倍數,然後再算。

〔例一〕 $364+997=(364-3)+(997+3)=1361$。

〔例二〕 $2996+15687=(2996+4)+(15687-4)=18683$

(五)兩數相加,可用心算,將一數的最高位數先加上他數,依次將次高位數加上,至各位數字加盡爲止。

〔例〕 $287+396=683$。 心算的次序爲$287+300=587$,

$587+90=677$,　$677+6=683$。

(六)多數相加,各加數的同位有同數字的,可用乘法來加,有合成十的,也先合起來,然後再算。

〔例〕 5467　(說明)$7+7+9+1+7=7\times3+(9+1)=31$

3837　$6+3+4+3+3+3=3\times4+(6+4)=22$

2649　$4+8+6+7+2+2=(4+6)+(8+2)+9=29$

1731　$5+3+2+1+2=(5+3+2)+3=13$

+ 237　所以和爲13921

13921

習題七

求以下諸數的和,愈快愈好:

1. $3+9+8+9+9+8+9$　　2. $7+6+7+7+4+5$

3. $6+3+2+1+8+9+6+6$　　4. $8+9+7+6+5+4+3$

5. $13+14+15+16$　　6. $29+31+33+35+37$

7. $32+49+66+83$　　8. $794+863$

9. $3997+648$　　10. $89992+57634$

11. $28936+74192+39572+48597+6744$

12. $12345+60789+54613+39842+50733+7569$

35. 速減法

(一)兩數相減,若被減數是十的方數或十的方數的倍數,先和減數同時減一,然後再減。

〔例一〕 $100000-80973=99999-80972\quad 19027$

〔例二〕 $40000-26870=39999-26869=13130$

(二)若被減數是十的方數,可先化這個數爲 999……(10),形式,然後再減。

〔例〕 $100000-80973=9999(10)-80973=19027$

〔註〕 利用上法,可求一數的補數,只要由左到右,求與該數各位數字和爲 999….(10) 的數便是。

〔例〕 80973 的補數爲 19027。

因爲 $8+\mathbf{1}=9$, $0+\mathbf{9}=9$, $9+\mathbf{0}=9$, $7+\mathbf{2}=9$, $3+\mathbf{7}=10$。

(三)兩數相減,減數稍小於十的方數或其倍數的,可先加成十的方數或其倍數,然後再減。

〔例一〕 $8755-987=8758-1000=7758$

〔例二〕 $13406-5997=13409-6000=7409$

(四)兩數相減,可加上減數的補數,再減去較減數多一位的十的方數。

〔例〕 $732-468=732-(1000-532)=732-1000+532$

$=(732+532)-1000=1264-1000=264$

(簡式)

$$
\begin{array}{r}
732 \\
+)\ \times\ \bar{1}532 \\
\hline
264
\end{array}
$$

(說明) $-1000+532$ 可簡寫為 $\bar{1}532$。

(五)根據加減互為逆運算的理,要求兩數的差,只要求減數的相加數,使所得的和等於被減數。

〔例〕

$$
\begin{array}{r}
732 \\
-468 \\
\hline
264
\end{array}
$$

(說明) $8+\mathbf{4}=12$, 進位1。

$(6+1)+\mathbf{6}=13$, 進位1。

$(4+1)+\mathbf{2}=7$, 所以差為264

〔註〕 本法叫以加代減法,或奧地利減法。

36.加減合算法

(一)多數相加減,先取適宜的次序同結合,然後再算。

〔例〕 $68+19-50+26-18-5$

$=[68-(50+18)]+[26+19-5)]$

$=0+40=40$

(二)多數相加減,先把加數加攏起來,再把減數加攏起來,由前面和裏減去。

〔例〕 $68+19-50+26-18-5$

$=(68+19+26)-(50+18+5)$

$=113-73=40$。

(三)幾個大數相加減,可用以加代減法,一次減去。

〔例〕　2358＋492＋1785－1246－653－188－729＝1819

（算式）

$$\begin{array}{r} 2358 \\ 492 \\ 1785 \\ \hline 1246 \\ 653 \\ 188 \\ 729 \\ \hline \mathbf{1819} \end{array}$$

（說明）(6＋3＋8＋9)＝26, (8＋2＋5)＝15, 26＋**9**＝35,

∵ 35＝15＋20,故進位2。

(4＋5＋8＋2)＋2＝21, (5＋9＋8)＝22, 21＋**1**＝22。

(2＋6＋1＋7)＝16, (3＋4＋7)＝14, 16＋**8**＝24。

∵ 24＝14＋10,故進位1。

1＋1＝2, (2＋1)＝3　2＋**1**＝3。

故結果為1819。

(四)幾個大數相加減,每減一數,可改為加其補數,再減去多一位的十的方數。

〔例〕　2358＋492＋1785－1246－653－188－729＝1819

〔算式〕

$$\begin{array}{r} 2358 \\ 492 \\ 1785 \\ \bar{1}8754 \\ \bar{1}347 \\ \bar{1}812 \\ \bar{1}271 \\ +) \hline \mathbf{1819} \end{array}$$

（說明）(8＋2＋5＋4＋7＋2＋1)＝2**9**

進位2。

(5＋9＋8＋5＋4＋1＋7)＋2＝4**1**

進位4。

$(3+4+7+7+3+8+2)+4=38$

進位3。

$(2+1+8+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1})+3=11$

進位1。

$-1+1=0$ 消去

故結果為1819

習 題 八

求以下各數的補數:

1. 200　2. 8702　3. 40120　4. 98732　5. 10047

求以下諸數的差,愈快愈好:

6. 1000－702　7. 10000－396　8. 60000－47126

9. 2356－989　10. 3961－2998　11. 40152－19978

用以加代減法,及加補數法求以下各差數:

12. 602－347　13. 1012－456　14. 1000－694

15. 30,1574－8,5792　16. 502,4961－314,5078

以下諸題先排成適宜的次序再作:

17. 87－20－3＋13－37　18. 62－34＋47－20－13＋8

19. 512－339＋288＋51＋88

20. 412＋19＋44－253－75＋163

用以加代減法及加補數法,求以下各題的結果:

21. $37029-346-8972-10936-759$

22. $3874-1094-936+6072+2567-4875$

23. $13649+20816-7965-8492-4037-528$

37. <u>乘除的定理</u> 以下幾條乘除的定理是由乘除運算律及在乘除號後撤去括號的影響而得來的。若同加減的定理對看,便知乘除的關係與加減相互的關係,完全相似。

(一)**一數疊乘諸數,可照任何次序相乘,或一次乘上諸數的積。**

〔公式〕 $a\times b\times c\times d=a\times d\times b\times c=a\times(b\times c\times d)$

(二)**一數疊除以諸數,可照任何次序相除,或一次除以諸數的積。**

〔公式〕 $a\div b\div c\div d=a\div d\div b\div c=a\div(b\times c\times d)$

(三)**雜含乘除號的式內,各數帶着數前的乘號或除號,可以任意移動位置,而不影響式的總值。**

〔公式〕 $a\div b\div c\times d\div e=a\div e\times d\div c\div b$

$=a\times d\div b\div c\div e$

(四)**兩數相乘,其一乘上某數其一除以某數,**

然後相乘,得數不變。

〔公式〕 $a\times b=(a\times c)\times(b\div c)=(a\div c)\times(b\times c)$。

(五)兩數相除,先各乘以同數或各除以同數,然後相乘,得數相同,

〔公式〕 $a\div b=(a\times c)\div(b\times c)=(a\div c)\div(b\div c)$。

〔註〕 本定理是小數除法小數點移位的根據,又是分數擴分及約分基本原理。

38.速乘法

(一)用十的方數來乘某數,只要照方數的方次在某數後面添上幾個零便得。

〔例〕 $256\times100=2,5600$, $4080\times10000=4080,0000$。

(二)兩數相乘,常把一數化做幾個因數,分步來乘。

〔例一〕 $185\times600=185\times6\times100=1110\times100=11,1000$。

〔例二〕 $215\times48=215\times6\times8=1290\times8=10320$。

(三)兩數相乘,若一數是十的方數的因數,常化爲兩數的商,撤去括號,然後再算。

〔例一〕 $47\times25=47\times(100\div4)=4700\div4=1175$。

〔例二〕 $47\times125=47\times(1000\div8)=47000\div8=5875$。

〔例三〕 $47\times750=47\times(1000\div4\times3)=47000\div4\times3$

$=35250$。

〔例四〕 $48\times3\frac{1}{3}=48\times(10\div3)=480\div3=160$。

〔例五〕 $48\times16\frac{2}{3}=48\times(100\div6)=4800\div6=800$。

其餘依此類推。

(四)二數相乘,把適當的一數化做幾個數的和或差,然後與他數相乘。

〔例一〕 $152\times97=152\times(100-3)=15200-456=14744$。

〔例二〕 $429\times63714=27333306$。

```
    429
 ×63714
 ----------
  3003……429×7(100)
     6006…429×14=3003×2
 27027………429×63(1000)=3003×9(1000)
 ----------
 27333306
```

〔例三〕 $3832\times1446=554,1072$。

```
    3832
  ×1446
 ----------
    22992……3832×6
   91968………3832×24(10)=22992×4(10)
  45984…………3832×12(100)=22992×2(100)。
 ----------
  5541072
```

(五)兩數相乘,把兩個位數字的積自個位寫起;一數個位數字與他數十位數字交錯乘積的和自十位寫起;一數個位數字與他數百位數字交錯乘積的和加上兩十位數字的積自百位寫起,如此繼續乘去,最後把各部份結果相加,卽得

乘積。

〔例一〕 (簡式)

$$\begin{array}{r l} 129 & \\ \times 356 & \\ \hline 54 & \cdots\cdots 9\times 6 \\ 57\ \ & \cdots\cdots 2(10)\times 6+9\times 5(10) \\ 43\ \ \ \ & \cdots\cdots 1(100)\times 6+2(10)\times 5(10)+9\times 3(100) \\ 11\ \ \ \ \ \ & \cdots\cdots 1(100)\times 5(10)+2(10)\times 3(100) \\ 3\ \ \ \ \ \ \ \ & \cdots\cdots 1(100)\times 3(100) \\ \hline 45924 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 129 \\ \times 356 \\ \hline 45924 \end{array}$$

簡式的運算次序如下:

(1) $9\times 6=5\mathbf{4}$ 進位 5。

(2) $(2\times 6+9\times 5)+5=57+5=6\mathbf{2}$ 進位 6。

(3) $(1\times 6+9\times 3+2\times 5)+6=43+6=4\mathbf{9}$ 進位 4。

(4) $(1\times 5+2\times 3)+4=11+4=\mathbf{15}$ 進位 1。

(5) $(1\times 3)+1=\mathbf{4}$。

所以乘積爲 45924。

(理由) $129\times 356=(10^2+2\times 10+9)(3\times 10^2+5\times 10+6)$

$=3\times 10^4+(1\times 5+2\times 3)\times 10^3+(1\times 6+2\times 5+9\times 3)\times 10^2+(2\times 6+9\times 5)\times 10+9\times 6$。

〔例二〕

$$\begin{array}{r} 3617 \\ \times 425 \\ \hline 1537225 \end{array}$$

(說明) $7\times 5=3\mathbf{5}$ 進位 3。$(1\times 5+7\times 2)+3=2\mathbf{2}$ 進位 2。$(6\times 5+1\times 2+7\times 4)+2=6\mathbf{2}$ 進位 6。$(3\times 5+6\times 2+1\times 4)+6=3\mathbf{7}$ 進位 3。$(3\times 2+6\times 4)+3=3\mathbf{3}$ 進

位3。$(3\times4)+3=\mathbf{15}$。

〔註〕　本法叫做交叉乘法,爲自古以來很有名的算法,有多種速算法皆可根據這法化得,姑舉兩法如下:

(1)如有兩數十位以上的數字相同,個位數字和爲十;把個位數字的積自個位寫起,十位以上數字與其加一的積自百位寫起,得數卽爲兩數的積。

〔例〕　$127\times123=15621$。

$\because\quad 12\times(12+1)=156,\quad 7\times3=21$。

(2)某數用11乘,可寫其個位數字於個位,個位與十位二數字的和於十位,十位與百位二數字的和加上前位的進位數於百位,繼續寫下,總和卽爲所求的乘積。

〔例〕　$24\times11=264$。　$7583\times11=83413$。

(六)兩數如均與十的同一方數相近,可各化爲十的方數與他一數的和或差,然後再乘。

〔例一〕　$997\times994=(1000-3)(1000-6)$

$$=1000000-9000+18=991018。$$

因本題乘積又可寫爲

$$1000\times1000-(3+6)\times1000+3\times6$$

$$=[1000-(3+6)]\times1000+3\times6$$

$$=[(997+994)-1000]\times1000+3\times6。$$

於是照同法,立得

(天)

$$988\times 996=[(988+996)-1000]\times 1000+12\times 4$$
$$=984048。$$

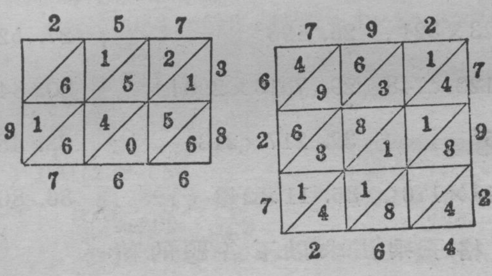
〔例二〕　$107\times 112=(100+7)(100+12)$
$$=10000+1900+84=11984。$$

〔例三〕　$113\times 98=(100+13)(100-2)$
$$=10000+1100-26=11074。$$

以下另舉一種乘法,雖然運算時不甚快當,但是古法之一,計算特別容易,對於小學生是很有興趣的。

(七)兩數相乘,一數橫寫,一數直寫,照兩數的位數畫起方格,再畫上同一方向的對角線,把兩數的各位數字交錯相乘乘積寫在兩數字行列相交的格內,十位數字寫在對角線上,個位數字寫在對角線下,照各對角線的方向,自右下而左上,順次加起各數字,即得乘積。

〔例〕　$257\times 38=9766$。　$792^2=627264$。



〔註〕　這種算法叫做格子乘法,只要照普通乘法列出算式來比較一下,就可以明瞭兩法在實際上完全相同。

習題九

求以下各題的積,愈快愈好:

1. 489×1000　2. $10,0000\times200,0000$　3. $5700\times8,0000$

4. 298×500　5. 157×25　6. 814×1250

7. 4132×75　8. 1024×175　9. $216\times33\frac{1}{3}$

10. $192\times16\frac{2}{3}$　11 $284\times(7\times5\times9)$　12. 504×308

13. 3469×120　14. 435×999　15. 1003×432

16. 9998×79　17. 536×147　18. 90738×643

19. 797×35050　20. 998×992　21. 97×95

22. 1003×1008　23. 1007×993　24. 988×1012

用交叉乘法求以下各題的積:

25. 123×321　26. 123^2　27. 526×437

28. 5123×748　29. 7016×2904　30. 84×86

31. 75^2　32. 217×213　33. 48×68

34. 216×176　35. 11×243　36. 80972×11

用格子乘法求以下各題的積:

37. 719×56　　38. 567^2　　39. 6972×854

39. 速除法

(一)用十的方數來除某數,只要照方數的方次,把小數點移上幾位便得。

〔例一〕 $28{,}9000{,}0000\div 1{,}0000=28{,}9000$。

〔例二〕 $157\times 10^9\div 10^5=157\times 10^4=157{,}0000$。

(二)兩數相除,除數能分解因數的,常分爲幾個因數,分步來除。

〔例一〕 $2640\div 165=2640\div(3\times 5\times 11)=2640\div 3\div 5\div 11$

$=880\div 5\div 11=176\div 11=16$。

〔例二〕 $89460000\div 315000=89460\div 315$

$=89460\div(9\times 7\times 5)=89460\div 9\div 7\div 5$

$=9940\div 7\div 5=1420\div 5=284$。

〔例三〕 $543807\div 3360=161$,餘2847。

(算式)

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{543807} \\ 6 & \underline{54380}\ \cdots\text{餘}7 \\ 7 & \underline{9063}\ \cdots\text{餘}2 \\ 8 & \underline{1294}\ \cdots\text{餘}5 \\ & 161\ \cdots\text{餘}6 \end{array}$$

$3360=10\times 6\times 7\times 8$

餘數 $=6\times 7\times 6\times 10+5\times 6\times 10+2\times 10+7=2847$。

〔例四〕 $239458\div 800=299$,餘258。

(算式)

$$\begin{array}{r|l} 100 & \underline{239458} \\ 8 & \underline{2394}\ \cdots\text{餘}58 \\ & \text{商}=299\ \cdots\text{餘}2 \end{array}$$

$\therefore$ 餘數 $=2\times 100+58=258$

(簡式)

$$\begin{array}{l} 8|00\ \underline{|2394|58} \\ \quad 299\text{——商} \\ \text{餘}258 \end{array}$$

(三)兩數相除,若除數是十的方數的因數,結果等於乘以另一因數,而用十的相當方數來除。

〔例一〕 $185 \div 5 = 185 \div (10 \div 2) = 185 \times 2 \div 10$

$= 370 \div 10 = 37$。

〔例二〕 $1175 \div 25 = 1175 \times 4 \div 100 = 47$。

〔例三〕 $5875 \div 125 = 5875 \times 8 \div 1000 = 47$。

〔例四〕 $17550 \div 75 = 17550 \div (100 \div 4 \times 3)$

$= 17550 \times 4 \div 3 \div 100$

$= 70200 \div 3 \div 100 = 234$。

〔例五〕 $21330 \div 33\frac{1}{3} = 21330 \times 3 \div 100 = 639.9$。

(四)兩數相除,可把被除數化做適當的幾個數的和或差,然後再算。

〔例一〕 $50983 \div 17 = (51000 - 17) \div 17$

$= 51000 \div 17 - 17 \div 17 = 3000 - 1 = 2999$。

〔例二〕 $462277 \div 23 = (460000 + 2300 - 23) \div 23$

$= 20000 + 100 - 1 = 20099$。

(五)兩式相除,照普通方法列式,先求商的最高位數字,依次求以下各位,但是除數與商的各位數字的乘積皆略而不書,並用以加代減法求其與被除數及各部份餘數的差。

(天)

〔例一〕 $112458 \div 263 = ?$

〔解〕

$$
\begin{array}{r}
427 \\
263\overline{)112458} \\
\underline{725} \\
\underline{1998} \\
157
\end{array}
$$

∴ $112458 \div 263 = 427$。

餘157

〔通式〕

$$
\begin{array}{r}
427 \\
263\overline{)112458} \\
\underline{1052} \\
725 \\
\underline{526} \\
1998 \\
\underline{1841} \\
157
\end{array}
$$

(說明) (1)用263除1124得商4,爲商的最高位數字。$3\times4+\mathbf{2}=14$進位1.$(6\times4+1)+\mathbf{7}=32$,進位3.$(2\times4+3)=11$.故餘72。

(2)用263除725,得商2,爲商的次高位數字。$3\times2+\mathbf{9}=15$,進位1.$(6\times2+1)+\mathbf{9}=22$,進位2.$(2\times2+2)+\mathbf{1}=7$.故餘199。

(3)用263除1998,得商7,爲商的末位數字。$3\times7+\mathbf{7}=28$,進位2. $(6\times7+2)+\mathbf{5}=49$,進位4. $(2\times7+4)+\mathbf{1}=19$.故餘157。

所以用263除112458得商427,餘157。

〔註〕 本法叫意大利除法,只要心算算得熟,列式較普通除法簡單,得到結果也較爲快當。

〔例二〕

$$
\begin{array}{r}
338 \\
127\overline{)43019} \\
\underline{491} \\
\underline{1109} \\
93
\end{array}
$$

∴ $43019 \div 127 = 338$。

餘93。

40. 乘除合算法

(一)**多數相乘除,先取適宜的次序同結合,然後再算。**

〔例一〕 $125\times 25\times 23\times 4\times 8=(125\times 8)\times(25\times 4)\times 23$

$=1000\times 100\times 23=2300000$。

〔例二〕 $45\times 12\div 5\div 18\times 6=(45\div 5)\times(12\times 6\div 18)$

$=9\times 4=36$。

(二)**多數相乘除,把所有乘數用乘號連在一起,所有除數也用乘號連在一起,前後約去相同的因數,然後再除。**(**根據乘除的定理三及五**)

〔例〕 $4\times 99\div 22\times 101\div 303=(4\times 99\times 101)\div(22\times 303)$

$=(4\times 9\times 11\times 101)\div(2\times 3\times 11\times 101)$

$=(4\times 9)\div(2\times 3)=6$。

〔註〕 多數相乘除,也可以把乘數乘在一起,除數乘在一起,再來相除,但數值較大,總不及這法來的簡便。

〔例〕 $4\times 99\div 22\times 101\div 303=(4\times 99\times 101)\div(22\times 303)$

$=39996\div 6666=6$。

(三)**諸數各用同數乘或除後的和差,可先求諸數的和差,然後用同數去乘或除。**(**根據乘除法分配律**)

(天)

〔例一〕 $49\times24-18\times24+7\times24=(49-18+7)\times24$

$=38\times24=912$。

〔例二〕 $840\div24+696\div24-408\div24$

$=(840+696-408)\div24=1128\div24=37$。

習 題 十

求以以下各題的商及餘數,愈快愈好:

1. $763000\div100$　2. $2400,0000\div1,0000$　3. $5\times10^{10}\div10^{6}$

4. $25200\div8400$　5. $4000\div25$　6. $17472\div224$

7. $75600\div315$　8. $789235\div450$　9. $1357904\div729$

10. $69625\div375$　11. $2275\div6\frac{1}{4}$　12. $3250\div16\frac{2}{3}$

13. $35982\div18$　14. $944653\div47$　15. $186626\div187$

用意大利除法求以下各題的商及餘數:

16. $793825\div139$　17. $849004\div256$　18. $1039527\div306$

19. $653.27\div899$　20. $3194586\div420$　21. $6783755\div1892$

求以下各題的結果愈快愈好:

22. $76\times32\times125\times100$　23. $52\times6\times125\div13\div75$

24. $11\times34\times32\times75\div6\div22\div17\div25$

25. $66\times91\div14\times72\div143\times31\div93$

26. $35\times102-35\times79+35\times15+35\times24$

27. $46\times52+200\times52-52-73\times52$

28. $715\div11-352\div11+209\div11$

29. $4794\div47+705\div47-2021\div47-611\div47$。

41.四則定位法 大數的加減乘除常會誤位,所以要驗算結果,第一要看位數差誤與否,其次纔能講到各位數字的檢驗,茲就加減乘除四種分別定位如次:

(一)加法定位. **兩數或個數在十以內諸數的和的位數常等於大數的位數,或其位數加一。個數在一百以內的諸數的和的位數等於大數的位數以至大數的位數加二。其餘依此類推。**

(理由) 設十個數裏面最大的數是m位數,小於10^m,十個數的和必定小於$10^m\times10=10^{m+1}$,所以頂多是m+1位數,少於十個的諸數的和當然也頂多是m+1位數。設百個數裏面最大的數是m位數,小於10^m. 百個數的和必定小於$10^m\times100$, 所以頂多是m+2位數。少於百個的諸數的和當然也頂多是m+2位數。

(二)減法定位. **兩數差的位數常等於被減數或較其爲少的位數。**

理由從略。

(三)<u>乘法定位</u>. **兩數的積的位數,頂多等於其位數和,至少等於其位數和減 1。三數的積的位數頂多等於其位數和,至少等於其位數和減 2。m 個數乘積的位數頂多等於其位數和,至少等於其位數和減 $(m-1)$。**

(理由) 設有五個數相乘,其位數爲 9、8、7、7、6,其乘積應較 $10^9 \cdot 10^8 \cdot 10^7 \cdot 10^7 \cdot 10^6 = 10^{9+8+7+7+6}$ 爲小,所以位數頂多爲諸位數的和 $9+8+7+7+6$,又其乘積應較 $10^{9-1} \cdot 10^{8-1} \cdot 10^{7-1} \cdot 10^{7-1} \cdot 10^{6-1} = 10^{(9+8+7+7+6)-5}$ 爲大,所以位數至少爲諸位數的和減 4。 即 $(9+8+7+7+6)-4$。

(四)<u>除法定位</u>. **兩數商的位數,等於被除數與除數的位數的差或其差數加 1。**

(理由) 設被除數的位數是 m,除數的位數是 n,則被除數比 10^{m-1} 大,除數比 10^n 小,所以商比 $10^{m-1} \div 10^n = 10^{m-n-1}$ 大,即商至小爲 $m-n$ 位數。又被除數比 10^m 小,除數比 10^{n-1} 大,所以商比 $10^m \div 10^{n-1} = 10^{m-n+1}$ 小,即商至大爲 $m-n+1$ 位數。

〔註〕 若取較各數略小或略大的十的方數的倍

數來算一算,求得他的近似值,則結果的位數及最高位數字均可求得,這是最簡便的定位法。

42. 簡便驗算法　前章講過四則算法的驗算,對於加法及乘法是利用可易律,對於減法及除法是利用加與減及乘與除互爲逆運算的理。但是每次驗算都要就原數另算一遍,未免麻煩,現用求餘數法來驗算,較普通法要簡便些,茲述兩法如下:

(一)棄九法　本法所根據的原理是:**任一數用九除後所得的餘數,等於該數各位數字和用九除後所得的餘數。**這餘數簡稱**九餘數**。

〔例〕　求 43576 的九餘數。

〔解〕　$43576=40000+3000+500+70+6$。

$$\because\left\{\begin{aligned}40000&=4(9999+1)=4\times 9999+4\\3000&=3(999+1)=3\times 999+3\\500&=5(99+1)=5\times 99+5\\70&=7(9+1)=7\times 9+7\\6&=6\end{aligned}\right.$$

$$+)\ \overline{43576=9\text{的倍數}+(4+3+5+7+6)}$$

$\therefore$ 43576 的九餘數 $=(4+5+3+7+6)$ 的九餘數

$=25$ 的九餘數 $=7$。

（天）

由上例可見43576的九餘數等於其各位數字和的九餘數,若數字裏面有 9 的,或幾個數字和爲 9 的,可以先棄去,如此九餘數可以很快求出,如 43576 中 $4+5=9$,棄去;$3+6=9$,棄去;得九餘數 7。簡記爲 $43576\to 7$。

設有 $9a+k$, $9b+l$, $9c+m$ 三數,內中 a,b,c 爲任意正整數,k,l,m 爲小於 9 的正整數。因三數的和爲 $9(a+b+c)+(k+l+m)$,積爲 $9[9^2abc+9(abm+bck+cal)+alm+bmk+ckl]+klm$。所以 $9a+k$、$9b+l$、$9c+m$ 三數和及積的九餘數等於 k、l、m 三數和及積的九餘數。由此類推,可得以下定理:

幾個數的和的九餘數,等於各數的九餘數的和的九餘數。幾個數的積的九餘數,等於各數的九餘數的積的九餘數。

利用這條定理,就可以驗算加減乘除四法。

〔例一〕 驗 $89702+36971+29685+43378=199736$。

〔驗〕
$$\left.\begin{array}{r} 89702\to 8 \\ + \\ 36971\to 8 \\ + \\ 29685\to 3 \\ + \\ 43378\to 7 \end{array}\right\} 26\to 8$$
$$199736\text{———}\to 8$$

因 $8+3+2+4=17$,$9+4+3+5=21$,故和應爲六位數,最高兩位數應在17與21中間,驗九餘數,不錯。

〔例二〕　驗 $70852-23934=46928$。

〔驗〕

$$\begin{array}{l} 70852 \longrightarrow 4 \\ \left.\begin{array}{r} 23934\to 3 \\ + \\ 46928\to 2 \end{array}\right\} 5 \end{array}$$

因 $7-3=4, 8-2=6$,故差應爲五位數,最高一位數應在 4 與 6 之間, 驗九餘數不對,結果應改爲 46918。

〔例三〕　驗 $346\times 275\times 1024=9743,3600$。

〔驗〕

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 346\to 4 \\ \times \\ 275\to 5 \\ \times \\ 1024\to 7 \end{array}\right\} 140\to 5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \| \\ 9743,3600 \longrightarrow 5, \end{array}$$

因 $3\times 2\times 1=6, 4\times 3\times 1=12$,故積應大於6000,0000,小於1,2000,0000。

驗九餘數,不錯。

〔例四〕　驗 $109,2754\div 3617=302$, 餘 420。

看 $3617\times 302+420=109,2754$ 否?

〔驗〕

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 3617\to 8 \\ 302\to 5 \end{array}\right\} 40\to 4 \\ \qquad\qquad\qquad + \\ 420 \longrightarrow 6 \end{array}\right\} 10\to 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \| \\ 109,2754 \longrightarrow 1 \end{array}$$

兩數的商的位數爲 $3=7-4$,可以的。

驗九餘數,不錯。

(二)**棄十一法**　本法所根據的原理是:任一數用十一除後所得的餘數,等於該數奇位數字

(天)

和減偶位數字和所得的差數,若奇位數字和較小,可加以十一然後再減。這餘數簡稱十一餘數。

〔例一〕 求 43576 的十一餘數。

〔解〕 $43576=40000+3000+500+70+6$

$$\because\left\{\begin{aligned}40000&=4(9999+1)=4\times9999+4\\3000&=3(1001-1)=3\times1001-3\\500&=5(99+1)=5\times99+5\\70&=7(11-1)=7\times11-7\\6&=6\end{aligned}\right.$$

+) 43576=11 的倍數 $+(4-3+5-7+6)$

$\therefore$ 43576 十一餘數 $=(4-3+5-7+6)$ 的十一餘數 $=5$。簡記爲 $43576\longrightarrow5$。

〔例二〕 求 602495 的十一餘數

〔解〕 $0+4+5=9$。$6+2+9=17$。$(9+11)-17=3$。

$\therefore$ 602495 的十一餘數爲 3。簡記爲 $602495\rightarrow3$。

倣照九餘數驗算四則的定理,得以下定理:

幾個數的和的十一餘數,等於各數的十一餘數和的十一餘數, 幾個數的積的十一餘數,等於各數的十一餘數的積的十一餘數。

〔例一〕 驗 $89702+36971+29685+43378=199736$

〔驗〕 用棄十一法,

$$\left.\begin{array}{r} 89702\rightarrow 8 \\ + \\ 36971\rightarrow 0 \\ + \\ 29685\rightarrow 7 \\ + \\ 43378\rightarrow 5 \end{array}\right\} 20\rightarrow 9$$
$$\|$$

199736————→9 大概不錯

〔例二〕 驗 70852－23934＝46928,

〔驗〕 70852 ————→1

$$\left.\begin{array}{r} 23934\rightarrow 9 \\ + \\ 46928\rightarrow 2 \end{array}\right\} 11\rightarrow 0$$

錯了,餘數應改爲 46918

〔例三〕 驗 346×275×1024＝985,1360。

〔驗〕

$$\left.\begin{array}{r} 346\rightarrow 5 \\ 275\rightarrow 0 \\ 1024\rightarrow 1 \end{array}\right\} 0$$
$$\|$$

9743,3600———→0 大概不錯

〔例四〕 驗 09,2754÷3617＝302, 餘 420。

〔驗〕

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3617\rightarrow 9 \\ \times \\ 302\rightarrow 5 \end{array}\right\} 45\rightarrow 1 \\ + \\ 420 \text{ -----}\rightarrow 2 \end{array}\right\} 3$$
$$\|$$

109, 2754→14———→3, 大概不錯。

〔註一〕 若結果寫錯,其中兩鄰位數字互相調換,

用棄九法不能看出他的錯誤,若兩間位數字互相調換用棄十一法也不能看出錯誤,所以棄九法與棄十一法總是一種簡略的驗算法,能看結果大概不錯而不能斷定其爲絕對不錯。反之用棄九法或棄十一法驗得結果不合時,可以斷定結果絕對有錯的。

〔註二〕 前述的兩種驗算法是用 9 及 11 做除數來算餘數,實際用任何數做除數都可以,但是有些數計算餘數較繁,有些數計算餘數時用不到原數的各位數字,所以結果的錯誤與否,更不易看出。

習題十一

1. 千個以內,百個以外的五位數的和,至大爲幾位數?至小爲幾位數?

2. 萬個以內,千個以外的十二位數的和,至大爲幾位數?至小爲幾位數?

3. 八位數減八位數,差可有幾種不同的位數?減七位數呢?減六位數呢?

4. 六個數相乘,其位數爲 12、10、8、7、6、6, 其積至小爲幾位數?至大爲幾位數?

5. 十位數用七位數來除,商爲幾位數?

求以下各數的九餘數:及十一餘數:

6. 3048, 7. 5961, 8. 17652,

9. 473856, 10. 986054, 11. 7873456。

求以下各題的值,並驗算之?

12. $1235+897+5124+8376$

13. $86732+79546-21693-18878-36465$

14. $897\times4502\times1873$

15. $684731\div269$

16. $1206\times4954\div2647$

17. 用 7 做除數所得的餘數來驗算四則,有什麼不便?

18. 用二餘數來驗算加法及乘法,可得什麼定理?

19. 用二餘數及五餘數來驗算四則,比用九餘數及十一餘數可靠些,還是不可靠些?何故?

復習題

1. 把 $a-b$ 看做 $a+(-b)$,說明加減的定理(三)是根據什麼運算律得來的。把 $a\div b$ 看做 $a\times\frac{1}{b}$.說明乘除的定理(三)是根據什麼運算律得來的。

2. 兩數相減,在被減數或減數上加上某數,結果有

什麼不同？ 在被減數或減數上減去某數呢？ 在被減數及減數上同加或同減某數呢？

3.兩數相除,在被除數或除數上乘以某數,結果有什麼不同？ 在被除數或除數上除以某數呢？ 在被除數及除數上同乘或除以某數呢？

4.兩數相加,用筆算與用心算的程序同不同？ 心算的程序如照筆算一樣算起來方便不方便？ 說出你的經驗。

5.奧地利減法是什麼方法,驗算時有什麼便利？

6.多數相加減,據你的意見用補數法方便,還是用以加代減法方便？ 何故？

7.有兩二位數,十位數字的和爲10,個位數字相同,乘積如何便可迅速求出,製一速算的法則,並據此以求 74×34, 86×26。

8.求25與50間各數的平方,可先求這數與25的差,自百位寫起;再求這數與50的差的平方,自個位寫起卽得。證明這條法則是對的,並試求 38^2, 47^2。

9.製一條求50與100間各數平方的速算的法則,根據這條法則來求 74^2, 86^2。

10.求一多位數的平方,怎樣可以利用交叉乘法來

算,說明其法則及其理由。 利用這法,求63872^2。

11.意大利除法是什麼方法? 運算和列式較普通法簡便麼? 你的意思能不能用這法來教小學生,使其領悟?

12.四則算法所得的結果有何種錯誤,用棄九法就不能驗出? 何種錯誤用棄十一法不能驗出? 棄九法與棄十一法比較起來,那一種較好? 何故?

13.用棄七法來驗算: $1092754 \div 3617 = 302$,餘420。

第四章　分數小數四則

1. 分數

43. <u>分數的定義</u>　把 1 分為 n 個等份,從裏面取出 m 份,記為 $\frac{m}{n}$,叫做**分數**,讀做 n 分之 m。分成等份的個數 n 記在下面,叫做分母,取出等份的個數 m 記在上面,叫做**分子**。

分數 $\frac{m}{n}$ 的單位是 $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ 表示 m 個 $\frac{1}{n}$。所以 $\frac{m}{n}$ 的 n 倍便是 m 個 $\frac{1}{n}$ 的 n 倍,就是等於 m,於是 $\frac{m}{n}$ 有除法的意義,結果等於 $m \div n$。

所以分數有兩種意義,**一是把 1 照分母分成幾個等份,照分子取出幾份;一是把分子照分母分成幾個等份,取裏面的一份**。

依第一種意義,$\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$,依第二種意義,$\frac{m}{n} = m \div n$,所以 $m \div n = m \times \frac{1}{n}$,於是**分數能把除法改寫為乘法的形式**。

又在分數的第二種意義內,因為分子常不被分母除盡,於是分數便常不為整商,但是計算時,卻有整商的作用,所以**分數可以說是除法的推廣**。

〔註〕 分數的舊讀法,如$\frac{2}{3}$讀爲"三分之二,"近人以爲不甚妥當,有人主張改讀爲"二被三分,"又有人主張改讀爲"二個三分,"後一讀法的確較好。但尚未得普遍的採用,讀者可參看中等算學月刊第二卷第四、七二期及第三卷第一期。

44.<u>分數的類別</u> 由定義,分數的分子不應比分母大,並且分子同分母應當同是整數,但是若把分數看做除式,這些限制,也可以免去。分數的類別如下:

(一)**簡單分數** 分子分母同是整數的分數叫**簡單分數**,裏面也可以分爲二小類:(1)分子比分母小的叫**眞分數**,(2)分子等於或大於分母的叫**假分數**,假分數有時可化爲整數同分數的和,內中加號可以免去,合稱爲**帶分數**。

(二)**繁分數** 分子或分母也是分數的,叫**繁分數**。繁分數的分母也是繁分數的,有時叫做**連分數**。

45.<u>分數的原則</u> 現要研究分數的分子或分母有倍數的變值時,分數的值有何種相應的變化。

(一)**分子變** 若分數的分母不變,就是分數的單位不變,這時分子若增某倍,所取的份數也就增某倍,於是分數的值也就增某倍。反過來,若分子縮某倍,所取的份數也就縮某倍,於是分數的值也就縮某倍。由此得

原則一. 用某數乘分子等於乘分數,除分子等於除分數。

[公式] $\frac{m\times a}{n}=\frac{m}{n}\times a$, $\frac{m\div a}{n}=\frac{m}{n}\div a$。

(二)**分母變** 若分數的分母變值,就是分數的單位變值;若分母增某倍,分數的單位反而縮某倍,所以分數的值也因之而縮某倍。反過來,若分母縮某倍,分數的單位反而增某倍,分數的值也就增某倍。由此得

原則二. 用某數乘分母,等於除分數;除分母,等於乘分數。

[公式] $\frac{m}{n\times a}=\frac{m}{n}\div a$, $\frac{m}{n\div a}=\frac{m}{n}\times a$。

(三)**分子分母同變** 若分子、分母同增某倍,則分數的單位縮某倍,所取的份數却增某倍;若分子、分母同縮某倍,則分數的單位增某倍,所取的份數却縮某倍;兩下正相抵消,而分數的值不

變。由此得

原則三.　用同數乘分子、分母,或除分子、分母,等於原分數。

〔公式〕　$\frac{m\times a}{n\times a}=\frac{m}{n}$,　$\frac{m\div a}{n\div a}=\frac{m}{n}$。

如分子有倍數的變值,分數也有同向的變值;如分母有倍數的變值,分數反現異向的變值。

〔例〕　$\frac{6\times 3}{15}=\frac{6}{15}\times 3$,　$\frac{6\div 3}{15}=\frac{6}{15}\div 3$,

$\frac{6}{15\times 3}=\frac{6}{15}\div 3$,　$\frac{6}{15\div 3}=\frac{6}{15}\times 3$,

$\frac{6\times 3}{15\times 3}=\frac{6}{15}$,　$\frac{6\div 3}{15\div 3}=\frac{6}{15}$。

46.<u>分數化法</u>　把分數化為等值的另一形式,約有數法:

(一)　**約分**　根據上節的原則(三),分子同分母可以同時約小好多倍,分數的值不變,這種約小的方法叫做約分。分數經過約分,直到分子、分母無公約數時,叫做最簡分數。

〔例〕　約$\frac{228}{418}$、$\frac{318}{54}$為最簡分數。

〔解〕　(1)因228、418的最大公約數為38。

$\therefore \frac{228}{418}=\frac{228\div 38}{418\div 38}=\frac{6}{11}$。

(2)因54、318的最大公約數為54。

$$\therefore \quad \frac{318}{54}=\frac{318\div 54}{54\div 54}=\frac{6}{1}=6。$$

〔註〕　實際約分時,常分步求分子、分母的公約數,隨時約去,不必寫成除式。

(二)擴分　分子同分母也可以同時擴大好多倍,分數的值仍然不變,這種擴大分子、分母的方法,叫做**擴分**。

〔例一〕　擴分$\frac{3}{5}$,使分母為30。

〔解〕　$\because 30\div 5=6 \quad \therefore \frac{3}{5}=\frac{3\times 6}{5\times 6}=\frac{18}{30}$。

〔例二〕　擴分$\frac{3}{5}$,使分子為27。

〔解〕　$\because 27\div 3=9, \quad \therefore \frac{3}{5}=\frac{3\times 9}{5\times 9}=\frac{27}{45}$。

〔例三〕　化6為分數,使分母為4。

〔解〕　$6=\frac{6}{1}=\frac{6\times 4}{1\times 4}=\frac{24}{4}$。

(三)化假分數為帶分數　分子大於或等於分母的假分數,可寫成除式,用分母來除分子,得的整商便是帶分數的整數部分,餘數便是新分子,分母仍舊。

〔例一〕　化$\frac{49}{15}$為帶分數。

〔解〕　$\frac{49}{15}=49\div 15=3+\frac{4}{15}=3\frac{4}{15}$。

〔例二〕　化$\frac{23}{23}$,$\frac{276}{23}$為帶分數。

〔解〕 $\frac{23}{23}=23\div23=1,$

$\frac{276}{23}=276\div23=12$。

(四)**化帶分數爲假分數** 要把帶分數化爲假分數,可看整數部分做商,分母做除數,分子做餘數,來求被除數,作爲假分數的分子即得。

〔例〕 化$4\frac{2}{9}$爲假分數。

〔解〕 $4\frac{2}{9}=\frac{4\times9+2}{9}=\frac{38}{9}$。

47.<u>通分</u> 把幾個分母不同的分數,用擴分法化成分母相同的分數,這個方法叫做**通分**。這相同的分母,叫諸分數的**公分母**,公分母應爲諸分母的公倍數,爲簡便計,常取其最小者,於是得通分的法則如下:

取諸分母的最小公倍數做公分母,諸分數各照原分母擴大的倍數去擴大。

〔例〕 通分$\frac{7}{18}$、$\frac{11}{24}$、$\frac{13}{36}$。

〔解〕 18、24、36的最小公倍數爲72,用做公分母。

$\because 72\div18=4,\quad \therefore \frac{7}{18}=\frac{7\times4}{18\times4}=\frac{28}{72},$

$\because 72\div24=3,\quad \therefore \frac{11}{24}=\frac{11\times3}{24\times3}=\frac{33}{72},$

$\because 72\div36=2,\quad \therefore \frac{13}{36}=\frac{13\times2}{36\times2}=\frac{26}{72}$。

48. <u>分數的比較</u>　要比較分數的大小,從分數的形式,可分爲以下三種情形來討論:

(一)**同母分數**　分母相同的分數叫**同母分數**,同母分數是把 1 分爲相同的等份,從裏面取出幾種不同的份數,若分子較大,所取的份數就較多,於是分數便較大,所以在**同母分數裏,分子大的分數大,分子小的分數小**。

(二)**同子分數**　分子相同的分數叫**同子分數**,同子分數是把 1 分爲不同的等份,從裏面取出相同的份數,若分母較大,所分的份數就多,每份的數值便較小,分數的值當然也較小,所以在**同子分數裏。分母大的分數小,分母小的分數大**。

(三)**母子不同的分數**　分子分母多不相同的分數,常先化爲同母分數,或同子分數,然後再來比較大小。

〔例一〕　比較$\frac{7}{18}$、$\frac{11}{24}$、$\frac{13}{36}$的大小。

〔解〕　用通分法把以上三分數化爲同母分數。

$$\frac{7}{18}=\frac{28}{72},\quad \frac{11}{24}=\frac{33}{72},\quad \frac{13}{36}=\frac{26}{72},$$

$$\because \frac{26}{72}<\frac{28}{72}<\frac{33}{72},$$

$$\therefore \frac{13}{36}<\frac{7}{18}<\frac{11}{24}。$$

〔例二〕 比較$\frac{1}{112}$、$\frac{2}{225}$、$\frac{3}{340}$的大小。

〔解〕 因爲分母112、225、340的最小公倍數太大,所以化爲同母分數不如化爲同子分數方便,

分子1、2、3的最小公倍數爲6,

$$\left.\begin{aligned} \therefore \frac{1}{112}&=\frac{1\times 6}{112\times 6}=\frac{6}{672},\\ \frac{2}{225}&=\frac{2\times 3}{225\times 3}=\frac{6}{675},\\ \frac{3}{340}&=\frac{3\times 2}{340\times 2}=\frac{6}{680}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\because 672<675<680,\\ &\therefore \frac{6}{672}>\frac{6}{675}>\frac{6}{680},\\ &\text{即}\ \frac{1}{112}>\frac{2}{225}>\frac{3}{340}。 \end{aligned}$$

習題十二

1. 指出以下各分數屬於何類:

$$\frac{5}{8},\quad \frac{9}{7},\quad \frac{1}{\frac{2}{3}},\quad \frac{243}{126},\quad \frac{\frac{4}{5}}{16},\quad \frac{12}{12},\quad \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{9}},\quad \frac{21}{20},\quad \frac{26}{43}。$$

2. 把1分爲5等份,取出2份,與分2爲5等份,取出一份,意義是否相同? 數值是否相等? 用分數來記,各爲何數? 用直線畫出,二者長度是否相等?

3. 用分數是除法推廣的意義來解釋三條原則。

4. 舉例證明用某數乘分數,等於乘分子或除分母;用某數除分數等於除分子,或乘分母;同乘或同除分子,

分母等於原分數。畫圖來解釋。

5.用除法的意義來解釋同母分數及同子分數的大小比較。

6.化以下各式爲最簡分數:

$$\frac{72}{126},\ \frac{144}{432},\ \frac{288}{360},\ 441\div462,\ 288\times\frac{1}{504},$$

$$\frac{5}{102}\times17,\ \frac{72}{216}\div10,\ \frac{11}{722\div57},\ \frac{322\div35}{207\div6}。$$

7.化以下各分數爲帶分數:

$$\frac{37}{12},\ \frac{513}{28},\ \frac{420}{35},\ \frac{11}{10},\ \frac{360}{144}。$$

8.化以下各組數爲同母分數,並比較其大小:

(1) $\frac{3}{7},\frac{4}{9}$ (2) $\frac{4}{5},\frac{7}{12},\frac{5}{6}$ (3) $\frac{3}{7},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{1}{2}$

(4) $\frac{5}{36},\frac{8}{42},\frac{10}{63}$ (5) $\frac{19}{256},\frac{13}{192},\frac{17}{240}$

9.化以下各組數爲同子分數,並比較其大小:

(1) $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{11}$ (2) $\frac{1}{132},\frac{2}{265},\frac{3}{395}$。

10.鷄價一元兩隻,鴨二元三隻,鵝三元五隻,那一種最貴?

49.分數加減法 因爲單位相同的兩數纔能相加減,所以在分數上也要分母相同纔能相加減,所得的和或差就等於同單位的個數的和或差,所以**同母諸分數相加減,可取諸分子的和或差作分子,原分母作分母便得。**

〔公式〕 $\frac{l}{n}+\frac{k}{n}-\frac{m}{n}=\frac{l+k-m}{n}$。

〔例〕 $\frac{2}{11}+\frac{7}{11}-\frac{5}{11}=2$個11分$+7$個11分$-5$個11分

$=(2+7-5)$個11分

$=\frac{2+7-5}{11}=\frac{4}{11}$。

〔註〕 以上公式若寫爲

$$l\times\frac{1}{n}+k\times\frac{1}{n}-m\times\frac{1}{n}=(l+k-m)\div n,$$

便是除法分配律的推廣。由此更可看出除法分配律可由乘法分配律化得。

若諸分數的分母不同,可先通分成同母分數,然後再行加減。

〔例〕 $\frac{11}{42}-\frac{5}{24}=\frac{44}{168}-\frac{35}{168}=\frac{44-35}{168}=\frac{9}{168}=\frac{3}{56}$。

(速算法) $6\underline{\left|\frac{11}{42}-\frac{5}{24}\right.}=\frac{11\times4-7\times5}{6\times7\times4}=\frac{9}{6\times7\times4}=\frac{3}{56}$

$7\quad\quad 4$

若諸分數中有假分數,可先化爲帶分數,然後把整數部分合在一起,分數部分合在一起,分別加減,如遇分數部分的減數比被減數大,可把整數的一部化爲假分數,然後再算。

〔例〕 $\frac{51}{10}+\frac{49}{12}-\frac{103}{15}=5\frac{1}{10}+4\frac{1}{12}-6\frac{13}{15}$

$=(5+4-6)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{13}{15}\right)=3+\frac{6+5-52}{60}$

$$=1+\frac{120+6+5-52}{60}=1+\frac{79}{60}=1\frac{79}{60}。$$

50.分數乘法 甲分數用乙分數來乘,就是甲分數照乙分數的分母分作幾個等份,然後照乙分數的分子取出的幾個等份。

〔例〕

$$\because\begin{cases}\frac{3}{8}\times5\ \text{是求}\frac{3}{8}\text{的 5 倍,}\\ \frac{3}{8}\times\frac{1}{7}\text{是求}\frac{3}{8}\text{分成7個等份中的一份。}\\ \frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\text{就是把}\frac{3}{8}\text{分成7個等份從中取出5份。}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\frac{3}{8}\times5=\frac{3\times5}{8},\\ \frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{8}\div7=\frac{3}{8\times7},\\ \frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{3}{8}\div7\times5=\frac{3}{8\times7}\times5=\frac{3\times5}{8\times7}。\end{cases}$$

於是兩分數相乘,可取兩分子的積為積的分子,兩分母的積為積的分母。

〔公式〕 $\frac{m}{n}\times\frac{l}{k}=\frac{m\times l}{n\times k}$。

若遇整數及帶分數,可以先化為假分數,然後再乘。

〔例一〕 $2\frac{7}{60}\times8=\frac{127}{60}\times\frac{8}{1}=\frac{127\times8}{60}=\frac{127\times2}{15}$

$$=\frac{254}{15}=16\frac{14}{15},$$

或 $2\frac{7}{60}\times 8=2\times 8+\frac{7}{60}\times 8=16+\frac{14}{15}=16\frac{14}{15}$。

〔例二〕 $2\frac{2}{5}\times 4\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{5}\times\frac{25}{6}\times\frac{3}{8}$

$$=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\times\overset{5}{\cancel{25}}\times 3}{\cancel{5}\times\cancel{6}\times\cancel{8}_{4}}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}。$$

51.<u>分數除法</u>　利用除法是乘法逆運算的理,可以計算分數除法。

〔例〕 $\frac{3}{8}\div\frac{5}{7}$ 表示一數,這數若乘 $\frac{5}{7}$,便得 $\frac{3}{8}$。先求乘 $\frac{5}{7}$ 得 1 的數爲 $\frac{7}{5}$,所以乘 $\frac{5}{7}$ 得 $\frac{3}{8}$ 的數當然爲 $\frac{3}{8}\times\frac{7}{5}$,於是

$$\frac{3}{8}\div\frac{5}{7}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{5}。$$

所以兩分數相除,可把除數顛倒,同被除數相乘。

〔公式〕 $\frac{m}{n}\div\frac{l}{k}=\frac{m}{n}\times\frac{k}{l}$。

把一分數顛倒過來,使分子爲分母,分母爲分子,叫做原分數的逆數,**所以用某數除,等於乘其逆數(一數與逆數的積常爲一)。**

〔例〕 $\frac{5}{7}$ 的逆數爲 $\frac{7}{5}$,5 的逆數爲 $\frac{1}{5}$,

$\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=1$,　　$5\times\frac{1}{5}=1$。

若遇整數或帶分數,可化爲假分數再除。 (天)

〔例一〕 $46\frac{2}{3}\div 14=\frac{140}{3}\div 14=\frac{140}{3\times 14}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$,

或 $46\frac{2}{3}\div 14=(42\div 14)+(4\frac{2}{3}\div 14)=3+\frac{1}{3}$

$=3\frac{1}{3}$。

〔例二〕 $8\frac{1}{6}\div 4\frac{2}{3}=\frac{49}{6}\div\frac{14}{3}=\frac{49}{6}\times\frac{3}{14}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$。

52.<u>繁分數化簡</u> 繁分數可以看做分數除式,照分數除法來化簡,也可以上下同乘以分母的最小公倍數,然後化簡。

〔例〕 $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{10}{9}}=\frac{5}{12}\div\frac{10}{9}=\frac{5}{12}\times\frac{9}{10}=\frac{5\times 9}{12\times 10}=\frac{3}{8}$。

或 $\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{10}{9}}=\dfrac{\frac{5}{12}\times 36}{\frac{10}{9}\times 36}=\frac{5\times 3}{10\times 4}=\frac{3}{8}$。

若繁分數的分子、分母有不是簡單分數的,應先化爲簡單分數,然後再算。

〔例一〕 $\dfrac{3-1\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}}{2+1\frac{3}{7}}=\dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{24}{7}}=\dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}\times 7}{5\times\underset{8}{\cancel{24}}}=\frac{21}{40}$。

〔例二〕 $\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{5-\frac{1}{3}}}}=\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2+\frac{3}{14}}}=\dfrac{3}{1+\frac{14}{31}}$

$=\frac{3\times 31}{45}=\frac{31}{15}=2\frac{1}{15}$。

習題十三

1. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=?$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=?$ 用圖線解釋所得的結果，能另用他法來解釋麼?

2. $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=?$ $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=?$ 用圖線解釋所得的結果，能另用他法來解釋麼?

3. 由整數的乘除定理來解釋分數的乘除法。

求以下各題的結果:

4. $\frac{4}{5}+\frac{11}{14}-\frac{3}{10}$

5. $\frac{13}{18}-\frac{5}{24}+\frac{7}{32}$

6. $2\frac{4}{9}+5\frac{5}{12}-4\frac{3}{16}$

7. $8-\left(4\frac{1}{6}-2\frac{4}{7}\right)$

8. $2\frac{4}{5}\times1\frac{3}{7}$

9. $\frac{4}{63}\times5\frac{5}{6}\times1\frac{4}{5}$

10. $3\frac{15}{43}\times\frac{49}{243}\times1\frac{13}{56}\times5\frac{14}{23}$

11. $5\frac{1}{7}\div6\frac{3}{14}$

12. $\frac{15}{28}\div\frac{25}{49}$

13. $24\frac{1}{15}\div19\times1\frac{2}{3}$

14. $24\times\frac{5}{18}\div3\frac{1}{3}$

15. $8\frac{4}{9}\div2\frac{1}{12}\div\frac{38}{45}$

16. $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$

17. $\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{5}$

18. $\dfrac{6\frac{3}{7}}{5\frac{1}{7}}$

19. $\dfrac{5\frac{3}{4}-2\frac{7}{8}}{7\frac{5}{8}-3\frac{15}{16}}$

20. $\dfrac{3\frac{1}{8}\times 1\frac{3}{5}\div 4\frac{1}{4}}{4\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}}$

21. $\dfrac{\left(8\frac{1}{13}-2\frac{3}{7}\right)\div\frac{5}{12}}{9\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\div\frac{7}{12}}$

22. $\dfrac{6}{3-\dfrac{2}{5+\frac{1}{7}}}$

23. $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\frac{2}{5}}}}$

24. $\frac{5}{18}$加上多少就得$\frac{4}{7}$?

25. 從$4\frac{10}{21}$裏面減去多少,就得$3\frac{7}{12}$。

26. $8\frac{3}{4}$是$2\frac{1}{2}$的多少倍

27. $\frac{126}{253}$的$2\frac{4}{21}$倍是多少?

28. 某人解分數乘法,本應乘$\frac{2}{7}$,誤乘$\frac{3}{7}$,得積$\frac{4}{5}$,問不誤的積是多少?

2. 小數

53. 小數的定義　把1分為10、100、1000、…個等份,從中取出幾份,叫做**小數**,所以小數是分數的一種,其分母常為10或10的方數,於是也叫**十進分數**。記數時,常只寫下分子,而照**分母中的方數的次數在分子前記一小數點(·)**。

〔例〕　$\frac{6}{10}=\cdot 6$,

$$\frac{56}{100}=\frac{56}{10^2}=.56,\qquad \frac{6}{100}=.06。$$

$$\frac{156}{1000}=\frac{156}{10^3}=.156,\ \frac{56}{1000}=.056,\ \frac{6}{1000}=.006,$$

$$\frac{234}{1000000}=\frac{234}{10^6}=.000234。$$

因爲 $1=10\times\frac{1}{10}=10\times.1,\quad .1=\frac{1}{10}=10\times\frac{1}{100}$ $=10\times.01,\quad .01=\frac{1}{100}=10\times\frac{1}{1000}=10\times.001,\cdots$ 所以小數自右而左,每位十進,與整數記法正好相同,於是與整數可以合記在一起,而以小數點爲分界。

〔例〕 $\frac{256}{100}=2\frac{56}{100}=2.56$

以下是整數與小數的位名連合表:

整　數	小　數
……萬千百十一	分釐毫絲忽……
……第五位 第四位 第三位 第二位 第一位	第一位 第二位 第三位 第四位 第五位……

〔例〕 .056 讀作千分之五十六,或五釐六毫。

2.0506 讀作二又萬分之五百零六,或二又五釐六絲。

小數也可以記作整數與十的負方數的積,

前面講過極大的數用指數來記很方便,極小的數也以指數記法爲便。

〔例一〕 $.00432=\frac{432}{10^5}=432\times10^{-5}$

〔例二〕 赤血球一個重量約.000000085325公絲,可記爲85325×10^{-12}公絲,或8.5325×10^{-8}公絲。

54.<u>小數的分類</u> 小數可分三種:

(一)**純小數** 是小於1的純粹小數。

(二)**帶小數** 是整數與小數的合數。

(三)**循環小數** 是連續循環的小數,裏面還可以分爲二小類:(1)**純循環小數**,這種小數全部都成循環;(2)**雜循環小數**,這種小數前面有一位或幾位數字不成循環,循環小數的循環部份叫**循環節**,在循環節首尾兩數上各記一點,叫**循環點**。

〔例〕 .204是純小數,3.204是帶小數,$.\dot{2}1\dot{3}213213\cdots$是純循環小數,記做$.\dot{2}1\dot{3}$, $.2131313,\cdots$是雜循環小數,記做$.2\dot{1}\dot{3}$。

55.<u>小數的性質</u> 根據小數的定義及分數的原則,立得小數的幾點性質如下:

(一)**小數點向左移一位,小數就小十倍;向左**

移兩位,就小百倍,如此類推。

理由. 因當小數點若向左移一位,兩位,…,分子不變,分母就大十倍,百倍,…,所以分數的值反而小十倍,百倍,…。

〔例〕 $.56=\frac{56}{100}$, $.056=\frac{56}{1000}=\frac{.56}{10}$。 $.0056.=\frac{56}{10000}=\frac{.56}{100}$。

(二)小數點向右移一位,小數就大十倍;向右移兩位就大百倍;如此類推。

理由. 因為若小數點向右移一位,兩位,…,分子不變,分母却小十倍,百倍,…,所以分數的值反而大十倍,百倍,…。

〔例〕 $.56=10\times.056=100\times.0056$。

(三)在小數後面任意加幾個零,小數的值不變。

理由. 因為把小數看做分數,這時分子、分母乘上10的相同方數。

〔例〕 $.56=.560\left(=\frac{560}{1000}\right)=.5600\left(=\frac{5600}{10000}\right)$。

$2=2.0=2.00=2.000$。

循環小數更有以下幾點性質:

(四)循環小數可以其循環節重寫數次做循

環節。

理由從略。

〔例〕 $.4\dot{5}\dot{6}=.4\dot{5}65\dot{6}=.4\dot{5}6565\dot{6}$。

(五)循環小數的循環點可以向右任意移位。

理由從略。

〔例〕 $.6\dot{5}0\dot{4}=.65\dot{0}4\dot{5}=.650\dot{4}5\dot{0}=.6504\dot{5}0\dot{4}$。

(六)取兩循環小數中不循環最多的位數,做不循環位數;兩數中循環位數的最小公倍數做循環位數,可把二循環小數的小數位及循環位化為相等。

理由 根據以上性質(四)及(五)。

〔註〕 以上方法,叫**循環小數通位法**。

〔例〕 把 $.203\dot{4}\dot{5}$; $.6\dot{7}3\dot{4}$ 通位。

〔解〕 $\begin{cases} .203\dot{4}\dot{5}=.203\dot{4}5454\dot{5} \\ .6\dot{7}3\dot{4} \quad =.673\dot{4}7347\dot{3} \end{cases}$

56.<u>小數與分數的化法</u> 小數與分數的化法有兩種:

(一)化分數為小數 分子分母同乘某數,使分母變做10的方數,再除去分母,按方數的方次在分子前記上小數點。

〔例〕　$\frac{3}{32}=\frac{3}{2^5}=\frac{3\times5^5}{2^5\times5^5}=\frac{9375}{10^5}=.09375$。

$\frac{43}{250}=\frac{43}{2\times5^3}=\frac{43\times2^2}{2^3\times5^3}=\frac{172}{10^3}=.172$。

若分數的分母只含 2 及 5 的方數爲因數,用適當的數來乘,可化爲10的方數,於是所得的小數的位數爲有限就叫**有限小數**。若分母中含有 2、5 的方數以外的因數,又與分子無公因數,就不能用整數乘得10的方數,這時要**化成小數,須直接用分母來除分子**,所得的小數的位數爲無限,就叫**無限小數**。有理分數所化得的無限小數常爲循環小數。

〔例一〕　$\frac{5}{21}=5\div21=.\dot{2}3809\dot{5}$。

用意大利除法列式如下:

```
      .238095....
21)5.000000
     80
      170
        200
         110
           5
```

(說明) 5 不够除,化爲50個.1,分爲21份,每份爲.2,餘.8,.8 又不够除,化爲80個.01,分爲21份,每份爲.03,餘.17,.17又不够除,再化爲170個.001,再用21除,如此繼續除下,得商爲.238095238095...等,卽$.\dot{2}3809\dot{5}$。

〔例二〕　$\frac{5}{12}=5\div12=.41\dot{6}$。

〔註〕　分母中無 2 及 5 的因數的,化得小數爲純循環小數,如例一。分母中除含其他因數,又有 2 及 5 的因數的,化得小數爲雜循環小數,如例二。理由在算學的另一部數論中才能解釋。

(二)化小數爲分數　若小數位數是有限的,可把小數點除去後的原數做分子,把次數等於小數位數的10的方數來做分母,約簡這分數便得。

〔例〕　$.0512=\frac{512}{10^4}=\frac{512}{10000}=\frac{22}{625}$。

若是純循環小數,可把除去小數點及循環點的第一個循環節做分子,照循環節的位數連寫幾個 9 做分母,再來約簡。若是雜循環小數,可把原數的小數點及循環節除去,再減不循環數做分子;然後照循環節的位數連寫幾個 9,不循環的位數連寫幾個 0 做分母,再約簡便得。

〔例一〕　$.\dot{2}1\dot{3}=\frac{213}{999}=\frac{71}{333}$。

(理由一)　$\because\ 213=213.\dot{2}1\dot{3}-.\dot{2}1\dot{3}$

$$=.\dot{2}1\dot{3}\times(1000-1)=.\dot{2}1\dot{3}\times999。$$

$\therefore\ .\dot{2}1\dot{3}=\frac{213}{999}$(由乘除互爲逆運算理)

(理由二)　$.\dot{2}1\dot{3}=.213+.000213+.000000213+\cdots\cdots$

(天)

$$=.213+.213\times.001+.213\times.001^2+\cdots$$

$$=\frac{.213}{1-.001}=\frac{.213}{.999}=\frac{213}{999}。$$

(用代數上求等比級數無窮項和的公式)

〔例二〕　$.2\dot{1}\dot{3}=\frac{213-2}{990}=\frac{211}{990}$。

(理由一)　$213-2=213.\dot{1}\dot{3}-2.\dot{1}\dot{3}$

$$=.2\dot{1}\dot{3}\times(1000-10)=.2\dot{1}\dot{3}\times990。$$

$$\therefore .2\dot{1}\dot{3}=\frac{213-2}{990}。$$

(理由二)　$.2\dot{1}\dot{3}=.2+.0\dot{1}\dot{3}=.2+.1\times.\dot{1}\dot{3}$

$$=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{13}{99}=\frac{2\times99+13}{990}$$

$$=\frac{2\times(100-1)+13}{990}=\frac{213-2}{990}。$$

習題十四

1. 讀出以下各數:

.045　.2008　.00395　.2608　.00027。

2. 用指數記法來記以下各數及其逆數:

.1　.01　.001　.0001　.00001　.000001。

3. 把以下各式用小數記出:

(1)$\frac{526}{10}$　(2)$\frac{403}{100}$　(3)$\frac{2.4}{1000}$　(4)$\frac{1.27}{10^4}$　(5)62×10^{-5}

(6)$\frac{4}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{100000}$,(7)$2+8\times10^{-1}+5\times10^{-2}$

4. 指出以下各小數屬於何類:

(天)

$.056 \quad 2.72 \quad .2\dot{5}\dot{8} \quad .\dot{2}61\dot{2} \quad .121212 \quad .\dot{0}07\dot{2} \quad 4.24\dot{9}$

5. 化題 4 中各小數為分數。

6. 化以下各分數為有限小數或循環小數:

$\frac{62}{125} \quad \frac{97}{320} \quad \frac{9}{14} \quad \frac{6}{19} \quad \frac{23}{77} \quad \frac{216}{720}$。

7. 什麼整數的逆數為有限小數? 什麼整數的逆數為無限小數? 何故?

8. 小數與整數有什麼相似處? 整數能寫成小數的形式麼? 小數能寫成整數的形式麼?

9. 純循環小數能寫為混循環小數的形式麼? 如何寫法? 混循環小數也能寫為純循環小數的形式麼? 如何寫法? 舉例解釋。

10. 化 $.582$, $.2\dot{4}\dot{6}$, $1.\dot{0}1\dot{4}$ 為循環節位數相同的循環小數。

57. <u>小數加減法</u> 因小數的進位與整數無異,所以可照整數加減法相加減。要注意的只是同單位的數字須上下排齊。因為**距離小數點相同位數而又同向的數字,單位常是相同,所以只要對齊上下的小數點便可計算。**

〔例〕

$$\begin{array}{rr} & 4.36 \\ & .0005 \\ +) & .807 \\ \hline & 5.1675 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & .6013 \\ -) & .029704 \\ \hline & .571596 \end{array}$$

若諸循環小數相加減,可先用通位法,使小數位與循環位彼此相等,然後求其和差,照所通的循環位數記上循環點,再把循環初位所當進到或借去上位的數,在結果數的循環末位照數加上或減去便得。

〔例一〕　求 $.\dot{6}+.203\dot{4}\dot{5}+.6\dot{7}3\dot{4}$。

〔例〕

$$
\begin{aligned}
.\dot{6} &= .666\dot{6}66666\dot{6}\\
.203\dot{4}\dot{5} &= .203\dot{4}5454\dot{5}\\
.6\dot{7}3\dot{4} &= .673\dot{4}7347\dot{3}\\
\hline
&\ 1.543\dot{5}9468\dot{5}
\end{aligned}
\quad (+
$$

(說明) 因通位後相加的循環初位的進位數是 1,所以在循環末位上也加 1。

〔例二〕　求 $.2\dot{1}\dot{3}-.10\dot{6}\dot{5}$。

〔解〕

$$
\begin{aligned}
.2\dot{1}\dot{3} &= .21\dot{3}\dot{1}\\
.10\dot{6}\dot{5} &= .10\dot{6}\dot{5}\\
\hline
&\ .10\dot{6}\dot{5}
\end{aligned}
\quad (-
$$

(說明) 因通位後相減時,循環初位的借位數是 1,所以在循環末位上也減 1.

58. 小數乘法　小數乘法與整數乘法相同,所要注意的,只是小數點的位置。設有一 m 位小數,可寫爲整數與 10^{-m} 的積;另一 n 位小數,可寫爲整數與 10^{-n} 的積;所以兩小數的積可寫爲兩整數的積,乘以 $10^{-m}\times10^{-n}=10^{-(m+n)}$ 就是 m+n 位小數。類推下去,可知

幾個小數相乘,可照整數乘法求積,然後照各因數小數位數的和記上小數點便得。

〔例〕 求 .08463×.0107 的積。

〔解〕

$$\begin{array}{r l} .08463 & \cdots\cdots 5\text{位小數} \\ \times\ .0107 & \cdots\cdots 4\text{位小數} \\ \hline 59241 & \\ 8463 & \\ \hline .000905541 & \cdots\cdots 5+4=9\text{位小數。} \end{array}$$

幾個循環小數相乘,可各化爲分數,然後求得積後再化爲小數。若只有一個是循環小數,其餘是有限小數,也可以照普通法相乘,不過要時時注意循環末位應加上相當的進位數。

〔例一〕 求 $.0\dot{1}\dot{2}\times\dot{2}\dot{7}$ 的積。

〔解〕 $\because\begin{cases} .0\dot{1}\dot{2}=\dfrac{12}{990}=\dfrac{2}{165}, \\ .\dot{2}\dot{7}=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}, \end{cases}$

$$\begin{array}{r} .003305 \\ 605\overline{)2.0000} \\ \underline{1850} \\ \underline{3500} \\ 475 \end{array}$$

$$\therefore\ .0\dot{1}\dot{2}\times.\dot{2}\dot{7}=\frac{2}{165}\times\frac{3}{11}=\frac{2}{605}=.003305\cdots\text{。}$$

〔例二〕 求 $.6\dot{5}\dot{4}\times.24$ 的積。

〔解〕(1) $.6\dot{5}\dot{4}\times.24=\dfrac{648}{990}\times\dfrac{24}{100}=\dfrac{15552}{99000}$

$$=\frac{15709-157}{99000}=.157\dot{0}\dot{9}\text{。}$$

(先設 $15552=(100x+y)-x=99x+y$, 求 x 及 y)

(2)
$$
\begin{array}{r l}
.6\dot{5}\dot{4} & \\
\times)\quad .24 & \\
\hline
.0261\dot{1}\dot{8} & =.0261\dot{1}\dot{8} \\
.13\dot{0}\dot{9} & =.1309\dot{0}(+ \\
\hline
 & .157\dot{0}\dot{9}
\end{array}
$$

注意相乘及相加時循環首位的進位數已加上循環末位。

59. <u>小數除法</u>　小數除法也與整數除法同,所要注意的,也只是小數點的位置。因照分數的原則,兩數相除,可同增若干倍,或同縮若干倍後,再來相除;所以兩小數也可以把小數點同向右移若干位或同向左移若干位後,再來施除。由此得小數除法如下:

先把被除數與除數的小數點同向移位,直到除數化為整數為止,在被除數小數點的同行記上商的小數點,然後把被除數看做整數,照通法施除若是除不盡,在被除數後再接寫幾個0,繼續除下,若要求餘數,應參照未移位前的被除數的小數點位置,來定其小數點。

〔例〕　求.00146÷.087的商到小數第五位,並求餘數。

〔解〕　∵ .00146÷.087
　　　　=1.46÷87
　　∴ 商=.01678
　　　餘數=.0000014。

$$
\begin{array}{r}
.01678 \\
87\overline{)1.46000} \\
\underline{590} \\
\underline{680} \\
\underline{710} \\
14
\end{array}
$$

(天)

〔另解〕　把除數移成只有一位整數,相除時,商的每位比較容易求些。

$.00146\div.087$

$=.146\div8.7$

$=.01678\cdots$

$$\begin{array}{r} .01678 \\ 8.7\overline{).146000} \\ 590 \\ 680 \\ 710 \\ 14 \end{array}$$

兩循環小數相除,可各化為分數,求得商後,再化為小數。若被除數是循環小數,而除數是有限小數,可照通法相除,若是被除數不够除,應繼續取出他的循環節來,直到商為循環數為止。

〔例一〕　求 $.\dot{5}0\dot{4}\div.2\dot{7}\dot{2}$ 之商。

〔解〕　$.\dot{5}0\dot{4}\div.2\dot{7}\dot{2}=\frac{504}{999}\div\frac{270}{990}$

$=\frac{504}{999}\times\frac{990}{270}=\frac{1848}{999}$

$=1\frac{849}{999}=1.\dot{8}4\dot{9}$

〔例二〕　求 $2.8\dot{7}0\dot{3}\div.13$ 的商

〔解〕　$2.8\dot{7}0\dot{3}\div.13$

$=287.037037\cdots\div13$

$=22.\dot{0}7977\dot{2}$

$$\begin{array}{r} 22.\dot{0}7977\dot{2} \\ 13\overline{)287.03703703} \\ 27 \\ 103 \\ 127 \\ 100 \\ 93 \\ 27 \\ 1 \end{array}$$

〔註〕 循環小數用整數或有限小數乘,常得同循環位數的循環小數,用整數或有限小數除,仍得循環小數,但是循環位數,不一定與前相同。

習題十五

求下列各組數的和:

1. $.0342+2.897+.1029$, 2. $.96009+.0008762+268\times10^{-6}$,

3. $.\dot{7}+.\dot{1}\dot{9}+.2\dot{6}$, 4. $.006+.\dot{1}9\dot{2}+.\dot{2}\dot{0}$,

5. $2.3\dot{6}\dot{9}+.00\dot{2}0\dot{4}+.200\dot{8}$, 6. $.\dot{8}0\dot{7}+.2453+.45$。

求下列各組數的差:

7. $.46-.27084$, 8. $.60094-.0574$,

9. $2.\dot{4}\dot{6}-.762$, 10. $.843-.2\dot{9}0\dot{4}$,

11. $.4\dot{1}\dot{0}-.19\dot{7}2\dot{9}$, 12. $.80\dot{0}3\dot{4}-.567\dot{7}29\dot{8}$。

求下列各組數的積:

13. $1.90002\times.0086$, 14. $.00074\times.0000025$,

15. $7498000\times.00167$, 16. $.8\dot{5}3\dot{9}\times2.3$,

17. $.\dot{8}6\dot{3}\times.\dot{2}\dot{5}$, 18. $.0\dot{5}4\dot{0}\times.0\dot{3}$。

求下列各組數的商:

19. $17.29\div.061$, 20. $.000478\div2.53$,

21. $.000003854\div.0164$, 22. $1\div981$

23. $.0\dot{6}\dot{1}\div.07$,　　24. $1.7\dot{9}2\dot{6}\div.32$,

25. $.00\dot{8}0\dot{4}\div.\dot{1}\dot{2}$　　26. $.\dot{1}5\dot{4}\times.\dot{2}\div.\dot{1}4\dot{4}$。

27.兩循環小數的和及差能爲一有限小數或整數麼?各舉一實例。

28.兩循環小數的積及商能爲一有限小數或整數麼?各舉一實例。

29.舉例證明純循環小數或混循環小數的逆數可爲有限小數,亦可爲循環小數。

復習題

1. 說出分數的兩種意義,三條原則。

2. 第三章 39 節速除法(二),及 40 節乘除合算法(二),用分數來解釋,便是如何?

3. 分數的值是分母除分子所得的商,由此證明眞分數的值應小於 1,假分數的值大於或等於 1, 由分數的另一意義,也能得到相同的證明麼?

4. 非整除的除式中被除數與除數同增或同縮多少倍後,所得的整商或附有小數的商與原商同不同?求得整數商或求商到多少小數位後所剩的餘數,與原來的餘數同不同? 兩者有何關係? 再舉例來證明。

5. 整數的大小比較,同母分數的大小比較,小數的大小比較,三者有共通性麼? 2丈與2尺、2寸的大小比較,與何種分數,何種小數的大小比較有共通性?

6. 兩小數相除,商的首位如何定法?

7. 證明m位小數,n位小數,p位小數的連乘積爲一小數,其小數位等於或小於m+n+p。

8. 整數或有限小數能寫爲無限小數的形式麼?何種無限小數? 如何寫法? 舉例解釋。

9. 把小數化爲分數來證明第59節下面的註。

10. 若把$.\dot{3}\dot{6}$誤寫作.36,來乘某數,得.032的誤差,求原數。若除另一數得.032的誤差,求原數。

11. 用8進位法來記的小數.35,改用10進位法來記等於多少

12. 證明用8進位來記的循環小數$.\dot{1}\dot{2}$可化爲$\frac{10}{63}$。

第五章　省略算

60.省略算的意義　我們平常計算數字,總想得到的結果十分準確,所以在小數乘法裏,無論積有好多位小數,總要把他一齊算出來;在小數除法裏,無論商是有限小數,還是無限小數,似乎多算出幾位數字,結果要靠得住一些。但是實際情形並不如此,因爲我們所根據來計算的數字,多半是由尺、寸、升、斗、斤、擔等測量而來,測量的器具不能絕對無誤,測量的人對於器具的使用更不能絕對適當,所以同長的一疋布叫兩個布店的夥計來量,長度論到寸,便很難相同,論到分更不用說,所根據來運算的數字,旣如此的不盡可靠,還要用來求到八九位,以至十幾位小數的結果,不是愈想準確,反離準確愈遠嗎?再進一步,就認求到十幾位小數的結果爲絕對可靠,但在實際上有什麼用處,實際上有三四位小數就可够用,這不是徒勞無益嗎?　**爲要免去實際上不準確或準確而不必需的多位小數,我們就要用到省略算。　省略算是省略一部份無關重要的數字,使結果達到所需的準確程度的一種簡便算法。**

61.準確與誤差　準確的數與測得的數或省略後的數的差,叫做**誤差**。常人總以爲誤差小的比誤差大的結果要準確些,其實不然,準確的程度是相對的而非絕對的,不是純粹由誤差的大小來定,也與所測的數的大小有關。例如山高 4125 尺,測得 4120 尺,誤差爲 5 尺;又布長 4 尺 5 寸,量得 4 尺 4 寸,誤差爲 1 寸,就誤差的大小來講,似乎量布的準確些,因爲 1 寸究比 5 尺小得多,然就誤差與原數的比來看,測山的誤差,占山高的 $\frac{5}{4125}=\frac{1}{825}$,量布的誤差占布長的 $\frac{1}{45}$;就是測山的每測 825 尺才差 1 尺,而量布的,量到 45 尺,就差 1 尺,比較起來,當然測山的要準確得多,所以論到測量的準確問題,不獨要注意測量的值同眞值的誤差,還要注意這誤差同眞值的比,前者亦叫**絕對誤差**,後者叫**相關誤差**。測量的準確度常視相關誤差而定。

有時絕對誤差與眞值不能確知,相關誤差也就不能求得,但是絕對誤差若小於某一定的數,用來和眞值的近似值相比,可以算出相關誤差的最大限。

62.誤差的界限　把準確的冗長的小數保

留一定的位數,其餘略去,叫**省略記法**。普通總是把所需小數位後的數字略去,前面保存,如此所得省略數的誤差常小於其末位 1,這叫**誤差的界限**。

〔例〕 記 5.7286961 到小數第三位得 5.728,誤差為 0.0006961,小於 0.001,就是小於省略數末位的 1。

有時把小數寫到一定的位數,再看末位以後緊接着的數字如何,若是等於或小於 4,便一律捨棄,若等於或大於 5,便進一位收入,這叫**四捨五入法**。用普通法所得的省略數常較原數小,用四捨五入法所得的省略數有時比原數小,有時比原數大,看是用四捨或五入而定,他的誤差不僅小於省略數的末位 1,且常小於省略數末位的$\frac{1}{2}$,所以這種省略記法較為可靠。

〔例〕 用四捨五入法記 5.7286961 到小數第三位,得 5.729,誤差為 0.0003039,不僅比 0.001 小,還小於 $0.00\frac{1}{2}$,我們說 5.729 是 5.7286961 準到小數第三位的省略數。

63. <u>有效數字</u> 在記數時表示準到某單位的倍數的數字叫**有效數字**,而僅用來定有效數字的位值,以表明單位的大小的零,則非有效。

〔例一〕 0.0702＝702萬分之一,表示一準確的數或一省略數其誤差小於$0.000\frac{1}{2}$。這數的單位是萬分之一,702 表示單位的倍數,所以是有效數字,7 前的 0 是用來定 7 的位值的,非有效數字。

〔例二〕 3.81＝381 百分之一,有效數字是381。

3.8100＝38100萬分之一,有效數字是38100。

〔例三〕 中國人口現有4,7000,0000人,即47千萬人,所以有效數字是47,因是由下一位四捨五入而得。若是的確有這許多人,一個不多,一個不少,則4,7000,0000九個字全爲有效數字。

64.有效數字與相關誤差 **有兩省略數,一是準到某單位,一是準到另一單位,若有效數字相同,則兩相關誤差必定也有相同的界限。**

〔例〕 省略數436000準到千,4.36準到百分之一,求兩相關誤差的界限。

〔解〕 436000的絕對誤差小於$\frac{1}{2}$千,即500,所以相關誤差小於$\frac{500}{436000}=\frac{5}{4360}$。

4.36的絕對誤差小於$\frac{1}{2}$百分之一,即0.005,所以相關誤差小於$\frac{.005}{4.36}=\frac{5}{4360}$。

所以43600與4.36兩相關誤差的界限相同。

若一數的有效數字祇有一位,他的相關誤差常小於$\frac{.5}{1}$即.5;兩位有效數字的相關誤差常小於$\frac{.5}{10}$,即 .05;三位有效數字的相關誤差常小於$\frac{.5}{100}$,即.005。

習題十六

用普通省略記數法記以下各數到百位,再求省略數與原數的誤差:

1. 24372　　2. 3970.4　　3. 70000056,

記以下各數準到百位(用四捨五入法),再求省略數與原數的誤差:

4. 712896　　5. 3691.802　　6. 679.62

記以下各數準到百分之一,再指出各有效數字。

7. 12.30745　　8. .01492　　9. .599713

記以下各數準到三位有效數字:

10. .00800312　　11. $.\dot{0}1\dot{7}$　　12. $.0\dot{1}\dot{7}$

13. 81456　　14. 82.003　　15. 1690000

記以下各數準到小數第二位,求其絕對誤差及相關誤差:

16. 6.2525　　17. .027　　18. .8064

用省略法記以下各數使(1)相關誤差小於1%,(2)相關誤差小於.1%。

19. 89732　　20. 179.3402　　21. .560274

65.省略算法　要求兩個多位小數的和、差、積、商,只要準確到二三位小數,若用普通算法,於求得冗長的結果後,再來截取幾位,未免太覺費事。現在要講一種節省的方法來計算,使結果達到所需的準確程度,而無普通算法的麻煩,就是**省略算法**。

在省略算法裏常要注意如何略去不影響準確度的數字,使算法簡單。如求幾個八九位小數的和,使小數的第二位準確,有時截取各小數到第三位求和卽行,有時非要截到小數第四位以至第五位不可。又如求兩小數的商,被除數的小數位應如何省略;所得的數就可以準到某位小數。另一方面,已給幾個省略數,要看他們的和、差、積、商祇能準確到那一位爲止,而不能多求。如2.3064＋35.8＋462.1的和當然不能算到小數一位以下,因爲35.8的.8,及462.1的.1,已經是靠不住的數,如何更能算到這位的下一位?又如

38.42×2.94的積,也不能求到小數一位以下,因爲 2.94 未省略前是 2.944 或 2.939都說不定,所以用他的末一位.04乘 38.42 的最高位30,得1.2,再加上後面的進位數,這.2 自不可靠。由此可知不講準確度,任意求到小數若干位的結果,自以爲準確,而不知徒勞無益,朦朦中巳犯下極大的錯誤了。

〔註〕 本章所講的省略算法"求結果到小數某位"的意思,是求結果截到某位爲止,而不計再後一位數字是大於或是小於 5。若要結果與眞值的誤差小於末位的 $\frac{1}{2}$,可用這種算法多求一位小數,再四捨五入便得。

66.省略加法 因爲 n 個位數的和,常小於 10n,n 十位數的和常小於 100n,n 百位數的和常小於 1000n, 所以 **n 同位數的和的進位數常小於 n,至大等於 $n-1$。**

若用省略法求 n 個多位小數的和到小數第二位,使和裏每個數字,與由普通加法得到和後,再截到小數第二位的結果相等,就要注意各省略數截去部份的和的進位數是否影響到總和的小數第二位,如無影響,省略加法便可告成;如有影響,可把各省略數多取一位。

〔例一〕 求 $4.8601254+.9156243+.2764397$ 的和到小數第二位。

〔解〕 先把各數取到小數第三位,相加,

$$
\begin{array}{r:l}
4.86 & 0 \\
.91 & 5 \\
+)\ .27 & 6 \\
\hline
6.05 & 1
\end{array}
$$

三個截去部份的和的進位數至多是 2。 $1+2=3$,不影響到和的小數第二位。 所以三數的和算到小數第二位爲6.05。

〔例二〕 求 $.\dot{3}1\dot{5}+.2780\dot{3}+.4\dot{6}\dot{7}+1.0\dot{6}41\dot{2}+.\dot{8}$ 的和到小數第七位。

〔解〕

$$
\begin{array}{r:l}
\multicolumn{2}{c}{(1)} \\
.3153153 & 1 \\
.2780380 & 3 \\
.4676767 & 6 \\
1.0641264 & 1 \\
+)\ .8888888 & 8 \\
\hline
3.0140453 & 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r:l}
\multicolumn{2}{c}{(2)} \\
.3153153 & 15 \\
.2780380 & 38 \\
.4676767 & 67 \\
1.0641264 & 12 \\
.8888888 & 88 \\
\hline
3.0140454 & 20
\end{array}
$$

(說明) 先把各數取到小數第八位相加,如(1),因爲共有五個數,所以截去部份的最大進位數爲4, 因$4+9=13$, 影響到和的第七位小數,所以這位數字 3 不可靠,於是把各數再多取一位小數相加,如(2),總和的末位數字爲 $0.0+4=4$,不影響第八位小數。 所以五數的和算到第七位小數爲3.0140454。

〔註〕 實際作題時不必寫出算草(1),只要用心算,

把第八位小數加起來,再加上後面的進位數,若能再進一位,便照(2)式來作。

由此得省略加法的規則如下:

要求 n 個多位小數的和到小數某位,可把各數多取一位或二位,再加 $n-1$ 於其末位的數字和,若進到某位的數與未加 $n-1$ 以前的相同,求到某位小數的和便可靠,否則應在所求的小數位後多取三位以至四位,再求和。

〔註一〕 五個以上的小數求和,常在所求的小數位後多取兩位小數相加,因這時的 $n+1$ 大於或等於 5,所以影響進位的機會較多。同理五十個以上的小數求和,也常在所求的小數位後多取三位小數再相加。

〔註二〕 省略加法,也可以先用四捨五入法在各數需要的小數位後多取一位至兩位,用+、-表示有餘和不足,照常法相加,因爲這種省略數的誤差界限較小,加時有餘和不足又常會抵銷,所以結果,算到所求小數位常能正確。

〔例〕 求 $4.8\dot{3}\dot{2}$, $\frac{11}{12}$, $.534062$, $.\dot{2}\dot{9}$ 的和到小數第二位。

〔解〕

$$
\begin{array}{rl}
4.83\dot{2}=4.83 & \vdots\ 2+ \\
\dfrac{11}{12}=\ .91 & \vdots\ 7- \\
.534062=\ .53 & \vdots\ 4+ \\
.\dot{2}\dot{9}=\ .29 & \vdots\ 3- \\
\hline
+)\quad 6.57 & \vdots\ 6
\end{array}
$$

所以四數的和算到小數第二位爲6.57,若用四捨五入法,卽得6.58。

67.<u>省略減法</u>　要求兩個多位小數的差到某位小數,減時總是把兩數各多取一位或兩位小數,得差後再略去所求小數位後面的數字便得。

〔例一〕　求.8630249－.3784526的差到小數第二位。

〔解〕

$$
\begin{array}{rl}
.86 & \vdots\ 3 \\
.37 & \vdots\ 8 \\
\hline
-)\quad .48 & \vdots\ \cancel{5}
\end{array}
$$

所以兩數的差算到小數第二位爲.48。

〔例二〕　求.39745682－.28845373的差到小數第三位。

$$
\begin{array}{rl}
.397 & \vdots\ 456 \\
.288 & \vdots\ 453 \\
\hline
-)\quad .109 & \vdots\ \cancel{0}\cancel{0}\cancel{3}
\end{array}
$$

所以兩數的差算到小數第三位爲.109。

詳細分類,可得省略減法的幾條規則如下:

要求兩多位小數的差到小數某位,(一)若在所求位數的後面一位,被減數的數字大於減數的數字,可截去後面諸數,直接求差;(二)若在

所求位數後面的一位被減數的數字小於減數的數字,可截去後面諸數在減數的末位加一,再來求差;(三)若在所求位數的後面一位,被減數與減數的數字相等,可再看次一位直到上下兩數字,初次不等時,再照(一),(二)兩法來作。

〔例〕 求 1.673–.2587369 的差到小數第一、二、三位。

〔解〕(1)

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ -)\ .2 \\ \hline 1.4 \end{array}$$

(說明) 小數第二位數字,被減數為 7,大於減數的 5,可照第(一)法來減,如(1),於是兩數的差算到小數第一位為1.4。

(2)

$$\begin{array}{r} 1.67 \\ -)\ .26 \\ \hline 1.41 \end{array}$$

小數第三位數字,被減數為 3,小於減數的 8,可照第(二)法來減,如(2),於是兩數的差算到小數第二位為 1.41。

(3)

$$\begin{array}{r} 1.673 \\ -)\ .259 \\ \hline 1.414 \end{array}$$

小數第四、五兩位被減數與減數相同,第六位被減數為 7,小於減數 9,所以照(三)法在減數的第三位小數加 1,然後再減,如(3),於是兩數的差算到小數第三位為1.414。

習題十七

精密求以下各組數的和到小數第二位及第三位:

1. $1.05972+.83426+.74229$

2. $.98412+.97351+.345526+2.\dot{5}\dot{6}$

3. $2.\dot{6}\dot{5}+.3\dot{4}\dot{2}+.\dot{8}0\dot{5}+.69\dot{4}8\dot{3}+.26532+.7\dot{8}$

4. $.\dot{8}\dot{6}+.9\dot{2}+.\dot{5}+.3\dot{4}0\dot{7}+.8\dot{9}\dot{3}+.64\dot{2}\dot{5}+.\dot{3}96\dot{6}$

5. $.2\dot{6}\dot{3}+.\dot{4}\dot{7}+1.85\dot{2}+.\dot{4}2\dot{7}+.8+\dot{2}.9\dot{4}+1.0\dot{6}$

精密求以下各兩數的差到小數第二位及第三位;

6. $.87256-.49153$

7. $1.034572-.866574$

8. $.80000236-.34001398$

9. $.\dot{5}\dot{2}-.3\dot{2}\dot{7}$

10. $.4-.\dot{3}\dot{0}$

11. 用四捨五入法記以上各題的結果,準到小數第二位。

以下各省略數的和或差,各可準到小數第幾位。

12. $.89723+2.45+.006+8.2753$

13.　$.5297-.\dot{2}86543\dot{9}$.

68. <u>省略乘法</u>　要用省略方法求兩數的積到某位小數,得先知道幾條原理:

(一)兩數相乘,一數的小數點向前移若干位,另一數的小數點向後移相同的若干位,得積不變。(根據第37節乘除的定理。)

(二)兩數相乘,可用一數的各位數字照任何次序乘另一數,而加其部份積。(根據第16節乘法分配律。)

(三)兩數相乘,若把一數顛倒過來,列在另一數的下面,則各同行兩數的積的位值相同。

〔例一〕　在 63429×7581 式中,若把 7581 顛倒過來,列在63429的下面,可見在每個同行中兩數的積的單位常相同。

如:(十)×(千)=(百)×(百)=(千)×(十)
=(萬)×(個)=萬

萬	千	百	十	個
6	3	4	2	9
1	8	5	7	
個	十	百	千	

〔例二〕　在 .82546×3.7142 式中,若把 3.7142 顛倒寫在.82546的下面,各同行中兩數的積的單位也是相同。

如:(微)×(個)=(忽)×(分)=(絲)×(釐)
=(毫)×(毫)=(釐)×(絲)=(分)×(忽)=微

分	釐	毫	絲	忽	微
8	2	5	4	6	
	2	4	1	7.	3
忽	絲	毫	釐	分	個

除去這幾條原理,再看用個位數來乘一小數的省略算法。

〔例〕　求 $.8493276\times 6$ 的積到小數第三位。

〔解〕　$.8493276\times 6$ 等於求 6 個 $.8493276$ 的和,根據省略加法,要求加到小數第三位,只要再多取兩位相加,所以只要取五位小數,再用 6 乘,並注意略去數值的最大進位數 $5(=6-1)$ 便得。算式如下:

$$\begin{array}{rr} .849 & \vdots\ 32 \\ \times & \vdots\ \ \ 6 \\ \hline 5.095 & \vdots\ 92 \end{array}$$

因 $2+5=7$,不進位,所以所求的積算到小數第三位為 5.095。

於是在兩小數相乘時,由原理(一)可把被乘數及乘數的小數點作相反的移動,使乘數含一位整數。次由原理(二),可先用乘數的最高位數來乘被乘數,立得兩數的積的近似值,依次用較低位數來乘。再由原理(三),可把乘數顛倒過來寫在被乘數的下面,要求部份積到小數某位,便把這惟一的個位數寫在被乘數的某位小數同行下面,如此求部份積時小於某位小數的數便可略去。

〔例〕　求 $.029732\times 46.53$ 的積到小數第二位。

〔解〕　$.029732\times 46.53=.29732\times 4.653<.3\times 5=1.5$。

用省略法求各部份積到小數第二位後面兩位,即第四位小數,可把乘數顚倒過來,列其個位數 4 於被乘數的第四位小數下,再來相乘,如(2)式。由(2)式,積的末位數與後面最大進位數的和爲 5(=1+4) 不影響小數第二位,所以所求的積算到小數第二位爲 1.38。若參看(1)式普通乘法,立見省略乘法的簡便準確。

(1) 普通乘法

	.29	732
×)	3	564
	1.18	928
	.17	8392
	.01	48660
	.00	089196
	1.38	342996

(2) 省略算法

	.29	732	
×)	35	64	
	118	92	……2973×4+0 進位數
	17	83	……297×6+1 " " "
	1	48	……29×5+3 " " "
		8	……2×3+2 " " "
	1.38	31	

由此可得省略乘法的規則如下:

要求兩多位小數的積,可取有效數字較少的數爲乘數,移動小數位,使其只含一位整數,同時把被乘數的小數位作相反的移動。先寫被乘數,在所求小數位後面一位或兩位下面,寫乘數的個位數字,其餘數字顚倒寫下。用乘數的各位數字,各從上面相當位起,同被乘數相乘,並加入後面的進位數。乘得各部份的積的末位皆同乘數的個位同排一行,再照省略加法求和便得。

〔例〕 求67.540349×.0043275641的積到小數第五位。

〔解〕 67.540349×.0043275641=.067540349×

4.3275641<.07×5=.35。

(本題各部份積的末位係用四捨五入法進位)

	.06754	0349	
×)	146572	34	
	27016	14····675403	×4+2(4×4的進位數)
	2026	21····67540	×3+1(3×3的進位數)
	135	08····6754	×2
	47	28····675	×7+3(4×7的進位數)
	3	38····67	×5+3(5×5的進位數)
		40····6	×6+4(7×6的進位數)
		2····0	×4+2(6×4的進位數)
	.29228	51	

所以乘積算到小數第五位爲.29228。

〔註〕 實際計算時,右邊的說明不要寫。

69.<u>省略除法</u>　兩數相除,要用省略法來算,也得先知道幾條原理。

(一)兩數相除,小數點向前同移若干位或向後同移若干位,得商不變。(根據乘除的定理)

(二)若除數祇有一位整數,要想求商到某位止,則被除數中與商有關係的數也祇到某位止。

(三)若被除數不够除時,被除數加上一位數來除,與除數截去末一位數來除,結果相近。(位

數愈多,結果愈相近。)

根據以上三條原則,可得省略除法的規則如下:

要求兩多位小數的商到小數某位,可把被除數及除數的小數位照同向移動,使除數祇含一位整數。截取被除數中的小數,較所求的商的小數位多一位,同時也截取除數中的小數,以夠初步施除爲度,然後相除。用所得的首位商數乘截取的除數,併入右位應進的數,所得的結果,從被除數中減去,得第一步餘數。把截取的除數,再截去末位,來除第一步餘數,得商的第二位,再用來乘新除數,併入右位應進的數,從第一步餘數中減去,得第二步餘數。同法順次作去,每添一位商,除數末位就多截去一位,每步餘數也遞次減少,所求的商便可算出。

〔例一〕 求 $7944.806245 \div 320.6402$ 的商到小數第二位。

〔解〕 $7944.806245 \div 320.6402 = 79.44806245 \div 3.206402$

$\doteqdot 79 \div 3 \doteqdot 26$。

(天)

截取被除數到小數第三位,即 79.448, 除數到小數

第四位,即 3.2064, 正够初步施除。 省略相除如(2)式。

(1) 普通除法

```
               24.77 : ..........
3.206402)79.44 : 806245
               6412 : 804
               1532 : 0022
               1282 : 5608
                 249 : 44144
                 224 : 44814
                   24 : 993305
                   22 : 444814
                     2 : 548491
```

(2) 省略除法

```
                  24.77 :
3.2|0|6|402)79.44 : 806245
                  6412 : 8....32064×2
                  1532 : 0
                  1282 : 5....3206×4+1
                    249 : 5
                    224 : 4....320×7+4
                      25 : 1
                      22 : 4....32×7
                        2 : 7
```

得商為24.77,與左面(1)式普通除法所得的結果相同,而一繁一簡,相差甚遠了。

〔註〕 商的各位數與相當除數的部份積後面的進位數也可以用四捨五入法來記,如此可使部份積的末位,與由普通除法所得的數,不致相差過遠。

〔例二〕 求 57.8564327÷8.345 的商到小數第五位。(除數非省略數,否則商頂多祇能求到小數第三位)

〔解〕 除數的整數祇有一位,所以要求商到小數第五位,可截被除數到小數第六位,除數也要在數後加 0 到小數第六位,才够初步施除。 為省略手續計,除數的 0,可以不加,先照常法施除,直到被除數不够除時,再用省略除法。 下面(1)式係省略除法, (2) 式更用意大

(天)

利法來寫,愈覺簡便。(進位數用四捨五入法來計)

(1) 省略除法　　　　(2) 意大利法

$$
\begin{array}{r r c l}
 & 6.93306 & \vdots & \\
\cline{2-4}
8.3|4|5) & 57.85643 & \vdots & 2\cancel{7} \\
 & 50\,070 & \vdots & \\
\cline{2-4}
 & 7\,7864 & \vdots & \\
 & 7\,5105 & \vdots & \\
\cline{2-4}
 & 27593 & \vdots & \\
 & 25035 & \vdots & \\
\cline{2-4}
 & 2558 & \vdots & 2 \\
 & 2503 & \vdots & 5 \\
\cline{2-4}
 & 54 & \vdots & 7 \\
 & 50 & \vdots & 0 \\
\cline{2-4}
 & 4 & \vdots & 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r r c l}
 & 6.93306 & \vdots & \\
\cline{2-4}
8.345) & 57.85643 & \vdots & 2\cancel{7} \\
\cline{2-4}
 & 7\,7864 & \vdots & \\
\cline{2-4}
 & 27593 & \vdots & \\
\cline{2-4}
 & 2558 & \vdots & 2 \\
\cline{2-4}
 & 54 & \vdots & 7 \\
\cline{2-4}
 & 4 & \vdots & 7
\end{array}
$$

所以求商到小數第五位爲

6.93306.

〔例三〕　求 184 的倒數到小數第五位。

〔解〕　$\dfrac{1}{184}=1\div184=.01\div1.84$。

在被除數後添幾個 0,使成六位小數。用省略法除之,如下:

$$
\begin{array}{r r c l}
 & .00543 & \vdots & \\
\cline{2-4}
1.8|4) & .01000 & \vdots & 0 \\
\cline{2-4}
 & 80 & \vdots & 0 \\
\cline{2-4}
 & 6 & \vdots & 4 \\
\cline{2-4}
 & & \vdots & 9
\end{array}
$$

所以商爲.00543。

〔別解〕　求倒數也可以根據代數公式來作。例如 $x>a$,則

$$
\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{x}}\right)=\frac{1}{x}\left[1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right.
$$

$$
\left.+\cdots\cdots\right]=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\cdots\cdots
$$

取 n 項求和所得的誤差爲

$$\frac{a^n}{x^{n+1}}+\frac{a^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots\cdots=\frac{a^n}{x^{n+1}}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots\cdots\right)<\frac{a^n}{x^n}\cdot\frac{1}{x-a}。$$

於是 $\frac{1}{184}=\frac{1}{2\times 92}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100-8}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{100}+\frac{8}{100^2}+\frac{8^2}{100^3}+\frac{8^3}{100^4}+\cdots\cdots\right]=\frac{1}{2}\left[.01+.0008+.000064+.0000512+\cdots\cdots\right]=\frac{1}{2}\times.01086912\cdots\cdots$$

以上括弧內僅取四項求和,所以與眞數値的誤差小於 $\frac{8^4}{100^4}\cdot\frac{1}{92}<.0000005.$

若把這數加於.01086912, 並不影響小數第六位,當然也不影響小數第五位。所以要求到小數第五位,卽得

$$\frac{1}{184}=\frac{1}{2}\times.01086\cdots=.00543\cdots\cdots$$

〔註〕 較10的方數略大的數也可以照下式來做:

$$\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}-\frac{a^3}{x^4}+\cdots\cdots$$

習題十八

精密計算以下各數的積到二位及三位小數:

1. 1.2342×2.5673　　2. $.87902\times .016709$

(天)

3. $439.556\times.0087214$　　4. $(3.141593)^2$

5. $.5423\times.7684$　　6. $2.\dot{1}\dot{6}\times3.2\dot{4}$

精密計算以下各數的商到二位及三位小數:

7. $.87643\div.341654$　　8. $2.0143897\div.0037945$

9. $23\div68.94$　　10. $.8495607\div.0729$

11. $2.2\dot{3}\dot{6}\div.37\dot{2}$　　12. $1.\dot{4}\div.5\dot{6}$

13. 求 988 的倒數到小數第六位。

14. 求 4028 的倒數到小數第七位。

15. 二省略數 2.8014263,及 .1276[illegible]4 的積與商各可算到小數幾位,而使結果的末位準確。

16. 布每尺價 .372 元,問 5.67 尺布值幾元幾角?

17. 有地 74.258 方,值洋 1693.456 元,問每方值洋多少?算到分為止。

18. 水銀的比重為 13.6,問 21.45 立方公分水銀重多少?計算結果使末位準確。

復習題

1. 什麼叫絕對誤差及相關誤差,兩者關係如何?

2. 什麼叫有效數字? 有效數字與何種誤差有關係?

3. 普通省略數的誤差界限如何? 用四捨五入法記的省略數,其誤差的界限如何?

4. 在小數後面加幾個0,與這數的大小有關麼?與他的準確意義有關麼?

5. 在小數的小數點後有效數字前加幾個0,與這數的大小有關麼? 與他的準確意義有關麼?

6. 有效數字可以不可以爲0,在何種情形之下可以爲0?

7. 準到某位小數與準到某個有效數字有無分別?

8. 幾個多位小數求和,常在所求的小數位後多取一二位,再相加,這是什麼緣故? 多取的位數是否看求和的小數個數而定,如何定法?

9. 兩省略數2.86407與1.52的和與差祇能算到小數第幾位? 能不能算到小數第三位? 若是不能,何故?

10. 說出省略乘法所根據的幾條原理,並舉例解釋。

11. 說出省略除法所根據的幾條原理,並舉例解釋。

12. 在某數後附上一位數,結果等於什麼? 截去一位數,結果等於什麼?

13. 兩省略數2.86407與1.52的積與商祇能算到小數第幾位? 何故?

第六章 乘方與開方

70.根數與開方 若甲數的某次方數等於乙數,甲數就叫乙數的**根數**,次數叫做**根指數**.而求根數的方法叫做**開方**. 根數的符號為$\sqrt{\ }$,根指數多記在根號的左上角。

〔例一〕$\because 5^3=125$。$\therefore 5=\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{125}$便是125的三次根,3為根指數。

〔例二〕$\because 12^2=144$, $\therefore 12=\sqrt{144}$, $\sqrt{144}$便是144的二次根,根指數為2。

〔註〕 根號$\sqrt{\ }$是由兩部合成,一部是$\surd$,即由2變化而來,一部是括線——,所以二次根的根指數2可省去不寫,又根號內如有兩三項的和,括線——也可以用括弧( )來代替。

二次根也叫**平方根**,三次根也叫**立方根**,求平方根的方法叫**開平方**,求立方根的方法叫**開立方**。

由定義可見**乘方與開方互為逆運算**,**兩者互相還原**, 其關係可由下式表明:

〔公式〕 若$p^n=q$則$p=\sqrt[n]{q}$

於是$(\sqrt[n]{q})^n=q$, $\sqrt[n]{P^n}=p$。

71.<u>完全方數</u>　整數或分數等於其他整數或分數的方數的叫**完全方數**。完全方數的根祇有2,3,5,7等因數的,常可用分解因式法化爲幾組相同的質因數連乘積,由此很易得着原數的根數。

〔例一〕　$15876=2^2\times3^4\times7^2=(2\times3^2\times7)^2$,

所以15876爲一完全平方,其平方根爲

$$\sqrt{15876}=2\times3^2\times7=126$$

〔例二〕　$\frac{125}{1728}=\frac{5^3}{3^3\times2^6}=\left(\frac{5}{3\times2^2}\right)^3$。

所以$\frac{125}{1728}$爲一完全立方,其立方根爲

$$\sqrt[3]{\frac{125}{1728}}=\frac{5}{3\times2^2}=\frac{5}{12}。$$

〔例三〕　$.000512=\frac{512}{1000000}=\frac{2^9}{10^6}=\left(\frac{2^3}{10^2}\right)^3$。

所以.000512爲一完全立方,其立方根爲

$$\sqrt[3]{.000512}=\frac{2^3}{10^2}=\frac{8}{100}=.08。$$

72.<u>平方與平方根的位數</u>　由28節一m位整數與一n位整數的積的位數爲$m+n-1$或$m+n$,所以n位數的平方爲2n位數,或$2n-1$位數。

反之,2n位數,或 $2n-1$ 位數的平方根常爲 n 位數。由是得平方與平方根的整數位數表如下:

平方整數位	1或2	3或4	5或6	7或8	9或10	11或12	13或14	15或16
原數整數位	1	2	3	4	5	6	7	8
平方根整數位	1		2		3		4	

帶小數的平方及平方根的整數位與上表同,完全小數的平方的小數位數常爲原數的小數位數的二倍,所以一完全平方若爲小數,則其小數位常爲偶數,且平方根的小數位數爲原數的一半。

73.立方與立方根的位數　由28及41節,m位整數與n位整數、p位整數連乘積的位數爲 $m+n+p-2$、$m+n+p-1$、或 $m+n+p$,所以 n 位整數的立方爲 $3n-2$、$3n-1$、或 $3n$ 位數。反之,$3n-2$、$3n-1$、或 $3n$ 位整數的立方根常爲 n 位數。由是得立方與立方根的整數位數表如次:

立方整數位	1、2、3	4、5、6	7、8、9	10、11、12	13、14、15	16、17、18	19、20、21	22、23、24	25、26、27
原數整數位	1	2	3	4	5	6	7	8	9
立方根整數位		1			2			3	

(天)

帶小數的立方及立方根的整數位數與上表同,完全小數的立方的小數位數常爲原數的小數位數的三倍,所以一完全立方若爲小數,則其小數位常爲 3 的倍數,又立方根的小數位數爲原數的三分之一。

74.平方公式　要求一數的平方根,先要知道完全平方是如何構成,同他的平方根的各位數字有何關係,用代數上多項式的平方展開式就可以看出來。

(1)　$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$。

(2)　$(a+b+c)^2=(a+b)^2+[2(a+b)+c]c$

$=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c$。

(3)　$(a+b+c+d+\cdots)^2=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c+[2(a+b+c)+d]d+\cdots$。

上式中的各個文字固然可代表任何數値,但在實際應用上祗代表有一位有效數字的個位數、十位數、百位數、或千位數等,而前項文字的位數較後項的位數爲高,又左端每加一文字,右端就加一組項數,爲新文字與二倍舊文字的和,再乘以新文字所得的積。

(天)

〔例〕 $48^2=(40+8)^2=40^2+(2\times40+8)\times8$

$324^2=(300+20+4)^2$

$=300^2+(2\times300+20)\times20+[2(300+20)+4]\times4$。

$1765^2=(1000+700+60+5)^2$

$=1000^2+(2\times1000+700)\times700+[2(1000+700)+60]\times60+[2(1000+700+60)+5]\times5$。

75.立方公式 一完全立方與其立方根的各位數字有何關係,如何構成,也可以由代數上多項式的立方展開式看出。

(1) $(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$。

(2) $(a+b+c)^3=(a+b)^3+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$。

(3) $(a+b+c+d+\cdots)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c+[3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2]d+\cdots$。

上式中各個文字也是表示祇有一位有效數字的各位數,而前項文字的位數較後項的位

數爲高,

〔例〕 $37^3=(30+7)^3=30^3+(3\times30^2+3\times30\times7+7^2)\times7$。

$256^3=(200+50+6)^3=200^3+(3\times200^2+3\times200\times50+50^2)\times50+[3\times(200+50)^2+3\times(200+50)\times6+6^2]\times6$。

$4192^3=(4000+100+90+2)^3=4000^3+(3\times4000^2+3\times4000\times100+100^2)\times100+[3\times(4000+100)^2+3\times(4000+100)\times90+90^2]\times90+[3\times(4000+100+90)^2+3\times(4000+100+90)\times2+2^2]\times2$。

習題十九

求以下各數的值:

1. $\sqrt{253^2}$　　2. $\sqrt[3]{1264^2}$

3. $(\sqrt[3]{729})^3$　　4. $(\sqrt[6]{1728})^6$

分別指出以下各數的平方與立方的位數:

5. 12　　6. 75　　7. 245

8. 472　　9. 1372　　10. 57029

求以下各完全平方的根數的整數位及小數位:

11. 576　　12. 444889　　13. 55225

14. 4448.89　　15. .0029855296　　16. 54819.198225

求以下各完全立方的根數的整數位及小數位:

17. 1771561　　18. 84604519　　19. 2357947691

20. .000091125　　21. 31.255897　　22. 2357.947691

把以下各數的平方與立方照公式寫出來:

23. 59　　24. 128　　25. 3187

用分解因式法求以下各平方根及立方根:

26. $\sqrt{225}$　　27. $\sqrt{368.64}$　　28. $\sqrt{\frac{2916}{30625}}$

29. $\sqrt[3]{91125}$　　30. $\sqrt[3]{\frac{3375}{21952}}$　　31. $\sqrt[3]{.038255875}$

76.<u>開平方</u>　要求一完全方數的平方根,先要知道他的整數有多少位,小數有多少位,根據72節祇要把原數自小數點起,向左右每隔兩位,就分做一段,如此在整數及小數部分的段數便是平方根的整數及小數位數。次要求平方根最高位的數字,可看原數分段後最前一段數中能容何數的完全平方,其中最大的一個便是,於此要熟記九個基數的平方如下:

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$,

$6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$。

已知平方根中含一有效數字的最高位數,設爲a,要求次高位數,可從原數中減去a^2,而以$2a$試除其餘得數便是,設爲b。由平方公式,若餘數減去$(2a+b)b$;餘數爲零,平方根即爲$(a+b)$。若餘數不爲零,更以所求得根的二倍,即$2(a+b)$,試除這餘數,即得根的再次位數,設爲c。若由餘數中減$[2(a+b)+c]c$,餘數爲零,原數的平方根即爲$(a+b+c)$;若餘數不爲零,應再用所求得根的二倍,即$2(a+b+c)$,更試除其餘,如此繼續作下,直到最後餘數得零爲止。

〔例〕　求 107977.96 的平方根。

〔解〕　先分段,整數部有三段,小數部有一段,所以平方根的整數有三位,小數有一位。求根如下:

			$\ \ a\ \ \ \ \ b\ \ \ \ c\ \ \ \ d$
		107977.96	$300+20+8+.6=328.6$
		90000……$=a^2$	(−
試除數	$2a=600$	17977.96	
完全除數	$2a+b=620$	12400……$=(2a+b)b$	(−
試除數	$2(a+b)=640$	5577.96	
完全除數	$2(a+b)+c=648$	5184.00……$=[2(a+b)+c]c$	(−
試除數	$2(a+b+c)=656$	393.96	
完全除數	$2(a+b+c)+d=656.6$	393.96……$=[2(a+b+c)+d]d$	(−
		0	

(天)

$$\text{因}\quad \text{原數}\ -a^2-(2a+b)b-[2(a+b)+c]c-[2(a+b+c)+d]d=0。$$

$$\text{所以}\quad \text{原數}\ =a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c+[2(a+b+c)+d]d=(a+b+c+d)^2=328.6^2。$$

所以原數的平方根爲328.6。

由以上算式可知平方根的前一位數祇與原數的第一段數有關,平方根的前兩位數祇與原數的前兩段數有關,以下依此類推。所以要求根的最高位的數字,祇要取原數的第一段數來用,要求根的次高位的數字,祇要接取第二段數來用。總之要避免寫下整個的數,而棄置不用,表示單位而單位已經知道的零當然也可以不必寫,如是以上求根的算式就可以簡寫如下:

```
          10′79′77.96 | 328.6 (平方根)
           9
   62  |  179
       |  124
   648   |  5577
         |  5184
   6566    |  39396
           |  39396
                  0
```

〔註〕　因爲根的每位只寫數字,而未接寫表示位數的零,又每次餘數後面只多寫原數的一段,所以爲免去位數錯誤起見,常以求得的根的20倍做試除數,來求根的次一位數字。

這種簡式,以每次求得的根的數字的20倍做試除數,試除餘數所得的商隨即加在試除數,做完全除數,又根的小數位容易決定,所以在求根時竟可以把原數認爲整數,在求得根後再定根的小數點。

由此得求一數的平方根的規則如下:

先把原數按照平方根位數分段,再求首段數的最大整平方根,記在右邊,叫做初商(是平方根的第一位數);從首段數減去初商的平方,所餘的數,後面接寫第二段數作爲第一餘數。

用初商的20倍試除第一餘數得次商,記在初商的右邊(是平方根的第二位數);用次商乘20倍初商與次商的和,從第一餘數中減去,剩下的數的後面,接寫第三段數,作爲第二餘數。

再用初次商的20倍試除第二餘數,得三商,記在次商的右邊(是平方根的第三位數),以下再按上法反復推求,卽得全根。

77.<u>不盡平方根</u> 非完全平方的平方根,無論算到小數多少位,餘數總不爲零,就叫**不盡平方根**。不盡平方根可以任意求到幾位小數,只要在原數小數後任意添若干段零就可以繼續

(天)

求下。

〔例〕　求3.6的平方根到小數第三位。

〔解〕

```
          3.60′00′00 | 1.897….(根)
          1
  28    | 260
        | 224
  369   |  3600
        |  3321
  3787  |   27900
        |   26509
        |    1391
```

〔註一〕　省略數的根的位數,不得比原數的有效數字所分的段數爲多。

〔註二〕　分數求根,可將原數化爲小數後再來求;如分母爲完全平方,可以分別求分子分母的平方根,再來除;如分母非完全平方,可上下同乘一數,化分母爲完全平方後,再來求根。

〔例〕　求$\frac{5}{18}$的平方根。

〔解〕　(1) $\sqrt{\frac{5}{18}}=\sqrt{.2\dot{7}}=.527\cdots$,

(2) $\sqrt{\frac{5}{18}}=\sqrt{\frac{10}{36}}=\frac{1}{6}\times\sqrt{10}=\frac{1}{6}\times 3.162\cdots$

$=.527\cdots$。

78. <u>開平方應用</u>　開平方的應用很多,比較簡單而又重要的有以下三種:

(一)已知一正方形的面積要求一邊的長。

設正方形的面積爲A,一邊的長爲 a,則 $a=\sqrt{A}$。

(二)已知直角三角形的兩邊,求第三邊。

設夾直角的兩邊爲 a 及 b,斜邊爲 c。

則 $\because\ a^2+b^2=c^2,\quad \therefore\ c=\sqrt{a^2+b^2}$。

$a^2=c^2-b^2,\quad \therefore\ a=\sqrt{c^2-b^2}$。

$b^2=c^2-a^2,\quad \therefore\ b=\sqrt{c^2-a^2}$。

(三)已知二相似形的面積及其中一圖形的一邊,要求其他圖形的對應邊。

設二相似形的面積爲A及A′,二對應邊爲 a 及 a'。

則 $\because\ A:A'=a^2:a'^2,\quad \therefore\ \sqrt{A}:\sqrt{A'}=a:a'$,

或 $a'=\dfrac{\sqrt{A'}}{\sqrt{A}}\times a=\sqrt{\dfrac{A'}{A}}\times a$。

習題二十

求以下各數的平方根:

1. 1369　　2. 14161　　3. 444889

4. 5634.0036　　5. .0000086436　　6. 10.797496

7. 3486784401　　8. 54819198225

求以下各數的平方根到小數第三位:

9. 50　　10. .9　　11. 2.863

(天)

12. $\frac{300}{1225}$　　13. $\frac{3}{16}$　　14. $\frac{17}{24}$

15.要 123456 爲一完全平方,至少要加多少?減多少?

16.要 4725 爲一完全平方,至少乘上什麼數?

17.把長112尺,闊 79 尺的田地來換一塊等面積的正方形田地,問正方形田地每邊幾尺?

18.一茶盤的直徑爲 14 尺,一篩箕的面積爲其五倍,求篩箕的直徑。

19.沿一河的兩岸有兩顆大樹,一樹與他樹的對岸相隔 87 尺,已知河面寬 34 尺,求兩樹在河面上的距離。

20.一間房 20 尺長、16 尺寬、12 尺高,現從下面一角臨空引一線到上面的對角,問線長多少?(求到三位小數。)

79.開立方　由 73 節,要求一完全立方的立方根的位數,可自原數的小數點起向左右每隔三位,就分做一段,在整數及小數部份的段數便是立方根的整數及小數的位數。至於要求立方根第一位數字,祇要求原數分段後第一段數的最大整立方根便是。所以九個基數的立方也不可不記。

$1^3=1$,　$2^3=8$,　$3^3=27$,　$4^3=64$,　$5^3=125$,

$6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$,　$9^3=729$。

(天)

開立方的方法與開平方相似,不過更比較繁一些,先求立方根的最高位數 a,根據75節立方公式可造一試除數 $3a^2$ 來試除原數減去 a^3 所得的餘數,於是得立方根的次高位數 b。由餘數中減去 $(3a^2+3ab+b^2)b$,若餘數爲零,原數的立方根即爲 $a+b$。若餘數不爲零,更用 $3(a+b)^2$ 來試除,卽得根的再次位數 c。再由餘數中減去 $[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$,若餘數爲零,原數的立方根爲 $a+b+c$,否則更用一數來試除,如此繼續作下,直到餘數爲零爲止。

〔例〕　求167284.151的立方根。

〔解〕　先分段,整數部分有兩段,小數部分有一段,所以立方根的整數有兩位,小數有一位。求根如下。

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & \quad a \quad\ b \quad\ c \\
 & 167'284.151 & 50+5+.1=55.1 \\
 & 125000 & =a^3 \\
\hline
\text{試除數 } 3a^2 = & 7500 & 42284.151 \\
(3a+b)b = & 775 & \\
\text{完全除數} & 8275 & 41375 \quad =(3a^2+3ab+b^2)b \\
\hline
\text{試除數 } 3(a+b)^2 = & 9075 & 909.151 \\
[3(a+b)+c]c = & 16.51 & \\
\text{完全除數} & 9091.51 & 909.151=[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c。 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

(天)

因原數 $-a^3-(3a^2+3ab+b^2)b-[3(a+b)^2$

$$+3(a+b)c+c^2]c=0,$$

所以　原數 $=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+[3(a+b)^2+3(a+b)c$

$$+c^2]c=(a+b+c)^3=55.1^3,$$

所以原數的立方根為55.1。

由以上算式,可知立方根的前一位數祇與原數的前一段數有關,立方根的前兩位數祇與原數的前兩段數有關,以下依此類推,所以要求根的最高位的數字,祇要取原數的第一段數來用,要求根的次高位數字,祇要接取第二段數來用,每次不需要的段數不必重複寫下,既無用而又麻煩,於是以上算式得簡寫如下:

$$\begin{array}{r|l}
 & 167'284.151 \quad \underline{|\ 55.1}\text{(立方根)} \\
 & 125 \\
7500 & 42284 \\
8275 & 41375 \\
\hline
907500 & 909151 \\
909151 & 909151 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

〔註〕　因為立方根的每位也只寫數字而未接寫表示位數的零,所以常用已求得根10倍的平方的3倍做試除數。理由與 123 頁的註同。

這種簡式(1)把原數全認為整數,求得根後,再定小數點;(2) 以每次已求得的根的平方,再乘以 300, 作為

試除數；(3) 以試除數試除餘數所得的商,乘以已知根的30倍與商的和,再加其結果於試除數,作爲完全除數。

上法再加修飾,立得立方根的求法規則如下：

先把原數按照立方根位數分段,再求首段數的最大整立方根,記在右邊,叫做初商 (是立方根的第一位數)；從首段數減去初商的立方,所餘的數,後面接寫第二段數,作爲第一餘數。用初商平方的三倍,後面接寫兩個零來試除第一餘數,得次商,記在初商的右邊 (是立方根的第二位數)。三倍初商後面接寫次商,再乘以次商,加結果於試除數,得完全除數。從第一餘數內減去完全餘數與次商的積,得第二餘數。再用初次商平方的三倍後面接寫兩個零,來試除第二餘數,即得三商 (是立方根的第三位數)。以下按上法繼續推求,可得全根。

〔註〕 因試除數比完全除數小,所以試除所得的商,常取比原商略小一些的數,如商比10大,可從 9 試起；如商比 1 小,根的這一位就是零。

80. <u>不盡立方根</u>　非完全立方的立方根,無

論算到小數多少位,餘數總不爲零,就叫**不盡立方根**。在原數小數後任意添若干段零,可以求立方根任意到幾位小數。

〔例〕 求55的立方根到小數第三位。

〔解〕

```
                         55.000′000′000 ····| 3.802 ····(立方根)
                         27
          2700 | 28000
           784 |
    +)    3484 | 27872
      43320000 |   128 000 000
         22804 |
    +)43342804 |    86 685 608
                    41 314 392
```

若用四捨五入法來記 $\sqrt[3]{55}$ 爲3.803。

〔註〕 參看77節的二註,在立方根中也有相同情形。

81. <u>**開立方應用**</u> 開立方的應用,重要的有以下幾種:

(一)已知一立方體的積要求一邊的長。

設立方的體積爲V,一邊的長爲 a,則 $a=\sqrt[3]{V}$。

(二)已知二相似體的體積及一立體的一邊,要求其他立體的對應邊。

設二相似體的體積爲V及V′,二對應邊爲 a 及 a',則 $\because\ V:V'=a^3:a'^3,\quad \therefore\ \sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{V'}=a:a'$。

或 $a'=\dfrac{\sqrt[3]{V'}}{\sqrt[3]{V}}\times a=\sqrt[3]{\dfrac{V'}{V}}\times a$。

習題二十一

求以下各數的立方根:

1. 97336
2. 830584
3. 84.604519
4. .008741816
5. 2357947691
6. 389017000000

求以下各數的立方根到小數第三位:

7. 4
8. 40
9. 400
10. $\dfrac{7}{18}$
11. $\dfrac{3}{16}$
12. $\dfrac{43}{126}$

13. 有形狀相似的大小兩箱,大箱容積爲小箱的三倍,已知小箱一邊的長爲1.7尺,問大箱的對應邊長多少尺?

14. 一球的體積與一立方體的體積相同,已知球的半徑爲 3.64 寸,求立方體一邊的長(圓周率設爲 3.1416)。

82.根的近似值　由代數上二項式定理,很容易求得一數的平方根或立方根到二,三位小數。如 $x<1$,則

$$(1)\ \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5}{128}x^4+\cdots。$$

$$(2)\ \sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\cdots,$$

〔例一〕 求$\sqrt{28}$到三位小數。

〔解〕 $\because 28=25+3=25(1+\frac{3}{25})=25(1+.12)$。

$$\therefore \sqrt{28}=5\sqrt{1+.12}=5\left[1+\frac{1}{2}\times.12-\frac{1}{8}\times.12^2+\frac{1}{16}\times.12^3-\cdots\right]$$。

$$=5[1+.06-.0018+.000108-\cdots]$$

$$=5\times1.0583\cdots$$

$$=5.2915\cdots$$

$$=5.291\cdots$$。

若用四捨五入法,$\sqrt{28}$可以記爲5.292。

〔例二〕 求$\sqrt[3]{120}$到三位小數。

〔解〕 $\because 120=125-5=125(1-\frac{5}{125})=125(1-.04)$

$$\therefore \sqrt[3]{120}=5\sqrt[3]{1-.04}=5\left[1+\frac{1}{3}(-.04)-\frac{1}{9}(-.04)^2+\frac{5}{81}(-.04)^3-\cdots\right]$$

$$=5[1-.01333-.00017-.000004\cdots]$$

$$=5\times.986496\cdots$$

$$=4.932\cdots$$。

83.<u>高次根求法</u> 凡根指數較 3 爲大的根數叫做**高次根**。若根指數祇有 2 與 3 的因數,可叠用求平方根及立方根法求得其根;若有另

外的因數,雖可用近似法來求,但求法很繁,最好利用下章的對數來求。

〔例一〕 求2176782336的6次根。

〔解〕 因$6=2\times3$,所以把原數求得平方根後再求得數的立方根,卽得原數。

$$\because\ \sqrt[2]{2176782336}=46657,\ \sqrt[3]{46657}=36,$$

$$\therefore\ \sqrt[6]{2176782336}=36。$$

或先求立方根後求平方根,得數也同。

$$\sqrt[3]{2176782336}=1296,\quad \sqrt{1296}=36。\text{(答)}。$$

〔例二〕 求 308 的 7 次根。

〔解〕 (1) 先求次數比 7 較高及略低的根。

$$\sqrt[6]{308}=2.59+$$

$$\sqrt[3]{308}=2.04+$$

7 次根應在兩數的中間,設為

$(2.59+2.04)\div2=2.31$。……(第一近似值)

(2) $2.31^6=151.93\cdots$

$308\div151.93=2.0272\cdots$

308有六個因數爲2.31, 一個因數爲 2.0272, 所以他的 7 次根大略爲

$(2.31\times6+2.0272)\div7=2.2696\cdots$。(第二近似值)

(3) $2.2696^6 = 136.6748\cdots$,

$308 \div 136.6748 = 2.253452\cdots$,

308有六個因數爲2.2696,一個爲2.253452,所以他的7次根大略爲

$(2.2696 \times 6 + 2.253452) \div 7 = 2.267293\cdots$。(第三近似值)

所以 $\sqrt[7]{308} = 2.26\cdots\cdots$。

習題二十二

求以下各根的近似值到三位小數:

1. $\sqrt{5}$ 2. $\sqrt{102}$ 3. $\sqrt{395}$

4. $\sqrt[3]{65}$ 5. $\sqrt[3]{213}$ 6. $\sqrt[3]{72}$ $(72 = 8 \times 9)$。

7. 求5636405776的四次根。

8. 求6321363049的六次根。

9. 求200的六次根到小數第二位。

10. 求1.577635的九次根到小數一位。

復習題

1. 根數與方數有什麼關係?

2. 不盡根能不能化爲分數? 不盡根的小數與分

數所化的小數有什麼不同?

3. 平方根與立方根的位數如何定法? 何以如此定,說明原因。

4. 畫圖來表示平方公式的正確。(若用正方形木板照圖來分割,可用做求平方根的模型。)

5. 畫圖來表示立方公式的正確。(若用立方形木塊照圖來分割,可得一求立方根的模型。)

6. 利用代數上等差級數理,自 1 起 n 個連續奇數的和等於n^2,由此能推得開平方的規則麼? 說明珠算開平方可應用這法來推算。

7. 分解因式與開方有什麼關係? 能利用分解因式法來開方麼?

8. 若原數非完全方數,也能全用分解因式法來開方麼?能用分解因式法使開方較為簡捷麼?

9. 一數的高次根如何求法?

10. 分數的平方根及立方根有幾種求法? 以何法最為簡捷?

11. 一完全平方的末位數字祇有幾種什麼數? 如何看一數的末位就能定這數是否為一完全平方數?

12. 一完全立方的末位數字有無限制? 由原數的

(天)

末位數字,能定其立方根的末位數字麼?

13. 一完全四次方數的末位數字祇有幾種?

14. 證明一完全五次方數的末位數字與其五次根數的末位數字完全相同.

第七章　對數

84.<u>對數之定義</u>　若求甲數多少方等於乙數,那表示方次的指數便叫"以甲數爲**底**,乙數的**對數**"。對數的符號爲 log, 底常寫在log的右下側。

〔公式〕　若 $a^b=c$, 則 $b=\log_a c$。

〔例一〕　$\because 3^4=81,\qquad \therefore \log_3 81=4$。

即81以3爲底的對數爲4。

〔例二〕　$\because 10^3=1000,\qquad \therefore \log_{10} 1000=3$。

即1000以10爲底的對數爲3。

〔例三〕　$\because 5^{-2}=\frac{1}{25}=.04,\quad \therefore \log_5 .04=-2$。

即.04以5爲底的對數爲 -2。

85.<u>三種運算</u>　前面第二章裏曾講過加法是直接運算,他的逆運算爲減法,加減法是運算中最簡單的,叫**第一級運算**。乘法是直接運算,他的逆運算爲除法,乘除法是運算中較繁的,叫**第二級運算**。乘方也是直接運算,他的逆運算却有兩種:一是開方,另一便是對數。乘方、開方、對數在幾種運算中比較最繁,叫**第三級運算**。

一式中若兼有級數不同的幾種運算,應先算級數高的,以次算到級數低的。

現將三種運算的關係,列表如下:

	直接運算	間接運算	
	已知a,b求c	已知b,c求a	已知a,c求b
第一級運算	(加法) $c=a+b$	(減法) $a=c-b$	(減法) $b=c-a$
第二級運算	(乘法) $c=a\times b$	(除法) $a=c\div b$	(除法) $b=c\div a$
第三級運算	(乘方) $c=a^b$	(開方) $a=\sqrt[b]{c}$	(對數) $b=\log_a c$

86.<u>對數的性質</u>　對數既爲乘方的逆運算,要研究對數的性質,也祇要從乘方中指數的性質來逆推便得。

應用來求對數性質的指數定律(27 節)有四:

(1)　$a^m\times a^n=a^{m+n}$。

(2)　$a^m\div a^n=a^{m-n}$。

(3)　$(a^m)^n=a^{mn}$。

(4)　$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

由此可得對數的幾條定理如下:

(一)兩數乘積的對數等於兩數的對數的和。

〔公式〕　$\log_a A\cdot B=\log_a A+\log_a B$

〔證〕 設 $A=a^m$, $B=a^n$。

則 $$m=\log_a A,\quad n=\log_a B$$

由以上指數定律(1),

$$A\cdot B=a^m a^n=a^{m+n},$$

所以 $$\log_a A\cdot B=m+n=\log_a A+\log_a B。$$

〔註〕 本定理可以推廣到兩數以上的乘積,如

$$\log_a A\cdot B\cdot C=\log_a A+\log_a B+\log_a C。$$

(二)兩數的商的對數等於被除數的對數減除數的對數。

〔公式〕 $\log_a \frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$。

〔證〕 設 $A=a^m$, $B=a^n$,

由以上指數定律(2),

$$\frac{A}{B}=a^m\div a^n=a^{m-n}$$

$$\therefore \log_a \frac{A}{B}=m-n=\log_a A\quad \log_a B。$$

(三)一數的方數的對數,等於這數的對數乘以指數。

〔公式〕 $\log_a A^n=n\cdot\log_a A$。

〔證〕 設 $A=a^m$,

由以上指數定律(3)。

$$A^n=(a^m)a^n=a^{nm},$$

所以 $\log_a A^n = n\cdot m = n\cdot\log_a A$。

(四)一數的根數的對數,等於這數的對數除以根指數。

［公式］ $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{\log_a A}{n}$

［證］ 設 $A = a^m$,

由以上指數定律(4),

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

所以 $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\log_a A}{n}$。

習題二十三

求以下各對數的值:

1. $\log_2 32$ 2. $\log_2 512$ 3. $\log_2 \dfrac{1}{2^2}$ 4. $\log_2 .0625$

5. $\log_3 243$ 6. $\log_7 343$ 7. $\log_3 \dfrac{1}{2187}$ 8. $\log_9 6561$

求以下以10爲底各對數的值:

9. $\log 1$ 10. $\log 10$ 11. $\log 100$ 12. $\log 1000$

13. $\log 10000$ 14. $\log 10^{12}$ 15. $\log .1$ 16. $\log .01$

17. $\log .001$ 18. $\log .0001$ 19. $\log .00001$ 20. $\log 10^{-12}$

21. 以4爲底的對數爲3、4、5、0、-2、-3等,求這些數。

求以下以10爲底各數的對數介在那兩個連續

整數中間:

22. 8　　23. 87　　24. 61.24　　25. 8.092

26. 256　　27. 426.52　　28. 7138.5　　29. 23800

30. .4326　　31. .08072　　32. .000049　　33. .000009

證明以下各式的正確:

34. $\log_2 2+\log_3 729-\log_{10}10000+\log_5 .008=0$。

35. $\log_{10}1000+\log_{10}1+\log_{10}100000-\log_{10}100=6$。

利用對數的性質,化以下各式的對數成容易計算的形式:

36. $\log 89.3\times7.16\times24$　　37. $\log\frac{258}{17.2\times64}$

38. $\log 21.9^5$　　39. $\log\sqrt[3]{7.02\times28.9}$

87. <u>常用對數</u>　為計算上方便起見,對數的底,常取為大於 1 的正數10,以 10 做底的對數,便叫**常用對數**。常用對數的底既已知道,當然可以略去不寫:

〔例〕　$\log_{10}245$,簡寫為 $\log 245$。

〔註〕　本書以下均講常用對數,底不寫時,總表示略去的10。

因　$10^0=1$,　$10^1=10$,　$10^2=100$,　$10^3=1000$,

$10^{-1}=.1$　$10^{-2}=.01\cdots\cdots$

所以 $\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3$,

$\log .1=-1$, $\log .01=-2\cdots$

於是常用對數爲整數的,可以列表如下:

原數	…… .0001	.001	.01	.1	1	10	100	1000	10000……
對數	…… −4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4 ……

由表可見大於 1 的數,對數常爲正,小於 1 的數,對數常爲負。

88. <u>常用對數求法</u> 除去10的整方數的對數爲整數外,普通一般數的對數,常不爲整數,其界限可由上表查出。

〔例〕 一位數在 1 與 10 之間,所以對數在 0 與 1 之間而爲純小數。二位數在 10 與 100 之間,所以對數在 1 與 2 之間。

要求一位整數的對數,可先用開平方法,求得 $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, 等值,列表如下:

$10^{\frac{1}{2}}=3.16228$ $\quad 10^{\frac{1}{4}}=1.77828$ $\quad 10^{\frac{1}{8}}=1.33352$

$10^{\frac{1}{16}}=1.15478$ $\quad 10^{\frac{1}{32}}=1.07461$ $\quad 10^{\frac{1}{64}}=1.03663$

$10^{\frac{1}{128}}=1.01815$ $\quad 10^{\frac{1}{256}}=1.00904$ $\quad 10^{\frac{1}{512}}=1.00451$

$10^{\frac{1}{1024}}=1.00225$ $\quad 10^{\frac{1}{2048}}=1.00112$ $\quad 10^{\frac{1}{4096}}=1.00056$

以上各式中10的指數為等號右端各數的對數,利用這表就可求對數,舉例如下:

〔例〕 求 $\log 4.26$。

〔解〕 設 $\log 4.26 = x$, 則 $10^x = 4.26$. 比較上表,可知 x 比 $\frac{1}{2}$ 大。即用 $10^{\frac{1}{2}}$ 的等數 3.16228 來除 4.26,用省略法算到五位小數,得商 1.34713. 所以

$$4.26 = 3.16228 \times 1.34713。$$

1.34713 再用表中比較略小的數 1.33352 來除,得商 1.00945,代入上式,即得

$$4.26 = 3.16228 \times 1.33352 \times 1.00945。$$

1.00945 再用表中比較略小的數 1.00904 來除,得商 1.00107,代入上式,即得

$$4.26 = 3.16228 \times 1.33352 \times 1.00904 \times 1.00107。$$

繼續照樣算去,再用10的各方數代入,即得

$$\begin{aligned} 10^x &= 10^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{8}} \times 10^{\frac{1}{256}} \times 10^{\frac{1}{4096}} \times \cdots\cdots \\ &= 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\frac{1}{4096}+\cdots\cdots} \\ & 10^{.6294\cdots\cdots\cdots}, \end{aligned}$$

所以 $x = .6294\cdots\cdots\cdots$, 即 $\log 4.26 = .6294$.

一位整數的對數,既可求得,有效數字相同的各數的對數,即可以推算。

［例］ 求 $\log 42.6$, $\log 426$, $\log 42600$, $\log .426$, $\log .00426$.

［解］ $\log 42.6=\log 4.26\times 10=\log 4.26+\log 10=1.6294.$

$\log 426=\log 4.26\times 10^2=\log 4.26+\log 10^2=2.6294.$

$\log 42600=\log 4.26\times 10^4=\log 4.26+\log 10^4$

$=4.6294.$

$\log .426=\log 4.26\div 10=\log 4.26-\log 10=.6294-1.$

$\log .00426=\log 4.26\div 10^3=\log 4.26-\log 10^3$

$=.6294-3.$

［註］ 對數中 -1 常寫為 $\bar{1}$,所以

$\log .426=\bar{1}.6294,\quad \log .00426=\bar{3}.6294.$

89.指標與假數 普通一數的對數常為一整數,加一小數。對數的整數部份叫**指標**,小數部份叫**假數**。 指標可正可負,假數常取正數。

［例］ $\log 42.6=1.6294$, 1是指標,.6294是假數。

$\log .00426=\bar{3}.6294$, $\bar{3}$是指標,.6294是假數。

90.指標求法 指標的值可以由87節的表來決定。凡大於1的數,如祇有一位整數,他的對數在0與1之間,所以對數的指標為0;如有二位整數,他的對數在1與2之間,所以對數的指

標爲 1;如有三位整數,他的對數在 2 與 3 之間,所以對數的指標爲 2;以下依此類推。凡小於 1 的數,如小數點後有效數字前沒有零,原數在 1 與 .1 之間,所以對數在 0 與 -1 之間,因爲假數常寫爲正數,所以指標爲 $\bar{1}$;若小數點後有效數字前有一個零,原數在 .1 與 .01 之間,所以對數在 -1 與 -2 之間,而指標爲 $\bar{2}$;若小數點後有效數字前有兩個零,原數在 .01 與 .001 之間,於是對數在 -2 與 -3 之間,所以指標爲 $\bar{3}$;以下依此類推。

由是得求指標的規則如下:

(一)大於 1 的數的指標常爲正數,其值較原數的整數位數少 1。

(二)小於 1 而大於 0 的數的指標常爲負數,其值較原數的小數點後有效數字前零的個數多 1。

〔例〕 log 897024 的指標爲 5

log 397.56 的指標爲 2,

log .00742 的指標爲 $\bar{3}$。

91.假數求法,對數表 要求一數的對數,其

指標很容易定,但假數却求得很費事,普通總把各數的對數的假數預先算好,列成一表,以便求時的檢查,叫做**對數表**。

本書所附的對數表是一切三位有效數字的對數的假數,算到四位小數,後面各位用四捨五入法來歸併,假數前面小數點已經略去。

〔註〕 在日常生活方面,有四位有效數字,便可够用,所以本書也只用四位對數表,若要結果較為準確,可用本局出版余介石編的五位算學用表中的五位對數表。

若某數的對數已經知道,無論小數點如何移動,祇要原數的**有效數字不變,其對數的假數也跟着不變**(看88節的例),祇是指標變大或變小,這是以10為對數的底的特別便利處。

兩數相差極微的,其差數與對數的差數大略成比例,由這性質,可求有效數字不止三位的數的對數。

92.求對數法 要求一數的對數,祇要分別求其指標與假數,連寫一起便得。

(天)

〔例一〕 求234的對數。

〔解〕 因234有三位整數,所以log234的指標爲2.就對數表中第一頁左邊N行下,查出23一數,再從首列第六行查出末位4,在行列交界處,得數3692,卽log234的假數爲.3692。所以$\log 234=2.3692$。

〔例二〕 求log3及log.00078的值

〔解〕 3爲一位數,所以log3的指標爲0. log3的假數與log300相同,就對數表中第一頁N行下查出30,再從首列第二行查出末位0,在行列交界處得數4771,卽log3的假數爲.4771,所以$\log 3=0.4771$。

.00078在小數點後有效數字前有三個零,所以他的對數的指標爲$\overline{4}$。又log.00078的假數與log780的相同,由對數表第二頁查得爲.8921。所以$\log .00078=\overline{4}.8921$。

〔註〕 爲運算上方便起見,負指標常寫在對數後面,或化爲兩數相減的形式,如

$$\log .00078=\overline{4}.8921=0.8921-4,$$

或$1.8921-5$,或$6.8921-10$等。

〔例三〕 求log4673的值。

〔解〕 log4673的指標爲3,假數與log467.3的相同,在log468與log467的兩假數之間。因log468的假數爲.6702,而log467的假數爲.6693,相差.0009,設log467.3的假

數較log467的多 x,即得比例式

$$1:.3=.0009:x$$

$$\therefore\quad x=.0009\times.3\doteq.0003。$$

於是 log467.3 的假數爲 .6693+.0003=.6696。所以 log4673=3.6696。簡式如下:

$$\begin{array}{ll} \log 4680=3.6702 & \because\ 9\times.3\doteq3, \\ \log 4670=\underline{3.6693}\ (- & \therefore\ \log 4673=3.6696。 \\ \qquad\qquad\ \ 9 & \end{array}$$

93.求反對數法 已知甲數的對數爲乙數,甲數就叫乙數的**反對數**。

〔例〕 $\log .627=\bar{1}.7973$, .627便是 $\bar{1}.7973$ 的反對數。

由上例可知**原數即爲其對數的反對數**。

如已知一數的對數,要求原數,可先就對數的假數部份查對數表,推得原數的有效數字;次就對數的指標,定原數中小數點的位置。

如表上的假數沒有一個等於所給的假數,仍用比例法求原數到四位有效數字。

〔例一〕 求對數爲 $\bar{2}.7818$ 的原數。

〔解〕 先在對數表內檢出7818.就這數的同列,向左推到N行下面,找出60,就是原數的前二位有效數字;再由這數同行向上推,在首列大字內,找出5,就是原數

第三位有效數字;所以原數的有效數字爲 605。因指標爲 $\bar{2}$,所以原數是小數,在小數點後有效數字前有一個零,所以原數爲 .0605。

〔例二〕 求 $\log x=1.1936$ 式中的 x。

〔解〕 在對數表中檢查,沒有1936,只有1931與1959。第一個對數的原數,其各位有效數字爲 156,第二個爲 157,所以 x 的有效數字前三位爲 156,後一位尙須推求。因 1959 較 1931 大 28,原數較大 1;1936 較 1931 大 5,設原數大 y,則

$$1:y=28:5,$$

$$\therefore\quad y=\frac{5}{28}=.2。$$

所以 x 的有效數字爲 156.2. 今對數的指標爲 1,原數應爲二位整數,所以 $x=15.62$。簡式如下:

$$\begin{array}{ll} \log 15.7=1.1959 & \log x\quad\ =1.1936 \\ \log 15.6=\underline{1.1931}\,(- & \log 15.6=\underline{1.1931}\,(- \\ \qquad\qquad\quad 28 & \qquad\qquad\quad 5 \\ \dfrac{5}{28}=.2 & \text{所以 } x=15.62。\end{array}$$

習題二十四

· 求以下各數的對數:

1. 354 2. 12000 3. .00804 4. 97.8

(天)

5. 4057　6. 8255　7. .001258　8. 9126000

9. 218.64　10. 39485　11. 7003400　12. .0046763

求以下各數的反對數,至多到四位有效數字:

13. 2.1673　14. 1.5340　15. $\bar{2}.8000$　16. 5.9289

17. $\bar{1}.490$　18. $\bar{4}.7368$　19. 0.0222　20. 2.9480

21. 4.9000　22. 2.7094　23. $\bar{1}.111$　24. 0.888

25.已知兩數的積的對數爲 2.7394,求兩數的積。

26.求 $\frac{6}{192}$ 的對數,再求其反對數。

27.證明 $\log\sqrt{4624}=\frac{1}{2}\times\log 4624$,求得結果,再求其反對數。

28.證明 $\log 376^3=7.7256$,由是求 376^3 到四位有效數字。

29.求 $\log(286+342-76)$,及 $\log 286+\log 342-\log 76$,兩者是否相等?

30.求 $\log(3\times 894)$,及 $3\times\log 894$,兩者是否相等?

求以下各式的值到四位小數:

31. $\log .763+\log 3.46$　32. $\log .0085+\log .0904+\log .8$

33. $\log 285-\log 7432$　34. $\log .045-\log .000685$

35. $5\times\log 72.9$　36. $3\times\log .0351$

37. $\frac{1}{3}\times\log .504$　38. $\frac{1}{6}(\log 79-2\log 1.43)$

(天)

94.<u>餘對數</u>　一數的倒數的對數,叫這數的餘對數。餘對數的符號爲colog。

〔公式〕　$\operatorname{colog} a=\log\frac{1}{a}$。

由86節定理二,　$\log\frac{1}{a}=\log 1-\log a=-\log a$,

所以**一數的餘對數,也就是這數的對數的負數**。

〔例〕　$\operatorname{colog} 2=-\log 2=-0.3010=\bar{1}.6990$。

或$\operatorname{colog} 2=\log\frac{1}{2}=\log .5=\bar{1}.6990$。

要求一數的餘對數,可先求這數的對數,把指標變號,再減1,再加上假數的補數便得。

〔例一〕　求colog2347。

〔解〕　$\log 2347=3.3705$。

餘對數的指標爲$\bar{3}-1=\bar{4}$,假數爲6295,

$\therefore\ \operatorname{colog} 2347=\bar{4}.6295$。

〔註〕　查得對數後,可由心算求餘對數,不但說明可省,卽原對數也可以不寫。

〔例二〕　求colog.00811。

〔解〕　$\log .00811=\bar{3}.9090$,　$\therefore\ \operatorname{colog} .00811=2.0910$。

若有兩三個對數相減,不但計算很繁,也不能一步算得結果,最好化爲餘對數求和,就可以免去種種不便。

〔例〕 $\log 26.4-\log 4.5-\log 806$

$$=\log 26.4+\operatorname{colog} 4.5+\operatorname{colog} 806=\bar{3}.8621。$$

95.對數算法 利用86節對數的性質,要算乘法,除法,乘方,和開方,全可以用對數來作。對數能以加代乘,以減代除,以乘代乘方,以除代開方,使各種運算都減低一級,所以是極敏捷而準確的一種省略算法。

計算時,可先求算式的對數(利用86節化開來求),然後再求其反對數,卽得算式的值(至多算到四位有效數字)。

〔例一〕 求$67.3\times.00425$的積。

〔解〕 $\log(67.3\times.00425)=\log 67.3+\log.00425$

$$\log 67.3=1.8280$$

$$\log.00425=\bar{3}.6284\quad(+$$

$$\text{和}=\bar{1}.4564=\log.286$$

$$\therefore 67.3\times.00425=.286.$$

〔例二〕 求$.08162\div.259$的商。

〔解〕 $\log(.08162\div.259)=\log.08162-\log.259$

$$\log.08162=\bar{2}.9118$$

$$\log.259=\bar{1}.4133\quad(-$$

$$\text{差}=\bar{1}.4985=\log.3151.$$

$\therefore .08162 \div .259 = .3151.$

〔另解〕 $\log(.08162 \div .259) = \log .08162 + \operatorname{colog} .259$

$$= \bar{2}.9118 + 0.5867 = \bar{1}.4985.$$

$\therefore .08162 \div .259 = .3151.$

〔例三〕 求 $\dfrac{37.2 \times 89.4}{2.45 \times .986}$

〔解〕 設所求數 $=x$,則

$$\log x = \log 37.2 + \log 89.4 + \operatorname{colog} 2.45 + \operatorname{colog} .986.$$

$$\begin{aligned} \log 37.2 &= 1.5705 \\ \log 89.4 &= 1.9513 \\ \operatorname{colog} 2.45 &= \bar{1}.6108 \\ \operatorname{colog} .986 &= 0.0061 \\ \hline \log x &= 3.1387 = \log 1376. \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{37.2 \times 89.4}{2.45 \times .986} = 1376.$$

〔例四〕 求 $.0532^3$

〔解〕 設所求數 $=x$,則

$$\log x = 3 \times \log .0532$$

$$\log .0532 = \bar{2}.7259 = .7259 - 2$$

$$\underline{\times 3}$$

$$\log x = 2.1777 - 6 = \bar{4}.1777.$$

$\therefore x = .0532^3 = .0001506.$

〔例五〕　求$\sqrt[7]{.00898}$.

〔解〕　設所求數$=x$,則

$$\log x=\frac{1}{7}\times\log.00898,$$

$$\log.00898=\bar{3}.9533$$

$$7\,\underline{\big|\,4.9533-7}$$

$$\log x=.7076-1=\bar{1}.7076.$$

$$\therefore\ x=.510.$$

〔例六〕　求$\left(330\times\frac{1}{49}\right)^4\div\sqrt[3]{22\times6.9}$

〔解〕　設所求數$=x$,則

$$\log x=4\log330+4\operatorname{colog}49+\frac{1}{3}\operatorname{colog}22$$

$$+\frac{1}{3}\operatorname{colog}6.9.$$

$$4\log330=4\times2.5185=10.0740$$

$$4\operatorname{colog}49=4\times\bar{2}.3098=\bar{7}.2392$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{colog}22=\frac{1}{3}\times\bar{2}.6576=\bar{1}.5525$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{colog}6.9=\frac{1}{3}\times\bar{1}.1612=\bar{1}.7204\quad(+$$

$$\log x=2.5861\quad=\log385.5$$

$$\therefore\ x=\left(330\times\frac{1}{49}\right)^4\div\sqrt[3]{22\times6.9}=385.5。$$

習題二十五

(天)

用對數求以下各題的近似值:

1. $356\times .415$
2. $8640\times 39.2\times .0076$
3. $.000593\times .0000072$
4. $.89\times 4.25\times 776\times 98.2$。
5. $\dfrac{8654}{796}$
6. $\dfrac{.00387}{.0513}$
7. $\dfrac{2607.5}{.000048}$
8. $\dfrac{87.1\times 1.672}{5.89\times 352.7\times 1.88}$
9. $\dfrac{.023\times 8.74\times 765.2}{106\times .0052\times 7.04}$
10. 2.49^6
11. $.897^{-2}$
12. $(.259\times 4.68)^3$
13. $\sqrt[3]{729}$
14. $\sqrt[12]{.000564}$
15. $\sqrt[5]{98.4^2\times .00763^3}$
16. $\sqrt{\dfrac{854\times 2.93^2}{\sqrt[3]{.208}\times 567}}$
17. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{19.7\times 8.702}{.54\times .00067}\right)^2}$

復習題

1.試述對數與乘方、開方的關係。

2.$\log_a 1=$? $\log_a a=$? 由此可得什麼定理?

3.若對數的底大於1,什麼數的對數爲正? 什麼數的對數爲負?

4.若對數的底小於1,而大於0,什麼數的對數爲正? 什麼數的對數爲負?

5.對數的底能不能爲負數? 能不能爲1? 說出緣故來。

6.常用對數能不能求負數的對數? 何以故?

7.求若干數的和或差,也好用對數計算嗎?

8. 對於那幾種算法,以用對數計算爲便?

9. 以10爲底的常用對數,有什麼方便處?

10. 大數的對數是否常比小數的對數大? 大數的對數的假數是否常比小數的對數的假數大?

11. 什麼叫反對數? 什麼叫餘對數? 餘對數有什麼用處?

12. 若一式中有加、減、乘、除、乘方、開方、對數等運算,計算的次序如何? 若式中兼有括號,計算的次序如何?

第八章 複名數

96.名數 凡數的後面附有單位的名稱的,叫**名數**;反之,數後不附單位名稱的叫**不名數**。

〔例〕 5尺、6升爲名數;7、8爲不名數。

凡名數後面祇用一個單位表示的叫**單名數**;若同時用幾個單位表示出來的數叫**複名數**。

〔例〕 米8升、布2尺爲單名數;米2斗5升、布1丈7尺6寸爲複名數。

97.單位 要計算數量的大小,必須定一單位。從複名數的諸同類單位中選出一個適宜的單位做標準,叫**基本單位**,其餘的叫**補助單位**。

基本單位,也不是一定不換的。如量布帛用尺做基本單位,量道路用里做基本單位;尺、里同是長度中的單位。

兩個同類的單位,大的叫**高級單位**,小的叫**低級單位**。

〔例〕 就里、尺言,里爲高級單位,尺爲低級單位。就斗、升言,斗爲高級單位,升爲低級單位。

由基本單位誘出的各種單位,叫**誘導單位**。

〔例〕 面積及體積的單位為方公尺及立方公尺,係由長度單位公尺誘導而得。速度的單位為每秒公分,係由時間的單位秒,及長度的單位公分誘導而得。電流的單位安,係由電動力的單位弗,及電阻的單位歐誘導而得。

98.進率 高級單位為低級單位的若干倍,這倍數叫進率。複名數中的進位率種種不一,有的是十進,如丈同尺,叫**十進複名數**;有的不是十進,如斤同兩,叫**非十進複名數**。

99.度量衡 量長短遠近叫做**度**,計算容積叫做**量**,權衡輕重叫做**衡**。度量衡的制度,因各國的習俗不同,標準也就互異。自法國革命後,法政府根據科學方法,審定米突制,他的進率,都是十進,計算便利,應用最廣,世界各國風行採用,現已成萬國公用的制度。中國度量衡有兩種,一為**標準制**,一為**市用制**。標準制即萬國權度通制(米突制),市用制與標準制有簡單的比率,且同民間習用的標準,相差也不甚遠。

外國度量衡,除法國的米突制已成為萬國通制外,與我國最有關係的,有**英美制**及**日本制**。

英美兩國的度量衡在世界貿易場中佔重要的地位,日本爲我鄰國,關係密切,這兩種制度不可不知,其餘一概從略。

100. 度 長度的基本單位,標準制爲**公尺**,市用制爲**市尺**,英美制爲**呎**,日本制爲**尺**。

要把制度不同的兩種單位互相換算,必須知道兩種單位倍數的關係,這種關係叫做**當量**。

現將四種長度制度及當量列表如下:

(一) **標準制長度表**

名稱	公里	公引	公丈	公尺	公寸	公分	公釐
符號	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
進率	10公引	10公丈	10公尺	10公寸	10公分	10公釐	

(二) **市用制長度表**

名稱	里	引	丈	尺	寸	分	釐	毫
進率	15引	10丈	10尺	10寸	10分	10釐	10毫	

(三) **英美制長度表**

名稱	哩	桿	碼	呎	吋
符號	mi	rd	*yd*	ft	in

進 率	320桿	$5\frac{1}{2}$碼	3呎	12吋	

（四）日本制長度表

名 稱	里	町	丈	間	尺	寸	分	釐	毛
進 率	36町	6丈	$1\frac{2}{3}$間	6尺	10寸	10分	10釐	10毛	

（五）當量表

1公尺=3市尺=3.279呎=3.3日尺

1公里=2市里=.6214哩=.2546日里

〔註一〕 一公尺長度約當地球經線四千萬分之一,原器用鉑製成,以攝氏表零度時首尾兩標點距離爲其正確長度。

〔註二〕 計算水程的長短多用海里,寫做浬.

1浬=1.152哩=6080.27呎.

101. 量 量的基本單位,標準制爲**公升**,市用制爲**市升**,英美制乾量爲**嘝**,液量爲**嗧**,日本制爲**升**。

現將四種容量制度及當量列表如下:

（一）標準制容量表

名　稱	公秉	公石	公斗	公升	公合	公勺	公撮
符　號	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
進　率	10公石	10公斗	10公升	10公合	10公勺	10公撮	

(二) 市用制容量表

名　稱	石	斗	升	合	勺	撮		
進　率	10斗	10升	10合	10勺	10撮			

(三) 英美制容量表

(1)**乾量**

名　稱	嘝	呌	咵	呏
符　號	**bu**	pk	qt	pt
進　率	4呌	8咵	2呏	

(2)**液量**

名　稱	桶	籥	咵	呏	哈
符　號	bbl	**gal**	qt	**pt**	gi
進　率	$31\frac{1}{2}$籥	4咵	2呏	4哈	

(四) 日本制容量表

名　稱	石	斗	升	合	勺
進　率	10斗	10升	10合	10勺	

(五) 當量表

$$1\text{公升}=1\text{市升}=\begin{cases}.02748\text{英嘝}\\.02838\text{美嘝}\end{cases}=.5544\text{日升。}$$

$$=\begin{cases}.2200\text{英噐}\\.2642\text{美噐}\end{cases}$$

〔註〕 一公升等於一公斤純水在攝氏表四度,氣壓760公釐時的體積。

102. 衡 重量的基本單位,標準制爲公斤,市用制爲市斤,英美制爲磅,日本制爲斤。

現將四種重量制度及當量列表如下:

(一) 標準制重量表

名稱	公噸	公擔	公衡	公斤	公兩	公錢	公分	公釐	公毫	公絲
符號	T	P	Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
進率	10公擔	10公衡	10公斤	10公兩	10公錢	10公分	10公釐	10公毫	10公絲	

(二) 市用制重量表

名稱	擔	斤	兩	錢	分	釐
進率	100斤	16兩	10錢	10分	10釐	

(三) 英美制重量表

名稱	重噸(英)	輕噸(美)	磅	唡

符號	L. T.	S. T.	lb	oz
進率	2240磅	2000磅	16唡	

(四) 日本制重量表

名稱	貫	斤	匁	分	釐	毛
進率	$6\frac{1}{4}$斤	160匁	10分	10釐	10毛	

(五) 當量表

1公斤＝2市斤＝2.2046磅＝1.6667日斤。

〔註〕 一公斤等於1立方公寸純水在攝氏表四度時的重量。

103. 化法 把高級單位數化做低級單位數的方法,叫**化法**,或**通法**。

化法有兩種:一是把高級單位的複名數化做低級單位的單名數,一是把高級單位的單名數化做低級單位的複名數. 化法的惟一方法是用**進率乘**。

〔例一〕 化24桿5碼1呎爲呎。

〔解〕 5.5碼×24＝132碼

3呎×(132＋5)＝411呎

411 呎 + 1 呎 = 412 呎（答）

〔例二〕　化 3.5429 擔爲複名數。

〔解〕　100 斤 × .5429 = **54**.29 斤

16 兩 × .29 = **4**.64 兩

10 錢 × .64 = **6**.4 錢

10 分 × .4 = **4** 分

∴ 3.5429 擔 = 3 擔 54 斤 4 兩 6 錢 4 分

104. 聚法　把低級單位數化做高級單位數的方法，叫聚法，或命法。

聚法有兩種：一是把低級單位的單名數化做高級單位的複名數，一是把附有低級單位的複名數化做純高級單位的單名數。聚法的惟一方法是**用進率除**。

〔例一〕　化 2309 呏爲複名數。

〔解〕

2 | 2309 呏
4 | 1154 呺 …… 1 呏
31.5 | 288 嗧 …… 2 呺
9 桶 … 5.5 嗧

∴ 2309 呏 = 9 桶 5.5 嗧 2 呺 1 呏

或 = 9 桶 嗧 1 呏。

〔例二〕　化 136 桿 2 碼 2 呎 3 吋爲桿的單名數。

〔解〕　3 ÷ 12 = .25（呎）

(2 + .25) ÷ 3 = .75（碼）

$(2+.75)\div5.5=.5$(桿)

$136+.5=136.5$(桿)

$\therefore$ 136桿2碼2呎3吋$=$136.5桿。

有時一個複名數要化爲中級的單名數,或一單名數要化爲高級及低級的複名數,就要兼用化法與聚法來作。

〔例三〕　化24桶28簎3呤1呏2哈爲簎。

〔解〕　先用化法,把24桶28簎化爲簎,得784簎;次用聚法,把3呤1呏2哈化爲簎得.9375簎。

$\therefore$ 24桶28簎3呤1呏2哈$=$784.9375簎。

〔例四〕　化4369.5碼爲複名數。

〔解〕　先用聚法,把4399碼化爲2哩154桿2碼;次用化法,把.5碼化爲1呎6吋。

$\therefore$ 4369.5碼$=$2哩154桿2碼1呎6吋。

105. <u>換算</u>　把同類而不同制的單位互化的方法,叫做換算。

先把某種複名數用化法或聚法化爲基本單位的單名數;用適宜的當量來乘化爲他種權度制的基本單位的單名數,再用化法或聚法化爲複名數。

〔例一〕 化 9 公擔 6 公衡 2 公斤 7 公兩 4 公錢爲市用制。

〔解〕 (1) 9 公擔 6 公衡 2 公斤 7 公兩 4 公錢

=962.74 公斤。

(2) 因 1 公斤=2 市斤。

∴ 962.74 公斤=1925.48 市斤。

(3) 1925.48 市斤=19 擔 25 斤 7 兩 6 錢 8 分。

∴ 9 公擔 6 公衡 2 公斤 7 公兩 4 公錢

=19 擔 25 斤 7 兩 6 錢 8 分。

〔例二〕 日本人每人一年食米的消費額爲 1 日石 1 日斗 3 日升 4 日合,問合我國市制多少?

〔解〕 (1) 日制 1 石 1 斗 3 升 4 合=113.4 日升。

(2) 因 1 市升=.5544 日升,

1 日升=1.8039 市升,

∴ 113.4 日升=113.4×1.8039 市升=204.2^{+}升。

(3) 市制 204.2 升 = 2 石 4 升 2 合。

∴ 日制 1 石 1 斗 3 升 4 合 = 市制 2 石 4 升 2 合。

習題二十六

1. 把市尺折合成公尺、呎、及日尺。

2. 把市里折合成公里、哩、及日里。

3. 1英嘝等於多少公升、市升、日升?

4. 1英嚮等於多少公升、市升、日升?

5. 把市斤折合成公斤、磅、日斤。

6. 照縮尺一百萬分之一畫的地圖,圖上1公分長,實在是幾公尺? 又合幾公里?

7. 萬里長城約6979251呎,試用複名數表示出來。

8. 化13町1間6尺7寸8分5釐為市用制。

9. 化56擔72斤12兩為英制。

10. 化175貫3斤22匁5分為標準制。

11. 郵政局寄遞信函,每起不得超過20公分,每續加重25公分,即加倍付款.問寄往外埠重.8兩的信應貼郵票幾分。

12. 某外人帶行李428磅去坐三等火車.車站定章,三等票祇準帶30公斤,過限每公斤要出運費3分.問此外人要出運費多少?

106. 面積　有長有闊的叫做**面**,面的大小叫做**面積**. 面積的單位用各邊長都是一單位長的正方形做標準,叫**單位面積**。

〔例〕 每邊長一分的正方形的面積叫1**平方分**(**或方分**)。

由幾何定理,

正方形的面積 =(邊長)^2

長方形的面積 = 長 × 闊

三角形的面積 = $\frac{1}{2}$(底 × 高)

圓形的面積 = $3.1416 \times$(半徑)^2

面積的基本單位,標準制爲**方公尺**,市用制爲**方尺**,英美制爲**方呎**,日本制爲**方尺**。

量地的面積叫做**地積**。

現將四種制度的面積附帶地積列表如下:

(一) 標準制面積表

名稱	方公里	方公引	方公丈	**方公尺**	方公寸	方公分	方公釐
符號	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
進率	各位都是百進						
當量	1方公尺=9方尺=10.7518方呎						

附地積表

名稱	公頃	公畝	公釐

符號	Ha	a	ca
進率	各位都是百進		

1公畝=1方公丈

(二) 市用制面積表

名稱	方里	方引	方丈	**方尺**	方寸	方分	方釐	方毫
進率	225方引	其餘各位都是百進						
當量	1方尺$=\frac{1}{9}$方公尺=.11946方呎							

附地積表

名稱	頃	**畝**	分	釐	毫
進率	100畝	其餘各位都是十進			

1畝=6000方尺=60方丈(簡稱方)

(三) 英美制面積表

名稱	方哩	噉	方桿	方碼	**方呎**	方吋
符號	sq. mi	*ac.*	sq. rd.	sq. yd.	sq. ft.	sq. in.
進率	640噉	160方桿	$30\frac{1}{4}$方碼	9方呎	144方吋	
當量	1方呎=.0929方公尺=.8361方尺 1噉=.4047公頃=6.0705畝 1方哩=2.5900方公里=10.3594方里					

(天)

(四) 日本制面積表

名稱	町	段	畝	坪	方尺
進率	16段	10畝	30坪	36方尺	
當量	1日方尺=.091827方公尺 1坪=.03306公畝				

107. 體積 有長有闊有高的叫**體**,體的大小叫**體積**. 體積的單位用長闊高都是一單位長的立方體爲標準,叫**單位體積**。

〔例〕 長、闊、高都是一分的立方體的體積叫1**立方分**或(立分). 餘類推。

由幾何定理,

$$正立方體的體積=(邊長)^3$$

$$正六面體的體積=長\times闊\times高.$$

$$角(或圓)柱體的體積=底面積\times高$$

$$角(或圓)錐體的體積=\frac{1}{3}(底面積\times高)$$

$$球體的體積=\frac{4}{3}\times(半徑)^3$$

體積的基本單位,標準制爲**立方公尺**,市用制爲**立方尺**,英美制爲**立方呎**,日本制爲**立方日尺**。

四種制度的體積表由長度表及面積表可以類推,祇要知道體積的進率及當量等於長度的進率及當量的立方便行.茲不另舉.

〔註一〕　在實際生活上,對於各種不同的事物,常用各種不同的體積單位.　如計算砂石泥土等類物體,用長闊各 1 丈而厚 1 尺的體積爲單位,叫做 1 方.　又如計算木材的木板是厚有假定用長乘闊所得的數算方;長方體木材如洋松是闊與厚各有假定;又圓柱體木材如粗細大概相等,均量長計算;若圓柱體木材粗細相差很大時,長有假定,而量近根處的圓周來計算.

〔註二〕　一立方公寸的體積等於一公升的容積.

習題二十七

1. 長 145 尺,闊 86 尺的長方形田,面積是多少畝?

2. 有一正方形的基地,面積爲 7 分 2 釐 6 毫,求邊長.

3. 日本某大公園的面積爲 2 町 7 段 13 畝 8 坪.試化爲標準制.

4. 某圓形體育場對徑是 80 碼,求面積,並化爲複名數.

5. 蓄水池的長、闊、高都是18公尺.問這池可容水多少升?並用複名數表示出來。

6. 上題蓄水池中水裝滿時重多少公斤?多少石?

7. 把長15丈,闊13丈,深1丈1尺的長方池中的水完全灌入一71.5畝的田地來栽秧.問田中水深多少?

8. 松木一段長5尺6寸,闊1尺4寸,厚1尺;鋸成1寸厚的板可得幾方?

9. 有高8尺5寸,闊2丈7尺,厚1尺2寸的牆,用三六磚(長6寸,闊3寸,厚1寸的磚)砌,共需磚多少塊?

10. 有磚粒一堆,長1丈8尺,闊1丈2尺,高2尺5寸.問磚粒有多少方?

108. 複名數算法　凡十進複名數四則運算時,可改作小數或整數來計算. 現在所研究的爲非十進複名數四則。

(一) **加法**　先把各單位數順序排列,各相同的單位數上下排齊後再各自相加,如遇其和大於進率時,可用聚法併入上級單位去計算。

〔例〕 3里152丈1步3尺+2里56丈1步4尺=?

〔解〕

里	丈	步	尺	
3	152	1	3	
2	56	1	4	(+
5	208	2	5|7	
1	1	1	1….餘2	
6	150|209	2|3		
	1….餘59	1….餘1		

答 6 里 59 丈 1 步 2 尺

(二) **減法** 把各單位數順序排列,各同單位數上下排齊,再從最低級單位數起依次相減.如減數比被減數大時,取一高級單位數,用化法化爲低級單位,併入被減數再減。

〔例〕 美麥一袋,計重 13 噸 3 呌 2 唥 1 听,食去 9 噸 3 呌 3 唥,問還剩多少?

〔解〕

噸	呌	唥	听	
13	3	2	1	
9	3	3		(−
3	3	7	1	

答還剩 3 噸 3 呌 7 唥 1 听。

(三) **乘法** 複名數乘法有二: (1) 乘數爲不名數,用乘數徧乘複名數中各單位數,然後用聚法化簡; (2) 被乘數及乘數皆爲複名數,先把二者均化爲單名數相乘,然後再用分法及聚法化爲複名數。

〔例一〕 求3里84丈1步2尺之8倍。

```
 3里      84丈        1步     2尺
                               8  (×
-------------------------------------
24里     672丈        8步  5|16尺
 4          5       +) 3      3…餘1
--           
28   150|677         2|11
          4……餘77      5…餘1
```

答28里77丈1步1尺。

〔例二〕 有長方地一塊,長5碼2呎3吋,闊4碼1呎6吋,求面積是多少方碼?

〔解〕 5碼2呎3吋 =5.75碼,

4碼1呎6吋 =4.5 碼,

∴面積 =5.75碼 ×4.5碼 =25.875方碼。

(四)**除法** 複名數除法有三:⑴除數爲不名數,即用除數依次除被除數中最高級單位數,而漸及於低級單位數,如遇有餘數時,可化爲低級單位數,併入低級單位數計算;⑵被除數與除數爲異類的複名數時,先把除數化爲單名數,然後照前法除;⑶被除數與除數爲同類的複名數時,先化爲相同的單名數,再相除。

〔例一〕 有煤油3桶10瓩1唅1吩,分五箱來裝,問每箱平均裝多少?

〔解〕

		20	3	1
5	桶	嗧	咵	呏
	3	10	1	1
	=94.5嗧	+) 94.5	+) 18	+) 8
		104.5	19	9
		−) 100	−) 15	−) 5
		4.5嗧	4咵	4呏
		=18咵	=8呏	

答20嗧 3 咵 $1\frac{4}{5}$呏。

〔例二〕　某人騎脚踏車於 3 時 36 分行路 53 里 6 引 7 丈 2 尺,求每時的速度。

〔解〕　3 時 36 分 =3.6 時。

(53 里 6 引 7 丈 2 尺)÷3.6=(530 里 60 引 70 丈 20 尺)

÷36 =14 里 12 引 7 丈。

〔例三〕　某人騎脚踏車每時行 14 里 12 引 7 丈,設每日行 9 時,問行 534 里 7 引 2 丈的路須要幾日?

〔解〕　534 里 7 引 2 丈 =80172 丈,

14 里 12 引 7 丈 =2227 丈,

80172 丈 ÷2227 丈 =36(小時)

36÷9=4(日). 所以須要 4 日。

習題二十八

(天)

1. 官鹽三包:一重98斤9兩;一重94斤5兩;一重93斤6兩;問三包鹽共重多少?

2. 有煤油2桶4嗧1呏1吩,用去9嗧3呏,問尙餘多少?

3. 某廠每日用煤2噸50磅(英制),問一年用煤多少?

4. 黃豆每石之價爲5元3角2分,今售去4石5斗2升,問共得銀若干?

5. 日本淺草公園的凌雲閣高36間4尺,法國巴黎的愛飛兒塔比凌雲閣高4倍,問愛飛兒塔高幾公尺?

6. 甲有田1頃59畝8分,乙有田爲甲的4倍,丙有田爲乙的6倍,問乙丙各有田多少?

7. 中國面積4218401方哩,人口約402680000,問每人平均佔地幾方呎?

8. 地球與太陽的平均距離爲149000000公里;光每秒鐘行192000哩,問日光從太陽射到地面要幾秒鐘?

9. 用毛毯鋪地,地長3丈6尺9寸,闊2丈4尺,鋪滿此地共計用去毯子59丈4寸,求此毯的闊。

109. 貨幣 交易的媒介物叫貨幣。貨幣的基本單位叫**主幣**,其餘輔助單位叫**輔幣**。世界各國貨幣的單位,各各不同,茲分述於下:

（一）本國幣制　我國現在通行貨幣可分下列兩種:

(1)銀圓　銀圓是我國的主幣。圓以下,公認作大洋的角、分、釐,都是十進。有通行的雙角、單角及銅元爲輔幣。輔幣合主幣的價值,隨每月的市價而變。

茲將民國二十四年五月三日新聞報上所載市價轉錄於下:

洋拆　二角	表示同行中借1000元的日利
單毫　七百三十五元八角	表示10000單角可買之元數
雙毫　七百三十三元八角	表示5000雙角可買之元數
拆兌　一千三百六十二角八分	表示100元可兌小洋之數
銅元　三百三十九千文	表示如此之錢數可買100元
掛牌　三千三百九十文	表示1元可兌之錢數
角坯　二百五十文	表示小洋1角可兌之錢數
貼水　八十九文	表示小洋作大洋時應補的錢數

(2)關金　國民政府成立,鑒於金貴銀賤,在民國十九年二月一日起,制定海關金單位,但係一種虛擬的單位,至關金1元合銀元的價值,

仍隨市價而變,

(二) 外國貨幣 茲將英美法德俄日六國的貨幣列表如下:

國別＼項別	定名	進率	原名	符號	主幣
英國制	鎊	20先令	Pound Sovereign	£.	鎊
	先令	12便士	Shilling	S.	
	便士	4法桑	Pence	P.	
	法桑		Farthing	Far.	
美國制	弗	10達姆	Dollar	$.	弗
	達姆	10仙	Dime		
	仙		Cent	¢.	
法國制	法郎	100生丁	Franc	fr.	法郎
	生丁		Centime	c.	
德國制	馬克	100分尼	Mark	M.	馬克
	分尼		Pfennigs	Pf.	
俄國制	盧布	100戈比	Ruble	rb.	盧布
	戈布		Kopeck	Ko.	
日本制	圓	100錢			圓
	錢				

各國貨幣都用金本位,最近我國規定關金5元,合各國貨幣如下:

英金 8先令3便士 美金 2弗

德金 8馬克4分尼 法金 51法郎

日金 4圓

習題二十九

1. 某日錢莊市價733元可兌雙毫5000,問小洋1角可兌大洋多少?

2. 照上題市價一元可兌小洋若干(小數計至三位)?

3. 1元可兌銅元3400文,問大洋5角6分兌銅元若干。

4. 又5角6分可買雙毫幾枚,加銅元若干?

5. 某日銀行掛牌,國幣1元,合英金1先令8便士,問英金一鎊合國幣若干?

6. 同日英金1鎊2先令6便士,合國幣若干元?

7. 問英金1鎊合關金若干?

8. 同日國幣100元合美金41弗50仙,問美金1弗,合英金若干?

9. 從上海到美國頭等船票美金368弗,照前題市

價問共須銀圓多少?

10.京滬鐵路借款350萬鎊,照題1的市價,問共合銀圓多少?

110. 時間 計光陰的久暫叫**時間**. 時間的單位爲**日**或**年**。

地球依地軸自轉一周的時間爲1日;1日分爲24時,1時分爲60分,1分分爲60秒。

地球繞太陽公轉一周的時間爲一年,約須365日5時48分46秒,或365.2422日,又名**眞年**. 爲實際計算便利起見,取整數365日爲1年,叫**平年**.餘下的.2422日積至四年,有.9688日,於是在第四年之二月加一日,共有366日叫**閏年**. 以365日爲一年計算,則每400年當餘96.88日,約97日,故每400年中當有97個閏年.推求閏年的方法,可依西歷紀元的年數來定;凡年數可以4整除的便是閏年,如西歷1924,1940年都是閏年.又年數可以100整除,同時不能以400整除的,不是閏年。

一年分十二月:一、三、五、七、八、十、十二各月,都是31日,叫**大月**,四,六,九,十一各月,都是30日叫**小月**;惟有二月祇有28日,遇閏年就有29日。

111. 角和弧 從一定點畫兩直線,所圍的

部份叫**角**.這一定點叫**頂點**,這兩直線叫**邊**。

任取一線段,固定一端迴繞一周,所圍的部分叫**圓**,圓的中心叫**圓心**. 圍繞圓的曲線叫**圓周**.從圓周到圓心的距離叫**半徑**. 角頂點在圓心的叫**圓心角**.圓周的一部份叫**弧**,圓周四分之一的弧叫**象限**.分象限爲90等份,每份叫一**度**,度又分爲60**分**,分又分爲60**秒**。 度、分、秒的符號是“°”、“′”、“″”.對象限的圓心角叫**直角**(Rt.∠),一圓周等於四象限即360°。

習題三十

1. 1700年,1784年,1898年,2400年,問何者是閏年?何者不是閏年?

2. 脈搏每分鐘74次,求一人每日的脈搏次數。

3. 1934年1月1日爲星期一,問1936年雙十節爲星期幾?

4. 太陽周圍長431200公里,其自轉時間爲24日23時18分,問在太陽赤道上物體,每時的速度多少?

5. 化37452″爲複名數,

6. 一個三角形內角的和是180°,一個五邊形可以

畫成五個三角形,問五邊形內角的和共幾度?

7. 三角形內二角是 65°36′ 和 89°55′ 求第三角。

8. 一日之間地球自轉一周,問一時轉幾度? 又轉一度要多少時候?

復習題

1. 什麼叫基本單位與補助單位? 基本單位固定否?

2. 什麼叫誘導單位? 舉出幾個實例。

3. 進率與當量同不同? 區別何在?

4. 度量衡的意義如何? 中國度量衡現有那幾種?

5. 說出中國兩種度量衡的簡當比率。

6. 在速率上用每時幾哩來記的,若改為每秒幾呎,應乘以什麼常數?

7. 英國的 1 嘝、1 嗧、1 噸等於美國的幾嘝?幾嗧?幾噸?

8. 說明十進位的複名數的化法與聚法是移動小數點的問題。

9. 4 尺平方與 4 平方尺有何分別? 4 尺立方與 4 立方尺有何分別?

10.閏年的算法如何?

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	眞數有四位時,可用第一頁的表.								
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755									
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106									
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430									
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

中西名詞對照表

(一) 中西對照

七 畫

八 畫

九 畫

十 畫

十一畫

十 二 畫

十 三 畫

十 四 畫

十 五 畫

十六畫

十七畫

十八畫

二十三畫

(二) 西中對照

N

O

P

Q

R

S