Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

Aufgabe 15.1. Warum sind mathematische Beweise schwierig, obwohl sie (zumindest für erststufige Aussagen) aufgrund des Vollständigkeitssatzes mit einem sehr begrenzten und übersichtlichen formalen Regelwerk durchgeführt werden können?

Aufgabe 15.2. Diskutiere Metasprache und Objektsprache anhand der Formulierung „im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit“ aus dem Beweis zu Lemma 15.1.

Aufgabe 15.3. Es sei S ein Symbolalphabet (das mindestens eine Variable enthalte) einer Sprache erster Stufe und T die zugehörige Termmenge. Zeige, dass man T als Grundmenge einer Interpretation von S nehmen kann, indem man Variablen, Konstanten und Funktionssymbole „natürlich“ und Relationssymbole willkürlich interpretiert.

Aufgabe 15.4. Zeige, dass es eine widerspruchsfreie, unter Ableitungen abgeschlossene Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^S$ geben kann, wobei die Variablenmenge aus x_n, $n \in \mathbb{N}$, besteht, derart, dass es einen Ausdruck α mit $\exists x_0 \alpha \in \Gamma$ und $\neg \alpha \frac{x_n}{x_0} \in \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 15.5. Es sei PA die Menge der aus den erststufigen Peano-Axiomen für die Addition und Multiplikation ableitbaren Ausdrücken. Es sei α der erststufige Ausdruck, der die Goldbach-Vermutung ausdrückt. Was kann man über die Widerspruchsfreiheit von $PA \cup \{\alpha\}$ bzw. von $PA \cup \{\neg \alpha\}$ sagen? Was bedeutet dies für das in Lemma 15.5 beschriebene Verfahren?

Aufgabe 15.6. Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Grundmengen erfüllbar ist. Zeige, dass Γ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar ist.

Aufgabe 15.7. Es sei S ein Symbolalphabet, das allein aus der einzigen Variablen x besteht. Zeige, dass die Menge aller S-Tautologien maximal widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Aufgabe 15.8. Es sei S ein Symbolalphabet, das nur aus Variablen besteht. Es sei

$$\Delta = \{x = y\},$$

wobei x, y verschiedene Variablen seien, und sei

$$\Gamma = \Delta^{\vdash}.$$

Zeige, dass Γ maximal widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Aufgabe 15.9.*

Es sei S ein Symbolalphabet und $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Begründe, warum man im Allgemeinen bei der Hinzunahme von Beispielen (innerhalb des Beweises des Vollständigkeitssatzes) nicht für alle Existenzaussagen $\exists x \alpha \in L^S$ mit einer einzigen neuen Variablen z arbeiten kann.

Aufgabe 15.10. Es sei S ein Symbolalphabet und $\Gamma \subseteq L^S$ eine Ausdrucksmenge. Zeige

$$\Gamma^{\vdash} = \bigcap_{I \vDash \Gamma} I^{\vDash}.$$

Aufgabe 15.11.*

Zeige, dass es einen Peano-Halbring M mit der Eigenschaft gibt, dass es darin ein Element $x \in M$ gibt, das größer als jede natürliche Zahl in M (also Zahlen der Form $1 + 1 + \cdots + 1$) ist.

Aufgabe 15.12. Man mache sich Gedanken zu den folgenden Zitaten aus Ludwig Wittgensteins Tractatus logico-philosophicus.

„6.2 Die Mathematik ist eine logische Methode. Die Sätze der Mathematik sind Gleichungen, also Scheinsätze. 6.21 Der Satz der Mathematik drückt keinen Gedanken aus“.

„6.22 Die Logik der Welt, die die Sätze der Logik in den Tautologien zeigen, zeigt die Mathematik in den Gleichungen“.

„6.2321 Und, dass die Sätze der Mathematik bewiesen werden können, heißt ja nichts anderes, als dass ihre Richtigkeit einzusehen ist, ohne dass das, was sie ausdrücken, selbst mit den Tatsachen auf seine Richtigkeit hin verglichen werden muss“.

„6.234 Die Mathematik ist eine Methode der Logik.

6.2341 Das Wesentliche der mathematischen Methode ist es, mit Gleichungen zu arbeiten. Auf dieser Methode beruht es nämlich, dass jeder Satz der Mathematik sich von selbst verstehen muss“.

„6.24 Die Methode der Mathematik, zu ihren Gleichungen zu kommen, ist die Substitutionsmethode“. (...)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.13. (4 Punkte)

Es seien s, t nicht identische S-Terme. Zeige, dass es ein endliches S-Modell mit

$$I(s) \neq I(t)$$

gibt.

Aufgabe 15.14. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine widerspruchsfreie, unter Ableitungen abgeschlossene Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^S$ derart, dass für die konstruierte Interpretation I nicht $\Gamma \subseteq I^{\vDash}$ gilt.

Aufgabe 15.15. (4 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^S$ eine abzählbare widerspruchsfreie Ausdrucksmenge. Zeige, dass Γ ein erfüllendes Modell mit abzählbar vielen Elementen besitzt.

Aufgabe 15.16. (4 Punkte)

Zeige, dass man die natürlichen Zahlen nicht erststufig festlegen kann.

Abbildungsverzeichnis