大學叢書

變分法

何魯 著

商務印書館發行

大學叢書

變　分　法

二八八七上

周

（52832平）

大學叢書（教本）變分法一冊

平裝每冊定價大洋柒角

外埠酌加運費匯費

著作者　何魯

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

（本書校對者胡達聰）

弁　言

此書爲余民國十八年在中央大學授變分法時所編.適合大學半年學程.最重要之參考書爲 Goursat 之高等分析及 Hadamard 與 Bolza 之兩種變分法專書.其他參考書已不復記憶.此書較他種同類之書爲易讀,且舉例較詳,讀者閱覽以後對於習題,卽知所措手,由此以進讀詳盡專著,可以事半功倍.至於變分法之重要,凡研習高等算學者類能知之.無俟贅辭矣.

民國二十三年　　何魯識於重慶大學

變　分　法

目　次

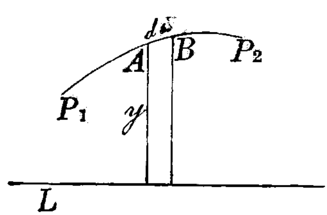
變 分 法

Calcul de Variation

變分法所研究者爲極大極小問題;但其性質則較普通微分學中所遇者,複雜特甚.微分學中極大極小問題係定一已知函數在某間隔內之極大或極小值,而變分法則須定一個未知函數,或多個未知函數之形,俾一定積分之值成爲極大或極小.今茲所研究者,僅限於實變數範圍,及簡單而富於致用之問題而已.

變分法舉例 欲明此法,試先舉數例於後:

例一 在任一平面中已與一直線 L 及 P_1, P_2 兩點,就聯 P_1, P_2 兩點所有之曲線中,試求其一俾繞 L 線所成之曲面面積爲極小者.



吾取 L 線爲正經緯 x 軸,并令 x_1, y_1; x_2, y_2 爲 P_1, P_2 之位標.令

$$C: \qquad y=f(x)$$

爲經過此兩點之任一曲線之方程式,AB 小弧所繞成之面積

爲
$$2\pi y ds$$
或
$$2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx$$
於是 C 線所繞成之面積爲

$$J=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}dx$$

此面積之值視曲線 C 而變,吾人問題,即在定此曲線,亦即在定函數 $f(x)$ 俾 J 之值爲極小.

此問題爲變分法中最易問題之一種,更普通者爲已與

定積分
$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx\quad\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

求定函數 y 俾此定積分爲極大或極小.

如以助變量 t 表 x 及 y,則前舉兩積分之形變爲

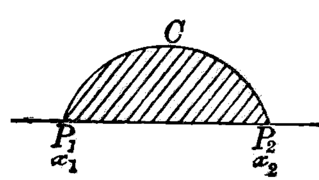
$$J=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

及
$$J=\int_{t_1}^{t_2}f(x,y,x',y')dt.$$

例二. 就聯 P_1, P_2 兩點之所有曲線中且有定長 l 者,試求其一俾其與 P_1P_2 弦所成之面積爲極大.

吾取 P_1, P_2 線爲正經緯制之 x 軸,x_1, x_2 爲 P_1, P_2 之緯量.設 C 爲聯 P_1P_2 之曲線,其長爲 l,

其方程式爲·



$$y=f(x)$$
$$f(x_1)=0,\quad f(x_2)=0$$

因此線有定長 l,則下之條件

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$$

為已合,此時在定

$$J=\int_{x_1}^{x_2}y\,dx$$

之極大值.

此例乃下問題之特例:即欲求定積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx$$

之極端值(Extremum),須定一曲線,俾第二定積分

$$K=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,y')dx$$

有一定值 l 也.此種問題稱為「等周問題」,後再詳.

變分法中問題之更普通者;為所研究之定積分,不僅含一次引數,而且含有二次三次乃至高次引數.其形如

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y',y'',\cdots y^{(n)})dx$$

此類問題在變分法歷史中頗佔重要地位.近則其價值漸減;半因更有推廣之式將此容為特例,半因幾何學及機械學之應用上罕遇之也.

更重要之推廣,乃是定多個未知函數之形,以求一定積分之極端值.下舉之例即屬此類.

例三. 已與一曲面

$$\phi(x,y,z)=0$$

P_1. P_2 爲此曲面上之兩點.求曲面上聯此二點之最短線.

假定所求曲線之方程式爲

$$y=f(x),\quad z=g(x)$$

f 與 g 須合下條件

$$\phi[x, f(x), g(x)]=0$$

卽所求曲線須在曲面上也.

由 P_1 至 P_2 曲線之長爲

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

此時當定兩個未知函數 y, z 俾 J 爲極小.

例四. 有阻力介質中之捷線 (Brachistochroue).

設有一重點沿任一空間曲線由 P_1 點行至 P_2 點經過有阻力介質其最初速度爲 v_1, 求定此曲線俾由 P_1 至 P_2 之時間爲最短.所定曲線卽此介質中之捷線也.

吾取垂線爲正位標之 z 正軸,重點之質設爲 1, 令 v 爲其速率, g 爲動常數,并設阻力爲速度 v 之函數 $R(v)$.

由生力定理 (Théoreme de Force Vive)

$$d\frac{v^2}{2}=g\,dz-R(v)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

爲簡單起見,令 x 爲自變數,就所有函數組

$$y=f(x),\quad z=g(x),\quad v=w(x)$$

中,其最初條件爲

$$f(x_1)=y_1\quad g(x_1)=z_1\quad w(x_1)=v_1$$

$$f(x_2)=y_2\quad g(x_2)=z_2$$

者,而又合微分方程式

$$vv' = gz' - R(v)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

求定一組俾積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{v}$$

之值爲極小.

更推廣之,就所有函數組 $y_1, y_2 \cdots y_n$ 中,其自變數同爲 x,其最初與附加條件之形爲

$$\phi_k(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n') = 0$$

$$k=1, 2, 3, \cdots m (m<n)$$

者,求一定組俾定積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, y_2, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n')dx$$

之值成爲極端值.

此類問題極重要.機械學上之哈米頓(Hamilton)原理及微動原理(moindre action)等問題皆屬於此類者也.

變分法亦可應用於多重積分,如極小面積問題即其一也.

例五: 就所有曲面中以一空間曲線 L 爲界者,以何者之面積爲最小.

設 $$z=f(x, y)$$

爲曲面之方程式,S 爲 xy 平面上 L 之射影 L' 所界之區域,此時在定 z 使雙重積分

$$J=\int\int_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dx\,dy$$

爲極小.

一次變分 (Premiere variation).

小引. 觀上所舉例吾人卽知變分法之性質.如欲明其計算方法,須先證明二小引如下:

小引一. 設 $F(x)$ 爲一連續函數在 (x_0, x_1) 間隔內爲有定值的;如積分 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)F(x)dx$ 無論 $n(x)$ 之形式如何恆爲零. $n(x)$ 及其引數在同一間隔內爲連續函數,且有 $n(x_0)=n(x_1)=0$, 則 $F(x)$ 在 (x_0, x_1) 全間隔內亦爲零.

證: 假設 $F(x)$ 當 $x=x_2$ 時爲正, x_2 介於 x_0 及 x_1 之間;吾人卽可尋一間隔 $(\xi_0\xi_1)$ 包含 $x_2(x_0<\xi_0<x_2<\xi_1<x_1)$. 如是使 $F(x)$ 常在此間隔 $(\xi_0\xi_1)$ 內爲正,現在試以下各條件定 $n(x)$.

1° $n(x)=0$ 當 $x_0\leqq x\leqq\xi_0$.

2° $n(x)=(x-\xi_0)^m(\xi_1-x)^m$, 當 $\xi_0\leqq x\leqq\xi_1$

m 爲一正整數至少等於 2.

3° $n(x)=0$, 當 $\xi_1\leqq x\leqq x_1$

此函數 $n(x)$ 爲連續的,且在 (x_0, x_1) 間隔內有一連續引數,於是相當積分 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)F(x)dx$ 之值爲正甚明,是與原設積分恆爲零者不合;同理,假設 $F(x)$ 爲負亦有矛盾,故必也 $F(x)$ 爲零.

更推廣之,如積分

$$\int_{x_0}^{x_1}[n_1(x)\,F_1(x)+n_2\,F_2+n_3\,F_3]dx$$

恆爲零,而 n_1, n_2, n_3 與 n 所合條件相同,則 F_1, F_2, F_3 均將全等於零矣.

小引二. 設 $F(x), n(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔中爲連續函數,其中 $F(x)$ 爲有定値的.若定積分 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)F(x)dx$ 恆爲零,無論 $n(x)$ 之形式如何,如是 $\int_{x_0}^{x_1}n(x)dx$ 亦爲零,則函數 $F(x)$ 將成爲一常數.

證: 設所與條件爲已合,吾人亦有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]n(x)dx=0$$

c 爲一任意常數,吾人再選擇 c 使有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]^2dx=0$$

即可令 $n(x)=F(x)-c$. 於是亦有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x)-c]^2dx=0$$

由此即得 $F(x)=c$.

界說. 初步問題之目的. 設 $F(x, y, y')$ 爲三變數 x, y, y' 之連續函數并其引數至三次者亦爲連續,只須以 x, y 爲位標之點,在 R 平面之單式區域內,又當 y' 恆爲有限値.在吾人所研究之例中 $F(x)$ 總爲分析函數;區域 R 待題之情形而定者,可包含平面之全部或有曲線以界之.

設 $f(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內爲連續且有一引數;吾人謂此函數在此間隔內屬於(I)類.方程式 $y=f(x)$ 當 x 由 x_0 變至 x_1 時代表一 Γ 曲線之弧,其每點皆有一切線,且其角係數常連續易;吾人謂此曲線 Γ 亦屬於(I)類.如此曲線在 R 區域內,則函數 $F[x, f(x), f'(x)]$ 以 $f(x)$ 易 y, $f'(x)$ 易 y' 而得者在 (x_0, x_1) 間隔內爲連續,而積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]dx$$

有一有限之值,此積分亦可書爲

$$J=\int_{\Gamma} F(x, y, y')dx$$

此積分須沿 Γ 曲線計算.設 A, B 爲 R 區域內之任兩點,其位標各爲 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1); 且有 $x_0<x_1$

聯此兩點吾人可得無數(I)類曲線 Γ 全位於 R 區域內.

就中一曲線之代方程式必爲 $y=f(x)$, 函數 $f(x)$ 爲(I)類函數在 (x_0, x_1) 間隔內爲確定,又合於條件

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1)$$

幷且 $[x, f(x)]$ 點當 x 由 x_0 變至 x_1 恆在 R 區域內.每有一函數 $f(x)$ 合乎如是條件則有一相當積分 J.吾人所研究之問題卽爲:就 R 區內所有聯 A, B 兩點之(I)類曲線 Γ 有無其一使相當積分 J 之值較之其他曲線合乎相同條件者之相當積分之值爲大或爲小.

吾人事前不能斷定有一 Γ 曲線能答此題.今試假設

$F(x, y, y')$於y'爲有限時及x, y在R區時恆爲正.積分J對於任何曲線Γ聯A, B兩點者亦爲正;故J之值有一低界(borue-mférieure) $m \geqq 0$但吾人頗難斷定卽有一曲線Γ其相當積分J之值適爲m;此實有例證其不必如此,是故變分法所研究極大極小問題與普通微分學所遇者不同;蓋在微分學中如有一函數其自變數爲x者在(a, b)閉間隔內爲連續的,則此函數必有一極大或極小也.

吾人先僅從事於求相對之極大極小,是卽僅比較Γ曲線相當之積分及Γ鄰近曲線之相當積分,幷只專求極小.其極大值之求法,但將F變爲$-F$卽得.

此問題可以分析方法確定之.設$y=f(x)$爲(x_0, x_1)間隔內之(I)類函數當$x=x_0, f(x_0)=y_0; x=x_1, f(x_1)=y_1$,幷且$y=f(x)$所代表之曲線$\Gamma$全在$R$區內,命$R_\epsilon$爲$x=x_0, x=x_1$及二曲線

$$Y_1=f(x)+\epsilon, \quad Y_2=f(x)-\epsilon$$

所界之區域ϵ設爲甚小,俾R_ϵ區可以全含於R區.

凡(I)類曲線聯A, B兩點,又全位於R_ϵ區者,可以方程式$y=f(x)+\omega(x)$表之,函數$\omega(x)$在(x_0, x_1)間隔內爲連續,且有一引數幷合乎下列各條件:

$$(1) \qquad \omega(x_0)=0, \quad \omega(x_1)=0, \quad |\omega(x)|<\epsilon \quad \text{當 } x_0<x<x_1$$

吾人謂函數$f(x)$給予積分J一極端值,如其可能求得一正整數ϵ使積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]dx$$

之值小於或大於下積分

$$J'=\int_{x_0}^{x_1}F[x, f(x)+\omega(x),\ f'(x)+\omega'(x)]dx$$

$\omega(x)$ 爲 (x_0, x_1) 之(I)類函數合於1之各條件又不全等於零者也.

以上之諸條件定 $\omega(x)$, 吾甚易明可得無窮如是之函數, 且可含任若干助變量者. 吾人試先定一簡單形式且只含一助變量者. 今設 $n(x)$ 爲 (x_0, x_1) 間隔內之連續函數且有引數者, 又於間隔極限值 x_0, x_1 爲零, 則函數 $\alpha n(x)$ 可小於 ϵ, 只須取 α 助量之值至甚小卽可. 將 $f(x)$ 易爲 $f(x)+\alpha n(x)$, 則積分 J 變爲

$$(2)\qquad J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F[(x, f(x)+\alpha n(x),\ f'(x)+\alpha n'(x)]dx$$

此函數 $J(\alpha)$ 當 $\alpha=0$ 時應爲極小, $n(x)$ 可爲任何形式

如吾人依戴氏(Taylor)公式將 $J(\alpha)$ 展之, 則有

$$J(\alpha)=J(0)+\frac{\alpha}{1}J_1+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}J_2+\cdots\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}J_n+\alpha^n h(\alpha)$$

$h(\alpha)$ 與 α 同時趨近於零. $\alpha J_1, \alpha^2 J_2, \cdots\cdots$ 稱爲 J 之一次, 二次$\cdots\cdots$變分; 拉格蘭氏(Lagrange)以符號 $\delta J, \delta^2 J, \cdots\cdots \delta^n J$ 表之, 於是 $\delta^n J=\alpha^n\left(\frac{d^n J}{d\alpha^n}\right)_{\alpha=0}$. 由是觀之, 欲函數 $f(x)$ 使 J 爲極小必也 $\delta J=0$, $\delta^2 J\geqq 0$.

無論 $n(x)$ 之形式如何此二條件皆須適合, 但 $n(x)$ 及其引數在 (x_0, x_1) 間隔內僅爲連續函數, 并於極限值時爲零卽足. 對於極大之條件, 但易二次變分爲負可已.

一次變分　尤拉氏(Euler)方程式. 將第(2)式依積號內求引數法引之得一次變分

$$(3)\qquad \delta J=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}n(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)\right]dx$$

y 及 y' 在 $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 中應代為 $f(x)$, $f'(x)$, 若函數 $f(x)$ 之二次引數為連續的,則吾人對於 $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)dx$ 可施以積分分求法而得

$$(3)'\qquad \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}n'(x)dx=\left[n(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}n(x)\frac{d}{dn}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx$$

右端之第一項為零.因 $n(x)$ 於 x 為上下界時為零也.於是一次變分 δJ 成一新式

$$(4)\qquad \delta J=\alpha\int_{x_0}^{x_1}n(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

欲 δJ 於 $n(x)$ 任為何形式時恆為零必也,依小引一, $n(x)$ 在積分內之係數在 (x_0, x_1) 間隔內為零.由此得 $f(x)$ 應適合之第一條件.

欲函數 $f(x)$ 給予定積分 J 一個相對極端值,必也此函數適合下之微分方程式.

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

此方程式稱為尤拉氏方程式;亦可將 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ 展開書如

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

當函數 F 含有 y' 此爲通例.方程式(6)爲二級式,而積分 $f(x,a,b)$ 含有兩個任意常數 a 及 b. 如吾人欲積分曲線經過 R 區之 A, B 二點,應選擇兩常數使下之二條件 $y_0=f(x_0, a, b)$, $y_1=f(x_1, a, b)$ 適合卽可. 此問題恆有定解,因受吾人支配之任意常數與方程式之數目相等也. 凡一(I)類函數 $f(x)$ 曾供給與 J 一極端值者爲(5)式之積分曲線,且線過 A, B 二點. 吾人復將研究凡積分曲線之適合上述條件者,是否必給予一極端值. 吾人依 Kneser (克勒氏)意稱適合尤拉氏之函數 $y(x)$ 爲極端函數 (Fonction extremale) 而稱其相當曲線 Γ 爲極端曲線 (Courbe extremale). 由 R 區之任意一點 (x_0, y_0) 可作無數極端曲線而僅有一曲線,其切線之角係數爲 y'_0 須有 $F''_{y'^2}$ 不爲零. 當 $F''_{y'^2}$ 對於 R 區任一點之位標及對於 y' 之所有有限値,不爲零時,此種變分法問題稱爲規則的.

黎孟氏之意見 (Du Bois-Reymond) 由(3)式變爲(4)式時,吾人曾設 $f(x)$ 有一連續二級引數;現在尙須證明,凡尤拉方程式之積分爲獨一(I)類函數 $f(x)$ 可使一次變分 δJ, 於 $n(x)$ 任爲何形式時,爲零者. 黎孟氏應用第二小引而不用第一小引,施分求法於(3)之第一項而不施於第二項,曾將此理證明.

當吾人在 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ 式中以(I)類函數 $f(x)$ 易 y, $f'(x)$ 易 y' 時所得代換結果爲 x 之連續函數命之爲 $\Phi'(x)$, $\Phi(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內亦爲連續函數. 設畢, 如吾人於積分 $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} n(x)\frac{\partial F}{\partial y}dx$ 施以分求法,則得

$$\int_{x_0}^{x_1} n(x)\frac{\partial F}{\partial y}dx = \int_{x_0}^{x_1}\Phi'(x)n(x)dx = \Big[\Phi(x)n(x)\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)n'(x)dx,$$

於是得 δJ 之新形爲

$$\delta J = a\int_{x_0}^{x_1} n'(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \Phi(x)\right]dx$$

此積分於 $$\int_{x_0}^{x_1} n'(x)dx = 0$$

爲零.因設 $n(x_0)=0$ 時亦有 $n(x_1)=0$ 也.

依小引二, $n'(x)$ 之係數在積號內者應爲常數,而函數 $f(x)$ 適合於方程式,其形爲

$$F_1[x, f(x), f'(x)] = \Phi(x) + c$$

函數 $F_1(x, y, y')$ 之一級偏引數爲連續的. 此方程式, 如依 $f(x)$ 解之, 則得 $f'(x)=\psi[x, f(x)]$, 函數 $\psi(x, y)$ 本身之一級偏微分爲連續的. 於是 $f'(x)$ 有一引數 $f''(x)$ 亦爲連續的. 故 $f(x)$ 爲尤拉方程式之積分也.

注意. 1° 尤拉方程式之通解只含二個任意常數,一極端線通常於與兩點時卽可確定,但吾於已與一極端線兩點之外尙可與一點之切線,此足證明變分法之問題有時可以無解.譬如,就聯 A, B 兩點之各曲線中吾人不能求得其一,其長爲最小,而在 A 點之切線又與 AB 線異者.蓋此時極端線爲直線,未有聯 A, B 兩點之直線能合乎上述之條件者也.吾人所命之題爲無解甚明.一則所有曲線能合乎上述條件者,其長必大於 AB, 一則可求一線俾其長與 AB 長相差可少至

吾人所欲小故也.

注意 2° 當函數$f(x,y,y')$不依賴y'時(6)式變簡為$y''=0$所有極端線盡為直線.

當函數$f(x,y,y')$不含y時,則吾人可立得尤拉方程式之一初解.蓋用(5)式$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$即得$\frac{\partial F}{\partial y'}=c$,由此得$y'=\phi(x,c)$為一可積式.

吾人於$f(x,y,y')$不含x時,亦可得同類化簡之式.蓋吾人可將(6)式作為y及$y'=p$之一級微分方程式,書為

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial p}p+\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}p\frac{dp}{dy}=\frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}$$

或

$$d\left(F-p\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0$$

由此得初解為

$$F(y,y')-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

仍為可積式.

當函數不含y時,方程式(5)變為$\frac{\partial F}{\partial y}=0$所有函數$f(x)$,$\delta J$對之為零者盡為此式之根.於是各極端線不含任意常數.

注意. 3° 今試探求應如何取函數$f(x,y,y')$俾積分J之值不因曲線Γ而變.欲其如是,必也δJ於Γ任為曲線時為零,而尤拉氏方程式變為恆等式矣.應有

$$F''_{y'^2}=0 \text{ 而 } F \text{ 對於 } y' \text{ 為線式即}$$

$$F=P(x,y)+y'Q(x,y)$$

如F函數之式為如此,積分J成為曲線積分

$$J=\int_{(x_0,\,y_0)}^{(x_1,\,y_1)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

而方程式(6)變爲$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, 此實爲曲線積分不因路而變值之充要條件也.

注意. 4° 如以 $F+\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}y'$ 易 F, 方程式(6)之不變而兩積分同時爲極端,無論函數 $\theta(x,y)$ 爲何,因兩積分所差者,僅一常數 $\theta(x,y)-\theta(x_0,y_0)$ 故也.

例. 設 $F=y^a\sqrt{1+y^2}$, a 爲任何指數, R 區爲 ox 上平面全部. 依注意 2, F 不含 x 節,尤拉方程式之初積分爲

$$F(y,y')-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=c$$

即
$$y^a\sqrt{1+y'^2}-y^a y'^2(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}=c$$

(A)
$$y^a(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}=c$$

故此時之尤拉方程式爲

$$yy''-a(1+y'^2)=0$$

令 $y'=p$, (A) 式亦可書爲 (見 Goursat § 382 1.2)

$$y=c_1(1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}},\quad \left(\text{中 } \mu=-\frac{1}{a}\right)$$

由 $dy=pdx$ 得

$$-\mu c_1 p(1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1}dp=pdx$$

或
$$x=x_0-\mu c_1\int(1+p^2)^{-\frac{\mu}{2}-1}dp$$

令 $p=\text{tang}t$, 所有積分曲線均爲下曲線 γ

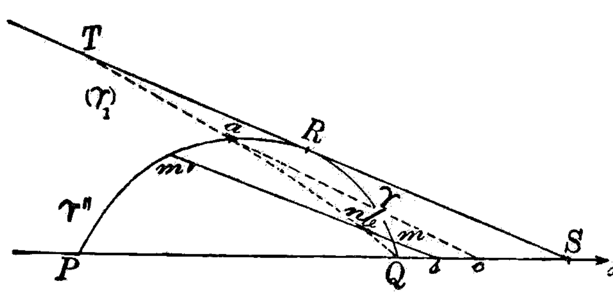
(γ)
$$x=\mu\int_0^t\cos^\mu t\,dt,\quad y=\cos^\mu t$$

之位似變圖.

由此二式可得曲線之概形.如 μ 爲一整數 x 爲可積式當 μ 爲正整數,此曲線無無窮遠枝,但其形視 μ 爲奇偶而異,如 μ 爲奇,則 x 爲 t 之週期函數,故曲線爲代數的且爲凸形閉曲線.如 μ 爲偶,則當 t 每增 2π 時,x 增一常量,而 y 恆爲正,此時得一週期曲線形與直線擺線(Cycloide)相似.$\mu=2$ 時則適爲一直線擺線,當 μ 爲負時,則有無窮遠枝,因 R 區之限制,無論 μ 爲何數,吾人只須令 t 由 $-\frac{\pi}{2}$ 變至 $+\frac{\pi}{2}$ 卽可.如 α 爲正,則 μ 爲負,γ 曲線對於 oy 成對稱,其形如一拋物線.當 μ 之絕對值等於或大於1,如 μ 介於 -1 及0之間,則 γ 有二幾近線與 oy 平行;反之,設 α 爲負,則 μ 爲正,此時 γ 之形如一枝直線擺線.

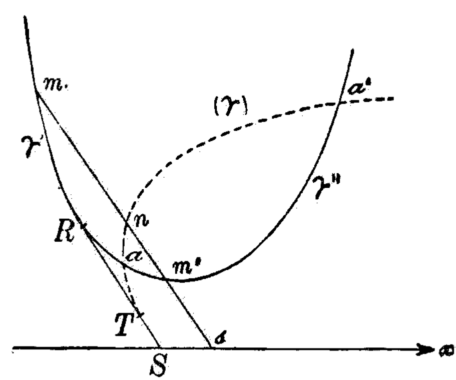
所有極端線均與 γ 爲相似形,故欲求一極端線經過 A, B 兩點在 ox 軸以上者,吾人只須在 γ 曲線上求 a, b 兩點,使 ab 弦與 AB 相平行,且有 $\frac{AC}{BC}=\frac{ac}{bc}$, C 爲 ox 與 AB 交點,c 爲 ox 與 ab 交點.既與 AB 兩點則知 ab 之向及位似圖之比 $k=\frac{ac}{bc}$, ab 既求得用位似變圖法卽可求得經過 AB 兩點之極端線也.今試用幾何方法討論之.

其一. $\alpha<0$, 此時 γ 之形爲一枝直線擺線,作 RS 切線與



AB 平行者.其切點 R 將 (γ) 分為 RP 與 RQ 兩弧,任由 QS 中之一點 s 作一線與 AB, 即與 RS 平行,此線必交 RQ 弧於一點 m 而交 RP 弧於一點 m'. 在此線上 n 點使有 $sn=k\cdot sm$, 則 n 之軌跡為曲線 (γ_1), 且切 SR 於 T 有 $ST=k\cdot SR$. (γ_1) 與 RP 弧之交點即吾人所求之 a 點也.於是即易得 b, c 點矣.此兩弧恆有且僅有一交點.蓋令 $Ss=t$, $sm'=u$, $sn=v$, u, v 為 t 之函數,其二級引數 u'', v'' 當 t 由一極小正數變至 SQ 時之號恆相反, u'', v'' 之號恆不變, $u'-v'$ 之號至多只能變二次,因 $u-v$ 於極限值時其號相反,故只能一次為零.於是在 R 區內只有一極端曲線經過 A, B 兩點.

其二. 設 $a>0$, SR 切線平行於 AB 者,仍將 γ 線分為兩無窮枝 γ', γ'', 在 ox 軸以上之一平行 SR 之線必交 γ'' 於 m' 而交 γ' 於 m 點,如此 sm 上取 sn 與 sm 成比例(其比小於一),則 n 之軌跡為一曲線 γ_1, γ_1 與 γ'' 之凸向不同,相交不能過於兩點,此時有公點或 O 個公點,故經過 AB 可以得二極端線或無有極端線.



當 AB 線與 ox 軸平行時,作法略簡.吾人可設 A, B 兩點對 oy 成對稱所求之極端線應為 γ 對於 O 點之位似圖.欲定其比,只

求 OA 與 γ 交點即可.如 $a<0$, 則只有一交點,故亦只有一解.如 $a>0$, 當 OA 在由 O 點所作至 γ 之兩切線角內,則有兩交點,故有兩解,否則無解.

現試予 a 以數個特值

(1°) 設 $a=1$, 則 γ 代表一圓.其心在原點而極端線亦均爲半圓,其心在 ox 軸上者,此時經過任兩點 A, B 亦在 ox 軸以上者只有一極端線.

(2°) 設 $a=-\frac{1}{2}$, 則 $\mu=2$, 此時 γ 代表一直線擺線,其底爲 ox 軸.故極端線亦爲直擺線其歧點在 ox 軸上,已與兩點 A,B 同在 ox 之一邊,吾人可作一直線擺線.其歧點不在 AB 點內.此特例實解決1696年柏魯衣氏(Jean Bernoulli)所命之捷線問題(Brachistochrone)其中問題有一實爲變分法之嚆矢者有如下述:

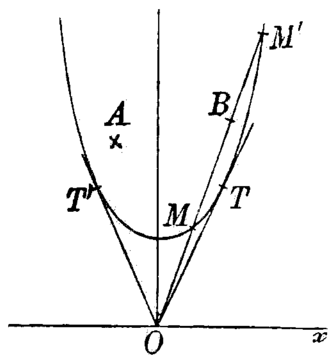
就聯 A, B 兩點之曲線中,試求其一,俾一重點沿之而行不受阻力,其最初速度爲 v_0, 問沿何線者,由 A 達於 B 之時間爲最短?

假定所求得曲線在含 A, B 兩點之垂面內,即取此平面爲 xy 平面,任選一水平線高於 A 點之距爲 h 者,以爲 ox 軸 oy 軸之正向向下,則 $v_0=\sqrt{2gh}$, 當 A 沿曲線行時,其速度恆爲 $v=\sqrt{2gy}$, 欲此問題爲可能,必也 B 亦在 ox 之下乃可.由 A 至 B 之時間爲曲線積分 $\int_{AB}\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$, 故此時積號內之函數與

$$F=\frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{1+y'^2}$$

只差一常數因子,於是所求得曲線爲直擺線.

(3°) 設 $\alpha=1$, 此時初解爲 $y=c\sqrt{1+y'^2}$ 而積分曲線爲懸鏈曲線,以 ox 爲底者.吾人已知可作 o 或二曲線如 AB 與 ox 平行,只須求 γ 對原點之位似圖卽可.試作 OT, OT' 切於 γ,所有之位似懸鏈線均在 TOT' 角內.



如 OB 線之角係數大於 OT 之角係數 1.5088, 則 OB 割 γ 於兩點 M, M', 吾人有兩極端線經過 A,B 其比各爲 $\frac{OB}{OM'}$, $\frac{OB}{OM}$. 如 OB 之角係數小於 1.5088 則 OB 與 γ 不能相交, 此時經過 A,B 兩點不能作極端線.

此例與下述之幾何問題相同:

已與 A,B 兩點在 ox 以上半平面內.試求曲線聯此二點者俾繞 ox 而得之面積爲最小.

假設此時有一(1)類曲線能給予此極小面積,則應取

$$F=y\sqrt{1+y'^2}$$

R 區爲 ox 以上之半平面當經過 A,B 點不能作極端線,吾人後當知此極小非(1)類曲線所能給予也.

(4°) 設 $\alpha=\frac{1}{2}$, 此時尤拉方程式之初解爲

$$y=c(1+y'^2)$$

所有之極端線均為拋物線 $(x-c)^2+(y-c')^2=y^2$ 以 x 軸為導線者.此問題為微動原理致用之一.

例之有多個未知函數者. 前法極易推廣於函數 F 中含有多個未知函數及其一次引數者(x 為自變數).譬如 F 之形為 $F(x, y, z, y', z')$,當 (x, y, z) 點在空間 R 區內及 $y'z'$ 為任何有限值時,F 恆為連續,幷賦有引數至於三級且均為連續者.設 $A(x_0, y_0, z_0)$ 與 $B(x_1, y_1, z_1)$ 為 R 區內之任意二點而 Γ 為聯此兩點之一曲線在 R 區內者,其方程式為

$$y=f(x), \qquad z=f_1(x)$$

f 及 f_1 在 (x_0, x_1) 間隔內為 (1) 類函數,每與一曲線 Γ 則得一相當積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f_1(x), f'(x), f'_1(x)]dx=\int_\Gamma F(x, y, z, y', z')dx$$

此時問題在如何選擇 Γ 方使 J 之值比較鄰近 Γ 各曲線之相當積分為大或為小.

今試用分析方法表之,設 $y=f(x)$, $z=f_1(x)$ 為一組 (1) 類函數可給予 J 一極端值者,再設 $\eta(x)$, $\eta_1(x)$ 為任何二 (1) 類函數且於 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 時為零.此時如在積分 J 中將 f 及 f_1 易為 $f(x)+\alpha\eta(x)$ 及 $f_1(x)+\alpha\eta_1(x)$,則 J 變為 α 助變量之函數,即

$$J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\alpha\eta(x), \cdots f'_1(x)+\alpha\eta'_1(x)]dx$$

此積分應於 $\alpha=0$ 時為極端值,無論 $\eta(x)$ 及 $\eta_1(x)$ 之形式若何,只須能適合上述條件即可.引之得

$$\delta J = \alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial z}\eta_1(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)+\frac{\partial F}{\partial z'}\eta_1'(x)\right]dx$$

如前用積分分求法并注意 η 及 η_1 之極限值得

$$\delta J = \alpha\int_{x_0}^{x_1}\left\{\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]+\eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\right\}dx$$

依小引一欲 δJ 爲零,必也 y, z 爲下組聯立微分方程式之解.

$$(9)\qquad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0$$

此方程組之任一組解定一極端線,展之則爲

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}z''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y'}z'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}z''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial z'}z'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

如行列式

$$\Delta=\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\times\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}\right)^2$$

不全等於零.此二式可依 y'', z'' 解之,由此可得一組二級微分方程式之模範式

$$(12)\qquad y''=\phi(x, y, y', z'),\qquad z''=\phi_1(x, y, y', z')$$

由 R 區之任一點可通過無數之極端線,但只有一在此點有一定切線并須設 Δ 不爲零.如在 R 區內 Δ 總不爲零時,此問題稱爲規則的(régulièr)

(12)式之通解含有四個任意常數,吾人可如是選擇之俾一極端線通過任意兩點 A, B 至少此二點相距較近時必爲可

能,但吾人於通過 A, B 兩點之曲線不能使其再於 A 點切於一定直線.

吾人對於(9)式之微分方程組,仍可予以對尤拉氏同樣之注意: 即使函數 F 不含 x, y, z 之一變數時,則此組以下列各式之一爲其初解.

$$(13)\qquad F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}=c,\ \frac{\partial F}{\partial y'}=c,\ \frac{\partial F}{\partial z'}=c.$$

欲(10)與(11)式變爲全等式,則 F 之形必爲 $P+Qy'+Rz'$ 中 P, Q, R 爲 x, y, z 之函數,且合於可積條件者.

例. 設 $F=\dfrac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}}$; 如取 z 軸爲垂線之下向者則此題適爲空間捷線 (Brachis to Chrone) 問題.因函數 F 不含 x 及 y, 故有二初解爲

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=c_1,\qquad F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}=c_2$$

但 $$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\frac{1}{2}(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{z}}\times 2y'=\frac{y'}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'}=\frac{z'}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

故有 $$y'=c_1\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

及 $$\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{z}}-\frac{y'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\frac{z'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_2$$

或 $$1=c_2\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

由此得 $$y'=\frac{c_1}{c_2},\qquad y=\frac{c_1}{c_2}x+c_3$$

故極端曲線實含於垂面之內,吾人由前例知此曲線爲直線擺線.**例中函數F含有高級引數者**.吾人可以同一方法施於函數 F 之含有高級引數者,而求其一次變分.設函數之形爲 $F[x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}]$ 且爲連續,又當 $y', y'', \cdots y^{(n)}$ 等爲有限値,而 x, y 點在 R 區域內 F 之偏微分,至於 $n+2$ 級亦均爲連續,吾人稱函數 $f(x)$ 在間隔 $(x_0 x_1)$ 內連續至於 n 級引數者爲 $(1)^n$ 類函數.如 Γ 爲其相當曲線在 R 區內者則定積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f', \cdots f^{(n)}]dx=\int_{\Gamma} F[x, y, y', \cdots y^{(n)}]dx$$

有一有限之値,吾人仍可就所有 Γ 曲線中求其一俾其相當積分較任何鄰近同類曲線且在 R 區內者之相當積分爲大或爲小.

設 $y=f(x)$ 爲一 $(1)^n$ 類函數合此條件者,則定積分

$$J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\alpha\eta(x), f'(x)+\alpha\eta'(x), \cdots f^{(n)}(x)+\alpha\eta^{(n)}(x)]dx$$

應於 $\alpha=0$ 爲極大或極小,$\eta(x)$ 之形式可以任意爲何種 $(1)^n$ 類函數,只須有 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$

$$\text{但}\quad J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\eta^{(n)}(x)\right]dx$$

中以 $y, y' \cdots$ 代 $f(x), f'(x) \cdots$

設所求之函數 $f(x)$ 賦有引數至於 $2n$ 次皆爲連續,則可以積分分求法推廣式施於 $\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p)}(x)$ 項而得(見 Goursat I, § 87)

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial x^{(p)}}\eta^{(p)}(x)dx=\left\{\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\eta^{(p-1)}(x)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta^{(p-2)}(x),\cdots\right.$$

$$\left.\pm\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x)\right\}_{x_0}^{x_1}\mp\int_{x_0}^{x_1}\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}\right]\eta(x)dx$$

以此法施於各項後相加得

$$(14)\quad J'(0)=\Big[F_0(x)\eta(x)+F_1(x)\eta'(x)+\cdots+F_{n-1}(x)\eta^{(n-1)}(x)\Big]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right]\right\}dx$$

中 $F_0, F_1, \cdots F_{n-1}$ 等函數爲 x, y 之函數,其所含 y 之引數至高至 $2n-1$ 級而止.

吾人以前法定 $\eta(x)$ 之形式,則右端已積之項爲 0, 而 $f(x)$ 應爲下方程式之解

$$(15)\quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right]=0$$

凡此方程式之解吾人仍稱爲極端函數,其相當曲線則稱爲極端線.(15)式之最高級爲 $2n$ 級,故極端函數含 $2n$ 個任意常數.故一極端不能以 A, B 兩點定之.但 $f'(x), f''(x), \cdots f^{(n-1)}(x)$ 之值當 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 時未受何種限制,且 $\eta'(x), \eta''(x), \cdots \eta^{(n-1)}(x)$ 於間隔極限亦可任意選擇其值.於是欲使 $J'(0)$ 爲零,無論 $f'\eta'\cdots$ 之值爲何,必也 $f(x)$ 及其 $2n-1$ 個引數合乎下式乃可.

$$F_1=0,\quad F_2=0,\ \cdots\ F_{n-1}=0$$

以此 $2n-2$ 個條件與經過 A, B 點兩條件相加,則得 $2n$ 式以定極端函數之 $2n$ 個任意常數.

有時選擇條件之法亦可略爲變易．譬如吾人欲求$(1)^n$類函數可給予J一極端值者，吾人可如是選擇是類函數使其當$x=x_0$，$x=x_1$有一定之值，其$n-1$前個引數亦然．此時函數$\eta(x)$及其$n-1$前個引數於間隔兩界值均應爲零，於是欲$J'(0)$爲零只須$f(x)$爲一極端函數卽足，所有$2n$個之任意常數爲$f(x)$所應適合於界值之$2n$個條件所定．

此外尙有其他方法，今試舉例以明之．

例． 試求積分$J=\int_0^1 y''^2dx$之極端值

中
$$y(0)=0, \qquad y(1)=0$$

此時
$$J(a)=\int_0^1[f''(x)+a\eta''(x)]^2dx=\int_0^1[y''(x)+a\eta''(x)]^2dx$$

故
$$J(a)=2\int_0^1 y''(x)\eta''(x)dx$$

但
$$2\int_0^1 y''(x)\eta''(x)dx=2\int_0^1 y''(x)d\eta'(x)=2\Big[y''(x)\eta'(x)\Big]_0^1$$
$$-2\int_0^1 y'''(x)d\eta(x)=2\Big[y''(x)\eta'(x)\Big]_0^1-2\Big[y'''(x)\eta(x)\Big]_0^1$$
$$+2\int_0^1 y^{\mathrm{IV}}(x)\eta(x)dx$$

卽
$$J'(0)=2\Big[y''(x)\eta'(x)\Big]_0^1+2\int_0^1 y^{\mathrm{IV}}(x)\eta(x)dx$$

此時極端線爲三次代數曲線
$$y=p_3(x)=px^3+qx^2+rx+s$$

設$y(x)$未受其他條件所限制，則$y''(0)$及$y''(1)$均應爲零．於是$(0,0)$及$(0,1)$兩點均爲極端線之反曲點(Infexion)而極

端線卽爲 $y=0$. 今設與 $y'(0)$ 及 $y'(1)$ 之值,則極端線之方程式

爲
$$y=x(x-1)[(y_0'+y_1')x-y_0']$$

因極端線方程式可書爲

$$y=x(x-1)(\alpha x+\beta)$$

欲定 α 與 β, 則求其引數

$$y'=(x-1)(\alpha x+\beta)+x(\alpha x+\beta)+\alpha x(x-1)$$

$$y_0'=-\beta$$

$$y_1'=\alpha+\beta$$

由此得
$$\beta=-y_0',\quad \alpha=y_0'+y_1'$$

再設與 $y'(1)$ 之值且原點爲反曲點,則極端線方程式應爲

$$y=\frac{y_1'}{2}(x^3-x)$$

蓋 y 可書爲
$$y=k(x^3-x)$$

$$y'=3kx^2-k$$

令 $x=1$, 則
$$y_1'=2k$$

故
$$k=\frac{y_1'}{2}$$

無論前所設如何,吾人恆得 J 之絕對極小值,因當吾人以 $P_3+\alpha\eta(x)$ 代 y 時可得

$$J(\alpha)-J(0)=\alpha^2\int_0^1\eta''^2(x)dx$$

恆爲正故也.

一次變分之普通式. 吾人更進一步以較普偏的假設求一定積分之一次變分 假設在積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

中,將 y 易爲 x 之函數含有多個助變量 a_i 者.此函數爲連續的,且對於 x 及 a_i 之引數亦爲連續的,并設積分之上下界 x_0 及 x_1 均爲 a_i 之函數.於是積分 J 之値亦爲 a 之函數,其一級全微分爲吾人所欲得者,卽此積分之一次變分也,以符號 δJ 表之.求 δJ 之法只須應用積號內求引數法卽可.今爲簡單起見,先設 $y(x)$ 僅含一助變量 a,設 $x_0=\phi_0(a)$, $x_1=\phi_1(a)$, ϕ_0 及 ϕ_1 皆爲連續函數且在 $(0,h)$ 間隔內之引數亦爲連續的.此二函數中之一可爲常數或二者均可爲常數.吾人前所研究者,皆限於復例.

再設 $y=f(x,a)$ 爲連續函數,其所有偏微分在區域

$$\begin{cases}0\leqq a\leqq h\\ \phi_0(a)\leqq x\leqq\phi_1(a)\end{cases}$$

內亦均爲連續的,并有

$$f(x,0)=f(x)$$

如在積分 J 內將 y 易爲 $f(x,a)$,則得一函數 $J(a)$,其引數爲

$$J'(a)=\left[F(x,y,y')\frac{dx}{da}\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial x}\right)dx$$

如函數 $f(x,a)$ 對於 x 有一二級連續引數,則吾人可以積分分求法施於右端第二項而得

$$(16)\quad J'(a)=\left[F(x,y,y')\frac{dx}{da}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial a}\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial f}{\partial a}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

右端已積之項可變之如下:

設 (x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 為積線兩端之位標,且均為 α 之函數

$$x_0 = \phi_0(\alpha),\ y_0 = f(x_0, \alpha),\ x_1 = \phi_1(x),\ y_1 = f_1(x_1, \alpha)$$

於是
$$\frac{dy_0}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha} = y_0'\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha}$$

y_0' 為積線 A 點切線之角係數,同理

$$\frac{dy_1}{d\alpha} = y_1'\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{\partial f(x_1, \alpha)}{\partial \alpha}$$

由此得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial \alpha} = \dfrac{dy_0}{d\alpha} - y_0'\dfrac{dx_0}{d\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial f(x_1, \alpha)}{\partial \alpha} = \dfrac{dy_1}{d\alpha} - y_1'\dfrac{dx_1}{d\alpha} \end{cases}$$

(16) 已積之項卽變為

$$F(x_1, y_1, y_1')\frac{dx_1}{d\alpha} + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\left(\frac{dy_1}{d\alpha} - y_1'\frac{dx_1}{d\alpha}\right)$$

$$-F(x_0, y_0, y_0')\frac{dx_0}{d\alpha} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\left(\frac{dy_0}{d\alpha} - y_0'\frac{dx_0}{d\alpha}\right)$$

用 $\delta\alpha$ 乘 (16) 式之兩端,則得

$$(17)\quad \delta J = \left[F(x_1, y_1, y_1') - y_1'\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_1\right]\delta x_1 - \left[F(x_0, y_0, y_0') - y_0'\left(\frac{\partial F}{\partial y_0'}\right)_0\right]\delta x_0$$

$$+\left(\frac{\partial F}{dy'}\right)_1\delta y_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

在此式中
$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\delta\alpha,$$

(17) 式亦可縮寫

$$(18)\quad \delta J = \left[\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

欲求 $J'(0)$，須以 α 除兩端而令 α 趨進於 0；若 $f(x,\alpha)$ 只爲 α 正值所定，則 $J'(0)$ 爲 $\dfrac{J(\alpha)-J(0)}{\alpha}$ 當 α 爲正值趨進於零之極限.

(18) 式之右端對於 $\delta y, \delta x_0, \delta y_0, \delta x_1$ 及 δy_1 爲線式，故 x_0, x_1，及 y 爲多個助變量 α_i 之函數時亦易於推用.

此時宜注意者卽積號外之各項僅倚於積線兩端之微移動，及此兩點切線之角係數

以同樣計算施於 $\quad J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx,$

則得更普徧之公式

$$(19)\quad \delta J=\left[\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$+\int_{x_0}^{x_1}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx+\int_{x_0}^{x_1}\delta z\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]dx$$

中 (x_0, y_0, z_0) 及 (x_1, y_1, z_1) 爲積線兩端之位標. 如函數 F 含有高級偏引數施以累次積分分求法亦可將一次變分 δJ 化爲兩項之和，其一項爲已積者，其他一項爲一個定積分，茲不具論.

δJ 式中總含一項爲定積分，欲將此定積化爲無有，其充要條件爲給予助變量，卽積線所含者，一組特值時使所得之曲線爲一極端線. 如吾人沿極端線弧而研究 δJ，幷使此極端線逐漸變易，則上述條件必可盡合. 於是一定積分之一次變分 δJ 沿極端線而計算者可以其兩端之微動移表示之.

此變分法之基本定理可統御甚多之已知結果爲其特例. 譬如設 $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$，則極端線爲直線，此時之 (19) 式與

線段微分公式無異,即其一也.(可參考 Goursat 一卷 84 節.)

注意. 如 F 之形式為 $P(x,y)+y'Q(x,y)$,則 (18) 式之形化簡為

$$\delta J=(P\,\delta x+Q\,\delta y)_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\delta y\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx \tag{20}$$

其中已積之項遂與積線兩端之切線角係數無關.於是而公式 (20) 可適用於積線之呈有歧點者 (Points Anguleux).

如 P, Q 二式能合乎可積條件 $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$, 則 (20) 式更化簡為

$$\delta J=(P\,\delta x+Q\,\delta y)_{x_0}^{x_1}$$

此時 $\int F dx$ 沿一閉曲線計算之值為零.(可參看 Goursat 一卷 152 節.)

推之於 $F=P+Qy'+Rz'$ 亦然.

斜截線 (Transversales). 吾人如重行研究

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

之變分而視 x_0, x_1 為變數,即積線之兩端可以變易.

設 C_0 與 C_1 為 R 區之任意兩曲線,而 Γ 為一個 (I) 類曲線在 R 區內者,其一端 A 點在 C_0 線上,而他一端 B 點在 C_1 線上.再求定 Γ 俾其相當積分之值,較任何隣近同類曲線其端各在 C_0 及 C_1 上者之相當積分為大或為小,此 Γ 線自然應為一極端線,因設其兩端暫不變易時沿弧所得之 δJ 應為零故也.

次設此條件為已合,吾人懸想將積線弧由其最初位置

逐漸變易,A點暫不令動而使B點畫C_1線,設由B移至B_1,此微動移δI爲(18)式中之已積項,其式爲

$$\delta I=[F(x_1,y_1,y_1')-y_1'F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')]\delta x_1+F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')\delta y_1$$

x_1,y_1爲B點之位標,而y_1'爲極端線在B點之切線之角係數$\delta x_1,\delta y_1$代表B點在C_1線上之微動移.欲AB弧給予一極端值與其相當積分,必也過δI爲零.由此得另一必要條件爲

$$(21)\quad [F(x_1,y_1,y_1')-y_1'F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')]\delta x_1+F'_{y'}(x_1,y_1,y_1')\delta y_1=0$$

同理,如暫不令B動而使A點畫C_0線,又可得一必要之新條件爲

$$(22)\quad [F(x_0,y_0,y_0')-y_0'F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')]\delta x_0+F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')\delta y_0=0$$

綜上所述得結果如下:

欲AB線給予一極端值與J,必也1° 此曲線爲一極端線2° 在A,B兩點,(21)與(22)兩須適合.

此問題爲有定解者,因吾人有兩式以定極端線所含之兩個任意常數故也.

如A,B之中有一爲定點,則(21)(22)兩式中必有其一係表示極端線經過此定點者,與C_0變爲與oy軸平行之直線,則δx_0爲零,而(22)式化簡爲

$$F'_{y'}(x_0,y_0,y_0')=0$$

設M爲極端線Γ上之任一點,其位標爲x,y,而y'爲此點切線之角係數;通過M作一曲線C其經過M點之切線方位係數爲$\delta x,\delta y$,吾人依克氏(Kneser)之意,謂極端線斜截C線於

M 時卽 x, y, y' 與 $\delta x, \delta y$ 能合乎下之條件:

$$(23)\quad [F(x, y, y')-y'F'_{y'}(x, y, y')]\delta x+F'_{y'}(x, y, y')\delta y=0$$

準此,則 (21) 與 (22) 兩條件所表示者,卽 AB 極端線能給予一極端值時應分別斜截 C_0 與 C_1 線於 A, B 兩點也.

在 $F=g(x, y)\sqrt{1+y'^2}$ 之特例中, (23) 式變爲

$$g(\delta x+y'\delta y)=0.$$

此卽表示凡在一點 g 異於零時, C 與 Γ 恆成正交也. 如 $g=1$, 所有極端線均爲直線, 吾人遂重得此甚著之結果,卽兩曲線中之極端線必爲此兩線之公有法線 (normale commune); 但有時一公有法線亦不能解決極大極小問題,用是知此等條件爲必要條件而非充足之條件也.

(23) 式對於 $\delta x, \delta y$ 爲線式, 故凡 C 線之爲極端線斜截於一點者,在此點之切線均相同.

已與一族之極端線含一個助變量 a 者, 幷設經過 R 任一點,只通過此線族之一.則有一族曲線 C 盡爲一極端線所斜截.蓋經過一點(x, y)之極端線其在此點切線角係數 y' 爲 x, y 之函數, 而 (23) 式變爲一個一級微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\phi(x, y)$$

以定 C 線.吾人謂所有 C 線成爲一族之斜截線.

反言之,凡一曲線 C 不爲極端線者必屬於斜截線族. 蓋由 C 之任一點可作一極端線與之斜截於是點也.用此法所得之各極端線只含一助變量,幷與 C 斜截.其他由 C 發出之

同族斜線可以下法得之.

在 M 點所發出之極端線,且斜截於 C 者之上,取一點 M' 使積分 $J=\int_{MM'}F(x,y,y')dx$ 有一定值 K. 當 M 畫 C 線時, M' 畫一曲線 C', C 與 C' 有時可以變爲一點.照此作法,沿 MM' 弧之一次變分 δJ 應爲零,而 MM' 弧且與 C 斜截於 M 點.依(18)式 MM' 亦應斜截於 C'. 再將常數 k 漸次變易,則吾人得一族之斜截線, C 爲其一枝.

設 Γ 爲一空間曲線其兩端 A, B 各畫一曲線 Σ_0 及 Σ_1, 欲其相當積分 $J=\int_\Gamma F(x,y,z,y',z')dx$ 有極端值,必也 Γ 爲一極端線.次設 x,y,z 爲一點 M 之位標 y',z' 爲此點之偏引數. Σ 爲一曲面經過 M 點者.而

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$$

爲 Σ 面 M 點之切面,吾人謂 Γ 斜截 Σ 於 M 點,即須有

$$\frac{F(x,y,z,y',z')-y'F'_{y'}-z'F'_{z'}}{P}=\frac{F'_{y'}}{Q}=\frac{F'_{z'}}{R} \tag{24}$$

如吾人書 $\delta J\equiv 0$, 當 A 暫不動而 B 在 Σ_1 面上移動時,則正得 AB 線斜截 Σ_1 於 B 點之各條件.於 A 點亦可得同樣之條件,故 A, B 應斜截 Σ_0, Σ_1 兩曲面於 A 及 B 點.

此時仍有四式以定極端線所含之四個任意常數.

設 F 之形式爲 $\qquad g(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$

則(24)式表明極端線 Γ 與曲面 Σ 相正交.

等周問題. 等周問題所用之方法微有不同,試論列如下:

設欲於聯 $A(x_0, y_0)B(x_1, y_1)$ 兩點之(1)類曲線 Γ 中求其一(在 R 區內)俾定積分

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

爲極端值且合乎下條件,卽另一定積分

$$J_1=\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx$$

恆有一定值 c.

假定函數 $y=f(x)$ 合乎上述之各條件.又設 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ 爲兩個(I)類函數定於 (x_0, x_1) 間隔內者,且於界值爲零.如在 F 函數中以 $f(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x)$ 易 y, α_1 與 α_2 爲兩個助變量,則 J 亦爲此二助變量之函數,卽

$$(25)\qquad J(\alpha_1, \alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1} F\begin{bmatrix} x, f(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x) \\ f'(x)+\alpha_1\eta_1'(x)+\alpha_2\eta_2'(x) \end{bmatrix}dx$$

同理, J_1 亦可變爲

$$(26)\quad J_1(\alpha_1, \alpha_2)=\int_{x_0}^{x_1} G(x, f(x)+\alpha_1\eta_1(x)+\alpha_2\eta_2(x), f'(x)+\cdots)dx=c$$

欲 $J(\alpha_1, \alpha_2)$ 當 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 爲極大或極小,其附帶條件爲(26),必也(I, n°52 Goursat)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\right)_0\left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}\right)_0-\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_2}\right)_0\left(\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\right)_0=0$$

此式亦可變爲

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1}\eta_1(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx}{\int_{x_0}^{x_1}\eta_1(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]dx}=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\eta_2(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx}{\int_{x_0}^{x_1}\eta_2(x)\left[\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right]dx}$$

因 $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ 各不相關,故上式之比應爲一常數 k, 於是 $\eta(x)$ 任爲何形式時應有

$$(27)\qquad \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left\{\frac{\partial(F-kG)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial(F-kG)}{\partial y'}\right]\right\}dx=0$$

故 $f(x)$ 應爲下微分方程式

$$(28)\qquad \frac{\partial(F-kG)}{\partial y}-\frac{d}{ax}\left[\frac{\partial(F-kG)}{\partial y'}\right]=0$$

之解,中含一常數 k. 於是所求積分含有三任意常數,可以經過兩點,及使 J_1 爲常數之三條件定之,故此問題常有定解.

例. 就聯 A, B 兩點之所有曲線中且有定長者,試求其一,俾其與 AB 弦所成之面積爲極大.

此時 $\qquad F=y,\ G=\sqrt{1+y'^2},\ F-kG=y-k\sqrt{1+y'^2}$

因 F 與 G 爲不含 x, 故(28)式之初解爲

$$y-k\sqrt{1+y'^2}+\frac{ky'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

亦卽

$$\frac{y\sqrt{1+y'^2}-k}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

積之得

$$(x-c')^2+(y-c)^2=k^2$$

雙重積分之一次變分. 設 $F(x,y,z,p,q)$ 爲五個變數 x, y, z, p, q 之函數,當 x, y, z 點在空間 R 區域內 p 與 q 爲有限時, F 函數及其偏引數至於三級者均爲連續的. 設 Γ 爲 R 區之一閉曲線,其射影在 xy 平面者爲一閉曲線之無雙點者,命之爲 C, 假定 $z=f(x,y)$ 爲 R 區內一曲面 S 之方程式并通過曲線 Γ.

當(x, y)點畫C曲線所界之平面A及其周時,如f及其一級偏微分均爲連續的,則吾人稱$f(x, y)$爲A域之(I)類函數,而S爲(I)類曲面.如在F内以f, f'_x, f'_y分別易z及p, q,則所得者爲A域内之連續函數,而雙重積分

$$(29)\qquad J=\int\int_A F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

對於S有一有限之値,吾人仍可求一(I)類曲面S通過Γ且在R區内者,俾J爲極小.

命$\eta(x, y)$爲A域内之(I)類函數,且沿C線爲零者.方程式

$$z=f(x, y)+a\eta(x, y)$$

代表一族曲面經過Γ者,因原設$z=f(x, y)$經過Γ也.此時函數

$$J(a)=\int\int_A F[x, y, f(x, y)+a\eta(x, y), f'_x+a\eta'_x, f'_y+a\eta'_y]\,dx\,dy$$

應於助變量$a=0$爲極小.求其一次變分,得

$$(30)\qquad \delta J=a\int\int_A\left[\frac{\partial F}{\partial z}\eta(x, y)+\frac{\partial F}{\partial p}\eta'_x+\frac{\partial F}{\partial q}\eta'_y\right]dx\,dy$$

其中z, p, q應於計算後以f, f'_x, f'_y易之,設$f(x, y)$之二級偏微分在A域爲連續的;由格林氏(Green)公式得(Goursat I. §123)

$$\int_C \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial p}\,dy=\int\int_A\left[\eta'_x\frac{\partial F}{\partial p}+\eta(x, y)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right]dx\,dy$$

因$\eta(x, y)$沿C線爲零,故有

$$\int\int_A \eta'_x\frac{\partial F}{\partial p}dx\,dy=-\int\int_A \eta(x, y)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)dx\,dy$$

同理
$$\int\int_A \eta'_y\frac{\partial F}{\partial q}dx\,dy=-\int\int_A \eta(x, y)\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)dx\,dy$$

以之代入(30)式得

$$\delta J=\alpha\int\int_A \eta(x,y)\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]dx\,dy$$

欲 δJ 於 $\eta(x,y)$ 任爲何形式時爲零,必也

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)=0 \tag{31}$$

即 f 須爲此偏微分方程式之解也.

例. 設 $J=\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$

此時所得之方程式爲

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

或

$$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0$$

即極小曲面之偏微分方程式也.

二次變分 (Variation Seconde)

吾人曾經聲明凡一極端線不必卽給予積分 J 一個極端値,因除尤拉方程式而外,尙須合乎其他之條件故也.得此條件之最簡方法在書二次變分 $\delta^2 J$ 之號爲不變的.現爲便利討論起見,先證明一引言如下:

引言. 設 $y=\phi(x)$ 爲 (x_0, x_1) 間隔內之連續函數,其引數在此間隔內有數個(I)類斷値,代表 $y=\phi(x)$ 之曲線 Γ' 卽當呈數個歧點.但此種點之各切線無與 oy 平行者.吾人簡稱函數 $\phi(x)$ 與曲線 Γ 爲(Γ)類的.設 Γ' 在 R 區域內,則積分

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} F[x, \phi(x), \phi'(x)]dx = \int_{\Gamma'} F(x, y, y')dx$$

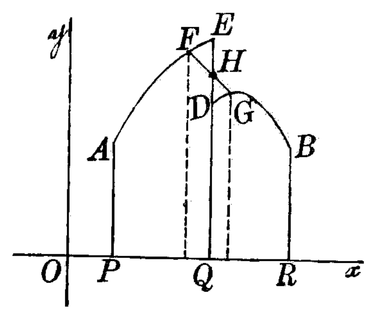
卽各分間隔內中 $\phi'(x)$ 爲連續時各積分之和之值爲有定值的.

設畢,吾人將證明求得一(I)類函數 $f(x)$ 之可能,此函數當 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 與 $\phi(x)$ 之值同,且使積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]dx$$

與 J' 相差可小至吾人所欲小.

換言之,吾人能求得一曲線 Γ 無有歧點,其端與 Γ' 同,亦在 R 區內,且使沿 Γ 及 Γ' 而計算之兩積分所差之絕對值不能超過任與之正數 ϵ. 假設 $\phi'(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內只有一個斷點 C, 則代表 $\phi(x)$ 之曲線爲不相銜接之兩弧如 AE 與 DB, 設 h 爲一正數,如是使 $C-h$, 及 $C+h$ 仍介於 x_0 及 x_1 之間者, F 與 G 爲此二值之縱量點,試以斷線 FH, HG 聯此二點, H 在 ED 線上,如令 $QH=\pi(x)$, 吾人當如是定之,俾合乎下之條件



$$\int_{C-h}^{C+h} \pi(x)dx = \int_{C-h}^{C} \phi'(x)dx + \int_{C}^{C+h} \phi'(x)dx$$

如令 $\xi = QH$, 但取

$$(32) \qquad \xi = \frac{1}{h}\left[\int_{C-h}^{C} \phi'(x)dx + \int_{C}^{C+h} \phi'(x)dx\right] - \frac{\phi'(C-h)+\phi'(C+h)}{2}$$

則上之條件卽可合.

此點 H 既定 設 $\psi(x)$ 為一助函數在 $(x_0, C-h)$ 及 $(C+h, x_1)$ 兩間隔內與 $\phi'(x)$ 相合. 而在 $(C-h, C+h)$ 間隔內與 $\pi(x)$ 相合, 此函數又為連續的函數

$$f(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx$$

在 (x_0, x_1) 間隔內為連續的,其引數亦然,此函數在 $(x_0, C-h)$ 及 $(C+h, x_1)$ 兩間隔內與 $\phi(x)$ 相合.

$y=f(x)$ 所代表之曲線 Γ, 可由 Γ' 介於 $(C-h, C+h)$ 之一段易以兩拋物線弧與 Γ' 脗合,又彼此吻合者而得之. 如 h 甚微,則 Γ 與 Γ' 在 $(C-h, C+h)$ 間隔內縱量之差亦甚微. 於是吾人可假定 Γ 亦在 R 區內, J 與 J' 亦可相差甚微也明矣.

設 Γ' 有多個歧點, 上之理論亦適用,由此得二結論焉:

(1)　設 J 對於一(II)類函數 $\phi'(x)$ 不為零,吾人可求一(I)類函數 $f(x)$ 其在間隔界之值與 $\phi(x)$ 同,且其相當積分 J 與 J' 之號相同.

(2)　設 Γ 與 Γ' 兩曲線其端相同者,設 Γ 為(I)類而 Γ' 為(II)類并同在 R 區內,如沿 Γ' 之積分 J' 恆小於沿 Γ 之積分 J, 則 Γ 不能給予積分 $\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')dx$ 一個絕對極小值. 如在 Γ 鄰近恆能得 Γ', 使 J' 常小於 J, 則 Γ 不能給予一相對極小值.

勒讓脫氏 (Legendre) 之條件. 設 $y=f(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內為 (I) 類函數, 且為尤拉氏方程式之解. 如在定積分 $J=$

$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ 中, 以 $f(x)+\alpha\eta(x)$ 易 y, 吾人已知其一次變分 δJ 應於 $\eta(x)$ 為任何種形式時為零, $\eta(x)$ 係一個 (I) 類函數, 且在間隔 (x_0, x_1) 之界值時為零者. 欲此極端函數給予積分一極端值, 必再也其二次變分 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 為任何形式時有一不變之號. 吾人將先求 $\delta^2 J$ 恆為正時之充要條件, 此時所得極端值為極小, 將 (3) 式

$$(3)\qquad \delta J=\alpha\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]dx$$

再引之, 則得一式, 其形為

$$(33)\qquad \delta^2 J=\alpha^2\int_{x_0}^{x_1}[P\eta^2(x)+2Q\eta(x)\eta'(x)+R\eta'^2(x)]dx$$

P, Q, R 為 x 之函數, 係在 F''_{y^2}, $F''_{yy'}$, $F''_{y'^2}$ 中將 y 易為 $f(x)$, y' 易為 $f'(x)$ 而得者, 依原有假設, P, Q, R 在 (x_0, x_1) 間隔內為連續. 今試用勒讓脫氏 (Legendre) 方法以變 $\delta^2 J$ 之形, 設 $\omega(x)$ 為 (x_0, x_1) 之 (I) 類函數; 無論 $\omega(x)$ 之形式如何, 吾人恆有

$$\int_{x_0}^{x_1}(2\eta\eta'\omega+\eta^2\omega')dx=\Big[\eta^2\omega\Big]_{x_0}^{x_1}=0$$

因 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ 故也, 乃將 $\delta^2 J$ 式書為

$$(34)\qquad \delta^2 J=\alpha^2\int_{x_0}^{x_1}[(P+\omega')\eta^2+2(Q+\omega)\eta\eta'+R\eta'^2]dx$$

再選擇 ω 俾 dx 之係數為一整方, 則有

$$(35)\qquad (Q+\omega)^2-R(P+\omega')=0$$

於是 (34) 式變為

$$(36)\qquad \delta^2 J=\alpha^2\int_{x_0}^{x_1}R\left(\eta'+\frac{Q+\omega}{R}\eta\right)^2dx$$

由此式觀之,可知 R 之號在討論中極爲重要.因得勒氏之必要條件,即

欲 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 任爲何形式時爲正或爲零,必也函數 $R(x)$ 不能在 (x_0, x_1) 間隔內爲負.

證. 假設 $R(C)<0$, $x_0<C<x_1$.

吾人可取一正數 h 甚小,俾 $R(x)$ 在 $(C-h, C+h)$ 間隔內仍爲負,(6) 式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

表明 $f''(x)$ 在 $(C-h, C+h)$ 間隔內爲連續的,於是 P, Q, R 三函數在同一間隔內亦有連續引數.如應用歌西氏 (Cauchy) 定理於 (35) 式,此式有無窮解在 $x=C$ 之鄰近爲連續的.設 $\omega(x)$ 爲此種解之一,設 (ξ_0, ξ_1) 爲含 C 之間隔且甚小者,俾 $R(x)$ 爲負而 $\omega(x)$ 則在全間隔 $(x_0<\xi_0<C<\xi_1<x_1)$ 內爲連續的.設 $\eta(x)$ 之形式有如下定:

1° $\eta(x)=0$, 　　當 $x_0\leqq x\leqq\xi_0$

2° $\eta(x)=(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2 e^{-\int_C^x\frac{Q+\omega}{R}dx}$, 　　當 $\xi_0\leqq x\leqq\xi_1$

3° $\eta(x)=0$, 　　當 $\xi_1\leqq x\leqq x_1$

吾人易見 $\delta^2 J$ 之相當值在 (ξ_0, ξ_1) 間隔內與 R 同號即爲負,故勒氏之條件爲必要而 $R(x)$ 應在全間隔內爲正或爲零. $R(x)$ 在間隔內有根時暫不討論,吾人當設

(37)　　$R(x)>0$, 　　$x_0\leqq x\leqq x_1$

就(36)式觀之,似乎勒氏之條件既合,則$\delta^2 J$自於$\eta(x)$爲任何形式時爲正或爲零.但須注意者,當吾人求$\delta^2 J$之變形時,只適用於$\omega(x)$在間隔內爲連續者,故必確定(35)式有一連續解時,而後結論乃能成立.

注意. 如$R(x)$在全間隔(x_0, x_1)恆爲零,由(35)式得$\omega=-Q$

而
$$\delta^2 J = \alpha^2 \int_{x_0}^{x_1} (P-Q')\eta^2 dx$$

欲$\delta^2 J$之號不變,必也$P-Q'$在間隔內保持其同一之號.

加可俾氏(Jacobi)之條件. 方程式(35)

$$(Q+\omega)^2 - R(P+\omega')=0$$

爲里加狄(Riccati)方程式,故可變爲一二級線式(Goursat II § 402)

令$Q+\omega=-Rz$,則(35)式變爲

$$z'+z^2+\frac{R'}{R}z+\frac{Q'-P}{R}=0 \tag{38}$$

此式可視爲由二次線式

$$\Psi(u)=u''+\frac{R'}{R}u'+\frac{Q'-P}{R}u=0 \tag{39}$$

中,令$u=e^{\int z dx}$而得,故$z=\frac{u'}{u}$爲(38)式之通解,而u又爲(39)式之通解.(39)式亦可視作$F=Pu^2+2Quu'+Ru'^2$之相當尤拉方程式.於是(35)式之通解爲

$$\omega=-Q-R\frac{u'}{u} \tag{40}$$

凡(39)式亦稱加可俾氏式之解,在(x_0, x_1)間隔內均爲連續的,

并且欲(35)能有一解在此間隔內連續,其充要條件爲加可俾式能有一解 $u(x)$ 不在同一間隔內爲零.

此條件爲 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 任爲何形式時恆爲正之充足條件,且亦爲必要(可參考 Goursat III. 587 頁).

蓋設 $u(x)$ 爲加可俾式之一特解對於 $x_0 \leqq x \leqq x_1$ 時不爲零者,取 $\omega = -Q - R\dfrac{u'}{u}$ 以之代入(36)式,則得

$$\delta^2 J = a^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{R(\eta' u - \eta u')^2}{u^2} dx \tag{41}$$

既設 R 爲正,則此式亦明示 $\delta^2 J$ 不能爲負.欲 $\delta^2 J$ 爲零,必在間隔內任何點恆有 $\eta' u - \eta u' = 0$ 或 $\eta = cu$,此爲不可能,因 $\eta(x)$ 在界值時爲零,而 u 則否.由此得:

如加可俾式之解 $u(x)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內及其界值不爲零時,則二次變分 $\delta^2 J$ 於 $\eta(x)$ 任爲何形式時均爲正.

故欲確定二次變分 $\delta^2 J$ 在 (x_0, x_1) 間隔內之號,勒(Legendre)加(Jacobi)二氏之條件須同時爲充要條件.

幾何說明. **錯焦點(Foyers conjugués).** 如吾求尤拉方程式(6)距一極端線極鄰近之解,則可得(39)式.設勒氏極小條件已合,卽 $R = F''_{y'^2} > 0$ (在 x_0, x_1 間隔內),以 $F''_{y'^2}$ 遍除(6)式各項得一方程式,其形爲

$$y'' = \Phi(x, y, y') \tag{42}$$

此式有無窮積分線族且含有一助變量 λ 者(可參考 Goursat III. § 461).

卽 $$y=\phi(x,\lambda),$$

且有 $$\phi(x,0)=f(x)$$

引數 $\phi'_\lambda(x,0)$ 合一二級微分方程式,其求法如次.將(6)式書爲

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

再以 $\phi(x,\lambda)$ 易 y 而以 $\phi'(x,\lambda)$ 易 y',幷求兩端對於 λ 之引數,卽得

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial y'}\cdot\frac{\partial\phi'}{\partial\lambda}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial y'\,\partial y}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\,\frac{\partial\phi'}{\partial\lambda}\right\}$$

在此式中令 $\lambda=0$ 而令 $u=\phi'_\lambda(x,0)$. 則得

$$P(x)u(x)+Q(x)u'(x)=\frac{d}{dx}\{Q(x)u(x)+R(x)u'(x)\} \tag{43}$$

此卽與(39)式無異,由(6)式與(39)式之關係,吾人可得加可俾氏條件之幾何說明.

試取由 A 所發出之極端線族,且與原極端線相鄰近者而研究之.此線族之方程式爲 $y=\phi(x,\lambda)$, 且有

$$\phi(x_0,\lambda)=f(x_0),\quad \phi'_\lambda(x_0,\lambda)=\lambda+f'(x_0)$$

第一式表示 $x=x_0$ 爲方程式

$$\phi'_\lambda(x,0)=0$$

之根.但此方程式之根爲極端線 $y=f(x)$ (當 $\lambda=0$) 與 A 點所發出之他一無窮鄰近極端線兩線交點之橫量.卽 Γ 與此族線圍之切點.此線圍以 A 點爲其一部分.因所有的線族均通 A 點故也.其他切點稱爲 A 之錯焦點(Points Conjugués). 因 $\phi'_\lambda(x,0)$ 恰爲加可俾式之一解 $u_1(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲零者,故其次大之根

即代表 A 點之第一個錯焦點 A' 在 A 點之右. 故加可俾氏條件表示極端線 AB 弧之 B 端應介於 A 點與其右端第一錯焦點 A' 之間.

茲更有一直接之法, 可求出 (6) 式與 (39) 式之關係, 令

$$J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F[x,f(x)+\alpha\eta(x),f'(x)+\alpha\eta'(x)]dx$$

$$J(0)=\int_{x_0}^{x_1}F[x,f(x),f'(x)]dx$$

依第10頁

$$J(\alpha)-J(0)=\frac{\alpha}{1}J_1+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}J_2+\cdots\cdots$$

J_1 有兩個形式, 其一爲

$$J_1=\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx$$

其一爲
$$J_1=\int\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx$$

如在 $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 中將 y 與 y' 易爲 $y+\alpha\eta$, $y'+\alpha\eta'$, 幷令 $\frac{\partial F}{\partial y}=F_0$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=F_1$,

則
$$J_1(\alpha)=\int\{\eta F_0[x,f(x)+\alpha\eta(x)\cdots\cdots]+\eta' F_1\}dx$$

或
$$J_1(\alpha)=\int\eta\left\{F_0[x,f(x)+\alpha\eta(x)\cdots\cdots]-\frac{d}{dx}F_1\right\}dx$$

於是用第一形式得

$$J_1(\alpha)-J_1=\alpha J_2+\alpha^2 h+\cdots\cdots$$

而
$$J_2=\int\left[\eta\left(\frac{\partial F_0}{\partial y}\eta+\frac{\partial F_0}{\partial y'}\eta'\right)+\eta'\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\eta+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\eta'\right)\right]dx$$

$$=\int[P\eta^2(x)+2Q\eta\eta'+R\eta'^2]dx$$

又令
$$\bar{y}=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

而以 $\bar{y}_1$ 代同一之式,當 y_1 易爲 $f(x)+a\eta(x)$ 者,則有

$$J_1(a)-J_1=\int\eta(\bar{y}_1-\bar{y})dx$$

$$\bar{y}_1-\bar{y}=a\left(\frac{\partial F_0}{\partial y}\eta+\frac{\partial F_0}{\partial y'}\eta'\right)-a\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\eta+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\eta'\right)\right]=0$$

亦卽
$$P\eta+Q\eta'-\frac{d}{dx}(Q\eta+R\eta')=0$$

或
$$(P-Q')\eta-\frac{d}{dx}(R\eta')=0$$

又可書爲
$$\eta''+\frac{R'}{R}\eta'+\frac{Q'-P}{R}\eta=0$$

此式完全與(39)相同.

設 y 爲 $\bar{y}=0$ 之解,而 $y+\lambda u$ 爲 $\bar{y}_1=0$ 之解,如使 $u=\eta$,則 $\bar{y}$ 與 $\bar{y}_1$ 同時爲零,而方程式

$$(39)' \qquad (P-Q')u-\frac{d}{dx}(Ru')=0$$

亦可合,故 $y+\lambda u$ 爲極端線 $y=f(x)$ 鄰近之解,當 y 之解已得亦可求 u,否則須由加可俾氏方程直接求 u 也.

加可俾方程式解之研究. (Forsyth 22 頁)

先取尤拉方程式

$$\bar{y}=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$
$$=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''=0$$

如勒氏(Legendre)條件已合,則 $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=R$ 在間隔內不爲零,由哥西氏存在定理(Théoréme d'existence)可得一通解,當 $x=a$ 時有

$$y=c_1$$

$$y'=c_2$$

c_1 及 c_2 爲任意二常數,故此通解之形爲

$$y=c_1+c_2(x-a)-(x-a)^2\phi(x-a_1,\ c_1,\ c_2) \tag{44}$$

ϕ 對於 $x-a$ 爲規則的(Régulier).此式又可簡書爲

$$y=g(x,\ c_1,\ c_2)$$

無論 c_1, c_2 爲何值時,$y=g(x, c_1, c_2)$ 恆可合乎尤拉方程式 $y=0$,故與 c_1 及 c_2 以增量 $\lambda\gamma_1$ 及 $\lambda\gamma_2$ 中 λ 爲甚小而 γ_1 與 γ_2 爲兩個任意常數,仍可得一解,其形爲 $y+\lambda u$,於是

$$u=\gamma_1\frac{\partial g}{\partial c_1}+\gamma_2\frac{\partial g}{\partial c_2}$$

如令

$$\frac{\partial g}{\partial c_1}=u_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial c_2}=u_2$$

則

$$u=\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2 \tag{45}$$

因 $y+\lambda u$,合乎方程式 $y_1=0$,故 u 能合乎 $y_1-y=0$,即

$$(P-Q)u-\frac{d}{dx}(Ru')=0$$

即加可俾(Jacobi)方程式也,故 u 爲其通解.今試進而研究 u 之性質.由(44)式得

$$u_1 = 1 + (x-a)^2 \frac{\partial\phi}{\partial c_1}$$

$$u_2 = (x-a) + (x-a)^2 \frac{\partial\phi}{\partial c_2}$$

ϕ 對於 $(x-a)$ 爲規則的,故 u_1 與 u_2 無線式關係

但
$$Ru_1'' + R'u_1' - (P-Q')u_1 = 0$$

$$Ru_2'' + R'u_2' - (P-Q')u_2 = 0$$

由此得

$$R(u_1u_2'' - u_2u_1'') + R'(u_1u_2' - u_2u_1') = 0$$

亦卽 (46)
$$R(u_1u_2' - u_2u_1') = A$$

其中 A 爲一常數,因 u_1 與 u_2 無線式關係,故 $u_1u_2' - u_2u_1'$ 不爲零,又勒氏 (Legendre) 條件設爲已合,故 R 亦不爲零,於是 A 亦不能爲零,由 (46) 式得
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{A}{u_1^2}\bigg/R$$

因 A 與 u_1^2 之號不變,R 亦有常號,故 $\frac{u_2}{u_1}$ 之引數之號亦不變.如此引數之號爲正,則 $\frac{u_2}{u_1}$ 在間隔內爲增變函數;如其號爲負,則 $\frac{u_2}{u_1}$ 爲減變函數,此結果可視爲勒氏條件之結果.

$\frac{u_2}{u_1}$ 旣爲間隔內之增函數或減函數,則在間隔內任何點時,$\frac{u_2}{u_1}$ 不能重得在低界旣經之值,但須設 $u_1 \neq 0$.

又由 (46) 式觀之,A 旣異於零,則 u_1 與 u_2 不能同時爲零同理,在同一間隔內 u_1' 與 u_2' 亦不能同時爲零.

上述求 u 之法係根據尤拉氏方程式之通解而得;換言之,如旣得尤拉氏方程式之通解,則加可俾氏方程式之通解,

可以不積而得.如未得尤拉式之解,或僅得其特解.則u須由加可俾式積之而得也.

加可俾氏判定法. 吾人已知欲積分J有一極端值,吾人必須如是選擇$\eta(x)$函數使之不合下二種條件:

1° $\eta(x)$在間隔內爲u之常數.

2° $\eta(x)$在兩界值爲零時,u亦爲零.

假設吾人定γ_1與γ_2俾u在低界爲零,則當$x=x_0$時應有$\frac{u_2}{u_1}=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$,但$\frac{u_2}{u_1}$在間隔內非增卽減,於是$\frac{u_2}{u_1}$不能重經過$-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$之值,卽$u$不能再爲零,吾人卽不能選擇$\eta$函數使其1°爲$u$之常數倍數,2°可合兩界值之條件.

如$\frac{u_2}{u_1}$於間隔擴大時能重經低界所得之值一次以至多次.則此種點,$u=0$,又可得一函數η俾$\eta=cu$,於是在此點$\delta^2J=0$,卽J不能有極端值.此種可能,吾人當阻止其發生.故間隔不能超過$\frac{u_2}{u_1}$還爲原值時之第一點,此點謂之A點之錯焦點.

故積分極端值之間隔應不得越過低界之第一錯焦點,此卽加可俾氏之判定法與勒氏條件不同而相因爲用者也.

例. 如聯平面兩點之直線爲此兩點之最短距離,故極端線爲一直線,其他經過A點之極端線仍爲直線,微斜傾於第一線.此兩線不相交.故積分間隔不受何種限制.

又如圓球面上之短距線爲通過此兩點之大圓弧,而極端線爲大圓,經過A點之他一大圓與原極端線交於第二點

B,故最短線之間隔不能超過 B 點

判定極端值之步驟 總上所論,欲確定一積分之極端值,必須

1° 求極端函數,即尤拉方程式

$$y=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

之解也,及求加可俾方程式

$$(P-Q')u-\frac{d}{dx}(Ru')=0$$

之解 $$u=\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2$$

γ_1 及 γ_2 爲兩個任意常數.

2° 令 $R=\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ 在間隔內保持其號.

3° 令積分間隔不得超過 $\frac{u_2}{u_1}$ 重經低界值之點,即極端線不得逾 A 點之錯焦點也.

例. 今試先舉一特例,即 $F=y\sqrt{1+y'^2}$ 依18頁 $\alpha=1$ 之例,

此時之初解爲 $$y=c(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

由此得 $$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}}=dx$$

$$c\log\left(\frac{y}{c}+\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}\right)=x-b$$

$$\frac{y}{c}+\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}=e^{\frac{x-b}{c}}$$

又
$$\frac{y}{c}-\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}=e^{-\frac{x-b}{c}}$$

於是得
$$y=c\operatorname{ch}\frac{x-b}{c}$$

爲一懸鍊曲線之方程式其中 c 與 b 爲兩個任意常數.

此時勒氏條件爲

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

恆爲正,故此條件爲已合,即積分有極小值之可能.

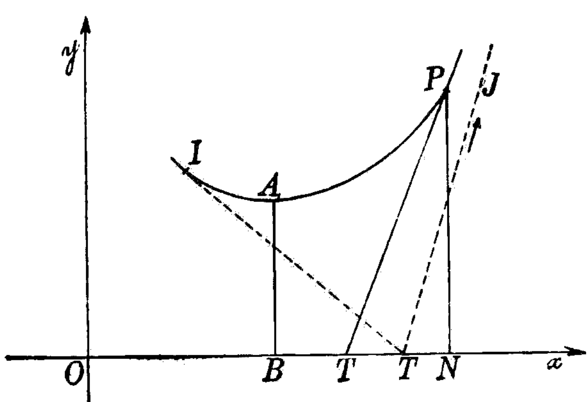
再用加氏判定法,吾人有

$$u_1=\frac{\partial y}{\partial b}=-\operatorname{sh}\frac{x-b}{c}$$

$$u_2=\frac{\partial y}{\partial c}=\operatorname{ch}\frac{x-b}{c}-\frac{x-b}{c}\operatorname{sh}\frac{x-b}{c}$$

而
$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{x-b}{c}-\coth\frac{x-b}{c}$$

設 A 爲曲線之頂點, P 爲此曲線上任意之點,其橫量爲 x,則



$$AB = c$$

$$OB = b$$

而
$$PN = c\,\mathrm{ch}\,\frac{x-b}{c},\ \tan P\hat{T}N = sb\,\frac{x-b}{c}$$

於是
$$TN = c\coth\frac{x-b}{c}$$

而
$$c\frac{u_2}{u_1} = (x-b) - c\coth\frac{x-b}{c} = BN - TN = BT$$

故 $\frac{u_2}{u_1}$ 之值可由 T 點在 ox 上之地位而定.因 $\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$ 爲正,故 P 點向右畫曲線時,$\frac{u_2}{u_1}$ 恆增.

設 I 爲始點,IT_0 爲其切線交 ox 於 T_0,當動點經過 A 時,T_0 由極右端變至極左端,由 A 而右行,則 T 點亦右行至 T_0,A 至 J 點因在 T_0 點,$\frac{u_2}{u_1}$ 還原爲其初值,故 J 爲 I 之錯焦點故 IP 弧不越過 IJ,則加氏條件可合,而積分有一極小值.

前項條件之缺點. 合勒(Legendre)加(Jacobi)二氏之條件尚不足以確定 J 之極小.蓋吾人僅將 $y=f(x)$ 之相當積分與含一助變量函數 $y=f(x)+\alpha\eta(x)$ 之相當積分相比較,而實際上吾人所命之問題須比較 $y=f(x)$ 及 $y=f(x)+\omega(x)$ 之相當積分 $\omega(x)$ 當合乎(1)之各條件(見 9 頁).

根據以上所研究者,僅能得下之結論:

設 $\omega(x)$ 爲一(I)類函數而合乎(1)之條件,方程式

$$y = f(x) + \alpha\omega(x)$$

代表一族之曲線 Γ(Faisceau) 當 α 由 0 變至 1 時恆在 R_2 區域

內者;當 $\alpha=0$, 吾人得一曲線爲 Γ_0, 其方程式爲 $y=f(x)$; 當 $\alpha=1$, 則有 Γ_1, 其式爲 $y=f(x)+\omega(x)$.

函數 $y=f(x)+\alpha\omega(x)$ 之相當積分 $J(\alpha)$ 於 α 由 0 變時應開始增變,但吾人不能確定其在 R_2 區內於 α 由 0 變至 1 時 $J(\alpha)$ 常隨之增變也.

下例卽表明 $\delta J=0$, $\delta^2 J>0$ 不能確定 J 之極小值.

設 $F=y'^2+y'^3$, 幷令 $x_0=y_0=0$, $x_1=1$, $y_1=0$,

此時極端線爲直線,而合乎兩條件之極端函數爲 $f(x)=0$, 而二次變分

$$\delta^2 J=a^2\int_0^1 2\eta'^2(x)dx$$

恆爲正.欲 $\delta^2 J=0$, 必也 $\eta'(x)=0$, 於是 $\eta(x)=0$, $f(x)=0$ 之相當積分 J 亦爲零.今試往證明吾人能求出一個 (I) 類函數合乎條件

$$\omega(0)=\omega(1)=0 \qquad |\omega(x)|<\epsilon$$

者,當 x 介乎 0 與 1 之間時俾有

$$J_1=\int_0^1(\omega'^2+\omega'^3)dx$$

爲負.蓋設 α 爲正常數小於 1 者,又如是定函數 $\omega(x,\alpha)$:

$$1^\circ \qquad \omega(x,\alpha)=\alpha x \qquad \text{當}\ 0\leqq x<1-\frac{2\alpha}{\alpha+2}$$

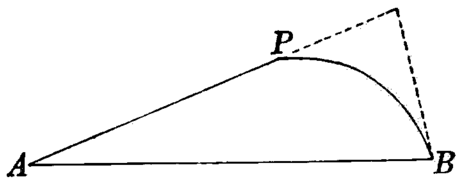
$$2^\circ \qquad \omega(x,\alpha)=2(1-x)-\frac{(\alpha+2)^2}{4\alpha}(1-x)^2,\ \text{當}\ 1-\frac{2\alpha}{\alpha+2}\leqq x\leqq 1$$

$\omega(x,\alpha)$ 在間隔 (0, 1) 內爲 (I) 類函數.方程式

$$y=\omega(x,\alpha)$$

代表一曲線 APB, 其 AP 部爲一直線,而 PB 弧部爲一拋物線弧

與 AP 線相切,其 B 點切線之角係數爲 -2, 此函數 $\omega(x,\alpha)$ 爲連續,且與 α 同時趨近於零,但其引數 $\omega'(x\ \alpha)$



則於 $x=1$ 及 $\alpha=0$ 爲斷函數積分 $J(\alpha)=\int_0^1(\omega'^2+\omega'^3)dx$ 與 α 同時爲無窮小. 惟因 ω' 之斷性,積號內求微分法遂不適用,於是吾人匪特不能確定$J'(0)$爲零,抑且吾人可證實其值爲負. 將 J_1 分爲兩部,一爲$\int_{AP}$,一爲$\int_{AB}$, 則

$$\int_{AP}\text{之值}=(\alpha^2+\alpha^3)\left(1-\frac{2\alpha}{\alpha+2}\right)$$

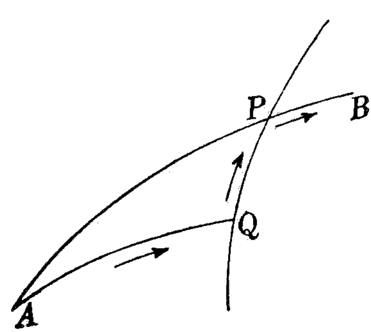
欲求$\int_{PB}$之値,先令 $x=1-\frac{2\alpha}{\alpha+2}z$, 則得

$$\int_{PB}=\frac{2\alpha}{\alpha+2}\int_0^1\left\{[(\alpha+2)z-2]^2+[(\alpha+2)z-2]^3\right\}dz$$

其主量爲$-\frac{2\alpha}{3}$,故　　　$J'(0)=-\frac{2}{3}$

而 $J(\alpha)$ 於 α 接近於零時亦爲負. 此例足表明更有求一普偏判定式之必要也.

魏氏 (Weierstrass) 之條件. 函數 E. 在 AB 由線上取點 P 其位標爲 x_2. y_2, 設 $y=f_1(x)$ 爲 C_1 之方程式通過P點者,幷在$(x_2-k,\ x_2+k)$ 間隔內賦有一二次引數,設 Q 爲C_1 曲線上之一點,其橫量爲 x_2-h, h 爲一正數比 k 小者



$(x_0 < x_2 - h < x_2 < x_1)$

令 $$\omega(x_1, h) = (x - x_0)\,\frac{f_1(x_2 - h) - f(x_2 - h)}{x_2 - h - x_0}$$

而 AQ 之方程式為

$$y = f(x) + \omega(x,h) \qquad x_0 \leqq x \leqq x_2 - h$$

當 h 趨近於零時 AQ 之限為 AP, 而積分

$$\int_{AQ} F(x, y, y')dx$$

為 h 之函數 $I(h)$, 其引數當 $h=0$ 為

$$I'(0) = [y_2' - f_1'(x_2)]\,F_y'(x_2, y_2, y_2') - F(x_2, y_2, y_2')$$

因 AP 為極端線之弧, 而 Q 點之位標為

$$x = x_2 - h, \qquad y = f_1(x_2 - h)$$

由此得 $$\delta x = -\delta h, \qquad \delta y = -f_1'(x_2)\delta h$$

y_2' 代表 AP 上 P 點切線之角係數.

設 $I_1(h)$ 為沿 QP 弧之積分, 即

$$I_1 = \int_{x_2 - h}^{x_2} F[x f_1(x), f_1'(x)]dx$$

其引數 $I_1'(0)$ 為 $F[x_2, y_2, f_1'(x_2)]$, 於是令

$$J(h) = \int_{AQP} F(x, y, y')dx,$$

吾人可書

$$\left(\frac{dJ}{ah}\right)_0 = F(x_2, y_2, p_2) - F(x_2, y_2, y_2') - (p_2 - y_2')F_{y'}(x_2, y_2, y_2')$$

p_2 為 C_1 曲線之切線角係數,右端為 x, y, y', p 四變數之函數為

魏氏定理之主要條件,吾人以 E 代此函數,即

$$E(x,y,y',p)=F(x,y,p)-F(x,y,y')-(p-y')F'_{y'}(x,y,y')$$

前原式可書爲

$$\left(\frac{dJ}{dh}\right)_0=E(x_2,y_2;y_2',p_2)$$

由此得一新必要條件,吾人謂之爲魏氏條件(Weierstrass).欲 AB 線使 J 爲極小,必也函數

$$E[x,f(x);f'(x),p]$$

於 p 爲任何有限值時恆不爲負,x 則由 x_0 變至 x_1;簡言之,即 E 在 AB 線上任何點不能爲負也.

蓋設在 AB 上之 $P(x_2,y_2)$ 點,又於 $p=m$ 時 E 爲負,即

$$E(x_2,y_2;y_2'm)<0$$

取 C_1 之方程式爲

$$y=f(x)+(m-y_2')(x-x_2)=f_1(x)$$

此線在 P 點與直線其角係數爲 m 者相切 $f_1(x)$ 之相當積分 $J(h)$ 之引數於 $h=0$ 爲負.於是吾人可尋出一數 l 接近於零者,俾有

$$J(l)<J(0)$$

於是吾人可得一路線 $AQPB$,使下各積分

$$\int_{AQ}F(x,y,y')dx+\int_{QP}+\int_{lB}$$

之和小於積分之沿 AB 弧計算者,即此足證明 AB 不能給予積分以極小值也.(依二次變分引言.)

故吾人應於勒加二氏條件之外加以新條件，即

$$F(x, y; y'p) \geqq 0$$

沿 AB 弧且當 P 爲任何有限值時皆然.

對於極大則須變不等號爲(小於).

注意: 依戴氏公式得

$$E(x, y; y', p) = \frac{(p-y')^2}{1\cdot 2} F''_{y'^2}[x, y, y'+\theta(p-y')] \qquad 0<\theta<1$$

由此式觀之，如 $F''_{y'^2}(x, y, u)$ 於 u 爲有限值時在 AB 弧上任何點不爲負，則魏氏之條件亦可合，但此非使魏氏條件能合之必要條件也.

例. 設 $F = y'^2 + y'^3$ 對於特殊極端線 $y=0$，其魏氏條件爲

$$E = p^2 + p'^3 = p^2(p+1)$$

此時如令 $p=-2$，則 E 爲負，故 J 不能有極小值與前所得結果符合.

據布爾沙(Bolza)氏意，魏氏條件亦不能確定積分之極小.

譬設 $$F = ay'^2 - 4byy'^3 + 2bxy'^4$$

a, b 爲兩個正數常數，此時尤拉方程式爲

$$y''(2a - 24byy' + 24bxy'^2) = 0$$

故極端線爲直線. 取 $A(0,0)$ $B(1,0)$ 兩點，$y=0$ 聯此兩點者亦爲一極端線，且吾人易證明對於此線，勒加二氏之條件爲已合，而魏氏條件爲

$$E(x, y, y', p) = p^2(u + 2bxp^2) \text{ 當 } y = 0$$

於 x 由 0 變至 1 時亦為已合,但 $y=0$ 不能給予 J 一極小值,蓋吾人能取一斷線 APB, P 點之位標為 h, k 均為正數且甚小,俾沿此斷線所得 J 之值為負故也.(k 可小至吾人所欲小.)

極端線場　充足條件

定義. 以上所論者皆非充足條件,而欲求極小值之充足條件必先明極端線場 (Champs d' Extrémales) 之意義.

命 G 為一極端線,凡一組之極端線含有一助變量者成為一族 (Faisceau). 在 R 區域內如有一部分單式 (Connexe) 及有限平面 P, 吾人稱 P 為極端線場,即有一族極端線在此場內任於一點只能通過一線. 設 $u(x, y)$ 為此 G 線上 (x, y) 點之切線角係數與其偏引數 u'_x, u'_y, 幷在 P 場為連續函數. 於是所有族之各線均為微分方程式 $y' = u(x, y)$ 之積分曲線. 由此得

$$y'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot u(x, y)$$

將 y' 及 y'' 代入尤拉方程式,則得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} u\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial u} u + \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial u} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{48}$$

此條件應為 P 場內任一點所含. 故函數 $u(x, y)$ 應為此式之積分在 P 場內與其偏引數均為連續的. 反而言之, 設 (48) 式有一解,幷其偏引數在 P 域內均為連續的,則此域為一線場,因微分方程式

$$y' = u(x, y)$$

定一族曲線,且於 P 之任一點只能通過一線故也.

設 G_0 爲一極端線弧聯 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ 兩點者,其方程式 $y=f(x)$ 在 (x_0, x_1) 內屬於(I)類函數.再以前法俾直線 $x=x_0$, $x=x_1$ 曲線 $y_1=f(x)+\epsilon$, $y_2=f(x)-\epsilon$ 定一區域 R_ϵ,吾人謂 R_ϵ 爲線場,卽可取 ϵ 甚小,俾 R_ϵ 完全含於全線場 P 之內,此種可能之充足條件爲(48)式須有一解在 R_ϵ 區域內,幷其偏引數均爲連續的,且此解應於 $y=f(x)$ 化爲 $f'(x)$. 凡在 (x_0, x_1) 間隔內之極端線弧能合乎勒加二氏條件者,必屬於一線場. 蓋吾人於研究加氏條件之幾何意義時,已知尤拉方程式有無窮解含一助變量 λ, 卽 $\phi(x, \lambda)$ 且有 $\phi(x, 0)=f(x)$, 又合乎下之二條件:

1° 當 x 由 x_0 變至 x_1, λ 由 $\lambda-k$ 變至 $\lambda+k$ 時 $\psi(x, \lambda)$ 及其一二次偏引數均爲連續的.

2° 引數 $\phi'_\lambda(x, 0)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內異於零.

吾人今往證明函數 $\phi(x, \lambda)$ 定一線場極端線 AB 屬焉.

蓋 $\phi'_\lambda(x, 0)$ 旣在間隔 (x_0, x_1) 內不爲零,又因 $\phi'_\lambda(x, \lambda)$ 爲 x 及 λ 之連續函數,故吾人可求得一正數 ρ 俾 $\phi'_\lambda(x, \lambda)$ 在 Δ 區域內亦不爲零. Δ 區有如下定

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad -\rho \leqq \lambda \leqq \rho$$

當 x 由 x_0 變至 x_1, λ 由 $-\rho$ 變至 $+\rho$ 時, m 點以 $[x, y=\phi(x, \lambda)]$ 爲位標者畫一區域 R' 圍繞 G_0 線, R' 之界爲

$$x=x_0, \qquad x=x_1$$

$$y=\phi(x, -\rho), \qquad y=\phi(x, \rho)$$

今將證明於此區域之任一點只能通此種線族之一.

蓋後在 R' 內 $\phi'_\lambda(x,\lambda)>0$, 而與 x 以一定值 x_2 介乎 x_0 及 x_1 之間者如將 λ 由 $-\rho$ 變至 $+\rho$, 則函數 $\phi(x,\lambda)$ 由 $\phi(x,-\rho)$ 增至 $\phi(x,+\rho)$ 而以 $x_2, y_2=\phi(x_2,\lambda)$ 爲位標之點畫一直線 P_1P_2 與 oy 平行. 每與 x 一值 x_2 卽有一段直線 P_1P_2 與之相當, 如 x_2 由 x_0 變至 x_1 時, 則 P_1P_2 線段所畫之一部分平面適爲 R' 區, 依此每在 R' 取一點 (x,y) 必有 λ 一值與之相當介乎 $-\rho$ 及 $+\rho$ 者. 設 $\lambda=\psi(x,y)$ 爲此根, 引數 $\phi'_\lambda(x,\lambda)$ 於 $\lambda=\psi(x,y)$ 時旣不爲零, 則準渾函性質及對於 $\phi(x,\lambda)$ 之假設, 函數 ψ 應爲連續的, 且其偏引數在同一區域 R' 內亦然, 而經過 R' 內 (x,y) 點曲線之切線角係數 $u(x,y)$ 等於 $\phi'_x(x,\lambda)=\phi'_x[x,\psi(x,y)]$, 又因 ϕ 之二級引數與 ψ 之一級引數均爲連續的, 於是 $u'(x,y)$ 在 R' 區域內之一級偏引數 u'_x, u'_y 亦爲連續無疑, 故 R' 爲極端線場.

現設 ϵ 爲下二函數

$$\phi(x,\rho)-\phi(x,0) \qquad \phi(x,0)-\phi(x,-\rho)$$

之低界 (borne intérieure) x 由 x_0 變至 x_1, 此低界 ϵ 爲正, 因前函數在 (x_0,x_1) 間隔內爲連續的且不爲零故也.

以下之不等式

$$x_0 \leqq x \leqq x_1; \quad f(x)-\epsilon \leqq y \leqq f(x)+\epsilon$$

所定之區域 R_ϵ 全含於 R' 場內, 故 R_ϵ 亦爲一場圍繞 G_0.

魏氏定理 (Théoréme de Weierstrass). 設 G_0 爲一極端線弧, 對於此弧勒加二氏之條件均設爲已合. 如吾取 ϵ 甚小, 則

可使 R_ϵ 區域爲圍繞 G_0 弧之線場，凡在 R_ϵ 之 (I) 類曲線 Γ 聯 A, B 兩點者，其方程式之形爲

$$y=f(x)+\omega(x)$$

$\omega(x)$ 在間隔 (x_0, x_1) 內爲 (I) 類函數，且合乎下之各條件：

$$\omega(x_0)=0,\ \omega(x_1)=0,\ |\omega(x)|<\epsilon,\ \text{當}\ x_0<x<x_1.$$

欲極端線 G_0 給予一極小值，積分 J_{G_0} 應較 J_Γ 爲小，Γ 形式可以任意，但須合乎上述各條件，此問題困難之點在比較兩積分之值沿不同之路線而計算者．魏氏將此問題解決，即以一個積分沿 Γ 路線計算者，以表示 J_Γ 與 J_{G_0} 之差．欲得魏氏公式先證明希諾倍 (Hilbert) 之小引如下：

小引　設 P 爲一極端線場；如 $u(x, y)$ 爲此場之相當函數，則曲線積分

$$I=\int[F(x,y,u)-uF'_u(x,y,u)]dx+F'_u(x,y,u)dy \tag{49}$$

沿場內任一閉曲線而計算者爲零．

蓋此積分爲零之條件爲

$$\frac{\partial F}{\partial y}-u\cdot\frac{\partial^2F}{\partial u\,\partial y}-u\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial u^2}=\frac{\partial^2F}{\partial u\,\partial x}+\frac{\partial^2F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

與 (48) 式無異，$u(x, y)$ 既爲 P 場之相當函數，故能合此式．

今將希氏小引應用於 G_0 與 Γ 所成之路線，沿 G_0 者 $u[x, f(x)]=f'(x)$，於是吾人得

$$\int_{G_0}F(x,y,y')dx=\int_\Gamma[F(x,y,u)+(y'-u)F'_u(x,y,u)]dx$$

於是

$$J_{\Gamma}-J_{G_0}=\int_{\Gamma}[F(x,y,y')-F(x,y,u)-(y'-u)F'_u(x,y,u)]dx$$

即

$$(50)\qquad J_{\Gamma}-J_{G_0}=\int_{\Gamma}E(x,y;y',u)dx$$

E 即前所得之魏氏函數也.此式稱為魏氏公式在此式中 y' 代表 Γ 線上切線之角係數,而 $u(x,y)$ 為場內經過 (x,y) 點曲線 G_0 之切線角係數.

充足條件 如以 x,y,p 為自變數之函數 $E(x,y;u,p)$ 在 R_ϵ 區內任一點及於 p 為任何有限值時保持其常號,則 $J_{\Gamma}-J_{G_0}$ 之號亦可決定;u 在 E 函數中代為線場之相當函數 $u(x,y)$. 如 E 恆為正,則有 $J_{\Gamma}>J_{G_0}$ 吾人可得定理如次:

如函數 $E(x,y;u,p)$ 在 R_ϵ 區內任一點 (x,y),又於 p 為任何有限值時為正,則極端線 G_0 可給予 J 一極小值.

欲知此條件適合與否,必須將求出包圍 G_0 線場之相當函數 $u(x,y)$,但亦可另用一條件以代之,較原有條件意義稍狹而於應用則甚便,因可不必求函數 $u(x,y)$ 故也.吾人由戴氏 (Taylor) 公式得

$$(51)\qquad E(x,y;u,p)=\frac{(p-u)^2}{1\cdot 2}F''_{y'^2}[x,y,u+\theta(p-u)]$$

$$=(p-u)^2G(x,y;p)$$

如二次偏引數 $F''_{y'^2}$ 在 R_ϵ 區任一點,又於 p 為任何有限值時為正,則 $E(x,y;u,p)$ 必為正,吾人可由此求出 G_0 能給予 J 一極小值之充足條件.

設 C 爲一閉曲線將 G_0 包含於內,且與 G_0 無交點. C 所界之一部平面成爲 G_0 弧之區域,吾人可選擇 ϵ 甚小,俾 R_ϵ 亦可全含於此區域內. 如是則 C 所界區域可合乎某條件時, R_ϵ 亦可合乎此種同一條件無疑. 設畢,吾人可得定理如次:

如 $F''_{y'^2}$ 在 G_0 之某區域,且於 p 爲任何有限值時爲正,則 G_0 可令 J 爲極小.

蓋 $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)] = R(x)$ 當 x 由 x_0 變至 x_1 時爲正,是勒氏(Legendre)條件爲已合. 原設加氏(Jacobi)條件亦爲已合. 於是吾人可求出一圍繞 G_0 之線場,俾在此場中於 p 爲任何有限值時 E 恆爲正(依 51 式)吾人恆有 $J_{G_0} < J_\Gamma$

但須注意此種條件非必要條件. 蓋 $G(x, y, p)$ 可在 R_ϵ 區內於 p 爲任何有限值時爲正,不必亦有 $F''_{y'^2}(x, y, p)$ 爲正故也.

强性極小與弱性極小 (Minimum Fort et Minimum Faible).

如在 Γ 上以 x 爲橫量之點, y' 之值與 $f'(x)$ 之值極相近,又因 $u(x, y)$ 與 $f'(x)$ 亦相近,故 $u + \theta(y' - u) - f'(x)$ 之值可以甚小,由 (51) 式觀之,則 $E(x, y; u, y')$ 與 $F''_{y'^2}[x, f(x), f'(x)]$ 之號相同,於是吾人對於極端值可區別爲强性與弱性兩種.

設 $\omega(x, \alpha)$ 及其引數 $\omega'(x, \alpha)$ 在 (x_0, x_1) 間隔內爲連續的,而 ω 在界值時,無論 α 何如恆爲零,而當 $\alpha = 0$ 時爲全等式.

吾人謂 $\omega(x, \alpha)$ 爲弱性變分,如其每與一正數 ϵ,吾人能尋出一數 δ 與之相當,俾於 $x_0 \leq x \leq x_1$ 時有

$$(52)\qquad |\omega(x,\alpha)|<\epsilon,\qquad |\omega_x'(x,\alpha)|<\epsilon$$

α之絕對值,則小於δ.如ω只能合乎第一條件,則$\omega(x,\alpha)$稱爲強性變分,亦卽當α趨近於零時,$\omega'(x,\alpha)$不受任何限制也.

吾人以前所用之變分,其形爲$\alpha\eta(x)$者均爲弱性變分$\eta(x)$之形式可以任意.蓋設M爲$\eta(x)$及$\eta'(x)$在(x_0,x_1)間隔內之極大,只須有$M|\alpha|<\epsilon$,則(52)之兩個條件均可合.

反之,變分

$$\omega(x,\alpha)=\alpha\sin\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\alpha^n}\right]$$

中$n>1$爲強性變分,因其引數

$$\omega_x'(x,\alpha)=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cos\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\alpha^n}\right](2x-x_0-x_1)$$

之絕對值於α小於任何正數ρ時,可比任何數爲大故也.

此種區別加以幾何說明,設G與Γ爲方程式

$$y=f(x)$$

$$y=f(x)+\omega(x,\alpha)$$

所代表之曲線,如取此兩線上同橫量x,兩相當點之距離,此距離於$\alpha<\delta$時小於ϵ,卽(52)式之第一條件也.無論變分之性爲強爲弱,此條件皆合.但當$\omega(x,\alpha)$爲弱性變分時,不獨兩相當點之距離爲無窮鄰近.而且此兩點切線所成之角亦爲無窮小,在強性變分則不然,此時兩曲線相當點切線所成之角可不趨近於零

因變分有強弱性之分,吾人對於極小亦可加以此種區別.

吾人謂極端線 G_0 給予積分 J 一個弱性極小,如其有一正數 ϵ 使積分

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]dx$$

小於
$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x)+\omega(x), f'(x)+\omega'(x)]dx$$

$\omega(x)$ 爲 (x_0, x_1) 間隔內之(I)類函數可任爲何種形式,且合下之各條件者,

$$\omega(x_0)=0,\ \omega(x_1)=0,\ |\omega(x)|<\epsilon,\ |\omega'(x)|<\epsilon$$

x 應介乎 x_0 及 x_1 之間.

如最後之一條件未合.吾人謂 G_0 給予積分一個強性極小,審此即易知勒加二氏之條件不足以確定強性極小.因吾人得此二條件時皆根據弱性變分之論也.反之,魏氏條件係根據於強性變分而得.

定理. 凡一極端線弧其合乎勒加二氏條件者,至少可給予積分 J 一個弱性極小.

蓋依假設,函數 $R(x)=F''_{y'^2}[x,f(x),f'(x)]$ 當 x 由 x_0 變至 x_1 時爲正,$F''_{y'^2}$ 又爲連續的,故吾人可求得一正數 δ,俾

$$F''_{y'^2}[x, f(x)+h, f'(x)+k]>0 \qquad \text{當 } x_0 \leqq x \leqq x_1$$

而 h, k 之絕對值則小於 δ,設 Γ 爲 G_0 之隣近曲線,其方程式爲 $y=f(x)+\omega(x)$,在(51)式中 p 應易爲 y',而取

$$u+\theta(y'-u)=u[x,f(x)+\omega(x)]+\theta\{f'(x)+\omega'(x)-u[x,f(x)+\omega(x)]\}$$

因 $u[x.f(x)]=f'(x)$, 此式右端亦可書爲

$$f'(x)+\theta\omega'(x)+(1-\theta)\{u[x,f(x)+\omega(x)]-u[x,f(x)]\}$$

$$=f'(x)+\theta\omega'(x)+(1-\theta)\omega(x)u'_y[x,f(x)+\theta,\omega(x)]$$

設 μ 爲 $|u'_y|$ 在區內之高界, 又取一正數 ϵ, 俾

$$\epsilon(1+\mu)<\delta$$

如 $|\omega(x)|$ 及 $|\omega'(x)|$ 在 (x_0,x_1) 界內均小於 ϵ, 則有

$$|y-f(x)|<\delta, \qquad |u+\theta(y'-u)-f'(x)|<\delta$$

沿 Γ 曲線皆然,於是函數 $E(x,y;y',u)$ 沿此曲線爲正,故 $J_\Gamma-J_{G_0}$ 亦爲正. 卽 J 有一弱性極小.

對於強性極小定理可如是述之.

定理. 凡一極端線弧 G_0 其合乎勒加二氏條件者,能給予積分 J 一個強性極小. 如其引數 $F''_{y'^2}$ 在 G_0 之某區域內, 又於 p 任爲何有限値時恆爲正.

例. 設 $F=y'^2(y'-1)^2$, 則

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=4y'^3-6y'^2+2y'=2y'(y'-1)(2y'-1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=12y'^2-12y'+2=12(y'-m')(y'-m'')$$

m' 介於 0 與 $\frac{1}{2}$ 之間,而 m'' 介於 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間者,此時極端線爲直線,凡一線之角係數爲 m 者屬於一線場爲此線之平行線所組成,相當函數 $u(x,y)$ 之値爲 $u(x,y)=m$. 已與 xy 面上之兩點 A,B, 則 AB 直線爲聯此兩點之唯一極端線, 此線恆合乎

加氏(Jacobi)條件,而勒氏條件必須 m' 或大於大根 m'' 時乃可適合

設 R_e 爲 AB 線之區域,亦卽爲相當函數 $u(x, y)=m$ 所定之線場.

魏氏函數爲

$$E(x, y; m, p)=F(x, y, p)-F(x, y, m)-(p-m)F'_{y'}(x, y, m)$$

$$=(p^4-2p^3+p^2)-(m^4-2m^3+m^2)$$
$$-(p-m)(4m^3-6m^2+2m)$$

$$=p^4-m^4-2(p^3-m^3)+(p^2-m^2)$$
$$-(p-m)(4m^3-6m^2+2m)$$

$$=(p-m)[(p+m)(p^2+m^2)-2(p^2+pm+m^2)$$
$$+p+m-4m^3+6m^2-2m]$$

$$=(p-m)[p^3+p^2(m-2)+p(1-2m+m^2)$$
$$-3m^3+4m^2-m]$$

$$=(p-m)^2[p^2+2p(m-1)+3m^2-4m+1]$$

$$=(p-m)^2[p^2+2p(m-1)+(m-1)(3m-1)]$$

$$=(p-m)^2[(p+m-1)^2+2m(m-1)]$$

如 m 爲負或大於1,則 E 於 p 任爲有限值時均爲正,故得下之結果:

1° 如 $m<0$ 或 $m>1$,則極端線 AB 給予積分 $J=\int_{x_0}^{x_1} y'^2(y'-1)^2 dx$ 一個強性極小,$m=0$ 或 $m=1$ 亦然.因此時 J 爲零,而沿任何曲線經過 A,B 兩點者所計算 J 之值均爲正故也.

2° 如 $0<m<m'$ 或 $m''<m<1$ 則 AB 線給予積分 J 一個弱性極小.

3° 如 $m'\leqq m\leqq m''$, 此時無極端值,因勒氏之條件未滿足故也.

此例爲布爾沙(Bolza)氏所舉.吾人由此可得一極有興趣之注意,即 $F''_{y'^2}=12(y'-m')(y'-m'')$雖不能於 y' 爲任何有限值時爲正.而魏氏函數 $E(x,y,m,y')$ 當 m 爲負或大於零時,卻能於 y' 任爲何有限值時爲正也.故知勒氏條件非強性極小之必要條件也.