新亞教本

初中算學

算術·代數

第二册

薛德炯編

上海
新亞書店印行

MG
G634.61
26

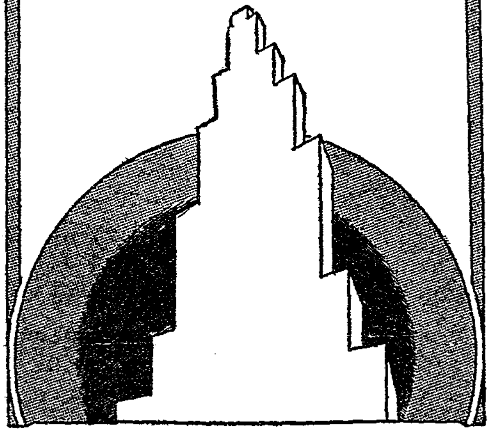
新亞教本

初中算學

算術·代數

第二册

薛德炯編
陳建功校



上海新亞書店印行

3 1773 1450 1

目　　次

第五章　負數 …………………… (153—189)

68. 正數負數 ………………………153
69. 性質的符號,絕對值 ……………155
70. 數的大小 ………………………157
71. 加法 ……………………………159
72. 減法 ……………………………162
73. 諸數的加減 ……………………164
74. 乘法 ……………………………166
75. 諸數的乘法 ……………………168
76. 除法 ……………………………170
77. 括號的用法 ……………………173
78. 簡單式的加,減 ………………174
79. 簡單式的乘,除 ………………176
80. 代數式的數值 …………………179
81. 坐標 ……………………………181
82. 代數式的圖線 …………………184
雜題 ………………………………188

第六章　方程式 ……………………〔190－223〕

83. 移項………………………………190
84. 去分母法……………………………192
85. 應用問題……………………………195
86. 二元一次方程式及其圖線(1)………199
87. 二元一次方程式及其圖線(2)………203
88. 二元一次聯立方程式的解法(1)……206
89. 二元一次聯立方程式的解法(2)……209
90. 二元一次聯立方程式的解法(3)……211
91. 聯立方程式的特例…………………215
92. 應用問題……………………………218
雜題………………………………………221

第七章　乘法,除法,因數分解…〔224－249〕

93. 冪的乘法……………………………224
94. 多項式的乘法………………………225
95. 使用公式的乘法(1)………………228
96. 使用公式的乘法(2)………………229
97. 使用公式的乘法(3)………………231
98. 使用公式的乘法雜例………………232

99. 因數分解(1) ……………………………234
100. 因數分解(2) ……………………………235
101. 因數分解(3) ……………………………236
102. 因數分解(4) ……………………………237
103. 因數分解(5) ……………………………239
104. 因數分的解雜例……………………………240
105. 冪的除法 ……………………………241
106. 多項式的除法 ……………………………243
107. 簡單的二次方程式……………………………245
雜題……………………………248

第八章　分數式 ……………… [250—198]

108. 倍數,約數 ……………………………250
109. 分數式,約分 ……………………………253
110. 分數方程式 ……………………………257
111. 聯立方程式 ……………………………260
112. 應用問題 ……………………………263
113. 通分……………………………265
114. 分數式的加減法……………………………268
115. 分數式的乘除法……………………………270
116. 文字方程式 ……………………………272

117. 比…………………………………276
118. 比例式……………………………280
119 比例式的性質……………………282
120. 應用問題…………………………287
121. 連比………………………………289
122. 混合………………………………293
雜題…………………………………295

第五章

負數

68. 正數,負數

溫度計所示度數

〔問1〕 水銀柱頂原在0°處,一小時後昇高3°,再過一小時又昇高4°,問最後所示是幾度?

〔問2〕 水銀柱頂原在0°處,一小時後降低3°,再過一小時又降低4°,問最後所示是幾度?

〔問3〕 由0°處起,初昇3°,後降4°,最後所示是幾度?

〔問4〕 由0°處起,初降3°,後昇4°,最後所示是幾度?

溫度計所示度數,分冰點上,冰點下兩種. 譬如冰點下7°,記作−7°,因此,冰點上7°,即普通的7°,便記作+7°.

遊戲的得分

〔問5〕 某種遊戲A第一回贏15分,第二回輸5分,那末他的所得是幾分?

	I	*II*	*III*	*IV*
A	15	−5		
B				
C		−25		−5

〔問6〕 C 第二回輸25分,第四回輸5分,那末他的所得是幾分?

記錄遊戲的得分,也可用'+','−'表輸贏,贏10分記作+10,輸30分記作−30. 如是

> 性質完全相反的兩種量,區別起來用 $+7, -7, +10, -10$ 等數最方便. 如 $+7, +10$ 等數叫做正數, $-7, -10$ 等數叫做負數.

習題六十

1. 西曆紀元元年是耶穌誕生的一年,紀元後若用+表示,那末−表什麼? 歐几里得 *Euclid* 著'幾何原本'大約在紀元前300年,這箇年代怎樣表示?

2. 把正午作標準,午後的時刻用+表示,午前10時怎樣表示?

3. 財產與負債,最好怎樣區別? 設有財產+5000圓,與有財產−5000圓,有何不同?

4. 把一地點作中心,表示其他地點的距離時,常以在他的北面的,作正,南面的作負,東面的作正,西面的作負. 試用符號標示下列各數.

(1) 北緯 $48°$, 　北緯 $82\frac{1}{2}°$ 　南緯 $67°$

(2) 西經 120°, 東經 62°, 東經 10°

5. 土地的高度常用海面作標準. 派克峯 *Pike's Peak* 的高度是海面上 14,108 呎,死海 *Dead Sea* 的高度是海面下 1,292 呎. 試用正負數來表示. 又派克峯較死海高幾呎?

6. 酒精在攝氏 $-112°$ 時冰結, $+78°$ 時沸騰. 要使冰結的酒精沸騰,溫度需昇高幾度?

7. 氣球上升的力量有 250 斤,要保持他不再向上,需吊上多少重的東西? 若設上升力為 $+$,所吊的重應如何?

8. 某船的排水量是 30,000 噸. 試用正負號表示船的重量及水的上壓力.

69. 性質的符號,絕對值

$$74°+13°=87°$$

$$74-13°=61°$$

上式中的符號 $+$,$-$,是運算的符號. 但是表示東經西經所用的 $+$,$-$ 號,是性質的符號. 所以 $+$,$-$ 號有兩樣的用法.

正數或負數,去了性質的符號而言,就叫做絕對值. 例如 $+13$, -74 的絕對值,一為 13,一為 74.

如 $+5$ 與 -5,這叫做絕對值相等符號相反的二數.把某數的符號 $+$ 改做 $-$,$-$ 改做 $+$,這叫做變更某數的符號. 正數大都省寫符號,所以沒有符號的數總是正數.

攝氏3°的氣温,降下8°便為零下5°,即 $-5°$,使用負數可以記作

$$3°-8°=-5°.$$

如是從負數着想,像 $3-8$ 的減數縱比被減數大,也可以照常減算.

習題六一

1. 試舉以下各數的絕對值. 並變更其符號:

$-15,\quad +30,\quad -13.5,\quad -\frac{3}{7},\quad -2\frac{1}{2}$

$+3.14,\quad 100,\quad -0.03,\quad +\frac{355}{113},\quad -0.0001$

2. 試舉與下數絕對值相等符號相反的數:

$+8,\quad -\frac{3}{5},\quad +35,\quad +\frac{22}{7},\quad 25\frac{1}{5}$

$-1,\quad +a,\quad -3b,\quad -5x^2,\quad \frac{n}{3}$

3. 求以下各值:

(1) $5-3$　(2) $5-4$　(3) $5-5$

(4) $5-6$　(5) $5-12$　(6) $5-30$

(7) $50-15$　(8) $15-50$　(9) $2-3.5$

4. 計算下式:

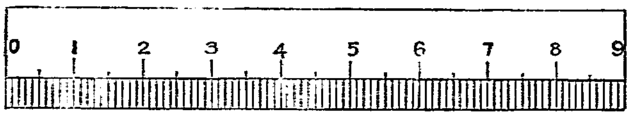
(1) 100圓－80圓　　(2) 80圓－100圓

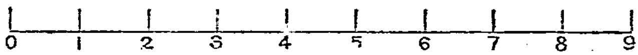
(3) 4°－16°　　(4) 12年－20年

(5) 5分－18分　　(6) 0°－8°

70. 數的大小

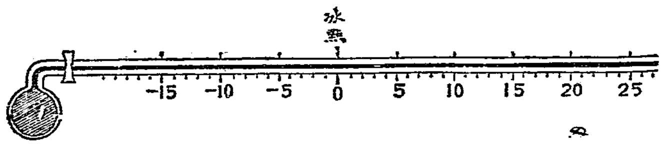
正數,可照直尺上的刻度,把直線上的一點,定作起點,向一方排列;這樣的數的排列,叫做算術的數列.

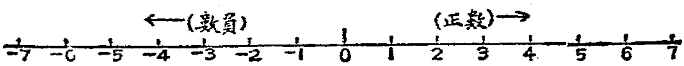




正數,負數可照溫度計上的刻度,把直線上的一點,定作起點,向相反的兩方排列;這樣的數的排列,叫做代數的數列.

兩種數列中表示起點的數,都是 0.





作代數的數列,祇須把正數,負數排列在相反的方向便得. 但是除了特別的情形,習慣上橫的方面常把正數向右排列,縱的方面向上排列.

上列代數的數列中,愈在右面的數愈大. 因此得如下說:

〔I〕 正數均較負數大.
〔II〕 正數均較0大.
〔III〕 負數均較0小.
〔IV〕 正數的絕對值愈大,正數愈大.
〔V〕 負數的絕對值愈大,負數愈小.

表示一數 a 較他數 b 大或小時,各用 $>$ 或 $<$ 記號.

a 較 b 大時,記作 $a>b$

a 較 b 小時,記作 $a<b$

各讀做"a 大於 b","a 小於 b".

記號 $>$ 及 $<$ 叫做不等號,用不等號表示的式子,叫做不等式.

上面的關於正數負數的性質,用不等式例示如下:

(1) $+2>-5$ (2) $+2>0$

(3) $-5<0$ (4) $+5<+2$

(5) $-5<-2$

一般上,要表 a 是正數,常用記號 $a>0$; 要表 b 是負數,常用記號 $b<0$.

習題六二

1. 下列各組數間,插入相當的不等號:

(1) 3, 5　　(2) $-2, +2$　　(3) $0, -2$

(4) $-8, +1$　　(5) $-15, -5$　　(6) $-100, -70$

(7) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$　　(8) $-\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}$　　(9) $-3.14, -\frac{22}{7}$

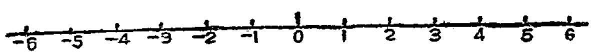
2. 畫代數的數列,表示各數的位置,以定下列各組數的大小.

(1) 2, 6　　(2) $2, -6$　　(3) $-4, +7$

(4) $-4, -6$　　(5) $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}$　　(6) $-\frac{9}{10}, 0$

(7) $-0.8, -6.3$　　(8) $-2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{8}$　　(9) $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$

71. 加法



某數,譬如說,加上 $+3$,就上面的代數的數列而言,就是求此數右面 3 格的數. 故 $+2$ 加 $+3$ 時,祗須由 $+2$ 向右數 3 格,即得 $+5$. 因此,

$$(+2)+(+3)=+5$$

同樣可得 $(-2)+(+8)=+6$

$$(-5)+(+5)=0$$

某數加 -8,就是求此數左面8格的數. 故 $+2$ 加 -8 時,祇須由 $+2$ 向左數8格,即得 -6. 因此,

$$(+2)+(-8)=-6$$

同樣可得 $(-2)+(-3)=-5$

$$(+5)+(-5)=0$$

由以上的結果,可得下說:

〔*I*〕 同符號二數的和,就是他們的絕對值的和,前面附上公有符號.

〔*II*〕 異符號二數的和,就是他們的絕對值的差,前面附上絕對值大的符號.

〔*III*〕 絕對值相等符號相反的二數的和,就是 0.

將此法則用式表示則如次: 但文字 a, b 均表正數,且設 $a>b$.

$(+a)+(+b)=+(a+b)$	$(-a)+(-b)=-(a+b)$
$(+a)+(-b)=+(a-b)$	$(-a)+(+b)=-(a-b)$
$(+a)+(-a)=0$	$(-a)+(+a)=0$

正數負數的和,特叫做代數的和.

習題六三

1. 試計算下列各式:

(1) $(+10)+(+6)$　　(2) $(-10)+(-6)$

(3) $(+10)+(-6)$　　(4) $(-10)+(+6)$

(5) $(+125)+(-75)$　　(6) $(-70)+(+8)$

(7) $(-63)+(-12)$　　(8) $(-25)+(+70)$

(9) $(-2.5)+(+2.5)$　　(10) $\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)$

2. 用加法演算以下各式:

(1) $\begin{array}{r}+30\\ \underline{-62}\end{array}$　　(2) $\begin{array}{r}+125\\ \underline{-136}\end{array}$　　(3) $\begin{array}{r}-\ 73\\ \underline{+122}\end{array}$

(4) $\begin{array}{r}-25\\ \underline{-88}\end{array}$　　(5) $\begin{array}{r}-32.7\\ \underline{+19.8}\end{array}$　　(6) $\begin{array}{r}+0.36\\ \underline{-0.58}\end{array}$

3. 求以下各式的和:

(1) $\begin{array}{r}+\ 32\text{圓}\\ \underline{-115\text{圓}}\end{array}$　　(2) $\begin{array}{r}-22^\circ\\ \underline{+13^\circ}\end{array}$　　(3) $\begin{array}{r}-36.5\text{公尺}\\ \underline{-54.8\text{公尺}}\end{array}$

(4) $\begin{array}{r}+23m\\ \underline{-16m}\end{array}$　　(5) $\begin{array}{r}-12a\\ \underline{-23a}\end{array}$　　(6) $\begin{array}{r}+\ 9x\\ \underline{+13x}\end{array}$

(7) $\begin{array}{r}-\ 3y\\ \underline{+23y}\end{array}$　　(8) $\begin{array}{r}123b\\ \underline{-27b}\end{array}$　　(9) $\begin{array}{r}17.5k\\ \underline{-62.5k}\end{array}$

4. 將以下各題,改成相加的形式,并求其和.

(1) 先得 +5 分,後得 −15 分.

(2) 起初儲蓄 85 圓,後來損失 43 圓.

(3) 温度由零下 5°,上升 8°.

(4) 先向東行 235 粎,後向西行 350 粎.

72. 減法

減法是加法的逆算. 所以從

$$4+2=6 \qquad \therefore\ 6-2=4$$

着想,可以明白下式:

$$(+6)+(-2)=+4$$

$$\therefore\ (+4)-(-2)=+6 \qquad (1)$$

又

$$(-9)+(+3)=-6$$

$$\therefore\ (-6)-(+3)=-9 \qquad (2)$$

但是因爲

$$(+4)+(+2)=+6 \qquad (3)$$

$$(-6)+(-3)=-9 \qquad (4)$$

所以把(1)與(3),(2)與(4)兩兩比較,可知

$$(+4)-(-2)=(+4)+(+2)$$

$$(-6)-(+3)=(-6)+(-3)$$

因此可得法則如下:

> 減正數或負數時,可變其符號而相加.

設 a 爲任意數, b 爲正數,上述法則得用式表示如下:

$$a-(+b)=a+(-b)$$
$$a-(-b)=a+(+b)$$

習題六四

1. 試計算下列各式:

(1) $(-8)-(+3)$　　(2) $(+5)-(-8)$

(3) $(-3)-(+2)$　　(4) $(+16)-(-9)$

(5) $(-16)-(+9)$　　(6) $(-38)-(-28)$

(7) $-(3.5)-(+11.5)$　　(8) $\frac{3}{5}-\left(-\frac{8}{5}\right)$

(9) $(-3)-\left(-1\frac{2}{5}\right)$　　(10) $1.8-(-2.3)$

2. 用減法演算以下各式:

(1) $\begin{array}{r}+10\\ \underline{-\ 2}\end{array}$　(2) $\begin{array}{r}+8\\ \underline{-6}\end{array}$　(3) $\begin{array}{r}+12\\ \underline{-10}\end{array}$　(4) $\begin{array}{r}+\ 2\\ \underline{-18}\end{array}$

(5) $\begin{array}{r}+12\\ \underline{+15}\end{array}$　(6) $\begin{array}{r}-8\\ \underline{-3}\end{array}$　(7) $\begin{array}{r}-12\\ \underline{-\ 7}\end{array}$　(8) $\begin{array}{r}-3\\ \underline{-9}\end{array}$

3. 求以下各式的差:

(1)	$+8$圓 $\underline{+5}$圓	(2)	$+8$時 $\underline{-5}$時	(3)	$-8°$ $\underline{+5°}$	(4)	$-8m$ $\underline{-5m}$
(5)	$-25t$ $\underline{-18t}$	(6)	$-13x$ $\underline{+\ 7x}$	(7)	$-\ 5y$ $\underline{-11y}$	(8)	$-\ 8x^2$ $\underline{-12x^2}$

4. 計算以下各式:

(1) $(+12$兩$)-(-3$兩$)$　　(2) $(-15p)-(+12p)$

(3) $(+14x)-(-14x)$　　(4) $5y-(-15y)$

(5) $t-(-8t)$　　(6) $(-1)-(-6)$

(7) $4y-(-13y)$　　(8) $(-7xy)-(-12xy)$

73. 諸數的加減

〔例1〕 計算 $5+3-7-10+1$

〔解〕 $5+3-7-10+1=8-7-10+1$

$=1-10+1$

$=-9+1$

$=-8$　　答

或　$5+3-7-10+1=(5+3+1)-(7+10)$

$=9-17$

$=-8$

〔例2〕 計算 $(+8)+(-5)+(+12)+(-7)$

〔解〕 $(+8)+(-5)+(+12)+(-7)=(+20)+(-12)$

$=+8$　答

〔例3〕 計算$(+8)-(-5)-(+12)+(-7)$

〔解〕 $(+8)-(-5)-(+12)+(-7)$

$=(+8)+(+5)+(-12)+(-7)$

$=(+13)+(-19)$

$=-6$　答

習題六五

試計算以下各式:

1. $2-6+4-3-2$
2. $-2+4-6+7+3$
3. $1-2+3-4+5-6+7$
4. $1+(-2)-(-3)+4$
5. $2-(-3)+(-4)-(-6)-7$
6. $25-30+17-21-45$
7. $101-75+36-175-256$
8. $0.2-0.6+0.8-0.004$
9. $\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$
10. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
11. $0.001-0.01+0.1-1+10$
12. $2-\frac{1}{3}-3\frac{1}{4}+0.2-0.01$
13. 求以下各式的和

(1) $\begin{array}{r}+8\\-5\\-6\\\underline{+7}\end{array}$　(2) $\begin{array}{r}-10\\+13\\-\ 8\\\underline{+\ 5}\end{array}$　(3) $\begin{array}{r}-\ 4\\+\ 3\\+11\\-\ 8\\\underline{+\ 1}\end{array}$

(4) $\begin{array}{r} +3b \\ -5b \\ -6b \\ \underline{+2b} \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 3x \\ -4x \\ +7x \\ \underline{-9x} \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} -7xy \\ +11xy \\ \underline{-2xy} \end{array}$

14. 計算以下各式:

(1) $4f-3f+6f-9f$ (2) $4x-5x-2x+x+10x$

(3) $5y-2y-3y-4y-10y$ (4) $2t+3-9t-8t$

(5) $2x+3y-11x-13y+5x$ (6) $2a+3-5a-7+4a-6$

74. 乘法

〔I〕 以正數乘

$$(+3)(+4)=(+3)\times 4$$
$$=(+3)+(+3)+(+3)+(+3)$$
$$=+12$$

$$\therefore\quad (+3)(+4)=+12 \qquad (1)$$

又 $$(-3)(+4)=(-3)\times 4$$
$$=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)$$
$$=-12$$

$$\therefore\quad (-3)(+4)=-12 \qquad (2)$$

〔II〕 以負數乘

以負數乘時可把他的絕對值來乘,再把所得的積變更符號.

故 $$(+3)(-4)=-12 \qquad (3)$$

$$(-3)(-4)=+12 \qquad (4)$$

由 (1),(2),(3),(4)四式,

$$(+3)(+4)=(-3)(-4)=+12$$

$$(+3)(-4)=(-3)(+4)=-12$$

於是可得乘法的符號法則如下:

同符號二數的積,其符號爲正;異符號二數的積,其符號爲負.

積的絕對值,即各數絕對值的積.

設a, b爲二正數,得將上述法則,用式表示如下:

$$(+a)(+b)=+ab$$

$$(-a)(-b)=+ab$$

$$(-a)(+b)=-ab$$

$$(+a)(-b)=-ab$$

〔III〕 零的乘法

用a表任何數(不論正數,負數及0,均可)把0來乘可得結果如下:

$$a\times 0=0\times a=0$$

習題六六

求以下各式的積:(心算)

1. $(+5)(+4)$　　2. $(+5)(-4)$　　3. $(-5)(+4)$

4. $(-5)(-4)$　　5. $(-6)(+3)$　　6. $(-4)(+6)$

7. $(-8)(-6)$　　8. $5(-8)$　　9. $(-0.2)(-0.4)$

10. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{3}\right)$　　11. $\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$　　12. $\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

13. $(+3)(+a)$　　14. $(-5)(-x)$　　15. $(-a)(+y)$

16. $(-8)(-ab)$　　17. $(-x)(-yz)$　　18. $\left(+\frac{2}{3}\right)(-pq)$

19. $(-10)(+ax)$　　20. $(-bc)(-a)$　　21. $(+2x)(-3y)$

75. 諸數的乘法

〔例1〕　$(+2)(-3)(-4)(+5)=(-6)(-4)(+5)$

$$=(+24)(+5)$$

$$=120$$

〔例2〕　$(-2)(+5)(-6)(-3)=(-10)(-6)(-3)$

$$=(+60)(-3)$$

$$=-180$$

綜合上述二例,諸數的連乘積,可照下法定出他的符號:

連乘積的符號,在
〔I〕 沒有負因數,或雖有而個數是偶數時,爲正;
〔II〕 個數是奇數時爲負.
絕對值等於各因數絕對值的積.

因此,負數 $-a$ 的冪如下:

n 是偶數時,　　$(-a)^n=\ \ a^n$

n 是奇數時,　　$(-a)^n=-a^n$

於是求諸數的連乘積時,先定積的符號,再求絕對值的積便得.

〔例 3〕 $(-6)(+5)(-8)(-10)=-2400$

習題六七

求以下的積:(心算)

1. $(-3)(-4)(-5)$
2. $(+4)(-5)(+6)$
3. $(-5)(+4)(+3)(+2)(-1)$
4. $(-1)(-20)(+2)$
5. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{6}\right)$
6. $(-1)(+0.5)(-2)$
7. $(-3)(+4)(-6)$
8. $(-a)(+b)(-c)$
9. $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5$
10. $(-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5$
11. $(-3)^2, (-3)^3, (-3)^4$

12. 設 $x=-2$ 時,求下列各式的值:

(1) x^3-3x^2+x-4　　(2) $3x^3-8x^2$

將以下各題中的二數,兩相比較,結果怎樣?

13. (1) $(-2)^3, -2^3$　　(2) $(-2)^4, -2^4$

(3) $(-x)^3, -x^3$　　(4) $(-x)^4, -x^4$

76. 除法

除法是乘法的逆算. 故可推想如下:

$(+a)(+b)=+ab$　∴　$(+ab)\div(+b)=+a$

$(-a)(-b)=+ab$　∴　$(+ab)\div(-b)=-a$

$(-a)(+b)=-ab$　∴　$(-ab)\div(+b)=-a$

$(+a)(-b)=-ab$　∴　$(-ab)\div(-b)=+a$

因此,除法也可像乘法,定出法則如下:

> 同符號二數的商,其符號爲正,異符號二數的商,其符號爲負.
>
> 商的絕對值,即各數絕對值的商.

又設 a 爲除 0 以外的任何數,因

$$0\times a=0$$

故

$$\frac{0}{a}=0$$

又 a 既爲任何數,所以

$$\frac{0}{0}\text{是不定}$$

又設 b 是不等於 0 的數,則因

$$0\times a=b$$

不得成立,故

$$\frac{b}{0}\text{是不可能}$$

因此可知

以 0 作除數是無意義的. 故用文字 a, b, c 等代除數時,不能不假定他是不等於 0 的.

習題六八

求以下的商:(心算)

1. $(+12)\div(+3)$
2. $(+12)\div(-4)$
3. $(-12)\div(+3)$
4. $(-12)\div(-4)$
5. $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(+\frac{1}{3}\right)$
6. $\left(+\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{7}\right)$
7. $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{3}{7}\right)$
8. $(+2.4)\div(-0.8)$

9. $(-2a)\div(+2)$　　10. $(-2a)\div(-a)$

11. $(+5b)\div(-5)$　　12. $(+12x)\div(-4x)$

13. $(-a^3)\div(-a)$　　14. $(+a)\div(-\frac{1}{4}a)$

15. $(-a^2)\div(+a^2)$　　16. $12a\div(-4)$

17. $(+4ab)\div(-b)$　　18. $(-3ax)\div(+3x)$

19. $0\div(-3)$　　20. $0\div(+\frac{1}{2}a)$　　21. $(-3x)\div 0$

22. $\frac{-2xy}{xy}$　　23. $\frac{6\frac{2}{3}x}{-3\frac{1}{4}x}$　　24. $\frac{+ay^3}{-y^3}$

25. $\frac{-abc}{-a}$　　26. $\frac{-ab^2c}{-ac}$　　27. $\frac{-3(a+b)}{a+b}$

28. 解下列各方程式:(心算)

(1) $-x=6$　　(2) $4x=-8$　　(3) $-3x=-12$

(4) $-\ x=10$　　(5) $-4y=-16$　　(6) $-6p=36$

(7) $-2n=13$　　(8) $-4=2x$　　(9) $-25=-5y$

29. 把未知項通集在左邊,已知項通集在右邊,解以下各程式:

(1) $2x+8=6x$　　(2) $x-7=2x-10$

(3) $5x+6=3x-4$　　(4) $12-2y=3y+17$

30. 設 $x=-2$,求以下各式的值:

(1) $(3x^4)\div(x^2)\div(-x)$　　(2) $(5x^3-3x^2)\div 2x$

77. 括號的用法

在第71,72兩節,我們已知

$$+(+a)=+a$$

$$+(-a)=-a$$

$$-(+a)=-a$$

$$-(-a)=+a$$

即去括號時,若括號的前面有正號,則括號裏面的數不須變更符號,若前面有負號,則括號裏面的數必須變更符號.

括號裏面有兩項時,也是一樣 例如

$$a+(b-c)=a+(+b-c)=a+b-c$$

$$a-(b+c)=a-(+b+c)=a-b-c$$

$$a-(b-c)=a-(+b-c)=a-b+c$$

又

$$a(b+c)=(b+c)a=ab+ac$$

$$a(b-c)=(b-c)a=ab-ac$$

$$(ab+ac)\div a=\frac{ab+ac}{a}=b+c$$

$$(ab-ac)\div a=\frac{ab-ac}{a}=b-c$$

以上諸式在運算時,應留意關於乘法,除法的符號法則.

習題六九

以下各式去括號後再簡化:

1. $4+(3-1)$ 2. $4-(-3-1)$ 3. $(2+3)+(5-6)$

4. $(2+3)-(1-2)+(3+4)$ 5. $9-(5-3)$

6. $2a+(a-b)$ 7. $2a+(-a+b)$ 8. $3x-(2x-1)$

9. $3x-(-2x+1)$ 10. $8y+(y-5)$ 11. $2-(4-3+1)$

12. $(-3-4-1)-1$ 13. $x-\{x-(3x+1)\}$

14. $4x-\{2x+(1-x)\}$ 15. $6a+\{5a-(2a+1)\}$

16. $-2(-3-1)$ 17. $5(-4+2)$ 18. $-x(x-5)$

19. $3x(8-x)$ 20. $x-3(x-7)$ 21. $2y-y(8-5)$

22. $(5x-15)\div(-5)$ 23. $\dfrac{9-27x}{3}$ 24. $\dfrac{4x-16}{-2}$

解下列各方程式:

25. $3x-(x-10)=40$ 26. $(3x-2)+(7x-6)=10+(2x+4)$

27. $10y+(7y-5)=46$ 28. $5x+4-(3x+10)=22$

29. $3x-2(x-4)=5$ 30. $x-(10-2x)=\dfrac{4-2x}{2}$

78. 簡單式的加,減

數字或文字,用運算符號或括號聯綴,便成代數式,

或單叫做式.

單由一項而成的式,叫做獨項式,由兩項以上而成的式,叫做多項式. 多項式又可隨着他的項數,分別叫做二項式,三項式等.

獨項式 $3x$, $5ab$, $\frac{2}{5}x^2$

二項式 $3x+y$, $4a-b$, $6p-7q$

三項式 x^2+3x-5, $x-2y+3z$

含有同類項的多項式,加減起來,最好把同類項排在同一縱行,那末計算時便利得多.

3時15分18秒	$3a+15b+18c$
2時21分15秒	$2a+21b+15c$
5時36分33秒	$5a+36b+33c$

〔例1〕 $7x-8y$ 加 $-4x+3y$;並設 $x=2, y=1$ 以驗算.

〔解〕 設 $x=2, y=1$, 則

$$\begin{array}{rcr} 7x-8y\cdots\cdots & = & 14-8= \ \ 6 \\ -4x+3y\cdots\cdots & = & -8+3=-5 \\ \hline 3x-5y\cdots\cdots & = & 6-5= \ \ 1 \end{array}$$

〔例2〕 由 $11m-4n$ 減 $9m-n$;並設 $m=1, n=-1$, 以驗算.

〔解〕 設 $m=1, n=-1$ 則

$$\begin{array}{rcr} 11m-4n\cdots\cdots & = & 11+4=15 \\ 9m-\ n\cdots\cdots & = & 9+1=10 \\ \hline 2m-3n\cdots\cdots & = & 2+3=\ \ 5 \end{array}$$

習題七十

求以下各式的和:(仿前例,用簡單的數,代各文字以驗算.)

1. $\begin{array}{r} 2a+7b \\ \underline{3a+\ b} \end{array}$　　**2.** $\begin{array}{r} 5x+3y \\ \underline{2x-3y} \end{array}$　　**3.** $\begin{array}{r} 7x-8y \\ \underline{x+5y} \end{array}$

4. $\begin{array}{r} -8m+2n \\ \underline{8m-2n} \end{array}$　　**5.** $\begin{array}{r} 4p-3q \\ \underline{11p-8q} \end{array}$　　**6.** $\begin{array}{r} 2a+3b-4c \\ \underline{5a-7b+9c} \end{array}$

7. $\begin{array}{r} 2x-\ 3y \\ -7x+\ 4y \\ \underline{x-12y} \end{array}$　　**8.** $\begin{array}{r} 3x^2-\ x+2 \\ 4x^2+3x-7 \\ \underline{5x^3-7x+9} \end{array}$　　**9.** $\begin{array}{r} 2x-3 \\ 3x^2-\ x \\ \underline{x^3-2x^2} \end{array}$

求以下各式的差:(也仿前例驗算.)

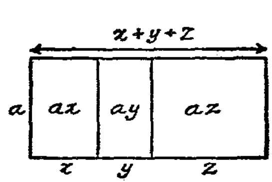
10. $\begin{array}{r} 5x+7y \\ \underline{3x-2y} \end{array}$　　**11.** $\begin{array}{r} 7a-2b \\ \underline{-3a+9b} \end{array}$　　**12.** $\begin{array}{r} 3h-6k \\ \underline{-2h+4k} \end{array}$

13. $\begin{array}{r} -4x+\ y \\ \underline{x-4y} \end{array}$　　**14.** $\begin{array}{r} 7a-2b+\ c \\ \underline{a-5b-8c} \end{array}$　　**15.** $\begin{array}{r} 2x^3-3x+5 \\ \underline{2x^3-5x-7} \end{array}$

79. 簡單式的乘,除

〔I〕 多項式與獨項式的積

$$a(x+y+z)=ax+ay+az$$



〔例 1〕 $(-2x)(2x-3y-5)$

$$=-4x^2+6xy+10x$$

或照下法計算亦可:

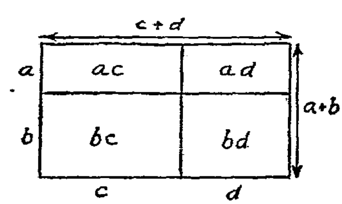
$$\begin{array}{r} 2x-3y-5 \\ -2x \\ \hline -4x^2+6xy+10x \end{array}$$

〔II〕 兩個二項式的積

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

$$\therefore\quad (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

或 $$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$



〔例 2〕 $(x-3)(x+5)=x^2+5x-3x-15$

$$=x^2+2x-15$$

〔III〕 獨項式除多項式

施以與乘法相反的計算便得.

〔例 3〕 $(4x^2-6x)\div 2x=(4x^2\div 2x)-(6x\div 2x)=2x-3$

〔例 4〕 $\dfrac{9xy-6x}{3x}=\dfrac{9xy}{3x}-\dfrac{6x}{3x}=3y-2$

習題七一

計算以下各式:

1. $3x(2x-5)$
2. $(-x)(2-x)$
3. $(-3p)(1-5q)$
4. $5a(3a-2b)$
5. $(-4)(-x^2+2x-3)$
6. $(3x^2-2x+1)(-5x)$
7. $(a-2b+3c)(-2b)$
8. $(1-2y+5y^2)(-7)$
9. $(a+1)(a+2)$
10. $(a+1)(a-2)$
11. $(x-2)(x-5)$
12. $(x+2)(x-5)$
13. $(x+2)(x+2)$
14. $(a-x)(a+x)$
15. $(2a-3)(2a-5)$
16. $(a-5)(x+6)$
17. $(2x-3)(2x+2)$
18. $(x-3y)(x-3y)$
19. $\dfrac{2x-2}{2}$
20. $\dfrac{6x^2+12x}{3x}$
21. $\dfrac{16y-4x}{-2x}$
22. $\dfrac{8(a+b)+2}{2}$
23. $(-16a^2+24a)\div(-4a)$
24. $(5x^2-15xy)\div(5x)$

下列等式中的 x 試用 a, b 表示其值:

25. $\dfrac{x}{3a}=-b$
26. $\dfrac{x}{a}=a-b$
27. $\dfrac{x}{2a-b}=-a$
28. $\dfrac{x}{4a-b^2}=b$

80. 代數式的數值

由若干個文字組成的代數式中,若把各個文字各用一數代入,那末這個式子也就表示一個定數;這叫做代數式的數值.

〔例1〕 a, b, c 三數的平均,可用 $\frac{a+b+c}{3}$ 表示;設 $a=15$, $b=2$, $c=-7$, 那末此式的數值怎樣?

〔解〕 $\frac{a+b+c}{3}=\frac{15+2+(-7)}{3}=\frac{15+2-7}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$ 答

〔例2〕 $F=\frac{9}{5}C+32$ 是溫度計上攝氏所示度數 C 改為華氏所示度數 F 的公式. 試將下列攝氏度數依據上式改為華氏度數.

(1) 37° (2) 8° (3) −8° (4) −20°

〔解〕 (1) $C=37$ $\therefore$ $F=\frac{9}{5}\times 37+32=98.6$

(2) $C=8$ $\therefore$ $F=\frac{9}{5}\times 8+32=44.8$

(3) $C=-8$ $\therefore$ $F=\frac{9}{5}\times(-8)+32=17.6$

(4) $C=-20$ $\therefore$ $F=\frac{9}{5}\times(-20)+32=-4$

答: (1) 98.6° (2) 44.8° (3) 17.6° (4) −4°

習題七二

1. $a=p(1+rt)$ 中，設 $p=2000$, $r=0.065$, $t=3\frac{1}{4}$ 時，求 a 的值.

2. $A=\frac{h(a+b)}{2}$ 中，設 $a=8.4$, $b=12.8$, $h=7.2$, 則 A 的值是多少?

3. $C=\frac{5}{9}(F-32)$ 是華氏所示度改爲攝氏所示度數的公式. 設 F 的值爲 100, 60, 15, -10 時 C 的值各幾何?

4. $y=5x-8$ 中,若把 -4, -3, -2, $-$, 0, 1, 2, 3, 4 分別來代 x, 則 y 的值各幾何?

5. $y=-8x+10$ 中,若把 -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 分別代 x,則 y 的值各幾何?

6. $y=x^2-3x+1$ 中的 x, 各以 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 代入,求 y 的值.

7. 設 $a=5$, $b=-3$, $c=-1$, 求以下各式的值:

   (1) $(a+b+c)^2$

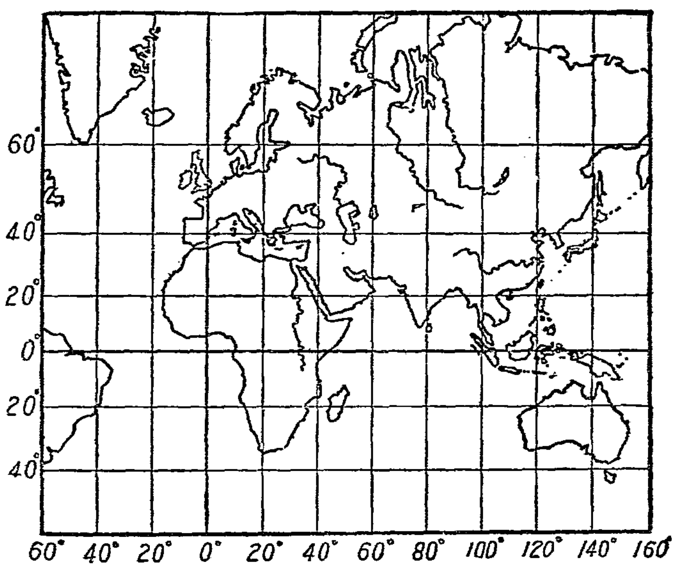
   (2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

   (3) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

   (4) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

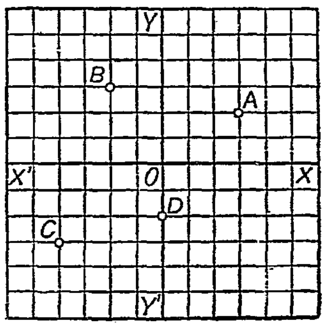
81. 坐標

平面上點的位置,表示起來,以相交成直角的二直線作基準,是最簡便. 例如下面地圖上各地點,可用赤道和通過英國格林威治的子午線(即本初子午線)作基準,把他表示出來.



設 XX', YY' 爲作基準的二直線, O 爲其交點. 點在 XX' 的上方,那末表示自點至 XX' 之距離(垂線之長)

的數爲正,在下方便爲負;又點在 YY' 的右面,那末表示自點至 YY' 之距離的數爲正,若在左面便爲負. 這是一種通行的規定. 表示距離的數,因爲要易於讀出,所以都利用



方格. 例如上圖中若把每格作1單位,點 A 的位置,即在距 YY' 爲 $+3$ 距 XX' 爲 $+2$ 之處.

即點 A 的位置,定於

$$(+3, +2)$$

一組的數;這一組的數叫做點 A 的坐標.

同法,點 B 的坐標爲　$(-2, +3)$

點 C 的坐標爲　$(-4, -3)$

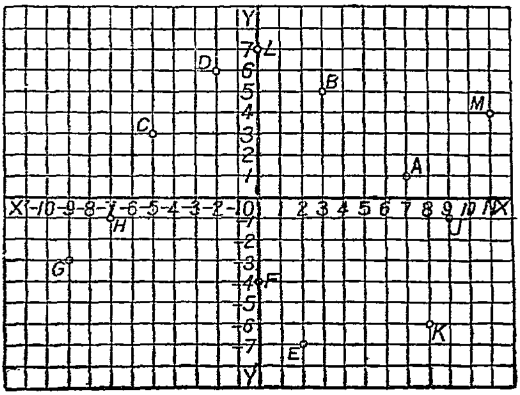
點 D 的坐標爲　$(\ 0, -2)$

基準線 XX', YY' 叫做坐標的軸,其中 XX' 叫做橫軸或 x 軸, YY' 叫做縱軸或 y 軸.

記載坐標時,習慣上先記距縱軸的距離(即左右)後記距橫軸的距離(即上下). 前者叫做橫坐標或 x 坐標,後者叫做縱坐標或 y 坐標. 又交點 O 叫做原點,他的坐標爲 $(0,0)$.

習題七三

1. 試讀出右圖中A, B, C, ……, M各點的坐標.(圖中軸上所記數列,爲便於坐標的名擧.)



2. 就方格紙畫適當的坐標,定出以下各點

(1) $A(8,6)$, $B(-8,6)$, $C(-8,-6)$, $D(3,-6)$.

(2) $P(-12,-8)$, $Q(-6,-4)$, $R(6,4)$, $S(12,8)$.

(3) $L(-8,0)$, $M(0,12)$, $N(7,0)$, $K(0,-9)$.

(4) $(2.5,3)$, $(-5.5,6)$, $(-8,4.5)$, $(9,-3.5)$.

(5) $6.8,3.4)$, $(8.2,9.5)$, $(-1.4,-6.8)$, $7.3,-5.6)$.

(6) $\left(3\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(-10\frac{1}{4},\ -4\frac{1}{5}\right)$, $\left(0,\ 5\frac{2}{3}\right)$.

3. 畫坐標的軸XX', YY'便把平面劃做分四部分.$\angle XOY$內的部分叫做第一象限, $\angle YOX$內的,叫做

第二象限,$\angle X'OY'$內的,叫做第三象限,$\angle Y'OX$內的,叫做第四象限. 試述下列諸點各在第幾象限:

$$(2,\ -3),\quad (-8,\ -3),\quad \left(\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2}\right),\quad (-5,\ 4).$$

82. 代數式的圖線

試從含 x 和 y 的等式

$$y=x+2$$

着想,式中的 x 若給以一個特別數值,那末 y 因此也有一個定值. 例如設

$$x=-6$$

則
$$y=-6+2=-4$$

在方格紙上,定出用這一組的值$(-6,-4)$作坐標的點,標明爲 A.

再順次照樣設

$$x=-5,\ -4,\ -3,\cdots\cdots,\ 4,\ 5,\ 6.$$

分別求得 y 的值如下:

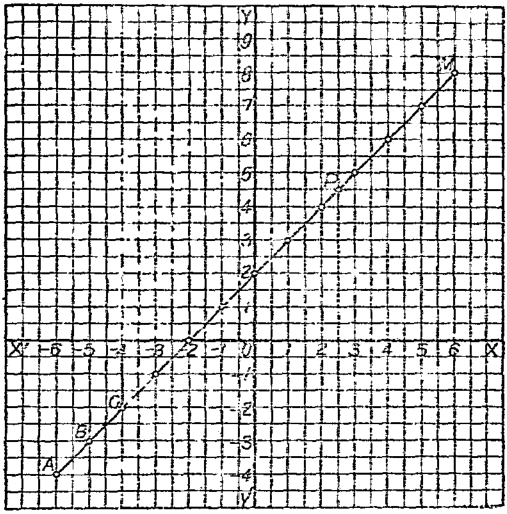
$$y=-3,\ -2,\ -1,\cdots\cdots,\ 6,\ 7,\ 8.$$

於是再照前樣,定出以

$$(-5,-3),(-4,-2),(-3,-1),\ \cdots\cdots,\ (4,6),(5,7),(6,8)$$

爲坐標的點,順次標明 $B, C, \cdots\cdots\cdots, M$, 那末這許多點,

都在一直線上排列着.



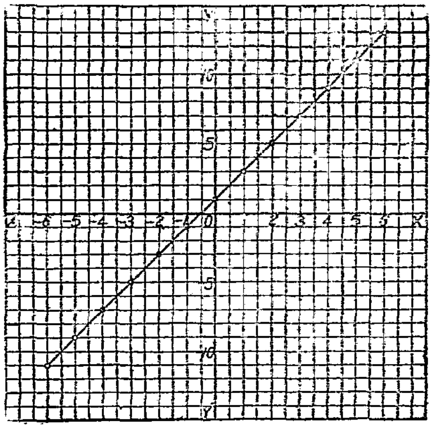
上式中的 x 和 y, 若取小數或分數等值, 照前樣定出點來, 也仍舊在這直線上列着. 又這直線上的任意一點, 譬如點 P, 他的坐標 (2.5, 4.5) 可知其能適合等式 $y=x+2$. 學者試自取 x 和 y 的對應值, 來定點的位置; 再取直線上其他任意點的坐標來考察是否適合這等式, 當得更進一層的明瞭.

上圖中, 直線 AM, 叫做等式 $y=x+2$ 的圖線.

〔例1〕 x 的值在 -6 至 $+6$ 範圍內時, $y=2x+1$ 的圖線怎樣? 試描寫出來.

〔解〕

x	y
-6	-11
-5	-9
-4	-7
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13

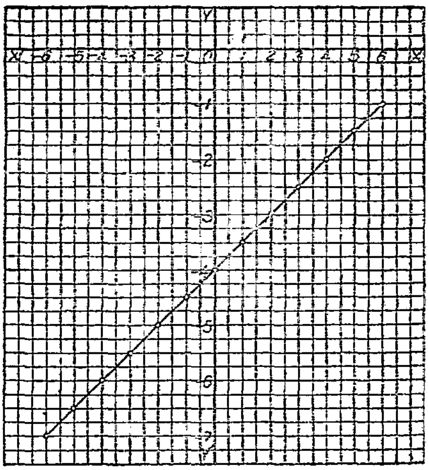


〔例 2〕 試描寫 $x-2y=8$ 的圖線，他的 x 的值在 -6 至 $+6$ 的範圍以內。

〔解〕 $x-2y=8$

$$\therefore y=\frac{x}{2}-4$$

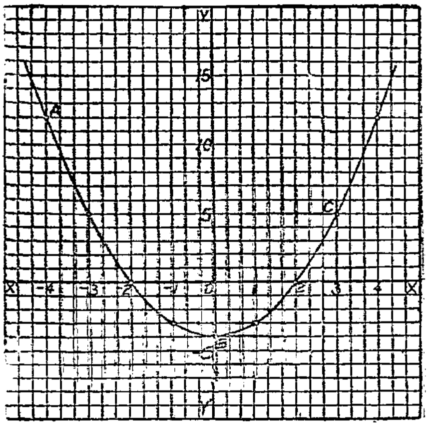
x	y
-6	-7
-5	-6.5
-4	-6
-3	-5.5
-2	-5
-1	-4.5
0	-4
1	-3.5
2	-3
3	-2.5
4	-2
5	-1.5
6	-1



〔例3〕 試描寫x的值在-4至$+4$範圍內的$y=x^2-4$的圖線。

〔解〕

x	y
-4	12
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5
4	12



(注意) 本題的圖線,乃是像ABC樣子的曲線.

習題七四

描寫以下的各圖線,他的x的值的範圍,照括號內所示:

1. $y=x-3$ $(-4至+4)$　2. $y=-x+4$ $(-6至+6)$
3. $y=2x-3$ $(-6至+6)$　4. $2y=x+2$ $(-5至+5)$
5. $2x+3y=6$ $(-6至+6)$　6. $y=x^2-10$ $(-4至+4)$
7. $y=5-x^2$ $(-4至+4)$　8. $y=x^2-2x-6$ $(-3至+5)$

雜　題

1. 正數負數所以用來區別意義正相反對的二量的. 這樣的量,試想法多舉幾個例來!

2. 同符號的二數怎樣相加? 異符號的怎樣相加? 試先用語言陳述;再用式表示.

3. 減負數須怎樣? 下列二式試除去其括號:

$$a-(-b),\qquad a-(b-c+d)$$

4. 試述乘法除法的符號法則. 再用式來表示.

5 下列各組數,先由第一數減第二數. 再由小的減大的.(心算)

(1) $5, 6$　(2) $14, -10$　(3) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

(4) $-1, 3$　(5) $-4, -5$　(6) $-\frac{1}{3}, 3$

6 計算以下各式:(心算)

(1) $5\times(-6)$　(2) $(-5)\times(-5)$　(3) $(-5)^3$

(4) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)$　(5) $\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{-1}{3}\right)$　(6) $(-3)^2-10$

(7) $(-2)^3+8$　(8) $(-x)^4+x^4$　(9) $(-1)^5(-a)^3$

7. 試述下式的結果:

(1) $(-2)\times 0$　(2) $37+0$　(3) $0-4\frac{1}{2}$　(4) 0×96

(5) $0+7\frac{1}{2}$　(6) $0\div 7\frac{1}{2}$　(7) $7\frac{1}{2}-0$　(8) $7\div 0$

(9) $9\div 1$　(10) $0\div 9$　(11) $9\div 0$　(12) $2^3\times 0$

8. 設 $x=1$, 求以下各式的值:

(1) $x+1$　(2) $2-x$　(3) $x-1$　(4) $x-2$

(5) $2-2x$　(6) x^2-1　(7) $x(-x)$　(8) $\dfrac{x-2}{-x+3}$

(9) x^5　(10) $(-x)^6$　(11) $-(-x)^3$　(12) $x^3-(-x)^2$

9. $a=1$, $b=-2$ 時以下的值怎樣?

(1) $a+b$　(2) $a-b$　(3) $b-a$　(4) $2a+b$

(5) $3a-2b$　(6) a^2+b^2　(7) $ab-1$　(8) $2a^2b^2$

(9) $2a^2b$　(10) $\dfrac{2a-b}{4a}$　(11) a^3-b^3　(12) $(ab)^3$

10. 解下列各方程式:

(1) $2x-(x-2)=7$　(2) $8-2(3-3x)=2(2x-3)$

(3) $3(x-4)-2(x-2)=5$　(4) $2(y-5)-5(y+2)=-20$

11. 描寫 $y=x$ 及 $y=-x$ 的圖線. 這類圖線對於坐標的軸含有怎樣的性質?

12. 用同一坐標軸,描寫 $y=3x+1$, $y=3x+4$ 的圖線. 兩者之間有怎樣的關係?

13. 用同一坐標軸描寫 $y=3x+2$, $y=x+2$, $y=-4x+2$ 的圖線. 三者之間有怎樣的通性?

第六章

方程式

83. 移項

等式 $$a-k=b+h \qquad (1)$$

中,兩邊均加k,則 $$a=b+h+k$$

兩邊均減b,則 $$a-b=h+k \qquad (2)$$

比較(1),(2)兩式可知左邊的$-k$,移至右邊便變做$+k$,右邊的$+b$移至左邊便變做$-b$. 即

等式一邊的任何項,若變其符號便可移至他邊.

這就叫做移項.

利用上述移項的法則解方程式,可得不少便利.

例如: $$7x-3=3x+17,$$

把已知項-3移至右邊,未知項$3x$移至左邊,即得

$$7x-3x=17+3,$$

$$4x=20,$$

$$\therefore\ x=5$$

祇含一未知數的方程式,叫做一元方程式;又去了

括號,集合了同類項,而未知項中的未知數是一次的方程式,叫做一次方程式. 因此,如

$$7x-3=3x+17$$

是一元一次方程式.

一元一次方程式的解法順序如下:

> 解一元一次方程式時,先把未知項移於左邊,已知項移於右邊,合同類項成一項,用未知數的係數,除其兩邊,即得.

(注意) 遇有括號時,應先去了括號再照上法來解.

〔例〕 解 $5(x-1)-3(x-2)+4(x+3)=9x+1$

〔解〕 $5(x-1)-3(x-2)+4(x+3)=9x+1$

去括號,

$$5x-5-3x+6+4x+12=9x+1$$

移項,得

$$5x-3x+4x-9x=1+5-6-12$$

$$\therefore \quad -3x=-12$$

兩邊均用 -3 除,得

$x=4$ 答

〔驗〕 左邊 $=5\times3-3\times2+4\times7=37$

右邊 $=9\times4+1=37$

習 題 七 五

解下列各方程式:

1. $10x-9=6x+11$　　　**2.** $12-5x=2x-2$

3. $2x+15=5x-3$　　　**4.** $5-3x=33+x$

5. $3x+3+4x+8=2x+12+24$

6. $5x+10-6x+3=4x+12-2+6x-8$

7. $4(x-2)=3(x-1)$　　　**8.** $3(x+2)+5=4(x+3)-2$

9. $5(x-4)+3(x-8)=0$　　　**10.** $5(x+3)-2(8-x)=13$

11. $7(x-1)-3(x-2)+2(5-x)=15$

12. $16-2(x-3)-3(x-4)=6-4(x-3)$

13. $4(2x+1)-3(7-x)+5(1-3x)+8=0$

14. $5x-7(x-8)-20(8-x)=10(2x-19)$

15. $(x-8)(x+12)=(x+1)(x-6)$

16. $(x+4)(x-3)-(x-2)(x+1)=0$

17. $2x-\{3-x-(1-5x)\}=6$

84. 去分母法

方程式中,如

$$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}x$$

一類的,照着前述的一般順序,把未知項移　左邊,已知項移於右邊,得

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{6}x=\frac{5}{4}$$

固然可解;若先把各項分母的最小公倍數12,乘兩邊,化爲

$$8x-6=9-2x$$

來解,更覺便捷.這種方法,叫做去方程式的分母.

〔例 1〕 解 $\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x=\frac{2}{3}x+2\frac{1}{6}$

〔解〕 $$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{2}x+2\frac{1}{6}$$

把各分母的最小公倍數12乘兩邊,以去分母,

得 $$8x-3x=18x+26$$

移項, $$8x-3x-18x=26$$

$$\therefore\quad -13x=26$$

$$\therefore\quad x=-2$$ 答

〔驗〕 左邊 $=-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}$

右邊 $=-3+2\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$

〔例 2〕 解 $\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{5}(x+2)=\frac{1}{3}x-1$

〔解〕 $$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{5}(x+2)=\frac{1}{3}x-1$$

兩邊乘以30而去分母,得

$$15(x-1)-6(x+2)=10x-30$$

$$15x-15-6x-12=10x-30$$

$$15x-6x-10x=-30+15+12$$

$$-x=-3$$

$$\therefore\quad x=3\qquad 答$$

學者試自行驗算.

(注意) 分數式中的橫線——,用途同括號一樣. 所以去分母時,因爲除去這橫線,便應把分子括入括號. 前面有負號的,更是容易錯誤,要特別留意. 譬如:

$$\frac{x}{3}=1-\frac{x-5}{2}$$

去了分母,若得 $2x=6-3x-15$

便是錯誤,若得 $2x=6-3x+15$

方爲正確.

習題七六

解以下各方程式:

1. $\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}=\frac{1}{5}-\frac{5}{4}x$　　2. $\frac{5}{2}x-1=x-\frac{5}{8}$

3. $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x=\frac{7}{12}x+9$　　4. $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{3}(x-1)=2$

5. $\frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{2}(x-2)=0$

6. $\frac{x+5}{4}+\frac{x+7}{5}+\frac{x+9}{3}=8$　　7. $\frac{5}{6}(x-4)=\frac{x+4}{2}$

8. $\frac{2x-1}{4}-\frac{5+x}{6}+\frac{2-x}{3}=\frac{1}{4}$

9. $\frac{x+3}{4}-\frac{2x-3}{3}=2\frac{1}{6}$

10. $\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{3}(x-2)=\frac{1}{2}(5-3x)$

11. $\frac{7x+3}{5}-(x-2)=\frac{2x+17}{10}$

12. $\frac{5x-12}{3}-\frac{7x+6}{10}=\frac{9x-8}{25}-\frac{6-x}{2}$

13. $0.5x+3.5=0.25x+3$

14. $0.02x-0.03=0.12x+2(0.05-0.2x)$

85. 應用問題

〔例 1〕 分 20 爲二部分,令其一部分的 3 倍與他部分的 7 倍之和爲 104. 求二部分各幾何?

〔解〕 設一部分爲 x, 則他部分便爲 $20-x$; 由題意得方程式

$$3x+7(20-x)=104$$

解之,得

$$3x+140-7x=104$$

$$-4x=-36$$

$$\therefore \quad x=9$$

$$20-x=20-9=11$$

於是所求的二數爲 9 與 11.

〔驗〕 $9+11=20,\ 9\times3+11\times7=27+77=104.$

答　9 與 11

〔例 2〕 父的年齡現爲子的年齡之 4 倍, 20 年後便爲 2 倍. 問兩人的年齡,現各幾歲?

〔解〕 設子現年 x 歲,則父年爲 $4x$ 歲, 20 年後子年爲 $(x+20)$ 歲,父年爲 $(4x+20)$ 歲. 故得方程式

$$4x+20=2(x+20)$$

解之,得

$$4x+20=2x+40$$

$$4x-2x=40-20$$

$$2x=20$$

$$\therefore \quad x=40$$

因此,　　$4x=40$

現在子 10 歲,父 40 歲, 20 年後子爲 $10+20=30$ 歲父爲 $40+20=60$ 歲. 故如題意適爲 2 倍.

答　子 10 歲,父 40 歲.

(注意) 用方程式解問題時,這方程式的根不一定都能適合題意. 往往所求的是整數而根爲分數,或者所需要的是正

致而偶遇負數．所以求得的根,不能不一一檢查,察其是否適合題意方可把'答'寫出．還有一種情形如下題所述者:

〔例3〕 父年40歲時,子年10歲．幾年以後,父年爲子年的(1) 2倍? (2) 4倍? (3) 6倍?

〔解〕 設所求爲距今 x 年以後,則

(1) $$40+x=2(10+x)$$
$$-x=-20$$
$$x=20$$

(2) $$40+x=4(10+x)$$
$$-3x=0$$
$$x=0$$

(3) $$40+x=6(10+x)$$
$$-5x=20$$
$$x=-4$$

因(1)的根爲正,故得所求爲20年後．(2)爲0,故表示着現在父年適爲子的4倍．(3)的根爲負數,若把距今以後的年數作正數解,那末負數便可作以前的年數解．因此,可知今後父年爲子年6倍的時候是沒有了,但在4年以前恰是如此．4年前,父 40−4=36 歲,子 10−4=6 歲,適爲6倍．故(3)可作'4年前'解答．

這樣解答法,叫做解釋負根. 故得到負根時,應該注意是否可以解釋.

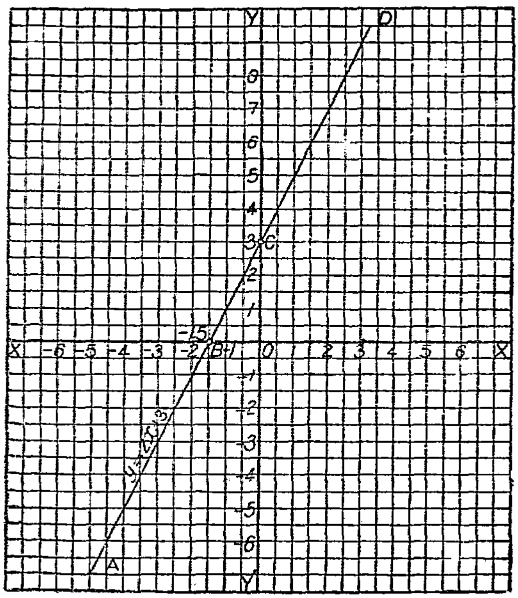
習題七七

1. 今有三箇連續的正整數,其和爲72. 求各數.
2. 甲乙二人有銀相等,甲用去7圓5角,乙用去15圓後,甲所有的適爲乙的二倍. 問原各有銀幾何?
3. 某人乘脚踏車往某地,每時速度8哩;歸時經行較往時更遠3哩的路,每時速度8.5哩,還比往時多費了7.5分鐘. 求往來的路程各幾哩?
4. 教員令某生用6與7分別除某數的半分,把所得的商相加;他不這樣做,而用簡便法估計,逕把原數用7來除,結果比應得的答數小7. 求原數.
5. 某展覽會入場券的售價,大人每券3角,兒童1角;某月的統計參觀者共2460人,收入總數共486圓. 求這月的參觀者大小各幾人?
6. 甲乙兩方矩形田地,甲地,縱爲橫的3倍,乙地比甲地,縱短15粎,橫短5粎,所以面積小825平方粎. 求兩地的面積各幾何?
7. 兄現年9歲,弟4歲. 兄的年齡較弟的3倍還多7時,在幾年後?

86. 二元一次方程式及其圖線(1)

如　　　　$y=2x+3$

一類的等式,他的圖線是一直線,在前章的末了已經學過.



現在就 x 和 y 來說,上述形式的等式可叫做二元一次方程式. 因此,

> 二元一次方程式的圖線是一直線.

因爲直線定於二點,所以描寫二元一次方程式的圖線時,可照下述方法:

先設　$x=0$,　則　$y=3$;

再設　$y=0$,　則　$x=-1.5$.

於是通過以$(-1.5, 0)$, $(0, 3)$爲坐標的兩點B和C,引直線AD,便得.

再$y=2x+3$的圖線AD,與x軸交於B. 因B的x坐標爲-1.5,故

$x=-1.5$　時　$y=0$,　即　$2x+3=0$.

反之,

要使　$2x+3=0$,　則須　$x=-1.5$.

因此,

> $y=2x+3$形二元一次方程式的圖線,與x軸相交點的x坐標,爲方程式$2x+3=0$的根.

又在$y=2x+3$的圖線上,可明以下兩點:

由B而右,直線便由x軸而向上,

由B而左,直線便由x軸而向下.

用不等式來表這個關係則

$x>-1.5$　時　$y>0$,　即　$2x+3>0$;

$x<-1.5$　時　$y<0$,　即　$2x+3<0$.

反之,

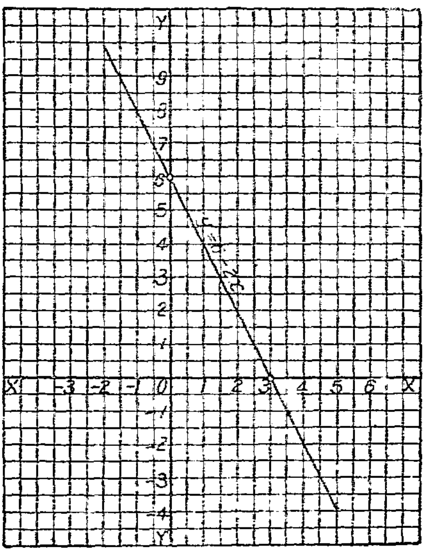
要使　$2x+3>0$,　則須　$x>-1.5$;

要使　$2x+3<0$,　則須　$x<-1.5$.

如此,要使不等式 $2x+3>0$,或 $2x+3<0$ 成立,定出 x 值的範圍 $x>-1.5$ 或 $x<-1.5$ 的方法,叫做解不等式.

〔例 1〕 描寫 $y=6-2x$ 的圖線,以解 $6-2x=0$, $6-2x>0$ 及 $6-2x<0$.

〔解〕　$y=6-2x$　$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$　$\begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$

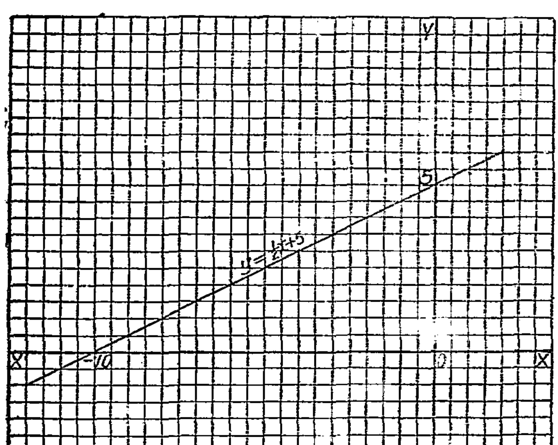


$$\left.\begin{array}{lll}\text{要使 } 6-2x=0, & \text{則須} & x=3\\ \text{要使 } 6-2x>0, & \text{則須} & x>3\\ \text{要使 } 6-2x<0, & \text{則須} & x<3\end{array}\right\}\quad\text{答}$$

〔例2〕 描寫一次式$\frac{1}{2}x+5$的圖線,以定令$\frac{1}{2}x+5$為正的x值的範圍.

〔解〕 設$\frac{1}{2}x+5$的值為y,則

$$y=\frac{1}{2}x+5 \qquad \therefore \begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases} \qquad \begin{cases}y=0\\ x=-10\end{cases}$$



要使 $\frac{1}{2}x+5>0$, 則須 $x>-15$ 答

習題七八

1. 描寫 $y=2x-6$ 的圖線,以解 $2x-6=0$, $2x-6>0$, 及 $2x-6<0$.

2. 描寫 $y=8-2x$ 的圖線,以解 $8-2x>0$ 及 $8-2x<0$

3. 描寫 $y=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$的圖線,以解$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}>1$.

4. 描寫 $y=0.5x+2.8$ 的圖線,以解 $0.5x+2.8<2$.

5. 描寫一次式 $3x-\frac{1}{4}$的圖線,以定令$3x-\frac{1}{4}$爲正的 x 值的範圍.

87. 二元一次方程式及其圖線(2)

形式如

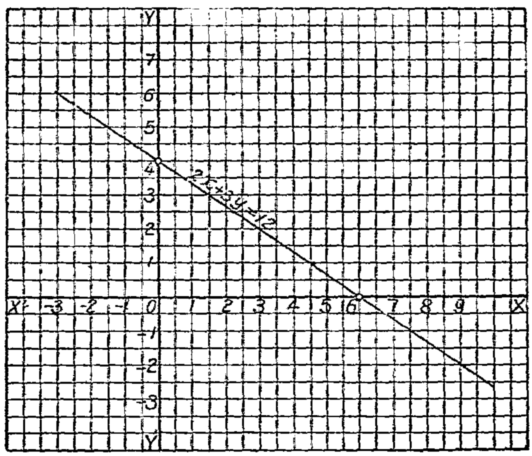
$$2x+3y=12$$

的二元一次方程式,也可變形爲

$$y=-\frac{2}{3}x+4$$

故其圖線仍爲一直線.

$$2x+3y=12 \qquad \therefore \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=6 \end{cases}$$



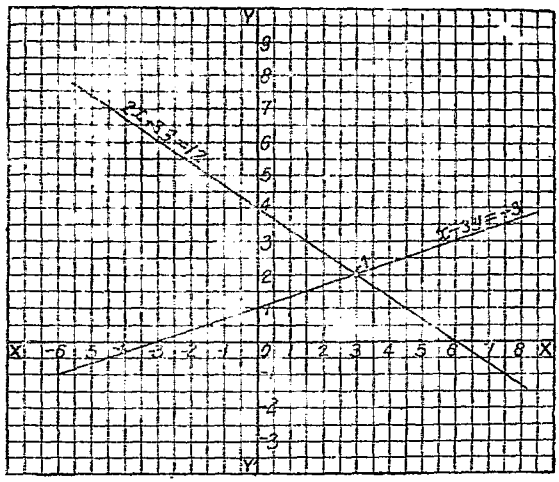
因爲直線上各點的坐標,都能適合這個方程式,所以適合一個二元一次方程式 $2x+3y=12$ 的 x 與 y 的值有無數存在. 即沒有一定的根. 普通祗知一個二元方程式時,他的根不能一定.

兩個二元一次方程式

$$2x+3y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x-3y=-3\cdots\cdots\cdots(2)$$

的圖線,用同一坐標軸與同一單位,同時描寫在上面便如下圖所示,兩個圖線交於 A 點. 這個 A 點的坐標 (3,2),即 $x=3$, $y=2$, 同時能適合兩方程式. 而此外便沒有同時能適合兩方程式的值存在.



編爲一組的方程式,用未知數的同值代入,都能適合的,這叫做聯立方程式:那未知數的值,叫做聯立方程式的根.

聯立方程式　$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ x-3y=-3 \end{cases}$

的根,就是 $(x=3, y=2)$

如上例,藉圖線以求根的方法,叫做聯立方程式的圖解.

習題七九

圖解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x-y=6 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y=-11 \\ y-x=1 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 2y-x=5 \\ 3x=y \end{cases}$

88. 二元一次聯立方程式的解法(1)

二元聯立方程式解法的要點,全在把各方程式適當處理,導出一元方程式來. 這種處理方法叫做消去未知數;或簡稱做消元.

〔例1〕 解下列的聯立方程式:

$$x+y=7,\qquad x-y=3$$

〔解〕

$$\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(1),(2)兩式各邊相加,則

$$2x=10$$

$$\therefore\ x=5$$

代入(1),則 $5+y=7$

$$\therefore\ y=2$$

答 $x=5,\ y=2$

〔驗〕 (1) 左邊 $=5+2=7$

(2) 左邊 $=5-2=3$

〔例 2〕 解下列的聯立方程式:

$$3x+4y=2,\qquad 5x-2y=12$$

〔解〕

$$\begin{cases} 3x+4y=\ 2\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x-2y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

2 倍(2)的兩邊,得

$$10x-4y=24\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (3) 兩式各邊相加,則

$$13x=26$$

$$\therefore\ x=2$$

把 x 的值代入(1)式,則

$$6+4y=2$$

$$\therefore\ y=-1$$

答 $x=2,\ y=-1$

學者試自行驗算!

〔例 3〕 解下列聯立方程式:

$$3x+4y=11,\qquad 2x+3y=8$$

〔解〕

$$\begin{cases} 3x+4y=11\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+3y=\ 8\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1)\times 2$　　$6x+8y=22$

$(2)\times 3,$　　$\underline{6x+9y=24}$ (−

$$-y=-2$$

$$\therefore\ y=2$$

代入(2),則　$2x+6=8$

$$\therefore\ x=1$$

答　$x=1,\ y=2$

〔驗〕　(1) 左邊 $=3+8=11$

(2) 左邊 $=2+6=\ 8$

(注意) 上述聯立方程式的解法,有時叫做加減消元法.

習題八十

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=\ 4 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} 4x+y=9 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x+2y=9 \\ 3x+\ y=4 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 4p+3q=19 \\ 2p+\ q=\ 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2m-3n=0 \\ 4m-\ n=14 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 5x+y=13 \\ 5y+x=17 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5X+6Y=27 \\ X+3Y=12 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 3A+2B=9 \\ 9A-8B=-8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x+8y=-1 \\ 7x+6y=9 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 5x+4y=19 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6a-4b=2 \\ 5a+7b=43 \end{cases}$　　12. $\begin{cases} -11x+9y=16 \\ 4x+8y=28 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 13u-6v=22 \\ 4u+6v=61 \end{cases}$　　14. $\begin{cases} 66m+55n=308 \\ 77m-15n=201 \end{cases}$

89. 二元一次聯立方程式的解法(2)

〔例1〕 解下列聯立方程式:

$$3x+2y=14,\qquad 2x-y=0$$

〔解〕

$$3x+2y=14\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x-\ y=\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)得　$y=2x\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

把 $2x$ 來代(1)的 y, 則

$$3x+2\times 2x=14$$

$$7x=14$$

$$\therefore\quad x=2$$

代入(3),得　$y=4$

答　$x=2,\ y=4$

〔驗〕 (1) 左邊 $=3\times2+2\times4=6+8=14$

(2) 左邊 $=2\times2-4=4-4=0$

(注意) 由方程式 $2x-y=0$ 變成 $y=2x$, 這是用一未知數表他未知數, 或用一未知數與已知數表他未知數的方法; 叫做就某未知數解方程式.

〔例 2〕 解下列聯立方程式:

$$2x+3y=5, \qquad x+4y=5$$

〔解〕 $2x+3y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x+4y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(2)得 $x=5-4y\cdots\cdots(3)$

把他代入(1)的 x, 則

$2(5-4y)+3y=5$

即 $10-8y+3y=5$

$-5y=-5$

$\therefore \quad y=1$

代入(3),得 $x=1$

答 $x=1, y=1$

〔驗〕 $2x+3y=2+3=5$;

$x+4y=1+4=5$.

(注意) 聯立方程式的解法,如上面例(1)所用的,有時叫做代入消元法. 又上面所舉的例(2),是先把一未知數用他一未知數(或他一未知數與已知數)來表示的. 倘使變形表示時很容易,就不妨用代入消元法以代加減消元法.

習題八一

用代入法解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} x+5y=18 \\ 3x=9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x-7y=17 \\ 4y=-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ y=x \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2m-5n=35 \\ m=-n \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+4y=35 \\ x=3y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ y=5-x \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3X+Y=20 \\ X=7-Y \end{cases}$

8. $\begin{cases} p=9-2q \\ q=9-2p \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-y=7 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5y-3x=1 \\ 2x=3y \end{cases}$

90. 二元一次聯立方程式的解法(3)

特別的二元一次聯立方程式,現在舉兩三個例,以示其解法.

〔例1〕 解下列聯立方程式:

$$\frac{x-2}{3}+\frac{y-1}{2}=-1$$

$$\frac{3x+1}{2}-\frac{3-y}{2}=1$$

〔解〕 $$\frac{x-2}{3}+\frac{y-1}{2}=-1 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{3x+1}{4}-\frac{3-y}{2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

去(1)的分母,則

$$2(x-2)+3(y-1)=-6$$

簡化之,則

$$2x+3y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

去(2)的分母,則

$$3x+1-2(3-y)=43$$

簡化之,則

$$x+2y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

$(1')\times 3$ $$6x+9y=3$$

$(2')\times 2$ $$6x+4y=18 \ (-$$

$$5y=-15$$

$$\therefore \quad y=-3$$

代入(1'), $$2x+3(-3)=1$$

$$\therefore \quad x=5$$

答 $x=5,\ y=-3$

〔驗〕 (1) $$\frac{5-2}{3}+\frac{-3-1}{2}=1-2=-1$$

(2) $$\frac{15+1}{4}-\frac{3+3}{2}=4-3=1$$

〔例 2〕 解下列聯立方程式:

$$\begin{cases} 2(x+y)+3(x-y)=13 \\ 5(x+y)+\ (x-y)=0 \end{cases}$$

〔解〕 $2(x-y)+3(x-y)=13 \cdots\cdots\cdots (1)$

$5(x+y)+\ (x-y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$(2)\times 3,\ 15(x+y)+3(x-y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

$(3)-(1) \qquad 13(x+y)=-13$

$\therefore \qquad x+y=-1 \cdots\cdots\cdots (4)$

代入(2) $\qquad x-y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由(4)與(5),得 $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-3 \end{matrix}\right\}$ 答

學者試自行驗算!

〔例 3〕 解下列聯立方程式:

$$3x+2y-5=2x+7y+4=4x+3y-8$$

〔解〕 $3x+2y-5=2x+7y+4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$3x+2y-5=4x+3y-8 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

各簡化之,得

$x-5y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$

$-x-y=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2')$

故 $\qquad -6y=6$

$\therefore \quad y=-1$

把 y 的值代入(2′),則

$$x=4$$

答 $x=4,\ y=-1$

學者試自行驗算!

(注意) $A=B=C$ 時,雖然可以成立三個異形的等式,如: $A=B$, $A=C$, $B=C$, 但其中祇有兩個獨立的關係式. 因為 $A=B$, $A=C$, 當然 $B=C$, 故 $B=C$ 不是獨立的關係式.

習題八二

解下列各聯立方程式:

1. $\dfrac{5x-3y}{3}=7,\ \dfrac{x+5}{4}=\dfrac{10+2y}{3}$

2. $\dfrac{2x-3y}{2}-\dfrac{3x-2y}{3}=\dfrac{7}{2},\ \dfrac{2x+3y}{3}+\dfrac{3x+2y}{4}=\dfrac{13}{12}$

3. $x=1+\dfrac{3}{5}(y+4),\ y=3+\dfrac{2}{7}(1-2x)$

4. $\dfrac{2x+3y}{5}=10-\dfrac{y}{3},\ \dfrac{4y-3x}{6}=\dfrac{3x}{4}+1$

5. $0.3x+0.5y=47,\ 0.9x-0.2y=22$

6. $\begin{cases}3(x+y)+y=13\\2(x+y)+y=9\end{cases}$

7. $\begin{cases}7x+8(x+y)=59\\3x+4(x+y)=27\end{cases}$

8. $\begin{cases}5(x+y)+3(x-y)=36\\2(x+y)+(x-y)=14\end{cases}$

9. $\begin{cases}7(x+y)-10(x-y)=36\\5(x+y)-8(x-y)=24\end{cases}$

10 $\begin{cases} 2(2x+3y)+\ (3x+2y)=1 \\ 5(2x+3y)-3(3x+2y)=8 \end{cases}$

11. $x+y-4=2x+3y-11=3x+2y-12$

12. $3x+4y+2=6x-2y+26=5x+3y+9$

13. $\dfrac{2x+y-3}{2}=\dfrac{-x+2y-1}{4}=\dfrac{2x+3y-5}{3}$

91. 聯立方程式的特例

〔例1〕 解下列聯立方程式:

$$x-2y=4,\qquad 2x-4y=12$$

〔解〕

$$x-2y=\ 4\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x-4y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

2 倍(1)的兩邊,則

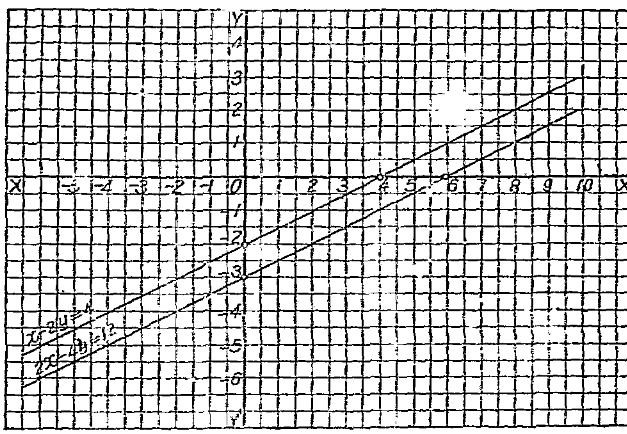
$$2x-4y=\ 8\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

由(2)減(1′),得　$0=4$

這是不合理的.

把(1)變成的(1′)來和(2)比較,左邊雖都是 $2x-4y$, 而右邊一個是 12,一個是 8. 這就是表示對於 x, y 的同值,雙方不能同時成立. 也就是這兩個方程式不能聯立. 換句話說:就是沒有同時適合兩方程式的根. 這樣的聯立方程式是矛盾的,是不可能的.

現在把兩方程式的圖線描寫如下:



二條直線是平行而不相交的.

〔例 2〕 解下列聯立方程式:

$$x-2y=4,\qquad 3x-6y=12$$

〔解〕

$$\begin{cases} x-2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-6y=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

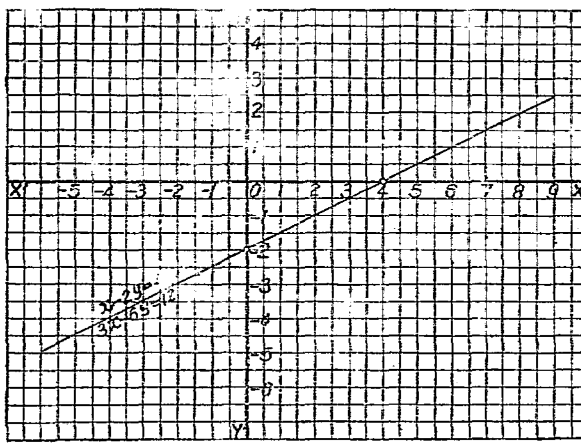
3 倍(1)的兩邊,得

$$3x-6y=12$$

完全與(2)相同. 所以這種地方和祗知一個方程式沒有兩樣. 因此,能適合於此的 x, y 的值有無數存在.

這樣的聯立方程式是　定的. 描寫圖線起來,兩

條直線完全在一起,變做一條.



習 題 八 三

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases} 3x+7y=21 \\ 12x+28y=84 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-4y=25 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 12x-5y=11 \\ 5x+7y=50 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3u-4v+5=0 \\ 5u+6v+40=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 29h-14k=175 \\ 87h-56k=497 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3(x+2y)+5(x+y)=43 \\ 4(x+2y)-3(x+y)=9 \end{cases}$

7. $7x-9y=4x+12y=40$

8. $\dfrac{3x-4y}{24}=\dfrac{4x-3y}{11}=y-x-1$

9. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{1}{6}=\frac{x}{6}+\frac{y}{7}+\frac{1}{8}$

10 $\begin{cases}\frac{3}{2}(x-y)+\frac{1}{5}(x+2y)=4\\ 2(x-y)+3(x+2y)=19\end{cases}$

92. 應用問題

〔例1〕 鉛筆 5 支,練習簿 8 册,價共銀 3 圓 2 角;又同樣的鉛筆 3 支,練習簿 7 册,價共銀 2 圓 2 角 9 分.求每支每册價各幾何?

〔解〕 設鉛筆每支價銀 x 分,練習簿每册價 y 分,則由題意得方程式如下:

$$\begin{cases}5x+8y=320\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 3x+7y=229\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)\times3\qquad 15x+24y=960$

$(2)\times5\qquad \underline{15x+35y=1345}\ (-$

$$-11y=-385$$

$$\therefore\ y=35$$

因此,由(1)得 $\quad x=8$

答 鉛筆 8 分,練習簿 3 角 5 分

學者試自行驗算!

〔例2〕 一個兩位的正整數,等於他的數字和的 6 倍;若由此整數減 9,適成數字位置交換的數.求此數.

〔解〕 設十位上的數字為 x, 個位上的數字為 y, 則此兩位的整數,可用 $10x+y$ 表示,而數字位置交換的整數便為 $10y+x$. 於是由題意得方程式如下:

$$10x+y\quad =6(x+y)\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$10x+y-9=10y+x\cdots\cdots\cdots(2)$$

各簡化之,得

$$4x-5y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

$$x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

$(2')\times4-(1')$,得 $-y=-4$

$$\therefore\quad y=4$$

代入$(2')$,得 $x=5$

故所求的整數為54

〔驗〕 $54=(5+4)\times6,\quad 54-9=45$ 答 54

(注意) 設百位上的數字為 x,十位上的為 y,個位上的為 z,則三位的整數為 $100x+10y+z$

習題八四

1. 有大小二數,其和為54,差為12. 求二數.
2. 距今12年前,父年為子年的5倍,距今3年後,父年較子年的2倍還大8歲. 求父子現年各幾歲?

3. 甲乙二人共有銀43圓,若甲與乙15圓則乙的所有銀比甲的3倍多9圓.求各有幾圓?

4. 戰事前化銀120圓製成的東西,現在因材料貴了8成,工資大了12成,須化銀244圓.求現在的材料費及工資各幾何?

5. 兩位的正整數,其數字差爲3,個位數字與十位數字倒轉的數加上原數便爲99.求此整數爲何?

6. 小於1000的整數.他的中央數字爲0,數字和爲8;把這數的數字順序完全倒轉所成之數,較原數的3倍小16.求原數.

7. 有甲乙二數,甲的$\frac{7}{8}$較乙的$\frac{12}{13}$大10,甲的$\frac{1}{2}$較乙的$\frac{3}{5}$大1.求甲乙二數.

8. 有最簡分數.分子與分母的和爲49,由分子分母減2而簡約則爲$\frac{1}{2}$.求此分數.

9. 往來某某二地間的電車,每時速度增加7哩,來往時間可以縮短1小時,若每時減少5哩,須增長1小時.求這兩地間的距離.

10. 銀若干圓分存兩戶,一戶年利1分,一戶年利8釐,一年間的利息總計銀440圓.若把利率互換則一年間的利息可以多20圓.求存於兩戶的銀數各幾何?

雜題

1. 一元一次方程式的一般形爲$ax+b=0$. 試解之.

2. 二元一次方程式$ax+by=c$的圖線是怎樣的圖形? 試舉這圖形截x軸點的坐標. 再舉截y軸點的坐標.

3. 用先定兩點的方法來描寫$y=x$, $y=-x$, $y=3x$, $y=-\frac{x}{2}$的圖線. 這類圖線的公有的性質是什麼? 一般的$y=ax$的圖線具有怎樣的性質?

4. 用圖線來圖解以下各方程式,把結果和用代數方法解得的結果比較:

(1) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 2x-\ \ y=3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ \ \ x+2y=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x=2y \\ y-2x=3 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x+\ \ y=4 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

5. 攝氏度數C與華氏度數F之間,有$C=\frac{5}{9}(F-32)$的關係. 試於y軸上取C, x軸上取F,描寫他的圖線. 再利用這圖線,解下面的問題:

(1) $62°F$, $95°F$, $24°F$, $20°F$各爲攝氏的幾度?

(2) $18°C$, $37°C$, $8°C$, $-7°C$各爲華氏的幾度?

6. 設某物原價3圓,賣去時獲利r成的賣價爲S

圓,則 $S=3\left(1+\frac{r}{10}\right)$. 試畫出圖線來解下列各問:

(1) 賣價3.5圓時獲利的成數.

(2) 獲利3.5成時的賣價.

7. 解下列各方程式:

(1) $3x-2(x+5)=6x-20$ (2) $8+2x+\frac{x}{4}=1\frac{3}{4}+\frac{2a}{3}$

(3) $\frac{3x-2}{7}-\frac{1-4x}{3}=8\frac{4}{21}$

(4) $\frac{1}{2}(5y-3)-\frac{1}{3}(5y-2)=5$

(5) $\frac{3}{7}(7n+4)+\frac{2}{3}(7n-1)=10n+2$

(6) $x(x-1)-x(x-2)=4(x-3)$

8. 解下列各聯立方程式:

(1) $\begin{cases}33A-28B=38\\22A+35B=79\end{cases}$ (2) $\begin{cases}9R-2r=44\\6R-31=r\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3b-5-\frac{2a-b}{4}=\frac{a+7}{5}\\\frac{2a}{3}-\frac{1}{2}+5a-8=\frac{7-5b}{2}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{6-H}{2}-\frac{R+5}{5}=-12\\\frac{1}{3}(12+H)-\frac{1}{9}(R-4)=4\end{cases}$

9. 解下列聯立方程式:

$$\frac{s+t}{8}+\frac{s-t}{6}=5,\quad \frac{s+t}{4}-\frac{s-t}{3}=10.$$

10. 解下列聯立方程式:

$$\frac{5x+6y-7}{2}=\frac{2x+5y+3}{3}=\frac{8-4x+3y}{2}$$

11. 有人代某商搬運玻璃器具 2000 枚,講明如不破損,每十枚結運費銀 8 分,如破損一枚,除扣去那枚的運費外尙須賠銀 2 分;多則按枚數照算. 結果共得運費銀 14.6 圓. 求共破損幾枚?

12. 有一矩形基地,若縱長放寬 5 尺,橫長縮短 7 尺,面積便小去 42 方尺;縱長縮短 5 尺,橫長放寬 7 尺,面積便小去 26 方尺. 求此基地的面積有幾方尺?

第七章

乘法 除法 因數分解

93. 冪的乘法

在第57節,學者已知

$$a^n = \underbrace{aaaa\cdots\cdots a}_{n\text{ 個}}$$

故

$$a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = a^7 = a^{3+4}$$

$$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3\times 2}$$

$$(ab)^3 = ababab = aaabbb = a^3b^3$$

總之:

設 m, n 爲正整數,則

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^nb^n$

〔例〕 $2a^2b \times 3a^3b^2 = 6a^2a^3bb^2 = 6a^5b^3$

習題八五

計算以下各式:

1.	$a^4 \times a^2$	2	$a^5 \times a^3$	3	$a^2 \times a$
4.	$x^8 \times x^7$	5.	$y^2 \times y^8$	6	$k^8 \times k^6$
7.	$(x^4)^2$	8.	$(y^6)^3$	9.	$(P^3)^3$
10.	$(x^2y)^2$	11.	$(ab^3)^4$	12.	$(a^2b^3)^2$
13.	$p^2 \times p^3 \times p^4$	14.	$3x^2 \times 5x^3$	15.	$2x^4 \times (-x^2)$
16.	$7x^2y \times 2x^3y^2$	17.	$(-6ax^3)(-3a^2x)$	18.	$9a^4b \times 3ab^4$
19.	$(-3x^2)^2$	20.	$(-2x^2y)^3$	21.	$(-5x)^2(-2y)$

94. 多項式的乘法

代數式中,各項都沒有某文字爲除數的,叫做某文字的整式. 例如

$$3x^2+4x+5$$

$$x^2+\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}$$

均爲 x 的整式. 但後者就 a 來說便不是整式.

獨項式中文字因數的數,叫做獨項式的次數.例如:

$3xy$,	$5x^2$	二次式
$-2x^3$,	$7xy^2$	三次式

又如 ax^2 一式,就 a 與 x 說,是三次式,單就 x 說,是二次式. 這是把 a 與 3, -2 等數字,同樣當作一個係數看. 這種係數,叫做文字係數,因此,係數 3, -2 等叫做數字係數.

多項式中最高次項的次數,叫做那多項式的次數. 例如:

$3x^2-4x+5$	二次式
$x^3-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}$	三次式
ax^2+bx+c	x 的二次式

故多項式相乘,在計算以前,應先把各多項式,照同一目標,加以整理. 整理的方法有二,例如就多項式 $3x^2-4x+2x^3+5$ 來講,可以整理如下:

(1) $2x^3+3x^2-4x+5$

(2) $5-4x+3x^2+2x^3$

(1)式是照降冪順序整理,(2)式是照昇冪順序整理的.

就一文字整理一式,式中常有不含那文字的項,這叫做絕對項. 上式中的 5, 便是絕對項.

多項式相乘,先照上述任一方法,就某文字加以整理,然後依下面的式樣運算.

〔例 1〕 計算$(3a-2+a^2)(a^2+4-2a)$

$$\begin{array}{l}
a^2+3a-2\\
\underline{a^2-2a+4}\\
a^4+3a^3-2a^2\\
\quad -2a^3-6a^2+4a\\
\qquad\qquad +4a^2+12a-8\\
\hline
a^4+a^3-4a^2+16a-8
\end{array}$$ 答

〔例 2〕 以 $xy+2y^2-x^2$ 乘 $x^2-2xy+3y^2$

$$\begin{array}{l}
x^2-2xy+3y^2\\
\underline{-x^2+xy+2y^2}\\
-x^4+2x^3y-3x^2y^2\\
\quad +x^3y-2x^2y^2+3xy^3\\
\qquad\qquad +2x^2y^2-4xy^3+6y^4\\
\hline
-x^4+3x^3y-3x^2y^2-xy^3+6y^4
\end{array}$$ 答

〔例 3〕 求$(x-3)(x-4)(x-5)$

$$\begin{array}{l}
x-3\\
\underline{x-4}\\
x^2-3x\\
\underline{\quad -4x+12}\\
x^2-7x+12\\
\underline{x-5}\\
x^3-7x^2+12x\\
\underline{\quad -5x^2+35x-60}\\
x^3-12x^2+47x-60
\end{array}$$ 答

(注意) 式的乘法,雖也可以從右面起,與數的乘法一樣. 因爲不像數的乘算有時要併入上位,所以從左面起,比較上便利得多.

習題八六

求以下各題的積:

1. $(a^2+a+2)(a^2+a-2)$ 2. $(x^2+2x-3)(1-2x+x^2)$
3. $(3x^2-2x-1)(x^2-2x+3)$
4. $(a^2-2ab-3b^2)(a^2+b^2+ab)$
5. $(x^3-2x^2-3x-4)(x^2-x+2)$
6. $(5x^3-x^2-2x+1)(2x^2-3x-1)$
7. $(a^2+ab+b^2)(a-b)$ 8. $(x-3)(2x-5)(3x+1)$
9. $(a+b)^3$ 10. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

95. 使用公式的乘法(1)

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
x+b \\
\hline
x^2+ax \\
\quad +bx+ab \\
\hline
x^2+ax+bx+ab \\
=x^2+(a+b)x+ab
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \underline{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

〔例1〕 $(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$

〔例2〕 $(x-3)(x-5)=x^2-8x+15$

〔例3〕 $(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$

〔例4〕 $(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

〔例5〕 $(x-5y)(x+6y)=x^2+xy-30y^2$

習題八七

應用公式計算以下各題的積:

1.	$(x+2)(x+5)$	2.	$(x-2)(x-5)$
3.	$(x-2)(x+5)$	4.	$(x+2)(x-5)$
5.	$(t-8)(t-3)$	6.	$(p-4)(p+5)$
7.	$(y+3)(y+5)$	8	$(y+3)(y-5)$
9.	$(y-5)(y-10)$	10.	$(l-12)(l+10)$
11.	$(n-15)(n-20)$	12.	$(t+25)(t-2)$
13.	$(a+9)(a-6)$	14.	$(k-4)(k-25)$
15.	$(k+9)(k-11)$	16.	$(x^2-8)(x^2-1)$
17.	$(n^2+7)(n^2-12)$	18.	$(1+2a)(1+3a)$
19.	$(1-9b)(1+8b)$	20.	$(1-x)(1-14x)$
21	$(x+3y)(x+5y)$	22.	$(x-8y)(x-5y)$
23.	$(p-20q)(p-5q)$	24.	$(k+18l)(k-20l)$
25.	$(2x+3)(2x+5)$	26.	$(3x-5)(3x-8)$
27.	$(7b+3)(7b+2)$	28.	$(2a-3b)(2a+5b)$

96. 使用公式的乘法(2)

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

中, b 若等於 a, 則

$$(x+a)(x+a)=x^2+(a+a)x+aa$$

$$\therefore \quad \underline{(x+a)^2=x^2+2ax+a^2}$$

再把 $-a$ 代入上式的 a, 則

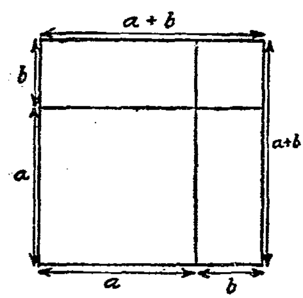
$$\underline{(x-a)^2=x^2-2ax+a^2}$$

〔例1〕 $(x+3)^2=x^2+6x+9$

〔例2〕 $(y-5)^2=y^2-10y+25$

〔例3〕 $(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$

(注意) 初學者最易誤作 $(a+b)^2=a^2+b^2$, 這是大錯. 右邊還有 $+2ab$ 一項,最要注意! 現在再圖解如下,應細細觀察,求以徹底明瞭.



$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

習題八八

應用公式求以下各題的積:

1. $(x+y)^2$	2. $(p+q)^2$	3. $(y-a)^2$
4. $(x-5)^2$	5. $(y+7)^2$	6. $(k-r)^2$
7. $(r+t)^2$	8. $(k+n)^2$	9. $(h-y)^2$

10. $(f+g)^2$ 11. $(3x+1)^2$ 12. $(5x-2)^2$

13. $(3y-7)^2$ 14. $(2x+3y)^2$ 15. $(2b-c)^2$

16. $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2$ 17. $\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2$ 18. $\left(\frac{1}{2}-2x\right)^2$

19. 101^2 20 98^2 21. 505^2

97. 使用公式的乘法(3)

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

中，b 若等於 $-a$，則

$$(x+a)(x-a)=x^2+(a-a)x+a(-a)$$

$$\therefore \quad \underline{(x+a)(x-a)=x^2-a^2}$$

即二數的和與差的積等於各數的平方差。

〔例 1〕 $(x+3)(x-3)=x^2-9$

〔例 2〕 $(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

〔例 3〕 $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{9}$

習 題 八 九

應用公式計算以下各題的積:

1. $(a-x)(a+x)$ 2. $(r+4)(r-4)$

3. $(t+9)(t-9)$ 4. $(p-s)(p+s)$

5. $(y-b)(y+b)$　　6. $(2a+3)(2a-3)$

7. $(3x-4y)(3x+4y)$　　8. $(5p+3q)(5p-3q)$

9. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$　　10. $\left(\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}b\right)\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)$

11. $(4ab-3)(4ab+3)$　　12. $(1+x^2)(1-x^2)$

13. $\left(\frac{a}{2}+2b\right)\left(\frac{a}{2}-2b\right)$　　14. $\left(3x-\frac{y}{3}\right)\left(3x+\frac{y}{3}\right)$

15. $(x-y)(y+x)$　　16. $(2x-5)(5+2x)$

17. $\{(a+b)+5\}\{(a+b)-5\}$　　18. $\{(m+n)-2\}\{(m+n)+2\}$

98. 使用公式的乘法雜例

$$(x+a)(x+b)=x^2(a+b)x+ab$$

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

〔例 1〕 $(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2$

$$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

〔例 2〕 $(a+b+c)(a-b-c)=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$

$$=a^2-(b+c)^2$$

$$=a^2-b^2-2bc-c^2$$

$$=a^2-b^2-c^2-2bc$$

〔例 3〕 $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)=(x^2-a^2)(x^2+a^2)=x^4-a^4$

〔例 4〕 $\overbrace{(2x+\underbrace{3)\,(4x}_{12x}+5)}^{10x}=8x^2+22x+15$

$$\underline{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$$

(注意). 去括號而相乘,叫做展開某式.

習題九十

展開以下各式:

1. $(a+b-c)^2$ 2. $(x-y-z)^2$ 3. $(x^2-x-1)^2$
4. $(x-2y+3)^2$ 5. $(a-b+c)(a+b-c)$
6. $(a+b-c+d)(a+b+c-d)$
7. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
8. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
9. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
10. $(5x+4)(3x+2)$ 11. $(2x-7)(4x+3)$
12. $(3x+5)(2x-3)$ 13. $(3x-5)(2x-3)$
14. $(5x-1)(4x+3)$ 15. $(2x-5)(3x-7)$
16. $(3x+5)(2x-7)$ 17. $(5x-2)(7x+3)$
18. $(6x-5)(7x-1)$ 19. $(2x+5)(6x-13)$

99. 因數分解(1)

> 一個整式 A 若等於其他幾個整式的積,這幾個整式都叫做整式 A 的因數.

例如由乘法的公式,已知

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

則整式 $x+a$, $x-a$ 各爲整式 x^2-a^2 的因數. 所以照着由 x^2-a^2 變做 $(x+a)(x-a)$ 的樣子,把一個整式寫成二個以上整式的積的形式,叫做分解某整式爲因數.

現在先講簡單式的因數分解法.

$$a(x+y+z)=ax-ay+az$$

$$\therefore \quad ax-ay+az=a(x-y+z)$$

如是把 $ax-ay+az$ 分解爲 $a(x-y+z)$ 的形式,叫做括出各項的公因數.

〔例1〕 $x^2+2xy=x(x+2y)$

〔例2〕 $2xy+2y^2+2yz=2y(x+y+z)$

習題九一

分解以下各式的因數:

1. $2x-4$
2. $2a+2x$
3. $2ac-\frac{1}{2}c^2$
4. x^2+xy

5. $4y^2-6xy$　　6. $a-ax$

7. a^2b-2a^3　　8. $6x^2y-9xy^2$

9. $8a^2b-4ab^2$　　10. $25a^2+10a-5$

11. $ax-bx+cx$　　12. $cu+cx+cy$

13. $x^3+2x^2y-xy^2$　　14. $3a+12-9c$

15. $n-3n^2-5n^3$　　16. $a^3x^2+a^2y-a^2$

17. $a^6+a^4x-a^2x^2$　　18. $3abc-6bcd-3bcx$

19. $46\times173-46\times73$　　20. $\frac{22}{7}\times82+\frac{22}{7}\times58$

100. 因數分解(2)

現在再練習括出公因數的稍複雜者.

〔例 1〕 $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$

〔例 2〕 $2x(x+2)-5(x+2)=(x+2)(2x-5)$

〔例 3〕 $x(a+b)-y(b+a)=x(a+b)-y(a+b)$

$$=(a+b)(x-y)$$

〔例 4〕 $x(a-b)-(b-a)=x(a-b)+(a-b)$

$$=(a-b)(x+1)$$

〔例 5〕 $ab+ac+bd+cd=a(b+c)+d(b+c)$

$$=(b+c)(a+d)$$

注意)

$$\boxed{\begin{array}{c}(b+a)=(a+b)\\(b-a)=-(a-b)\end{array}}$$

習題九二

分解以下各式的因數:

1. $a(r-s)+b(r-s)$
2. $ab(x+y)+cd(x+y)$
3. $g(k+l)-h(k+l)$
4. $18(a^2+b^2)-36$
5. $6(u-v)-a(u-v)$
6. $c^2(c+y)+y^2(c+y)$
7. $y(a+b)+y(c+2)$
8. $(a+b)^2-2a(a+b)$
9. $x^2(x-y)^2+x^3(x-y)$
10. $(2a+b)(a+b)-(a+2b)(a+b)$
11. $2(a-2b)^2+6(a-2b)$
12. $3a(c-d)+d-c$
13. $m(x+y)-x-y$
14. $a(p-q)-p+q$
15. $(2a-b)x-(b-2a)y$
16. $3a(x-2y)+2b(2y-x)$
17. $px-p+x-1$
18. $ab-ac+bx-cx$
19. $xy-3y^2-2ax+6ay$
20. $ab+4cd+2bc+2ad$

101. 因數分解(3)

公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

〔例 1〕 $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

〔例 2〕 $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

〔例 3〕 $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$

〔例 4〕 $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

習題九三

分解以下各式的因數:

1. x^2-5x+6	2. a^2+6a+8
3. $x^2+7x+12$	4. x^2-x-12
5. k^2+5k+4	6. $y^2-4y-12$
7. $m^2-6m-16$	8. z^2-6z+5
9. $t^2-4t-21$	10. x^2-x-30
11. $y^2+3y-18$	12. b^2+b-42
13. $k^2+7k-18$	14. $u^2-6u-40$
15. $r^2-8r+12$	16. $k^2-10k+9$
17. $t^2+12t-108$	18 $x^2y^2+6xy-16$
19. $a^2b^2-21ab-72$	20. $12+7a+a^2$
21. $33+14z+z^2$	22. $14+9k+k^2$
23. $2x^2+3xy+y^2$	24. $6a^2+5ab+b^2$
25. $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$	26. $2x^2+3x+1$

102. 因數分解(4)

公 $$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

〔例 1〕 $a^2-4a+4=(a-2)^2$

〔例 2〕 $25x^2+30xy+9y^2=(5x+3y)^2$

〔例 3〕 $4(x-y)^2-12(x-y)+9=\{2(x-y)-3\}^2$

$$=(2x-2y-3)^2$$

習題九四

分解以下各式的因數：(內有不能分解的，要怎樣改正?)

1. $x^2+8x+16$
2. $y^2-10y+25$
3. $4a^2+2a+1$
4. $9x^2-6x+1$
5. $64-16k+k^2$
6. a^2+x^2-2ax
7. $x^2+49-14x$
8. $x^2+2xy-y^2$
9. $25a^2+9b^2-30ab$
10. $-80x+25+64x$
11. $c^2-2+\frac{1}{c^2}$
12. $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}+1$
13. $(a+x)^2-2(a+x)+1$
14. $(m+n)^2+4p(m+n)+4p^2$

補足以下各式中所缺的項使完成二項式的平方，再分解爲因數：

15. $a^2+4a+(\quad)$
16. $1-2x+(\quad)$
17. $x^2+(\quad)+25$
18. $(\quad)-12pq+4q^2$
19. $9y^2+12y+(\quad)$
20. $16x^2-(\quad)+4$
21. $x^2+\frac{1}{4}-(\quad)$
22. $m^2+(\quad)+121$
23. $9s^2-(\quad)+81$
24. $4x^2+36y^2-(\quad)$

103. 因數分解(5)

公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

〔例1〕 $9x^2y^2-16=(3xy+4)(3xy-4)$

〔例2〕 $(a+b)^2-(x-y)^2=(a+b+x-y)(a+b-x+y)$

〔例3〕 $(a+b)^2-4a^2=(a+b+2a)(a+b-2a)$

$$=(3a+b)(b-a)$$

〔例4〕 $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

習 題 九 五

分解以下各式的因數:(內有不能分解的,要想法改正!)

1. $9a^2-49b^2$
2. $16p^2-100q^2$
3. $4x^2-\frac{1}{4}y^2$
4. $25x^2-1$
5. $9+4a^2b^2$
6. $1-64a^2b^2$
7. x^2-8
8. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$
9. $\frac{36}{a^2}-\frac{25}{b^2}$
10. $(x-y)^2+a^2$
11. $4(x-y)^2-1$
12. $a^2-(x+y)^2$
13. $(2x+y)^2-(y-2x)^2$
14. $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$
15. a^4-1
16. x^4-y^4
17. 100^2-98^2
18. $\frac{22}{7}(150^2-143^2)$

104. 因數分解的雜例

〔例 1〕 $x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)$

〔例 2〕 $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)$

$$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

〔例 3〕 $x^2+2xy+y^2-a^2=(x+y)^2-a^2$

$$=(x+y+a)(x+y-a)$$

〔例 4〕 $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$

(注意) 例 4 一類的式子,應將分解所得的結果用乘法驗算是否等於原式.

習 題 九 六

分解以下各式的因數:

1. $a^3-2a^2b+ab^2$
2. $3x^2-12x+12$
3. m^4-10m^2+9
4. a^4-29a^2+100
5. $4a^2-x^2-6x-9$
6. $p^2+2pq+q^2-a^2+2ab-b^2$
7. $x^2+4xy+4y^2-9a^2+6ab-b^2$
8. $(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2$
9. $(2a-4b)(x+2y)-(6b-3a)(2x-y)$
10. $ax-ay+bx+cy-cx-by$
11. x^8-1
12. x^8-256
13. $2x^2-x-3$
14. $3y^2+8y+4$
15. $5x^2+9x-2$
16. $2+x-3x^2$
17. $2x^2+7x+3$
18. $2x^2-7x+6$
19. $5x^2+16x+3$
20. $2x^2-11x+5$
21. $3x^2-14xy-24y^2$
22. $6x^2-7xy+2y^2$

105 冪的除法

〔I〕 $$a^5\div a^3=a^3\cdot a^2\div a^3=a^2$$

一般的,設 m, n 爲正整數,則

$$\underline{a^m\div a^n=a^{m-n}}$$

應用上式計算下式,則

$$a^3\div a^3=a^{3-3}=a^0$$

凡指數原來不能不是正整數,所以 a^0 本是毫無意義的記號;可是因爲

$$a^3\div a^3=1$$

故認定 $$\underline{a^0=1}$$

但 a 爲不等於 0 的數.

再 $$a^3\div a^5=a^{3-5}=a^{-2}$$

負指數本來也沒有意義,祇因

$$a^3\div a^5=\frac{a^3}{a^5}=\frac{a^3}{a^3\cdot a^2}=\frac{1}{a^2}$$

故 a^{-2} 即表示 $\frac{1}{a^2}$,因此,一般的認定

$$\underline{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$$

〔II〕 $$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{aaa}{bbb}=\frac{a^3}{b^3}$$

所以,一般的,認定

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

〔例 1〕 $6a^8\div3a^5=2a^3$

〔例 2〕 $(-15x^5y^2)\div(-3x^3y^3)=5x^2y^{-1}=\frac{5x^2}{y}$

〔例 3〕 $\left(\frac{-a^2}{b}\right)^3=\frac{(-a^2)^3}{b^3}=-\frac{a^6}{b^3}$

現再把上述各式,歸集於下:

$$\boxed{\begin{gathered} a^m\div a^n=a^{m-n}\\ a^0=1\\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\end{gathered}}$$

(注意) $a^3\cdot a^2$ 與 $a^3\times a^2$ 同,$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$ 與 $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ 同. 此後常用「·」以代「×」,須加意. 但數字與數字之間,仍以不用為佳.

習題九七

計算以下各題:

1. $a^8\div a^7$　　2. $x^{10}\div x^5$　　3. $y^5\div y^8$

4. $b^4\div b^4$　　5. $4a^3\div 2a$　　6. $2x\div 2x^3$

7. $6x^3y^2\div 3xy^3$　　8. $12x^5y^4\div 4x^2y^2$

9. $12b^8c^2 \div (-6b^2)$

10. $(-16a^4y^4) \div (-4a^2y^2)$

11. $\dfrac{a^5b^4}{-a^3b}$

12. $\left(\dfrac{-a}{b^2}\right)^2$

13. $\dfrac{-12a^2b^3}{-3ab^2}$

14. $\dfrac{(-a)^5}{-a}$

15 $(-3)^{-2}$

16. $-3a^{-3}$

17. $10x^0$

18. $(-5x)^0$

19. $(x+y)^4 \div (x+y)^2$

20. $\dfrac{14(a-b)^5}{-7(a-b)^2}$

106. 多項式的除法

〔例 1〕 $ax+ay$ 除以 $x+y$.

〔解〕 $(ax+ay) \div (x+y) = a(x+y) \div (x+y) = a$

〔例 2〕 $a^2-2ab+b^2$ 除以 $a-b$.

〔解〕 $(a^2-2ab+b^2) \div (a-b) = (a-b)^2 \div (a-b) = a-b$

〔例 3〕 求$(x^4-y^4) \div (x-y)$的商.

〔解〕
$$\begin{aligned}(x^4-y^4) \div (x-y) &= (x^2+y^2)(x^2-y^2) \div (x-y)\\ &= (x^2+y^2)(x+y)(x-y) \div (x-y)\\ &= (x^2+y^2)(x+y)\end{aligned}$$

〔例 4〕 x^2-x-12 除以 $x-4$.

〔解〕 $(x^2-x-12) \div (x-4) = (x-4)(x+3) \div (x-4) = x+3$

〔例 5〕 $x^4-x^3-8x^2+x+1$ 除以 x^2+2x-1.

本題不能簡單地分解因數,所以照下法演算較爲

便利．如有須整理的,應先將各式均依降冪順序(或昇冪順序)加以整理．

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-3x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+2x-1 & x^4-x^3-8x^2+x+1 \\
 & x^4+2x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & -3x^3-7x^2+x \\
 & -3x^3-6x^2+3x \\ \cline{2-2}
 & -x^2-2x+1 \\
 & -x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

答　x^2-3x-1

習題九八

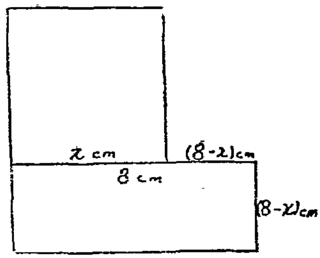
計算以下各題:

1. $(x^2+5x+6)\div(x+3)$　　2. $(a^2-12a+36)\div(a-6)$
3. $(y^2+2y-15)\div(y+5)$　　4. $(x^2-4x+4)\div(x-2)$
5. $(9x^2-4y^2)\div(3x+2y)$　　6. $(1-a^3)\div(1+a^2)$
7. $(k^3-40k-63)\div(k-7)$　　8. $(x^3+4x^2+5x+2)\div(x+2)$
9. $(ax-2ay+az)\div(x-2y+z)$
10. $(2y^3+5y^2-2y+3)\div(2y^2-y+1)$
11. $(a^4-a^3-12a^2-7a+5)\div(a^2-3a-5)$
12. $(4x^4+4x^3+3x^2+13x-4)\div(2x^2+3x-1)$
13. $(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\div(a+b+c)$
14. $(a^2-ab-ac+bc)\div(a-c)$
15. $(x^4+x^2y^2+y^4)\div(x^2+xy+y^2)$

107. 簡單的二次方程式

設有一題:『長 8 cm 的直線,分為兩段,今以一段為邊的正方形的面積,和他段與全長所包矩形的面積相等.』 解時,設一段長 x cm,他段長 $(8-x)$ cm,則據題意,得方程式如下:

$$x^2=8(8-x)$$



除去括號,把所有各項都移集於左邊加以整理,得

$$x^2+8x-64=0$$

如是,

> 方程式中的各項盡集在一邊,就未知數而言,這邊成為二次式的方程式,叫做二次方程式.

故上述方程式為關於 x 的一元二次方程式.

一元二次方程式的簡單者,可用因數分解法來解.例如:

$$x^2-5x+6=0$$

左邊的二次三項式分解為因數,則

$$(x-2)(x-3)=0$$

因二式的積爲 0, 則二式中至少要有一式爲 0. 即有一式爲 0, 則積便爲 0.

故 $x-2=0$ 或 $x-3=0$

即 $x=2$ 或 $x=3$

〔例 1〕 解 $x^2-x-30=0$

〔解〕
$$x^2-x-30=0$$
$$(x+5)(x-6)=0$$
$$\therefore\ x+5=0 \quad 或 \quad x-6=0$$
$$\therefore\ x=-5 \quad 或 \quad x=6$$

答 $x=-5$ 或 6

〔驗〕 設 $x=-5$, 則
$$(-5)^2-(-5)-30=25+5-30=0$$
設 $x=6$, 則
$$6^2-6-30=36-6-30=0$$

〔例 2〕 解 $x^2-6x+9=0$

〔解〕
$$x^2-6x+9=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$\therefore\ (x-3)=0$$
$$\therefore\ x=3$$

〔驗〕 設 $x=3$, 則
$$3^2-6\times3+9=9-18+9=0$$

答 $x=3$ (等根)

(注意) $x=3$,與一次方程式$x-3=0$的根不同,這是二次方程式$(x-3)^2=0$的根,可說是含有兩重的一次方程式$x-3=0$的根;這叫做二次方程式有二重根或等根.

習題九九

解以下各方程式:

1. $x^2+x-6=0$
2. $x^2-4=0$
3. $x^2-6x+8=0$
4. $x^2-x-20=0$
5. $y^2+7y+12=0$
6. $k^2-k-12=0$
7. $p^2-6p+5=0$
8. $t^2+4t+4=0$
9. $x^2-2x-48=0$
10. $x^2+2x-120=0$
11. $y^2-13y+30=0$
12. $x^2-29x+100=0$
13. $t^2-12t-45=0$
14. $x^2-x+\frac{1}{4}=0$
15. $x^2-5ax+6a^2=0$
16. $x^2-kx-12k^2=0$
17. $x(7-x)=0$
18. $8x-x^2=0$
19. $x^2+25x=0$
20. $5k^2+4k=0$

雜　　題

1. 試列舉關於羃的計算的公式.

2. 試列舉乘法和因數分解的公式.

3. 計算以下各題:

(1) $x^4\times x^3\times x$　　(2) $y^5\times y^2\div y^4$

(3) $(a^2)^3\div a^6$　　(4) $(n^3)^2\times n^2$

(5) $(x^2y^3)^2\div xy$　　(6) $8a\,b\times 4a^2b^2$

(7) $(27p^3q)\div(-9pq)$　　(8) $(-3x)^0$

(9) $\left(\frac{3ab^2}{4xy}\right)^2$　　(10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

4. 分解以下各式的因數:

(1) x^2-4x+4　　(2) x^2-4x+3

(3) x^2-144　　(4) $9a^2+12ab+4b^2$

(5) $(a-b)x+(b-a)y$　　(6) $x^2+ax-bx-ab$

(7) $(x-1)^2-2x+2$　　(8) $(2x+3)^2-4x^2$

(9) $2x^2+x-6$　　(10) $3x^2-16x+5$

5. 計算以下各式:

(1) $(2x-3)(3x-4)(4x-5)$

(2) $(3x^2-5x+6)(2x^2+7x-8)$

(3) $(8x^4+14x^3-6x^2+17x-15)\div(2x^2+4x-3)$

(4) $(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

6. 仿照$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的說明圖的式樣,畫圖說明下式:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

7 畫出$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$的說明圖.

8 解以下各方程式:

(1) $x^2-7x+6=0$ (2) $x^2+11x-60=0$

(3) $2x^2-7x+6=0$ (4) $5x^2+16x+3=0$

(5) $4x^2-4x+1=0$ (6) $x^2-4=0$

(7) $9x^2-25=0$ (8) $x^2-23x+120=0$

(9) $3x^2-15x=0$ (10) $x-10x^2=0$

9. 分解$(a^2+b)^2-4a^2b^2$為因數.

10 分解$x^4+x^2y^2+y^4$為因數.

11 分解a^4+a^2+1為因數.

12. 計算$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

13. 應用$(a+b)^2$的公式計算$(a+b+c+d)^2$

14. 分解以下各式的因數:

(1) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2$ (2) $\frac{m^2}{a^2}-\frac{2mn}{ac}+\frac{n^2}{c^2}$

(3) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$ (4) $9a^2+9ab-10b^2$

15. 務用簡便的方法來計算以下各式:

(1) 25^2-24^2 (2) 32^2-30^2

(3) 64^2-36^2 (4) 998^2-4

(5) 205^2 (6) 495^2

第八章

分數式

108. 倍數 約數

> 整式 C 若爲整式 A 的因數,則 C 叫做 A 的約數, A 叫做 C 的倍數.
>
> 若 C 爲 A 的約數,同時又爲他一整式 B 的約數,則 C 叫做 A, B 的公約數;公約數中次數最大的,叫做最大公約數. 慣例,用 $G.C.M.$ 作最大公約數的簡號.

例如 $12x^2y^3$ 與 $18x^3y^2$ 的公約數,有

$$x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^2y,\ xy^2,\ x^2y^2$$

等,但最大公約數爲

$$x^2y^2$$

因爲 x^2y^2, 在各公約數中次數爲最大的緣故. 普通,係數的最大公約數,也應併寫在前面,如

$$6x^2y^2$$

求獨項式的最大公約數時,先把各式中公有文字提出,再在他們的上面,分別添寫各自的最小指數便得.

求多項式的最大公約數時,先把各式分解爲因數,再把各因數當作一個文字,照上法求之.

整式 A 若爲整式 B 的倍數,同時又爲他一整式 C 的倍數,則 A 叫做 B, C 的公倍數;公倍數中次數最小的,叫做最小公倍數. 慣例,用 L. C. M. 作最小公倍數的簡號.

例如 $6x^2y$ 與 $4xyz$ 的公倍數,有:

$$12x^2yz,\ 24x^3y^2z,\ 36x^5y^3z^2,\ \cdots\cdots$$

等無數存在. 但他們的最小公倍數,祇是

$$12x^2yz$$

前面的12,是各係數的最小公倍數.

求獨項式的最小公倍數時,先把各式中各個不同的文字提出連寫,再在他們的上面分別添寫各自的最大指數便得.

求多項式的最小公倍數時,先把各式分解爲因數,再把各因數當作一個文字,照上法求之.

〔例1〕 求 $5(a+b)^2(x-y)^3$ 與 $10(a+b)^4(x-y)^2$ 的最大公約數及最小公倍數.

〔解〕 $$\left.\begin{aligned} G.C.M. &= 5(a+b)^2(x-y)^2 \\ L.C.M. &= 10(a+b)^4(x-y)^3 \end{aligned}\right\} \text{答}$$

〔例2〕 求 a^2+4a+3 與 a^2+5a+4 的最大公約數及最小公倍數.

〔解〕 $a^2+4a+3=(a+1)(a+3)$

$a^2+5a+4=(a+1)(a+4)$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad G.C.M. &= a+1 \\ L.C.M. &= (a+1)(a+3)(a+4) \end{aligned}\right\} \text{答}$$

(注意) 最大公約數有時也稱做最高公因數($H.C.F.$);最小公倍數有時也稱做最低公倍數($L.C.M.$).

習題一〇〇

求以下各式的最大公約數及最小公倍數:

1. $4x^3y,\ 6xy^4$ **2.** $8a^2b^2,\ 12ab^3$

3. $4abcx,\ 6bcy$ **4.** $2a^3b^4c,\ 4a^4b^2$

5. $(x+y)^2(x-y),\ (x+y)(x-y)^2$

6. $x^2(x+2),\ x(x-2)(x+2)^2$

7. $a^2-16,\ a^2+8a+16$ **8.** $x^2-3x+2,\ x^2+2x-3$

9. $x^2+7x+12,\ x^2+8x+15$

10. $x^3-5x^2-6x,\ x^3-x,\ x^4+2x^3+x^2$

109. 分數式　約分

譬如　$\frac{a-b}{a+b}$,　$\frac{5}{x-3}$,　$\frac{x-3}{x^2+2x-8}$,

> 一式或一數A被含有某文字的式子B除得的商,寫作$\frac{A}{B}$形時,這叫做關於某文字的分數式.

A叫做分子,B叫做分母,完全與數的方面一樣.分子,分母也總稱做項.

分數式的計算與算術方面所學的分數計算,完全相同.

分數式$\frac{A}{B}$的兩項,如有公約數,則把這公約數除兩項,可使分數式簡化.例如A與B的公約數爲C,

設　$$A=A'C,\qquad B=B'C$$

則　$$\frac{A}{B}=\frac{A'C}{B'C}=\frac{A'}{B'}$$

這種簡化的法子,叫做約分.

兩項中沒有公約數的分數式,叫做最簡分數式.凡關於式的計算,若用分數式表示結果,均須約分,化做最簡分數式.

分數式的兩項,用他們的最大公約數來約,便得約成最簡分數式.

〔例1〕 簡約$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$

〔解〕 $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{a+b}$ 答

〔例2〕 簡約$\frac{x^2-6x+9}{x^2+5x-24}$

〔解〕 $\frac{x^2-6x+9}{x^2+5x-24}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+8)}=\frac{x-3}{x+8}$ 答

〔例3〕 簡化$\frac{8+2x-x^2}{x^2+2x-24}$

〔解〕 $\frac{8+2x-x^2}{x^2+2x-24}=\frac{-(x^2-2x-8)}{x^2+2x-24}$

$$=-\frac{(x+2)(x-4)}{(x+6)(x-4)}=-\frac{x+2}{x+6}$$

將整式C乘分數式$\frac{A}{B}$,祗須把C乘他的分子.

$$\frac{A}{B}\times C=\frac{AC}{B}$$

〔例4〕 試將$(x-2)(x+3)$乘等式$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+5}{x+3}$的兩邊,

〔解〕 $$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+5}{x+3}$$

將$(x-2)(x+3)$乘上式的兩邊,則

$$\frac{(x+1)(x-2)(x+3)}{x-2}=\frac{(x+5)(x-2)(x+3)}{x+3}$$

$$\therefore\quad (x+1)(x+3)=(x+5)(x-2)$$

〔例5〕 試去等式 $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{4}{(x+3)(x+1)}$ 的分母.

〔解〕 $$\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{(x+3)(x+1)}$$

用分母的最小公倍數 $(x-1)(x+1)(x+3)$ 乘兩邊,則

$$\left(\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}\right)(x-1)(x+1)(x+3)=\frac{4(x-1)(x+1)(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

即 $$\frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{x+3}+\frac{3(x-1)(x+1)(x+3)}{x-1}$$

$$=\frac{4(x-1)(x+1)(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

將各分數約分,得

$$(x-1)(x+1)+3(x+1)(x+3)=4(x-1)$$

(注意) 分數式有時也簡稱做分數.

習題一〇一

試將下列分數式約分:

1. $\dfrac{3x^3y^2}{6x^2y^3}$　　2. $\dfrac{8a^4b^3c}{10ab^3c^4}$　　3. $\dfrac{a^{m+1}b^n}{a^{m-1}b^{n+2}}$

4. $\dfrac{18(p+q)^5}{24(p+q)^3}$　　5. $\dfrac{4a}{2a^2-2ab}$　　6. $\dfrac{a^2-ax}{a^2-x^2}$

7. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$　　8. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$　　9. $\dfrac{a^2+14a+49}{a^2+3a-28}$

10. $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2}$　　11. $\dfrac{x^2-xy-cy+cx}{x^2+bx-xy-by}$　　12. $\dfrac{2-x}{x^2-5x+6}$

13. $\dfrac{6+x-x^2}{6-5x+x^2}$　　**14.** $\dfrac{a^2-(b+c)^2}{b^2-(c-a)^2}$　　**15.** $\dfrac{y^2-y+20}{25-y^2}$

簡化以下各式:

16. $\dfrac{x+2}{x-3}\times(x-1)(x-3)$　　**17.** $\dfrac{2}{x+5}\times(x-4)(x+5)(x+7)$

18. 試將$(x-3)(x-2)$乘$\dfrac{x+5}{x-3}=\dfrac{x+6}{x-2}$的兩邊.

19. 試將$(x-1)(x+1)(x+2)$乘$\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$的兩邊.

20. 去$\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{x-16}{x+5}$的分母.

21. 去$\dfrac{y+3}{y-4}=\dfrac{y+6}{y-5}$的分母.

22. 去$\dfrac{1}{2(x-2)}+\dfrac{5}{3(x+1)}=\dfrac{4}{x-2}$的分母.

23. 去$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{1-x}=0$的分母.

24. 試直捷寫出$\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{x-4}{x+2}$的分母去了後的結果.

25. 試直捷寫出$\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{5}{x+1}$的分母去了後的結果.

26. 試直捷寫出$\dfrac{y+4}{y-7}-\dfrac{y+1}{y+5}=\dfrac{y+6}{(y-7)(y+5)}$的分母去了後的結果.

110. 分數方程式

含有關於未知數的分數式的方程式,叫做分數方程式.

例如
$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-4}{x-2}$$
爲分數方程式. 以前所見的方程式,都是不含關於未知數的分數式的,對於分數方程式而言,這便叫做整方程式.

解分數方程式時,與從前所學形式如
$$\frac{x+1}{3}=\frac{x-3}{4}$$
的方程式的解法相同;先去分母化作整方程式,然後再解. 所應特加注意的,是:

分數式,分母的値爲 0 時,是沒有意義的. 因此,上述的方程式,須得假定各分數式的分母,均不爲 0,即
$$(x-1)(x-2)\neq 0$$
方有意義. 所以最後所得未知數的各値中,祇有不違反這種假定的方是根,否則便不是根.

(注意) 上式中的'$\neq$'是'不等'的記號.

〔例1〕 解$\dfrac{3x-4}{2x-3}=\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

〔解〕
$$\frac{3x-4}{2x-3}=\frac{3x-2}{2x+1}$$

設$(2x-3)(2x+1)\neq 0$,先去分母,則

$$(3x-4)(2x+1)=(3x-2)(2x-3)$$
$$6x^2-5x-4=6x^2-13x+6$$
$$8x=10$$
$$\therefore\quad x=\frac{5}{4}$$

因x的值能使$(2x-3)(2x+1)$爲0的,祗有$x=\dfrac{3}{2}$與$x=-\dfrac{1}{2}$,所以$x=\dfrac{5}{4}$不違反假定.故$x=\dfrac{5}{4}$是根.

答 $x=\dfrac{5}{4}$

〔例2〕 解$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{8}{(x-1)(x+2)}=0$.

〔解〕
$$\frac{x}{x-1}-\frac{8}{(x-1)(x+2)}=0$$

設$(x-1)(x+2)\neq 0$而去分母,則

$$x(x+2)-8=0$$
$$x^2+2x-8=0$$
$$(x+4)(x-2)=0$$
$$\therefore\quad x=-4\text{ 或 }2$$

$x=-4$,或$x=2$,都不違背$(x-1)(x+2)\neq 0$的假定.所以都是根.

答 $x=-4$或2

〔例 3〕 解 $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x^2+2x-3}$

〔解〕
$$\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{(x+3)(x-1)}$$

設 $(x+3)(x-1)\neq 0$ 而去分母,則

$$x-1+3(x+3)=4$$
$$4x=-4$$
$$\therefore\quad x=-1$$

$x=-1$ 不違背 $(x+3)(x-1)\neq 0$ 的假定.

答　$x=-1$

〔驗〕 左邊 $=\frac{1}{2}+\frac{3}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$

右邊 $=\frac{4}{1-2-3}=\frac{4}{-4}=-1$

習題一〇二

解下列各方程式:

1. $\frac{x}{x+5}=\frac{1}{2}$
2. $\frac{y}{y+2}=\frac{3}{2}$
3. $\frac{x-2}{x+3}=\frac{3}{8}$
4. $\frac{6}{5x}=\frac{-2}{x-3}$
5. $\frac{y-1}{y+1}=\frac{y+3}{y+10}$
6. $\frac{k-3}{k+5}=\frac{k-2}{k+2}$
7. $\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-4}{x+2}$
8. $\frac{2x-3}{3x-2}=\frac{3x-2}{2x-3}$

9. $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{3-x}=\frac{3}{x^2-9}$ 10. $x+\frac{x-3}{x+1}=0$

11. $\frac{y+4}{y-7}-\frac{y+1}{y+5}=\frac{y+6}{y^2-2y-35}$

12. $\frac{n+5}{n-8}-\frac{n+2}{n+6}=\frac{7n+3}{n^2-2n-48}$

13. $\frac{x+2}{x-7}-\frac{x+4}{x+10}=\frac{9x+7}{x^2+3x-70}$

14. $\frac{2x}{x+5}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}+\frac{2x}{x+3}$

15. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$ 16. $\frac{x}{x-2}-\frac{3x+1}{x-1}=\frac{2}{2-x}$

111. 聯立方程式

〔例1〕 解下列聯立方程式:

$$\frac{3x}{2y}=4,\quad \frac{5}{2x+3y}=\frac{12}{5}$$

〔解〕
$$\begin{cases}\frac{3x}{2y}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \frac{5}{2x+3y}=\frac{12}{5} \cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

設 $y\neq 0$, 由(1)得

$$3x-8y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

設 $2x+3y\neq 0$, 由(2)得

$$24x+36y=25 \cdots\cdots\cdots (2')$$

8倍(1′),由(2′)減之,得

$$100y=25$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{4}$$

把 y 的值代入(1′),得

$$3x-2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{2}{3}$$

$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{4}$ 時, y, $2x+3y$ 都不為0.

答　$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{4}$

〔例2〕 解下列聯立方程式:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=8,\quad \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=3$$

〔解〕

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=8\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=3\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

2倍(2),與(1)相加,

$$\frac{7}{x}=14$$

$$7=14x$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{2}$$

代入(1),則

$$2+\frac{2}{y}=8$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{3}$$

$x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ 時,分母 x, y 都不爲 0.

答 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$

習題一〇三

解下列各聯立方程式:

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}\\ 4x-3y+6=0\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{4}\\ \dfrac{x-2}{y+1}=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y-1}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3x+y}{3x-y}=14\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{y}=29\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{y}=2\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{3y}=2\\ \dfrac{1}{3x}+\dfrac{2}{3y}=2\dfrac{2}{3}\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{2}{3x}+\dfrac{5}{4y}=\dfrac{7}{12}\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{3y}=\dfrac{32}{15}\end{cases}$

112. 應用問題

〔例〕 有一分數,若分母加 1,便等於$\frac{1}{2}$,若由分子減 3,便等於$\frac{1}{3}$. 求此分數.

〔解〕 設分子爲 x, 分母爲 y, 則所求的分數可用 $\frac{x}{y}$ 表示. 依據題意得下面的方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x-3}{y}=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

假定 $y+1\neq0$, $y\neq0$ 除去各式的分母,則

由(1),得 $2x-y=1$

由(2),得 $3x-y=9$

解之,得 $x=8$, $y=15$

這兩個值不背 $y+1\neq0$, $y\neq0$ 的假定. 所以所求的分數爲$\frac{8}{15}$.

〔驗〕 $$\frac{8}{15+1}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{8-3}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

答 $\frac{8}{15}$

習題一〇四

1. 有一分數,分子分母的差爲18,簡約之便爲$\frac{2}{3}$.求此分數爲何?

2. 甲乙二人合作,在一豫定時間內可成的一事.那事的一半,歸甲獨作,可快1小時,歸乙獨作,須多費2小時.問二人合作那事的一半須幾小時?

3. 甲乙兩港相隔120浬,某輪由甲港向乙港航行,在距乙港12浬的地方,機器發生障礙,因而速度減慢10節,繼續航行方達目的地.結果這次航海所需的時間,和速度減小4節,航行同一航程所需的時間相等.求原來的速度多少?

4. 一船往來於某河,逆行3粁所需的時間和順行5粁所需的時間相等.若此船在靜水中每時能行12粁,則河水的流速每時幾何?

5. 旅行某距離的地方,若每時行程增加9公里,祇須現在所費時間的5分之4,便能抵達;若每時行程減少9公里,則較現在所費時間要多2小時半.求此距離有若干公里?

6. 甲乙二人同時由兩地相向出發,經5小時而相會.若甲每時走快2 Km.乙早1小時出發,或乙每

時走慢 2 Km 甲遲 1 小時出發,仍可於原來相會的地點相會. 求兩地間的距離.

113. 通分

凡分數式,他的兩項乘以同式(值不爲 0 的),其值不變. 卽:

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$$

因此,分母不同的二個以上的分數式,若用適當的式子乘兩項,就可變形爲同分母的分數式. 這樣的變形,叫做將分數式通分.

通分時,用各分數式分母的最小公倍數作分母,最爲簡單. 這樣的演算,叫做通分爲最小公分母. 將各分數通分爲最小公分母時,應先把各分數化作最簡分數.

〔例1〕 試將 $\frac{c}{2ab}$, $\frac{b}{3ca}$ 通分.

〔解〕 分母的最小公倍數是 $6abc$. 故得

$$\frac{3c^2}{6abc},\ \frac{2b^2}{6abc}$$

〔例2〕 試將 $\frac{1}{x-1}$, $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{x-2}{x^2+3x+2}$ 通分.

〔解〕 將分母分解爲因數,可知最小公分母爲

$$(x+1)(x-1)(x+2)$$

故
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{x-1}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}\\
&\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}\\
&\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\frac{x-2}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}
\end{aligned}\right\}\text{答}$$

〔例 3〕 試將$\frac{1}{(x-3)(x-1)}$, $\frac{2}{(1-x)(x+2)}$, $\frac{3}{(3-x)(2+x)}$通分.

〔解〕 先就分母的各因數,把項的順序加以整理,

則 $(1-x)(x+2)=-(x-1)(x+2)$

$(3-x)(2+x)=-(x-3)(2+x)=-(x-3)(x+2)$

於是最小公分母爲$(x-1)(x-3)(x+2)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
&\frac{2}{(1-x)(x+2)}=\frac{-2}{(x-1)(x+2)}=-\frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
&\frac{3}{(3-x)(2+x)}=\frac{-3}{(x-3)(x+2)}=-\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+2)}
\end{aligned}\right\}\text{答}$$

〔例 4〕 將$\frac{x-2}{x^2+x-6}$, $\frac{x-2}{x-4}$, $\frac{1}{x+1}$通分.

〔解〕 先將各分母分解爲因數,再行約分,可知最小公分母爲

$$(x+1)(x+2)(x+3).$$

故 $$\left.\begin{aligned}\frac{x-2}{x^2+x-6}&=\frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ \frac{x-2}{x^2-4}&=\frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\\ \frac{1}{x+1}&=\qquad\qquad\qquad\qquad\quad=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}\end{aligned}\right\}\text{答}$$

習題一〇五

試將以下各組分數通分:

1. $\frac{3}{x}, \frac{5}{3x}$

2. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$

3. $\frac{3z}{4x^2y}, \frac{2z}{6xy^2}$

4. $\frac{3x}{2a^2bc}, \frac{2y}{3b^2c}, \frac{z}{4b^3c^2}$

5. $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x-y}{x+y}$

6. $\frac{x+y}{y-x}, \frac{y-x}{x+y}$

7. $\frac{1}{a-b}, \frac{-2}{b-a}$

8. $\frac{x}{ab+ac}, \frac{y}{b^2+bc}$

9. $\frac{2}{x^2-y^2}, \frac{1}{y-x}$

10. $\frac{b}{m+n}, \frac{a}{m^2-n^2}$

11. $\frac{x+3}{x-3}, \frac{x^2+9}{x^2-9}, \frac{x-3}{x+3}$

12. $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$

13. $\frac{3}{x-1}, \frac{2(x-1)}{x^2-5x+4}, \frac{5(x-2)}{x^2-5x+6}$

14. $\frac{x}{(x-y)(x-z)}, \frac{y}{(z-y)(x-z)}$

15. $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}, \frac{ac}{(b-c)(b-a)}, \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$

114. 分數式的加減法

同分母的分數式相加減時,祇須將分子加減所得的結果作分子,公有的分母作分母,造成一個新分數式便得. 即

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A}}$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{B}{A}-\frac{C}{A}=\frac{B-C}{A}}$$

異分母的分數式相加減時,可先行通分,再照上法運算.

由許多分數式組成的式子,把他變形,化作一個最簡分數式,叫做簡化.

〔例 1〕 簡化 $\frac{2x+y}{x(x-y)}+\frac{x-4y}{x(x-y)}$

〔解〕 $\frac{2x+y}{x(x-y)}+\frac{x-4y}{x(x-y)}=\frac{2x+y+x-4y}{x(x-y)}$

$$=\frac{3x-3y}{x(x-y)}$$

$$=\frac{3(x-y)}{x(x-y)}$$

$$=\frac{3}{x}\quad \text{答}$$

〔例 2〕 簡化 $\frac{2a}{a^2-4b^2}-\frac{1}{a+2b}$

〔解〕 $\frac{2a}{a^2-4b^2}-\frac{1}{a+2b}=\frac{2a}{(a+2b)(a-2b)}-\frac{a-2b}{(a+2b)(a-2b)}$

$$=\frac{a+2b}{(a+2b)(a-2b)}$$

$$=\frac{1}{a-2b}\quad 答$$

〔例 3〕 簡化$\frac{a}{a-2b}+\frac{2b}{2b-a}$

〔解〕 $\frac{a}{a-2b}+\frac{2b}{2b-a}=\frac{a}{a-2b}+\frac{-2b}{a-2b}$

$$=\frac{a-2b}{a-2b}$$

$$=1\quad 答$$

〔例 4〕 簡化$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}$

〔解〕 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}$$

$$=\frac{2(1+x^2+1-x^2)}{1-x^4}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}\quad 答$$

習題一〇六

簡化以下各式:

1. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$　　2. $\frac{a-1}{3}-\frac{a+1}{5}$

3. $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$　　4. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$

5. $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}$　　6. $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}$

7. $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2a-b}-\frac{3a}{4a^2-b^2}$　　8. $\frac{a(a+b)}{a-b}-\frac{5ab-a^2}{b-a}$

9. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$

10. $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}-\frac{2x}{x^2+y^2}$　　11. $\frac{x}{1-3x}-\frac{x}{1+3x}-\frac{18x^2}{9x^2-1}$

115. 分數式的乘除法

分數式的乘除,與數的乘除相同,其法如下:

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

A與B都是分數式,或其中之一是分數式,則$A\div B$也有用分數形$\frac{A}{B}$表示的. 這樣的分數式叫做繁分數式. 例如

$$\frac{\frac{4}{x}+2}{x+\frac{2}{x}+3}$$

就是繁分數式.

〔例 1〕　簡化 $\dfrac{4a^3b}{9x^2y^2}\times\dfrac{3xy^3}{8a^2b^2}$

〔解〕　$\dfrac{4a^3b}{9x^2y^2}\times\dfrac{3xy^3}{8a^2b^2}=\dfrac{a}{3x}\times\dfrac{y}{2b}=\dfrac{ay}{6bx}$　答

〔例 2〕　簡化 $\dfrac{5x^2y^3}{6a^5}\div\dfrac{10x^2y}{9a^3}$

〔解〕　$\dfrac{5x^2y^3}{6a^5}\div\dfrac{10x^2y}{9a^3}=\dfrac{5x^2y^3}{6a^5}\times\dfrac{9a^3}{10x^2y}=\dfrac{y^2}{2a^2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3y^2}{4a^2}$ 答

〔例 3〕　簡化 $\dfrac{a^2-1}{a^2+3a-10}\times\dfrac{a^2+5a}{ab-b}\div\dfrac{a^2+a}{ab-2b}$

〔解〕　$\dfrac{a^2-1}{a^2+3a-10}\times\dfrac{a^2+5a}{ab-b}\div\dfrac{a^2+a}{ab-2b}$

$$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a+5)(a-2)}\times\frac{a(a+5)}{b(a-1)}\times\frac{b(a-2)}{a(a+1)}$$

$=1$　答

〔例 4〕　簡化 $\dfrac{\dfrac{4}{x}+2}{x+\dfrac{2}{x}+3}$

$$\frac{\dfrac{4}{x}+2}{x+\dfrac{2}{x}+3}=\frac{\dfrac{4+2x}{x}}{\dfrac{x^2+2+3x}{x}}$$

$$=\frac{2(x+2)}{x}\div\frac{(x+1)(x+2)}{x}$$

$$=\frac{2(x+2)}{x}\times\frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

$=\dfrac{2}{x+1}$　答

習題一〇七

試簡化以下各式:

1. $\dfrac{4a^2}{b^2c^2}\times\dfrac{3b^2}{ca}\times\dfrac{c^2}{6ab}$

2. $\dfrac{8a^4}{b^2c^2}\div\dfrac{2a^2}{bc}$

3. $\dfrac{2x^2}{yz}\times\dfrac{3y^2}{zx}\div\dfrac{6xy}{z^2}$

4. $\dfrac{1}{ax}\div\dfrac{1}{by}\div\dfrac{b}{a}$

5. $\dfrac{x^2+3x+2}{x+3}\times\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$

6. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-4y^2}\div\dfrac{xy+y^2}{x^2+2xy}$

7. $\dfrac{a+b}{a-b}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

8. $\dfrac{a+5}{a+4}\div\dfrac{25-a^2}{16-a^2}$

9. $\dfrac{x^2+5x-84}{x^2-49}\div\dfrac{x^2-144}{x^2+5x-14}$

10. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+3x-4}\div\dfrac{x^2+4x-21}{2x+8}$

11. $\left(1+\dfrac{3x}{1-x}\right)\left(1+\dfrac{x}{1+x}\right)$

12. $\left(a+1-\dfrac{30}{a}\right)\left(a-4-\dfrac{5}{a}\right)$

13. $\dfrac{x+3-\dfrac{1}{x+3}}{x+5-\dfrac{3}{x+3}}$

14. $\dfrac{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}}{\dfrac{b}{a-1}-\dfrac{b}{a+1}}$

15. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}$

16. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$

116. 文字方程式

在單利法中,學者已知設本金為 p, 利率為 r, 期間數為 t 時,求本利和 A 的公式為

$$A=p(1+rt) \qquad (1)$$

現在若已知本利和,利率,期間而求本金,則 A, r, t 是已知數, p 是未知數. 因此,上面的公式,便可看做是關於 p 的方程式. 如是:

> 含有代表已知數的文字的方程式叫做文字方程式. 文字方程式中,單用已知數來表示未知數,叫做解那文字的方程式.

例如由方程式(1),導出

$$p=\frac{A}{1+rt}$$

叫做解關於 p 的(1)式.

文字方程式的解法,是表示同類問題普偏解法的解法.

(注意) 用含文字的式子除算時,除了明知那式不爲 0 以外,總得要假定他不爲 0,方可除算.

〔例 1〕 解,關於 t 的, $A=p(1+rt)$

〔解〕 $A=p(1+rt)$

先去括號, $A=p+prt$

將含 t 的項移於左邊,其餘各項移於右邊,並且變更符號,得

$$prt=A-p$$

$$\therefore\ t=\frac{A-p}{pr}\quad 答$$

〔例2〕 某事甲獨作 a 日可成,乙獨作 b 日可成,兩人合作幾日可成?

〔解〕 設甲乙合作,需 x 日可成,則每日可做全事的 $\frac{1}{x}$. 甲每日做全事的 $\frac{1}{a}$,乙每日做全事的 $\frac{1}{b}$. 故

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$$

去分母,得 $$bx+ax=ab$$

$$(a+b)x=ab$$

因 $a+b\neq 0$, 故兩邊除以 $a+b$, 得

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

答 $\frac{ab}{a+b}$日

〔例3〕 二元一次聯立方程式的普偏形,可把他表示如下式:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

試解之.

〔解〕
$$\begin{cases} ax+by=c \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a'x+b'y=c' \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

因爲要消去 y, 故 $(1)\times b'-(2)\times b$, 得

$$(ab'-a'b)x=b'c-bc'$$

假定 $ab'-a'b\neq 0$, 則

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$$

因爲要消去 x, 故 $(2)\times a-(1)\times a'$, 得

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c$$

$$\therefore\ y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

答 $ab'-a'b\neq 0$ 則 $x=\dfrac{b'c-bc'}{ab'-a'b}$, $y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

習題一〇八

1. 解關於 r 的 $A=p(1+rt)$.
2. 解關於 h 的 $A=\dfrac{bh}{2}$.
3. 解關於 a 的 $A=\dfrac{h(a+b)}{2}$
4. 解關於 k 的 $c=\dfrac{ka-b}{a}$.
5. 解關於 v 的 $Q=\dfrac{\pi r^2 v}{h}$.

6. 解關於 g 的 $f=\frac{gm-t}{m}$.

下列各方程式:

7. $5ax+4ac=14ac$
8. $2bx-3ab=6ab-bx$
9. $(a+b)x-2a=2b$
10. $ax-ac=bc-bx$
11. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=a+b$
12. $\frac{x}{u}=\frac{x-c}{v}$
13. $\begin{cases} x-ay+a^2=0 \\ x-by+b^2=0 \end{cases}$
14. $\begin{cases} ax-by=b^2-a^2 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-2 \end{cases}$

14. 每時的速爲 R 哩的客車,比貨車遲 h 時間開行,t 時間後追及貨車. 求貨車的速每時幾哩? 又設 $R=45, t=2\frac{3}{4}, h=1\frac{1}{2}$ 時,結果怎樣?

15. 某事甲乙二人合作,k 日可成. 今甲乙合作 m 日後,乙再獨作 n 日方完工. 求各人獨作此事所需日數.

117. 比

表示一數 a 爲他數 b 的幾倍的關係,叫做 a 對於 b 的比,或 a 與 b 的比,常寫作 $a:b$; a 被 b 除得的商 $\frac{a}{b}$, 叫做 $a:b$ 的比值; a 叫做比的前項, b 叫做比的後項, 總稱做項;以及下面的要項,都是從前已經講求過的.

比的大,小,或相等,隨着比值的大小,或相等而決定.

即
$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\text{時,}\qquad a:b>c:d$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{時,}\qquad a:b=c:d$$
$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\text{時,}\qquad a:b<c:d$$

因爲比值可以當作一個分數看,所以關於分數的各種性質,都可適用於比值. 因此,可得下說:

一個比的兩項,以同數乘,或以同數除,所得的比,都等於原比.

用式子把他表示,則
$$a:b=ma:mb$$
$$a:b=\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$$

比 $a:b$ 的前項與後項互換所得的比 $b:a$, 叫做 $a:b$ 的反比. 對於反比而言, $a:b$ 就可叫做 a 與 b 的正比.

因爲 $a:b$ 的兩項除以 ab, 所得的比等於原比,故

$$b:a=\frac{b}{ab}:\frac{a}{ab}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$$

即 $a:b$ 的反比,等於 a 的逆數與 b 的逆數的正比.

比的兩項雖也可以用式子表示,但是也應用適當的式子,乘除比的兩項,化作簡單的整式的比,這叫做比的簡化.

〔例1〕 簡化 $25ax^2y:15bxy^2$

〔解〕 $25ax^2y:15bxy^2=5ax:3by$ 答

〔例2〕 簡化 $\frac{21}{18b}:\frac{14}{15a}$

〔解〕 $\frac{21}{18b}:\frac{14}{15a}=\frac{7}{6b}:\frac{14}{15a}=\frac{1}{6b}:\frac{2}{15a}=5a:4b$ 答

〔例3〕 $x=a^2-ab, y=ab-b^2$ 時,試簡化 x, y 的反比.

〔解〕 $y:x=ab-b^2:a^2-ab=b(a-b):a(a-b)=b:a$

答

(注意) 比 $ac:bd$ 叫做二比 $a:b$, $c:d$ 的複比或相乘比. 二比的原形,如有保存的必要時,可以寫作

$$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right.$$

即

$$\left.\begin{matrix}a:b\\c:d\end{matrix}\right\}=ac:bd$$

比有三個以上時,也與此相同. 又 $a^2:b^2$ 叫做 $a:b$ 的二乘比, $a^3:b^3$ 叫做 $a:b$ 的三乘比.

習題一〇九

1. 簡化以下各比:

(1) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}$　　(2) $0.85:0.17$

(3) $18a^2b:27ab^2$　　(4) $(x+y)^2:x^2-y^2$

(5) $\frac{x}{a-b}:\frac{2x}{(a-b)^2}$　　(6) $\frac{x^2}{a^2-1}:\frac{x^4}{(a-1)^2}$

2. 若 $x+1$ 與 $x-1$ 的比值爲 5, 則 x 的值幾何?

3. 求以下各比的反比,並簡化之:

(1) $\frac{12}{25}:\frac{21}{20}$　　(2) $1:\frac{1}{m}$

(3) $\frac{1}{2}xy^2:\frac{1}{3}x^2y$　　(4) $a^2-2ab+b^2:a^2-b^2$

4. $3x+8$ 與 $2x+8$ 的反比等於 $3:4$. 求 x 的值.

5. 計算 $3:4$ 與 $8:9$ 的複比.

6. 簡化 $12:7$ 與 $\frac{14}{3}:\frac{18}{5}$ 的複比.

7. 二正方形面積的比等於一邊的二乘比. 今二正方形的邊,一爲 36 m, 一爲 27 m, 求面積的比.

8. 二立方體體積的比等於一邊的三乘比. 今二立方體的邊,一爲 12 cm, 一爲 8 cm, 求體積的比.

9. 矩形面積的比等於縱的比與横的比的相乘比. 今有二矩形,縱的比爲 $27:16$, 横的比爲 $20:9$, 求面積的比.

118. 比例式

表示二比相等的等式,叫做比例式.

例如 $a:b=c:d$

爲比例式 這叫做四數 a, b, c, d 成比例. 如是

$$a:b=c:d \qquad (1)$$

時,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

因此,去了分母,便得

$$ad=bc \qquad (2)$$

反之,(2)若成立,則(1)也成立. 故

若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$;

若 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

比例式 $a:b=b:c$

成立時,叫做三數 a, b, c 成比例. b 爲 a, c 的比例中項.

根據上述比例式的普偏性質,可知:

若 $a:b=b:c$ 則 $b^2=ac$

反之,若 $b^2=ac$ 則 $a:b=b:c$

再講 $$a:b=c:d$$

時, $$ad=bc$$

$$\therefore\ a=\frac{bc}{d},\quad b=\frac{ad}{c},$$

$$c=\frac{ad}{b},\quad d=\frac{bc}{a}.$$

這樣的演算,叫做解關於各文字的比例式.

〔例 1〕 解比列式 $(3x+8):(2x+7)=4:3$.

〔解〕 $(3x+8):(2x+7)=4:3$

$$3(3x+8)=4(2x+7)$$

$$9x+24=8x+28$$

$$\therefore\ x=4\ \text{答}$$

〔驗〕 設 $x=4$, 則

$$(3x+8):(2x+7)=(12+8):(8+7)=20:15=4:3$$

〔例 2〕 解關於 a 的 $A:h=a+b:n$.

〔解〕 $$A:h=a+b:n$$

$$nA=h(a+b)$$

$$nA=ha+hb$$

$$ha=nA-hb$$

$$\therefore\ a=\frac{nA-hb}{h}\ \text{答}$$

(注意) 比例式 $a:b=c:d$ 中, a 與 d 叫做比例式的外項, b 與 c 叫

做比例式的內項，d叫做a, b, d的第四比例項．又$a:b=b:c$時，c叫做a,b的第三比例項．

習題一一〇

1. 解$5:12=0.1:x$.
2. 解$2(y+2):(3y-5)=5:2$.
3. 解關於r的$F:p=h:2\pi r$.
4. 解關於r的$h:s=s:4(2r-h)$.
5. 解關於t的$r:R=t:h+t$.
6. 試證示6與-6均爲4與9的比例中項.
7. 某數與$\frac{5}{3}$的比例中項爲$\frac{2}{3}$. 某數幾何?
8. 試證示$\frac{x+y}{x-y}=\frac{y+z}{y-z}$時，$y$爲$x$與$z$的比例中項.
9. 由$3x=5y$求x與y的比.
10. 由$x+5y=0$求x與y的比.
11. 由$2x-y=y-3x$求x與y的比.
12. 由$y^2-3xy+2x^2=0$求y與x的比.

119. 比例式的性質

$$a:b=c:d$$

時，

$$ad=bc$$

用 cd 除上式的兩邊得

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

故 $$a:c=b:d.$$

又 $$a:b=c:d$$

時, $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \tag{1}$$

兩邊各加 1, 則

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

即 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \tag{2}$$

故 $$a+b:b=c+d:d$$

又由(1)的兩邊各減 1, 則

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

即 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \tag{3}$$

故 $$a-b:b=c-d:d$$

又以(3)除(2),得

$$\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$$

即 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \tag{4}$$

故 $$a+b:a-b=c+d:c-d$$

於是:

$$\underline{a : b = c : d}$$

時,下列各比例式都能成立:

$$\underline{a : c = b : d}$$

$$\underline{a+b : b = c+d : d}$$

$$\underline{a-b : b = c-d : d}$$

$$\underline{a+b : a-b = c+d : c-d}$$

又如 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots \qquad (5)$$

兩個以上的比相等時,設其比值爲 k, 則

$$\frac{a}{b}=k \qquad \therefore\ a=kb$$

$$\frac{c}{d}=k \qquad \therefore\ c=kd$$

$$\frac{e}{f}=k \qquad \therefore\ e=kf$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ a+c+e+\cdots\cdots=k(b+d+f+\cdots\cdots)$$

故設 $b+d+f+\cdots\cdots\neq 0$, 則

$$\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=k$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots} \qquad (6)$$

於是:

$$a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$$

時,若 $b+d+f+\cdots\cdots\neq0$,則這幾個比又等於

$$(a+c+e+\cdots\cdots):(b+d+f+\cdots\cdots).$$

(注意) 上述各性質,也可適用於分數式的變形. 如(1),二個分數相等時,便可得形式如(2),(3),(4)的關係. 又如(5),許多分數相等時,若分母的和不爲0,則形式如(6)的分數也能相等.

〔例1〕 試證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 時 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$.

〔解〕
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

故
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

因此,
$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

或設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$,因而 $a=bk$, $c=dk$,把他代入 $\frac{a+b}{c+d}$ 與 $\frac{a-b}{c-d}$ 中的 a, c,也得證明.

〔例2〕 解 $\frac{3x+5}{3x-5}=\frac{3}{2}$

〔解〕
$$\frac{3x+5}{3x-5}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{(3x+5)+(3x-5)}{(3x+5)-(3x-5)}=\frac{3+2}{3-2}$$

$$\frac{6x}{10}=\frac{5}{1}$$

$$6x=50$$

$$\therefore\ x=\frac{25}{3}\quad 答$$

學者試自行驗算.

〔例3〕 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$, $x+y+z=36$ 時, x, y, z 的值若何?

〔解〕
$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{3+4+5}$$
$$=\frac{36}{12}$$
$$=3$$

於是 $\frac{x}{3}=3$, $\frac{y}{4}=3$, $\frac{z}{5}=3$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} x&=9\\ y&=12\\ z&=15\end{aligned}\right\}答$$

學者試自行驗算.

習題一一一

1. 試證 $a:b=c:d$ 時,比例式 $d:b=c:a$ 也能成立.

2. 試證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 時,等式 $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ 也能成立.

3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 時,等式 $\frac{ma+nb}{ma-nb}=\frac{mc+nd}{mc-nd}$ 能成立. 試證之.

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ 時,求證.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{ka+lc+me}{kb+ld+mf}.$$

5. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $x+y+z=(a+b+c)^2$ 時,用 a, b, c 來表示 x, y, z 的值.

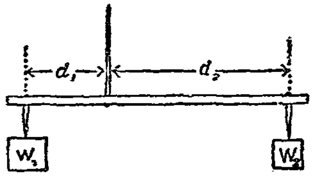
6. 解下列各方程式:

(1) $\frac{8x+7}{8x-7}=\frac{13}{5}$　　(2) $\frac{15x+22}{15x-22}=\frac{12x+17}{12x-17}$

120. 應用問題

〔例〕 長 36 cm 的棒,支持於一點,一端弔重量不明的某物體,他端弔 4 Kg 的法碼,恰好保持平衡;而從弔法碼處至支點的距離為 27 cm. 求某物體重若干 Kg?

〔解〕 質地全體均勻的棒,兩端分弔重 W_1, W_2 的物體,恰成平衡時,設兩端距離支點的長各為 d_1, d_2 則 W_1, W_2, d_1, d_2 成比例. (槓桿的法則)



即 $W_1 : W_2 = d_2 : d_1$

於是,設 $W_1=4, d_1=27$, 則 $d_2=36-27=9$

$$\therefore\ 4 : W_2 = 9 : 27$$

$$W_2 = \frac{4\times27}{9} = 12$$

答 12 Kg

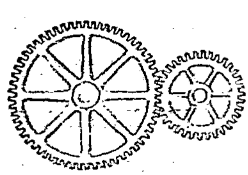
習題一一二

1. 棒的兩端懸掛物體,一重 9 Kg, 一重 3 Kg, 支持着使恰成平衡的一點,離重 9 Kg 的一端為 8 cm. 求棒長幾何?

2. 兩個小孩,用 12 尺長的板作軒輊戲(*Seesaw*),支點離體重 35 斤的小孩一面 5.5 尺,則他方的小孩體重若干?

3. 長為 d 的棒,一端固定,一端用力把持,若在距離固定處為 d' 的一點,懸吊重為 W 的物體,需力若干方可使棒成水平?

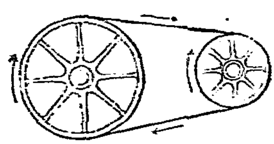
4. 互相鍥合而旋轉的兩個齒輪設大輪的齒數為 T, 小輪的為 t; 每分鐘的旋轉數,大輪為 N, 小輪為



n, 則 T, N, t, n 之間有怎樣的關係? 試用比例式表示!

5. 前題中的小齒輪,若改換多 r 個齒的,則旋轉數每分鐘較前要少 $\frac{TNr}{t(t+r)}$ 次. 試證之.

6. 一輪旋轉,可用皮帶牽動他輪. 今設大輪的直徑為 D, 旋轉數每分鐘為 N, 小輪的直徑為 d, 旋轉數每分鐘為 n, 則 N, n, D, d 間的法則若何? 試用式表示.



7. 直徑 30 cm 的大輪,每秒鐘旋轉一次;並且用皮帶與直徑 9 cm 的小輪聯結. 若將小輪的直徑放大 6 cm, 則旋轉起來要比原來慢多少?

121. 連比

像 $a:b,\ b:c,\ a:c$

等三個以上的數,相互的比,併寫作:

$$a:b:c$$

這叫做諸數的連比.

連比有下面的性質:

連比的各項,乘以同數,或除以同數,比仍不變.

因此連比可以簡化.

兩個連比 $a:b:c$ 與 $a':b':c'$ 有

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

關係時,叫做兩個連比相等;可以寫作下式:

$$a:b:c=a':b':c'$$

所以:

$$a:b:c=a':b':c'$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

二式,表示同一事項.

〔例1〕 簡化 $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$

〔解〕 把分母的最小公倍數60乘各項,

$$\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=20:15:12 \quad \text{答}$$

〔例2〕 $x:y=3:4$, $x:z=4:5$ 時,求 $x:y:z$.

〔解〕 $x:y=3:4 \qquad \therefore \quad y=\frac{4x}{3}$

$$x:z=4:5 \qquad \therefore \quad z=\frac{5x}{4}$$

$$\therefore \quad x:y:z=x:\frac{4x}{3}:\frac{5x}{4}$$

$$=12x:16x:15x$$

$$=12:16:15\quad 答$$

〔例3〕　由下列二式求 $x:y:z$.

$$x-3y+3z=0,\qquad 2x+3y-12z=0$$

〔解〕　把 z 當作已知數,單認 x,y 爲未知數,解得

$$x=3z,\qquad y=2z$$

$$x:y:z=3z:2z:z$$

$$=3:2:1\quad 答$$

〔例4〕　將銀 p 圓照 $a:b:c$ 的比配分.

〔解〕　設分成各份爲 x 圓, y 圓, z 圓,則

$$x+y+z=p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x:y:z=a:b:c\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2),得　$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$$

把(1)代入得　$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{p}{a+b+c}$$

$$\therefore\quad x=\frac{ap}{a+b+c}$$

$$y=\frac{bp}{a+b+c}$$

$$z=\frac{cp}{a+b+c}$$

答　$\dfrac{ap}{a+b+c}$ 圓, $\dfrac{bp}{a+b+c}$ 圓, $\dfrac{cp}{a+b+c}$ 圓

(注意)　如是,一數照着定數的比配分的方法.有時叫做比例配分.

習題一一三

1. 簡化以下各連比:

(1) $450:270:180$　　(2) $0.6:2.4:36$

(3) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$　　(4) $\frac{1}{l}:\frac{1}{m}:\frac{1}{n}$

2. 由以下各組比例式求$x:y:z$.

(1) $x:y=3:7,\quad x:z=2:5$

(2) $x:y=\frac{1}{2}:\frac{1}{3},\quad y:z=\frac{1}{2}:\frac{2}{5}$

(3) $x:z=15:8,\quad y:z=9:4$

(4) $x:y=\frac{1}{a}:\frac{1}{b},\quad y:z=\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$

3. 由下列二式求 x, y, z 的連比:

$$x-2y+3z=0,\quad 2x+3y-z=0$$

4. 由下列二式求 $z:x$ 及 $y:x$.

$$2x-5y+z=0,\quad x-2y-2z=0$$

5. 由 $3x=2y=z$ 求 $x:y:z$.

6. 三角形三邊的長的比爲$3:4:5$,周圍的長爲48糎. 求各邊的長.

7. 銀2325圓分給甲乙丙三人,甲與乙所得的比爲$4:5$,乙與丙所得的比爲$7:6$. 問三人各得幾圓?

8. 甲乙丙三人投資營業,甲出銀3000圓經過7個月;乙出銀4800圓經過3個月,丙出銀6000圓經過5個月,共賺得銀763圓. 若按投資額及經過月數分配,應各得幾許?

122. 混合

〔例〕 每升價銀 a 分的酒與每升價銀 b 分的酒,混合一處,成每升價銀 c 分的酒. 求兩種酒要照怎樣的比混合?

〔解〕 設 a 分的酒 x 升與 b 分的酒 y 升混成 c 分的酒,則

$$ax+by=c(x+y)$$

$$(a-c)x=(c-b)y$$

$$\therefore \quad x:y=(c-b):(a-c)$$

〔注意〕 上題中的 c, 須是 a 與 b 中間的數,方為可能.

習題一一四

1. 每升價2角的酒與每升價2角7分的酒混合成每升價2角2分的酒. 求兩種酒的混合比. 又混成2角2分的酒1斗4升,須各用幾升?

2. 每斤價3角的醬油12斤中,混合每斤4角2分

的醬油,造成每斤3角8分的醬油,則每斤4角2分的醬油須混入幾斤?

3. 用鹽分6%的鹽水(鹽水中含重6%的鹽),製成鹽分8%的鹽水,則須蒸發水分幾%?

4. 銅與銀的合金900g中有銅60g. 現擬把此合金加銀,造成合金100g中含銅$\frac{2}{5}g$的一種,問須加銀幾克?

5. 重80g的合金中含金34g. 現擬把鎳混入,造成$1\frac{1}{2}g$中含金$\frac{1}{4}g$的新合金以製指環,問須混鎳幾克?

6. 錫與銅的合金,每$a\,Kg$中含錫$b\,Kg$. 現在更擬和銅混融,造成合金$c\,Kg$中含錫$d\,Kg$的. 求須和銅多少?

7. 酒三種,每升的價各為a分,b分,c分,若照l, m, n的比混和,可得每升幾分的酒?

雜　題

1. 求以下各式的最大公約數及最小公倍數:

 (1) $a^3(x+1)$, $a^2(x+1)^2(x-1)$

 (2) x^2-9, x^2-5x+6

 (3) x^2-3x+2, $x^2-7x+10$, x^2-6x+5

2. 將下式約分:

 (1) $\dfrac{6+x-x^2}{x^2-5x+6}$　　(2) $\dfrac{a^2-ab-ac+bc}{a^2+ab-ac-bc}$

3. 簡化$\dfrac{x+5}{x-3}-\dfrac{x+6}{x-2}$

4. 解$\dfrac{x+5}{x-3}-\dfrac{x+6}{x-2}=0$

5. 簡化$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

6. 解$\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}=\dfrac{1}{x^2-a^2}$

7. 簡化$\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}$

8. 解$\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+14=0$, $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}+6=0$

9. 解$x-3y=1$, $\dfrac{x+1}{y+1}-\dfrac{x-4}{y}=\dfrac{2}{y}$

10. 解關於R的下列各式:

(1) $\frac{1}{R}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (2) $\frac{1}{R}=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$

(3) $\frac{1}{R}=1-\frac{q}{p}$ (4) $\frac{1}{R}=r+\frac{q}{p}$

11. 解關於 t 的 $h=\frac{m'(t_0-t')}{m(t-t_0)}$

12. 解關於 h 的 $c:c'=1+2h:1-h$.

13. $ad=bc$ 時,下列各比例式都能成立. 求證.

(1) $a:b=c:d$ (2) $d:b=c:a$

(3) $a:c=b:d$ (4) $d:c=b:a$

14. 解下列比例式:

(1) $x-1:x+1=6:17$

(2) $x+a:2x-b=2x+b:4x-a$

(3) $\left.\begin{matrix}24:32\\15:12\end{matrix}\right\}=15-x:x$

(4) $\left.\begin{matrix}5:8+x\\12:15\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}18:x\\10:9\end{matrix}\right.$

15. 試證 $a:b=c:d$ 時,下式能成立:

$$\frac{ma+b}{b}=\frac{mc+d}{d}$$

16. 求證 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ 時

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{2a+3b-c}{2a'+3b'-c'}$$

17. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$時,若$a+b+c=0$則$x+y+z$亦不得不等於0. 求證.

18. 直立在地上的一棵大樹,测得他的影長為l粎. 同時直立一長a粎的棒,他的影長是b粎. 試作一式表示樹高.

19. 甲乙丙三人分銀s圓,甲與乙所得的比為$a:b$,乙與丙所得的比為$c:d$. 求作表示各人所得的式子.

20. 三種米,每升價銀各為2.5角,2.3角,2.0角,混合成每升價銀2.25角的米,須照怎樣的比? 但上與中的比為1:2.

21. a, b, c成比例時,求證:

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

22. $(a+b+c+d):(a-b+c-d)=(a+b-c-d)(a-b-c+d)$時,求證$a, b, c, d$成比例.

23. $\frac{l}{p}=\frac{m}{q}=\frac{n}{r}$時,求證

$$(l^2+m^2+n^2)(p^2+q^2+r^2)=(lp+mq+nr)^2$$

度量衡換算表

長	1 公分(糎)	0.03 尺(市)	0.393701 吋
	1 公尺(粎)	3 市尺[3.125 營造尺]	3.28084 呎[1.09361 碼]
	1 公里(粁)	2 市里[1.735 里(舊)]	0.62137 哩[3 80.8 呎]
	1 市尺	⅓ 公尺	1.09361 呎
	1 尺(營造)	0.32 公尺	1.04987 呎
	1 市里	0.5 公里	0.3107 哩
	1 里(舊)	1.15 市里	0.453705 哩
	1 吋	0.0254 公尺	0.0762 市尺
	1 呎	0.3048 公尺	0.9144 市尺
	1 碼	0.9144 公尺	2.7432 市尺
	1 哩	1.609344 公里	3.2187 市里
度	1 浬	1852 公尺	5556 市尺
地	1 公畝(安)	0.15 市畝[0.1628 畝(舊)]	.024705 英畝
	1 英畝	40.4671 公畝	6.06976 市畝
積	1 市畝	6.667 公畝	0.1647 英畝
容	1 公升(竔)	1 市升	0.219[illegible] 嗧(英) 0.2641[illegible] 嗧(美)
	1 市升	1 公升	0.21999 嗧(英) 0.26417 嗧(美)
量	1 嗧(英)	4.54596 公升	4.54596 市升
	1 嗧(美)	3.78533 公升	3.78533 市升
重	1 公分(克)	0.032 市兩	0.03193 唡[0.0022 磅]
	1 公斤(兛)	32 市兩	2.20459 磅
	1 公噸(瓲)	20 市擔	0.98419 噸
	1 市兩	31.25 公分	0.9978 唡
	1 兩(庫平)	37.301 公分	1.19 唡
	1 市斤	0.5 公斤	1.102295 磅
	1 唡	28.3495 公分	0.907184 市兩
	1 磅	0.45359 公斤	14.51496 市兩
量	1 噸	1.01606 瓲	20.321 市擔

第二册索引

(排列依畫數次序,數字表頁數)

一　畫

一次方程式, Equation of first degree, or simple equation, 191

一元一次方程式, Linear equation, 191

二　畫

二項式, Binomial expression, 175

二重根, Double root, 247

二乘比, Duplicate ratio, 278

二次方程式, Quadratic equation, 245

三　畫

三項式, Trinomial expression, 175

三乘比, Triplicate ratio, 278

四　畫

不定, Indeterminate, 171, 216

不可能, Impossible, 171, 215

不等式, Inequality, 158

不等號, Inequal sign, 158

分子, Numerator, 253

分母, Denominator, 253

分解(因數), Factorize, 234

分數式, Fractional expression, 253

分數方程式, Fractional equation, 257

內項, Mean 282

公因數, Common factor, 234

公約數, Common measure, 250

公倍數, Common multiple, 251

比, Ratio, 276

比例式, Proportion, 280

比例中項, Mean proportional, 280

比例配分, Proportional parts, 291

文字係數, Literal coefficient, 226

文字方程式, Literal equation, 272

反比, Inverse ratio, 277

五　畫

正數, Positive number, 154

代數的和, Algebraic sum, 161

正比, Direct ratio, 277
加法, Addition, 159
加減消元法, Elimination by addition or subtraction, 208
矛盾, Inconsistent, 215
去母分, Remove the denominator, 193
代數的數列, Algebraic series of numbers,
代數式的數值, Numerical value of algebraic expression, 179
代入消元法, Elimination by substitution, 210
外項, Extreme, 281

六畫

式, Expression, 175
多項式, Polynomial expression, 175
多項式的次數, Degree of polynomial, 226
因數, Factor, 234
因數分解, Factoring, 224
冰點, Freezing point, 153
次數, Degree, 225, 226

七畫

坐標, Coordinate, 181
坐標的軸, Axis of coordinate, 182

八畫

性質的符號, Signs of character, 155
昇冪順序, Ascending power, 226

九畫

負數, Negative number, 154
負根, Negative root, 198
括號的用法, Uses of parenthesis, 173
約數, Measure, 250
約分, Reduction of a fraction, 253
相乘比, Geometrical ratio, 278

十畫

原點, Origin, 182
倍數, Multiple, 250
除法, Division, 170
降冪順序, Descending power, 226
乘法的符號法則, Law of signs in multiplication, 167
消去未知數, Eliminate the unknowns, 206

十一畫

移項, Transposition of terms, 190
消元, Elimination, 206
通分, Reduction of fractions to equivalent fractions, 265
連比, Continued ratio, 289
第三比例項. Third proportional, 282
第四比例項, Fourth proportional, 282
混合, Alligation, 293

十二畫

最大公約數, Greatest common measure, 205
最低公倍數, Lowest common multiple, 252
最小公分母, Least common denominator, 265
絕對項, Absolute term, 226
絕對值, Absolute value, 155
最小公倍數 Least common multiple, 251
最高公因數, Highest common factor, 252
最簡分式, Lowest fraction, 253
象限, Quadrant, 18
減法, Subtcaction, 162
等根 Equal roots, 247

十三畫

解, To solve (*v.*); solution (*n.*), 201, 273, 281
運算的符號, Signs of operation, 155
解釋負根, To interpret the negative root, 198

十四畫

圖線, Graph, 184
圖解, Graphical solution, 205
複比, Compound ratio, 278

十五畫

數字係數, Numerical coefficient, 226
整式, Integral expression, 225
整理, Arrangement, 226
整方程式, Integral equation, 257

十六畫

橫軸, Transverse axis, 182
獨項式, Monomial expression, 175

橫坐標, Abscissa, 182
繁分數, Complex Fraction, 270
獨項式的次數, Degree of a monomial, 225

十七畫

縱軸, Longitudinal axis, 182,
縱坐標, Ordinate, 182
簡化, To simplify, 268, 278
聯立方程式, Simultaneous equations, 205, 260

十八畫

冪的乘法, Multiplication of powers, 224
冪的除法, Division of powers, 241

十九畫

變更符號, To change the signs, 156

外來字

x軸, x-axis, 182
y軸, y-axis, 182

中華民國二十二年一月初版

有著作權不准翻印

新亞教本

初中算學：算術・代數

全四册

第二册實價銀七角

外埠酌加寄費

編輯者	薛德炯
校閱者	陳建功
發行者	陳邦楨
印刷者	新亞書店
	上海山東路尙仁里
總發行所	新亞書店
分售處	各地各大書局

SO.7