

## Lineare Algebra und analytische Geometrie I

### Arbeitsblatt 12

#### Die Pausenaufgabe

AUFGABE 12.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 12.2. Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  der Dimension  $n$  bzw.  $m$ . Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix  $M \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  beschrieben werde. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von  $K^m$  bilden.

AUFGABE 12.3. Es sei  $K$  ein Körper und  $M$  eine  $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in  $K$ . Zeige, dass die Multiplikation mit  $m \times m$ -Elementarmatrizen von links mit  $M$  folgende Wirkung haben.

- (1)  $V_{ij} \circ M =$  Vertauschen der  $i$ -ten und der  $j$ -ten Zeile von  $M$ .
- (2)  $(S_k(s)) \circ M =$  Multiplikation der  $k$ -ten Zeile von  $M$  mit  $s$ .
- (3)  $(A_{ij}(a)) \circ M =$  Addition des  $a$ -fachen der  $j$ -ten Zeile von  $M$  zur  $i$ -ten Zeile ( $i \neq j$ ).

AUFGABE 12.4. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

AUFGABE 12.5. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt  $M \circ N \circ L$  schreiben kann, wobei  $M$  und  $L$  Diagonalmatrizen sind und  $N$  eine Scherungsmatrix der Form  $A_{ij}(1)$  ist.

AUFGABE 12.6. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

## AUFGABE 12.7.\*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 12.8. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 12.9. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 + 3i & 1 - i \\ 5 - 4i & 6 - 2i \end{pmatrix}.$$

## AUFGABE 12.10.\*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 + 5i & 1 - 2i \\ 3 - 4i & 6 - 2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 + 72i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 12.11. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

AUFGABE 12.12. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

AUFGABE 12.13. Es sei  $B$  eine  $n \times p$ -Matrix und  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Abschätzung

$$\text{rang } A \circ B \leq \min(\text{rang } A, \text{rang } B,)$$

gilt.

AUFGABE 12.14. Es sei  $M$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $A$  eine invertierbare  $m \times m$ -Matrix. Zeige, dass für den Spaltenrang die Gleichung

$$\text{rang } A \circ M = \text{rang } M$$

gilt.

AUFGABE 12.15. Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $B$  eine  $n \times m$ -Matrix über  $K$ . Zeige

$$\text{Spur}(A \circ B) = \text{Spur}(B \circ A).$$

AUFGABE 12.16. Zeige, dass die Definition 14.15 der Spur einer linearen Abbildung unabhängig von der gewählten Matrix ist.

AUFGABE 12.17. Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Zeige, dass die Zuordnung

$$\text{End}(V) \longrightarrow K, \varphi \longmapsto \text{Spur}(\varphi),$$

$K$ -linear ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 12.18. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 12.19. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes  $k \in K$  zu sich selbst invers ist.

AUFGABE 12.20. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung  $ad - bc \neq 0$  durch.

## AUFGABE 12.21. (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über  $K$  der Dimension  $n$  bzw.  $m$ . Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix  $M \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$  beschrieben werde. Zeige, dass

$$\text{rang } \varphi = \text{rang } M$$

gilt.