中華文庫

初中第一集

# 代數捷徑

華襄治編

中華書局印行

# 代數捷徑

## 目次

### 第一章　緒論

## 第四章 一次聯立方程式



## 第五章 因式



## 第六章 最高公約式及最低公倍式

## 第七章 分式



## 第八章 分方程式



## 第九章 平方根

## 第十章 二次方程式



## 第十一章 二次聯立方程式



## 習題的答

# 代數捷徑

## 第一章　緒論

### 代數的特色

代數與算術,同爲研究關於數的問題的.其相異之點,在算術用數字計算,而代數則用$a$、$b$、$c$、……$x$、$y$、$z$等字母以代替數字,使研究的途徑簡明,且其性質爲一般的.例如$3+7=7+3$, $5+4=4+5$,其相加之數可變更其順序而結果相同,代數上對此關係,可一般的令二數爲$a$、$b$,以$a+b=b+a$來表示;又如乘法$3\times5=5\times3$,其二數之積雖交換二數的位置而結果同一,代數上可表以$a\times b=b\times a$;又如已知大小二數的和差求二數的問題,依算術計算,以和差相加再二等分之得大數,由和減去差再二等分之得小數,如用字母來表示,可令大數爲$x$,小數爲$y$,和爲$a$,差爲$b$,則

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{a-b}{2},$$

即爲二數和差問題一般的解法.

### 記　號

**1.** 符號

代數以$+$、$-$、$\times$、$\div$爲四則符號,$=$爲相等符號,並

於括號的用法,都與算術相同;惟乘法在數字與數字相乘,必須用 ×,否則常省略不記.

例如　$3\times a=3a$,　$5\times a\times x=5ax$;

$a\times b\times c=abc$,

又如　$a\times(b-c)=a(b-c)$,

$15\times(x-y)=15(x-y)$,

$(a+b)\times(x-y)=(a+b)(x-y)$.

在不與小數點相混的地方,有用點(·)以代 × 的;例如 $3\times4\times5\times6=3\cdot4\cdot5\cdot6$.

除法用括線以代 ÷ 的亦多,例如

$$a\div b=\frac{a}{b},\quad (a-b)\div(x+y)=\frac{a-b}{x+y}.$$

以上加減乘除的符號稱為演算記號.此外尚有 >、<、≠ 等不等號.

**2.** 係數、冪、指數

在 $3\times a\times x=3ax$,其 3 稱為 $ax$ 的係數,$3a$ 稱為 $x$ 的係數;又於 $15axy$,其 15 為 $axy$ 的係數,$15a$ 為 $xy$ 的係數.以上如係數 3、15 特稱為數字係數.又由幾個數乘得的積,其各數稱為積的因數;如以幾個相同因數乘得的積,稱為其數的冪.冪的表示,將因數的個數,記小字於因數的右肩;例如 $xxxx=x^4$, $aaaaa=a^5$.此 4 或 5 稱為

其冪的指數.

$a^1$ 卽 $a$ 的自身,指數 1 通常可以不記.

## 正數及負數

**1.** 自然數

從 1 起,如下列整數,稱自然數.

1、2、3、4、5、6、…………………

**2.** 零

任取自然數中一數如 4,從 4 減去 1,則得其左隣的數 3;從 3 減去 1,則得其左隣的數 2;從 2 減去 1,則又得其左隣的數 1;從 1 減去 1,此時已無殘餘,卽

$$1-1=0$$

此 0 在代數上作爲一個數,置於 1 的左隣.

**3.** 負數

從零減去 1,其差亦爲數,記作 $-1$,置於 0 的左隣;又從 $-1$ 減去 1,其差爲 $-2$;從 $-2$ 減去 1,其差爲 $-3$;以下照此類推,玆表示如次:

……$-7$、$-6$、$-5$、$-4$、$-3$、$-2$、$-1$、0、1、2、3、4………

一般 $b$ 大於 $a$ 時,$a-b$ 等於 $-(b-a)$,卽

$$a-b=-(b-a)$$

又一般從某數減去與某數相同的數,其差常為零,即

$$a-a=0$$

上述事項,不但適用於整數,并適用於分數;例如

$$0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6},$$

$$\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0.$$

由是凡小於 0 的數,稱為負數;反之凡大於 0 的數,稱為正數;0 介乎正數與負數之間,不屬於正數或負數.正負數及 0,稱為代數數.

置於正負數前的 +、− 號,稱為數的性質符號,或單稱數的符號;其 + 為正號,− 為負號.數的前面,沒有數的符號的,稱其數的絕對值;例如 +3 的絕對值為 3,−7 的絕對值為 7.

**4.** 數的大小

在下面數列中,

$$-7\quad -6\quad -5\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7$$

各數大於其左首的數,而小於其右首的數.

正數大於零及負數,零大於負數.

正數愈大,其絕對值愈大;負數愈大,其絕對值愈小.

## 正負數的四則

**1.** 加法

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

在上面數列中,數向右進則增加,向左退則減少.某數 $a$ 加正數 $b$,就是在上面數列中從 $a$ 向右進 $b$ 的意思;例如

$$(+2)+(+3)=+5,$$

$$(-5)+(+4)=-1.$$

又於某數 $a$ 加負數 $b$,就是從 $a$ 向左退 $b$ 的絕對值的意思,例如

$$(+8)+(-6)=+2,$$

$$(-8)+(-4)=-12.$$

依以上理由,得加法規則如次:

同號二數的和,等於其絕對值的和,記以公共的符號.

異號二數的和,等於其絕對值的差,記以絕對值較大的符號.

絕對值相等而符號相異的二數,其和爲零;零與某數

相加,其和卽等於某數.

今設　$a>b>0$,　則

$$(+a)+(+b)=+(a+b),$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b),$$

$$(+a)+(-b)=+(a-b),$$

$$(-a)+(+b)=-(a-b),$$

$$(+a)+(-a)=0,$$

$$0+(+a)=+a,$$

$$0+(-a)=-a.$$

由代數數的和,得成立以下規則:

I. 交換規則

$$a+b=b+a;$$

II. 結合規則

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

## 習題一

求下列各式的和:

1. $(+45)+(+32)$,　　2. $(+37)+(-25)$,

3. $(-45)+(+18)$,　　4. $(-47)+(-50)$,

5. $(+38)+(-56)+(+43)$.

**2.** 減法

減法爲加法的反求,從某數 $a$ 減去正數 $b$,在以上數列中就是從 $a$ 左退 $b$ 的意思;從某數 $a$ 減去負數 $b$,就是從 $a$ 右進 $b$ 的絕對值的意思.

例如

$$(-8)-(+4)=-12,$$

$$(-8)-(-4)=-4.$$

一般

$$a-(+b)=a+(-b).$$

由是凡減去某數,可變其符號而加於被減數卽得.

從某數減去零,其差卽等於某數.

## 習題二

求下列各式的差:

1. $(+15)-(+9)$,　　2. $(+10)-(+13)$,

3. $(-7)-(+9)$,　　4. $(-5)-(-9)$

5. $0-(-18)$.

**3.** 乘法

乘法須依下列規則:

I. 同號二數的積,等於二數絕對值的積,記以正號.

例如　$(+3)(+5)=+15$,　$(-7)(-3)=+21$.

II. 異號二數的積,等於二數絕對値的積,記以負號

例如 $(-3)(+5)=-15,\quad (+7)(-3)=-21.$

一般設 $a$、$b$ 爲任意二正數,則

$$(+a)(+b)=+ab,$$

$$(-a)(-b)=+ab,$$

$$(+a)(-b)=-ab,$$

$$(-a)(+b)=-ab.$$

【注意】某數與零的乘積爲0.

由乘法得成立以下規則:

I. 交換規則 $ab=ba;$

II. 結合規則 $(ab)c=a(bc).$

## 習題三

求次各式的積:

1. $(+3)(+7)$, 2. $(-3)(+7)$, 3. $(-5)(+4)$,

4. $(-15)(-3)$, 5. $(-7)(-6)$, 6. $(-8)(-9)$,

7. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)$, 8. $\left(-1\frac{1}{2}\right)\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

9. $(+2)(-3)(-4)$, 10. $(-2)(+3)(+4)$.

**4.** 除法

除法爲乘法的反求,所以符號規則與乘法相同,同號爲正,異號爲負.

例如 $a$、$b$ 爲任意二正數,則

$$(+a)\div(+b)=+\frac{a}{b},\qquad (-a)\div(-b)=+\frac{a}{b};$$
$$(+a)\div(-b)=-\frac{a}{b},\qquad (-a)\div(+b)=-\frac{a}{b}.$$

以不爲零的數除零,得商爲零.

以零爲除數,通常視爲不可能.

## 習題四

練習以下各式的除法:

1. $(+72)\div(+8)$,　　2. $(-84)\div(+7)$,

3. $(-135)\div(-9)$,　　4. $(+96)\div(-6)$,

5. $\left(-\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)$,　　6. $\left(-\frac{[illegible]}{5}\right)\div\left(+\frac{4}{5}\right)$,

7. $0\div\left(-\frac{3}{5}\right)$　　8. $(-144)\div(-12)$.

## 代數式的分類

就數字及字母,用加減乘除開方等符號表示的算式,叫代數式.例如

$$a+5b-3c,$$

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2-16},$$

$$\frac{x^3+5x^2+7x-8}{x^2-4x+5}.$$

代數式分爲有理式與無理式.

有理式不含開方,或含開方而根號裏無字母的,例如

$$3x^2-7x+\sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{3}\,a+\frac{b}{\sqrt{5}}.$$

無理式既含開方,並且根號裏有字母的;例如

$$\sqrt{a}\,x^3+3\sqrt{b}\,x^2+cx+d,$$

$$\frac{5xy+z}{\sqrt{5m}}.$$

有理式又分爲有理整式與有理分式.

有理整式或單稱整式,式中不含除,或含除而除數裏沒有字母;例如

$$5ax^3,\quad ax^2+bx+c,\quad \frac{1}{12}x^3-\frac{1}{7}x+5.$$

有理分式或單稱分式,式中既含除,並且除數裏有字母;例如

$$\frac{6ax}{5b},\quad \frac{5}{x}+\frac{x}{y^2},\quad \frac{x^3-1}{a}+8b.$$

有理整式又分爲單項式與多項式.

單項式祇有一項,多項式不止一項;例如$x$、$2x^2$、$-2ay$等爲單項式,$x^2-3x+2$爲多項式.

今將代數式的分類,列表如次:

$$\text{代數式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{有理整式}\begin{cases}\text{單項式}\\ \text{多項式}\end{cases}\\ \text{有理分式}\end{cases}\\ \text{無理式}\end{cases}$$

# 第二章 整式四則

## 加法

**1.** 同類項加法

如$7xy$、$-3xy$、$-\frac{1}{2}xy$ 或$3a^2b$、$-4a^2b$、等,祇有係數相異的單項式,叫同類項.

求同類項$2a$與$3a$的和,就是求$a$的2倍與$a$的3倍的和,其和為$a$的$(2+3)$倍即$a$的5倍,所以$2a+3a=(2+3)a=5a$.

又求$3a$與$-2a$的和,就是求$a$的3倍與$a$的$-2$倍的和,其和為$a$的$(3-2)$倍即$a$的1倍,因係數1可以省寫,所以 $3a-2a=a$.

例 1. $7a-5a+3a-2a=(7-5+3-2)a=3a$

例 2. $7a^2b-5a^2b+3a^2b-2a^2b=(7-5+3-2)a^2b$

$$=3a^2b$$

**2.** 單項式加法

加$b$於$a$則得$a+b$,因$a$與$b$非同類項,所以此式不能再併成簡單.

例 1. 求$5a$、$-4b$、$5b$、$-6a$、$2a$的和.

【解】 依原有符號將各項列成一式,再併其同類

項卽得.

$$5a-4b+5b-6a+2a=5a-6a+2a-4b+5b$$
$$=(5-6+2)a+(-4+5)b$$
$$=a+b$$

例 2.　試整理 $-7x^2-2x^3+5x-7x+3x^2+3x^3-1$.

【解】$-7x^2-2x^3+5x-7x+3x^2+3x^3-1$
$$=3x^3-2x^3-7x^2+3x^2+5x-7x-1$$
$$=x^3-4x^2-2x-1$$

【注意一】　多項式的各項,須以某字母爲主,依冪數(指數)大小順序排列.若從左向右各項,某字母冪數順次增加的,叫昇冪式;反之順次減少的,叫降冪式.上例就是依 $x$ 的降冪整理的.

【注意二】　字母須依順序排列.

**3.** 多項式加法

例 1.　$a-b+c$ 加 $-f+g-k$.

因兩式無同類項,且不須依字母順序及冪數大小整理,所以將第二式續列於第一式之右便可,卽其和爲 $a-b+c-f+g-k$.

例 2.　$3a-2b+c$ 加 $-2a+b-2c$.

依前例先列成一式,$3a-2b+c-2a+b-2c$, 再併

其同類項得 $a-b-c$ 即和.

實際計算時列式如次,使同類項上下對齊以圖便利.

$$\begin{array}{r} 3a-2b+\ c \\ -2a+\ b-2c \\ \hline a-\ b-\ c \end{array}$$

例 3. 求 $2x-3y+5z$、$4x-5y-2z$、$-3x+4y-2z$ 的和.

【運算】

$$\begin{array}{r} 2x-3y+5z \\ 4x-5y-2z \\ -3x+4y-2z \\ \hline 3x-4y+\ z \end{array}$$

## 習題一

求下列各題的和:

1. $3a-2b$, $4a-5b$, $7a-11b$, $a+8b$

2. $5p+3q+r$, $p+2q-5r$, $-3p-4q+3r$

3. $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$

4. $x^3-4x^2+5x-3$, $2x^3-7x^2-5x-14$, $x+8-9x^2+x^3$

## 減　法

### 4. 單項式減法

從 $a$ 減 $b$ 可用 $a-b$ 來表示,加 $-b$ 於 $a$ 可用 $a-b$ 來表示因其結果相同,所以從某式減單項式,可變單

項式的符號加於某式卽得.

例 1. 從$3x$減$-x$,則變$-x$的符號成$+x$,加於$3x$得$4x$,卽爲本題的答,以式表之如次:

$$3x-(-x)=3x+(+x)=4x$$

例 2. $a-b-(-3b)$

【解】 $a-b-(-3b)=a-b+(+3b)=a+2b$

例 3. 求從$x^3$減$x$

因$x^3$與$x$非同類項,所以結果爲$x^3-x$.

**5.** 多項式減法

例 1. 從$a-b+c$減$d-e+f$,可變第二式$d-e+f$的符號成$-d+e-f$,加於第一式$a-b+c$卽得.今列式如次:

$$(a-b+c)-(d-e+f)=a-b+c-d+e-f$$

例 2. 從$2a-b+3c$減$a+3b-2c$,則改變第二式$a+3b-2c$的符號成$-a-3b+2c$,加於第一式$2a-b+3c$,再併其同類項卽得.今列式如次:

$$(2a-b+3c)-(a+3b-2c)=2a-b+3c-a-3b+2c$$
$$=a-4b+5c$$

實際上爲計算便利起見,常使同類項上下對齊,列成下式:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 2a-\ \ b+3c & \cdots\cdots\text{第一式} \\ & \underline{-\ a-3b+2c} & \cdots\cdots\text{第二式變號所得} \\ & a-4b+5c & \cdots\cdots\text{差} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{(II)} & 2a-\ \ b+3c & \cdots\cdots\text{第一式} \\ & \underline{a+3b-2c} & \cdots\cdots\text{第二式} \\ & a-4b+5c & \cdots\cdots\text{差} \end{array}$$

(I)將第二式變號後再加(II)將第二式照原樣列入,心中變號相加.普通多用(II)法.

例 3. 求 $3x^2-4x+5$ 減 $2x^2-5x+7$ 的差.

【運算】

$$\begin{array}{r} 3x^2-4x+5 \\ \underline{2x^2-5x+7} \\ x^2+\ \ x-2 \end{array}$$

## 習題二

下列各題,求從第一式減第二式的結果:

1. $a-b-c-d$, $2a-b-2c$

2. $x^4-7x^3+2x^2-1$, $x^4+2x^3+x-1$

3. $bc+2ca-3ab$, $2bc+ca-3ab$

4. $7x^2-8y^2-z^2$, $4x^2-5y^2+2z^2$

## 括號用法

### 6. 解去括號

例 1. $a+(b-c+d)$ 一式的意思,就是將括號內 $b-c+d$ 加於 $a$,可照原式解去括號而得 $a+b-c+d$;卽括號前置有 + 號,去括號時,括號內各項的號不變.

例 2.　$a-(b-c+d)$ 一式的意思,就是從 $a$ 減去 $b-c+d$,可將 $b-c+d$ 各項變號,加於 $a$ 而得 $a-b+c-d$;即括號前置有一號,去括號時,括號內各項的號必變.

例 3.　$15x-[4-\{3-5x-(3x-7)\}]$ 的意思,有二種解釋:

第一　表示從最內層起,先從 $3-5x$ 減 $3x-7$;次將此第一次減得結果從 4 減去;更將此第二次減得結果,從 $15x$ 減去.照此解釋,就是從內向外順次解去括號,演式如下:

$$15x-[4-\{3-5x-(3x-7)\}]$$
$$=15x-[4-\{3-5x-3x+7\}]$$
$$=15x-[4-\{10-8x\}]$$
$$=15x-[4-10+8x]$$
$$=15x-[-6+8x]=15x+6-8x$$
$$=7x+6$$

第二　從 $15x$ 減 $[4-\{3-5x-(3x-7)\}]$ 得

$$15x-4+\{3-5x-(3x-7)\}$$

此式為 $15x-4$ 加 $3-5x-(3x-7)$,所以

$$15x-4+3-5x-(3x-7)=10x-1-(3x-7)$$

此式為從 $10x-1$ 減 $3x-7$,所以

$$10x-1-3x+7=7x+6$$

卽從外向內順次解去括號,其式爲

$$15x-[4-\{3-5x-(3x-7)\}]$$
$$=15x-4+\{3-5x-(3x-7)\}$$
$$=15x-4+3-5x-(3x-7)$$
$$=10x-1-3x+7=7x+6$$

【注意】 此二法,以第一法從內向外解去括號爲普通.

例 4. $2a-[3b+(2b-c)-4c+\{2a-(3b-\overline{c-2b})\}]$

【解】 $2a-[3b+(2b-c)-4c+\{2a-(3b-\overline{c-2b})\}]$

$$=2a-[3b+(2b-c)-4c+\{2a-(3b-c+2b)\}]$$
$$=2a-[3b+2b-c-4c+\{2a-(5b-c)\}]$$
$$=2a-[5b-5c+\{2a-5b+c\}]$$
$$=2a-[5b-5c+2a-5b+c]$$
$$=2a-[2a-4c]$$
$$=2a-2a+4c=4c$$

【注意】 $\overline{c-2b}$ 式上所記的線,叫括線,効用與括號同.

## 習題三

下列各題,試解去其括號:

1. $5x+(2x-3y)+(x+3y)$

2. $5x-9y+(x+7y)$

3. $x+\{x-(x-1)\}$

4. $3-(1-x)-(3x-1)$

5. $3a-\{a-(3-\overline{a+2})\}$

6. $2a-(2b-d)-\{a-b-(c-3d-\overline{d-c})\}$

## 7. 置項入括號內

例 1. $a-b$ 作爲一個數時,有於其前置＋號而用括號括入,如＋$(a-b)$的;亦有於其前置－號而用括號括入,如$-(-a+b)=-(b-a)$的.卽將某式作爲一個數而括以括號時,括號前如置＋號,括號內各項的號可不變;如置－號,必須變其各項的號.

例 2. $a+b-c+d+e-f$, 將此式自第二項以下作爲一個數而於其前置＋號,則成

$$a+(b-c+d+e-f)$$

若將此括號內第二項以下作爲一個數而於其前置－號,則以上的括號(　)變爲{　}而成

$$a+\{b-(c-d-e+f)\}$$

更將此括號內第二項與第三項括以括號,並冠以－號,則成

$$a+[b-\{c-(d+e)+f\}]$$

例 3. $x^2+xy-y^2+x-y-1$,將此式自第三項以下括以一號,更分別此括號內的正項與負項,括以括號.

【解】 $x^2+xy-y^2+x-y-1=x^2+xy-(y^2-x+y+1)$

$$=x^2+xy-\{(y^2+y+1)-x\}$$

## 乘 法

8. 乘法的符號規則

$$\left.\begin{array}{l}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(-b)=+ab\end{array}\right\}\text{同號相乘得正}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-a)\times(+b)=-ab\\(+a)\times(-b)=-ab\end{array}\right\}\text{異號相乘得負}$$

多個因數的乘積,其中負因數有偶數個時爲正,奇數個時爲負.

例 1.

$$\left.\begin{array}{r}7x\times3y=21xy\\(-7x)\times(-3y)=21xy\end{array}\right\}\text{同號相乘得正}$$

$$\left.\begin{array}{r}(-7x)\times(3y)=-21xy\\(7x)\times(-3y)=-21xy\end{array}\right\}\text{異號相乘得負}$$

例 2. $px\times qy=pqxy$

例 3. $-2m\times3n\times(-4p)=+24mnp$

例 4. $-a\times 3y\times(-bx)\times(-7z)=-21abxyz$

**9.** 同數的乘冪

因 $a^2=a\times a,\quad a^3=a\times a\times a$

所以 $a^2\times a^3=(a\times a)(a\times a\times a)=a\times a\times a\times a\times a$

$$=a^5=a^{2+3}$$

$$a^4\times a^5=(a\times a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$$

$$=a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a\times a$$

$$=a^9=a^{4+5}$$

一般以 $m$、$n$ 表正整指數,則得指數規則如次:

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

例 1. 求 $(-a)^2\times(-a)^3$ 的積.

因所求爲 $(-a)$ 的 2 乘冪與 3 乘冪的積,所以

$$(-a)^{2+3}=(-a)^5$$

但此爲負項的奇數冪,所以符號爲負而其絕對值爲 $a^5$.以式表之如次:

$$(-a)^2\times(-a)^3=(-a)^5=-a^5$$

例 2. $a\times a^2$ 再化爲簡單.

因 $a$ 爲 $a^1$ 的省略,所以指數的和爲 $1+2=3$,卽

$$a\times a^2=a^{1+2}=a^3$$

例 3. 求 $2a^3\times 3a^5$ 的積.

【解】　$2a^3\times 3a^5=2\times 3\times a^3\times a^5=6a^8$

又 $(x^2)^3$ 爲 $(x^2)$ 的三乘冪,所以

$$(x^2)^3=x^2\times x^2\times x^2=x^{2+2+2}=x^{2\times 3}=x^6$$

因此一般規則爲

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

例 4.　求 $(ab)^3$ 的乘冪.

【解】　$(ab)^3=ab\times ab\times ab=(a\times a\times a)\times(b\times b\times b)$

$$=a^3b^3$$

## 習題四

1.　$2x^2\times 8x$　　　　2.　$-m^3(-3m^2)(2m^2)$

3.　$\frac{5}{9}a^2bx\times\frac{4}{5}ab^2y^2\times\frac{1}{2}a^2bxy$

4.　$-\frac{3}{2}ab^2\left(\frac{8}{9}bc^2\right)\left(-\frac{6}{7}abc\right)$

5.　$(-5x^3y^2)^2(2x^2y)^3$

### 10. 單項式乘多項式

例 1.　以單項式 $x$ 乘多項式 $a-b+c$ 時,先以 $x$ 乘 $a$ 得 $ax$,次以 $x$ 乘 $-b$ 得 $-bx$,再以 $x$ 乘 $c$ 得 $cx$,將此乘得各項的積,列記如次卽得

$$(a-b+c)x=ax-bx+cx$$

例 2.　$(3a^2+5ab-4b^2)\times(-2ab)$

$$=-6a^3b-10a^2b^2+8ab^3$$

例 3. $\left(\frac{3}{2}ab^2c^3-\frac{1}{2}ab^4c-\frac{1}{3}a^2bc^2\right)\times\frac{4}{3}a^3b^2c$

$$=2a^4b^4c^4-\frac{2}{3}a^4b^6c^2-\frac{4}{9}a^5b^3c^3$$

## 11. 多項式乘多項式

例 1. $(a+b-c)$ 與 $(x+y-z)$ 相乘時,如以 M 代 $x+y-z$,則得 $(a+b-c)$ M,即

$$(a+b-c)M=aM+bM-cM$$

但因 $M=x+y-z$

$$aM+bM-cM$$

$$=a(x+y-z)+b(x+y-z)-c(x+y-z)$$

$$=ax+ay-az+bx+by-bz-cx-cy+cz$$

$\therefore (a+b-c)(x+y-z)$

$$=ax+ay-az+bx+by-bz-cx-cy+cz$$

實際上為便利起見,常如次例運算.

例 2. 求 $(x+2a)(x+3a)$ 的積.

【運算】

$$\begin{array}{lll}
x+2a & & \\
\underline{x+3a} & & \\
x^2+2ax & & \cdots\cdots\cdots\cdots(x+2a)\times x \\
\underline{\qquad +3ax+6a^2} & & \cdots\cdots\cdots(x+2a)\times 3a \\
x^2+5ax+6a^2 & &
\end{array}$$

例 3.　求 $(x^2+3x+2)(x-1)$ 的積.

【運算】

$$\begin{array}{l} x^2+3x\ \ +2 \\ \underline{x\ \ -1\qquad\qquad} \\ x^3+3x^2+2x \\ \underline{\qquad -\ x^2-3x-2} \\ x^3+2x^2-\ x-2 \end{array}$$

例 4.　求次各式的積:

(I)　$(x+a)(x+b)$　(II)　$(a+b)^2$

(III)　$(a-b)^2$　(IV)　$(a+b)(a-b)$

(V)　$(a^2+ab+b^2)(a-b)$　(VI)　$(a^2-ab+b^2)(a+b)$

【運算】(I)

$$\begin{array}{l} x+a \\ \underline{x+b\qquad} \\ x^2+ax \\ \underline{\qquad +bx+ab} \\ x^2+ax+bx+ab \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b\qquad} \\ a^2+ab \\ \underline{\qquad\ \ ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

(III)

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b\qquad} \\ a^2-ab \\ \underline{\qquad -ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

(IV)

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b\qquad} \\ a^2+ab \\ \underline{\qquad -ab-b^2} \\ a^2\qquad\quad -b^2 \end{array}$$

(V)

$$\begin{array}{l} a^2+ab+b^2 \\ \underline{a\ \ -b\qquad\qquad} \\ a^3+a^2b+ab^2 \\ \underline{\qquad -a^2b-ab^2-b^3} \\ a^3\qquad\qquad\qquad -b^3 \end{array}$$

(VI)

$$\begin{array}{l} a^2-ab+b^2 \\ \underline{a\ \ +b\qquad\qquad} \\ a^3-a^2b+ab^2 \\ \underline{\qquad +a^2b-ab^2+b^3} \\ a^3\qquad\qquad\qquad +b^3 \end{array}$$

【注意】　本例題式與乘得結果,其關係都很重要,宜在心中充分記牢.

例 5.　試計算 $(x^3-4x+3x^2-1)(1-2x+x^2)$.

【解】　先依 $x$ 的降冪或昇冪順列,然後如次再乘.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & x^3 & +3x^2 & -4x & -1 \\
 & & x^2 & -2x & +1 & \\
\hline
x^5 & +3x^4 & -4x^3 & -x^2 & & \\
 & -2x^4 & -6x^3 & +8x^2 & +2x & \\
 & & +x^3 & +3x^2 & -4x & -1 \\
\hline
x^5 & +x^4 & -9x^3 & +10x^2 & -2x & -1
\end{array}
$$

例 6.　以 $x^2+2x+1$ 乘 $x^3-x-1$.

【解】　本題被乘式中缺少 $x^2$ 的項,運算時宜留空位,使同類項可上下對齊.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & & -x & -1 \\
 & & x^2 & +2x & +1 & \\
\hline
x^5 & & -x^3 & -x^2 & & \\
 & +2x^4 & & -2x^2 & -2x & \\
 & & +x^3 & & -x & -1 \\
\hline
x^5 & +2x^4 & & -3x^2 & -3x & -1
\end{array}
$$

## 習題五

1.　$(7x-3)(x-1)=?$　　　2.　$(x+3)(x-2)=?$

3.　試以 $a^2-2a+3$ 乘 $a^5-4a^3-5a+1$.

4.　試以 $m-1$ 乘 $m^3-2m^2-2$.

5.　試以 $b^2-ab+a^2$ 乘 $a^3-b^3-2a^2b$.

6.　試以 $x-y$ 乘 $x^5-y^5+3x^3y^2+2xy^4$.

## 除　法

**12.** 除法的符號規則

$$
因\begin{cases}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(+b)=-ab\end{cases}
$$

$$故\begin{cases}\dfrac{+ab}{+a}=+b \\ \dfrac{-ab}{-a}=+b\end{cases}$$ 即同號相除得正

$$又因\begin{cases}(-a)\times(-b)=+ab \\ (+a)\times(-b)=-ab\end{cases}$$

$$故\begin{cases}\dfrac{+ab}{-a}=-b \\ \dfrac{-ab}{+a}=-b\end{cases}$$ 即異號相除得負

**13.** 單項式除單項式

例 1.　因 $5ac\times3b=15abc$

故 $\dfrac{15abc}{5ac}=3b$

例 2.　因 $a^3\times a^2=a^5$

故 $\dfrac{a^5}{a^3}=a^2$

由此結果得 $a^{5-3}=a^2$

一般為 $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　　但 $m>n$

例 3.　依上例計算$\dfrac{a^5}{a^5}$可得 $a^{5-5}=a^0$，$a^0$ 雖似無甚意義但因 $1\times a^5=a^5$，則$\dfrac{a^5}{a^5}=1$，

所以可規定 $a^0=1$

一般為 $\dfrac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0=1$

例 4. $\dfrac{10x^3y^4z^2}{-5xy^3z^2}$

【解】 先定符號爲一,次計算 $\dfrac{10}{5}=2$, $\dfrac{x^3}{x}=x^2$, $\dfrac{y^4}{y^3}=y$, $\dfrac{z^2}{z^2}=1$,順次記此求得的結果卽得.

$$\therefore\quad \frac{10x^3y^4z^2}{-5xy^3z^2}=-2x^2y$$

【注意】 $z^2$ 除 $z^2$ 所得的商爲 1 可以不記.

## 習題六

1. $\dfrac{a^6}{a^2}=?$　2. $\dfrac{x^{13}}{x^5}=?$　3. $\dfrac{m^7}{m}=?$

4. $\dfrac{(-2)^6}{2^3}=?$　5. $\dfrac{12x^5}{3x^4}=?$　6. $\dfrac{9a^4b^2c}{6abc}=?$

### 13. 單項式除多項式

例 1. 因 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$

所以 $\dfrac{ma+mb+mc}{m}=a+b+c$

觀此結果,則 $a$ 可從 $\dfrac{ma}{m}$ 求得, $+b$、$+c$ 可從 $\dfrac{mb}{m}$、$\dfrac{mc}{m}$ 求得.

例 2. $\dfrac{ax+bx-cx}{x}$ 的計算,可分別由 $\dfrac{ax}{x}=a$, $\dfrac{+bx}{x}=+b$, $\dfrac{-cx}{x}=-c$, 卽得

$$\frac{ax+bx-cx}{x}=a+b-c$$

例 3. $$\frac{-15a^4b^3+3a^3b^2+12a^2b}{-3ab}=5a^3b^2-a^2b-4a$$

## 習題七

1. $(5a^6-6a^4+a^2)\div a^2=?$　　2. $(px-py)\div(-p)=?$

3. $(6x^2-3x)\div 2x=?$

### 14. 多項式除多項式

在 $x-4$ 乘 $x+3$ 時,先以 $x$ 乘 $x+3$ 得 $x^2+3x$ 次以 $-4$ 乘 $x+3$ 得 $-4x-12$, 加此兩乘得的式成 $x^2-x-12$ 以式表之即

$$(x+3)(x-4)=x(x+3)-4(x+3)$$
$$=x^2+3x-4x-12=x^2-x-12$$

由此知 $x+3$ 除 $x^2-x-12$ 的商 $x-4$, 可依此順序反求而得

即被除數 $x^2$,等於除數 $x$ 與商 $x$ 的積,所以用除數 $x$ 除被除數 $x^2$,得商 $x$;以此 $x$ 乘 $x+3$, 從 $x^2-x-12$ 中減去.其次因餘數 $-4x-12$ 中的 $-4x$, 等於除數 $x$ 與商 $-4$ 的積,所以用 $x$ 除 $-4x$, 得 $-4$; 以此 $-4$ 乘 $x+3$, 得 $-4x-12$, 再自前餘的 $-4x-12$ 中減去恰能減盡無餘.

實際上運算如次.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-4 \\
\cline{2-2}
x+3 & x^2-x-12 \\
 & \underline{x^2+3x} \quad \cdots\cdots x(x+3) \\
 & -4x-12 \\
 & \underline{-4x-12} \quad \cdots\cdots -4(x+3) \\
 & 0
\end{array}
$$

例 2.　$(x^2+8xy+15y^2)\div(x+3y)$

【運算】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+5y \\
\cline{2-2}
x+3y & x^2+8xy+15y^2 \\
 & \underline{x^2+3xy} \\
 & 5xy+15y^2 \\
 & \underline{5xy+15y^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

(答) $x+5y$

例 3.　$2x-1$ 除 $6x^2-2+x$.

【解】　本例應先如乘法依 $x$ 的降冪或昇冪順列,然後除算.即

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x+2 \\
\cline{2-2}
2x-1 & 6x^2+x-2 \\
 & \underline{6x^2-3x} \\
 & 4x-2 \\
 & \underline{4x-2} \\
 & 0
\end{array}
$$

(答) $3x+2$

例 4.　$(6-x^2+x)\div(3-x)$

【解】　先依 $x$ 昇冪整理,然後運算.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2+x \\
\cline{2-2}
3-x & 6+x-x^2 \\
 & \underline{6-2x} \\
 & 3x-x^2 \\
 & \underline{3x-x^2} \\
 & 0
\end{array}
$$

(答) $2+x$

例 5.　$(x^4-10x^2+9)\div(x^2-4x+3)$

【解】　此例被除式中缺少 $x$ 的項,亦如乘法於缺項的地方留空位爲便.卽

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & +4x & +3 & & \\
\cline{2-6}
x^2-4x+3 & x^4 & & -10x^2 & & +9 \\
 & x^4 & -4x^3 & +3x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & 4x^3 & -13x^2 & & \\
 & & 4x^3 & -16x^2 & +12x & \\
\cline{3-6}
 & & & 3x^2 & -12x & +9 \\
 & & & 3x^2 & -12x & +9 \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0
\end{array}
\quad (\text{答})\,x^2+4x+3
$$

## 習題八

1.　$(x^2-7x+12)\div(x-3)$　2.　$(x^2+5x+6)\div(x+2)$

3.　$(3x^2+10-17x)\div(3x-2)$

4.　$(10+x^2-7x)\div(2-x)$

5.　$(9a^3+3a^2+a-1)\div(3a-1)$

6.　$(x^{10}+x^5+1)\div(x^2+x+1)$

7.　$(1-x-3x^2-x^5)\div(1+2x+x^2)$

8.　$(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)$

**15.** **有剩餘的除法**

**例 1.**　**以 $2+x$ 除 $x^2-3x+5$, 今依 $x$ 的降冪與昇冪,各示算式於次:**

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-5 \\ \hline
x+2 & x^2-3x+5 \\
 & x^2+2x \\ \hline
 & \quad -5x+5 \\
 & \quad -5x-10 \\ \hline
 & \qquad\quad 15
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \frac{5}{2}-\frac{11}{4}x+\frac{15}{8}x^2 \\ \hline
2+x & 5-3x+x^2 \\
 & 5+\frac{5}{2}x \\ \hline
 & \quad -\frac{11}{2}x+x^2 \\
 & \quad -\frac{11}{2}x-\frac{11}{4}x^2 \\ \hline
 & \qquad\quad \frac{15}{4}x^2 \\
 & \qquad\quad \frac{15}{4}x^2+\frac{15}{8}x^3 \\ \hline
 & \qquad\qquad -\frac{15}{8}x^3
\end{array}
$$

觀此例可知兩者結果相異,在昇冪方面雖可繼續除至無限,但在降冪方面至商得的項比除數次數低時,即可作爲剩餘.

例 2. 試以 $x^2-x+1$ 除 $x^7$.

【運算】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5+x^4-x^2-x \\ \hline
x^2-x+1 & x^7 \\
 & x^7-x^6+x^5 \\ \hline
 & \quad x^6-x^5 \\
 & \quad x^6-x^5+x^4 \\ \hline
 & \qquad -x^4 \\
 & \qquad -x^4+x^3-x^2 \\ \hline
 & \qquad\quad -x^3+x^2 \\
 & \qquad\quad -x^3+x^2-x \\ \hline
 & \qquad\qquad +x
\end{array}
$$

(答) 商 $x^5+x^4-x^2-x$,餘 $+x$

## 習題九

1. 試以 $x+1$ 除 $x^4+1$

2. 試以 $x^2-3x+3$ 除 $x^4+5x^3+11x^2-12x-6$

# 第三章　一次方程式

## 1. 等式

用等號表示二個數或代數式相等的,叫做等式;例如

$$3+4=7$$

$$m(a+b)=ma+mb$$

$$x+2=5$$

在等號左邊的數或式叫左邊,在右邊的叫右邊.

等式有二種,分爲恆等式與方程式.

## 2. 恆等式

例如　$m(a+b)=ma+mb$

其右邊卽由左邊實行乘算,解去括號而得.

又如　$6x-\{3x-(1-2x)\}=6x-\{3x-1+2x\}$

$$=6x-3x+1-2x$$

$$=x+1$$

由左邊先解去內層括號,次解去外層括號,再併其同類項而得.

又如　$(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$

其右邊由以 $x-2$ 乘 $x-3$ 而得.

如上例,凡等式的一邊或兩邊,行加減乘除等計算再適當變形,而兩邊可成同樣的,叫恆等式.

因此凡是恆等式,其中所含的字母,不論令爲何種數值,其左邊的數值常等於右邊的數值.

**3.** 方程式

例如於 $x+2=5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 若 | $x=1$ | 則 | 左邊 $=3$ |
| 若 | $x=2$ | 則 | 左邊 $=4$ |
| 若 | $x=3$ | 則 | 左邊 $=5$ |
| 若 | $x=4$ | 則 | 左邊 $=6$ |

其中僅限於與以 $x=3$ 的值,則左邊亦爲 5 而此等式成立;對於其他各值則不成立.

如上例,凡等式中所含某字母,僅限於與以特定數值,而此等式始能成立的,叫方程式.

**4.** 方程式中重要術語

($A$)未知數,已知數

欲使方程式兩邊相等,須與以特定數值的某字母,叫未知數.其他字母或數,叫已知數.

($B$)根

方程式中未知數的特定數值,叫方程式的根.

(C)解方程式

求方程式的根,叫解方程式.

**5.** 整式的次數

(A)單項式次數

例如$7a^3b^2$爲五次式,卽以$a$、$b$指數3與2之和5,爲單項式的次數.仿此$-5x^6y^2$爲八次單項式,$2ax$爲二次單項式.但在$2ax$式中,如就特種字母$x$而言,則爲一次單項式.

(B)多項式次數

在$x^3-7x^2+5x-4$式中,第一項爲三次,第二項爲二次,第三項爲一次,各項次數以三次爲最高.

多項式以次數最高項的次數,爲多項式的次數;卽上例的多項式爲三次式.

又在$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$式中,對於$x$、$y$,各項都是三次.仿此各項次數都相等的,稱爲$x$、$y$的同次多項式,本例爲三次的同次多項式.

**6.** 方程式的次數

例如　$x+2=5$　爲$x$的一次方程式,

$x+y=8$　爲$x$、$y$的一次方程式,

$ax^2+bx=0$　爲$x$的二次方程式;

即以未知數的最高次項,爲其方程式的次數.

【注意一】 方程式的兩邊,對於未知數都是整式,稱此方程式爲整方程式;分母含有未知數的方程式,稱分方程式.分式無次數,所以分方程式亦無次數.

【注意二】 上例第一與第三表未知數的字母爲一個,稱一元方程式;第二例未知數爲二個,稱二元方程式.

因此第一例爲一元一次方程式,第二例爲二元一次方程式,第三例爲一元二次方程式.

## 7. 一元一次方程式的解法

例 1. 試解 $x+2=5$.

【解】 自原來相等的兩邊,各減去同數,其等式仍能成立;因此今從此方程式的兩邊各減去 2,則得

$$x+2-2=5-2$$

即 $x=5-2 \quad \therefore \quad x=3$

以此 $x$ 的值,代入上方程式的左邊,則得 $3+2=5$ 而方程式成立,故知 $x=3$ 爲此方程式的根.

【注意】 從 $x+2=5$ 的兩邊各減去 2,而得方程式 $x=5-2$;恰與將原方程式左邊的 2,變其符號 $+$ 爲 $-$ 而移至右邊的一樣.一般將方程式一邊的項,變號而

移至他邊,叫做移項.

例 2. 試解 $x-2=5$

【解】 移項得 $x=5+2$

卽 $x=7$ (答)

例 3. 解 $2x-3=x+7$

【解】 將含未知數的項移至左邊,含已知數的項移至右邊,則得

$$2x-x=7+3$$

$$\therefore\quad x=10\quad(答)$$

例 4. 解 $2x=6$

【解】 以同數除相等的兩邊,其等式仍成立;所以用 2 除此方程式的兩邊,則得

$$x=\frac{6}{2}$$

卽 $x=3$

以此 $x$ 的值,代入上方程式的左邊,則得 $2\times3=6$, 故 $x=3$ 爲所求的根.

【注意】 由 $2x=6$ 而求得 $x=\frac{6}{2}$ 的方程式,恰與以 $x$ 的係數除此方程式兩邊的結果相同,由此得次例的解法.

例 5. 解 $-3x=-21$

【解】 兩邊以$-3$除，則得 $x=\frac{-21}{-3}=7$

故所求的根 $x=7$

例 6. 解 $-x=5$

【解】 因 $x$ 的係數爲$-1$，所以用$-1$除兩邊得

$$x=\frac{5}{-1}=-5 \quad (答)$$

【注意】 以$-x=5$與$x=-5$相比較，左邊的$-x$變爲$+x$，右邊的$+5$變爲$-5$.

例 7. 解 $5x-3=3x+7$

【解】 移項 $5x-3x=7+3$…………(如例 3)

$\therefore \quad 2x=10$

以 2 除兩邊，則得 $x=5$…………(如例 4)

例 8. 解 $2x+3=5x+8$

【解】 移項 $2x-5x=8-3$

$\therefore \quad -3x=5$

以 $-3$ 除兩邊 $x=-\frac{5}{3}$

例 9. 解 $2(x-8)=3(x-5)+4x-1$

【解】 解去括號 $2x-16=3x-15+4x-1$

移項 $2x-3x-4x=16-15-1$

$\therefore \quad -5x=0$

以 $-5$ 除兩邊 $x=0$

例10.　解　$x-\frac{2}{3}x=20$

【解】　等式的兩邊乘以同數,其等式亦成立;故三倍此等式的兩邊,則得　$3x-2x=60$

即　$x=60$

【注意】　兩邊所乘的3,爲原方程式的分母.以此乘兩邊,便得不含分母的方程式.此法叫做去分母.

例11.　解　$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=5$

【解】　欲化此方程式爲不含分母的方程式,須乘以此方程式分母2、3的公倍數.公倍數中以最小公倍數爲最簡,故用2與3的最小公倍數6來乘,即得

$$\frac{1}{2}x\times 6-\frac{1}{3}x\times 6=5\times 6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3x-2x=30 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore \qquad x=30$$

【注意】　去分母時,可在心中暗算略去(1)式而簡直寫出(2)式.

例12.　解　$\frac{x+3}{4}-\frac{x+1}{2}-\frac{x+5}{6}=4$

【解】　以分母4與2及6的最小公倍數12乘兩邊,消去分母,則得

$$3(x+3)-6(x+1)-2(x+5)=48$$

解去括號　$3x+9-6x-6-2x-10=48$

移項　$3x-6x-2x=48+10+6-9$

$$\therefore\quad -5x=55 \qquad \therefore\quad x=-11$$

例13.　解 $4x-[3+\{x-(3+x)\}]=5$

【解】　將左邊的括號順次解去而化為簡單,則得

$$4x-[3+\{x-3-x\}]=5$$

$$4x-[3+\{-3\}]=5$$

$$4x-[3-3]=5$$

$$4x=5 \qquad \therefore\quad x=\frac{5}{4}$$

例14.　解　$0.5x-2=0.25x+0.2x+3$

【解】　將兩邊各100倍,則得

$$50x-200=25x+20x+300$$

移項而化成簡單,

$$5x=500 \qquad \therefore\quad x=100$$

例15.　解　$(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$

【解】　兩邊實行乘算,則得

$$x^2-3x+2=x^2-7x+12$$

此方程式外形雖為二次方程式,但將 $x^2$ 集於一邊,則相消而為零,便成一次方程式.

$$-3x+2=-7x+12$$

解此方程式,

$$7x-3x=12-2$$

$$4x=10 \qquad \therefore \quad x=\frac{5}{2}$$

## 習題一

試解下列各方程式:

1. $3x+1=13$
2. $3x+12=2x+42$
3. $5x+8=x+5$
4. $3x-5(8+3x)-6=2(x-7)+10$
5. $x-(4-2x)=7(x-1)$
6. $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=19$
7. $\frac{4}{3}x+4=\frac{5}{12}x+5$
8. $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$
9. $\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{3}-[x-\frac{1}{3}(2x-1)]=0$
10. $2x^2=(x+3)^2+(x+1)^2$

### 8. 簡法

例 1.　解　$8(x-3)-(6-2x)=2(x+2)-4(5-x)$

【解】　在去括號之前,先以 2 除此方程式的兩邊,則手續較爲簡單,即

$$4(x-3)-(3-x)=x+2-2(5-x)$$

去括號　$4x-12-3+x=x+2-10+2x$ ………(1)

$$2x=7 \qquad \therefore \ x=\frac{7}{2}$$

【注意一】　去括號之前,兩邊如可用某數除,則當

用某數來除,使其數的關係簡單.

【注意二】 (1)式兩邊有相同的 $x$ 項,移集於一邊可以相消;所以符號及係數全同的兩同類項,簡直可從各邊略去.

例 2. 解 $\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-5)=0$

【解】 解此方程式,通常先去分母,次去括號;今於去分母之前,先去括號,則得

$$\frac{1}{3}x-1-\frac{1}{4}x+2+\frac{1}{5}x-1=0$$

即
$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x=0$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x=0$$

以 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ 的數,除此方程式的兩邊,得

$$x=0$$

例 3. 解 $\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x+4)=3$

【解】 去括號 $\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{3}x+1+\frac{1}{4}x+1=3$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x=0 \qquad \therefore\ x=0$$

【注意】 在 $ax=0$ 形狀的方程式,$a$ 如不為 0,則 $x=0$.

**9. 代數式的表示事實**

下舉各例,為應用方程式以解算術問題的重要

事項學者對於各式的成立方法,務須充分熟習.

例 1.　若二數的和爲 $a$ 而其一數爲 $x$,則其他一數可用 $a-x$ 式來表示.

例 2.　若二數的差爲 $b$ 而其小數爲 $x$,則大數可用 $x+b$ 來表示;又若大數爲 $x$,則小數可用 $x-b$ 來表示.

例 3.　龜鶴共計 $a$ 個,其中龜爲 $b$ 個,試以式表示其總足數.

【解】　鶴爲 $(a-b)$ 個,每個有 2 足,所以 $(a-b)$ 個有 $2(a-b)$ 足.又龜每個有 4 足,所以 $b$ 個有 $4\times b=4b$ 足由此龜鶴足數的和爲

$$2(a-b)+4b=2a-2b+4b=2a+2b$$

例 4.　甲有 15 元,乙有 7 元,今由甲給乙 $a$ 元,試以式表示各人現有的元數.

【解】　甲原有 15 元,取出 $a$ 元給乙後,則餘 $(15-a)$ 元.乙原有 7 元,由甲給與 $a$ 元後,則得 $(7+a)$ 元.所以甲現有 $(15-a)$ 元,乙現有 $(7+a)$ 元.

例 5.　矩形面積,用縱橫兩數的乘積來表示;例如縱 $a$ 尺,橫 $b$ 尺,則矩形面積爲 $ab$ 平方尺.若此矩形縱增 2 尺爲 $(a+2)$ 尺,橫減 3 尺爲 $(b-3)$ 尺,則此矩

形面積當爲$(a+2)(b-3)$平方尺.

例 6. 連續的二個整數,如 5、6, 11、12, 34、35,等都是;所以令小數爲 $x$,則其大數爲 $x+1$.

例 7. 連續的三個整數,可表以 $x$、$x+1$、$x+2$.但爲便利起見,有時令 $x$ 爲中數,於是小數爲 $x-1$,大數爲 $x+1$.

例 8. 偶數可用 2 除盡,所以表以 $2n$;奇數則表以 $2n+1$.

例 9. 若本銀爲 $a$ 元,年利率爲 $i$,則一年的利息爲 $ai$ 元,t 年的利息爲 $ait$ 元,t 年的本利和爲 $a(1+it)$ 元.

例 10. 以每時 $v$ 里的等速度行 $t$ 時後的距離,可用 $vt$ 里表示.今設此距離爲 $S$,則

$$S=vt$$

$$\therefore\quad \frac{S}{v}=t\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \frac{S}{t}=v\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)示以速度除距離得時間,(2)示以時間除距離得速度.

例 11. 58 的數目,卽示 $50+8=5\times10+8=10\times5+8$,所以令十位數字爲 $x$,個位數字爲 $y$,則此二位數可表以 $10x+y$.同樣三位數可表以 $100x+10y+z$.

## 10. 一元一次方程式應用問題

例 1. 某數的 2 倍加 3 則得 9,如以式表之,可令某數爲 $x$,則其二倍爲 $2x$,再加 3 爲 $2x+3$;因此數爲 9,所以

$$2x+3=9$$

此等式不能令 $x$ 爲任何值而成立,須與以特種值才能成立.欲求此特種值,宜解此一元一次方程式.解之,得 $x=3$ 的根.但 $x$ 代表所求的數,因此所求的數爲 3.

例 2. 某數加 4 後其和的 4 倍,等於某數的 5 倍減 4;今欲求某數,可令所求的數爲 $x$,則此數加 4 後的 4 倍爲 $4(x+4)$,此數的 5 倍減 4 爲 $5x-4$,所以得一元一次方程式如次

$$4(x+4)=5x-4$$

解此方程式

$$4x+16=5x-4 \qquad \therefore \quad x=20$$

由此所求的數爲 20.

例 3. 甚麼數的二分之一減 12,等於此數的三分之一減 6?

【解】 欲立式解此問題,可令所求的數爲 $x$,則此

數的二分之一減12表以$\frac{1}{2}x-12$,此數的三分之一減6表以$\frac{1}{3}x-6$,因得次之一元一次方程式:

$$\frac{1}{2}x-12=\frac{1}{3}x-6$$

去分母後再整理

$$3x-72=2x-36 \qquad \therefore\ x=36$$

由此所求的數爲36.

【注意】 以上各例,令某字母(普通爲$x$)代欲求的數,依題中事實作方程式,解此方程式得$x$的值;但求得的值是否與方程式適合,實際尚須驗算.前例雖省卻此番手續,學者宜照此實行,並參看以下各例.

例4. 有二數,其和爲50,其差爲8,求二數.

【解】 今令大數爲$x$,則因差爲8而小數可表以$x-8$;由此二數的和可表以$x+(x-8)$.但此和爲50,所以得次之方程式:

$$x+(x-8)=50$$

$$2x-8=50 \qquad 2x=58 \qquad \therefore\ x=29$$

由此大數爲29,小數爲$29-8=21$.

例5. 分24爲二份,欲使其一份的三倍,等於他份的五倍,問如何分法?

【解】　令一份爲 $x$,則他份爲 $24-x$. 因此其一份的三倍爲 $3x$,他份的 5 倍爲 $5(24-x)$, 所以得次之方程式:

$$3x=5(24-x)$$

$$3x=120-5x$$

$$8x=120 \qquad \therefore \quad x=15$$

由此　$24-x=24-15=9$

所以一份爲 15,他份爲 9.

例 6.　分130爲五份,令甲比乙、乙比丙、丙比丁、丁比戊順次各少 12,求各份的數.

【解】　令甲爲 $x$,則乙爲 $x+12$, 丙爲 $x+24$, 丁爲 $x+36$, 戊爲 $x+48$. 因此各份的和爲原數 130, 所以得次列方程式:

$$x+(x+12)+(x+24)+(x+36)+(x+48)=130$$

由此　$5x=10 \qquad \therefore \quad x=2$

所求各份的數爲 2, 14, 26, 38, 50.

例 7.　連續三個整數的和爲54,各數如何?

【解】　令連續三個整數爲 $x-1$、$x$、$x+1$, 因其和等於 54,則

$$(x-1)+x+(x+1)=54$$

$$3x=54 \qquad \therefore \quad x=18$$

由此所求的數爲17、18、19.

例 8. 父45歲,子13歲,幾年後父年爲子年的三倍?

【解】 設 $x$ 年之後父年爲子年的三倍,則父年爲 $45+x$,子年爲 $13+x$.因此時父年爲子年的三倍,故得次之方程式:

$$45+x=3(13+x)$$

解之得 $45+x=39+3x \qquad \therefore \quad -2x=-6$

$$\therefore \quad x=3 \qquad \text{(答)}\ 3\ \text{年後.}$$

例 9. 今年父的歲數,恰爲子的四倍.到五年後,父年爲子年的三倍.問今年父子各幾歲?

【解】 設今年子的歲數爲 $x$,則父年爲 $4x$.五年後,父年爲 $4x+5$,子年爲 $x+5$;此時父年恰爲子年的三倍,故得次之方程式:

$$4x+5=3(x+5)$$

解之 $4x+5=3x+15$

$\therefore \quad x=10 \qquad 4x=40$ 　(答) 父40歲,子10歲.

例 10. 有鶴及龜,足數共240,頭數共70.問鶴及龜各幾個?

【解】 令鶴的個數爲 $x$,則龜的個數爲 $70-x$. 由此足數鶴爲 $2x$ 龜爲 $4(70-x)$. 但足數共爲 240. 故得次之方程式:

$$2x+4(70-x)=240$$

兩邊各除 2 $\quad x+\ (70-x)=120$

$$x+140-2x=120 \qquad -x=-20$$

$$\therefore\ x=20 \qquad 70-x=50$$ (答)鶴 20 個,龜 50 個.

例 11. 某人以其所有金的一半借出,年利率五釐半,三分之一借出,年利率五釐;其餘的則以年利率四釐半借出.至一年終了,得本利和 3155 元.問此人原有金多少?

【解】 令原有金爲 $x$ 元,則其一半爲 $\frac{1}{2}x$ 元,一年的本利和爲 $\frac{1}{2}x\times1.055$ 元.又原有金的 $\frac{1}{3}$ 爲 $\frac{1}{3}x$ 元,一年的本利和爲 $\frac{1}{3}x\times1.05$ 元.其餘的原有金爲 $x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{6}x$ 元,一年的本利和爲 $\frac{1}{6}x\times1.045$ 元,三種本利和的元數,共

$$\frac{1}{2}x\times1.055+\frac{1}{3}x\times1.05+\frac{1}{6}x\times1.045$$

等於 3155, 所以得方程式如次:

$$\frac{1}{2}x\times1.055+\frac{1}{3}x\times1.05+\frac{1}{6}x\times1.045=3155$$

解之 $3.165x+2.1x+1.045x=18930$

$$3165x+2100x+1045x=18930000$$

$$6310x=18930000$$

$$\therefore\quad x=3000 \qquad \text{(答) } 3000 \text{ 元}$$

例12. 有正方形地一塊,若縱增 6 丈,橫減 4 丈,則其面積與原來一樣.求正方地的邊長.

【解】 令正方地的一邊爲 $x$ 丈,則其面積爲 $x^2$ 平方丈.又縱增 6 丈得 $(x+6)$ 丈,橫減 4 丈得 $(x-4)$ 丈,面積爲 $(x+6)(x-4)$ 平方丈.此面積與原來面積相等,所以得次之方程式:

$$(x+6)(x-4)=x^2$$

左邊相乘,再整理而消去 $x^2$ 項,便得一次方程式.即

$$x^2+2x-24=x^2 \qquad 2x=24$$

$$\therefore\quad x=12 \qquad \text{(答) } 12 \text{ 丈}$$

例13. 有二位數,其個位數字與十位數字的和爲 7,若加 9 於原數,則其數字的位置倒轉.求原數.

【解】 令個位數爲 $x$,則十位數爲 $7-x$,原來的二位數爲 $10(7-x)+x$.今於此數加 9,則得數字倒轉的二位數 $10x+(7-x)$.所以依題得方程式:

$$10(7-x)+x+9=10x+(7-x)$$

解之　$70-10x+x+9=10x+7-x$

$\therefore\ x=4 \qquad 7-x=3$　　(答)原數爲34

例14. 某人到某地去旅行,以每時4里的速步行,則比原定時刻遲到6時;若乘車每時行9里,可比原定時刻早到4時.求某地的距離.

【解】　設某地的距離爲$x$里,則步行$\frac{x}{4}$時可到,車行$\frac{x}{9}$時可到.但步行達到的時間,比原定時刻遲6時,所以原定時刻爲$\left(\frac{x}{4}-6\right)$時;又車行達到的時間,比原定時刻早4時,所以原定時刻爲$\left(\frac{x}{9}+4\right)$時.因原定的時刻相等,故得次之方程式:

$$\frac{x}{4}-6=\frac{x}{9}+4$$

解之　$\frac{x}{4}-\frac{x}{9}=10$

$9x-4x=360 \qquad 5x=360$

$\therefore\ x=72$　　(答)72里

【注意】　關於距離問題,欲概照題意作方程式,未免困難.上例則就原定時刻着想而作成方程式.

例15. 甲、乙、丙、丁四人分銀1000元,甲比乙多25元,丙比甲乙的和多5元,丁比甲多45元;各人應得多少?

【解】 設甲應得 $x$ 元,則

乙得 $(x-25)$ 元,

丙得 $x$ 元 $+(x-25)$ 元 $+5$ 元 $=(2x-20)$ 元,

丁得 $(x+45)$ 元.

因此等的和等於1000元,所以得次之方程式:

$$x+(x-25)+(2x-20)+(x+45)=1000$$

解之 $5x=1000$ $\therefore\ x=200$

| | |
|---|---|
| 甲 | 200元 |
| 乙 | 175元 |
| 丙 | 380元 |
| 丁 | 245元 |
| 計 | 1000元 |

例16. 某家雇一女傭,言明每年工銀30元,再給衣服一套.後來滿了九個月,付銀21元及衣服一套解雇.問衣服一套的價值多少?

【解】 令衣服一套的價值爲 $x$ 元,則一年間支給總數爲 $(30+x)$ 元;所以9個月的支給爲 $\dfrac{9(30+x)}{12}$ 元,即 $\dfrac{3(30+x)}{4}$ 元.今實際支給 $(21+x)$ 元因得方程式如次:

$$\frac{3(30+x)}{4}=21+x$$

解之　$90+3x=84+4x$　　$\therefore\ x=6$　　（答）6 元

例 17. 某鐵路規定旅客每人可帶免費行李若干斤.今有旅客二人共帶 360 斤行李,一人出費 2 元,他一人出費 2 元 8 角.若此二人行李作爲一人所帶,則須出費 6 元.問某鐵路規定的免費行李是多少斤?

【解】　設每人可帶免費行李 $x$ 斤,則二人可帶 $2x$ 斤,須出運費的行李爲 $(360-2x)$ 斤.因二人共付運費 2 元 + 2.8 元 = 4.8 元,所以運費 1 角得運的行李爲 $\frac{360-2x}{480}$ 斤.

又二人的行李作爲一人帶時須出運費的行李爲 $(360-x)$ 斤.因其運費爲 6 元,所以運費 1 角得運的行李是 $\frac{360-x}{600}$ 斤.令以上兩式相等,即得方程式如次:

$$\frac{360-2x}{480}=\frac{360-x}{600}$$

$$\therefore\quad 600(360-2x)=480(360-x)$$

兩邊用 240 除　　$900-5x=720-2x$

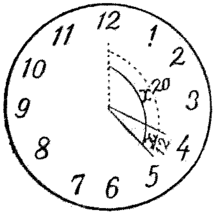
$$-3x=-180\qquad\therefore\ x=60$$　　（答）60 斤

例 18. 在四時與五時之間,求鐘面上時針與分針,(A)成相重的時刻,(B)成一直線的時刻,(C)成直角的時刻.

【解】　鐘上時刻的讀法,例如時針(即短針)在 3 與

4之間,而分針(即長針)指定7上,則分針從12數起得35分,加上時針的3時讀做3時35分.本題所求的時刻,在4時與5時之間.若令所求的分數爲$x$,則分針行$x$分,時針必行其$\frac{1}{12}$即$\frac{x}{12}$分.詳細的說,分針進行60分,時針進行5分;所以分針進行1分,時針必行其$\frac{5}{60}$即$\frac{1}{12}$,由此關係作下列方程式.

(*A*)



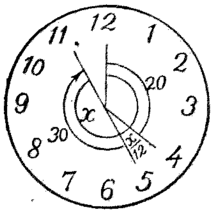

圖(*A*)從(12)至(4)的分數爲20分,從(4)至所求的分數爲$\frac{x}{12}$分,所以得次之方程式:

$$x=20+\frac{x}{12}$$

解之 $x=21\frac{9}{11}$

又圖(*B*)從(12)至(4)爲20分,從(4)至時針成一直線的位置爲$\frac{x}{12}$分,從此時針至分針成一直線的位置爲30分,所以得次之方程式:

(*B*)




$$x=20+\frac{x}{12}+30$$

解之 $x=54\frac{6}{11}$

(*C*)圖從略,但其位置有二:

**第一** 令最初成直角的時刻爲$x$分,則從此時分針的位置至時針的位置爲15分,從(12)至時針的位置

爲 $x+15$ 分.又從(12)至(4)之間爲20分,從此至時針的位置爲 $\frac{x}{12}$ 分,所以從(12)至時針的位置爲 $20+\frac{x}{12}$ 分.由此得次之方程式:

$$x+15=20+\frac{x}{12} \qquad \therefore\ x=5\frac{5}{11}$$

第二　令其次成直角的時刻爲 $x$ 分,則同樣得

$$x=20+\frac{x}{12}+15 \qquad \therefore\ x=38\frac{2}{11}$$

(答)
(A) 四時二十一分又十一分之九
(B) 四時五十四分又十一分之六
(C) 四時五分又十一分之五
四時三十八分又十一分之二

例19.　有甲、乙、丙、丁四數,其和爲64;若甲加3,乙減3,丙乘3,丁除3,則都相等,問各數如何?

【解】　取都等的數爲未知數,用 $x$ 來代表,則甲爲 $x-3$, 丙爲 $x+3$, 乙爲 $\frac{x}{3}$, 丁爲 $3x$;此四數的和等於64,故得次之方程式:

$$(x-3)+(x+3)+\frac{x}{3}+3x=64$$

解之　$5x+\frac{x}{3}=64 \qquad 15x+x=192$

$16x=192 \qquad \therefore\ x=12$

由此甲爲9,乙爲15,丙爲4,丁爲36.

## 習題二

1.　分40為二份令其一份的三倍,比他份的五倍多52;求各份的數.

2.　有連續的三個偶數,其和為96,求各數.

3.　今年母31歲,子7歲;問幾年前母年為子年的7倍?

4.　甲有銀元數為乙的4倍,若兩人各用去5元則甲所餘銀元數為乙所餘的5倍;求兩人原有銀各多少?

5.　有五角銀幣與二角銀幣共50個,合計14元5角;問兩種銀幣各幾個?

6.　以銀1000元分存甲乙兩銀行,甲行年利率5釐,乙行年利率4釐.從兩行取得一年的利息,恰合本銀的4釐4毫.求存入各行的元數.

7.　有二位數,其個位數為十位數的3倍.若於此數加54,則數字的位置倒轉.求此數.

8.　某人從甲市往乙市,以每時3哩的速率行去路程的一半,其餘以每時4哩的速率進行.若全路都照3.5哩的速率行走,則可比前早到5分鐘.求甲乙兩市的距離.

9.　人力車在某路程內往來,去時每時行2里,歸時

每時行1.5里;往來一次,共費7時.問其路程幾何?

10. 有四個數,其每三個之和爲20,22,24,27,求各數.

# 第四章　一次聯立方程式

## 1. 聯立方程式

含有二個未知數(例如$x$、$y$)的方程式,如

$$x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其適合此未知數的值,可有幾組而無限制.

即　$x=1$　則　$y=4$

$x=2$　則　$y=3$

$x=3$　則　$y=2$

$x=4$　則　$y=1$

$x=5$　則　$y=0$

又　$x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

其適合此未知數的值,亦可有幾組而無限制.

即　$x=1$　則　$y=0$

$x=2$　則　$y=1$

$x=3$　則　$y=2$

$x=4$　則　$y=3$

但欲同時適合此(1)與(2)二方程式中未知數的值,則僅有$x=3$, $y=2$,而無他數.

照此由未知數的同值,同時適合的二個以上方程式,

叫聯立方程式.此未知數的值叫根.

【注意】　含有未知數二個的叫二元聯立方程式,含三個的叫三元聯立方程式.

**2.** 二元一次聯立方程式

二元一次聯立方程式的解法,雖有種種,但最簡單的是加減法,今示其例於次.

例 1.　試解 $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

【解】　等式加等式或等式減等式,仍成等式.此事實稱爲兩邊相加或兩邊相減.

將本題的方程式兩邊相加,則得 $2x=6$,爲不含 $y$ 的方程式.

又將方程式兩邊相減,則得 $2y=4$,爲不含 $x$ 的方程式.

由此得　$x=3$,　$y=2$

此結果依上例驗算,能適合兩方程式.

例 2.　試解 $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

【解】　兩邊相加得　$6x=12$

兩邊相減得　$4y=4$

由上兩一元方程式得　$x=2$,　$y=1$

此兩根代入本題兩方程式驗算,都能適合.

例 3.　試解 $\begin{cases} x+2y=7. \\ x-y=1 \end{cases}$

【解】　本題兩邊相加得 $2x+y=8$，雖含 $x$、$y$ 二元；但兩邊相減，則得 $3y=6$，爲不含 $x$ 的一元方程式，由此得 $y=2$. 以此 $y$ 的值代題式 $x+2y=7$ 的 $y$，得 $x+4=7$，所以 $x=3$.

因此所求的根爲　$x=3,\quad y=2$

例 4.　解 $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ x+2y=8 \end{cases}$

【解】　兩邊相加，得 $4x+4y=20$，雖含 $x$、$y$ 二元；但兩邊相減，則得　$2x=4,\qquad \therefore\ x=2$

以此值代題式 $x+2y=8$ 的 $x$，得　$2+2y=8,\quad \therefore\ y=3$

由此求得的根爲　$x=2,\qquad y=3$

【注意】　以上數例，其 $x$ 或 $y$ 一方係數的絕對值相等時，將兩方程式加或減而得不含此未知數的方程式由此可求一未知數的值.既得一未知數的值，則他一未知數亦容易求得.

照此作不含一方未知數的方程式，如不含 $y$ 的稱爲消去 $y$，不含 $x$ 的稱爲消去 $x$.

例 5.　解 $\begin{cases} 4x+3y=15 \\ x-y=2 \end{cases}$

【解】　本題 $x$、$y$ 的係數都不等照原式加減，不能消去 $x$ 或 $y$. 但因方程式的兩邊，乘以同數，其方程式的根不變；故第二方程式兩邊同乘以 3，得 $3x-3y=6$.

以此與第一方程式兩邊相加,可消去 $y$,

$7x=21 \quad \therefore \quad x=3$

以此值代入第二方程式 $3-y=2 \quad \therefore \quad y=1$

$\therefore \quad x=3, \quad y=1$

【注意】 以 4 乘第二方程式成 $4x-4y=8$,由第一方程式減之,雖亦可得解,但以用較簡的數相乘爲便.

例 6. 解 $\begin{cases} x-2y=13 \\ 3x-\ \ y=14 \end{cases}$

【解】 $x-2y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$3x-\ \ y=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

將(2)式用 2 乘 $6x-2y=28 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

從(1)式減(3)式 $-5x=-15 \quad \therefore \quad x=3$

從(2)式 $9-y=14 \quad \therefore \quad y=-5$

$\therefore \quad x=3, \quad y=-5$

例 7. 解 $\begin{cases} 4x+3y=16 \\ 5x+2y=13 \end{cases}$

【解】 欲使兩方程式中 $x$ 或 $y$ 的係數相等,則因 $y$ 的數字比較簡單,所以將前方程式用 2 乘,後方程式用 3 乘,則得

$8x+6y=32 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$15x+6y=39 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

將此兩方程式相減 $-7x=-7 \quad \therefore \quad x=1$

從(1) $4+3y=16$ $\therefore\ y=4$

$\therefore\ x=1,\quad y=4$

例 8. 解 $\begin{cases}3x+4y=24\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\5x-6y=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

【解】 欲消去 $x$,則以 5 乘(1),3 乘(2)便得.如欲消去 $y$,則不必以 6 乘(1),4 乘(2),使其係數相等;可依據 $y$ 係數 4 與 6 的最小公倍數12,以 3 乘(1),2 乘(2)便可.即

$$9x+12y=72$$

$$10x-12y=4$$

兩邊相加 $19x=76$ $\therefore\ x=4$

從(1) $12+4y=24$ $\therefore\ y=3$

$\therefore\ x=4\quad y=3$

【注意】 如上法的解方程式,亦稱加減法.

二元一次聯立方程式其一般形式如次:

$$ax+by=c$$

$$px+qy=r$$

更比此複雜的形式,可先化成此種形式,再依上例去解,茲示例於次.

例 9. 解 $\frac{2}{3}x+y=8,\quad x+\frac{y}{4}=7$

【解】 去各方程式的分母

$2x+3y=24\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$4x+\ y=28\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

2 乘 (1) $4x+6y=48\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3) 減 (2) $5y=20 \qquad \therefore\ y=4$

由 (2) $4x+4=28 \qquad \therefore\ x=6$

$\therefore\ x=6, \qquad y=4$

例 10. 試解 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2, \quad \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=6$

【解】 去各方程式的分母

$3x+2y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$3x-8y=72\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

各邊相減 $10y=-60 \qquad \therefore\ y=-6$

由 (1) $3x+2\times(-6)=12 \qquad \therefore\ x=8$

$\therefore\ x=8, \qquad y=-6$

例 11. $x-\frac{1}{7}(y-2)=5, \quad 4y-\frac{1}{3}(x+10)=3$, 試解此聯立方程式.

【解】 去各方程式的分母再整理之.

$7x-(y-2)=35 \qquad \therefore\ 7x-y+2=35$

$\therefore\ 7x-y=33\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$12y-(x+10)=9 \qquad \therefore\ 12y-x-10=9$

$\therefore\ -x+12y=19\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

7 倍(2),再加(1)　$-7x+84y=133$

$$7x-\ \ y=\ 33$$

$\therefore$　$83y=166$　$\therefore$　$y=2$

由(1)　$7x-2=33$　$\therefore$　$x=5$

$\therefore$　$x=5,\quad y=2$

例 12. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ 解此方程式.

【解】　去(1)方程式的分母,再順次整理之,

$$20(x+1)-15(y+2)=24(x-y)$$

$\therefore$　$20x+20-15y-30=24x-24y$

$\therefore$　$4x-9y=-10\cdots\cdots\cdots(3)$

去(2)方程式的分母,再順次整理之,

$$3(x-3)-4(y-3)=12(2y-x)$$

$\therefore$　$3x-9-4y+12=24y-12x$

$\therefore$　$15x-28y=-3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)與(4)消去 $x$,所以用 15 乘(3),4 乘(4)

$$60x-135y=-150$$

$$60x-112y=-\ 12$$

$\therefore$　$-\ 23y=-138$　$\therefore$　$y=6$

由(3) $4x-54=-10$ $\therefore$ $x=11$

$\therefore$ $x=11,$ $y=6$

例 13. $\left.\begin{array}{l}(x+1)(y+5)=(x+5)(y+1)\cdots\cdots(1)\\ xy+x+y=(x+2)(y+2)\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ 解此聯立方程式.

【解】 將(1)的兩邊行乘算以解去括號,并整理之,

$$xy+5x+y+5=xy+x+5y+5$$

$$4x-4y=0 \qquad \therefore \quad x-y=0\cdots\cdots(3)$$

解去(2)右邊的括號,并整理之,

$$xy+x+y=xy+2x+2y+4$$

$$x+y=-4\cdots\cdots(4)$$

(3)與(4)各邊相加 $2x=-4$

又(3)與(4)各邊相減 $2y=-4$

$\therefore$ $x=-2,$ $y=-2$

例 14. $\left.\begin{array}{l}0.5x-1.2y=-0.5\cdots\cdots(1)\\ 1.5x+0.4y=\ \ 0.5\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ 試解此聯立方程式.

【解】 因欲去各方程式的小數點,所以兩邊乘10倍

$$5x-12y=-5\cdots\cdots(3)$$

$15x+\ 4y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

將(4) 3 倍 $45x+12y=15\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(3)與(5)各邊相加 $50x=10 \quad \therefore \quad x=\frac{1}{5}=0.2$

由(4) $15\times\frac{1}{5}+4y=5 \quad 4y=2 \quad \therefore \quad y=\frac{1}{2}=0.5$

$\therefore \quad x=0.2, \quad y=0.5$

例 15. $\left.\begin{aligned} 37x+19y=55 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 19x+37y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$ 試解此聯立方程式.

【解】 本例一方程式中 $x$ 與 $y$ 的係數,恰與他方程式中 $x$ 及 $y$ 的係數相反,故可運算如次.

將題式兩邊相加 $56x+56y=56$

兩邊都用56來除 $x+y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

將題式兩邊相減 $18x-18y=54$

兩邊都用18來除 $x-y=3\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)與(4)解得 $x=2, \quad y=-1$

例 16. $\left.\begin{aligned} y=2x-5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 7x-3y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$ 解此聯立方程式.

【解】 由(1)得 $y$ 的值等於 $2x-5$,故以此值代(2)方程式的 $y$,可將 $y$ 消去.

即 $7x-3(2x-5)=20$

$$7x-6x+15=20 \qquad \therefore \quad x=5$$

由(1) $y=10-5=5$

$$\therefore \quad x=5, \qquad y=5$$

【注意】 此解法稱爲代入法,在解聯立方程式時,可以一般適用;例如欲解

$$3x+7y=27 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$5x+11y=43 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)得 $y=\dfrac{27-3x}{7}$, 以此代(2)的 $y$, 則

$$5x+\frac{11(27-3x)}{7}=43$$

解此僅含 $x$ 的方程式便可.

但因代入法大概能生分數(如本例則生分母爲 7 的分數),解法較煩,所以一般多用加減法.前例因 $y$ 無係數,可以不生分數,故用代入法解之.

## 習題一

試解次之聯立方程式:

1. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5}=10-\dfrac{y}{3} \\[2ex] \dfrac{4y-3x}{6}=\dfrac{3x}{4}+1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=9 \\[2ex] \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} xy-(x-1)(y-1)=6(y-1) \\ x-y=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases}(x+3)(y-3)=(x-2)(y+7)\\ x+3y-4=2(x+y)\end{cases}$

5. $x+0.2y=-14,\quad 0.4x-y=1.6$

6. $0.3x+0.125y=x-6,\quad 3x-0.5y=28-0.25x$

7. $5x-8y=-39,\quad 8x-5y=0$

8. $(x+2)(y+3)=xy+64,\quad (x+3)(y+2)=xy+68$

9. $3x+4y=5,\quad 2y=9x$

10. $x=3y+1,\quad 2x-5y=2$

### 3. 二元一次方程式應用問題

將問題用式子來表示而作方程式,與一元一次方程式應用問題相同;所不同的地方,僅在未知數用 $x$、$y$ 二個而已.今示其例於次.

例 1. 二數的和爲15,差爲3;求此二數.

【解】 令二數爲 $x$ 與 $y$,則因其和爲15得

$$x+y=15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又因其差爲3得

$$x-y=3\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解此二方程式得

$$x=9,\qquad y=6$$

故所求二數爲9與6.

例 2. 甲所有銀元的二倍,比乙所有銀元的三倍少15元.若由甲給乙30元,則兩人所有銀元數相等.問兩人各有銀元若干.

【解】 令甲所有爲 $x$ 元,乙所有爲 $y$ 元,則甲有銀元的二倍爲 $2x$ 元,乙有銀元的三倍爲 $3y$ 元.但題言 $2x$ 元比 $3y$ 元少15元,以式表之得

$$2x=3y-15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又甲給乙30元後甲爲 $(x-30)$ 元,乙爲 $(y+30)$ 元,題言此兩數相等,以式表之得

$$x-30=y+30\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

整理(1)與(2)得

$$2x-3y=-15\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x-y=60\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)與(4)消去 $x$ $\qquad y=135$

由(4) $\quad x-135=60 \qquad \therefore\ x=195$

(答) 甲195元,乙135元

例 3. 有父子二人,已知二年前父年爲子年的四倍,再隔四年後,父年爲子年的三倍.求父子現在的年齡.

【解】 令今年父爲 $x$ 歲,子爲 $y$ 歲,則二年前父年

$(x-2)$ 歲,子年 $(y-2)$ 歲,此時父年爲子年的四倍,以式表之得

$$x-2=4(y-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又至四年後,父 $(x+4)$ 歲,子 $(y+4)$ 歲,此時父年爲子年的三倍,以式表之得

$$x+4=3(y+4)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因欲求適合此兩方程式 $x$、$y$ 的值,所以整理(1)、(2)兩方程式得

$$x-4y=-6\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x-3y=\ \ 8\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)減(3)得 $y=14$

由(4)得 $x-3\times 14=8$ $\therefore\ x=50$

(答)父 50 歲,子 14 歲

例 4. 某人有二角銀幣與一角銀幣各若干個,共計 1 元 7 角.若將二角銀幣與一角銀幣的個數對調,則共計可多 2 角.問此二種銀幣各幾個?

【解】 令 $x$ 爲二角銀幣的個數,$y$ 爲一角銀幣個數,則二角銀幣值 $2x$ 角,一角銀幣值 $y$ 角.其和 $(2x+y)$ 角,題言共計 1 元 7 角,所以

$$2x+y=17\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又兩種銀幣的個數對調,則值$(2y+x)$角,題言此值等於$(17+2)$角$=19$角,所以

$$2y+x=19\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因(1)、(2)兩聯立方程式中,$x$與$y$的係數相反,故可根據前例的簡法,先作(1)與(2)的和

$$3x+3y=36 \qquad x+y=12\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又作(1)與(2)的差

$$x-y=-2\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

解(3)與(4)得　$x=5$,　$y=7$

(答)二角銀幣 5 個,一角銀幣 7 個

例 5. 有矩形地一方,若縱增 3 尺,橫增 2 尺,則面積增78平方尺;又若縱增 2 尺,橫增 3 尺,則面積增84平方尺.問此地縱橫各若干?

【解】　令$x$為縱的尺數,$y$為橫的尺數,則此地面積為$xy$平方尺.若縱增 3 尺,橫增 2 尺則矩形地積為$(x+3)(y+2)$平方尺.又若縱增 2 尺,橫增 3 尺,則矩形地積為$(x+2)(y+3)$平方尺.依題意得次之二方程式:

$$(x+3)(y+2)=xy+78\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x+2)(y+3)=xy+84\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

整理之

$$2x+3y=72\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$3x+2y=78\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3),(4)各邊相加

$$5x+5y=150\qquad x+y=30\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(3),(4)各邊相減　　$x-y=6\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

由(5)與(6)得　　$x=18$　　$y=12$

(答)縱1丈8尺,橫1丈2尺

例6. 買進綢25段,布80段,共價銀116元.後來綢得利3成,布得利2成5分,以148元賣去.求綢及布每段的進價多少?

【解】 令綢每段的進價爲 $x$ 元,布每段的進價爲 $y$ 元,則綢25段的價爲 $25x$ 元,布80段的價爲 $80y$ 元,其和爲116元,所以

$$25x+80y=116\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又賣出時綢得利3成,每段得利 $0.3x$ 元;布得利2成5分,每段得利 $0.25y$ 元.而綢25段與布80段的利益爲 $(0.3x\times25+0.25y\times80)$ 元,此利益與148元$-$116元$=$32元相當,即

$$0.3x\times25+0.25y\times80=32\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

化(2)爲簡單　$7.5x+20y=32$

兩邊4倍之　$30x+80y=128 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(1)與(3)消去 $y$,則　$5x=12$　$\therefore\ x=2.4$

由(1)得　$25\times 2.4+80y=116$　$\therefore\ y=0.7$

(答)綢每段2元4角,布每段7角

例7. 有二十二開(Carat)與十八開的金塊共28兩,其中含有純金22兩;求二種金塊各幾兩.

【解】 令二十二開的金塊爲 $x$ 兩,十八開的金塊爲 $y$ 兩,則因其和爲28兩,所以

$$x+y=28 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又二十二開的金塊,就是說金24兩中含有純金22兩,因此 $x$ 兩中含有純金 $\frac{22}{24}x$ 兩;同樣十八開的金塊 $y$ 兩中含有純金 $\frac{18}{24}y$ 兩.此兩純金的和,題言等於22兩,所以

$$\frac{22}{24}x+\frac{18}{24}y=22$$

去分母　$22x+18y=22\times 24$

除以2　$11x+9y=264 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)與(2)消去 $y$　$x=6$

由(1)　$y=22$

(答)二十二開金6兩,十八開金22兩

例 8. 有二位數,於此數加 9,則數字的位置倒轉;又此數等於個十兩位數字之和的 5 倍.求此數.

【解】 以 $10x+y$ 表二位數,則數字位置倒轉的數爲 $10y+x$,依題意作次之方程式:

$$10x+y+9=10y+x \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又此數爲個位數與十位數之和 $x+y$ 的 5 倍,所以

$$10x+y=5(x+y) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) $9x-9y=-9$ $\qquad x-y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (2) $5x-4y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

4 倍 (3) $4x-4y=-4 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4) 與 (5) 各邊相減 $x=4$

由 (3) $4-y=-1 \quad \therefore \quad y=5$

故所求的數爲 45.

例 9. 有甲乙二數,甲數的一半與乙數的三分之一之和爲 16,甲數的四分之一與乙數的五分之一之和爲 9.求甲乙二數.

【解】 令甲數爲 $x$,乙數爲 $y$,則 $\frac{1}{2}x$ 表甲數的一半,$\frac{1}{3}y$ 表乙數的三分之一,依題意

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又甲數的四分之一表以 $\frac{1}{4}x$,乙數的五分之一表以

$\frac{1}{5}y$, 依題意

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y=9\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

去(1)(2)的分母,整理之

$$3x+2y=96\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$5x+4y=180\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

2倍(3) $6x+4y=192\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

由(5)減(4) $x=12$

由(3) $36+2y=96$ $\therefore\ y=30$

(答)甲數12,乙數30

例10. 有每日讀若干頁於若干日可讀畢的書籍,若每日多讀5頁,則可早10日讀畢;又若每日多讀10頁,則可早16日讀畢.求此書籍的頁數.

【解】 設此書每日讀 $x$ 頁而 $y$ 日可讀畢,則此書頁數爲 $xy$.若此書每日讀 $x+5$ 頁,則讀 $(y-10)$ 日可畢;所以此書頁數亦爲 $(x+5)(y-10)$,由此作方程式

$$xy=(x+5)(y-10)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又每日讀 $(x+10)$ 頁,則讀 $(y-16)$ 日可畢;所以

$$xy=(x+10)(y-16)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1) $xy=xy-10x+5y-50$

$10x-5y=-50$ $2x-y=-10\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (2) $xy=xy-16x+10y-160$

$16x-10y=-160 \quad 8x-5y=-80 \cdots\cdots (4)$

由 (3) 與 (4) 消去 $y$ $\quad 10x-5y=-50$

$8x-5y=-80$

$2x=30 \quad \therefore \quad x=15$

由 (3) $2\times15-y=-10 \quad \therefore \quad y=40$

故 $xy=15\times40=600$ (答) 600 頁

## 習題二

1. 蘋果 15 個,柿子 20 個,共價 1 元 1 角 5 分;若蘋果 20 個,柿子 15 個,共價 1 元 3 角.各個的價多少?

2. 某校開校友會,若出席者比豫定人數多 5 名,則每人會費比豫定數減少 1 角;又若出席者比豫定人數少 6 名,則每人會費比豫定數增加 1 角 5 分.問豫定的人數及會費各如何?

3. 有銀的合金二種,甲種成色 0.82,乙種成色 0.95.今將此二種混合,作成色 0.9 的丙種銀塊 30 兩.問每種各配幾兩?

4. 有二位數,以 5 除之,得商爲十位數字的 2 倍,餘 1;又以 8 除之,得商爲個位數字的 5 倍,也餘 1 求原數.

5. 有果子若干個,分給兄弟兩兒童,兄所得的一半與弟所得的三分之一相等;又兄比弟少得10個,問各得多少?

6. 有布2丈8尺,欲分截爲二段,使其長者四折之一與短者三折之一的和,比長者與短者之差的五倍多1寸,求各段的長.

**4.** 三元一次方程式

例 1. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2x+y-z&=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ x+2y+z&=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$ 試解之.

【解】 加(1)與(2)以消去 $z$,則得

$$3x+2y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

加(2)與(3)以消去 $z$,則得

$$3x+3y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)減(4)得 $y=2$

由(4) $3x+4=7$ $\therefore\ x=1$

由(1) $1+2+z=6$ $\therefore\ z=3$

故所求的根 $x=1,\quad y=2,\quad z=3$

例 2. $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=4 \cdots\cdots\cdots(1)\\ 5x+y+3z&=5 \cdots\cdots\cdots(2)\\ 2x-3y+4z&=20 \cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$ 試解之.

【解】　(1) 加 (2) 則 $y$ 可以消去,即

$$7x+4z=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

取 (1) 的 3 倍,再由此減去 (3),

$$\begin{array}{l} 6x-3y+3z=12 \\ \underline{2x-3y+4z=20} \\ 4x \quad\quad -\ z=-8\cdots\cdots\cdots(5) \end{array}$$

由 (4) 與 (5) 以消去 $z$

$$23x \quad -23 \qquad\qquad \therefore\ x=-1$$

由 (5)　$-4-z=-8 \qquad \therefore\ z=4$

由 (1)　$-2-y+4=4 \qquad \therefore\ y=-2$

由此得所求的根　$x=-1,\quad y=-2,\quad z=4$

例 3.
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-5z=7\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-2y+\ z=6\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ x+\ y-3z=2\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$$ 試解之.

【解】　由 (1) 與 (3) 消去 $x$

$$\begin{array}{r} 2x+3y-5z=7 \\ \underline{2x+2y-6z=4} \\ y+\ z=3\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{array}$$

由 (2) 與 (3) 消去 $x$

$$
\begin{array}{r}
3x-2y+\ \ z=6 \\
3x+3y-\ 9z=6 \\
\hline
-5y+10z=0
\end{array}
$$

兩邊以$-5$除　$y-2z=0$……………………(5)

由(4)與(5)消去 $y$　$3z=3$　　$\therefore\ z=1$

由(5)　$y-2=0$　　$\therefore\ y=2$

由(3)　$x+2-3=2$　　$\therefore\ x=3$

由此所求的根　$x=3,\quad y=2,\quad z=1$

例 4.
$$
\left.\begin{array}{l}
5x-3y+4z=27\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\
2x+4y-3z=\ 7\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\
2x+\ y+2z=22\cdots\cdots\cdots\cdots(3)
\end{array}\right\}\text{試解之.}
$$

【解】　由(1)與(3)消去 $y$

$$
\begin{array}{r}
5x-3y+\ 4z=27 \\
6x+3y+\ 6z=66 \\
\hline
11x\qquad +10z=93
\end{array}
$$
……………………(4)

由(2)與(3)消去 $y$

$$
\begin{array}{r}
3x+4y-\ 3z=\ 7 \\
8x+4y+\ 8z=88 \\
\hline
5x\qquad +11z=81
\end{array}
$$
……………………(5)

由(4)與(5)消去 $z$

$$\begin{array}{rl} 121x+110z= & 1023 \\ 50x+110z= & 810 \\ \hline 71x\qquad = & 213 \end{array}\qquad \therefore\ x=3$$

由(4) $\quad 33+10z=93 \qquad \therefore\ z=6$

由(3) $\quad 6+y+12=22 \qquad \therefore\ y=4$

故所求的根 $\quad x=3,\quad y=4,\quad z=6$

例 5. $\left.\begin{array}{l} 3x+4y+5z=31\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+3y+2z=32\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 5x+6y-6z=33\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$ 試解之。

【解】 由(1)與(2)消去 $z$

$$\begin{array}{rl} 6x+8y+10z= & 62 \\ 20x+15y+10z= & 160 \\ \hline -14x-7y\qquad = & -98 \end{array}$$

以$-7$除 $\quad 2x+y=14\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(2)與(3)消去 $z$

$$\begin{array}{rl} 12x+9y+6z= & 96 \\ 5x+6y-6z= & 33 \\ \hline 17x+15y\qquad = & 129\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{array}$$

由(4)與(5)消去 $y$

$$\begin{array}{rl} 30x+15y= & 210 \\ 17x+15y= & 129 \\ \hline 13x\qquad = & 81 \end{array}\qquad \therefore\ x=\frac{81}{13}$$

由(4) $2\times\frac{81}{13}+y=14$ $\therefore\ y=\frac{20}{13}$

由(2) $4\times\frac{81}{13}+3\times\frac{20}{13}+2z=32$

兩邊以 2 除 $\frac{162}{13}+\frac{30}{13}+z=16$ $\therefore\ z=\frac{16}{13}$

故所求的根 $x=\frac{81}{13}$, $y=\frac{20}{13}$, $z=\frac{16}{13}$

【注意】 觀以上各例,則解含 $x$、$y$、$z$ 的三元一次方程式,當先自其中每二個方程式消去相同的未知數例如 $z$,便得二個含 $x$、$y$ 的二元方程式,解之得 $x$、$y$ 的值;次就一原方程式將 $x$、$y$ 的值代入,可得 $z$ 的值.

最初消去的未知數不必一定 $z$,宜酌量決定,一般以選未知數的係數較簡單者爲便.

例 6.
$$\left.\begin{array}{ll} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y+z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ z+x=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{array}\right\}$$
試解之.

【解】 因欲由(1)與(2)消去 $y$,故由(2)減(1)得

$$z-x=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(3)不含 $y$,故可就(3)與(4)解 $z$、$x$ 的聯立方程式,即

(3)+(4) $2z=6$ $\therefore\ z=3$

(3)−(4) $2x=2$ $\therefore\ x=1$

由 (1) $1+y=3$ $\therefore$ $y=2$

所以求得的根爲 $x=1,$ $y=2,$ $z=3$

【別解】 (1)+(2)+(3) $2(x+y+z)=12$

以 2 除 $x+y+z=6$……………………(4)

(4)−(2) $x=1$

(4)−(3) $y=2$

(4)−(1) $z=3$

例 7. 試解下列聯立方程式:

$$x+y-z=6 \cdots\cdots(1)$$

$$x+y+z=12 \cdots\cdots(2)$$

$$x-3y-z=10 \cdots\cdots(3)$$

【解】 作 (2)−(1),則 $x$ 與 $y$ 可同時消去,求得 $z$ 的值.即

$$2z=6 \qquad z=3$$

又作 (1)−(3),則 $x$ 與 $z$ 可同時消去,求得 $y$ 的值.即

$$4y=-4 \qquad \therefore\ y=-1$$

由 (1) $x-1-3=6$ $\therefore$ $x=10$

由此所求的根爲 $x=10,$ $y=-1,$ $z=3$

例 8. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{x+y}{2}\cdots\cdots(1)\\ x+y+z=18\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ 試解之.

【解】　令 $\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2}=k$, 則

$y+z=4k$ ……………………(3)

$z+x=3k$ ……………………(4)

$x+y=2k$ ……………………(5)

兩邊相加　$2(x+y+z)=9k$

但依(2)則 $x+y+z=18$, 所以

$2\times 18=9k$　　$\therefore\ k=4$

以此 $k$ 的值,代入(3)、(4)、(5)各式

$y+z=16$ ……………………(6)

$z+x=12$ ……………………(7)

$x+y=8$ ……………………(8)

(2)－(6)　　$x=2$

(2)－(7)　　$y=6$

(2)－(8)　　$z=10$

由此求得的根　$x=2$,　$y=6$,　$z=10$

例 9.　解下列聯立方程式:

$x+2y-3z=7$ ……………………(1)

$x+y+2z=9$ ……………………(2)

$2x-3y+7z=6$ ……………………(3)

【解】　本題(1)與(2)兩式 $x$ 的係數都是 1, 又由(1)

與(2)的和減去(3)得消去 $x$,所以解之如次.

(1) − (2) $y-5z=-2$……………………(4)

(1) + (2) − (3) $6y-8z=10$ $3y-4z=5$……(5)

由(4)與(5)消去 $y$

$$\begin{array}{r} 3y-15z=-6 \\ 3y-\ 4z=5 \\ \hline -11z=-11 \end{array} \qquad \therefore\ z=1$$

由(4) $y-5=-2$ $\therefore\ y=3$

由(1) $x+6-3=7$ $\therefore\ x=4$

故所求的根 $x=4$, $y=3$, $z=1$

例 10. 解下列聯立方程式:

$x+3y+2z=11$……………………(1)

$2x+\ y+3z=14$……………………(2)

$3x+2y+\ z=11$……………………(3)

【解】 本題注意點,在(1) + (2) + (3),則各未知數係數的和相等,所以解之如次.

(1) + (2) + (3) $6x+6y+6z=36$

以 6 除 $x+y+z=6$……………………(4)

(1) − (4) $2y+z=5$……………………(5)

(1) + (2) − (3) $2y+4z=14$……………………(6)

(6)－(5) $3z=9$ $\therefore$ $z=3$

由(5) $2y+3=5$ $\therefore$ $y=1$

由(4) $x+1+3=6$ $\therefore$ $x=2$

故所求的根 $x=2,\quad y=1,\quad z=3$

## 習題三

試解下列各題的聯立方程式:

1. $x+y-z=6$……(1)　$x+y+z=12$……(2)

   $x-3y-z=10$……(3)

2. $x-y+3z=2$……(1)　$2x-3y+2z=-5$……(2)

   $x-6y+7z=4$……(3)

3. $x+y+z=1$……(1)　$2x+3y+z=4$……(2)

   $4x+9y+z=16$……(3)

4. $x+y-z=17$……(1)　$y+z-x=7$……(2)

   $z+x-y=13$……(3)

5. $5x+3y=13$……(1)　$7x-3z=8$……(2)

   $3y+5z=11$……(3)

6. $0.3x+0.5y=0.8$……(1)　$0.4x+0.7z=1.8$……(2)

   $0.1y+0.1z=0.3$……(3)

7. $5x+2y=17$……(1)　$y-3z=-13$……(2)

   $x+2y+z=0$……(3)

8. $x+y=z+10,\quad y=2x-13,\quad z=2y-11$

9. $\dfrac{x+2y}{7}=\dfrac{3y+4z}{8}=\dfrac{5x+6z}{9}\cdots\cdots(1)$

$x+y-z=126\cdots\cdots(2)$

10. $2x-3y-2z=3\cdots\cdots(1)\qquad 3x+4y+z=21\cdots\cdots(2)$

$x+2y+z=9\cdots\cdots(3)$

**5.** 三元一次方程式應用問題

例 1. 甲乙丙三人分銀730元,甲所得比乙丙的和少130元,乙得的2倍比甲丙的和多20元.三人各得多少?

【解】 設甲得 $x$ 元,乙得 $y$ 元,丙得 $z$ 元,則其和爲730元,即

$$x+y+z=730\cdots\cdots(1)$$

甲比乙丙的和少130元即

$$x=y+z-130\cdots\cdots(2)$$

乙的二倍,比甲丙的和多20元,即

$$2y=x+z+20\cdots\cdots(3)$$

此三個等式,其 $x$、$y$、$z$ 須爲特別的值才得成立,就是方程式.欲解此方程式,故先整理如次:

$$x+y+z=730\cdots\cdots(4)$$

$$x-y-z=-130\cdots\cdots(5)$$

$$-x+2y-z=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(4)＋(5)　$y$ 與 $z$ 得同時消去

$$2x=600 \qquad \therefore \quad x=300$$

(4)＋(6)　$x$ 與 $z$ 得同時消去

$$3y=750 \qquad \therefore \quad y=250$$

由 (4)　$300+250+z=730 \qquad \therefore \quad z=180$

(答)甲 300 元,乙 250 元,丙 180 元

例 2.　有五角銀幣、二角銀幣、一角銀幣共 31 個,合計 7 元 5 角.今將二角銀幣全換一角銀幣,五角銀幣全換二角銀幣,則成 55 個.問各銀幣個數如何?

【解】　令 $x$ 爲五角銀幣個數,$y$ 爲二角銀幣個數,$z$ 爲一角銀幣個數,題言銀幣共 31 個,即

$$x+y+z=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又五角銀幣 $x$ 個合 $5x$ 角,二角銀幣 $y$ 個合 $2y$ 角,一角銀幣 $z$ 個合 $z$ 角,題言合計 7 元 5 角,即

$$5x+2y+z=75 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又二角銀幣換成一角銀幣,其個數爲原來的二倍,故一角銀幣增 $2y$ 個,連前 $z$ 個得 $(2y+z)$ 個.五角銀幣換成二角銀幣其個數爲 $\frac{5}{2}$ 倍,故二角銀幣爲 $\frac{5}{2}x$ 個.題言其和爲 55 個,即

$$\frac{5}{2}x+2y+z=55$$

去分母 $5x+4y+2z=110$ ……………………(3)

由(2)與(3)可同時消去 $y$ 與 $z$

$$10x+4y+2z=150$$

$$\underline{5x+4y+2z=110}$$

$$5x\qquad\qquad=40\qquad x=8$$

以此值代入(1)與(2)

$y+z=31-x=31-8=23$ ……………(4)

$2y+z=75-5x=75-40=35$ ………(5)

(5)－(4) $y=12$

由(4) $z=23-y=23-12=11$

(答)五角銀幣 8 個,二角銀幣 12 個,一角銀幣 11 個

例 3. 甲乙兩人各帶銀元若干買羊,甲買 41 隻尙餘 6 元,乙買 33 隻不足 2 元.兩人共帶銀300元.問各人所帶銀元數及羊每隻的價目?

【解】 設甲帶 $x$ 元,乙帶 $y$ 元羊價每隻 $z$ 元,則羊 41 隻的價為 $z$ 元×41 卽 $41z$ 元,在甲所帶銀 $x$ 元中尙餘 6 元;所以

$x=41z+6$ ……………………………(1)

又羊33隻的價爲$33z$元,在乙所帶銀$y$元中不足2元;所以

$$y=33z-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又甲乙共帶300元,所以

$$x+y=300 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以(1)式$x$的值與(2)式$y$的值代入(3)式,則$x$與$y$可同時消去 $41z+6+33z-2=300$

$$74z=296 \qquad \therefore \quad z=4$$

由(1) $x=41\times4+6 \qquad \therefore \quad x=170$

由(2) $y=33\times4-2 \qquad \therefore \quad y=130$

(答)甲帶170元,乙帶130元,羊每隻4元

## 習題四

1. 有銀元若干,分給甲乙丙三人,甲比乙丙所得的$\frac{4}{7}$多30元,乙比甲丙所得的$\frac{3}{8}$多30元,丙比甲乙所得的$\frac{2}{9}$多30元.問三人各得多少?

2. 付銀2元3角,以二角、一角、五分三種貨幣搭付,共計24個,其中五分貨幣的個數爲二角個數的3倍.問各幾個?

3. 有三位的整數其各位數字和的48倍,恰等於此數;若從此數減去198,則此數倒轉.又個位數與百位

數之和,等於十位數的 2 倍.求此三位數.

4. 有甲乙丙三種金塊,其成色甲爲0.9,乙爲0.8,丙爲0.72,共重 90 兩.今將甲乙兩種混合,得成色 0.84 的金塊;將甲丙兩種混合,得成色 0.78 的金塊.問三種金塊各幾兩?

# 第五章 因式

## 1. 公式

求二個以上整式的積可用乘法公式;反之,求一個整式為那幾個整式所乘得,叫做析因式,亦須由此等乘法公式為出發點.茲舉基本的乘法公式如次:

I. $ma+mb=m(a+b)$

II. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

III. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

IV. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

V. $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

VI. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【注意】 乘法公式由實際計算而得,可參看第二章多項式乘多項式的例 4.

## 2. 公式的應用

### (I) $ma+mb=m(a+b)$ 的應用

例 1. 試分析 $ax+ay$ 的因式.

【解】 在 $ax$ 與 $ay$ 兩項中,有公共因式 $a$,故可將 $a$

用括號括出,而記各項被此公共因式除得的商於括號內.

$$ax+ay=a(x+y)$$

例 2. 試分析$ab-a$的因式.

【解】 $ab$與$a$的公共因式爲$a$,故將$a$用括號括出,卽得

$$ab-a=a(b-1)$$

【注意】 $a$爲$1\times a$的省寫,所以括出$a$時,當記淸$1\times a\div a=1$,將1列入括號內,不可遺忘.

例 3. 分析$a^3+a^2$爲因式.

【解】 $a^3$與$a^2$的公共因式中,其最高次的爲$a^2$;因此將$a^2$括在括號外面

$$a^3+a^2=a^2(a+1)$$

【注意】 如本例將共同的字母括出,其指數當取各項指數的最低的.

例 4. 分析$5a^3b^2c-15a^2bc+45ab^3c$的因式.

【解】 先取5、15、45的最大公約數5,次取各項指數最高的公因式$a$、$b$、$c$,用括號括出;再於括號內列記以因式$5abc$除得的商便可.

$$5a^3b^2c-15a^2bc+45ab^3c=5abc(a^2b-3a+9b^2)$$

例 5. 分析 $a(x-y)+b(x-y)$ 的因式.

【解】 有括號的 $(x-y)$,可看作一整個,與公式中的 $m$ 相同.此為 $a(x-y)$ 與 $b(x-y)$ 兩項的公共因式,所以可用括號括出.

$$a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b)$$

【注意】 上式的變化,如一時不易明瞭,可取 $m$ 代 $(x-y)$,則 $a(x-y)+b(x-y)$ 變成 $am+bm$ 的形狀,直接求得 $m(a+b)$;再取以前的值 $x-y$ 來代 $m$,卽得

$$(x-y)(a+b).$$

## 習題一

分析次列各題的因式:

1. $7a+7b$ 2. $4ax-2bx$

3. $am+bm-cm$ 4. $7x-7$

5. $3xy-3y$ 6. $x^2-x$

7. $a^4-a^3+a^2+a$ 8. $3m^2-3mn$

9. $45m^6n^4p^3+60m^3n^2p^2-75m^2nq^5$

10. $a(x-3y)-b(x-3y)$ 11. $1-a+x(1-a)$

12. $(a^2+b^2)(x+y)-(x-y)(a^2+b^2)$

### (II) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 的應用

例 1. 試析出 $x^2-9$ 的因式

【解】 因 9 可化為$3^2$,所以

$$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$$

例 2. 分析$a^2x^2-\frac{1}{4}b^2y^2$的因式.

【解】 因$a^2x^2$可變為$(ax)^2$,$\frac{1}{4}b^2y^2$可變為$\left(\frac{1}{2}by\right)^2$,由以上公式

$$a^2x^2-\frac{1}{4}b^2y^2=(ax)^2-\left(\frac{1}{2}by\right)^2$$

$$=\left(ax+\frac{1}{2}by\right)\left(ax-\frac{1}{2}by\right)$$

例 3. 分析$(x+y)^2-(x-y)^2$的因式.

【解】 令$x+y=m$, $x-y=n$, 則成$m^2-n^2$平方差,由此得分析為和與差的積.

$$(x+y)^2-(x-y)^2$$

$$=\{(x+y)+(x-y)\}\{(x+y)-(x-y)\}$$

$$=(x+y+x-y)(x+y-x+y)$$

$$=(2x)(2y)=4xy$$

例 4. 分析$x^4-y^4$的因式.

【解】 $x^4$與$y^4$可化為$(x^2)^2$與$(y^2)^2$,則應用以上公式

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

例 5. 分析$x^5-36xy^4$的因式.

【解】　因 $x$ 爲公共因式,故先將 $x$ 括出後,即可察出平方差.

$$x^5-36xy^4=x(x^4-36y^4)=x(x^2+6y^2)(x^2-6y^2)$$

## 習題二

析出下列各式的因式:

1. $a^2-1$　　2. $4-x^2$

3. $36x^2-25y^2$　　4. $(2m+n)^2-(m+2n)^2$

5. $(x+y)^2-1$　　6. $81a^2-16(2a-3x)^2$

7. $a^4-b^4$　　8. $50x^2-8$

9. $a^5-a$　　10. $x^5-81xy^4$

### (III) $\left.\begin{aligned} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \end{aligned}\right\}$ 的應用

例 1.　分析 $4x^2+12xy+9y^2$ 的因式.

【解】　$4x^2$ 爲 $2x$ 的平方,$9y^2$ 爲 $3y$ 的平方,$2x$ 與 $3y$ 之積的 2 倍爲 $12xy$, 即原式的中項,恰成 $a^2+2ab+b^2$ 的形狀;故

$$\begin{aligned} 4x^2+12xy+9y^2&=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2 \\ &=(2x+3y)^2 \end{aligned}$$

例 2.　分析 $4x^2-12xy+9y^2$ 的因式.

【解】　與前題相異之點,僅第二項符號而已,故

$$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2$$
$$=(2x-3y)^2$$

例 3.　分析 $9x^3-6x^2+x$ 的因式.

【解】　$x$ 爲各項的公因式,因此先析出 $x$.

$$9x^3-6x^2+x=x(9x^2-6x+1)=x(3x-1)^2$$

【注意】　上式的 $9x^2-6x+1$, 因在心中計算 $9x^2$ 爲 $(3x)^2$, 1 爲 $1^2$, $3x$ 與 1 之積 $3x$ 的二倍爲 $6x$,而第二項的符號爲 $-$,所以得 $(3x-1)^2$.

例 4.　分析 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2$ 的因式.

【解】　因 $\frac{1}{4}x^2$ 卽 $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$, $\frac{1}{9}y^2$ 卽 $\left(\frac{1}{3}y\right)^2$, $\frac{1}{2}x$ 與 $\frac{1}{3}y$ 之積的二倍 $2\times\frac{1}{2}x\times\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}xy$ 恰成第二項,所以得應用平方公式.

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}y\right)+\left(\frac{1}{3}y\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2$$

例 5.　分析 $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$ 的因式.

【解】　令 $x+y=m$, 則上式爲

$$m^2+2mz+z^2=(m+z)^2$$

$$\therefore\quad (x+y)^2+2(x+y)z+z^2=\{(x+y)+z\}^2=(x+y+z)^2$$

## 習題三

析出下列各題的因式

1. $x^2+6x+9$
2. $4a^2-4a+1$
3. $49x^4+28x^2y^2+4y^4$
4. $3a^3+6a^2b+3ab^2$
5. $2a^2-12a+18$
6. $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$

### (IV) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 的應用

例 1. 分析 $x^2+8x+15$ 的因數.

【解】 將 $x^2+8x+15$ 與 $x^2+(a+b)x+ab$ 比較,則得 $ab=15, a+b=8$. 由此分析 15 爲二個因數,如 $1\times15$ 或 $3\times5$,但 1 與 15 的和 $1+15=16$ 不等於 $x$ 的係數,故棄去而取 3 與 5 作其和 $3+5=8$,恰爲 $x$ 的係數,所以分析因式如次:

$$x^2+8x+15=x^2+(3+5)x+3\times5=(x+3)(x+5)$$

例 2. 分析 $x^2-8x+15$ 的因式.

【解】 因 $x^2+(a+b)x+ab$ 式中 $a$、$b$,爲表正或負的代數數;故 $a$ 與 $b$ 同號則 $ab$ 爲正,而 $a+b$ 則兩方正時爲正,兩方負時爲負.本題因 $ab=15, a+b=-8$,故 $a$ 與 $b$ 必兩方爲負.將 15 分析因數而使其和爲 $-8$,則得 $-3$ 與 $-5$,所以

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

例 3.　分析 $x^2+2x-15$ 的因式.

【解】　題式與 $x^2+(a+b)x+ab$ 比較,則 $ab=-15$, $a+b=2$. 因欲 $ab=-15$, 故 $a$ 與 $b$ 異號;因欲 $a+b=2$, 故 $a$、$b$ 絕對值的大者用 + 號.即分析 15 的因數,使其符號相異而代數和為 2 便可.試取因數 $-3$ 與 $+5$, 則其積 $ab=-15$, 其和 $a+b=-3+5=2$, 與上列公式適合.

$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$$

例 4.　分析 $x^2y^2-11xy-12$ 的因式.

【解】　將 $xy$ 作為一個數,例如 $m$, 則成 $m^2-11m-12$, 可依上列公式分析因式.

$$x^2y^2-11xy-12=(xy-12)(xy+1)$$

例 5.　分析 $a^2-7ab+10b^2$ 的因式.

【解】　依積為 $10b^2$、和為 $-7b$ 的關係,分析 $10b^2$ 的因式,則得 $-2b$ 與 $-5b$.

$$\therefore\quad a^2-7ab+10b^2=(a-2b)(a-5b)$$

例 6.　分析 $x^3y-x^2y^2-2xy^3$ 的因式.

【解】　先析出各項的公共因式 $xy$, 則

$$\begin{aligned}x^3y-x^2y^2-2xy^3&=xy(x^2-xy-2y^2)\\&=xy(x-2y)(x+y)\end{aligned}$$

例 7.　分析 $x^4-5x^2+4$ 的因式.

【解】　令 $x^2=X$, 則 $x^4=X^2$, 所以

$$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4=(X-4)(X-1)$$
$$=(x^2-4)(x^2-1)$$
$$=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$$

## 習題四

析出下列各題的因式:

1. $x^2+7x+12$　　2. $x^2+13x+12$

3. $x^2-5x+6$　　4. $x^2-7x+12$

5. $x^2-3x-18$　　6. $x^2+6x-7$

7. $a^2b^2+11ab+30$　　8. $x^4-13x^2+36$

**(V) $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ 的應用**

此公式的應用,須用暗算同時定出 $a$、$b$、$c$、$d$ 四個數值,故除對於簡單的整式外,求法較爲困難.如欲由二次式 $Ax^2+Bx+C$ 定此 $a$、$b$、$c$、$d$ 的值,則其順序如次.

(1)　將 $x^2$ 的係數 $A$, 分析爲 $a\times c$ 的積.

(2)　將常數項 $C$ 分析爲 $b\times d$ 的積.

(3)　觀 $x$ 的係數 $B$, 是否與 $ad+bc$ 相等.

例 1.　分析 $3x^2-2x-1$ 的因式.

【解】　$x^2$ 的係數 3 祇可分爲 3 與 1, 常數項 $-1$ 祇能分爲 1 與 $-1$, 又由公式中 $(bc+ad)$ 得 $-3+1=-2$,

$$\therefore \quad 3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

例 2.　分析 $6x^2+5x-6$ 的因式.

【解】　經計算的結果,分 $6x^2$ 的 6 爲 $2\times3$, 又分 $-6$ 爲 3 與 $-2$,則因 $-4+9=+5$,

$$\therefore \quad 6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2)$$

## 習題五

分析下列各題的因式:

1. $5x^2+3x-2$
2. $15x^2-22x+8$
3. $12x^2-37xy-144y^2$
4. $2x^2+11x+12$
5. $3x^2-10x+3$
6. $3x^2+7x-6$

### (VI) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)} \\ \boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)} \end{array}\right\}$ 的應用

例 1.　試分析 $8x^3+y^3$ 的因式.

【解】　$8x^3+y^3=(2x)^3+y^3$

$$=(2x+y)\{(2x)^2-(2x)y+y^2\}$$

$$=(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$$

例 2.　分析 $x^3-125y^3$ 的因式.

【解】　$x^3-125y^3=x^3-(5y)^3$

$$=(x-5y)\{x^2+5xy+(5y)^2\}$$

$$=(x-5y)(x^2+5xy+25y^2)$$

例 3.　$(a+b)^3+(a-b)^3$

【解】　$(a+b)^3+(a-b)^3$

$=\{(a+b)+(a-b)\}\{(a+b)^2-(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$

$=2a\{a^2+2ab+b^2-(a^2-b^2)+a^2-2ab+b^2\}$

$=2a(a^2+2ab+b^2-a^2+b^2+a^2-2ab+b^2)$

$=2a(a^2+3b^2)$

例 4.　$a^6-b^6$

【解】　$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

# 第六章 最高公約式及最低公倍式

## 最高公約式

能除盡二個以上整式的最高次整式,即公約式中次數最高的,叫最高公約式,其符號為H. C. F.

**1.** 單項式的最高公約式

例 1. 求$a^2x^4$與$a^4x$的最高公約式.

【解】 $a$ 或$a^2$都能除盡此兩式,但$a^3$則不能除盡$a^2x^4$;故就 $a$ 一字母而論,$a^2$為次數最高的.

又 $x$ 能除盡此兩式,但$x^2$、$x^3$等則不能除盡 $a^4x$; 故就 $x$ 字母而論, $x$ 為次數最高的.

由是$a^2$與 $x$ 的積 $a^2x$, 在能除盡兩式之中,有最高的次數,就是兩式的最高公約式.

例 2. 求$15x^4y^3z^2$、$-20x^3y^2z^4$、$25x^6yz^3u^3$的最高公約式.

【解】 15、$-20$、25 的最大公約數為 5; $x$ 為三個式中的公約式,其次數最低為 3 故$x^3$為次數最高的公約式.又 $y$、$z$ 亦為公約式,取其次數最低的$y$、$z^2$. 但 $u$ 非三個式中的公約式.所以本題的最高公約式為$5x^3yz^2$

例 3.　求 $6ab^2c^3d^4$、$9a^2b^3c$、$-3a^5d$ 的最高公約式.

【解】　6、9、$-3$ 的最大公約數爲 3. 字母的公因式. 祇有 $a$, 其次數最低的爲 1. 所以最高公約式爲 $3a$.

**2.** 多項式的最高公約式(其一)

二個以上的整式,都是容易分析因式的多項式,則求其最高公約式,可依下例.

例 1.　求 $3xy(x+y)^2$、$2(x-y)^5(x+y)^3$ 的最高公約式.

【解】　此兩式都已析出因式,其 3 與 2 的最大公約數爲 1, 字母的公因式 $(x+y)$ 則取次數最低的爲 2, 所以最高公約式爲 $(x+y)^2$.

例 2.　求 $x^2-3x+2$、$x^2-1$、$x^2+6x-7$ 的最高公約式.

【解】　分析此三式的因式

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^2\qquad-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$$

右邊各式的公因式爲 $x-1$, 且次數最低的爲 1, 故所求最高公約式爲 $x-1$.

## 習題一

求下列各組的最高公約式:

1.　$x^2-4,\quad x^2+x-6$

2.　$x^2-x-2,\quad x^2+5x+4,\quad x^3+1$

3.　$x^2-3xy,\quad x^2-9y^2$

4.　$a^2-4ab+3b^2,\quad a^2+ab-12b^2$

5.　$2x^2-7x+3,\quad 3x^2-7x-6$

6.　$3a^2b^2(a^3-b^3),\quad 6a^4b(a^2-b^2),\quad 9ab^3(a-b)^2$

## 3. 多項式的最高公約式(其二)

求二個以上多項式的最高公約式,一般的方法如次.

例 1.　求 $27x^6+10x^3+1$ 與 $3x^2-2x+1$ 的最高公約式.

【運算】

$$
\begin{array}{l|l}
27x^6 \qquad\qquad +10x^3 \qquad +1 & \underline{9x^4+6x^3+x^2+2x+1} \\
\underline{27x^6-18x^6+9x^4} & 3x^2-2x+1 \\
\qquad 18x^5-9x^4+10x^3 & \\
\qquad \underline{18x^5-12x^4+6x^3} & \\
\qquad\qquad 3x^4+4x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^4-2x^3+x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad 6x^3-x^2 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{6x^3-4x^2+2x} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2-2x+1 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3x^2-2x+1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\therefore\quad 27x^6+10x^3+1=(3x^2-2x+1)(9x^4+6x^3+x^2+2x+1)$$

$$3x^2-2x+1$$

即第一式能以 $3x^2-2x+1$ 除盡,但 $3x^2-2x+1$,原來是第二式,所以 $3x^2-2x+1$ 爲最高公約式.

【注意】　如本題不易分析因式時,則以次數低的一方除次數高的一方,若能除盡,其除式就是所求的最高公約式.

例 2.　求 $x^3+2x^2-13x+10$ 與 $x^3+x^2-10x+8$ 的最高公約式.

【運算】

$$\begin{array}{r|l|l}
x^3+2x^2-13x+10 & 1 & \quad x+4 \\
x^3+x^2-10x+8 & x^3+x^2-10x+8 & x^2-3x+2 \\
\hline
x^2-3x+2 & x^3-3x^2+2x & \\
 & \quad 4x^2-12x+8 & \\
 & \quad 4x^2-12x+8 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

(答) $x^2-3x+2$

【說明】　以二式中次數低的除次數高的(本例次數相等時,無論用那一式除都可.)剩餘便得 $x^2-3x-2$. 次以此剩餘除 $x^3+x^2-10x+8$,得商 $x+4$ 而除盡.此時除式 $x^2-3x+2$ 爲二式的最高公約式.若除不盡,可依此法往復數回.

例 3.　$\left.\begin{array}{l}2x^4+7x^3-5x^2-19x+6\\4x^5+12x^4-5x^3+10x-3\end{array}\right\}$ 求最高公約式.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & +12x^4 & -5x^3 & & +10x & -3 & \quad 2x-1 \\
4x^5 & +14x^4 & -10x^3 & -38x^2 & +12x & & \overline{2x^4+7x^3-5x^2-19x+6} \\
\hline
 & -2x^4 & +5x^3 & +38x^2 & -2x & -3 & \\
 & -2x^4 & -7x^3 & +5x^2 & +19x & -6 & \\
\hline
 & & 12x^3 & +33x^2 & -21x & +3 &
\end{array}
$$

此剩餘以 3 除之 $4x^3+11x^2-7x+1$

法以 2 倍之 $4x^4+14x^3-10x^2-38x+12$

再以剩餘除此法的 2 倍

$$
\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 4x^4 & +14x^3 & -10x^2 & -38x & +12 & \quad x+1 \\
 & 4x^4 & +11x^3 & -7x^2 & +x & & \overline{4x^3+11x^2-7x+1} \\
\hline
 & & 3x^3 & -3x^2 & -39x & +12 & \\
\text{以3除}\cdots\cdots & & x^3 & -x^2 & -13x & +4 & \\
\text{4倍之}\cdots & & 4x^3 & -4x^2 & -52x & +16 & \\
 & & 4x^3 & +11x^2 & -7x & +1 & \\
\hline
 & & & -15x^2 & -45x & +15 &
\end{array}
$$

以 $-15$ 除 $x^2+3x-1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +11x^2 & -7x & +1 & \quad 4x-1 \\
4x^3 & +12x^2 & -4x & & \overline{x^2+3x-1} \\
\hline
 & -x^2 & -3x & +1 & \\
 & -x^2 & -3x & +1 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

(答) $x^2+3x-1$

例 4. 求下列二式的最高公約式:

$$2x^5y^2-12x^4y^2+12x^3y^2-6x^2y^2+4xy^2$$

$$6x^5y-15x^4y+21x^3y-12x^2y$$

【解】 此兩式中各有公因式,用括號括出。

第一式 $2xy^2(x^4-6x^3+6x^2-3x+2)$

第二式 $3x^2y(2x^3-5x^2+7x-4)$

兩式中 $2xy^2$ 與 $3x^2y$ 的最高公約式爲 $xy$,所以可先求 $x^4-6x^3+6x^2-3x+2$ 與 $2x^3-5x^2+7x-4$ 的最高公約式再乘以 $xy$,卽得所求兩式的最高公約式.今先 2 倍 $x^4-6x^3+6x^2-3x+2$,求之如次:

$$
\begin{array}{lrrrrl|l}
 & 2x^4 & -12x^3 & +12x^2 & -6x & +4 & x-7 \\
 & 2x^4 & -5x^3 & +7x^2 & -4x & & \overline{2x^3-5x^2+7x-4} \\
\hline
 & & -7x^3 & +5x^2 & -2x & +4 & \\
2\text{ 倍之} & & -14x^3 & +10x^2 & -4x & +8 & \\
 & & -14x^3 & +35x^2 & -49x & +28 & \\
\hline
 & & & -25x^2 & +45x & -20 & \\
\end{array}
$$

此剩餘以 $-5$ 除　　$5x^2-9x+4$

$$
\begin{array}{lrrrr|l}
 & 2x^3 & -5x^2 & +7x & -4 & 2x,\ -7 \\
5\text{ 倍之} & 10x^3 & -25x^2 & +35x & -20 & \overline{5x^2-9x+4} \\
 & 10x^3 & -18x^2 & +8x & & \\
\hline
 & & -7x^2 & +27x & -20 & \\
5\text{ 倍之} & & -35x^2 & +135x & -100 & \\
 & & -35x^2 & +63x & -28 & \\
\hline
 & & & 72x & -72 & \\
\end{array}
$$

以 72 除　　$x-1$

$$
\begin{array}{rrr|l}
5x^2 & -9x & +4 & 5x-4 \\
5x^2 & -5x & & \overline{x-1} \\
\hline
 & -4x & +4 & \\
 & -4x & +4 & \\
\hline
 & & 0 & \\
\end{array}
$$

卽此兩式的最大公約式爲 $x-1$,而題中兩式的最大公約式爲 $xy(x-1)$.

例 5.　求 $3x^3-4x^2-5x+2$、$6x^3-17x^2+11x-2$、$3x^3-x^2-12x+4$ 的最高公約式.

【解】 先求第一式與第二式的最高公約式

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3-17x^2+11x-2 & \quad 2 \\
\underline{6x^3-\ \ 8x^2-10x+4} & \overline{3x^3-4x^2-5x+2} \\
-\ \ 9x^2+21x-6 &
\end{array}
$$

以 $-3$ 除 $\qquad 3x^2-\ 7x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-4x^2-5x+2 & \quad x+1 \\
\underline{3x^3-7x^2+2x\qquad} & \overline{3x^2-7x+2} \\
3x^2-7x+2 & \\
\underline{3x^2-7x+2} & \\
0 &
\end{array}
$$

故此兩式的最大公約式爲 $3x^2-7x+2$, 再求此式與第三式的最大公約式.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-\ \ x^2-12x+4 & \quad x+2 \\
\underline{3x^3-7x^2+\ \ 2x\qquad} & \overline{3x^2-7x+2} \\
6x^2-14x+4 & \\
\underline{6x^2-14x+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

故所求三式的最高公約式爲 $3x^2-7x+2$.

【說明】 求三式的最高公約式,先求其中二式的最高公約式,然後再求此最高公約式與其餘一式的最高公約式,三式以上仿此.

例 6. 求 $x^2+2x-8$、$x^3-x^2-17x+12$ 的最高公約式.

求二個以上整式的最高公約式若其中一式容易分析因式而他式不易分析時,可先將一式分析因

式,再取此因式試除他式以求最高公約式.

【解】　分析 $x^2+2x-8$ 的因式,

$$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$$

若題中二式有公約式,則由上式必爲 $x+4$ 或 $x-2$ 或 $(x+4)(x-2)$. 今先以 $x+4$ 試除第二式,

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -17x & +12 & x^2-5x+3 \\
\cline{5-5}
x^3 & +4x^2 & & & x+4 \\
\cline{1-4}
 & -5x^2 & -17x & & \\
 & -5x^2 & -20x & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x & +12 & \\
 & & 3x & +12 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

卽第二式能以 $x+4$ 除盡,得商 $x^2-5x+3$. 更以 $x-2$ 試除此商,

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -5x & -3 & x-3 \\
\cline{4-4}
x^2 & -2x & & x-2 \\
\cline{1-3}
 & -3x & +3 & \\
 & -3x & +6 & \\
\cline{2-3}
 & & -3 &
\end{array}$$

由此 $x-2$ 非第二式的約式,故題中二式的最高公約式爲 $x+4$.

## 習題二

求下列各組的最高公約式.

1.　$a^3b-15b^4+19ab^3+a^4-8a^2b^2$, $a^2-5b^2+3ab$

2.　$x^2+2xy-y^2$, $x^3+x^2y-3xy^2+y^3$

3. $x^3-5x^2-99x+40,\ x^3-6x^2-86x+35$

4. $6x^3-2x^2-13x-6,\ 12x^3-x^2-30x-16$

5. $35x^3+47x^2+13x+1,\ 42x^4+41x^3-9x^2-9x-1$

6. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1,$

$x^6-x^5+2x^4-x^3+2x^2-x+1$

7. $x^2-3x-70,\ x^3-39x+70,\ x^3-48x+7$

8. $x^3-6x^2+7x+4,\ x^3+2x^2-9x-4,\ x^3-4x^2+3x+2$

## 最低公倍式

能被二個以上整式,除盡的整式中,其次數最低的,稱最低公倍式,其符號爲L. C. M.

**4. 單項式的最低公倍式**

例 1. 求 $a$、$b$ 二式的最低公倍式.

【解】 因 $a$ 能除盡的整式中,至少必含 $a$ 的因式.此整式又能以 $b$ 除盡,至少必含 $b$ 的因式.既能以 $a$ 除盡,又能以 $b$ 除盡,至少必含 $ab$ 的因式,而 $ab$ 爲此等整式中次數最低的,且不能比此更低,故 $a$ 與 $b$ 的最低公倍式爲 $ab$.

例 2. 求 $a$、$a^2$ 的最低公倍式.

【解】 能以 $a$ 除盡的整式中,至少必含 $a$ 的因式.此整式又因能以 $a^2$ 除盡,至少必含 $a^2$ 的因式.故既因

能以$a$除盡,又因能以$a^2$除盡,至少必含$a^2$的因式,而$a^2$爲此等整式中次數最低的.如$a^3$、$a^4$、$a^5$……等,能以$a$與$a^2$除盡的式雖多,但次數無比此更低的,故$a$與$a^2$的最低公倍式爲$a^2$.

例 3. 求$ab$、$ac$二式的最低公倍式.

【解】 能以$ab$除盡的整式中,至少必含$ab$的因式.此整式又能以$ac$除盡,既含有$a$的因式,至少必再含$c$的因式.故既能以$ab$除盡,又能以$ac$除盡,至少必含$abc$因式,而$abc$爲此整式中次數最低的,所以$ab$與$ac$的最低公倍式爲$abc$.

例 4. 求$6a^3b^2$、$10a^2b^5c$的最低公倍式.

【解】 先求6與10的最小公倍數30,次列記相異字母的因式$abc$,而各字母因式的指數,則取各式中最高的,如$a$的指數至少爲3,$b$的指數至少爲5,$c$的指數至少爲1.即能以各式除盡的整式,至少必含有$30a^3b^5c$的因式,故得所求二式的最低公倍式即爲$30a^3b^5c$.

【注意】 求二個以上整式的最低公倍式,先求數字係數的最小公倍數,次列記相異各字母因式,其各因式指數則取各式中次數最高的.

## 習題三

求下列各題的最低公倍式:

1. $x^3$、$x^6$ 2. $x^2$、$x^3$、$x^5$

3. $9a^2b^2x$、$12abx^2y$、$6xy^3z$ 4. $ab^2c$、$a^3b$、$bc^3$

**5. 多項式的最低公倍式(其一)**

多項式容易分析因式的,則求其最低公倍式,可依下例.

例 1. 求 $x^2-4y^2$、$x^2+4xy+4y^2$、$x^2-4xy+4y^2$ 的最低公倍式.

【解】 各式分析因式

$$x^2-4y^2=(x+2y)(x-2y)$$

$$x^2+4xy+4y^2=(x+2y)^2$$

$$x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$$

此各式右邊相異因式的積爲 $(x+2y)(x-2y)$,而其指數最高的爲 2,故所求最低公倍式爲

$$(x+2y)^2(x-2y)^2$$

例 2. 求 $(a-b)(a-c)$、$(b-a)(b-c)$、$(c-a)(c-b)$ 的最低公倍式.

【解】 因 $b-a=-(a-b)$, $c-a=-(a-c)$, $c-b=-(b-c)$,所以

$(a-b)(a-c)$

$(b-a)(b-c)=-(a-b)(b-c)$

$(c-a)(c-b)=(a-c)(b-c)$

由此所求最低公倍式爲$(a-b)(a-c)(b-c)$.

【注意】　最低公倍式亦如最高公約式,其符號可以不論.

## 習題四

求下列各題的最低公倍式:

1. $a^2+2a-15,\ a^2+6a+5,\ a^2-4a+3$

2. $15(a^2b-ab^2),\ 21(a^3-ab^2),\ 35(ab^2+b^3)$

3. $2x-2,\ x^2-2x+1,\ 1-x^2$

4. $x^2-xy-6y^2,\ 2xy-x^2-y^2,\ x^2-4xy+3y^2$

**6.** 多項式的最低公倍式(其二)

求多項式的最低公倍式,一般的方法如次.

例 1.　求$x^3-7x-6$、$x^3+8x^2+17x+10$的最低公倍式.

【解】

$$\begin{array}{r|l} x^3+8x^2+17x+10 & 1 \\ x^3\qquad\quad -7x-6 & x^3-7x-6 \\ \hline 8x^2+24x+16 & \end{array}$$

以 8 除　$x^2+3x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad -7x-6 & \quad x-3 \\
\underline{x^3+3x^2+2x \qquad} & x^2+3x+2 \\
-3x^2-9x-6 & \\
\underline{-3x^2-9x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

故二式的最高公約式爲 $x^2+3x+2$.以此最高公約式除二式.

$$(x^3-7x-6)\div(x^2+3x+2)=x-3$$

$$(x^3+8x^2+17x+10)\div(x^2+3x+2)=x+5$$

$$\therefore \quad x^3-7x-6=(x^2+3x+2)(x-3)$$

$$x^3+8x^2+17x+10=(x^2+3x+2)(x+5)$$

$x-3, x+5$ 爲以最高公約式除二式所得的商,故已不含公約式.由此所求的最低公倍式,取相異各因式的積 $(x^2+3x+2)(x-3)(x+5)$ 便可.

【注意】　凡求二式的最低公倍式,先求二式的最高公約式,以此最高公約式除各式,作其二商與最高公約式的積便得.

例 2.　下列二式,求其最低公倍式:

$$x^3-x^2+9x-9,$$

$$2x^4-x^3+17x^2-9x-9$$

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4-x^3+17x^2-9x-9 & \qquad 2x+1 \\
\underline{2x^4-2x^3+18x^2-18x \quad} & x^3-x^2+9x-9 \\
x^3-x^2+9x-9 & \\
\underline{x^3-x^2+9x-9} & \\
0 &
\end{array}
$$

故最高公約式卽第一式$x^3-x^2+9x-9$.

$$x^3-x^2+9x-9=1\times(x^3-x^2+9x-9)$$

$$2x^4-x^3+17x^2-9x-9=(2x+1)(x^3-x^2+9x-9)$$

(答) $(2x+1)(x^3-x^2+9x-9)$ 卽 $2x^4-x^3+17x^2-9x-9$

【注意】　如本例一式爲他式的因式時,他式卽爲二式的最低公倍式.

例 3.　求 $x^3-3x+3$ 與 $x^3+2x^2-x+1$ 的最低公倍式.

【解】

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-\ \ x+1 & \ \ 1 \\ x^3\qquad\ -3x+3 & x^3-3x+3 \\ \hline 2x^2+2x-2 & \end{array}$$

以 2 除　　$x^2+x-2$

$$\begin{array}{r|l} x^3\qquad -3x+3 & \ \ x-1 \\ x^3+x^2-2x\qquad & x^2+x-2 \\ \hline -x^2-\ \ x+3 & \\ -x^2-\ \ x+2 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

卽此兩式無公約式,故所求最低公倍式,爲此二式的積$(x^3+2x^2-x+1)(x^3-3x+3)$.

【注意】　如本例二式 $A$ 與 $B$ 無公約式時,則 $A\times B$ 卽爲所求的最低公倍式.

例 4.　求 $x^3-8x^2+19x-12$, $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$ 的最低公倍式.

【解】　先求第一式與第二式的最高公約式,

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2+19x-12 & \quad 1 \\
x^3-6x^2+11x-\ 6 & \overline{x^3-6x^2+11x-6} \\
\hline
-2x^2+\ 8x-\ 6 &
\end{array}
$$

以 $-2$ 除　　$x^2-4x+3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & \quad x-2 \\
x^3-4x^2+\ 3x\quad & \overline{x^2-4x+3} \\
\hline
-2x^2+\ 8x-6 & \\
-2x^2+\ 8x-6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\therefore$　$(x^3-8x^2+19x-12)\div(x^2-4x+3)=x-4$

$(x^3-6x^2+11x-6)\div(x^2-4x+3)=x-2$

故此二式的最低公倍式

$(x^2-4x+3)(x-4)(x-2)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

次求此式與第三式的最高公約式

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & \quad x-1 \\
x^4-\ 9x^3+26x^2-24x\quad & \overline{x^3-9x^2+26x-24} \\
\hline
-\ \ x^3+\ 9x^2-26x+24 & \\
-\ \ x^3+\ 9x^2-26x+24 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

故所求三式的最低公倍式爲 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

【注意】　求三式的最低公倍式,先求其中二式的最低公倍式,再求此式與第三式的最低公倍式卽得。

## 習題五

求下列各題的最低公倍式:

1. $x^4+x^3-14x-24,\ x^4-8x^2-x+12$

2. $x^4-5x^3+11x^2-12x+6,\ x^2-3x+3$

3. $3x^3+x^2-8x+4,\ 3x^3+7x^2-4,\ x^3+6x^2+11x+6$

# 第七章 分式

## 1. 分式的基本性質

分式的母子,同以一數乘除之,其分式的值不變一般可用次式表示:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times m}{B\times m} \quad 又 \quad \frac{A}{B}=\frac{A\div m}{B\div m}$$

【證明】 令 $\frac{A}{B}=k$ 則 $A=Bk$

以 $m$ 乘此等式的兩邊, $Am=Bmk$

$$\therefore \quad \frac{Am}{Bm}=k \quad 卽 \quad \frac{A}{B}=\frac{Am}{Bm};$$

又以 $m$ 除 $A=Bk$ 則 $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}k$

$$\therefore \quad \frac{\frac{A}{m}}{\frac{B}{m}}=k \quad 卽 \quad \frac{A}{B}=\frac{\frac{A}{m}}{\frac{B}{m}}$$

## 2 約分

分式的母子,以同數除之,使其相等而比原分式爲簡單,叫做約分.分式由約分至其母子無公約式時,叫最簡分式.

(I) 單項分式的約分

例 1. 試將$\frac{am}{bm}$約分.

【解】 母子同以 $m$ 除之 $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$

例 2. 試將 $\frac{6a^2x^4y}{9a^3bx^2y}$ 約分.

【解】 由例 1 知母子的除式,可用其最高公約式;所以本例的母子同以 $3a^2x^2y$ 除之,則得

$$\frac{6a^2x^4y}{9a^3bx^2y}=\frac{2x^2}{3ab}$$

## 習題一

下列各分式,試約爲最簡:

1. $\frac{6am}{2mn}$　　2. $\frac{a^3}{a^4}$　　3. $\frac{a^5}{a^3}$

4. $\frac{a^3b^2}{a^2b^4c}$　　5. $\frac{8a^2bx^3}{3ab^3x}$　　6. $\frac{5a^3x^4}{10a^5x^5}$

(II) 多項分式的約分(其一)

容易分析因式的分式,可如下例約分.

例 1. 試將 $\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$ 約分.

【解】 分析此分式母子的因式,取其最高公約式各除母子卽得.

$$\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

例 2. 約簡 $\frac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-x^3y-x^2y^2+xy^3}$ 分式.

【解】　原式$=\dfrac{x^4(x-y)-y^4(x-y)}{x^3(x-y)-xy^2(x-y)}=\dfrac{(x-y)(x^4-y^4)}{(x-y)(x^3-xy^2)}$

$$=\frac{x^4-y^4}{x^3-xy^2}=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x(x^2-y^2)}=\frac{x^2+y^2}{x}$$

## 習題二

約簡下列各分式:

1. $\dfrac{m^2-mn}{n-m}$　　2. $\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$　　3. $\dfrac{15a^2y}{3a^2x-9aby}$

4. $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}$　　5. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}$　　6. $\dfrac{x^6+x^4-x^2-1}{x^8-x^6+x^2-1}$

(*III*) 多項分式的約分(其二)

母子都是多項式而且不容易分析因式的,先依一般求最高公約式的方法,求母子的最高公約式,然後再以此約分.

例 1.　將 $\dfrac{x^3-6x^2+14x-15}{x^3-2x^2+2x+5}$ 約分.

【解】　先求母子的最高公約式,

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 1 & x+1 \\
x^3-6x^2+14x-15 & x^3-2x^2+2x+5 & x^2-3x+5 \\
x^3-2x^2+\ \ 2x+\ \ 5 & x^3-3x^2+5x & \\
\hline
-4x^2+12x-20 & x^2-3x+5 & \\
\text{以}-4\text{除}\qquad\qquad & x^2-3x+5 & \\
\cline{2-2}
x^2-\ \ 3x+\ \ 5 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$　原式$=\dfrac{(x^3-6x^2+11x-15)\div(x^2-3x+5)}{(x^3-2x^2+2x+5)\div(x^2-3x+5)}=\dfrac{x-3}{x+1}$

## 習題三

試將下列分式約分:

1. $\dfrac{6a^4-5a^3-20a^2+1}{4a^4-17a^2-10a+3}$　　2. $\dfrac{x^3-x^2-13x+4}{2x^4+7x^3+5x^2+11x-4}$

**3.** 分式四則

(*I*)分式的加法及減法

(*a*)同母分式的加減,以分子的和或差爲分子,原分母爲分母,而作成分式.

例 1. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{a}=\dfrac{b+c-d}{a}$

例 2. $\dfrac{a(x+a)}{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{a(x+a)-a^2}{x^2-a^2}$

$$=\frac{ax+a^2-a^2}{x^2-a^2}=\frac{ax}{x^2-a^2}$$

(*b*)異母分式的加減,先不變此等分式的值而化同其分母,然後如(*a*)法計算.

【注意】　將二個以上分式化同其分母而不變其值,叫通分.

例 3. 化 $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2}{1-x}$ 爲簡單.

【解】　因 $1-x=-(x-1)$,所以變化第二式的符號則成同分母.

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{1-x}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{-(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}$$

$$=\frac{x+1-2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$$

例 4. 化$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}-\frac{1}{ab}$爲簡單.

【解】 分式的母子同以一數乘之其分式的值不變,已在前面說明.今依據此原則,將此分式的分母$bc$、$ac$、$ab$各乘以某式而成同分母,則爲$bc$、$ac$、$ab$的最低公倍式$abc$便可.由此以$a$乘$\frac{1}{bc}$的母子,$b$乘$\frac{1}{ac}$的母子,$c$乘$\frac{1}{ab}$的母子,則得式如次.

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}-\frac{1}{ab}=\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}-\frac{c}{abc}=\frac{a+b-c}{abc}$$

例 5. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=?$

【解】 分母$x+y$、$x-y$的最低公倍式爲$x^2-y^2$,由此以$x-y$乘第一式,$x+y$乘第二式則成同分母.

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}=\frac{x(x-y)}{x^2-y^2}+\frac{y(x+y)}{x^2-y^2}=\frac{x(x-y)+y(x+y)}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

例 6. $\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x-a)^2}=?$

【解】 分母的最低公倍式爲$(x+a)^2(x-a)^2$,其計算如次.

$$原式=\frac{x^2-a^2}{(x+a)^2(x-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}-\frac{(x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}$$

$$=\frac{x^2-a^2+(x-a)^2-(x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}$$

$$=\frac{x^2-a^2-4ax}{(x+a)^2(x-a)^2}=\frac{x^2-4ax-a^2}{(x+a)^2(x-a)^2}$$

## 習題四

行下列各式的加減:

1. $\frac{x}{x^2-a^2}-\frac{a}{a^2-x^2}$　　2. $\frac{a}{b^2c}+\frac{d}{bc^2}$

3. $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$　　4. $\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}$

5. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}$　　6. $\frac{x+3}{x-6}+\frac{1-x}{x+4}$

7. $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2-y^2}$

8. $\frac{2}{x+4}-\frac{x-3}{x^2-4x+16}+\frac{x^2}{x^3+64}$

### (II) 分式的乘法及除法

分式的乘除規則,與算術相同,以式表之即

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

例 1.　試計算 $\frac{2ab}{3a^3b^2c}\times\frac{9a^2b^3c^3}{7a^3b^2c^4}$

【解】　因 $\frac{2}{3}\times\frac{9}{7}=\frac{6}{7}$, $a$ 得 $\frac{1}{a^3}$, $b$ 得 1, $c$ 得 $\frac{1}{c^2}$,

所以 $$\frac{2ab}{3a^3b^2c}\times\frac{9a^2b^3c^3}{7a^3b^2c^4}=\frac{6}{7a^3c^2}$$

例 2. 試計算 $\dfrac{5x^3y^2}{24x^2y^3}\div\dfrac{20x^4y^3}{18y^8}$

【解】 $$\frac{15x^3y^2}{24x^2y^3}\div\frac{20x^4y^3}{18y^8}=\frac{15x^3y^2}{24x^2y^3}\times\frac{18y^8}{20x^4y^3}=\frac{9y^4}{16x^3}$$

例 3. $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\times\dfrac{(x+y)^3}{x^2-y^2}\times\dfrac{4x^2}{(x-y)^3}=?$

【解】 $$原式=\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\times\frac{(x+y)^3}{(x+y)(x-y)}\times\frac{4x^2}{(x-y)^3}$$

$$=\frac{4x^2}{(x-y)^2}$$

例 4. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(a+b-\dfrac{2ab}{a+b}\right)=?$

【解】 $$原式=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}\div\frac{(a+b)^2-2ab}{a+b}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\times\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{2}{a-b}$$

## 習題五

1. $\dfrac{4xy}{5x^2y^2}\times\dfrac{11a^2b^2x^4}{18a^4bx^3}=?$ 2. $\dfrac{4b^3}{5a^3}\div\dfrac{15b^2}{16a^2}\div\dfrac{20a^2}{16a^3b}=?$

3. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}\times\dfrac{a-b}{a+b}\times\dfrac{a^2b^3(a+b)^2}{ab(a^2-b^2)}=?$

4. $\dfrac{1-x^3}{1-x^2}\times\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2+1}=?$

5. $\left(\dfrac{3x}{3x+y}+\dfrac{y}{3x-y}\right)\times\dfrac{3x-y}{9x^2+y^2}\div\left(\dfrac{1}{3x-y}-\dfrac{1}{3x+y}\right)=?$

6. $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)\times\dfrac{1}{y^2-x^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}+\dfrac{x}{xy-y^2}=?$

# 第八章　分方程式

如$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x}=2$,分母中含有未知數的方程式,叫分方程式.

## 1. 分方程式的解法

例 1.　試解$\frac{x-1}{x}=0$

【解】　以不爲0的數除0,得商必爲0.今欲求$\frac{x-1}{x}$式中的$x$爲何值,此式始等於0.祇有使此分式的分子$x-1$爲0,而得$x=1$;且除了$x=1$以外,不能等於0.由此左邊爲最簡分式而欲其值爲0,其分子不可不爲0.令分子等於0而得$x=1$的根,故1爲所求的根.

例 2.　試解$\frac{1}{x}=1$

【解】　移1於左邊,並通分之,

$$\frac{1}{x}-1=0\qquad\frac{1-x}{x}=0\qquad\therefore\quad\frac{x-1}{x}=0$$

由此可與例1相同,求得$x=1$的根.

例 3.　解$\frac{2x-5}{x-3}-\frac{2(x-1)}{2x+1}=\frac{x-2}{x-3}$

【解】　集各項於一邊,

$$\frac{2x-5}{x-3}-\frac{x-2}{x-3}-\frac{2(x-1)}{2x+1}=0$$

$$\frac{2x-5-x+2}{x-3}-\frac{2x-2}{2x+1}=0$$

$$\frac{x-3}{x-3}-\frac{2x-2}{2x+1}=0 \qquad 1-\frac{2x-2}{2x+1}=0$$

$$\frac{2x+1-2x+2}{2x+1}=0 \qquad 即 \quad \frac{3}{2x+1}=0$$

此方程式左邊爲最簡分式而其分子不含 $x$,故無使此分式爲 0 的 $x$ 的值,由此原分方程式無根.

觀以上各例,分方程式的解法,可先集各項於一邊,用通分法化成最簡分式然後令其分子爲零以求 $x$ 的值.

但在稍複雜的分方程式,實際以分母的最低公倍式乘方程式的兩邊,化爲整方程式(這叫去分母),既簡單而且便利.不過用此法時,勿忘却下面的重要注意.

方程式的兩邊,不可輕用含未知數的項來乘除,但其含未知數的式子不等於 0 時,不在此例.

**2** 用去分母法解分方程式

例 1.　試解 $\frac{1}{x}=1$

【解】　以分母 $x$ 乘此方程式的兩邊則得

$$1=x \qquad \therefore \quad x=1$$

故 $x=1$ 爲所求的根.

例 2.　試解 $\frac{x+1}{x-2}=7$

【解】　以分母 $x-2$ 乘兩邊

$$x+1=7x-14 \qquad -6x=-15$$

$$\therefore \quad x=\frac{-15}{-6}=\frac{5}{2}$$

【注意】　以上二例雖都用含未知數的項乘兩邊,但因求得根後知消去的分母不爲0,所以與前述注意不相抵觸.

例 3.　試解 $\frac{2x-5}{x-3}-\frac{2(x-1)}{2x+1}=\frac{x-2}{x-3}$

【解】　以 $(x-3)(2x+1)$ 乘此方程式的兩邊,則

$$(2x-5)(2x+1)-2(x-1)(x-3)=(x-2)(2x+1)$$

卽　$4x^2-8x-5-2x^2+8x-6=2x^2-3x-2$

$$\therefore \quad 3x=9 \qquad \therefore \quad x=3$$

以此 $x$ 的值,代入乘方程式兩邊的 $(x-3)(2x+1)$ 中,則其值爲 0 卽以 0 乘方程式的兩邊,與前述注意抵觸.此時應中止去分母移各項於一邊,通分爲最簡分式,再使其分子等於零以求 $x$ 的值,舍此別無他法.但此與前節例 3 相同,本分方程式無根.

由以上的例,對於去分母以解分方程式,應注意如次.

(1) 解分方程式,可取其分母的最低公倍式乘兩邊,化爲整方程式解之.

由此所得的　,其分母如不爲零,雖爲原方程式的根;

若分母爲零,則當中止去分母.

(2)由去分母而得的方程式(例如 $x-3=0$),欲改爲不去分母而由通分所得的方程式其法如下.

以 $x-3$ 爲分子以去分母時的最低公倍式爲分母,作成分式而等於零,如 $\dfrac{x-3}{(x-3)(2x+1)}=0$, 即 $\dfrac{1}{2x+1}=0$ 便得.

故可不必從始初改算.

## 習題一

解下列各方程式:

1. $\dfrac{x-3x+2}{x^2-1}=0$　　　2. $\dfrac{x-4x+4}{x^2-3x+2}=0$

3. $\dfrac{x+1}{x-2}=7$

### 3. 簡法

例 1.　解 $\dfrac{x-9}{x-5}+\dfrac{x-5}{x-8}=2$

【解】　變化原方程式的形狀爲

$$\frac{x-5-4}{x-5}+\frac{x-8+3}{x-8}=2$$

即

$$1-\frac{4}{x-5}+1+\frac{3}{x-8}=2$$

$$-\frac{4}{x-5}+\frac{3}{x-8}=0\qquad -4(x-8)+3(x-5)=0$$

$$-4x+32+3x-15=0 \qquad \therefore \quad x=17$$

將求得的$x=17$代入分母$x-5$, $x-8$不為零,故為原方程式的根.

【注意】　$x-9$以$x-5$除之得$1-\frac{4}{x-5}$, $x-5$以$x-8$除之得$1+\frac{3}{x-8}$,上例的變形,即代此實際的除算.而左邊的$1+1$,與右邊的2相消,為此簡法的要旨.

例 2.　解$\frac{x-2}{2x-1}-\frac{x-3}{3x-1}=\frac{1}{6}$

【解】　去分母 6,

$$\frac{6x-12}{2x-1}-\frac{6x-18}{3x-1}=1$$

依前例變形

$$\frac{6x-3-9}{2x-1}-\frac{6x-2-16}{3x-1}=1$$

$$3-\frac{9}{2x-1}-2+\frac{16}{3x-1}=1$$

$$-\frac{9}{2x-1}+\frac{16}{3x-1}=0$$

$$-9(3x-1)+16(2x-1)=0$$

$$-27x+9+32x-16=0$$

$$5x=7 \qquad \therefore \quad x=\frac{7}{5} \quad (答)$$

例 3.　解$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}$

【解】　左右各移一項,變爲

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊通分　$$\frac{x+4-x-1}{(x+1)(x+4)}=\frac{x+5-x-2}{(x+2)(x+5)}$$

卽　$$\frac{3}{(x+1)(x+4)}=\frac{3}{(x+2)(x+5)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}=\frac{1}{(x+2)(x+5)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

去分母　$$(x+2)(x+5)=(x+1)(x+4)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x^2+7x+10=x^2+5x+4$$

$$2x=-6 \qquad \therefore \quad x=-3$$ (答)

【注意】　原方程式左邊的$\frac{1}{x+5}$移至右邊,右邊的$\frac{1}{x+4}$移至左邊而得(1);再兩邊通分而得分子不含$x$的方程式如(2).若照原方程式去分母,則爲

$$(x+5)(x+2)(x+4)+(x+1)(x+2)(x+4)$$
$$=(x+1)(x+5)(x+4)+(x+1)(x+5)(x+2)$$

以此與方程式(3)比較,可知不及上法簡便.

例 4.　解$\frac{1}{x+4}+\frac{5}{x+6}=\frac{6}{x+3}$

【解】　分原方程式的右邊成兩項,

$$\frac{1}{x+4}+\frac{5}{x+6}=\frac{1}{x+3}+\frac{5}{x+3}$$

$$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}=\frac{5}{x+3}-\frac{5}{x+6}.$$

兩邊通分 $$\frac{-1}{(x+4)(x+3)}=\frac{15}{(x+3)(x+6)}$$

以分母的最低公倍式 $(x+4)(x+6)(x+3)$ 乘之

$$-(x+6)=15(x+4)$$

$$-x-6=15x+60 \qquad \therefore \quad x=-\frac{33}{8} \quad (\text{答})$$

【注意】 去分母時,如不乘以最低公倍式則

$$-(x+3)(x+6)=15(x+4)(x+3)$$

將引入不爲根的 $x=-3$.

## 習題二

解下列各方程式:

1. $\frac{x}{x+3}+\frac{4}{x+5}=1$ 2. $\frac{7x-4}{x-1}=\frac{7x-26}{x-3}$

3. $\frac{6x}{x-7}+\frac{1}{x-6}=6$

4. $\frac{1}{x-13}-\frac{2}{x-15}=\frac{1}{x-19}-\frac{2}{x-18}$

### 4. 聯立分方程式

例 1. 解 $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=3,\quad \frac{6}{x}-\frac{2}{y}=1$

【解】 令 $\frac{1}{x}=X,\ \frac{1}{y}=Y$, 則原方程式可不必去分母而成整方程式,即

$$3X+4Y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$6X-2Y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解此 $X$、$Y$ 的二元一次聯立方程式

$$X=\frac{1}{3} \qquad Y=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x=3,\ y=2 \quad (\text{答})$$

例 2. 解次之方程式:

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{5}{6},\quad \frac{zx}{z+x}=\frac{3}{4},\quad \frac{xy}{x+y}=\frac{15}{8}$$

【解】 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 通分則得 $\frac{y+z}{yz}$,此分式的逆數爲第一方程式的左邊,故取第一方程式兩邊的逆數,

$$\frac{y+z}{yz}=\frac{6}{5} \qquad \frac{y}{yz}+\frac{z}{yz}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{6}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同樣由第二、第三兩方程式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{8}{15} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

令 $\frac{1}{x}=X,\ \frac{1}{y}=Y,\ \frac{1}{z}=Z$, 則得

$$Z+Y=\frac{6}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$X+Z=\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$Y+X=\frac{8}{15}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5)+(6)−(4)

$$2X=\frac{8}{15}+\frac{4}{3}-\frac{6}{5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}\qquad\therefore\quad X=\frac{1}{3}$$

由此從(6) $Y=\frac{1}{5}$ 又從(4) $Z=1$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{5},\quad \frac{1}{z}=1$$

$\therefore\quad x=3,\quad y=5,\quad z=1$ （答）

例 3. 解下列分方程式:

$$\frac{x-4}{y+4}=\frac{x-3}{y+7}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x+2}{y-2}=\frac{x+5}{y-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

【解】 去(1)的分母而整理之,

$$(x-4)(y+7)=(x-3)(y+4)$$

$$xy+7x-4y-28=xy+4x-3y-12$$

$$\therefore\quad 3x-y=16\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

去(2)的分母而整理之

$$(x+2)(y-1)=(x+5)(y-2)$$

$$xy-x+2y-2=xy-2x+5y-10$$

$$\therefore \quad x-3y=-8 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

取(3)的三倍,由此減去(4)

$$8x=56 \qquad \therefore \quad x=7$$

由(4)　$7-3y=-8 \qquad \therefore \quad y=5$

(答)　$x=7, \quad y=5$

## 習題三

下列各題試解其方程式:

1. $5x+\dfrac{3}{y}=30, \quad 9x+\dfrac{5}{y}=52$

2. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9, \quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{z}=3,$

   $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{2z}=7$

3. $\dfrac{3xy}{9y-22x}=25, \quad \dfrac{xy}{3y+5x}=\dfrac{15}{8}$

4. $\dfrac{3x+7}{5y+1}=2, \quad \dfrac{2x-1}{5y+1}=\dfrac{2}{3}$

### 5. 以分式表示種種事實

例 1.　若10日可做成工作一件,則1日可做成工作的$\dfrac{1}{10}$.一般若$x$日可成某工作,則1日可成其工作的$\dfrac{1}{x}$.又一般若$x$日可成$a$工作,則1日可成$\dfrac{a}{x}$的工作.

例 2.　設1元可買白米$x$升,則白米1袋(裝5

斗)價值的元數,等於50升中含有 $x$ 升的數,可用$\frac{50}{x}$元表 1 袋的米價.

例 3. 綢每疋價 $x$ 元則200元買入的疋數,可表以 $\frac{200}{x}$.

例 4. 以等速率每時行 $v$ 里,則 $t$ 時所行的距離爲 $vt$ 里.今以 $s$ 表距離,則有次之等式.

$$s = vt$$

$$\therefore \quad \frac{s}{v}=t \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \frac{s}{t}=v \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)表以每時速率除距離而得所需的時間,(2)表以時間除距離而得每時的速率.例如甲地離乙地 $x$ 里,今由甲地以每時行 $y$ 里的速率往乙地,則其所需的時數,可表以 $\frac{x}{y}$.

**6.** 一元分方程式應用問題

例 1. 有分數$\frac{5}{12}$,若於分母與分子各加同數,則等於原分數的逆數.問所加的數如何?

【解】 令所加的數爲 $x$,則分數爲 $\frac{5+x}{12+x}$.但此數等於原分數的逆數 $\frac{12}{5}$,所以得次之方程式:

$$\frac{5+x}{12+x}=\frac{12}{5}$$

去分母而解方程式,

$$25+5x=144+12x \qquad \therefore \quad x=-17$$

由此得所求的數爲 $-17$.

【驗算】　$\frac{5}{12}$的母子各加 $-17$,則 $\frac{-12}{-5}=\frac{12}{5}$

例 2.　有甲、乙、丙三種米,其市價每元可買之數,甲比乙貴 1 升 5 合,乙比丙貴 1 升 5 合.而甲與丙的平均價,每元比乙貴 1 合.問每元可買每種米各若干?

【解】　設甲米每元買 $x$ 升,則乙米比甲米賤 1.5升,可買 $(x+1.5)$升;丙米比乙米賤 1.5升,可買 $(x+3)$ 升.故甲米每升市價爲 $\frac{1}{x}$ 元,丙米每升市價爲 $\frac{1}{x+3}$ 元.由此甲米與丙米每升市價平均爲 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)$元.而此平均市價,每元比乙米的$(x+1.5)$升貴 1 合,可買$\{(x+1.5)-0.1\}=(x+1.4)$升;故每升市價爲 $\frac{1}{x+1.4}$ 元.由此得次之方程式.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{x+1.4}$$

以 2 乘兩邊　$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x+1.4}$

解此方程式,以用簡法爲便.

即　$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+1.4}+\frac{1}{x+1.4}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1.4}=\frac{1}{x+1.4}-\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1.4}{x(x+1.4)}=\frac{1.6}{(x+1.4)(x+3)}$$

去分母　$1.4(x+3)=1.6x$　$\therefore\ x=21$

由此　$x+1.5=21+1.5=22.5$,　$x+3=21+3=24$

(答)甲米2斗1升,乙米2斗2升5合,丙米2斗4升.

## 習題四

1. 每元所買的中等米,比上等米多2升,比下等米少1升5合.又上等米2斗與下等米3斗混合,恰與中等米同價.求中等米每元可買多少?

2. 火車行100哩路,往時速率相等.返時始初的30哩每時速率比原來減少5哩;其餘則每時速率比原來增加3哩.如此往返的時間相同,求往時每時的速率.

### 7. 聯立分方程式應用問題

例1. 有甲乙二水管,放水入水槽.若甲管放10時,乙管放6時,或甲管放8時,乙管放9時,都能放水滿槽.求但放一管時,各管須若干時才能放滿此槽?

【解】　設但開甲管須$x$時,但開乙管須$y$時.才能將水槽放滿;則各管每時能放滿此水槽的$\frac{1}{x}$及$\frac{1}{y}$.若甲管放10時,乙管放6時,則所放入的水量爲水槽的

$\frac{1}{x}\times 10+\frac{1}{y}\times 6$; 因此時適滿一槽,故得次之方程式.

$$\frac{10}{x}+\frac{6}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣得 $$\frac{8}{x}+\frac{9}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解(1)與(2),可令 $\frac{1}{x}=X$, $\frac{1}{y}=Y$, 則得

$$10X+6Y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$8X+9Y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)與(4) $X=\frac{1}{14}$, $Y=\frac{1}{21}$

由此 $\frac{1}{x}=\frac{1}{14}$, $\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$

$\therefore\quad x=14,\quad y=21$

(答)甲管14時,乙管21時.

例2. 舢板在長1500米的河流中,上下航行各一次共費時18分鐘.但上水行400米與下水行500米,其時間相等.問水流的速率如何?

【注意】 本題求水流的速率,其未知數僅有一個,欲依題立式甚難;於是定一其他適當未知數,使題意容易表示.例如本題則取靜水中航行的速率爲一未知數,此種雖問題中所未及而爲立方程式所用的未知數,叫補助未知數.

【解】 設舢板航行靜水中速率每分鐘 $x$ 米,水流的速率每分鐘 $y$ 米則上水速率每分鐘 $(x-y)$ 米,下水速率每分鐘 $(x+y)$ 米,由此上水行 1500 米的時間為 $\frac{1500}{x-y}$ 分,下水行 1500 米的時間為 $\frac{1500}{x+y}$ 分,而上水與下水共費 18 分鐘,所以得次之方程式

$$\frac{1500}{x-y}+\frac{1500}{x+y}=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又上水行400米的時間為 $\frac{400}{x-y}$ 分,下水行500米的時間為 $\frac{500}{x+y}$ 分,此兩時間相等,故

$$\frac{400}{x-y}=\frac{500}{x+y} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

令 $\frac{1}{x-y}=X,\quad \frac{1}{x+y}=Y,$ 則

$$1500X+1500Y=18 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$400X=500Y \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 3 除 (3),將 (4) 變形

$$500X+500Y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$400X-500Y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5) + (6) $\quad 900X=6 \qquad \therefore\ X=\frac{1}{150}$

由 (4) $\quad Y=\frac{4}{5}X=\frac{4}{5}\times\frac{1}{150}=\frac{2}{375}$

所以 $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{150}$, $\frac{1}{x+y}=\frac{2}{375}$

即 $x-y=150$ ……………………(7)

$x+y=\frac{375}{2}$ ……………………(8)

(8)－(7) $2y=\frac{75}{2}$ $\therefore$ $y=\frac{75}{4}=18.75$

(答)水流速率每分鐘18.75米.

例 3. 有航海的船,以一定速率行若干浬.若速率每時增加 2 浬,可早到 4 時;每時減少 2 浬,須遲到 6 時.求此航路的長及此船的速率.

【解】 令航路長 $x$ 浬船的速率每時 $y$ 浬,則航行所需時間爲 $\frac{x}{y}$. 若速率每時增加 2 浬,所需時間爲 $\frac{x}{y+2}$;每時減少 2 浬,所需時間爲 $\frac{x}{y-2}$.由此依題意得方程式:

$$\frac{x}{y}-\frac{x}{y+2}=4 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{y-2}-\frac{x}{y}=6 \cdots\cdots(2)$$

左邊通分 $\frac{2x}{y(y+2)}=4$ ……………………(3)

$$\frac{2x}{y(y-2)}=6 \cdots\cdots(4)$$

(3)÷(4) $\frac{y-2}{y+2}=\frac{2}{3}$

去分母 $3y-6=2y+4$ $\therefore\ y=10$

以此代入(3) $2x=4y(y+2)=4\times10\times12$

$\therefore\ x=24$

(答)航路長240浬,每時速率10浬.

## 習題五

1. 甲、乙、丙三人完成工作一件,已知甲、乙二人合作須12日,甲、丙二人合作須15日,甲、乙、丙三人合作須10日.問一人獨作各須幾日?

2. 有自由車,每行126尺路,前輪比後輪多轉22次.若前輪周圍增加7分之1,後輪周圍減少8分之1,則行252尺路,前輪比後輪多轉31次.求兩輪的周圍.

3. 有航行的船,下水行3哩的時間,等於上水行2哩的時間.今河流的長爲10哩,此船往返一次共費10時.問下水所需時間及水流每時速率如何?

4. 火車依規定的速率進行,經1時後,路上發生障礙,停車24分鐘,然後以規定速率的5分之6繼續進行,及達目的地,比原定時刻遲15分鐘.若路上的障礙能與目的地較近,發生在相距5哩的地方,則可早到2分鐘.問規定速率及自出發地至目的地的距離如何?

# 第九章　平方根

## 1. 冪與根

一般以 $x^n=a$（$n$表正整數）表 $x$ 的 $n$ 次冪（$n$次乘方）等於 $a$.在此稱 $x$ 爲 $a$ 的 $n$ 次根,$n$ 爲根指數.已知 $a$ 與 $n$ 而求 $x$,稱爲求 n 次根或開 $n$ 次方

已知 $x$ 與 $n$ 時,$a$ 僅有一個數值;例如$2^3$、$(-5)^2$、$\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 各爲 8、25、$\frac{1}{81}$.

但知$a$與$n$時,$x$不限於一個數值;例如$x^2=1$, $x^3=8$. $x^4=16$ 等,其答不止一個,逐一說明於後.

二次根特稱平方根,求平方根的一個數稱開平方,簡稱開平.

設有絕對值相等而符號相異的二數,例如 3 與 $-3$ 取此二數的平方,都成 9 而毫不相異,即

$$3^2=9 \qquad (-3)^2=9$$

可知 9 的平方根,不獨 3 而尙有 $-3$. 惟除 3 與 $-3$ 之外,已無平方爲 9 的數.此因大於 3 的數,其平方比 9 大;在 3 與 $-3$ 間的數,其平方比 9 小;比 $-3$ 更小的數,其平方再比 9 大;故決不能等於 9.

類此的數,不獨 3 與 $-3$, 因之其平方亦不限於 9,而

平方根常成絕對值相等而符號相異的二類.所以適合

$$x^2=a$$

的 $x$ 有二值,以 $\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$ 表之.$\sqrt{a}$ 表正值,讀做平方根 $a$.二值併記時則作 $\pm\sqrt{a}$.

例 1.　$\sqrt{16}$ 的值如何?

【解】　因平方根號表正值,故答爲 4.

例 2.　求 16 的平方根.

【解】　有二值,爲 4 與 $-4$.

例 3.　$\sqrt{a^2}$ 的值如何?

【解】　若 $a$ 爲正,則答爲 $a$;又若 $a$ 爲負,則答爲 $-a$

例如　$\sqrt{(-5)^2}=5$

設 $a=-5$,則答爲 $5=-a$.

**2.** 單項式開平方

例 1.　設 $x$ 爲正,則 $\sqrt{x^6}$ 的值如何?

【解】　$\sqrt{x^6}=\sqrt{(x^3)^2}=x^3$

例 2.　求 $\sqrt{a^4b^4}$ 的值.

【解】　$\sqrt{a^4b^4}=\sqrt{(a^2b^2)^2}=a^2b^2$

例 3.　求 $\sqrt{25a^2}$.

【解】　$\sqrt{25a^2}=\sqrt{(5a)^2}=5a(a>0)$

$$=-5a(a<0)$$

例 4. $49x^2$ 的平方根如何:

【解】 $\pm\sqrt{49x^2}=\pm 7x$

**3.** 多項式開平方(其一)

下例定 $a, b$ 爲正數.

例 1. 由乘法 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,所以

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$$

又因 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,所以

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b$$

## 習題一

1. 開 $a^2+4ab+4b^2$ 的平方.

2. 求 $\sqrt{36x^4-60x^2y+25y^2}$.

3. 開 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 的平方.

**4.** 多項式開平方(其二)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\therefore\quad \sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$$

由此一般爲 $a^2+2ab+b^2$ 時,則求其平方根 $a+b$ 的順序如次:

(第一) 將題式依降冪式整理

(第二) 求題式第一項 $a^2$ 的平方根,得根的第一項

$a$.

（第三）從題式減去平方根第一項 $a$ 的平方,得差 $2ab+b^2$.次取根第一項 $a$ 的二倍,除差的第一項 $2ab$,得商 $b$,爲根的第二項.

（第四）分析 $2ab+b^2$ 的因式得 $(2a+b)b$,等於根第一項 $a$ 的二倍與第二項 $b$ 之和卽 $2a+b$,乘以根第二項 $b$ 的積.

依以上各項演算時,列式如次:

$$
\begin{array}{r|l}
a^2+2ab+b^2 & a+b \\
\underline{a^2\qquad\qquad} & \overline{2a+b} \\
2ab+b^2 & \quad\;\; b \\
\underline{2ab+b^2} &
\end{array}
$$

例 1.　求 $\sqrt{x^2-4x+4}$.

【演算】

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-4x+4 & x-2 \\
\underline{x^2\qquad\qquad} & \overline{2x-2} \\
-4x+4 & \quad\; -2 \\
\underline{-4x+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

【說明】　$x^2$ 的平方根 $x$ 爲根的第一項.取其二倍 $2x$ 除 $-4x+4$ 得商 $-2$,爲根的第二項.以此與 $2x$ 相加,乘以 $-2$,從差 $-4x+4$ 減去此積得 0.

平方根有三項以上時,先依上法求起始的二項,再將此看作一數,依上述順序反覆演算.

例 2.　$(x^2+2x+3)^2=\{(x^2+2x)+3\}^2$

$$=(x^2+2x)^2+6(x^2+2x)+9$$

$$=x^4+4x^3+4x^2+6x^2+12x+9$$

$$=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$$

依此逆順序計算時,列式如次:

【演算】

$$\begin{array}{r|l}
x^4+4x^3+10x^2+12x+9 & x^2+2x+3 \\
x^4\qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \hline
4x^3+10x^2\qquad\qquad & 2x^2+2x \\
4x^3+\ \ 4x^2\qquad\qquad & \quad\ \ 2x \\ \hline
6x^2+12x+9 & 2x^2+4x+3 \\
6x^2+12x+9 & \qquad\qquad 3 \\ \hline
0 & (答)x^2+2x+3
\end{array}$$

【注意】　因起始二項的二倍為

$$2(x^2+2x)=2x^2+2x+2x$$

第一項二倍與第二項之和為 $2x^2+2x$,加入第二項 $2x$ 則得 $2x^2+4x$.

### 5. 數的開平方

(I)　數的開平方,以記憶 1 至 9 各數的平方為基礎.

| 數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平方 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |

例如 $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{64}=8$, 表中各數的平方根,容易求得.

表中所無之數,例如$\sqrt{53}$,則因53比7的平方49大而比8的平方64小,所以知7過小而8過大,即$\sqrt{53}$之數在7與8之間.

此種開不盡的數,7是平方根的整數.

(II) 數的平方根,依以下方法定位.

$$1^2=1$$

$$10^2=100$$

$$100^2=10000$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因1的平方爲1,10的平方爲100,所以1與10間之數,其平方必大於1而小於100,即整數部爲一位或二位數.由此整數部爲一位或二位的數,其平方根必有一位整數.同樣100與10000間之數,即整數部爲三位或四位數,其平方根必有二位整數.以下倣此.

$$1^2=1$$

$$(0.1)^2=0.01$$

$$(0.01)^2=0.0001$$

$$(0.001)^2=0.000001$$

因0.1的平方爲0.01,0.01的平方爲0.0001,所以0.01與0.001之間爲0.1與0.01間數的平方,即小數點以下第

一位數的平方.以下倣此,故得以下方法.

整數從個位起始,分每二位爲一節,其節數等於平方根整數的位數.小數與整數相同,從分位起始分節,每二位得平方根一位.

例如12345,從個位起,分每二位爲一節,可得三節(最左一節可爲一個數字),故 $\sqrt{12345}$ 可得整數根三位.又0.1235的平方根爲小數二位數,0.1385679的平方根爲小數四位數.

【注意】 0.1235的平方根爲二位,是但就表面上說的,其開不盡的不在此例.

定帶小數平方根的位數以小數點爲標準,向左及右分每二位爲一節.

例如135.246875的平方根,其整數部爲二位,小數部則表面上爲三位.

數的開平方,其算法亦以下列公式爲基本.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

又 $$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$$

即二位數的平方,$a$ 表十位數,$b$ 表個位數.

今依此公式求 $63^2$,則

$$63^2=(60+3)^2$$

$$=60^2+(2\times60+3)3$$

$$=3600+(120+3)3$$

$$=3600+123\times3$$

$$=3600+369=3969$$

依此逆順序進行,可引出次之開平方法.

例 1. 開 3969 的平方.

【解】 3969 從個位起每二位分節得 39|69,二節,卽所求平方根爲二位數.而 3900 因大於 $(60)^2=3600$, 小於 $(70)^2=4900$, 故知平方根的十位數爲 6.今設個位數爲 $x$,則

$$(60+x)^2=3969$$

$$3600+2\times60x+x^2=3969$$

$$(2\times60+x)x=3969-3600$$

$$(120+x)x=369$$

因欲由此方程式求 $x$,暫作爲括號內的 $x$ 沒有,卽得 $120\times x=369$.以 120 除 369,得商 3 有餘故以所求的 $x$ 爲 3 代入前式試算,

$$(120+3)3=369$$

卽可知其適合.於是以所求的個位數爲 3,而 3969 的平方根爲 63.

上法的運算如次.

【運算】

```
39|69 | 63
36    |----
------|123
 3 69 |  3
 3 69 |
------|
    0 |
```

【說明】 從左端一節39,減去足減的最大平方數$6^2$(即36)得剩餘3.同時續寫第二節的69得369.次以6的二倍12,除369最左的二位36,得商3.記此3於6的二倍12之右,得123.以3乘123而記其結果於369的下面,實行減法,恰能減盡無餘.

例 2. 求64516的平方根.

【運算】

```
6|45|16 | 254
4       |-----
--------| 45
2 45    |  5
2 25    |-----
--------| 504
  20 16 |   4
  20 16 |
--------|
      0 |
```

(答) $\pm254$

【說明】 求第一節6的平方根2,從6減去$2^2=4$,同時續寫第二節數,得第一剩餘245.今二倍求得的2為4,以除24雖可得6,但$46\times6=276$,比245大,故取比6小1的5為第二數,則$45\times5=225$,比245小.從245減去225得20,續寫第三節數得2016.

次以$25\times2=50$除201得4,從2016減去$504\times4=2016$無

餘,故所求的平方根為 ±254.

例 3. 開 9.7344 的平方.

【演算】

$$
\begin{array}{r|l}
9.73|44 & 3.12 \\
9 & 61 \\
\hline
73 & \quad 1 \\
61 & 622 \\
\hline
1244 & \quad\ 2 \\
1244 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

(答) 3.12

【說明】 本例為帶小數開平方,從小數點向右及左,每二位分一節,故本例整數部為一位,小數部為二位.由整數部入小數部,須記小數點,不可遺忘.

例 4. 開 0.002704 的平方.

【演算】

$$
\begin{array}{r|l}
0.00|27|04 & 0.052 \\
25 & 102 \\
\hline
2\,04 & \quad\ 2 \\
2\,04 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

(答) 0.052

【說明】 小數開平方,從小數點向右每二位分節因起始一節的數為 0,所以平方根小數點以下第一位為 0,而有效數字從小數點以下第二位起始.

**6.** 分數開平方

分數開平方,有次之公式

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (\text{但 } a, b \text{ 都是正})$$

【證明】　令 $\sqrt{\frac{a}{b}}=p$,　則 $\frac{a}{b}=p^2$

又令　$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=q$,　則 $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=q^2$ $\therefore \frac{a}{b}=q^2$

$$\therefore\quad p^2=q^2$$

所以其平方根的正值相等.

即　$p=q$　$\therefore\ \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(A)分母與分子都開得盡的

例 1.　開 $\frac{4}{25}$ 的平方.

【解】　依上面公式,分母分子各開方,

$$\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}\ (答)$$

例 2.　求 $\frac{72}{128}$ 的平方根.

【解】　先約分得 $\frac{72}{128}=\frac{9}{16}$,分母與分子都能開盡,

故依以上公式

$$\pm\sqrt{\frac{72}{128}}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=\pm\frac{3}{4}\ (答)$$

例 3.　開 $69\frac{4}{9}$ 的平方.

【解】　$69\frac{4}{9}=\frac{625}{9}$

$$\therefore\quad \sqrt{69\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{9}}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}\ (答)$$

$(B)$祗有分母能開盡的

例 4. 求 $\frac{7}{9}$ 平方根的正值至小數第四位.

【解】 $\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

開分子 7 的平方如次

| | |
|---|---|
| 7.00\|00\|00\|00 | 2.6457········ |
| 4 | 4 6 |
| 3 00 | 6 |
| 2 76 | 5 24 |
| 24 00 | 4 |
| 20 96 | 5 285 |
| 3 04 00 | 5 |
| 2 64 25 | 5 2907 |
| 39 75 00 | 7 |
| 37 03 49 | |
| 2 71 51 | |

故 $\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{2.6457}{3}=0.8819$·········(答)

又本例依 $\sqrt{\frac{7}{9}}=\sqrt{0.77777777\cdots\cdots}$ 計算亦可,即

| | |
|---|---|
| 0.77777777 | 0.8819········ |
| 64 | 1 68 |
| 1377 | 8 |
| 1344 | 1 761 |
| 3377 | 1 |
| 1761 | 1 7629 |
| 161677 | 9 |
| 158661 | |
| 3016 | |

(C)分母與分子都開不盡的

例 5. 求 $\sqrt{\frac{3}{7}}$ 至小數二位.

【解】 分數的分母開不盡時,可用適當的數乘分數的母子,使分母成平方數,則比較大小及計算上都很便利.本例以 7 乘母子如次.

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4.58\cdots\cdots}{7}=0.65\cdots\cdots(\text{答})$$

【注意】 依前例的後法計算亦可,即

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0.4285\cdots\cdots}=0.65\cdots\cdots$$

例 6. 計算 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ 至小數點以下三位爲止.

【解】 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3}{8}}$, 欲化分母爲平方數,以 2 乘母子,則得

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times2}{8\times2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{2.449\cdots\cdots}{4}=0.612\cdots\cdots(\text{答})$$

【注意】 計算 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$,若母子分別開方,再行除算,便很麻煩.

## 習題二

1. 開 1698181681 的平方.

2. 開 152399025 的平方

3. 求 $\sqrt{\frac{2}{5}}$ 至小數三位.

4. 求 $\sqrt{1\frac{1}{2}}$ 至小數三位.

# 第十章　二次方程式

## 1. 一元二次方程式的形狀

元是代表未知數的字母,一元就是祇有一個代表未知數的字母(例如$x$),二次方程式則方程式中必含未知數平方的項例如($x^2$),但決不含比$x^2$高次的項例如$x^3$,$x^4$等).

例如下列方程式,都是一元二次方程式.

(1) $x^2=36$　　(2) $8x^2-50=0$

(3) $7x^2-6x=0$　　(4) $x^2-2x+1=0$

(5) $3x^2-11x+6=0$　　(6) $5x^2-x+1=0$

今設某常數$a$爲$x^2$的係數,他常數$b$爲$x$的係數,其不含$x$的項(叫常數項)爲常數$c$,則$b$, $c$雖有時可爲零但$a$必不爲零,由此一元二次方程式如次.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\text{但 } a\neq o)$$

這是一元二次方程式一般的形狀.

以下由一元二次方程式簡易者的解法,漸次進於一般者的解法.

## 2. 無一次項的方程式

例 1.　解$x^2=36$.

【解】　$x^2=36$ 是何數的平方爲36的意思.

但　$6^2=36$　或　$(-6)^2=36$.

故所求的數　$x=6$　或　$x=-6$　都可.由此適合 $x^2=36$ 的 $x$ 之值有二個.此事實同時表示,則作

$$x=\pm\sqrt{36}\quad \text{或}\quad x=\pm 6$$

例 2.　解　$x^2=7$.

【解】　在求何數的平方爲 7 時,如令

$x=2$　則　$x^2=4$

$x=3$　則　$x^2=9$

故知 2 過小而 3 過大.

由此令 $x$ 順次爲 2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5,……, 3 等值,以計算 $x^2$ 的值,則

$x=2.6$　$x^2=6.76$

$x=2.7$　$x^2=7.29$

故知 $x$ 爲2.6時過小,爲2.7時過大.

因此令 $x$ 順次爲2.6, 2.61, 2.62,……, 2.7 以計算 $x^2$ 的值,則

$$2.65>x>2.64$$

故知 $x$ 在 2.64 與 2.65 之間.

此法雖逐次行至無限,決不能得其平方恰爲 7 的數.

由此適合此方程式 $x$ 的值,非整數或有限帶小數.但以上曾由 $x^2=4$ 而得 $x=\pm\sqrt{4}$,仿此由 $x^2=7$ 亦可得 $x=\pm\sqrt{7}$. $\sqrt{7}$ 爲一個新數,叫無理數或不盡數, $\sqrt{7}$ 的近似值,可由開平方法依所要的精密計算求得.

【注意】 對於無理數,如整數、分數、有限小數等都稱有理數.

例 3. 解 $x^2=-5$.

【解】 無論何數的平方,決不爲負數;所以令 $x$ 爲任何數,其平方 $x^2$ 都不能等於 $-5$. 由此知適合此方程式 $x$ 的值,既非有理數,亦非無理數.但前在 $x=7$ 的方程式中,曾以 $\sqrt{7}$ 爲新數而解作 $x=\pm\sqrt{7}$;仿此解 $x^2=-5$,亦可作 $x=\pm\sqrt{-5}$ 而以 $\sqrt{-5}$ 爲一種新數,叫做虛數.

【注意一】 $\sqrt{-5}=\sqrt{-1\times5}=\sqrt{-1}\sqrt{5}$, 令 $i=\sqrt{-1}$, 則 $\sqrt{-5}=i\sqrt{5}$.

【注意二】 設有無理數及虛數,則形如 $ax^2=b$ 的二次方程式,一般可以得解.即

$$x^2=\frac{b}{a} \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

【注意三】 對於虛數,稱以前各數爲實數.

## 習題一

1. 解 $16x^2=9$

2. 解 $8x^2=50$

3. 解 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$

4. 解 $(2x-3)^2=15$

5. 解 $(x+2)^2+4=0$

6. 解 $9x^2+36=5x^2$

### 3. 由析因式的解法

例 1　解 $x^2-5x+6=0$

【解】　左邊分析因式

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

因此式為零,其因式必有一個為零.

即　$x-2=0$　或　$x-3=0$

$\therefore$　$x=2$　或　$x=3$

由此所求的根為　$x=2$　或　$x=3$

例 2.　解 $4x^2+11x-3=0$

【解】　左邊分析因式

$$4x^2+11x-3=(4x-1)(x+3)$$

$\therefore$　$(4x-1)(x+3)=0$

$\therefore$　$4x-1=0$　或　$x+3=0$

$\therefore$　$x=\frac{1}{4}$　或　$x=-3$

【注意】　以上二例,集方程式的項於一邊,整理成 $ax^2+bx+c=0$ 的形狀,依析因式公式

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

容易分析因式,故得解此二次方程式.

例 3. 解 $x^2-5x=0$

【解】 左邊分析因式 $x(x-5)=0$

故 $x=0$ 或 $x-5=0$

$\therefore$ $x=0$ 或 $x=5$

例 4. 解 $4x^2-12x+9=0$

【解】 因左邊成 $a^2-2ab+b^2$ 的形狀,所以分析因式為 $(2x-3)^2=0$

此即某數的平方為 0,

$$2x-3=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{3}{2}$$

【注意】 $(2x-3)^2=(2x-3)(2x-3)=0$, 故 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=\frac{3}{2}$, 此二根相等,其理由可參觀下例.

例 5. 解 $4x^2-9=0$

【解】 左邊分析因式 $(2x+3)(2x-3)=0$

$$\therefore \quad x=-\frac{3}{2} \qquad \text{或} \qquad x=\frac{3}{2}$$

【注意】 以上各例,其方程式的項集於一邊,與析因式公式

$$ma+mb=m(a+b)$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

等適合,所以容易解此二次方程式.

例 6. 解 $(2x+4)^2-(3x-1)^2=(4x-6)^2$

【解】 去括號

$$4x^2+16x+16-(9x^2-6x+1)=16x^2-48x+36$$

即 $4x^2+16x+16-9x^2+6x-1=16x^2-48x+36$

整理得 $21x^2-70x+21=0$

$3x^2-10x+3=0$　　$\therefore$ $(3x-1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=\frac{1}{3}$　　或　$x=3$

例 7. 解 $(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$

【解】 令 $3x-5=y$, 則原方程式成 $y$ 的二次方程式,即 $y^2-8y+7=0$

$(y-7)(y-1)=0$

$\therefore$ $y=7$　　或　　$y=1$

$\therefore$ $3x-5=7$　　或　　$3x-5=1$

$\therefore$ $x=4$　　或　　$x=2$

例 8. 解 $\left(\frac{2x+3}{4}\right)^2+2x+6=0$

【解】 令 $2x+3=y$, 則 $2x=y-3$.

以此$2x+3$與$2x$的值代入原方程式,則得$y$的二次方程式.即

$$\left(\frac{y}{4}\right)^2+y-3+6=0 \qquad \frac{y^2}{16}+y+3=0$$

去分母 $\quad y^2+16y+48=0$

$\therefore \quad (y+12)(y+4)=0$

$\therefore \quad y=-12 \qquad$ 或 $\qquad y=-4$

$\therefore \quad 2x+3=-12 \qquad$ 或 $\qquad 2x+3=-4$

$\therefore \quad x=-\frac{15}{2} \qquad$ 或 $\qquad x=-\frac{7}{2}$

## 習題二

解下列各題的方程式:

1. $x^2+4x-5=0$ 2. $6x^2+3=11x$

3. $3x^3-4x-32=0$ 4. $3x^2-4x=39$

5. $3x^2=17x$ 6. $x^2+16=8x$

7. $x^2-81=0$ 8. $(x-5)(x+7)=4(25-x)$

9. $2x(x+8)=x^2+2x-49$

10. $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2$

4. 由公式的解法:

一元二次方程式的一般形狀如次:

$$ax^2+bx+c=0 \quad a\neq$$

今研究此方程式的一般解法.以前曾學過二種特殊狀況的解法,即

(第一) 成 $X^2=A$ 形狀的方程式

(第二) 右邊爲 0 而左邊容易分析因式的方程式

一般解法可根據此二種的任一種推得,雙方敍述於下.

(第一) 以 $a$ 除 $ax^2+bx+c=0$ 的兩邊

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

移 $\frac{c}{a}$ 於右邊　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$……………(1)

欲使此方程式的左邊成 $X^2$ 形狀,應仿照 $x^2+2mx+m^2=(x+m)^2$,由 $x^2+\frac{b}{a}x=x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x$ 而得 $m=\frac{b}{2a}$,因此須加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.以 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 加於(1)的兩邊,

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

令 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)=X$,即成 $X^2=A$ 形狀的二次方程式.

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（第二）欲分析 $ax^2+bx+c$ 二次式的因式,所以將 $a$ 括出 $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ 欲右邊括號內化成 $X^2-Y^2$ 的形狀,所以加減 $\frac{b^2}{4a^2}$ 而得

$$x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

即可分析 $ax^2+bx+c$ 爲因式.

令各因式等於 0 而解之

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 或 \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【注意】 由此種相異二法求得的結果相等,故所求的根可表以

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

無論何種二次方程式,雖可由此二法中的任一法解出,但二法都不簡單,故欲解 $ax^2+bx+c=0$, 應將現在求得的結果牢記於心作公式,以省中途運算之勞.

例 1.　解 $3x^2-11x-42=0$

【解】　因 $a=3$, $b=-11$, $c=-42$

故 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-11\pm\sqrt{(-11)^2-4\times3\times(-42)}}{2\times3}$

$$=\frac{11\pm\sqrt{625}}{6}=\frac{11\pm25}{6}$$

$$\therefore\quad x=\frac{11+25}{6}=\frac{36}{6}=6$$

$$x=\frac{11-25}{6}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore\quad x=6\ \text{或}\ x=-\frac{7}{3}$$

【注意】　此方程式分析因式

$$(x-6)(3x+7)=0\quad\therefore\ x=6\ \text{或}\ x=-\frac{7}{3}$$

二次方程式如容易分析因式以用析因式解法為便.

例 2.　解 $5x^2-15x+11=0$

【解】　因 $a=5$, $b=-15$, $c=11$

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times5\times11}}{2\times5}$

$$=\frac{15\pm\sqrt{5}}{10}$$

【注意】 $5x^2-15x+11$ 不能用 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ 公式分析因式,此類方程式非由公式解之不可.

例 3. 解 $210x^2+299x-32=0$

【解】 因 $a=210,\ b=299,\ c=-32$

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-299\pm\sqrt{(299)^2-4\times210\times(-32)}}{2\times210}$

$$=\frac{-299\pm\sqrt{116281}}{420}=\frac{-299\pm341}{420}$$

$$x=\frac{42}{420}=\frac{1}{10} \quad 或 \quad x=-\frac{32}{21}$$

【注意】 本例雖能分析因式,但計算不易,以由公式解之為便.

例 4. 解 $7x^2+6x+5=0$

【解】 $x$ 的係數為偶數,即 $2b'=6 \quad \therefore b'=3$

以此等值代入以上公式

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-7\times5}}{7}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-26}}{}=\frac{-3\pm i\sqrt{26}}{}$$

例 5. 解 $x^2-18x+25=0$

【解】 $x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-25}}{1}=9\pm\sqrt{56}$

【注意】 $a=1$ 時分母的 $a$ 可不記。

例 6. 解 $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$

【解】 $$x=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2}}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2\pm(a^2-b^2)}{2ab}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{2ab}=\frac{2a^2}{2ab}=\frac{a}{b}$$

或 $$x=\frac{a^2+b^2-(a^2-b^2)}{2ab}=\frac{2b^2}{2ab}=\frac{b}{a}$$

故所求的根 $x=\frac{a}{b}$ 或 $x=\frac{b}{a}$

## 習題三

解下列各題的方程式:

1. $x^2-11x+28=0$
2. $x^2-\frac{x}{3}=8$
3. $2x^2+12=11x$
4. $3x^2-5x=12$
5. $2x^2+3x=14$
6. $x^2+7x+11=0$

7. $3x^2-8x+7=0$ 8. $x^2+6x-40=0$

9. $mx^2-1=\frac{x(m^3-n^2)}{mn}$

10. $(n-p)x^2+(p-m)x+(m-n)=0$

**5.** 判別式

$ax^2+bx+c=0$ 的根爲 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

今 $a, b, c$ 爲實數,則此根爲實數或虛數,祇由公式根號內 $b^2-4ac$ 的符號可以判定.卽

(第一) $b^2-4ac>0$時,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲實數,故此方程式有相異的二個實根.

(第二) $b^2-4ac=0$時,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲零,而根的公式爲 $x=\frac{-b}{2a}$,祇有一個實根.因一元二次方程式定有二根,所以稱此爲有相等的二根或等根.

(第三) $b^2-4ac<0$時,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲虛數,故此方程式有相異的二個虛根.

這樣欲知二次方程式的二根爲實數或虛數,可不必解其方程式,但從 $b^2-4ac$ 的符號來判別,所以叫此式爲判別式.

【注意】 $x$ 的係數若爲偶數 $2b'$, 則判別式卽用 $b'^2-ac$ 亦可.

例 1.　試判別 $x^2-13x+22=0$ 的根.

【解】　作判別式　$13^2-4\times 22=169-88=81>0$,

故此方程式有二個相異的實根.

例 2.　試判別 $7x^2-4x-3=0$ 的二根.

【解】　$x$ 的係數爲偶數,依此作判別式

$$(-2)^2-7\times(-3)=4+21=25>0$$

故有相異的實根.

【注意】　本例 $x^2$ 的係數 $a$ 爲正,不含 $x$ 的項 $c$ 爲負,則判別式 $b^2-4ac$ 的 $ac$ 爲負而 $-4ac$ 爲正,以此與 $b^2$ 相加亦必爲正,故 $a$ 與 $c$ 異號,必有實根.

例 3.　判別 $9x^2-6x+1=0$ 的根.

【解】　判別式 $=(-3)^2-9=0$

故有二個等根.

例 4.　判別 $3x^2+7x+19=0$ 的根.

【解】　判別式 $=7^2-4\times 3\times 19=49-228=-179<0$

故有相異的虛根.

例 5.　判別 $ax^2+(a-b)x-(a+b)=0$ 的根.

【解】　作判別式 $(a-b)^2+4a(a+b)$

$$=a^2-2ab+b^2+4a^2+4ab$$

$$=a^2+2ab+b^2+4a^2$$

$$=(a+b)^2+4a^2$$

$a+b$ 平方與$2a$平方之和,決不為負.又 $a$ 為 $x^2$ 的係數,必不為 0;故 $a+b$ 與$2a$不能同時為 0,於是上式常為正數而決不為 0,必有相異的實根.

## 習題四

判別下列各方程式的根:

1. $x^2+2(p+q)x+2(p^2+q^2)=0$

2. $(b^2-4ac)x^2+4(a+c)x-4=0$

3. $x^2-(4a-2b)x+3a^2-8ab-3b^2=0$

4. $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$

# 第十一章 二次聯立方程式

## 1. 一方程式爲一次的

例 1. 解 $3x-2y=10,\ x^2-y^2=15$

【解】 第一方程式爲一次,第二方程式爲二次.解此類題目,先由第一式得 $y$(或 $x$)的值,

$$y=\frac{3x-10}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

再以此值代入第二式得

$$x^2-\left(\frac{3x-10}{2}\right)^2=15$$

此爲 $x$ 的二次方程式,可依一元二次方程式解之,

$$x^2-\frac{9x^2-60x+100}{4}=15$$

$$4x^2-9x^2+60x-100=60$$

$$5x^2-60x+160=0 \qquad x^2-12x+32=0$$

$$\therefore\quad (x-4)(x-8)=0 \qquad \therefore\quad x=4 \quad 或 \quad x=8$$

若 $x=4$ 則由(1) $\quad y=\dfrac{3\times4-10}{2}=1$

若 $x=8$ 則由(1) $\quad y=\dfrac{3\times8-10}{2}=7$

故所求的根有 $[x=4,\ y=1]$, $[x=8,\ y=7]$ 二組.

【注意】 一爲一次,他爲二次的二元聯立方程式,

當有二組的根,本例用括號分列,使其一覽了然.

例 2　解 $x-2y=1,\quad x^2-xy-y^2-2x+3y=7$

【解】　由第一方程式　$x=2y+1$……………(1)

以此代入第二方程式

$$(2y+1)^2-y(2y+1)-y^2-2(2y+1)+3y=7$$

$$y^2+2y-8=0 \qquad (y+4)(y-2)=0$$

$$\therefore\quad y=-4 \qquad 或 \quad y=2$$

以此兩值代入(1)

$$y=-4 \ 時 \qquad x=-8+1=-$$

$$y=2 \ 時 \qquad x=4+1=5$$

故所求的根為 $[x=5,\ y=2]$,$[x=-7,\ y=-4]$.

【注意】　由以上二例,對於一為一次,他為二次的二元聯立方程式,可得一般解法.即

$$px+qy=r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1)　$y=\dfrac{r-px}{q} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

以(3)代入(2)

$$ax^2+bx\left(\frac{r-px}{q}\right)+c\left(\frac{r-px}{q}\right)^2+dx+e\left(\frac{r-px}{q}\right)+f=0$$

去分母,依 $x$ 整理之,得　$Ax^2+Bx+C=0$　形狀的二次

方程式,解之得 $x$ 的二值,各代入(3)得 $y$ 的值.

2. 兩方程式都二次的

例 1. 解 $15x^2-34xy+15y^2=0,\quad xy=15$

【解】 此兩方程式的左邊都是未知數 $x$、$y$ 的二次.而第一方程式不含未知數的項爲 0,左邊分析因式爲 $(3x-5y)(5x-3y)=0$

即第一方程式由下列二方程式而成,

$$3x-5y=0 \qquad \text{或} \qquad 5x-3y=0$$

以此與第二方程式聯合,可得以下二組.

$$\left.\begin{array}{l}3x-5y=0\\ xy=15\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \left.\begin{array}{l}5x-3y=0\\ xy=15\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此二組都是一爲一次他爲二次的聯立方程式,故依前節解之,

由 (1) $[x=5,\quad y=3]$, $[x=-5,\quad y=-3]$

由 (2) $[x=3,\quad y=5]$, $[x=-3,\quad y=-5]$

【注意】 第一方程式一般形狀爲 $Ax^2+Bxy+cy^2=0$ 凡類此形狀的方程式,以 $y^2$ 除之,得 $\frac{x}{y}$ 的二次方程式

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C=0$$

設此方程式的二根爲 $\alpha$、$\beta$,則

$$\frac{x}{y}=\alpha \quad 或 \quad \frac{x}{y}=\beta$$

即　$x=\alpha y$　或　$x=\beta y$

以此與第二方程式聯合,即得一爲一次他爲二次的聯立方程式,可依前節的解法求根.

例 2.　解 $x^2+xy+2y^2=44$,

$$2x^2-xy+y^2=16$$

【解】　此方程式的左邊,都是 $x$、$y$ 二次的同次式,右邊不含未知數.類此形狀的二元聯立方程式,求不含未知數項 44 與 16 的最小公倍數 $4\times11\times4$, 以 4 乘第一方程式,11 乘第二方程式,則得

$$4x^2+4xy+8y^2=176$$

$$22x^2-11xy+11y^2=176$$

各邊相減　$18x^2-15xy+3y^2=0$

$$6x^2-5xy+y^2=0$$

以此與第一方程式(或第二方程式)聯合,則

$$6x^2-5xy+y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+xy+2y^2=44 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此與例 1 的形狀相類,分析(1)的因式爲

$$(2x-y)(3x-y)=0$$

$\therefore$　$y=2x$　或　$y=3x$

$y=2x$ 則由第一方程式 $x^2+2x^2+8x^2=44$

$$\therefore\quad x^2=4 \qquad x=\pm 2$$

$$x=2 \quad 則 \quad y=4$$

$$x=-2 \quad 則 \quad y=-4$$

又 $y=3x$ 則由第一方程式 $x^2+3x^2+18x^2=44$

$$x^2=2 \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{2}$$

$$x=\sqrt{2} \quad 則 \quad y=3\sqrt{2}$$

$$x=-\sqrt{2} \quad 則 \quad y=-3\sqrt{2}$$

故所求的根爲

$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=4\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=-2\\y=-4\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=\sqrt{2}\\y=3\sqrt{2}\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}x=-\sqrt{2}\\y=-3\sqrt{2}\end{matrix}\right\}$$

【注意】 一般由 $ax^2+bxy+cy^2=d$

$$a'x^2+b'xy+c'y^2=d'$$

形狀的二個方程式,加減之而消去 $d$、$d'$,則成

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0$$

形狀的方程式,依例 1 的注意順次計算,則所求的根,一般可得四組.

## 習題一

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases}2x-y=5\\x+3y=2xy\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y=4\\x^2+xy+8y=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases} y^2-3xy=0 \\ 3x^2+5y^2=48 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x^2-xy=105 \\ 3xy-y^2=9 \end{cases}$

**3.** 應用問題

問題漸漸由簡而繁,選取未知數的方法便有巧拙.方程式解法全視此爲容易或困難.又解方程式所得的根是否與問題適合,亦必須加以抉擇.

例 1. 有一矩形地,寬比長少6丈.其面積爲135平方丈.求寬與長.

【解】 設寬爲 $x$ 丈,則長爲 $x+6$ 丈.其面積爲 $x(x+6)$ 平方丈.但此與 135 平方丈相等,故得方程式如次:

$$x(x+6)=135$$

$$\therefore\ x^2+6x-135=0 \qquad \therefore\ (x+15)(x-9)=0$$

$$x=-15 \quad 或 \quad x=9$$

因寬爲正數,故 $-15$ 棄去不用,僅取 $x=9$, 從此

$$x+6=15$$

(答)寬 9 丈,長 15 丈.

例 2. 有人行 9 哩的路,若行 3 哩後,每時速率增 1 哩,則比豫定時間早 1 時可到.求豫定時間.

【解】 設豫定速率每時 $x$ 哩,則豫定時間爲 $\frac{9}{x}$ 時.

以比豫定速率增加 1 哩的 $x+1$ 哩,行 6 哩,所要的時間為 $\frac{6}{x+1}$ 時.依題意得次之方程式:

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{x+1}=\frac{9}{x}-1$$

併項 $$\frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}=1$$

去分母 $$6x+6-6x=x(x+1)$$

$$x^2+x-6=0 \quad \therefore \quad (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x=-3 \quad 或 \quad x=2$$

但速率不能為負數,故 $-3$ 可舍去,而知豫定速率為每時 2 哩.

故豫定時間 $\frac{9}{x}=\frac{9}{2}=4.5$ (答) 4 時 30 分

例 3. 某地溫度的 $x$ 倍為攝氏 80 度.若此溫度昇高 4 度,則其 $(x-1)$ 倍亦為 80 度.問某地溫度幾何?

【解】 設某地溫度為 $y$ 度,則其 $x$ 倍為 80 度,

故 $$xy=80 \cdots\cdots(1)$$

若此溫度昇高 4 度,則其 $(x-1)$ 倍亦為 80 度.

故 $$(x-1)(y+4)=80 \cdots\cdots(2)$$

由 (2) $$xy+4x-y-4=80 \cdots\cdots(3)$$

(3)$-$(1) $$4x-y-4=0$$

$$y=4x-4=4(x-1)$$

以此代入(1) $\quad 4x(x-1)=80$

$$x^2-x-20=0 \qquad (x-5)(x+4)=0$$

$\therefore \quad x=5 \quad$ 或 $\quad x=-4$

若 $\quad x=5, \quad$ 則 $\quad y=16$

若 $\quad x=-4, \quad$ 則 $\quad y=-20$

負根可解釋爲零度以下.

(答) 16度或零下20度

例 4. 已知矩形的周圍 306 尺,對角線 117 尺. 求面積.

【解】 設矩形二邊的尺數爲 $x$, $y$,面積爲 $s$,則其周圍的一半爲 $x+y$,對角線可由畢塔果拉斯定理爲 $\sqrt{x^2+y^2}$. 依題意得次之方程式:

$$x+y=153 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+y^2=117^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$s=xy \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由此求 $xy$ 即 $s$ 便可.

(1)自乘 $\quad x^2+2xy+y^2=153^2 \cdots\cdots\cdots (4)$

(4)$-$(2) $\quad 2xy=153^2-117^2$

$$=(153+117)(153-117)$$

$$=270\times 36$$

$\therefore\quad xy=4860$　　　　(答) 4860 平方尺

## 習題二

1. 有二個連續的正整數,其積為 156. 求各數.

2. 甲､乙二旅客,在相距 80 哩的兩地同時出發,相向而行.甲比乙每日多走 4 哩,兩人相會的日數,等於乙每日所走哩數的一半.問各人每日行幾哩?

3. 某人出銀 24 元,買布若干疋,留 2 疋自用,其餘以每疋賺銀 2 角賣去,共得銀 25 元 2 角.問買入的疋數多少?

4. 有直角三角形 $ABC$,其斜邊 $BC$ 比 $AB$ 邊長 3 寸,比 $AC$ 邊長 24 寸.求此三角形各邊的長,

# 習題的答

## 第一章 緒論

### 習題一

1. 77.
2. 12.
3. $-27$.
4. $-97$.
5. 25.

### 習題二

1. 6.
2. $-3$.
3. $-14$.
4. 4.
5. 18.

### 習題三

1. 21.
2. $-21$.
3. $-20$.
4. 45.
5. 42.
6. 72.
7. $-\frac{1}{3}$.
8. 8.
9. 24.
10. $-21$.

### 習題四

1. 9.
2. $-12$.
3. 15.
4. $-16$.
5. $1\frac{1}{14}$.
6. $-\frac{1}{2}$,
7. 0
8. 12.

## 第二章 整式四則

### 習題一

1. $15a-10b$ 2. $3p+q-r$

3. $2a+2b+2c$ 4. $4x^3-20x^2+x-9$

## 習題二

1. $-a+c-d$ 2. $-7x^2-x$

3. $-bc+ca$ 4. $3x^2-3y^2-3z^2$

## 習題三

1. $8x$ 2. $6x-2y$ 3. $x+1$

4. $3-2x$ 5. $a+1$ 6. $a-b+2c-3d$

## 習題四

1. $16x^4$ 2. $6m^7$ 3. $\frac{2}{9}a^5b^4x^2y^3$

4. $\frac{8}{7}a^2b^4c^3$ 5. $200x^{12}y^7$

## 習題五

1. $7x^2-10x+3$ 2. $x^2+x-6$

3. $a^7-2a^6-a^5+8a^4-17a^3+11a^2-17a+3$

4. $m^4-3m^3+2m^2-2m+2$

5. $a^5-2a^4b+3a^3b^2+3a^2b^3+ab^4-b^5$

6. $x^6-x^5y+3x^4y^2-3x^3y^3+2x^2y^4-3xy^5+y^6$

## 習題六

1. $a^4$ 2. $x^8$ 3. $m^6$

4. $-4$ 5. $4x$ 6. $\frac{3}{2}a^3b$

## 習題七

1. $5a^3-6a^2+1$ 2. $-x+y$ 3. $3x-\frac{3}{2}$

## 習題八

1. $x-4$ 2. $x+3$ 3. $x-5$

4. $5-x$ 5. $3a^2+2a+1$

6. $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$

7. $1-3x+2x^2-x^3$ 8. $x^2-xy-xz-yz+y^2+z^2$

## 習題九

1. 商 $x^3-x^2+x-1$,餘 2 2. 商 $x^2-2x+2$,餘 $-12$

# 第三章 一次方程式

## 習題一

1. 4 2. 30 3. $-\frac{3}{4}$

4 $-3$ 5. $\frac{3}{4}$ 6. 12

7. $\frac{12}{11}$ 8. $\frac{6}{5}$ 9. $-6$

10. $\frac{5}{4}$

## 習題二

1 一份 31.5,他份 8.5

2. 連續三個偶數爲30,32,34

3. 3 年前

4. 甲 80 元,乙 20 元

5. 五角銀幣15個,二角銀幣35個

6. 甲銀行 400 元,乙銀行 600 元

7. 39

8. 14 哩

9. 6 里

10. 11, 9, 7, 4

# 第四章 一次聯立方程式

## 習題一

1. $x=4,\quad y=9$

2. $x=6,\quad y=12$

3. $x=\frac{5}{2},\quad y=\frac{3}{2}$

4. $x=5,\quad y=9$

5. $x=-1,\quad y=-2$

6. $x=\frac{80}{9},\quad y=\frac{16}{9}$

7. $x=5,\quad y=8$

8. $x=10,\quad y=14$

9. $x=\frac{5}{21},\quad y=\frac{15}{14}$

10. $x=1,\quad y=0$

## 習題二

1. 蘋果每個 5 分,柿子每個 2 分

2. 豫定人數50人,會費 1 元 1 角

3. 甲種$11\frac{7}{13}$兩, 乙種$18\frac{6}{13}$兩

4. 41

5. 兄 20 個,弟 30 個

6. 1 丈 4 尺 8 寸與 1 丈 3 尺 2 寸

## 習題三

1. $x=10$, $y=-1$, $z=3$

2. $x=-\frac{65}{24}$, $y=\frac{7}{6}$, $z=\frac{47}{24}$

3. $x=-3$, $y=3$, $z=1$

4. $x=15$, $y=12$, $z=10$

5. $x=\frac{17}{10}$, $y=\frac{3}{2}$, $z=\frac{13}{10}$

6. $x=1$, $y=1$, $z=2$

7. $x=5$, $y=-4$, $z=3$

8. $x=14$, $y=15$, $z=19$

9. $x=51$, $y=76$, $z=1$

10. $x=5$, $y=1$, $z=2$

## 習題四

1. 甲 150 元,乙 120 元,丙 90 元

2. 二角 2 個,一角 16 個,五分 6 個

3. 432

4. 甲 20 兩,乙 30 兩,丙 40 兩

# 第五章　因式

## 習題一

1. $7(a+b)$　　2. $2x(2a-b)$

3. $m(a+b-c)$　　4. $7(x-1)$

5. $3y(x-1)$　　6. $x(x-1)$

7. $a(a^3-a^2+a+1)$　　8. $3m(m-n)$

9. $15m^2n(3m^3n^3p^3-4mnp^2-5q^5)$

10. $(x-3y)(a-b)$

11. $(1-a)(1+x)$　　12. $2(a^2+b^2)y$

## 習題二

1. $(a+1)(a-1)$　　2. $(2+x)(2-x)$

3. $(6x+5y)(6x-5y)$　　4. $3(m+n)(m-n)$

5. $(x+y+1)(x+y-1)$　　6. $(17a-12x)(a+12x)$

7. $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$　　8. $2(5x+2)(5x-2)$

9. $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$

10. $x(x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$

## 習題三

1. $(x+3)^2$　　2. $(2a-1)^2$　　3. $(7x^2+2y^2)^2$

4. $3a(a+b)^2$　　5. $2(a-3)^2$　　6. $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2$

## 習題四

1. $(x+3)(x+4)$　　2. $(x+1)(x+12)$

3. $(x-2)(x-3)$　　4. $(x-3)(x-4)$

5. $(x+3)(x-6)$　　6. $(x+7)(x-1)$

7. $(ab+5)(ab+6)$

8. $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

## 習題五

1. $(5x-2)(x+1)$　　2. $(3x-2)(5x-4)$

3. $(3x-16y)(4x+9y)$　　4. $(2x+3)(x+4)$

5. $(3x-1)(x-3)$　　6. $(3x-2)(x+3)$

# 第六章　最高公約式及最低公倍式

## 習題一

1. $x-2$　　2. $x+1$　　3. $x-3y$

4. $a-3b$　　5. $x-3$　　6. $3ab(a-b)$

## 習題二

1. $a^2+3ab-5b^2$　　2. $x^2+2xy-y^2$

3. $x^2-13x+5$　　4. $3x+2$

5. $7x^2+8x+1$　　6. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

7. $x+7$　　8. $x^2-2x-1$

## 習題三

1. $x^6$　　2. $x^5$

3. $36a^2b^3x^2y^3z$　　4. $a^3b^2c^3$

## 習題四

1. $(a+5)(a-3)(a+1)(a-1)$

2. $105ab^2(a+b)(a-b)$

3. $2(x+1)(x-1)^2$

4. $(x-3y)(x+2y)(x-y)^2$

## 習題五

1. $(x^2-x-4)(x^2+2x+6)(x^2+x-3)$

2. $x^4-5x^3+11x^2-12x+6$

3. $(x^2+3x+2)(x+3)(3x^2-5x+2)$

即 $(x+1)(x+2)(x+3)(x-1)(3x-2)$

# 第七章　分式

## 習題一

1. $\frac{3a}{n}$　　2. $\frac{1}{a}$　　3. $a^2$

4. $\frac{a}{b^2c}$　　5. $\frac{8ax^2}{3b^2}$　　6. $\frac{1}{2a^2x}$

## 習題二

1. $-m$　　2. $\frac{x-1}{x^2-x+1}$　　3. $\frac{5ay}{ax-3by}$

4. $\frac{x+5}{x-3}$　　5. $\frac{a+b-c}{a+b+c}$　　6. $\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$

## 習題三

1. $\frac{3a^2+5a+1}{2a^2+5a+3}$　　2. $\frac{x-4}{2x^2+x+4}$

## 習題四

1. $\frac{1}{x-a}$　　2. $\frac{ac+bd}{b^2c^2}$

3. $\frac{2x}{x^2-y^2}$　　4. $\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$

5. $\frac{ax+bx-2ab}{(x-a)(x-b)}$　　6. $\frac{14x+6}{(x-6)(x+4)}$

7. $\frac{2}{x+y}$　　8. $\frac{2x^2-9x+44}{x^2+64}$

## 習題五

1. $\frac{22b}{45a^2y}$　　2. $\frac{256b^2}{375a^2}$　　3. $\frac{ab(a+b)}{a-b}$

4. 1　　5. $\frac{3x-y}{2y}$　　6. $\frac{1}{x+y}$

# 第八章　分方程式

## 習題一

1. $x=2$　　2. $x=2$　　3. $x=\frac{5}{2}$

## 習題二

1. $x=3$　　2. $x=\frac{7}{4}$　　3. $x=\frac{259}{43}$

4. $x=23$

## 習題三

1. $x=3,\quad y=\frac{1}{5}$　　2. $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{3},\quad z=\frac{1}{4}$

3. $x=9,\quad y=25$　　4. $x=\frac{10}{3},\quad y=\frac{3}{2}$

## 習題四

1. 3 斗　　2. 25 哩

## 習題五

1. 甲 20 日,乙 30 日,丙 60 日

2. 前輪周圍 3 尺 5 寸,後輪周圍 9 尺

3. 水流每時$\frac{5}{12}$哩,下水須行 4 時

4. 兩地距離 47.5 哩,規定速率每時 25 哩

# 第九章　平方根

## 習題一

1. $\pm(a+2b)$　　2. $6x^2-5y$

3. $\pm(a+b+c)$

## 習題二

1. 41209　　2. 12345

3. 0.632　　4. 1.224

# 第十章　二次方程式

## 習題一

1. $x=\pm\frac{3}{4}$　　2. $x=\pm\frac{5}{2}$　　3. $x=\pm\frac{3}{4}$

4. $x=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$　5. $x=2(-1\pm i)$　6. $x=\pm 3i$

## 習題二

1. $x=-5$ 或 $1$　2. $x=\frac{1}{3}$或$\frac{3}{2}$　3. $x=-\frac{8}{3}$或$4$

4. $x=\frac{1}{3}$ 或$-3$　5. $x=0$ 或$\frac{17}{3}$　6. $x=4$

7. $x=-9$ 或 $9$　8. $x=-15$ 或 $9$　9. $x=-7$

10. $x=2$ 或 $1$

## 習題三

1. $x=7$ 或 $4$　2. $x=3$ 或 $-\frac{8}{3}$　3. $x=\frac{3}{2}$或$4$

4. $x=-\frac{4}{3}$或 $3$　5. $x=\frac{7}{2}$或$-2$　6. $x=\frac{-7\pm\sqrt{5}}{2}$

7. $x=\frac{4\pm i\sqrt{5}}{3}$　8. $x=4$ 或 $-10$　9. $x=\frac{m}{n}$或$-\frac{n}{m^2}$

10. $x=1$或$\frac{m-n}{n-p}$

## 習題四

1. 相異的虛根　2. 相異的實根

3. 相異的實根(但 $a+2b=0$ 時為等根)

4. 相異的實根

# 第十一章　二次聯立方程式

## 習題一

1. $\left[x=3,\ y=1\right]$ $\left[x=\frac{5}{4},\ y=-\frac{5}{2}\right]$

2. $\left[x=4,\ y=-\frac{4}{3}\right]$, $\left[x=8,\ \ y=-4\right]$

3. $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=7\\y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=-7\\y=-6\end{cases}$

## 習題二

1. 12, 13

2. 8 哩

3. 20 疋

4. $BC=39$ 寸, $AB=36$ 寸

$CA=15$ 寸

（完）

(9222)