Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\,.$$

Aufgabe 12.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 12.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 12.4. Es sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}\,.$$

Aufgabe 12.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten c_i zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^3.$$

Aufgabe 12.6.*

Wir betrachten das Polynom

$$P = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3.$$

(1) Berechne die Werte von P an den Stellen $-2, -1, 0, 1, 2$.
(2) Skizziere den Graphen von P auf dem Intervall $[-2, 2]$. Gibt es einen Bezug zur Exponentialfunktion e^x?
(3) Bestimme eine Nullstelle von P innerhalb von $[-2, 2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 12.7. Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

Aufgabe 12.8. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a)

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!},$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 12.9.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
(3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
(4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
(5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 12.10.*

Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe 12.11. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

Aufgabe 12.12.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe 12.13. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

Aufgabe 12.14.*

Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei Exponentialfunktionen keine Exponentialfunktion sein muss.

Aufgabe 12.15.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.16. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 12.17. Es sei $a > 0$ und $q = \frac{r}{s}$ eine rationale Zahl. Zeige, dass die Schreibweise

$$a^q = \sqrt[s]{a^r}$$

mit der Definition

$$a^q = \exp(q \ln a)$$

verträglich ist.

Aufgabe 12.18.*

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 12.19. Berechne

$$5^{\frac{3}{7}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 12.20.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 12.21. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}},\ 4,\ 3^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 12.22. Es seien $b, d > 0$ und d fixiert. Zeige

$$\lim_{b \to 0} b^d = 0.$$

Aufgabe 12.23. Es sei $b > 0$ fixiert. Zeige

$$\lim_{d \to 0} b^d = 1.$$

Aufgabe 12.24.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 12.25. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y} \right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.26. (4 Punkte)

Berechne e^3 mit Hilfe der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.

Die Restgliedabschätzung aus Aufgabe 12.29 darf verwendet werden.

Aufgabe 12.27. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

Aufgabe 12.28. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^4 .$$

Aufgabe 12.29. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 12.30. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[1]

[1] Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Aufgabe 12.31. (2 (1+1) Punkte)

Zu Beginn des Studiums ist Professor Knopfloch doppelt so schlau wie die Studenten. Innerhalb eines Studienjahres werden die Studenten um 10% schlauer. Leider baut der Professor ab und verliert pro Jahr 10% seiner Schlauheit.

(1) Zeige, dass nach drei Studienjahren der Professor immer noch schlauer als die Studenten ist.
(2) Zeige, dass nach vier Studienjahren die Studenten den Professor an Schlauheit übertreffen.

Aufgabe 12.32. (2 Punkte)

Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Abbildungsverzeichnis