Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $f \in L$. Zeige, dass die Abbildung

$$\mu_f \colon L \longrightarrow L,\, x \longmapsto fx,$$

K-linear ist.

Aufgabe 8.2. Wir betrachten die endliche Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Beschreibe die Matrix der Multiplikationsabbildung zu $7 + 5\mathrm{i}$ bezüglich der reellen Basis $1, \mathrm{i}$ von $\mathbb{C}$.

Aufgabe 8.3. Wir betrachten die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = L$. Erstelle die Matrix der Multiplikationsabbildung zu $-4+9\sqrt{3}$ bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \sqrt{3}$ von L.

Aufgabe 8.4. Erstelle die Multiplikationsmatrix zum Element $7x^2-4x+5$ in der kubischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\left(X^3-6X^2+5X-8\right).$$

Aufgabe 8.5.*

Es seien p, q verschiedene Primzahlen und

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}] =: L$$

die zugehörige Körpererweiterung. Erstelle die Multiplikationsmatrix zu einem Element $a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq} \in L$ bezüglich der Basis $1, \sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{pq}$.

Aufgabe 8.6. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \operatorname{End}_K(L),\, f \longmapsto \mu_f,$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

AUFGABE 8.7. Es sei $K \subseteq M \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei $f \in M$ und B die beschreibende Matrix der Multiplikationsabbildung $\mu_f \colon M \to M$ bezüglich einer K-Basis von M. Zeige, dass bezüglich einer geeigneten K-Basis von L die Multiplikationsabbildung $\mu_f \colon L \to L$ durch eine Blockmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

AUFGABE 8.8. Bringe für die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ die Konzepte Norm und Spur mit dem Betrag und dem Realteil einer komplexen Zahl in Verbindung.

AUFGABE 8.9. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Norm einen Gruppenhomomorphismus

$$N \colon L^\times \longrightarrow K^\times,\, f \longmapsto N(f),$$

definiert.

AUFGABE 8.10. Berechne für das Element $2 + 4x + 5x^2$ in der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\left(X^3 - 3X + 1\right) =: L$$

die Norm und die Spur.

AUFGABE 8.11. Es sei $K \subseteq M \subseteq L$ eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen. Zeige, dass für die Normen die Beziehung

$$N_K^L = N_K^M \circ N_M^L$$

gilt.

AUFGABE 8.12.*

Bestimme für sämtliche Elemente der Körpererweiterung

$$\mathbb{Z}/(2) \subseteq \mathbb{Z}/(2)[X]/\left(X^2 + X + 1\right)$$

die Multiplikationsmatrizen bezüglich der Basis $1, x$ sowie ihre Norm und ihre Spur.

Aufgabe 8.13. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $f \in L$ gegeben mit der zugehörigen Multiplikationsabbildung μ_f. Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_{μ_f} ein Vielfaches des Minimalpolynoms zu f ist.

Aufgabe 8.14.*

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und $f \in L$. Zeige, dass es für die Eigenwerttheorie der K-linearen Multiplikationsabbildung $\mu_f \colon L \to L$ grundsätzlich nur zwei Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 8.15. Sei K ein Körper und sei $P = X^n - c \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Es sei

$$f = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0$$

ein Element in der einfachen endlichen Körpererweiterung

$$K \subseteq L = K[X]/(P)$$

vom Grad n. Zeige, dass die Spur von f gleich na_0 ist.

Aufgabe 8.16. Sei p eine Primzahl und sei

$$L = \mathbb{Q}[X]/\left(X^3 - p\right)$$

der durch das irreduzible Polynom $X^3 - p$ definierte Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Es sei

$$f = 2 + 3x - 4x^2 .$$

(1) Finde die Matrix bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, x, x^2$ von L der durch die Multiplikation mit f definierten $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung.
(2) Berechne die Norm und die Spur von f.
(3) Bestimme das Minimalpolynom von f.
(4) Finde das Inverse von f.
(5) Berechne die Diskriminante der Basis $1, f, f^2$.

Wir erinnern an einige Eigenschaften der Spur.

Aufgabe 8.17. Zeige, dass die Definition . der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

Aufgabe 8.18. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix über K. Zeige

$$\operatorname{Spur}(A \circ B) = \operatorname{Spur}(B \circ A) .$$

Aufgabe 8.19. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_M = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot (X - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k}.$$

Zeige, dass

$$\operatorname{Spur}(M) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i$$

ist.

Aufgabe 8.20. Es sei

$$M \in \operatorname{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Spur von M die Summe der Eigenwerte ist.

Aufgabe 8.21. Berechne die Diskriminante zur Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\mathrm{i}]$$

zur Basis 1 und i und zur Basis $2 - 5\mathrm{i}$ und $4 + 7\mathrm{i}$.

Aufgabe 8.22.*

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n und sei $b_1, \ldots, b_n$ eine K-Basis von L. Zeige, dass dann

$$\triangle(b_1, \ldots, b_n) \neq 0.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.23. (2 Punkte)

Erstelle die Multiplikationsmatrix zum Element $7x^2 + 3x - 8$ in der kubischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[X] / \left(X^3 + 9X^2 - 2X + 5\right).$$

Aufgabe 8.24. (3 Punkte)

Bestimme für sämtliche Elemente der Körpererweiterung

$$\mathbb{Z}/(3) \subseteq \mathbb{Z}/(3)[X] / \left(X^2 - 2\right)$$

die Multiplikationsmatrizen bezüglich der Basis $1, x$ sowie ihre Norm und ihre Spur.

AUFGABE 8.25. (6 Punkte)

Sei K ein Körper und sei p eine Primzahl. Es sei $a \in K$ ein Element, das in K keine p-te Wurzel besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^p - a$ irreduzibel ist.

(Tipp: Betrachte die Norm zu einer geeigneten Körpererweiterung.)

AUFGABE 8.26. (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, $f \in L$ und $M = K[f]$. Zeige, dass das charakteristische Polynom der Multiplikationsabbildung $\mu_f \colon L \to L$ eine Potenz des Minimalpolynoms von f ist.

AUFGABE 8.27. (3 Punkte)

Bestimme die Diskriminante zur Basis $1, x, x^2$ der kubischen Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\left(X^3 - 5X^2 + 6X - 3\right) =: L.$$

Abbildungsverzeichnis