算學小叢書

初等代數解析學

斯波勒著
鄭太朴譯

商務印書館發行

算學小叢書

初等代數解析學

斯波勒著
鄭太朴譯

商務印書館發行

目　　次

初等代數解析學

第一章

連分　整數無定方程

第一節　連分

1. 連分 凡分數之分母爲分數，其分母又爲分數，如是輾轉直下者，曰連分，

如
$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4}}}}$$
或
$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}}$$

均是．此中之$\frac{b}{a}$或$\frac{1}{a}$名爲連分之節，其b爲節分子，a爲節分母．本節內所欲論者，爲前二連分中之第二式，其節分子統爲1，節分母則統爲正整數．此項連分之寫法，可稍簡之如下：——

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}$$

或更簡之，作

$$(1:a_1, a_2, a_3, a_4).$$

2. 化尋常分數爲連分法 尋常分數均可化爲連分，其法與求分子及分母之公因子時所用輾轉相除之法無異。例如求$\frac{157}{283}$之連分式，則可用 157 除 283，得 1 餘 126，復以此餘除 157，得 1 餘 31，仍復以此餘 31 除 126，等等，以至於盡，則所得諸商 1，1，4，15，2 即爲所求連分式之節分母。爲明顯計，更列出如下：——

$$\frac{157}{283}=\frac{1}{\frac{283}{157}}=\frac{1}{1+\frac{126}{157}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{157}{126}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{31}{126}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{126}{31}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{2}{31}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\frac{31}{2}}}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}=(1:1,1,4,15,2).$$

3. 化連分爲尋常分數,近似值　求連分之值時,倘祇計其第一節$\frac{1}{a_1}$而將其餘統略去,則所得者爲第一近似值,以$\frac{z_1}{n_1}$表之;如是$\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{a_1}$如將第二節幷計之,則爲第二近似值,以$\frac{z_2}{n_2}$表之,即$\frac{z_2}{n_2}=\frac{a_2}{a_1a_2+1}$.其第三近似值可類推如下:

$$\frac{z_3}{n_3}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_3+a_1},$$

第四等等亦仿此類推。

此諸近似值中,第一過大,因其分母較眞值爲小;第二反之,稍嫌其過小,因$\frac{1}{a_2}>\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots$故第二之分母$a_1+\frac{1}{a_2}$較其眞值爲大,然第三近似值則又過大,而第四則又過小,等等;從可知連分之諸近似值,較眞值過大與過小適相間者。

前已得第一二三近似值,今更列之如下:——

$$\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{a_1},\quad \frac{z_2}{n_2}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}=\frac{a_2}{a_1a_2+1}=\frac{a_2z_1+0}{a_2n_1+1}$$

$$\frac{z_3}{n_3}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}}=\frac{\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)z_1+0}{\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)n_1+1}$$

$$=\frac{a_3a_2z_1+z_1}{a_3(a_2n_1+1)+n_1}=\frac{a_3z_2+z_1}{a_3n_2+n_1},\quad \frac{z_4}{n_4}$$

$$=\frac{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)z_2+z_1}{\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)n_2+n_1}=\frac{a_4(a_3z_2+z_1)+z_2}{a_4(a_3n_2+n_1)+n_2}=\frac{a_4z_3+z_2}{a_4n_3+n_2}.$$

普通可推得第 k 近似值為

$$\frac{z_k}{n_k}=\frac{a_kz_{k-1}+z_{k-2}}{a_kn_{k-1}+n_{k-2}},$$

而如於此式中 a_k 處易以 $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$，則復可得第 $k+1$ 近似值之式：——

$$\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)z_{k-1}+z_{k-2}}{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)n_{k-1}+n_{k-2}}=$$

$$\frac{a_{k+1}(a_kz_{k-1}+z_{k-2})+z_{k-1}}{a_{k+1}(a_kn_{k-1}+n_{k-2})+n_{k-1}}=\frac{a_{k+1}z_k+z_{k-1}}{a_{k+1}n_k+n_{k-1}},$$

故知數學上自 k 推至於 $k+1$ 之論證法，於此亦可用，而前式實爲近似值之公式，任何 $k(>1)$ 均合理.

求連分之近似值時，如添設二虛近似值，$\frac{1}{0}$ 及 $\frac{0}{1}$，則其計算可按圖表而索. 例如求 $(1:2,3,1,4,5,3,2)$ 之諸近似值，可得一圖表如次：——

a	—	—	2	3	1	4	5	3	2
z	1	0	1	3	4	19	99	316	731
n	0	1	2	7	9	43	224	715	1654

於此可見諸近似值之分子 z 及其分母 n，於添設二虛近似值後，即可由節分母 a 乘前 z 及 n 并加其更前 z 及 n 得之：——

z：——　$1=2\cdot0+1$，　$3=3\cdot1+0$，　$4=1\cdot3+1$，

$19=4\cdot4+3$，　………

n：——　$2=2\cdot1+0$，　$7=3\cdot2+1$，　$9=1\cdot7+2$，

$43=4\cdot9+7$，　………

（附註：　數目字與數目字間之點爲乘號，非小數號，以後仿此——小數號則用劈[,]）

而其諸近似值，則如表中所示為

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{19}{43},\quad \frac{99}{224},\quad \frac{316}{715},\quad \frac{731}{1654}.$$

4. 近似值之屬性 由前近似值之式，不難知

$z_2n_1-n_2z_1=-1,\ z_3n_2-z_2n_3=+1,\ z_4n_3-z_3n_4=-1.$

設此式可通用至於 k,

$$z_kn_{k-1}-z_{k-1}n_k=(-1)^{k-1},$$

則即得

$$\begin{aligned} z_{k+1}n_k-z_kn_{k+1}&=(a_{k+1}z_k+z_{k-1})n_k-(a_{k+1}n_k+n_{k-1})z_k\\ &=(-z_kn_{k-1}-z_{k-1}n_k)=(-1)^k, \end{aligned}$$

因知其於 $k+1$ 亦適用．前已知 $k=4$ 無誤，故於 $k=5$ 亦必無誤，如是於 6, 7,…… 均無誤，而 k 為任何數 (>1) 均可用矣．由此即得

$$\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k-1}}{n_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{n_kn_{k-1}},$$

是相繼的二近似值之差，等於此二近似值之分母相乘之倒數也．

前既知連分之諸近似值，較眞值過大過小適相間，而其眞值，則在相繼的二近似值之間． 今設以 q 為連分之眞

值，則$\frac{z_k}{n_k}>q>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$或$\frac{z_k}{n_k}<q<\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$，故若取連分之第 k 近似值以代其眞值時，所差者當小於第 k 及第 $k+1$ 二近似值之差，即小於$\frac{1}{n_k\cdot n_{k+1}}$，而更小於$\frac{1}{{n_k}^2}$．此即是：取連分之第 k 近似值以代其眞值時，所差不及此近似值分母之方之倒數；苟 k 愈大，則 n_k 亦愈大，而眞值與近似值間之差乃愈以微．

設如一分數$\frac{r}{s}$，其值在一連分之相繼的二近似值之間，則此分數之分子與分母，r 及 s 必大於後者之分子與分母．其證如下：——

設 k 爲奇數，則有$\frac{z_k}{n_k}>\frac{r}{s}>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$，

而
$$\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}>\frac{z_k}{n_k}-\frac{r}{s},$$

亦即是$\frac{1}{n_kn_{k+1}}>\frac{z_ks-n_kr}{n_ks}$，或$\frac{1}{n_{k+1}}>\frac{z_ks-n_kr}{s}$.

因$\frac{z_k}{n_k}>\frac{r}{s}$，故$\frac{z_ks-n_kr}{n_ks}>0$，而 $z_ks-n_kr\geqq1$，

於是必有$\frac{1}{n_{k+1}}>\frac{1}{s}$，而 $s>n_{k+1}$. 又$\frac{r}{s}>\frac{z_{k+1}}{n_{k+1}}$，

而 $s>n_{k+1}$，則非 $r>z_{k+1}$ 不可矣．

設 k 爲偶數，則證法須稍改動，惟其理仍如此，故略之．

從可知連分之近似値，其分子分母均爲約盡之最小數，而無可再約之使更簡者也。

5. 化連分爲級數 化連分爲級數之法甚簡，示之如下：——

前已知$\frac{z_1}{n_1}=\frac{1}{n_1}$，$\frac{z_2}{n_2}-\frac{z_1}{n_1}=\frac{-1}{n_1n_2}$，$\frac{z_3}{n_3}-\frac{z_2}{n_2}$

$$=+\frac{1}{n_2n_3},\ \cdots\frac{z_k}{n_k}-\frac{z_{k-1}}{n_{k-1}}=\pm\frac{1}{n_kn_{k-1}}.$$

設$\frac{z_k}{n_k}$爲連分之最後近似値，即其眞値 q，則將前諸式加之，即得所求之級數：——

$$\frac{z_k}{n_k}=q=\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_1n_2}+\frac{1}{n_2n_3}-\frac{1}{n_3n_4}+\cdots\pm\frac{1}{n_{k-1}n_k}.$$

6. 無盡連分及其無理性 連分之節，其數亦可無窮，是曰無盡連分。無盡連分之節分母有如小數之循環者，曰循環連分；此有二，其週期自第一節分母始者，曰純循環連分；反之，至後始有週期者曰雜循環連分。各舉一例如下：——

非循環無盡連分：$(1:1,2,3,5,7,3,1,4,\cdots\cdots)$

雜循環無盡連分：$(1:4,5,\overline{2,3},2,3,2,3,\cdots\cdots)$

純循環無盡連分：$(1:\overline{2,3,5},2,3,5,2,3,5,\cdots)$

循環連分之值，均不難計之。例如求$(1:1,2,1,2,\cdots)$之值，則可設x等於此值，因得方程

$$x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+x$$

解之，即得$x=\sqrt{3}-1$為所求之值。然此為純循環連分，若為雜循環者，則須幷計入不在週期內之各節。設例如下：——

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots=\frac{1}{4+\sqrt{3}-1}=\frac{1}{3+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

凡連分之節分子統為1，其節分母統為正整數者，其值自必小於一。令如設

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{a_r}+\frac{1}{a_{r+1}}+\cdots,\quad \frac{u_1}{v_1}=\frac{1}{a_{r+1}}+\frac{1}{a_{r+2}}+\cdots$$

$$\frac{u_2}{v_2}=\frac{1}{a_{r+2}}+\frac{1}{a_{r+3}}+\cdots$$

則有 $\dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{a_r+\dfrac{u_1}{v_1}}$，$\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{v-ua_r}{u}$，因此式二端之分數均

爲約盡無可再約者，故 $v_1=u$；而由

$$\frac{u_2}{v_2}=\frac{v_1-u_1a_{r+1}}{u_1},$$

復可得 $v_2=u_1$，等等。

於是 $\frac{u}{v}$，$\frac{u_1}{v_1}$，$\frac{u_2}{v_2}$，$\frac{u_3}{v_3}$，……一級數，可易爲

$$\frac{u}{v},\ \frac{u_1}{u},\ \frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2}\cdots\cdots$$

此諸分數之值，均小於一，故得

$$v>u>u_1>u_2>u_3\cdots\cdots\cdots$$

設如無盡連分之值，自某節下計之爲有理數，則 u 與 v 即爲有盡有理數，而 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots$ 乃終逼近於 0，是連分不能無盡而爲有盡矣，此卽違理。故知無盡連分之值，自某節下計之不能爲有理數；而無盡連分本身之值，自亦爲無理者矣。因得：凡無盡連分之值爲無理數。

7. 化平方根爲連分　今設一例，以明若何將平方根化爲連分：平方根 $\sqrt{31}$ 之值在 5 與 6 之間，故必可以 $5+\frac{1}{x_1}$ $\left(\frac{1}{x_1}\right.$ 爲一眞分數，其值小於 $\left.1\right)$ 之式表之。今試將 $\sqrt{31}$ 寫作

$$\sqrt{31}=5+\sqrt{31}-5=5+\frac{\sqrt{31}-5}{1},$$

而以 $\sqrt{31}+5$ 乘加於 5 下之分數，則得

$$\sqrt{31}=5+\frac{6}{\sqrt{31}+5},$$

故知 $\frac{1}{x_1}=\frac{6}{\sqrt{31}+5}$，而

$$x_1=\frac{\sqrt{31}+5}{6}=1+\frac{\sqrt{31}-1}{6}=1+\frac{5}{\sqrt{31}+1}=1+\frac{1}{x_2}.$$

此中 x_2 可仍用此法化之；又，以後所得諸 x，均可一一仿此化出，則得數式如下：——

$$x_2=\frac{\sqrt{31}+1}{5}=1+\frac{\sqrt{31}-4}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{31}+4}=1+\frac{1}{x_3},$$

$$x_3=\frac{\sqrt{31}+4}{3}=3+\frac{\sqrt{31}-5}{3}=3+\frac{2}{\sqrt{31}+5}=3+\frac{1}{x_4},$$

$$x_4=\frac{\sqrt{31}+5}{2}=5+\frac{\sqrt{31}-5}{2}=5+\frac{3}{\sqrt{31}+5}=5+\frac{1}{x_5},$$

$$x_5=\frac{\sqrt{31}+5}{3}=3+\frac{\sqrt{31}-4}{3}=3+\frac{5}{\sqrt{31}+4}=3+\frac{1}{x_6},$$

$$x_6=\frac{\sqrt{31}+4}{5}=1+\frac{\sqrt{31}-1}{5}=1+\frac{6}{\sqrt{31}+1}=1+\frac{1}{x_7},$$

$$x_7=\frac{\sqrt{31}+1}{6}=1+\frac{\sqrt{31}-5}{6}=1+\frac{1}{\sqrt{31}+5}=1+\frac{1}{x_8},$$

$$x_8=\frac{\sqrt{31}+5}{1}=10+\frac{\sqrt{31}-5}{1}=10+\frac{6}{\sqrt{31}+5}=10+\frac{1}{x_1}.$$

由此，即得$\sqrt{31}=5+(1:\overline{1,1,3,5,3,1,1,10},1,1,3,5,\cdots)$

如將此中節分母 10 寫作 $5+5$，則 $\sqrt{31}$ 之連分式即作 $5+(1:1,1,3,5,3,1,1,5+5,1,1,3,5,3\cdots)$，而其週期爲相稱的矣．且於此可見週期之末位(如上例中之 10)，恆爲連分前整數之倍．

凡平方根，如化之爲連分時，則所得即爲此項純循環連分．於解勿氏方程 $x^2-Ay^2=1$(Fermatsche Gleichung)上，此項連分頗有用；今姑不及．

第二節　整數無定方程

1. 整數無定方程之意義　整數無定方程亦稱狄方氏方程(Diophantische Gleichungen)．例如有方程 $3x+2y=7$，於此，其中 x 與 y 均爲未知數，則其解無數；蓋可隨使 x 取一值，y 之值即由之決定，而此二值亦即爲此方程之解；如

$$x=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,$$

$$y=3\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 等等.$$

此無數解中，亦有 x 與 y 之值俱爲整數者. 設若以此爲限，前方程祇求其整數之解，則即名此方程爲整數無定方程. 惟今玆所欲從事者，則於整數中更求其正整數爲解；如上例中 $x=1$, $y=2$ 一解是也.

2. 歐萊氏之解法 設如有一方程 $ax+by=c$，於此，則可假定 a, b, c 爲整數，且無公因子，不則，可先約之使無. 又，a 與 b 亦必爲互質，蓋不則 a 與 b 之公因子亦即爲 c 之因子矣. 凡此均可先假定者.

歐萊氏 (Euler) 解此項方程曾創一法，今舉一例以明之. 設如方程爲 $7x+11y=47$，則

$$x=\frac{47-11y}{7}=6-y+\frac{5-4y}{7}.$$

此即以 7 除 $47-11y$ 而得商 $6-y$ 及餘 $\frac{5-4y}{7}$. 如 x 爲整數，則此餘亦必爲整數；故今即以 z 表之，而得一新方程 $z=\frac{5-4y}{7}$ 即 $7z=5-4y$，或 $4y+7z=5$，於中 z 及 y 之係數較前方程爲小矣. 仿此，再如前之除出，則得

$$y=\frac{5-7z}{4}=1-z+\frac{1-3z}{4}=1-z+u,$$

於此 u 爲餘，亦必爲整數. 由 $u=\frac{1-3z}{4}$，得

$$3z+4u=1,\quad z=\frac{1-4u}{3}=-u+\frac{1-u}{3}.$$

若設 $u=1$，則 $z=-1$，因而 $y=1-z+u=3$，
$x=6-y+z=2$.

觀於此例，可知歐氏之法，先由所設方程得一係數較小之較簡方程，復由此再得一更簡方程，如是至極簡單者，俾一望卽能知當若何卽可使未知數之值爲整者，因而得原方程之解也。

又，上例中若設 $u=4$ 亦可．而如於 $\frac{1-3z}{4}$ 中設 $z=-1$，或使 $y=\frac{5-7z}{4}=1-2z+\frac{1+z}{4}$，以 $z=3$ 或 7，則得結果更爲迅速矣．

方程之一解旣得，其餘卽不難由此求之．設如 $ax+bx=c$ 之一解爲 $x=\alpha$，$y=\beta$，則凡數之作此形式 $x=\alpha+bk$，$y=\beta-ak$（k 爲任何整數）者均爲原方程之解；茍使 k 一一盡取自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 之整數值，則此方程之整數解無遺矣．例如上例方程，凡數之作 $x=2+11k$，$y=3-7k$ 形式者均爲其解；惟若限 x 與 y 之值爲正整數，則必使 k 爲 0，故 2 與 3 實爲惟一之正解也。

3. 用連分之解法　設如方程爲　$ax-by=1$, $a<b$, 則可將$\frac{a}{b}$化爲連分．　而取其次末近似值$\frac{z}{n}$(最末近似值卽眞值$\frac{a}{b}$本身)．　如是則有 $an-bz=\pm1$, 故 x 與 y 必作 $x=+n$, $y=+z$, 或 $x=-n$, $y=-z$.　舉例如下:——

由 $23x-37y=-1$, 得$\frac{23}{37}=(1:1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4)$,其近似值依次爲 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{23}{37}$, 故次末近似值爲 $\frac{5}{8}$, 而由此卽得 $x=8$, $y=5$ 爲其解.

若方程爲 $ax+bx=1$, $a<b$, 則 $x=+n$, 而 $y=-z$, 或 $x=-n$ 而 $y=+z$。

設方程爲 $ax\pm by=c$, 則 $x=nc$, $y=zc$, 符號相當定之。

反之,若以前諸方程中 $a>b$, 自須將$\frac{b}{a}$化爲連分,其餘理均同,惟亦有須更變者.　例如下:——

由 $13x+5y=41$, 得$\frac{5}{13}$之次末近似值$\frac{2}{5}$;

因卽設 $5x+2y=k$, 而與原方程共解之,則得

$$x=82-5k,\quad y=-205+13k.$$

4. 含三未知數之二方程　今設有二方程含三未知數者於此:——

$$ax+by+cz=d,\ a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$

則可先自此二方程中剔去其任何一未知數如 z,而得一含二未知數之方程,如前所論過者. 設解此後得 $x=\alpha+\alpha_1k$, $y=\beta+\beta_1k$, 則卽將此二值代入任何一原方程中,以得一含 z 及 k 二未知數之方程. 依前法求得 z 與 k 之值,則原方程之解得矣. 例如下:——

所設二方程爲:

$$4x+3y+2z=16,\ 5x+6y+7z=38.$$

先剔去 y, 得 $3x-3z=-6$ 或 $x-z=-2$, 因可設 $x=0$, $z=2$, 或較廣 $x=k$, $z=2+k$. 此二值代入原設第一方程,得 $6k+3y=12$, 或 $2k+y=4$. 命 $k=1+u$, 則 $y=2-2u$, 而 $x=1+u$, $z=3+u$. 於是得一表列下:——

$u=$	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6
$x=$	-2	-1	0	2	3	4	5	6	7
$y=$	8	6	4	0	-2	-4	-6	-8	-10
$z=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

若 x, y, z 之值以正者爲限,則祇有 $u=-1$, $u=0$, $u=1$

三值.

5. 一方程中含三未知數者　設方程祇有一，而其中未知數有三，則其解法如下例：——

方程爲　$5x+9y-2z=17$,

故得　$x=\frac{17+2z-9y}{5}=3-y+\frac{2+2z-4y}{5}$

$$=3-y+p,\ 5p=2+z-4y,$$

$$y=\frac{2z+2-5p}{4}=-p+\frac{2+2z-p}{4}=-p+q,$$

$$4q=2+2z-p,\ z=2q-1+\frac{p}{2},\ p=2r,$$

$$z=2q+r-1,\ y=q-2r,\ x=4r-q+3.$$

於此 r 及 q 爲任何整數. 例如設 $q=1$, $r=2$, 則得 $x=10$, $y=-3$, $z=3$ 爲原方程之解.

若此方程之解，以正整數爲限，則尚須考慮. 今先使 q 取負值，而欲 y 之值爲正，則 r 亦須負. 設 $q=0$, 即 $x=4r+3$, $y=-2r$, $z=r-1$, 亦必使 r 爲負而後 y 乃能正. 然如是，則其他二值必均爲負；故知 q 不能取負值，亦不能 $=0$，而必爲正值，乃可得正整數爲解. 實則一觀前所得諸式，即不難知 q 爲正時，任何值均可使 x,

y, z 得正值爲解也.

6. 二次方程含三未知數者 前已略論整數無定方程之一次者;今當一及二次方程,即

$$x^2+y^2=z^2 \text{ 一式.}$$

因 $$x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y),$$

故如設 $$z+y=\frac{m}{n}x,\quad z-y=\frac{n}{m}x,$$

則得 $$z=\frac{m^2+n^2}{2mn}x,\quad y=\frac{m^2-n^2}{2mn}x;$$

而 $$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$

爲其解. 今列表示數值如下:——

$n=$	1	1	1	1	1	2	2
$m=$	2	4	6	8	10	3	5
$x=$	4	8	12	16	20	12	20
$y=$	3	15	35	63	99	5	21
$z=$	5	17	37	65	101	13	29

幾何學上曾證明,凡勾股形之弦,其方等於勾之方加股之方,故此方程之解即可視爲一勾股形三邊之長也.

整數無定方程,本爲數目論範圍中事,非此處所能詳述,本節中祇略示其端倪而已.

第二章

組合論 行列式

第一節 組合論

1. 組合論之內容 有若干物件於此，不問其性質構造，但以種種方法次序結合或排列之，而求其關於此之條理定律，此組合論之所從事者也。所設各物件（以後多用字母或數目字），名爲元素，由此結合或排列成者爲組；例如 abc 爲元素 a, b, c 三者所成之組，4132 爲 1, 2, 3, 4 四元素所成之組等等。

組合論之內容，可別爲三部：變互，狹義的組合，及變化是。以下一一論之。

2. 變互之意義及其數目 "變互" (Permutation) 云者，將所有若干元素，儘可能的次序排列之之謂也。例如有三元素 a, b, c，則其變互爲

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

又如元素有四，1，2，3，4，則得：

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

所得諸組中,其開首一元素相同者,即自成一屬,其中又有開首二元素乃至多元素相同者,則又自成亞屬. 一組中有元素之次序與原設次序相反者謂之"倒,"例如 2413 一組中倒有三,即 21, 41, 43 是. 變互諸元素後所得組之數,謂之變互數,以 P 表之,并於其下註明元素之數目;如前變互三元素,則所得組之數表作 $P(3)$;廣之,如變互 n 元素,則變互數爲 $P(n)$也.

前已列出 1, 2, 3, 4 四元素變互後所得各組,如再添入一元素 5,則自前所得每組,可獲五新組;例如由 3214 可得五新組

53214 35214 32514 32154 32145

(其得之之法可將 5 依次插入原組之前後及中間)是知五元素之變互數,即爲四元素變互數之五倍也. 本此理,

得變互數之值如下:——

$P(1)=1=1!$ $P(2)=1\cdot2=2!$ $P(3)=1\cdot2\cdot3=3!$

$P(4)=4P(3)=1\cdot2\cdot3\cdot4=4!$ $P(5)=5P(4)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$

$=5!$ $P(6)=6P(5)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=6!$

$$P(n)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots n=n!$$

此中符號(!)表連乘之意，如 6! 即 1 乘 2 乘 3 乘 4 等等連乘至 6，$n!$ 即自 1 始連乘至 n 也。

然所設之元素中，亦可有相同者，則其變互數自當別論。今如有六元素於此，其中三者同，例如 1, 1, 1, 2, 3, 4，則可於此三同元素下各作一號以別之，寫作 $1_1, 1_2, 1_3$, 2, 3, 4. 若姑視此 $1_1, 1_2, 1_3$ 三元素爲不同者，則其變互數爲 6! 然如於其中任取一組，例如 $1_2431_121_3$，則此外必尚有五組 $1_1431_221_3$, $1_1431_321_2$, $1_2431_321_1$, $1_3431_121_2$, $1_3431_221_1$ 實與此同者，故其變互數 6! 必以 3! 除之而後可；是即六元素中有三同元素，則其變互數 $P'(6)$ 爲六元素之變互數除以三元素之變互數也: $P'(6)=\frac{6!}{3!}$. 廣之，設 n 元素中有 α 同元素，則其變互數爲 $P'(n)\frac{n!}{\alpha!}$；又如 α 同元素外，尚有 β 其他元素相同，則并以 β 元素之變

互數除之,得 $P'(n)=\dfrac{n!}{\alpha!\beta!}$; 餘可類推.

3. 組之自然次序 設用以變互之元素爲字母或數目字,則所得諸組可依字典上字之先後次序列之,或依數目字之値,是曰組之自然次序,或亦稱字典次序. 蓋元素爲字母時,組猶字而此項次序與字典相同也. 例如有 a,b,c,d,e 五元素,其組依自然次序列之,$abcde$ 爲第一組,$abced$ 爲第二組,$abdce$ 爲第三組,$abdec$ 爲第四組等等;又如由五元素 1, 2, 3, 4, 5 所得諸組之自然次序,則爲 12345, 12354, 12435, 12453, 12534 等等. 倘元素中有相同者,亦可如是列之.

如將變互諸元素所得之組依自然次序列之,并分之爲屬,則其中第幾組作何形式,不難一推而知. 舉例以明之:設有六元素 1, 2, 3, 4, 5, 6, 則共可變互得 $6!(=720)$ 組,今欲知其第 329 組作何形. 元素之數爲六,則屬自亦有六,而每屬各得 120 組;今所求者爲第 329 組,則此組當在第三屬中明矣,因知其開首元素爲 3. 第三屬中首二元素相同之亞屬有五,各含組 24, 第 329 組於第三屬居第 89 位,故知其必在第四亞屬中,而其第二元素爲 5 也.(12456 之第四元素爲 5). 仿此類推,結果得 354612,

卽所求之組.

又如所設七元素 a, b, b, b, c, c, d 中,有 b 爲三複 c 爲重複元素,今欲求其第 367 組,則其法與前略同,不過因元素有相同者,須略改變而已. 於此屬有四,第一屬含 60 組,第二屬 180 組,第三屬 120 組,第四屬 60 ,所求者第 367 組,故在第四屬中,其開首元素爲 d. 第四屬有亞屬三,第一亞屬含 10 組,第二含 30 組,第三 20 組; 所求之組於第四屬中居第七位,故在第一亞屬中,因而其次元素爲 a. 仿此可推知其後各元素,得所求之組爲 $dacbbbc$

反之,今有任何一組 $dafbec$ 於此,欲知其在自然次序中居第幾位 (原設元素爲 a, b, c, d, e, f),則可反其道推之,卽不難知其爲第 380 位矣. 如元素中有重複,則相當的稍加改變,理固同也. 玆從略.

4. 狹義的組合 將若干元素每幾個結合之爲一組,謂之組合. 如 a, b, c, d 四元素,可作種種組合如下:——

第一種: $a, b, c, d,$

第二種: $ab, ac, ad, bc, bd, cd,$

第三種: $abc, abd, acd, bcd,$

第四種: $abcd.$

是知四元素組合時，若各元素獨爲一組，則得四組，若每二元素爲一組，則得六組，每三元素爲一組，卽得四組，四元素爲一組自祇能有一組矣．　以後凡各元素獨成一組者，曰第一種組合，二元素成一組者，曰第二種組合，餘第三第四第五等種組合，其義遵此．　各種組合所得組之數目，曰組合數，以 C 表之，幷於右角上設指數，明其爲第幾種者，兼用括號附以元素之數目，俾一覽瞭然．　如 $C^r(n)$ 卽表 n 元素之第 r 種組合之組合數也．

今設有六元素於此，1, 2, 3, 4, 5, 6. 其第一種組合卽爲六元素之原來狀態，組合數係六．　如將此每組與其餘五元素相結合，則得 $6\cdot5$ 卽 30 組，組各二元素．　又將此項組各與其所未具之餘四元素結合，則得三元素結成之組，其數共 $6\cdot5\cdot4=120$；仿此，仍將此項組各與其組中所未具之三餘元素相結合，則得 $6\cdot5\cdot4\cdot3$ 由四元素合成之組，等等．　然所得之各種組中，均有重複者在內，其數卽爲變互數，故若欲得第幾種組合之組合數，須以該變互數除之；如求六元素第二種組合之組合數，則前所得之 $6\cdot5$ 以 $2!$ 除之卽得．　因得各組合數如下：——

$$C^1(6)=\frac{6}{1}=\binom{6}{1}=6,$$

$$C^2(6)=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=\binom{6}{2}=15,$$

$$C^3(6)=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=\binom{6}{3}=20,$$

$$C^4(6)=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\binom{6}{4}=15,$$

$$C^5(6)=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\binom{6}{5}=6,$$

$$C^6(6)=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\binom{6}{6}=1.$$

此中$\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$等等,係略號,以後頗用之.若廣此理,則可知 n 元素第 r 種組合之組合數爲

$$C^r(n)=\binom{n}{r}.$$

若將元素結合爲組時,許組中可有重複元素,則所得組合數自與前不同.　如四元素 1, 2, 3, 4 之第三種組合,若許組中得有複元素,則得 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344,444. 試於各組之首元素加 0, 次元素加 1, 末元素加 2, 則各首元素之値不變,次元素之値大 1, 末元素之値大 2, 而以前諸組變爲

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456. 此則卽是

六元素之第三種組合也． 從可知四元素之第三種組合，若許各組有複元素時，則其組合數等於六元素之第三種組合；許組中有複元素之組合，其組合數以別於前之組中無複元素者，可以 W 表之，則有

$$W^3(4)=\binom{4+2}{3}=\binom{6}{3}=20.$$

廣此理，n 元素之第 r 種組合，許各組有複元素時卽得組合數：

$$W^r(n)=\binom{n+r-1}{r}.$$

5. 變化 如有六元素於此，每三元素結之爲一組，則如前已論過，共可得 $6\cdot5\cdot4=120$ 組． 此諸組中亦有相同者；惟論其元素，則相同組元素之次序均異，故求其組合數時，雖當以變互數除之，然若視元素次序異之組爲亦可計入者，則組之數目爲 $6\cdot5\cdot4$; 此數目名爲六元素第三種變化之變化數，仿前寫作 $V^3(6)=6\cdot5\cdot4=120$． 廣之，n 元素第 r 種變化之變化數卽爲

$$V^r(n)=n\cdot(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}=r!\ C^r(n).$$

各種變化之組，亦可其中有複元素者，則變化數可如下求之：n 元素之第一種變化，其變化數爲 n; 將此各組與

n 元素一一結合，即得第二種變化，組中亦可有複元素者，其數為 n^2；仍將此項組一一與 n 元素結合，得第三種變化之組，其數為 n^3；仿此，可知 n 元素之第 r 種變化，各組中許可有複元素者，其數為 n^r.

6. **二項式係數之屬性**　初等代數學上曾證明

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+b^n,$$

而名此式為二項式。觀於前，可知二項式右端之項，自第二以下，其係數實即為組合數。若更設 $\binom{n}{0}=1$，則即得

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{n}b^n$$

而此中 $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$.

設 $a=b=1$，則前式即作

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

$$+\cdots\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n};$$

如 $a=1,\ b=-1$，則得

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+$$

$$\cdots\cdots\pm\binom{n}{n-1}\mp\binom{n}{n}.$$

因 $$\binom{n+1}{r}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

卽有 $$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$$

以及 $$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

$$\binom{n-1}{r}=\binom{n-2}{r}+\binom{n-2}{r-1}\text{等等.}$$

於是得

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\cdots\cdots+\binom{r-1}{r-1}.$$

又按二項式，$(x+1)^{\alpha}=x^{\alpha}+\binom{\alpha}{1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{2}x^{\alpha-2}$

$$+(1+x)^{\beta}=1+\binom{\beta}{1}x+\binom{\beta}{2}x^{2}+\cdots\cdots,$$

相乘卽得：

$$(1+x)^{\alpha+\beta}=1+\binom{\alpha+\beta}{1}x+\binom{\alpha+\beta}{2}x^{2}+\cdots\cdots+\binom{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$$

$$x^{\alpha+\beta}=\left[1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots\right]\left[x^\beta+\binom{\beta}{1}x^{\beta-1}\right.$$
$$\left.+\binom{\beta}{2}x^{\beta-2}+\cdots\right]$$

此方程中 x 乘方之係數自必相等，故可得種種組合數之式，例如

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta}=1+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{2}+\binom{\alpha}{3}\binom{\beta}{3}$$
$$+\cdots\binom{\alpha}{\alpha}\binom{\beta}{\beta}(\alpha<\beta)$$

由此卽可得

$$\binom{2\alpha}{\alpha}=1+\binom{\alpha}{1}^2+\binom{\alpha}{2}^2+\cdots\binom{\alpha}{\alpha}^2,$$

$$\binom{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}=\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{0}+\binom{\alpha}{\gamma+1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{\gamma+2}\binom{\beta}{2}$$
$$+\binom{\alpha}{\gamma+3}\binom{\beta}{3}+\cdots,\ \binom{\alpha+\beta}{\gamma}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{\gamma}$$
$$+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{\gamma-1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{\gamma-2}$$
$$+\cdots+\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{0}.$$

第二節 行列式

1. 行列式之意義 設有十六數目於此：——

a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4,

試將其每四個相乘爲一乘積，於中既須 a, b, c, d 均具備指數 1, 2, 3, 4 亦不得有重複，則共可得乘積 24 個；蓋如第一乘積爲 $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$，則其餘乘積均可變互其指數以得之，四元素之變互數爲 24，因知乘積之數同此。倘各乘積均給以一定符號，依次爲正負，并加之爲總，則得：

$$
\begin{aligned}
&a_1b_2c_3d_4-a_1b_2c_4d_3+a_1b_3c_4d_2-a_1b_3c_2d_4\\
&+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2+a_2b_4c_3d_1-a_2b_4c_1d_3\\
&+a_2b_3c_1d_4-a_2b_3c_4d_1+a_2b_1c_4d_3-a_2b_1c_3d_4\\
&+a_3b_1c_2d_4-a_3b_1c_4d_2+a_3b_2c_4d_1-a_3b_2c_1d_4\\
&+a_3b_4c_1d_2-a_3b_4c_2d_1+a_4b_3c_2d_1-a_4b_3c_1d_2\\
&+a_4b_2c_1d_3-a_4c_2c_3d_1+a_4b_1c_3d_2-a_4b_1c_2d_3
\end{aligned}
$$

此項乘積之總，尋常以符號

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4
\end{vmatrix}
$$

表之，名爲行列式，a, b, c, d 爲其元素。於此元素之數共十六，普通則爲 n^2. 行列式亦有簡寫作 Δ 或$(a\ b\ c\ d)$者，今總列之如下：——

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \Delta = (a\ b\ c\ d) = \Sigma \pm a_i b_j c_l d_m$$

又,此中四元素 a, 四元素 b 等橫列者名爲行列式之行,其縱而指數相同之每四元素,則名爲列. 此行列式之行與列各四,故卽名爲第四次行列式,其他次數仿此類推.

2. 各乘積之符號 各乘積之符號,或正或負,其定之之法如下: 試仍以前第四次行列式爲例, 其第一乘積 $a_1\,b_2\,c_3\,d_4$ 之指數,次序作 1234, 與原次序同,故此乘積卽名爲主要乘積,而其餘各乘積之指數次序,均由此變互得者. 主要乘積之指數,次序與原來同, 作 1234, 故於此無有倒(參觀本章第一節 2), 其餘各乘積之指數次序則均含有倒,其數爲偶爲奇不等. 各乘積符號之或正或負卽定於此:凡乘積之指數,其次序所含之倒爲偶數者則此乘積之號爲正;反之,卽爲負. 例如 $a_2\,b_3\,c_1\,d_4$ 之指數其次序作 2314, 含 21, 31 二倒,故此乘積得正號;又如 $a_3b_1c_4d_2$ 之指數次序爲 3142, 含三倒 31, 32, 42, 故其號爲負. 元素較多之行列式, 其法亦同; 第一乘積之指數爲自然次

序，故即爲主要乘積，以後則視其指數之如何入序，計其倒之爲偶爲奇，分別給以正負號而已。

設行列式爲奇次者，則其各乘積之指數次序可輪換之，所有倒之爲偶爲奇不因之變動，故其符號亦不受影響。例如 $a_2b_1c_3$ 之指數次序爲 213，試輪換之作 132，又輪換之得 321，此三者中之倒，均係奇數，故 $a_2b_1c_3$，$a_1b_3c_2$，$a_3b_2c_1$ 三乘積之號同爲負。反是，行列式之爲偶次者，即不能將其乘積之指數輪換其次序，不則符號隨之變矣。如 $a_1b_2c_3d_4$ 一乘積，換輪其指數次序，則依次得正負乘積如下：——

$-a_2b_3c_4d_1+a_3b_4c_1d_2$ 等等。

3. 第三次行列式算法 第三次行列式之算法尤易，今示之如下：將行列式列出

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

先自 a_1 起向右斜下依對角線方向取元素作乘積，得 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$；繼仍自 a_1 起，向左斜下取元素作乘積（或自 a_3 起向左亦可），則得 $-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$.

其總卽行列式之值也．　示例於下：——

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot9\cdot25+4\cdot16\cdot9+9\cdot4\cdot16-1\cdot16\cdot16-4\cdot4\cdot25$$
$$-9\cdot9\cdot9=-8.$$

4. 行列式之互換　由行列式之意義，已不難知倘將各行與各列互換，則其值不變；例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

仿此，如將行列式中之二行互換其地位，則行列式之值其符號變，二列相換亦如之．

例如：——
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 12 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

如行列式中有二行或二列相同，則此二行或二列互換時，行列式之值不變，然依前條則互換時值之符號有變，

今符號變而值仍未變，惟 0 爲然，故行列式中有二行或二列相同者，其值必爲 0. 例如:——

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 11 & 6 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

又如行列式中有二行或二列祇差一因子，卽一行或一列爲他行或列之倍數，則此行列式之値亦爲 0; 蓋此因子卽爲行列式之因子，可將其剔出，則行列式有二行或列相同而値爲 0 矣.

5. 行列式相加 設有次數相同之二行列式，其所有行或列除一而外餘均相同，則可將此二不同之行或列逐元素相加，得一新行或列，餘者仍之，則所得之行列式，卽原二行列式之和也; 例如下:——

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

相減之理亦同，可依此類推.

由此，幷前所得理，可知一行列式中某行或某列之各元素，加減以他行或他列之各元素之倍數時，其值不變。

例證如次：——

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+1 & 2+4 & 9+3 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$

行列式中有一行或一列，其元素係其他行或列之元素之倍數之和，則此行列式爲 0. 例證：

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 + \mu a_3 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 + \mu b_3 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_2 + \mu c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & b_2 & b_3 \\ \lambda c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu a_3 & a_2 & a_3 \\ \mu b_3 & b_2 & b_3 \\ \mu c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

行列式之次數，幷可依前所得理使其減小，舉例如下：

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (4-1\cdot4) & (8-4\cdot2) & (12-4-8) \\ 2 & (0-2\cdot4) & (1-0\cdot2) & (3-0-1) \\ 5 & (2-5\cdot4) & (1-2\cdot2) & (2-2-1) \\ 3 & (1-3\cdot4) & (4-1\cdot2) & (3-1-4) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & 2 \\ 5 & -18 & -3 & -1 \\ 3 & -11 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ -18 & -3 & -1 \\ -11 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 18 & -3 & -1 \\ 11 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

6. 亞行列式　設將一行列式去其若干行并列，則得一次數較小之新行列式，是曰亞行列式．例如由

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

可得數亞行列式如下：——

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_2 & d_2 & b_2 \\ c_3 & d_3 & b_3 \\ c_4 & d_4 & b_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

行列式中所去之行與列，有相交元素，例如爲 a_1，則所得之亞行列式名爲屬於此元素者，可以相當之希臘字母表之，如屬於 a_1 之亞行列式作 α_1，屬於 c_3 者作 γ_3 等等．而原行列式之値即爲此項亞行列式與各該元素相乘之總：

$$\Delta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots$$

或

$$\Delta = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 + \cdots$$

例如：——

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

又本以前所得之理，不難知：

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \cdots = 0.$$

而如前例之行列式，則

$$a_2\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_3\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

所須注意者，於此 a, b, c，字母之次序不可有倒，b 後必繼以 c，c 後則爲 a；其指數之次序亦如之．

7. 行列式相乘 行列式之次數如前已示,可以減小,反之,自亦可以增大;簡單之例如下:——

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

將行列式之次數減小或增大之,於行列式之相乘上頗關重要,蓋凡次數不同之二行列式,欲相乘得其積,則必先將二者化為同次者而後可.同次之行列式乘法如下:例如二二次行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{及} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \text{相乘得} \begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & c\alpha+d\beta \\ a\gamma+b\delta & c\gamma+d\delta \end{vmatrix};$$

可如下證之:——

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & c\alpha+d\beta \\ a\gamma+b\delta & c\gamma+d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha & c\alpha+d\beta \\ a\gamma & c\gamma+a\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & c\alpha+d\beta \\ b\delta & c\gamma+d\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha & c\alpha \\ a\gamma & c\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\alpha & d\beta \\ a\gamma & d\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & c\alpha \\ b\delta & c\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & d\beta \\ b\delta & d\delta \end{vmatrix}$$

$$= 0 + ad\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} - bc\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} + 0 = (ad-bc)\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

仿此可證得 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

餘次數較高者亦可類推.

8. 行列式之應用於一次方程　倘有三一次方程於此，共含二未知數:

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

則可將首二方程解之,得

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

將此二值代入第三方程得

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

此即是
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

故知以前三方程若能同時成立，則此行列式必爲 0 而後可.

設有三方程含三未知數:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

仿前可得一行列式:——

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1z+d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2z+d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3z+d_3 \end{vmatrix}=0,$$

或
$$z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

由此即得

$$z=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$x=-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$y=-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

今幷設例明之:—

$$3x+5y-13=0,$$

$$2x+3z-11=0,$$

$$2y-\ \ z-\ \ 1=0;$$

$$x=-\begin{vmatrix} -13 & 5 & 0 \\ -11 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 : -8 = 1$$

$$y=-\begin{vmatrix} 3 & -13 & 0 \\ 2 & -11 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 : -8 = 2$$

$$z=-\begin{vmatrix}3&5&-13\\2&0&-11\\0&2&-1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&5&0\\2&0&3\\0&2&-1\end{vmatrix}=-24:-8=3$$

如有四方程含三未知數，則必以下行列式爲零，而後乃能同時成立：——

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\a_4&b_4&c_4&d_4\end{vmatrix}=0.$$

第三章

高等算術級數

擬形數 插入法

第一節　高等算術級數

1.　高等算術級數之由來，差級數　設於

$$y_x = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

一式內之 x 處依次代人 0, 1, 2, 3,…… 等值或依次代入一第一次算術級數之諸項，則得諸值如下：

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots\cdots$$

是爲一第 n 次算術級數．此級數內相繼二項之差，例如 $y_{p+1} - y_p$ 可以表 Δy_p 表之，則得

$$\Delta y_p = a_0[(p+1)^n - p^n] + a_1[(p+1)^{n-1} - p^{n-1}] + \cdots\cdots$$

試將此中 $(p+1)$ 之諸乘方展開之，則因 p 之 n 次方 p^n 適相消，故此式內最高乘方爲 p^{n-1}，而其式當

作　　$$\Delta y_p = a_0'p^{n-1} + a_1'p^{n-2} + \cdots + a'_{n-1}.$$

若此處 p 仍依次給以 0, 1, 2,…… 諸值，即得

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \cdots\cdots$$

此爲前級數之差級數，乃一第 $(n-1)$ 次算術級數也．仿此，若此級數相繼二項之差以 $\Delta^2 y$ 表之，卽可得一第二差級數：

$$\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3, \cdots\cdots$$

亦卽是一第 $(n-2)$ 次算術級數．由此再作其第三差級數等等，直至最末差級數爲一第一次算術級數而後止．例如有一第三次算術級數：

$$1 \quad 3 \quad 19 \quad 61 \quad 141 \quad 271 \quad \cdots\cdots$$

則其第一差級數爲：

$$2 \quad 16 \quad 42 \quad 80 \quad 130 \quad \cdots\cdots$$

第二差級數：　14　26　38　50　62　$\cdots\cdots$

乃第一次算術級數也．

2.　項之普通式測定法　設有一高等算術級數於此，欲知其各項之普通式爲何，則可先作出其差級數，以定此級數之次數，因得其普通項

$$y_x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

於此式內依次將 x 易以 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 等值，而與原級數之各項相較，卽可測定 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 等各係數，而普通式得

矣.舉例如下:——

設有級數 1 3 11 31 69 131 223…. 試作其差級數,

得 2 8 20 38 62 92 ………

6 12 18 24 30 ………

此第二差級數已爲第一次算術級數,故知原級數爲第三次者,而其項之普通式當作

$$y_x = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

於此式內 x 處依次代入 0, 1, 2, 3; 卽得:

$$y_0 = 1 = a_3,\ y_1 = 3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y_2 = 11 = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$y_3 = 31 = 27a_0 + 9a_1 + 3a_2 + a_3,$$

由此四方程卽可測定 $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$, 而普通式爲

$$y_x = x^3 + x + 1.$$

然用此法以測定項之普通式,有時頗感不便;數學家牛頓曾得有一公式,今述之如下:—

因

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0, \cdots\cdots\cdots$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1, \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1, \cdots\cdots\cdots$$

$y_3=y_2+\Delta y_2, \Delta y_3=\Delta y_2+\Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3=\Delta^2 y_2+\Delta^3 y_2, \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故得

$y_0=y_0$

$y_1=y_0+\Delta y_0$

$y_2=y_1+\Delta y_1=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0$

$y_3=y_2+\Delta y_2=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0$

$y_4=y_3+\Delta y_3=y_0+4\Delta y_0+6\Delta^2 y_0+4\Delta^3 y_0+\Delta^4 y_0$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

廣之，得

$$y_x=y_0+\binom{x}{1}\Delta y_0+\binom{x}{2}\Delta^2 y_0+\binom{x}{3}\Delta^3 y_0+\cdots\cdots$$

用此式於前例，即得：

$$y_x=1+\binom{x}{1}2+\binom{x}{2}6+\binom{x}{3}6=1+x+x^3$$

3. **和之求法** 由以前所述，可知設 y_0 至 y_x 諸項之和爲 S_x，而使 x 之值依次變動時，則由諸 S_x 所成之級數，其次數較原級數高一，而原級數即爲其第一差級數. 因得：

$$S_x=\binom{x+1}{1}y_0+\binom{x+1}{2}\Delta y_0+\binom{x+1}{3}\Delta^2 y_0+\cdots\cdots$$

他方面，設原級數爲 n 次者，則由諸 S_x 所成之級數爲 $(n+1)$ 次，而其普通項必作：

$$S_x = A_0x^{n+1} + {}'_1x^n + \cdots + A_{n+1}.$$

例:——設有第三次級數 0 1 8 27 64 125 ····欲求其總和式，可設

$$S_x = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$$

而於此式內 x 處依次代入 0, 1, 2, 3, 4 諸值，得

$$S_0 = 0 = A_4,\ S_1 = 1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$S_2 = 9 = 16A_0 + 8A_1 + 4A_2 + 2A_3 + A_4$$

$$S_3 = 36 = 81A_0 + 27A_1 + 9A_2 + 3A_3 + A_4$$

$$S_4 = 100 = 256A_0 + 64A_1 + 16A_2 + 4A_3 + A_4.$$

因知 $A_0 = \frac{1}{4}, A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{4}\ A_3 = 0, A_4 = 0$, 而

$$S_x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$= \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2.$$

4. 末差，二級數各項相乘 前已知

$$\Delta y_x = a_0[(x+1)^n - x^n] + a_1[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}] + \cdots\cdots\cdots$$

或 $\Delta y_x = na_0x^{n-1} + a_1'x^{n-2} + a_2'x^{n-3} + \cdots$

倣此，可知

$$\Delta^2 y_x = a_0 n(n-1)x^{n-2} + a_1'' x^{n-3} + \cdots,$$

$$\Delta^3 y_x = a_0 n(n-1)(n-2)x^{n-3} + a_1''' x^{n-4} + \cdots,$$

$$\Delta^4 y_x = a_0 n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3} + a_1^{\text{IV}} x^{n-5} + \cdots$$

....

$$\Delta^{n-1} y_x = n!\, a_0 x + a$$

$$\Delta^n y_x = n!\, a_0.$$

此中 $\Delta^n y_x$ 可名之爲末差，則知此末差爲二因子所成，一爲 y_x 中最高 x 乘方之係數 a_0，一則爲 $n!$ 也．由此，故凡次數相同之級數，其普通項中此係數相同者，末差亦必相同．

自然數目(卽 0, 1, 2, 3, 4……)之 n 次乘方爲一第 n 次算術級數，其末差爲 $n!$．例如各平方數爲一第 2 次級數，末差爲 $2!$，等等．

設於 y_x 中 x 處代入一其他級數之普通項 $y_x' = b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots$ 其末差 $p!b_0$ 以 d_1 表之，則得一新級數，其普通項作：—

$$y_x'' = a_0(b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots)^n + a_1(b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots)^{n-1} + \cdots$$

$$= a_0 b_0^n x^{np} + c_1 x^{np-1} + \cdots$$

倘原級數之末差爲 d，則此新級數之末差爲

$$D=(np)!\ a_0b^n=\frac{(np)!}{n!\,(p)!^n}dd_1{}^n.$$

由此可知 $\frac{(np)!}{n!\,(p!)^n}$ 爲一整數.

又如將原級數之各項，與第二級數之相當各項相乘，則亦得一新級數，其普通項爲

$$z_x=y_xy_x{}'=a_0b_0x^{n+p}+c_1x^{n+p-1}+\cdots\cdots$$

其末差作 $D'=(n+p)!\,a_0b_0=\frac{(n+p)!}{n!\,p!}dd_1.$

故知將一第 n 次級數與一第 p 次者逐相當項相乘時，則得一第 $(n+p)$ 次級數.

5.　自然數目之乘方之和，柏氏數　自然數目 0, 1, 2, 3,⋯⋯之平方爲

$$0\quad 1\quad 4\quad 9\quad 16\quad 25\quad \cdots\cdots$$

第一差級數：$1\quad 3\quad 5\quad 7\quad \cdots\cdots$

第二差級數：$2\quad 2\quad 2\quad \cdots\cdots$

故　$S(x^2)=\binom{x+1}{1}0+1\binom{x+1}{2}+2\binom{x+1}{3}$

$$=\frac{x(x+1)(2x+1)}{3!}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{6}x.$$

其三方為 0　1　8　27　64　125　....

第一差級數：1　7　19　37　61　....

第二差級數：6　12　18　24　....

第三差級數：6　6　6　....

故

$$S(x^3)=0\binom{x+1}{1}+1\binom{x+1}{2}+6\binom{x+1}{3}+6\binom{x+1}{4}$$

$$=\frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{\binom{3}{1}}{2}\frac{1}{6}x^2.$$

倣此，可得：

$$S(x^4)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{\binom{4}{1}}{2}\frac{1}{6}x^3-\frac{\binom{4}{3}}{4}\frac{1}{30}x,$$

$$S(x^5)=\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{2}+\frac{\binom{5}{1}}{2}\frac{1}{6}x^4-\frac{\binom{5}{3}}{4}\frac{1}{30}x^2,$$

$$S(x^6)=\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{2}+\frac{\binom{6}{1}}{2}\frac{1}{6}x^5-\frac{\binom{6}{3}}{4}\frac{1}{30}x^3$$

$$+\frac{\binom{6}{5}}{6}\frac{1}{42}x,$$

$$S(x^7)=\frac{x^8}{8}+\frac{x^7}{2}+\frac{\binom{7}{1}}{2}\frac{1}{6}x^6-\frac{\binom{7}{3}}{4}\frac{1}{30}x^4$$

$$+\frac{\binom{7}{5}}{6}\frac{1}{42}x^2,$$

$$S(x^8)=\frac{x^9}{9}+\frac{x^8}{2}+\frac{\binom{8}{1}}{2}\frac{1}{6}x^7-\frac{\binom{8}{3}}{1}\frac{1}{30}x^5$$

$$+\frac{\binom{8}{5}}{6}\frac{1}{42}x^3-\frac{\binom{8}{7}}{8}\frac{1}{30}x.$$

廣之,得

$$S(x^n)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{2}+\frac{\binom{n}{1}}{2}B_1x^{n-1}-\frac{\binom{n}{3}}{4}B_2x^{n-3}+\cdots\cdot$$

此中 $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$, $B_4=\frac{1}{30}$ 等等,名爲柏氏數,因其首見於十八世紀數學家柏諾利 (Jacob Bernoulli) 之著作中.

今設於 $S(x^n)$ 式中 x 處代入 1, 則 $S(x^n)=1$, 因得

$$1=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{\binom{n}{1}}{2}B_1-\frac{\binom{n}{3}}{4}B_2+\frac{\binom{n}{5}}{6}B_3-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於此使 n 依次取 2, 4, 6, 8⋯⋯諸值, 即能由之以計算柏氏數. 除前已得者外, 并可得:

$$B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730},\ B^7=\frac{7}{6},\ B_8=\frac{3617}{510},$$

$$B_9 = \frac{43867}{798}, \quad B_{10} = \frac{174611}{330}.$$

此項柏氏數於數學中頗多應用，高等代數學，解析學，或然算法等方面均用之.

又，以前所得諸式，可應用於求任何級數之和. 例如有一級數，其普通項作 $y_x = 3x^3 + 2x^2 + x - 1$，則其總和式卽作

$$S_x = 3S(x^3) + 2S(x^2) + S(x) - S(x^0) = \frac{3}{4}x^2(x+1)$$

$$+ \frac{2}{6}x(x+1)(2x+1) + \frac{x(x+1)}{2}(x+1) =$$

$$\frac{3}{4}x^4 + \frac{13}{6}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1.$$

6. $\lim S(x^n) : x^{n+1} = 1 : (1+n) \quad (x = \infty)$

前已知

$$S(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \cdots$$

今試用 x^{n+1} 除其兩端，卽得：

$$\frac{S(x^n)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x^2} + \cdots$$

故若 $x = \infty$，則

$$\lim \frac{S(x^n)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

此式尋常頗有用處，十七世紀時數學家多已用之，故特一及.

7. 算術級數與二項式係數 第一次算術級數之相繼三項間，有此關係：——

$$y_p-2y_{p+1}+y_{p+2}=0.$$

但第二次算術級數之第一差級數，爲第一次算術級數，故其相繼三項間亦必

$$\Delta y_p-2\Delta y_{p+1}+y_{p+2}=0,$$

或因 $\Delta y_p=y_{p+1}-y_p$，故

$$y_p-3y_{p+1}+3y_{p+2}-y_{p+3}=0.$$

此爲第二次算術級數之相繼四項間之關係. 本此理，第三次算術級數相繼五項間即有

$$y_p-4y_{p+1}+6y_{p+2}-4y_{p+3}+y_{p+4}=0.$$

廣之，第 q 次算術級數相繼 $q+2$ 項間，必

$$y_p-\binom{q+1}{1}y_{p+1}+\binom{q+1}{2}y_{p+2}+\cdots$$

$$\pm\binom{q+1}{q+1}y_{p+q+1}=0.$$

又，如前所示，於第三次算術級數：

$$y_p-4y_{p+1}+6y_{p+2}-4y_{p+3}+y_{p+4}=0,$$

他方面幷:

$$-y_{p+1}+4y_{p+2}-6y_{p+3}+4y_{p+4}-y_{p+5}=0$$

相加得

$$y_p-5y_{p+1}+10y_{p+2}-10_{p+3}+5y_{p+4}-y_{+5}=0$$

由此復可得

$$y_h-6y_{p+1}+15y_{p+2}-20_{p+3}+15y_{p+4}$$
$$-6y_{p+5}+y_{p+6}=0$$

或廣之得第 n 次算術級數者如下:

$$\binom{q}{0}y_p-\binom{q}{1}y_{p+1}+\binom{q}{2}y_{p+2}-\binom{q}{3}y_{p+3}+\cdots$$
$$\pm\binom{q}{q}y_{p+q}=0$$

於此 $q>n$.

倘所論算術級數係自然數之乘方, 則

$$\binom{q}{0}1^n-\binom{q}{1}2^n+\binom{q}{2}3^n-\cdots\pm\binom{q}{q}(q+1)^n=0,$$

較廣:

$$\binom{q}{0}a^n=\binom{q}{1}(a+1)^n+\binom{q}{2}(a+2)^n-\cdots$$
$$\pm\binom{q}{q}(a+q)^n=0$$

又，
$$\Delta y_p = y_{p+1} - y_p,$$
$$\Delta^2 y_p = y_{p+2} - 2y_{p+1} + y_p$$
$$\Delta^3 y_p = y_{p+3} - 3y_{p+2} + 3y_{p+1} - y_p,$$

廣之，

$$\Delta^q y_h = y_{p+q} - \binom{q}{1} y_{p+q-1} + \binom{q}{2} y_{p+q-2} - \cdots \pm x_p.$$

設算術級數爲自然數之平方，$1^q, 2^q, 3^q, \cdots$

則 $\Delta^p y_p = q!$，因得：

$$\pm q! = 1^q - \binom{q}{1} 2^q + \binom{q}{2} 3^q - \cdots \pm (q+1)^q,$$

$q!$ 之正負號隨 q 爲偶或奇用之.

第二節 擬形數

1. 擬形數之由來 令有級數

$$1 \quad d \quad d \quad d \quad d \cdots\cdots$$

試求其各總和 Sx，并將此項總和亦列爲級數，則依次得：

(I)	1	$1+d$	$1+2d$	$1+3d$	$1+4d$	$\cdots$
(II)	1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$	$\cdots$
(III)	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$	$\cdots$
(IV)	1	$4+d$	$10+5d$	$20+15d$	$35+35d$	$\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

試於 (II) 中 d 處依次代入 0, 1, 2, 3, 等值, 則有以下各級數:

1	2	3	4	5	6…………(自然數目)
1	3	6	10		15…………(三角形數)
1	4	9	16		25…………(平方數)
1	5	12	22		35…………(五角形數)
1	6	15	28		45…………(六角形數)

……………………………………………………

此項數目總名爲多角形數.

同此, 設於 (III) 中 d 依次代入 1, 2, 3, …, 則有以下諸級數, 總名爲棱錐形數:

1	4	10	20	35…………(三棱錐形數)
1	5	14	30	55…………(四棱錐形數)
1	6	18	40	75…………(五棱錐形數)

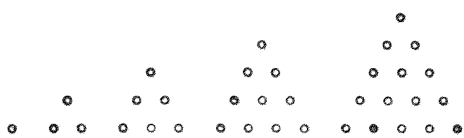
……………………………………………………

又如於 (I), (II), (III) 等等級數內 d 處代入 0, 則得各級數, 是爲擬形數之正則者:

1	1	1	1	1	1……(第一次擬形數)	
1	2	3	4	5		6……(第二次擬形數)

1	3	6	10	15	21	……(第三次擬形數)
1	4	10	20	35	56	……(第四次擬形數)
1	5	15	35	70	126	……(第五次擬形數)

2. 多角形數 今如用點以作大小各三角形，則所用之點數即前所示之三角形數:



倣此，如用點作大小平方形，或五角形，六角形等，則所用點數即爲平方形數，五角形數，六角形數等等.

前級數(II)內，其項之普通式實爲

$y_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$. 今若以 F_r^n 表多角形數，於此指數 r 表其角數，則

$$F_3^n=\binom{n+1}{2},$$

$$F_4^n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2=n^2,$$

$$F_5^n=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}3=\frac{n(3n-1)}{2},$$

$$F_6^n = n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}4 = n(2n-1),$$

....

此中三角形數尤有數特別屬性如下

a. 二相繼三角形數之平方之和，仍為一三角形數.

$$(F_3^n)^2 + (F_3^{n+1})^2 = F_3^{(n+1)^2}.$$

證：
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+2n+1)(n^2+2n+2)}{2}.$$

b. $2r$ 個相繼三角形數之平方之和必可以其他 r 個三角形數之和表之. 此即推廣前理，故不再寫出其算式及證.

c. 二相繼三角形數之平方之差，為一立方：

$$(F_3^{n+1})^2 - (F_3^n)^2 = (n+1)^3.$$

d. 自然數目之三方之和必為一三角形數之平方：

$$1^3 + 2^3 + \cdots + r^3 = \frac{r^2(r+1)^2}{4} = (F_3^r)^2.$$

3. 棱錐形數 設將球或彈堆積為有法棱錐形，則所用球或彈之數即為棱錐形數. 如 n 棱之棱錐形數以 P_n 表之，則得

$$P_n^x = \binom{x+1}{2} + \binom{x+1}{3}(n-2)$$

此式不難自前面直接推得，其用法如下：如求五棱錐形數中之第四數，則於前式中 n 處代以 5, x 處代以 4 即得：

$$P_5{}^4=\binom{5}{2}+\binom{5}{3}3=40.$$

4. 正則擬形數 各次正則擬形數，如視之爲級數，則得各總和式如下：

(第一次者) $S_1=n$

(第二次者) $S_2=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots\binom{n}{1}$

$$=\binom{n+1}{2}$$

(第三次者) $S_3=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots\binom{n}{2}$

$$=\binom{n+1}{3}$$

(第四次者) $S_4=\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\cdots\binom{n}{3}$

$$=\binom{n+1}{4}$$

廣之，第 $(r+1)$ 次者即爲

$$S_{r+1}=\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}$$

$$=\binom{n+1}{r+1}$$

第三節 插入法

1. 函數 今有方程 $y=ax^2+bx+c$. 於中若使 $x=0$, 則 $y=c$; 若使 $x=1$, 則 $y=a+b+c$; $x=2$, 則 $y=4a+2b+c$; 等等. 簡言之, x 任取一值, y 之値即隨之決定; 此項關係, 是曰函數關係, x 與 y 均名爲變數, x 爲自變數, y 爲依變數. 此例內 x 爲自變數. y 爲依變數, y 之値爲 x 所決定, 故亦稱"y 爲 x 之函數,"而用 $y=f(x)$ 表之, 此中 f 表函數, 用括號附 x 於其後, 所以表明爲 x 之函數也. 以後凡用類此算式者, 意義均同, 如 $y=F(x)$, $y=g(x)$ 均表 y 爲 x 之函數, 而 $y=f(z)$ 或 $y=h(z)$,則表 y 爲 z 之函數.

$y=f(x)$ 爲一切"y 爲 x 之函數"之總寫法, 故前方程 $y=ax^2+bx+c$ 亦可用之:

$$y=f(x)=ax^2+bx+c.$$

若使 x 取某值, 則函數號下之 x 亦可以此值代之; 例如 $x=1$, 則 $y=f(1)=a+b+c$, 等等.

函數式內自變數亦可多於一, 例如 $z=f(x, y)$ 或 $y=f(x, t)$ 卽爲二自變數之函數關係, 前者表 z 爲 x 與 y 之函數, 後者表 y 爲 x 與 t 之函數.

倘函數內所有加，減，乘，除之次數有限，則此函數爲有理者. 若函數內變數幷無有相除，卽爲整函數，否則爲分函數. 例如

$$y=(ax+b)(cz+d) \text{ 及 } y=ax^2+2bx+c$$

均爲整有理函數，而

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad y=\frac{a}{x}.$$

則爲分有理函數也.

整有理函數中變數次數最大至 n 者，卽名此函數曰 n 次函數. 如

$$y=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+r,$$

$$y=ax^n+bx^{n-1}z\cdots\cdots+r$$

均是.

如函數中兼有含根數之項，若 $\sqrt{x}$ 等，則此函數卽爲無理者. 其他含有 $\log x$, $\sin x$, $\cos a$, e^x 等之函數，名爲超絕函數.

2. 插入法之意義 由函數之已知若干值，推求其餘諸值，或求得此函數之式，是曰插入法. 例如有函數 $y=f(x)$，尚未知其作何式，但知當 $x=x_0$ 時，$y=y_0$；$x=x_1$ 時，$y=$

y_1; $x=x_3$ 時, $y=y_3$, 等等, 今欲由此以推求如 $x=x_i$ (x_i 爲在前數值中間之任何一值) 時, 函數 y 當取何值, 或求此函數之詳寫法, 此卽插入法所有事也.

3. 算術級數方面之插入法 設有一算術級數, 其普通項作

$$y_x=y_0+\binom{x}{1}\Delta y_0+\binom{x}{2}\Delta^2 y_0+\cdots\cdots$$

今欲於其每二項間插入 n 項, 則其法可使前式中 x 逐取 $0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \cdots\cdots 1, \frac{n+2}{n+1}\cdots\cdots$ 諸值, 所得級數卽已經插入者也.

若設 $x=\frac{z}{n+1}$, 則此新級數之普通項作

$$y_x=y_0+\binom{\frac{z}{n+1}}{1}\Delta y_0+\binom{\frac{z}{n+1}}{2}\Delta^2 y_0+\cdots\cdots\cdots$$

$$=y_0+\frac{z}{n+1}\,\frac{\Delta y_0}{1!}+\frac{z(z-n-1)}{(n+1)^2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{2!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z(z-n-1)(z-2n-2)}{(n+1)^3}\,\frac{\Delta^3 y_0}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

例如有第二次算術級數 4, 7, 12⋯, 其普通項作

$$y_x=4+\binom{x}{1}3+\binom{x}{2}2.$$

若於此級數之每二項間插入二項，則得新級數 $4, 4\frac{7}{9}, 5\frac{7}{9}, 7, 8\frac{4}{9}, 10\frac{1}{9}, \cdots$，其普通項作

$$y_z=4+\frac{z}{3}3+\frac{z(z-3)}{9}\frac{2}{2!}=4+z+\frac{1}{9}z(z-3).$$

設有一函數，其自變數所取各值成一第一次算術級數，$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$，則依變數之相當諸值，$y_0, y_1, y_2, y_3\cdots$亦爲一算術級數，其次數可假定之爲 n，而其普通項作：

$$y_z=y_0+\binom{z}{1}\Delta y_0+\binom{z}{2}\Delta^2 y_0+\binom{z}{3}\Delta^3 y_0+\cdots$$

但 $x_1=x_0+\Delta x, x_2=x_0+2\Delta x, \cdots\cdots x_p=x_0+p\Delta x=x_1+(p-1)\Delta x=x_2+(p-2)\Delta x=\cdots$，故得

$$p=\frac{x_p-x_0}{\Delta x},\ p-1=\frac{x_p-x_1}{\Delta x},\ p-2=\frac{x_p-x_2}{\Delta x},\cdots$$

於前式內 z 處易以 p，同時幷使 $x_p=x$，則得

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{x-x_0}{1}\frac{x-x_1}{2}\frac{\Delta^2 y_0}{(\Delta x)^2}+\frac{x-x_0}{1}\frac{x-x_1}{2}\frac{x-x_2}{3}\frac{\Delta^3 y_0}{(\Delta x)^3}+\cdots$$

是卽插入式也．舉例以明其用如下：——

設已知 103, 104, 105 及 106 之對數，今欲求 104, 5 之

對數. 因得表如下:——

x	y	Δy
103	log 103 = 2, 012837225	
		4196114
104	log 104 = 2, 017033339	
		4155960
105	log 105 = 2, 021189299	
		4116566
106	log 106 = 2, 025305865	

$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−40154	
	760
−39394	

此於 $x-x_0=1,5$; $x-x_1=,5$; $x-x_2=-0,5$; $x-x_3=-1,5$, 故由前式得

$$y=y_0+\frac{3}{2}\Delta y_0+\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2}-\frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}\,\frac{\Delta^3 y_0}{1\cdot 2\cdot 3}=$$

$$2,012837225+0,006294171-0,000015058$$

$$-0,000000048=2,019116296.$$

4. 拉氏插入式 今欲求一函數式, 其自變數 x 取 x_0, $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ 諸值時, 依變數即須相當的取 $y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$ 諸值; 則此所求之式, 必爲

$$y=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0+$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1+$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}+\cdots+$$

$$\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})}.$$

此問題首爲數學家拉格冷氏 (Lagrange) 所解決, 前式卽得自彼, 故名之爲拉氏插入式. 例如欲求一函數式 $y=f(x)$, 當 $x=-1$ 時, $y=0$; $x=0$ 時, $y=-1$; $x=1$ 時, $y=1$, 則此所求者依拉氏式卽爲

$$y=-1\frac{(x+1)(x-1)}{1\cdot(-1)}+1\frac{(x+1)x}{(1+1)\cdot 1}=x^2-1+\frac{1}{2}(x^2+x)$$

$$=\frac{1}{2}(3x^2+x-2).$$

5. 牛頓插入式 前所舉拉氏插入式, 其理固甚明顯, 然應用頗感不便, 以計算良繁也. 另有牛頓 (Newton) 一式, 應用時可按式索取, 不若前此之繁, 今述之於下:

$$\frac{x-x_2}{x_0-x_2}=\frac{x-x_0}{x_0-x_2}+1;$$

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0-x_2}\right)$$

$$=\frac{x-x_1}{x_0-x}+\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_0}{x_0-x_2}$$

$$=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_0}{x_0-x_2}.$$

仿此，$\dfrac{x-x_3}{x_0-x_3}=1+\dfrac{x-x_0}{x_0-x_3}$;

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}=$$

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}+\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3}=$$

$$1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_0-x_3};$$

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}=1+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_3};$$

$$\frac{x-x_3}{x_2-x_3}=1+\frac{x-x_2}{x_2-x_2};$$ 等等.

將此諸式代入前拉氏式內，即得

$$y=\left(1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_2}+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_3}\right)y_0$$

$$+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\left(1+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}+\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_3}\right)y_1$$

$$+\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(1+\frac{x-x_2}{x_2-x_3}\right)y_2+\cdots,$$

或 $$y=y_0+(x-x_0)\left\{\frac{y_0}{x_0-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_0}\right\}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)\left\{\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right.$$

$$+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\Bigg\}$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\Bigg\{\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\Bigg\}+\cdots$$

簡寫之，作

$$y=y_0+A_0(x-x_0)+A_1(x-x_0)(x-x_1)$$

$$+A_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots$$

此中 $A_0=\frac{y_0}{x_0-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$;

而如設 $B_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ C_0=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\ D_0=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3},$

等等，以及設 $B_1=\frac{C_0-B_0}{x_3-x_1},\ C_1=\frac{D_0-C_0}{x_4-x_2},$

$D_1=\frac{E_0-D_0}{x_5-x_3},\cdots$ 等等，則

$A_1=\frac{B_0-A_0}{x_2-x_0},\ A_2=\frac{B_1-A_1}{x_3-x_1},A_3=\frac{B_2-A_2}{x_4-x_0},$

等等，餘均可仿此類推.

例如已知 sin 24°, sin 42°2′, sin 42°3′, 及 sin 42°5′, sin 42°6, 之值，今欲由此以推知 sin 42°4′ 之值，則可得表如下 (用百分法計):

x	y
$x_0 = 42°$	$y_0 = \sin x_0 = ,612907053653$
$x_1 = 42°2'$	$y_1 = \sin x_1 = ,613155257923$
$x_2 = 42°3'$	$y_2 = \sin x_2 = ,613279337366$
$x_3 = 42°5'$	$y_3 = \sin x_3 = ,613527450853$
$x_4 = 42°6'$	$y_4 = \sin x_4 = ,613651484891$

$A_0 = ,000124102135$; $A_1 = -,000000007564$;

$B_0 = ,000124079443$; $B_1 = -,000000007566_3$;

$C_0 = ,000124056744$; $C_1 = -,000000007568_7$;

$D_0 = ,000124034038$;

$A_2 = -0_5$; $B_2 = -0_5$; $A_3 = 0$.

故得 $\sin 42°4' = 0,612907053653 + 4.0,000124102$
$135 - 4.2.0,000000007564 - 4.2.1.0_5$
$= 0,613403401677$.

第四章

無窮級數

第一節　有和可求之級數　無窮級數之收斂性與發散性

1.　有和可求之級數　級數之有和可求者，前已屢見不鮮，前章所述諸算術級數均是．又如

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots+(2x-1)(2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(2x-1)(2x+1)(2x+3),$$

亦爲一有和可求之級數．此外則幾何級數，如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n},$$

亦然．但除算術級數及幾何級數外，尚不少其他級數有和可求者．今設有一級數：

$$a+b+c+\cdots+r$$

由此級數可作一新者：

$$(a-b)+(b-c)+\cdots+(q-r),$$

其和爲 $a-p$．例如由

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n},$$

作一新級數:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n};$$

但 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;等等,

故得

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}. \qquad \text{(I)}$$

用 2 乘此級數, 得

$$\frac{1}{\binom{2}{2}}+\frac{1}{\binom{3}{2}}+\frac{1}{\binom{4}{2}}+\cdots+\frac{1}{\binom{n}{2}}=$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{2}{(n-1)n}=\frac{2(n-1)}{n}. \qquad \text{(II)}$$

此卽爲由三角形數之倒數所成之級數之和也.

今如用 4 以除級數 (I), 則得

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n-2)}=\frac{n-1}{4n},$$

或

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots\frac{1}{(2n-1)^2-1}$$

$$=\frac{n-1}{4n}. \qquad \text{(III)}$$

復次，$\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots\cdots$

$$+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

以 2 除之，得

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \tag{IV}$$

若用 6 乘此級數，則所得者卽由棱錐形數之倒數所成級數之和也.

$$\frac{1}{\binom{3}{3}}+\frac{1}{\binom{4}{3}}+\frac{1}{\binom{5}{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\binom{n+2}{3}}=\frac{3n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

仿此幷可得：

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

由 $a+b+c+d+\cdots\cdots+t$，幷可作出一新級數：

$$(a-c)+(b-d)+(c-e)+\cdots\cdots+(r-t)=a+b-s-t.$$

例如由 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$

可得：$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

用2除此級數，卽有：

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \qquad \text{(V)}$$

或 $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

級數亦可由一變數 x 之乘方所成者，如

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^{n-1}.$$

今設命其和爲 S，并以 $(x-1)$ 乘之，得

$$(x-1)S=-1+\frac{1}{1\cdot2}x+\frac{1}{2\cdot3}x^2+\frac{1}{3\cdot4}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n-1)}x^{n-1}+\frac{1}{n}x^n.$$

於此內設 $x=1$，卽有

$$1=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n},$$

此卽前所得級數(1)也。

如用 (x^2-1) 乘最初之級數，然後使 $x=1$ 及 $x=-1$，則得：

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n-2)}=\frac{(3n-1)(n-2)}{4n(n-1)},$$

以及
$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}-\cdots\pm\frac{1}{n(n-2)}$$

$$=\frac{1}{4}\pm\left(\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2n}\right) \qquad \text{(VI)}$$

又如用 $(2x-1)$ 乘而使 $x=\frac{1}{2}$，卽有

$$\frac{3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{8}+\cdots+\frac{n}{(n-2)(n-1)}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=1-\frac{1}{(n-1)2^{n-2}} \qquad \text{(VII)}$$

仿此，幷可用 x^2-3x+2 以乘而使 x 等於方程 $x^2-3x+2=0$ 之根，則所得者亦爲一新級數。

2. 無窮級數及其他級數之有和可求者

前已知

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{n},$$

若使此中 $n=\infty$，卽引長此級數至無窮，則得一無窮級

數，其和爲 1，因 $\frac{1}{n}$ 當 $n=\infty$ 時即爲零也；仿此，如將前所言級數(II)(III)引長爲無窮者，即得

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots=2;$$

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots\cdots=\frac{1}{4}.$$

又因

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1+\frac{3}{n}}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

設 $n=\infty$，即 $=\frac{1}{4}$，故(IV)爲無窮級數時，即有

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots=\frac{1}{4}.$$

餘可類推，茲從略。

設第 k 次擬形數中第 n 個以 $f_n{}^k$ 表之，並將 n 個 k 次擬形數作爲級數，而逐項以相當的 x 之乘方乘之，則得一級數，其和爲 $S_n{}^k$:

$$1+f_2{}^kx+f_3{}^kx^2+f_4{}^kx^3+\cdots\cdots+f_n{}^kx^{n-1}=S_n{}^k.$$

用 $1-x$ 乘之，得

$$\begin{aligned}S_n{}^k(1-x)&=1+(f_2{}^k-1)x+(f_3{}^k-f_2{}^k)x^2+\cdots\cdots\\&=1+f_2{}^{k-1}x+f_3{}^{k-1}x^2+f_4{}^{k-1}x^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$+f_n^{k-1}x^{n-1}-f_n^k x^n=S_n^{k-1}-f_n^k x^n.$$

因 $$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1},$$

故 $$S_n^2=1+2x+3x+\cdots+nx^{n-1}=$$

$$\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}=\frac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(x-1)^2};$$

$$S_n^3=1+3x+6x^2+\cdots+\binom{n+1}{2}x^{n-1}$$

$$=\left[\frac{1-x^n}{(1-x)^3}\right]-\frac{nx^n}{(1-x)^2}-\binom{n+1}{2}\frac{x^n}{1-x};$$

$$S_n^4=1+4x+10x^2+\cdots+\binom{n+2}{3}x^{n-1}$$

$$=\frac{1-x^n}{(1-x)^4}-\binom{n}{1}\frac{x^n}{(1-x)^3}-\binom{n+1}{2}\frac{x^n}{(1-x)^2}$$

$$-\binom{n+2}{3}\frac{x^n}{1-x}.$$

3.　無窮級數之收斂性與散發性　級數之項多至無窮者,是曰無窮級數;前已屢示其例,今當稍詳論之.

如前所示例,無窮級數亦有有和可求者,惟其和之値是近似値而已.若所取級數之項愈多,則其和之値亦愈近於眞.此項無窮級數,其和與一有盡數相逼近者,名爲收斂的,亦曰此級數向一有盡値收斂.反之,無窮級數

之和不向一有盡值相逼近，而其本身亦爲無窮者，此級數即爲散發的。例如前所示

$$\lim\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\right)=1,$$

即一收斂級數，此中 lim 一號爲拉丁字 limes 之略，義爲極限，所以示此級數之和之極限爲 1，而所得者係近似值也。又如

$$1+2+4+8+16+\cdots$$

一無窮級數，其和亦爲無窮大，故此級數爲散發者。

無窮級數除收斂及散發者外，尚有所謂搖擺者。搖擺級數之和，無有一定值可言，隨所取項之數而異其所逼近之值。例如

$$2-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}-1\frac{1}{8}+1\frac{1}{16}-\cdots,$$

一級數，若所取項數爲偶，則其近似值爲$\frac{2}{3}$，若取奇數，則即爲 $1\frac{2}{3}$，是此級數之近似值搖擺於$\frac{2}{3}$及 $1\frac{2}{3}$ 之間也。

今再示數收斂及散發級數於後：——

(1) 幾何級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

於 $x<1$ 爲收斂者，其和 $S=\frac{1}{1-x}$； 若 $x=1$ 或 >1，即

散發

(2) 由自然數目之倒數所成無窮級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

名為調和級數,係散發者;證之如後:

將此級數寫作

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

因諸括弧中所包數大於

$$2\cdot\frac{1}{4},\ \ 4\cdot\frac{1}{8},\ \ 8\cdot\frac{1}{16},\cdots,$$

即各括弧均大於$\frac{1}{2}$,故此級數亦即大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

後者顯然係一無窮級數之散發者,調和級數之值更大於此,自必亦散發矣。

(3) 不特由自然數目之倒數所成級數係散發者,即由第一次算術級數之倒數所成者亦然。 例如

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}+\frac{1}{a+3d}+\cdots$$

一級數，於中若 $a>d$，則可於 d 處易以 a，而得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\cdots\cdots=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\right)$$

其散發性不難見矣.

4. 級數之項正負相間者　收歛級數之値爲有盡者，故級數收歛之第一條件，必至少自某項以下，其項之値逐逐減小，極限爲零，不則項之數旣無窮，級數之値自難有盡也．故得：一級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots$$

有收歛性之第一條件，必 $\lim u_n=0(n=\infty)$.

然僅此條件，尙未足決定級數之收歛性，例如前所述調和級數實已滿足此條件，但仍非收歛者．惟若級數之項正負相間，則祇須此條件滿足，便可決定其收歛性；證之如下：

正負項相間之級數，其形式作

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$$

或　$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots$$

因此級數之項逐減小其値，故括弧中値均爲正者.

設 S 爲級數之値，則必 $S>0$．今試將級數寫作

$$u_1-\{(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots\cdots\},$$

則又可知 $S<u_1$; 此卽是

$$u_1>S>0,$$

故級數之值爲一有盡者也.

設該級數首 n 項之值爲 S_n, 其餘自 $n+1$ 項以下之值命之爲 R:

$$R=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots,$$

則以前證法可仍用於 R, 而知 $R<u_{n+1}$.

因 $S-S_n=R$, 故 $S-S_n<u_{n+1}$; 此卽是:設取該級數之首 n 項而略其餘,則所得值與眞值之差小於其第 $n+1$ 項之值也. 例如取

$$\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\cdots$$

之首五項計之,得 $S_5=0,4$; 此值雖過大,然與眞值之差,則小於 $\frac{1}{6\cdot7}=0{,}023\cdots$, 而眞值則在 $0{,}377\cdots$ 與 $0{,}4$ 之間.

5.　級數之項盡爲正者　無窮級數之收斂性或散發性,殊無普通方法可以一審卽定之. 今將通常所用審查法略述一二於後.

設有一級數其項統爲正者:

$$V=v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots$$

自某項以下，此級數之項統小於一其他級數

$$U=u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots$$

之相當各項，例如 $v_r<u_r$ 等等，則如 U 為收歛級數時 V 亦必收歛．反之，若自某項以下，統為 $v_r>u_r$，而 U 為散發者，則 V 亦散發．此種方法，名為比較法，苟已知一級數之收歛或散發，則欲審查一其他級數時，即以之與此已知者相較，其為收歛與否不難決定矣．

設如一級數

$$U=u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots,$$

至少自某項以下 $u_{n+1}:u_n\leqq\varepsilon$，於此 ε 為一小數 <1 者，則此級數必收歛．蓋由 $u_{n+1}:u_n\leqq\varepsilon$，可知 $u_{n+1}\leqq\varepsilon\cdot u_n$，$u_{n+2}\leqq\varepsilon\cdot u_{n+1}<\varepsilon^2\cdot u_n$，$u_{n+3}\leqq\varepsilon^3\cdot u_n$，等等，

故 $\lim(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots)\leqq\varepsilon u_n+\varepsilon^2u_n+\varepsilon^3u+\cdots\cdots$，

或 $\lim(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots)\leqq u_n(\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots\cdots)$

$$\leqq u_n\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

此即級數之值有盡也．

反之，設 $\varepsilon>1$ 而 $u_{n+1}:u_n\geqq\varepsilon$，則此級數即散發；其理自明，不待再證．

例如
$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{2\cdot3}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\frac{x^3}{4\cdot5}+\cdots$$

一級數，其 $u_{n+1}:u_n=\dfrac{x(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=x\cdot\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$;

若 $n=\infty$，卽 $=x$. 故此級數於 $x<1$ 收斂，而於 $x>1$ 散發也。

然若 $\lim u_{n+1}:u_n=1$, 則前法卽不能用。 例如

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

一級數，其

$$\lim u_{n+1}:u_n=\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$$

倘 $n=\infty$，卽 $=1$. 欲探知此級數之爲收斂與否，可用前所述之比較法，將此級數與

$$1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$$

相比較。 後一級數已知其爲收斂者，其值爲 2; 而前一級數之項則均小於或等於後一級數之相當項，以是知前一級數亦必收斂，而其值在 2 與 0 之間。 事實上，此級數之值爲 $\dfrac{\pi^2}{6}$.

今有級數

$$S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots$$

設 $m=1$, 則卽是調和級數，前已知其散發．設 $m<1$, 例如 $m=\frac{1}{2}$, 則得

$$S_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots\cdots$$

此級數各項(除第一項) 均大於調和級數之相當項，故必散發．

今如 $k>1$, 則

$$\frac{1}{(k+1)^m} + \frac{1}{(k+2)^m} + \frac{1}{(k+3)^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k+k)^m}$$

$$< k \cdot \frac{1}{k^m}, \text{ 卽 } < \frac{1}{k^{m-1}}.$$

故 $S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \left(\frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m}\right) + \left(\frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m}\right) + \cdots\cdots$

$$< 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \cdots\cdots$$

後一級數於 $m>1$ 收歛，故 S_m 於 $m>1$ 亦必收歛．

又於此級數　　$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m}{(n+1)^m}$

$$=\frac{n^m}{n^m+m\cdot n^{n-1}+\binom{m}{2}n^{m-2}+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{m}{n}+\binom{m}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots}$$

若 n 之值極大，則此式中分母自三項以下均可略去，而得 $\dfrac{1}{1+\frac{m}{n}}$。今設 $\frac{m}{n}=\alpha$, $m=n\cdot\alpha$, 則可得：

設級數之 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}$, 於此 α 當 n 無限大時逼近於零，則此級數之爲收斂或散發隨 $n\cdot\alpha>1$ 或 $n\cdot\alpha<1$ 而定.

例如級數

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{21}+\cdots\cdots$$

之普通項作 $\dfrac{1}{n^2+n+1}$, 故

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2+(n+1)+1}=\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{-2}{(n^2+n+1)n}}=\frac{1}{1+\frac{2}{n}}$$

於此 α 爲 $\frac{2}{n}$, $n\alpha=2$, 故此級數收斂.

如級數之 $n\cdot a=1$, 則此法又不足以決定其收歛或散發，是須再用他法以審之。

第二節 不定係數法 級數之反

1. 不定係數法 倘一函數 y 可用一乘方級數以表之，則祇能有一級數，絕不能再有一其他級數可同樣表此函數者。 蓋如有二級數，而當 $x=0$ 時此二級數均收歛，則

由 $$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots$$

得 $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$$

於此設 $x=0$, 卽得 $a_0=b_0$; 由

$$a_1+a_2x+\cdots\cdots=b_1+b_2x+\cdots\cdots$$

幷可得 $a_1=b_1, a_2=b_2$, 等等，此卽二級數係相同者.

此理旣知乃可將函數化爲級數。例如有 $y=\dfrac{1}{1-2x+x^2}$ 一函數，今欲化之爲級數，則可假定所化得者作

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots,$$

因得 $$\frac{1}{1-x+x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$$

或 $$1=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

$$-2a_0x-2a_1x^2-2a_2x^3-\cdots$$

$$+a_0x^2+a_1x^3+a_2x^4+\cdots$$

將此式中 x 之同次乘方之係數相等，卽可得

$$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=5,\ 等等;$$

故　$$y=\frac{1}{1-2x+x^2}=1+2x+3x^2+4x^3\cdots$$

而　$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}x=\left(1+\frac{1}{n}\right)x=x\quad(n=\infty),$$

從可知 $x<1$ 時，此式可用。

用此法將一函數展爲乘方級數時，先不定其係數，嗣將函數展出後再由比較以定之，故名曰不定係數法。惟所得級數必須在收斂範圍內始可用耳。

2. 級數之反　設有一級數 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$，今欲由之得一相反者 $x=A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots$，此法名求級數之反。

例：有級數

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots \tag{I}$$

($x^2<1$ 於收斂)，今欲求其反。若假定其反作

$$x=A_0+A_1y+A_2y^2+\cdots \tag{II}$$

則於 $x=0,\ y=0$ 時，即 $A_0=0,$

因而 $x=A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots\cdots$

將此 x 之値代入(I)中，即得

$$y=A_1y+A_2y^2+\cdots+\frac{1}{2}(A_1y+A_2y^2+\cdots)^2$$

$$+\frac{1}{3}(A_1y+A_2y^2+\cdots)^3+\cdots$$

$$=A_1y+(A_2+\frac{1}{2}A_1{}^2)y^2+(A_3+\frac{1}{2}2A_1A_2+\frac{1}{3}A_1{}^3)y^3$$

$$+(A_4+\frac{1}{2}[2A\cdot A_3+A_2{}^2]+\frac{1}{3}3A_1{}^2A_2+\frac{1}{4}A_1{}^4y^4+\cdots$$

由此，故可得

$$A_1=1;A_2=-\frac{1}{2}A_1{}^2=-\frac{1}{2};\ A_3=-A_1A_2-\frac{1}{3}A_1{}^3$$

$$=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!};\ A_4=-\frac{1}{4!};\ \text{等等}.$$

而 $x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+\cdots$

此級數於任何 y 均收斂.

第三節　二項級數

1. 二項式之指數爲負整數及分數者 前已知

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots$$

此中 n 若為負整數，則其係數

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \cdots$$

即多至無窮；蓋因

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k},$$

若 n 為正整數則 $\binom{n}{n}=1$，以下諸係數均為零，若 n 為負整數則以下係數無有為零者，故可繼續至無窮。設 n 為正或負之分數，則其係數亦可繼續至無窮，絕無有等於 0 之時，其理同前。故凡二項式之指數非正整數者，展開時即得一無窮級數，例如

$$(1+x)^{-n}=\frac{1}{(1+x)^n}=\binom{-n}{0}+\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^2+\cdots,$$

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+\binom{\frac{m}{n}}{1}x+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^2+\binom{\frac{m}{n}}{3}x^3+\cdots,$$

$$(1+x)^{-\frac{m}{n}}=1+\binom{-\frac{m}{n}}{1}x+\binom{-\frac{m}{n}}{2}x^2+\binom{-\frac{m}{n}}{3}x^3+\cdots$$

均為無窮級數也.

2. 二項級數之收斂與散發 由負指數或分指數的二項式所展成之級數,曰二項級數. 其收斂與散發不難知之:因

$$\binom{m}{n+1}=\binom{m}{n}\frac{m-n}{n+1},$$

故 $(1+x)^m$ 之級數,其

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n}{n+1}x=-\frac{1-\dfrac{m}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}x=-x\ (n=\infty),$$

因知二項級數當 x 之值(不問其號爲正爲負)小於 1 時,均收斂.

若 $x=+1$, 則

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{n-m}{n+1}$$

倘 n 充分大時,此式即得負值,即是級數之項正負相間也;故若 $\lim u_{n+1}:u_n$ 之值小於 1, 或 $n-m<n+1$ 時,級數即收斂. 因得:若 $x=1$, 則二項級數祇於 $m>-1$ 時方收斂.

又設 $x=-1$, 則得

$$\lim \frac{n_{n+1}}{n_n} = \frac{n-m}{n+1} = \frac{1}{1+a},$$

此中 $a = \dfrac{m+1}{n-m}$, $n \cdot a = \dfrac{n}{n-m}(m+1) = m+1 (n=\infty)$,

故若 m 限於負整數或分數，級數即散發。

以上研究，其理不難移用於由 $(a \pm b)^n$ 所成之級數，故從略.

3. 化根數爲無窮級數法　用前式即不難將根數化爲無窮級數，然後由此計其値。舉例如下：

$$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = \sqrt{49\left(1+\frac{1}{49}\right)} = 7\left(1+\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 7\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{49^3} - \cdots\right)$$

$$= 7.07106781187.$$

又如 $\sqrt{7}$ 固可化之作 $\sqrt{9-2} = \sqrt{9\left(1-\frac{2}{9}\right)} = 3\left(1-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$,

然所得級數收斂不甚速，故可設法另化之，作

$$\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{63} = \frac{1}{3}\sqrt{64-1} = \frac{1}{3}\sqrt{64\left(1-\frac{1}{64}\right)}$$

$$= \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}},$$

庶所得級數收斂甚速。

次數高的根據，均可仿此法化之，例如：

$$\sqrt[3]{3}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{27-3}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}},$$

等等.

第四節　指數及對數之級數

1. 訥氏對數底之值　照二項式:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\binom{m}{1}\frac{1}{m}+\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}+\cdots$$

$$=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!\,m^3}+\cdots$$

$$=1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!}+1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!}+\cdots$$

倘 $m=\infty$, 卽得

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

$$=2,718281828459\cdots$$

此數向以 e 表之,名曰納氏對數底或自然對數底,於數學上應用極大.

設如 e 爲一有理數,則必可用一分數表之;例如 $e=\frac{r}{s}$.

用 $s!$ 乘

$$\frac{r}{s}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

卽得

$$r(s-1)!=s!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{s!}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\cdots\right)$$

此式之左端為一整數．右端第一節為一整數，第二節括弧內之級數

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}+\cdots$$

其值小於以下級數

$$\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}+\cdots$$

即小於$\frac{1}{s}$，故不能為整數，因而此式不能成立，即 e 不能以一分數表之，而實為一無理數也． 經數學者研究，并知 e 不特為一無理數，亦且是一超絕數，即 e 不能為任何代數方程（係數為整者）之根，其證姑不及。

由前并可知若 e 之級數僅取其 s 項計算，則與眞值之差 $<\frac{1}{s\cdot s!}$。

2. 指數級數　如前，可得

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

今設 $n=m\cdot x$，則

$$\lim\left(1+\frac{x}{m\cdot x}\right)^{m\cdot x}=\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\cdot x}=e^x$$

故
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

此級數名指數級數，於任何 x 均收歛，因 $\lim n_{n+1}:n_n=\frac{x}{n}$，其值可任何小也。

以 e 爲底之對數曰自然對數，用 ln 表之（ln 爲拉丁文自然對數 logarithmus naturalis 之二冠首字母），以別於常用以 10 爲底之對數。設 $e^y=a$，則 $y=\ln a$，而 $a^x=e^{xy}=e^{x\ln a}$，故得

$$a^x=1+\frac{(\ln a)x}{1!}+\frac{(\ln a)^2x^2}{2!}+\frac{(\ln a)^3x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

此級數於任何 a 及 x 均收歛。

3. 自然對數與常用對數之關係 以 10 爲底之對數，實用上頗便利，故尋常多用之，其符號作 log.

反之，自然對數則幾全爲高等數學上使用。然自然對數與常用對數間亦有一定關係在，不難互相變化。今示其法如下。今設 $10=e^x$，則得 $1=x\cdot\log e$.

又設 $a=10^y=e^{xy}$，則 $\log a=y$，而 $\ln a=x\cdot y$，故得

$$\log a=\ln a\cdot\log e=\ln a\cdot 0{,}43429\cdots\cdots \qquad \text{(I)}$$

又自 $10=e^x$ 得 $\ln 10=x$, 幷可知

$$\ln a=\log a\cdot\ln 10=\log a\cdot 2{,}30258\cdots \qquad \text{(II)}$$

由此 (I) (II) 兩式，即可將二種對數互化，化時祇用一數乘之便得. 此中 0,4342…. 一數名爲常用對數之率.

4　對數級數　因

$$1+x=e^{\ln(1+x)}=\left(1+\frac{\ln(1+x)}{m}\right)^m, \text{ 故得}$$

$$\sqrt[m]{1+x}=1+\frac{\ln(1+x)}{m}.$$

今設 $m=\dfrac{1}{y}$, 則

$$\ln(1+x)=\frac{(1+x)^y-1}{y}=\binom{y}{1}\frac{x}{y}+\binom{y}{2}\frac{x^2}{y}+\cdots$$

$$=x+\frac{(y-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\cdots$$

倘 $m=\infty$, 則 $y=0$, 而得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

即爲對數級數. 此級數於 x 之値 (不問其爲正或負) 小於 1 時收斂; 於 $x=+1$ 亦收斂, 惟於 $x=-1$ 則不能用耳. 由此級數可得 2 之自然對數:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots\cdots$$

若將對數級數内之 x 予以負號，則

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

以此自 $\ln(1+x)$ 減去，因 $\ln(1+x)-\ln(1-x)$ $=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，故得

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots$$

又使對數級數内 x 取其倒數 $\frac{1}{x}$，卽得下式：

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\cdots\cdots$$

仿此幷得

$$\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}-\cdots\cdots$$

將此二者相加，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)+\ln(x-1)-2\ln x$$

$$=-2\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{6x^6}+\cdots\cdots\right)$$

故　$$\ln x=\frac{\ln(x+1)+\ln(x-1)}{2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{6x^6}+\cdots$$

例如求 3 之對數，依此式卽得

$$\ln 3=\frac{\ln 4+\ln 2}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots$$

此級數收斂甚速，頗便於用。得以上數級數，於計算對數已頗足用矣。

第五節　三角函數　幻對數

1. sin 與 cos 之級數　三角函數 sin 與cos 均可展爲無窮級數，今用前所述不定係數法明之如下。試於前指數級數內 x 易以 $ix(i=\sqrt{-1})$，則得

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

此中前一級數卽 $\cos x$ 之級數而後一級數則爲 $\sin x$ 者：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

可用不定係數法證之如後。今假定

$$\cos x=1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\cdots$$

因 $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$,

故 $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2+A[(x+y)^2+(x-y)^2]$

$+B[(x+y)^4+(x-y)^4]+\cdots\cdots=2+2(Ax^2+Bx^4+\cdots\cdots)$

$+2\left[A+\binom{4}{2}Bx^2+\binom{6}{2}Cx^4+\cdots\cdots\right]y^2+My^4+Ny^6$

$+\cdots\cdots=2\cos x\cos y=2(1+Ax^2+Bx^4+\cdots\cdots)(1+Ay^2$

$+By^4+\cdots\cdots)=2(1+Ax^2+Bx^4+\cdots\cdots)+2(1+Ax^2$

$+Bx^4+\cdots\cdots)Ay^2+\cdots\cdots$

由此將 y^2 之係數相等,即得

$$\binom{4}{2}B=A^2,\ \text{因而}\ B=\frac{2A^2}{4\cdot 3}=\frac{2^2A^2}{4!},\ \text{以及}$$

$$\binom{6}{2}C=AB,\ \text{故}\ C=\frac{2^2A^3}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{2^3A^3}{6!},\text{等等,於是}$$

得 $$\cos x=1+Ax^2+\frac{4A^2}{4!}x^4+\frac{8A^3}{6!}x^6+\cdots\cdots$$

仿此,并可設(因 $\sin 0=0$)

$$\sin x=A_1x+B_1x^3+C_1x^5+\cdots\cdots$$

而因 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 則

$$(A_1x+B_1x^3+\cdots\cdots)^2+\left(1+Ax^2+\frac{4A^2}{4!}x^4+\cdots\cdots\right)^2=1$$

由此可知

$$A_1^2 = -2A,\ A_1 = \sqrt{-2A};\ 2A_1B_1 + A^2 + \frac{8A^2}{4!} = 0,$$

$$B_1 = \frac{1}{3}A\sqrt{-2A};\ 等等。$$

倘 x 充分小時，則 $\sin x$ 可等於 x，即

$$\sin x = x = A_1x + B_1x^3 + \cdots$$

故 $A_1 = 1,\ A = -\frac{1}{2},\ B_1 = -\frac{1}{3!},\ C_1 = +\frac{1}{5!}$，等等，而前所得 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之級數可知無誤。

2. $\sin x$, $\cos x$ 與 e^{ix} 之關係　前已知

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

此中設 x 取負號作 $-x$，亦即得

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

由此二式，即有

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}. \tag{I}$$

因 $e^{ix}\cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$，即得

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y),$$

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z) = \cos(x+y+z) + i\sin(x+y+z), \tag{II}$$

等等. 若此中 $x=y=z$, 推廣其理, 則

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad \text{(III)}$$

此即是所謂莫佛氏公式 (Moivresche Formel).

設將 (II) 中之實的部分與幻的部分各分開成爲二式, 即得

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

與三角學上所得無異. 其他三角關係亦大都可如此推得, 今姑不及.

3. $\operatorname{tg} x$ 與 $\cot x$ **之級數** 按三角關係

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

$$= x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \cdots$$

蓋因 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, 故所得級數中 $x^2, x^4, x^6, \cdots$ 等必盡不存在. 於是不難得

$$A = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2^4(2^4-1)}{4!} B_1;$$

$$B = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{A}{2!} = \frac{2}{15} = \frac{2^6(2^6-1)}{6!} B_2;$$

等等；此中 $B_1, B_2, \cdots$ 爲前所述過之柏氏数。因而

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$= 2^2(2^2-1)\frac{B_1}{2!}x + 2^4(2^4-1)\frac{B_2}{4!}x^3 + \cdots$$

仿此，幷可得 $\cot x$ 之級數：

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - 2^2\frac{B_1}{2!}x^2 - 2^4\frac{B_2}{4!}x^4 - 2^6\frac{B_3}{6!}x^6 - \cdots\right)$$

4. $\cos mx$ 與 $\sin mx$ 之級數　照莫氏式

$$\cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m$$

$$= \cos^m x + i\binom{m}{1}\cos^{m-1} x \cdot \sin x - \binom{m}{2}\cos^{m-2} x$$

$$\sin^2 x + i^3\binom{m}{3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \cdots$$

將此式中左右端之實的與幻的部分各自相等，卽得

$\cos mx$ 與 $\sin mx$ 之諸式。例如：

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = -1 + 2\cos^2 x,$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$= 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x,\text{ 等等.}$$

又,可得

$$\sin 2x = 2\cos x \sin x,$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x,$$

$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x,\text{ 等等.}$$

5. $\cos^n x$ 與 $\sin^n x$ 之級數　今設

$$\cos x + i\sin x = r,\quad \cos x - i\sin x = s,$$

則
$$2\cos x = r + s,$$

而
$$2^n \cos^n x = (r+s)^n = r^n + \binom{n}{1} r^{n-1}s + \cdots$$

$$= (r^n + s^n) + \binom{n}{1}(r^{n-1}s + rs^{n-1}) + \cdots$$

倘 n 爲偶數,則此中最末項爲 $\binom{n}{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}} s^{\frac{n}{2}}$; 反之,如 n 爲奇,則末項作

$$\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\left(r^{\frac{n-1}{2}}\cdot s^{\frac{n+1}{2}} + r^{\frac{n+1}{2}}\cdot s^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

但 $rs = 1$, 故前式可作

$$2^n \cos^n x = (r^n + s^n) + \binom{n}{1}(r^{n-2} + s^{n-2}) +$$

$$\binom{n}{2}(r^{n-4} + s^{n-4}) + \cdots\cdots$$

按莫氏公式

$$r^n + s^n = (\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n$$

$$= \cos nx + i \sin nx + \cos nx - i \sin nx$$

$$= 2 \cos nx,$$

將此代入前式內，卽得

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2)x +$$

$$\binom{n}{2} \cos (n-4) x + \cdots\cdots + R,$$

此中 R 於 n 為偶數時

$$R = \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}},$$

若 n 為奇數，則

$$R = \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \cos x.$$

此卽是 $2^{n-1} \cos^n x$ 之級數。

仿此，幷可得 $2^{n-1} \cdot \sin^n x$ 之級數如下：

倘 n 爲偶數,

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{n-1}\sin^n x=\cos nx-\binom{n}{1}\cos(n-2)x$$

$$+\binom{n}{2}\cos(n-4)x-\cdots\pm\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}};$$

倘 n 爲奇數,則

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\cdot\sin^n x=\sin nx-\binom{n}{1}\sin(n-2)x$$

$$+\binom{n}{2}\sin(n-4)x-\cdots\pm\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin x.$$

6. 三角級數 今設

$$S_1=1+x\cos\alpha+x^2\cos 2\alpha+x^3\cos 3\alpha+\cdots$$

$$S_2=1+x\sin\alpha+x^2\sin 2x+x^3\sin 3x+\cdots$$

則 $S_1+iS_2=1+i+x(\cos\alpha+i\sin\alpha)+$

$$x^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+\cdots=1+i+xe^{i\alpha}$$

$$+x^2e^{2\alpha i}+x^3e^{3\alpha i}+\cdots=i+\{1+(xe^{i\alpha})+$$

$$(xe^{\alpha i})^2+(xe^{\alpha i})^3+\cdots\}=i+\frac{1}{1-xe^{i\alpha}}$$

$$=i+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$

$$=i+\frac{(1-x\cos\alpha-ix\sin\alpha)}{(1-x\cos\alpha)^2+x^2\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}+i\left(1+\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2)}\right)$$

因而知

$$S_1=1+x\cos\alpha=x^2\cos 2x+x^3\cos 3\alpha+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

$$S_2=1+x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+x^3\sin 3\alpha+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

7. 幻對數 倘 k 爲一整数，則 $\cos 2k\pi\pm i\sin 2k\pi = e^{\pm 2k\pi i}=1$. 今設 $a=e^{\alpha}$，由前式即可得

$a=e^{\alpha}=e^{\alpha\pm 2k\pi i}$，或 $\ln a=\alpha\pm 2k\pi i$. 由此可知任何一正數 a，其對數多至無窮，惟實對數則祇有一耳。

又，倘 k 爲整數，則

$$\cos(2k+1)\pi\pm i\sin(2k+1)\pi=e^{\pm(2k+1)\pi i}=-1.$$

因而可得

$$-a=(-1)e^{\alpha}=e^{\alpha\pm(2k+1)\pi i},$$

或 $$\ln(-a)=\alpha\pm(2k+1)\pi i$$

從可知負數之對數爲複數，而每一負數亦均有無窮多對數也。

又，$\cos\left(\pm 2k+\frac{1}{2}\pi+i\sin\left(\pm 2k+\frac{1}{2}\right)\pi=i\right.$

$$=e^{\pm 2k\pi i+\frac{1}{2}\pi i},$$

故 $$ai=e^{a}i=e^{a\pm 2k\pi i+\frac{1}{2}\pi i},$$

而 $$\ln(ai)=a\pm 2k\pi i+\frac{1}{2}\pi i,$$

以及 $$\ln(-ai)=a\pm 2k\pi i-\frac{1}{2}\pi i.$$

由 $i=e^{\pm 2k\pi i+\frac{1}{2}\pi i}$, 設 $k=0$, 即得

$i=e^{\frac{1}{2}\pi i}$, 或 $\ln i=\frac{1}{2}\pi i$, 因而有

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{\ln i}{i}.$$

如 $a+ib$ 爲一複數, 則

$$a+ib=r(\cos\phi+i\sin\phi)=r[\cos(\phi\pm 2k\pi)+i\sin(\phi\pm 2k\pi)]$$

$$=r\,e^{i\phi\pm 2k\pi i},$$

於此, $r^2=a^2+b^2$; $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\phi$, $\phi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

求其對數, 即得

$$\ln(a+ib)=\ln r+i\phi\pm 2k\pi i$$

$$=\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2)\pm 2k\pi i+i\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a},$$

此係一複數之對數也.

第六節　逆三角函數

1.　arc sin x 與 arc cos x 之級數　今設 $\sin x=y$, 則

$$y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.$$

用前第二節內級數求反之法, 可先設

$$x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\cdots.$$

觀於第一級數 x 之號隨 y 之號而異, 知第二級數內凡偶次 y 之乘方均不存在, 因而此級數爲

$$x=Ay+Cy^3+Ey^5+\cdots.$$

將第一級數代入此, 卽得

$$x=A\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$+C\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)^3$$

$$+E\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{!5}-\cdots\right)^5+\cdots.$$

按不定係數法比較此二級數之係數, 得

$$A=1;\ C=\frac{1}{3!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3};\ \ E=\frac{3}{40}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5};$$

等等; 故

$$x=\text{arc sin } y=y+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^7}{7}+\cdots.$$

或 $$x=\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{\sin^7 x}{7}+\cdots\cdots$$

於後一級數內設 $x=\frac{\pi}{2}-x$, 卽有

$$x=\frac{\pi}{2}-\cos x-\frac{1}{2}\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{\cos^5 x}{5}-\cdots\cdots$$

所得級數於 $\sin^2 x$ 或 $\cos^2 x<1$ 時均收斂, 因 $\lim n_{n+1}:n_n=\sin^2 x$ 或 $=\cos^2 x$ 也. 又於 $\sin^2 x$ 或 $\cos^2 x=1$ 時亦倘收斂, 蓋於此

$$\alpha=\frac{3}{2n},\quad n\alpha=\frac{3}{2}>1.$$

2. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ 及 $\operatorname{arc}\cot x$ 之級數 因

$$e^{2ix}=\frac{e^{ix}}{e^{-ix}}=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{1+i\operatorname{tg} x}{1-i\operatorname{tg} x},$$

故 $$2ix=\ln\frac{1+i\operatorname{tg} x}{1-i\operatorname{tg} x}.$$

按第四節對數級數展之,卽得

$$x=\operatorname{tg} x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x+\cdots$$

倘 $\operatorname{tg} x=y$, $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$, 卽有

$$x=\operatorname{arc\,tg} y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\cdots$$

如於第一級數內設 $x=\frac{\pi}{2}-x$，即可得 arc cot 之級數，茲姑從略.

所得級數於 $\operatorname{tg}^2 x$ 或 $\cot^2 x<1$ 時均收斂；於 $+1$ 時亦尙收斂；惟於 >1 即散發.

第七節　圓周率 π 之求法

1. 由 arc sin x 及 arc tg x 之級數求 π 於前節 arc sin y 之級數內設 $x=\frac{\pi}{6}$，則 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，而得

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{48}+\frac{3}{1280}+\frac{1}{14336}+\cdots$$

由此級數即可計算 π 之值.

又可於 arc tg y 之級數內設 $x=\frac{\pi}{4}$，即得

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

此級數首爲數學家萊伯尼玆 (Leibniz) 所發見，故亦稱萊氏級數. 然收斂甚遲，應用上至不便，非取二百項以上計算，所得值不足正確，以是數學家有改良其法以得一較

速之級數者. 今設

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1, \text{則}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=1,$$

故知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}, \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, 而

$$\frac{\pi}{4}=\alpha+\beta=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$$

此級數較前收斂速, 頗可用.

2. 其他求 π 之式 今設

$$i=\left(\frac{1+ri}{1-ri}\right)^2=\frac{1+2ri-r^2}{1-2ri-r^2},$$

則得 $$1+2ri-r^2=i+2r-r^2i.$$

解此方程以求 r 之值, 得 $r=\sqrt{2}-1$, 因而

$$\ln i=\ln\left(\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right)^2$$

或 $$=2\ln\left(\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}\right)$$

前第五節 7 內已知 $\frac{\pi}{4}=\frac{\ln i}{2i}$, 故得

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{i}\ln\frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{1-(\sqrt{2}-1)i}$$

$$=(\sqrt{2}-1)-\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3}+\cdots\cdots$$

又設　$i=\left(\frac{1+ri}{1-ri}\right)^{\frac{3}{2}}$, 則 $-1=\left(\frac{1+ri}{1-ri}\right)^3$ 而

$r=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 但

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ri}{1-ri}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4i}\ln\frac{1+ri}{1-ri}$$

因之得

$$\frac{\pi}{2}=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5(\sqrt{3})^5}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\right)$$

其他求 π 之法尙多，今不盡述. 用此項方法，可得

$$\pi=3{,}141592753589\ 793238\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\pi}=0{,}318309886183\cdots\cdots$$

$$\log\pi=0{,}\ 497149872694\cdots\cdots$$

其諸近似値爲

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}.$$

歷來數學家求 π 之値有多至小數幾百位者，但終不盡. 輓近來已證明 π 不僅是一無理數，亦爲一超絕數也.

第八節　無窮乘積

1. 無窮乘積之收斂與散發　級數之項有可多至無窮而其值仍爲有盡者，如前所論收斂級數是．仿此，乘積之因子亦有多至無窮者，是曰無窮乘積．無窮乘積亦分收斂者與散發者二種．其意義與級數方面相同，乘積之值如有盡，則曰收斂，不則爲散發

若無窮乘積之因子自某個以下統與 1 逼近，則此乘積可以收斂．蓋設乘積之因子自某個以下統大於 1，例如至小爲 $1+\alpha$，則因 $(1+\alpha)^n$ 於 $n=\infty$ 時即爲無窮大，故此乘積必散發．又如自某個以下，因子之值統小於 1，例如其最大者爲 $1-\alpha$，則因 $(1-\alpha)^n=0$，乘積之值亦必爲 0．惟自某個以下因子之值統與 1 無限逼近，斯乘積之值有盡而不爲 0 耳．

本此理，一無窮乘積之因子，可先一一化之作 $1+k$ 形式，則其收斂或散發自易見矣．

今設有無窮乘積

$$P=(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)(1+k_4)\cdots\cdots$$

於此，試乘出之，而如 k 統爲正數，則

$$(1+k_1)(1+k_2)=1+k_1+k_2+k_1k_2$$

或 $$(1+k_1)(1+k_2)>1+k_1+k_2.$$

仿此，$$(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)>1+k_1+k_2+k_3,$$

等等；故

$$P>1+k_1+k_2+k_3+k_4+\cdots\cdots$$

此即是：倘 $k_1+k_2+k_3+k_4+\cdots\cdots$ 一級數散發，則乘積 P 本身亦必散發. 例如

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$$

一乘積，其 k 之級數為調和級數，不收斂，故此乘積亦散發.

若由 k 所成之級數收斂，則自 r 項以下，必可得 $\lim(k_r+k_{r+1}+\cdots\cdots)<1$，而自第 r 個以下諸因子之積，必

$P_r=(1+k_r)(1+k_{r+1})(1+k_{r+2})\cdots\cdots<1+(k_r+k_{r+1}+\cdots\cdots)+(k_r+k_{r+1}+\cdots\cdots)^2+(k_r+k_{r+1}+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots$

此即是 P_r 之值有盡，因而 P 之值亦有盡也. 因知：倘一切 k 為正，其級數收斂，則乘積亦收斂.

若一切 k 均為負數，則一切因子之值統小於 1，因而 P 之值祇能在 0 與 1 之間. 如前，

$$\lim(k_r+k_{r+1}+\cdots\cdots)=w<1;$$

又，$$(1-k_1)(1-k_2)=1-(k_1+k_2)+k_1k_2$$

$$>1-(k_1+k_2),$$

廣之，　$(1-k_1)(1-k_2)\cdots\cdots>1-(k_1+k_2+\cdots\cdots).$

因而　$P_r=(1-k_r)(1-k_{r+1})\cdots\cdots>1-w,$

P 之餘因子之積 P_r，其値既 $>1-w$，則 P 本身之値亦必大於 $1-w$，而一方面又知其必小於 1，因而P 値有盡也.

若乘積之因子兼有正負，則須另研究，其收斂散發較難言矣.

無窮乘積亦有一簡單符號，尋常多用之，例如前所舉一乘積，亦可寫作

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+k_n).$$

2.　cos x 及 sin x 之無窮乘積　前已知倘 n 爲整數，則

$$\cos nx=\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\sin^4 x$$
$$-\binom{n}{6}\cos^{n-6}\sin^6 x+\cdots\cdots$$

倘 n 爲偶數，則此級數中之 $\cos^2 x$ 可易以 $1-\sin^2 x$，而得

$$\cos nx=A_0+A_1\sin^2 x+A_2\sin^4 x+\cdots\cdots$$

或設 $\sin^2 x=y$，得

$$\cos nx=A_0+A_1 y+A_2 y^2+\cdots\cdots+A_{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}$$

設 x 取以下諸值之一:

$$\frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n},\ \frac{5\pi}{2n},\ \cdots\frac{2n-1}{2n}\pi,$$

則 $\cos nx=0$, 而

$$\sin^2\frac{\pi}{2n},\ \sin^2\frac{3\pi}{2n},\ \sin^2\frac{5\pi}{2n},\cdots$$

諸值爲
$$A_0+A_1y+\cdots A_{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}=0$$

一方程之根. 因而按方程之理, 該方程可作

$$A\left(y-\sin^2\frac{n}{2n}\right)\left(y-\sin^2\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\left(y-\sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$$

或

$$B\left(1-\frac{y}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{y}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{y}{\sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi}\right)$$

又因 $x=0$ 時 $\cos nx=1$, 故得

$$\cos nx=\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2n-1}{2n}\pi}\right).$$

於此式 x 處易以 $\frac{x}{n}$, 即有

$$\cos x=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\cdots$$

今設 n 趨向 ∞, 則 $\sin\frac{x}{n}$ 可易以 $\frac{x}{n}$, $\sin\frac{a\pi}{2n}$ 亦可易以 $\frac{a\pi}{2n}$, 而得

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

倘 n 爲奇數, 則可由

$$\cos nx=\cos x(A_0+A_1\sin^2 x+A_2\sin^4 x+\cdots)$$

出發, 所得結果無異, 玆姑從略.

用此方法并可得 $\sin x$ 之無窮乘積如下:

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

3. π, $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$ 之無窮乘積 試於前 $\sin x$ 之無窮乘積內設 $x=\frac{\pi}{2}$, 則得

$$1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots$$

或
$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots\cdots}$$

此式首爲數學家 Wallis 所發見，故即名華氏乘積，若於前式內設 $x=\frac{\pi}{4}$，則亦可得：

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12\cdots\cdots}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdots\cdots}$$

此式中含 $\sqrt{2}$，故即可由之以得 $\sqrt{2}$ 之乘積

$$\sqrt{2}=\frac{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdots\cdots}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdots\cdots}$$

仿此，若於 $\cos x$ 之乘積內設 $x=\frac{\pi}{6}$，則

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2\cdot3^2}\right)\cdots\cdots$$

因而得
$$\sqrt{3}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot8\cdot10\cdot14\cdot16\cdots\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot9\cdot9\cdot15\cdot15\cdots\cdots}.$$

4.　無窮乘積與無窮級數之互化　由無窮級數化爲無窮乘積，可得：

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

$$=\frac{u_0}{1}\cdot\frac{u_0+u_1}{u_0}\cdot\frac{u_0+u_1+u_2}{u_0+u_1}\cdots\cdots$$

$$=\frac{u_0}{1}\left(1+\frac{u_1}{u_0}\right)\left(1+\frac{u_2}{u_0+u_1}\right)\cdots\cdots$$

例: $$1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdots\cdots$$

如將無窮乘積化為無窮級數, 則有 $v_0\cdot v_1\cdot v_2\cdot v_3\cdot v_4\cdots\cdots$

$$=v_0+v_0(v_1-1)+v_0v_1(v_2-1)+v_0v_1v_2(v_3-1)$$
$$+v_0v_1v_2v_3(v_4-1)+$$

例: $$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdots\cdots$$

可化作 $$\frac{8}{9}-\frac{8}{9\cdot 25}-\frac{8\cdot 24\cdot 1}{9\cdot 25\cdot 49}-\cdots\cdots$$

所須意注者, 無論由級數化作乘積或乘積化作級數, 所得者終須收斂方可耳.

第五章

代數方程

第一節　一未知數的代數方程之普通屬性

1.　整代數方程　今設有一整代數函數

$$y=f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

則可使其一端爲 0, 而得一 n 次代數方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

於此可假定 $a_0=1$, 不則亦可用 a_0 除全方程, 使 x^n 之係數爲 1.

任何一數目 x_1, 代入此方程能滿足之者名爲此方程之一根.

今如將 n 個二項代數式 $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, $(x-x_n)$ 相乘, 則可得

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-a_1x^{n-1}+a^2x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots\pm a_n,$$

於此 a_1 爲 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 之第一種組合之和, a^2 爲其第二種組合之和, 等等. 由此可見若方程中 x 取 $x_1, x_2, \cdots x_n$

中任何一値，則方程即 $=0$，此即是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 爲方程

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0 \text{ 之根也.}$$

反之，若 x_1 爲任何方程之根．則由前可知該方程必可用 $(x-x_1)$ 除之，而 $(x-x_1)$ 即爲該方程之一因子．一 n 次方程所有作 $(x-x_1)$ 形式之因子，不能多於 n 個，亦不少於 n 個，故知凡 n 次方程必恰有 n 個根．所謂解一代數方程者無他，即求該方程之各因子 $(x-x_1), (x-x_2), \cdots$ 也

2. 以 $(x-\alpha)$ 之乘方表方程 任何一代數方程，均可用 $(x-\alpha)$ 之諸乘方表之．例如 $x^4-2x^3+3x^2-4x+5=0$ 一方程，如欲用 $(x-3)$ 之乘方以表之，則可用 $(x-3)$ 除此式，而得 $x^3+x^2+6x+14$，并餘 47，因而有 $x^4-2x^3+3x^2-4x+5=(x-3)(x^3+x^2+6x+14)+47$．此中 $x^3+x^2+6x+14$ 仍可用 $(x-3)$ 除之，如是輾轉直下，則最後可得

$$x^4-2x^3+3x^2-4x+5=(x-3)^4+10(x-3)^3$$
$$+39(x-3)^2+68(x-3)+47=0.$$

是原方程用 $(x-3)$ 之乘方以表出矣．

3. 方程之連續性 方程

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

中 x 任取一值時，y 之值即隨之決定，此項關係如前已述及曰函數關係．倘 x 所取之值少變，則 y 之值亦必隨之少

有變動. 例如 x 之值增加成 $x+\Delta x$(Δx 爲一極小數), 則 y 之值亦增加成 $y+\Delta y$ (Δy 亦爲一極小數). 若函數有此項屬性, 當其自變數有極小之變動時, 依變數亦隨之變動極小者, 是曰連續函數.

設如視 x, y 爲坐標, 則如前之方程卽爲在此坐標系中之一曲線, 其連續性亦卽是曲線之連續性. 今使 x 依次取 x_1, x_2 二值, 若 y 之值於 $x=x_1$ 時爲正, 而於 $x=x_2$ 時爲負, 則可推知 x_1 與 x_2 之中間必有一值 x_0, 於此 $y=0$. 蓋 $x=x_1$ 時, y 之值爲正,則曲線上此點必在 x 坐標軸之上面, 而當 $x=x_2$ 時 y 爲負, 則此點已在 x 坐標軸之下面, 曲線旣連續不斷, 是中間必有一點與 x 坐標軸相交, 在此點上 $y=0$ 也. 本此理, 若一方程於 x 之二値符號正負不同, 則必有一根在此二值之間. 例如 x^3+2x^2+5x-8 當 $x=0$ 時其值爲 -8, 而於 $x=2$ 爲 18, 故知 -8 與 18 之間必有方程 $x^3+2x^2+5x-8=0$ 之一根(在事實上 $x=1$ 爲此方程之一根).

4. 函數之正負號 設有一函數

$$y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

其係數 $a_1, a_2\cdots$ 之值, 無有大於 p 者, 則因

$$(p+1)^n > p[(p+1)^{n-1}+(p+1)^{n-2}+\cdots+].$$

故若設 $x=p+1$, 則

$$y=(p+1)^n+a_1(p+1)^{n-1}+a_2(p+1)^{n-2}+\cdots$$

y 之值無論如何必爲正者, 蓋因 $a_1, a_2, \cdots$ 之值至多均等於 p, 觀前之不等式, 雖諸 $a_1, a_2\cdots$ 統爲負數, 第二項以下之和猶小於第一項, 而 y 之值尙爲正也. 從可知 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots=0$ 一方程之根, 其値之大有限, 不能大於方程中最大之係數 (以絕對值論不問其符號)加 1.

又如將一方程用 2 內之法化作

$$(x-\alpha)^n+R_n(x-\alpha)^{n-1}+R_{n-1}(x-\alpha)^{n-2}$$
$$+\cdots+R_2(x-\alpha)+R_1=0,$$

而一切 R 均爲正值, 則當 $x=\alpha$ 或 $>\alpha$ 時, 此方程視作函數其值亦爲正者, 因而 α 爲此方程所有正數的根之最高限度(言此方程之正數的根均小於 α)

又若方程爲偶次者, 則於負的 $x=p+1$ 或 $>p+1$, 其函數值亦正, 故偶次方程中最大係數 (以絕對值論) 加 1 爲此方程之根之最下限度.

設有一方程, 其次數爲奇者, 則可先後設 $x=+(p+1)$, 及 $x=-(p+1)$, 而得一正的函數值及負的函數值. 依 3

中所說理, $-(p+1)$ 與 $+(p+1)$ 之間, 至少必有方程之一根在.

又若一方程中之絕對項 (不帶有 x 之項) 爲負者, 則於 $x=0$ 時函數之值爲負, 於 $x=\pm(p+1)$ 時均爲正. 因知此方程至少有二根, 一在 $-(p+1)$ 與 0, 一則在 0 與 $(p+1)$之間.

第二節 方程中係數之屬性

1. 係數與根之關係 設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 爲一 n 次方程之根, 則該方程必等於 $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \cdots (x-\alpha_n)$ 之積. 試乘出之, 可得

$$x^n - C_1(\alpha)x^{n-1} + C_2(\alpha)x^{n-2} - \cdots = 0.$$

此中 $C_1(\alpha), C_2(\alpha), \cdots$ 爲諸 α 之第一種組合, 第二種組合, 等等, 之和. 設原方程爲 $x^n + a_1x^{n-1} + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots = 0.$

則自必

$$C_1(\alpha) = -a_1,\ C_2(\alpha) = +a_2,$$

$$C_3(\alpha) = -a_3,\ C_4(\alpha) = +a_4, \cdots$$

例如二次方程

$$x^2 = a_1x + a_2 = 0$$

之二根如爲 α_1, α_2, 則

$$\alpha_1+\alpha_2=-a_1,\ \alpha_1\alpha_2=a_2.$$

又如三次方程

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

之三根如爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 則亦必

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_1,\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_2,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3.$$

今設

$$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$S_2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2,$$

$$S_3=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\cdots+\alpha^3_n,\ \text{等等.}$$

則 $S_1=-a_1$, 或 $S_1+a_1=0$. 又可知

$$a_1^2=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^2=\alpha_1^2+\alpha^2_2+\alpha_n^2$$

$$+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots)$$

或 $$a_1^2=S_2+2a_2,\ S_2-a_1^2+2a_2=0$$

即是 $$S_2+a_1S_1+2a_2=0.$$

仿此, 幷得

$$S_3+a_1S_3+a_2S_1+3a_3=0,$$

$$S_4+a_1S_3+a_2S_2+a_3S_1+4a_4=0,\ \text{等等.}$$

此項關係若用行列式表之，可得:

$$S_2 = +\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix},$$

$$S_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$$

$$S_4 = +\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, a_3 = +\frac{1}{4!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$$

根與係數間之關係，其式尙多，玆姑不備.

第三節 高次方程解法

1. 方程之變形法 設有方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots = 0$$

於此，如於其中設 $x = y + h$，則得

$$(y+h)^n + a_1(y+h)^{n-1} + a_2(y+h)^{n-2} + \cdots = 0$$

或

$$y^n + (nh + a_1)y^{n-1} + \left[\binom{n}{2}h^2 + \binom{n-1}{1}ha_1 + a_2\right].$$

$$y^{n-2} + \cdots = 0$$

如於此方程中設 $h=-\frac{a_1}{n}$,則 y^{n-1} 之係數卽爲零,因而方程改作

$$y^n+b_2y^{n-2}+b_3y^{n-3}+\cdots=0.$$

同此方法,若相當的選擇 h,則原方程中任何一係數可使其消去. 如此所得方程極爲有用;而三四次方程,尤易用此法解之.

又設於原方程中 x 處易以 py,則所得方程之根小於原方程者 p 倍. 反之,如設 $x=\frac{y}{p}$,則所得新方程之根大於原方程者亦 p 倍.

例如於

$$x^4+8x^3+3x^2+8x+12=0$$

中設 $x=y-2$,則得

$$y^4-21y^2+60y-40=0$$

於此,帶有 y^3 之項已消去,而其根大於原方程者爲 2.

2. 四次方程解法 四次方程之解法頗多,今略舉數者於下.

(甲) 歐拉氏法. 如所欲解之方程爲

$$x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0,$$

則可用前所述法將其中帶有 x^3 之項消去，而得

$$x^4+ax^2+bx+c=0.$$

如此方程之根爲 x_1, x_2, x_3, x_4，則必

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

今設

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=\alpha=-2\sqrt{y_1}, \\ x_1+x_3&=\beta=-2\sqrt{y_2}, \\ x_1+x_4&=\gamma=-2\sqrt{y_3}, \end{aligned} \tag{I}$$

則

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ &=(3x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1+x_2)(x_1+x_3) \\ &\quad -2(x_1+x_3)(x_1+x_4)-2(x_1+x_3)(x_1+x_4) \\ &=(2x_1+x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3 \\ &\quad +x_1x_4)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4 \\ &\quad +x_3x_4)-4x_1^2. \end{aligned}$$

因 $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a$,

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $(2x_1+x_1+x_2+x_3+x_4)^2=4x_1$,

$x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4=x_1(x_1+x_2+x_3+x_4)=0$,

故

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2a.$$

又，$\alpha\beta\gamma=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)$

$$=x_1^2(x_1+x_2+x_3+x_4)+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4$$

$$+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-b;$$

$$\alpha\beta=x_1{}^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3$$

$$=x_1(x_1+x_2+x_3+x_4)+x_2x_3-x_1x_4$$

$$=x_2x_3-x_1x_4;$$

以及 $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=(x_2x_3-x_1x_4)^2$

$$+(x_2x_4-x_1x_3)^2+(x_3x_4-x_1x_2)^2$$

$$=(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)^2$$

$$-4x_1x_2x_3x_4.$$

因 $x_1x_2x_3x_4=c$, 故得

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=a^2-4c.$$

$\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 為方程

$$z^3-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)z^2+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)z-\alpha^2\beta^2\gamma^2=0$$

或 $$z^3+2az^2+(a^2-4c)z-b^2=0$$

之根, 而 α, β, γ 則能滿足以下方程:

$$u^6+2au^4+(a^2-4c)u^2-b^2=0.$$

若於前方程中設 $z=4y$, 幷用 64 除所得者, 則有

$$y^3+\frac{1}{2}ay^2+\frac{1}{16}(a^2-4c)y-\frac{1}{64}b^2=0$$

此方程之根與原方程之根間, 其關係至易求得, 故原方程之根即可由此方程推得之. 今將原方程之根列下:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_2 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\ x_3 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} \\ x_4 = +\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} \end{array}\right\} b \text{ 為正數}$$

若原方程中 b 為負數，則前式中 $\sqrt{y}$ 之號各正負互易即得.

例如有四次方程 $x^4-25x^2+60x-36=0$，則可先仿前推得一三次式

$$y^3-\frac{25}{2}y^2+\frac{769}{16}y-\frac{225}{4}=0.$$

因此式之根為 $\frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}$，即 $\sqrt{y_1}=\frac{3}{2}, \sqrt{y_2}=2, \sqrt{y_3}=\frac{5}{2}$，故由此可推得原方程之根為 $1, 2, 3, -6$.

（乙） 安丕氏 (Ampére) 法. 安氏法與歐氏法多相關之處. 今設

$$x_1=\frac{z}{2}+\alpha, \quad x_2=\frac{z}{2}-\alpha,$$

將此二值依次代入原方程中，則得

$$\left(\frac{z}{2}+\alpha\right)^4+a\left(\frac{z}{2}+\alpha\right)^2+b\left(\frac{z}{2}+\alpha\right)+c=\frac{z^4}{16}+\frac{z^3\alpha}{2}$$

$$+\frac{3\alpha^2}{2}z^2+2\alpha^3 z+\alpha^4+a\frac{z^2}{4}+a\alpha z+a\alpha^2+b\frac{z}{2}$$

$$+b\alpha+c=0;$$

以及
$$\frac{z^4}{16}-\frac{z^3\alpha}{2}+\frac{3\alpha^2 z^2}{2}-2\alpha^3 z+\alpha^4+a\frac{z^2}{4}$$

$$-a\alpha z+a\alpha^2+b\frac{z}{2}-b\alpha+c=0.$$

將後方程自前方程減去. 并用 2α 除所得者, 卽有

$$\frac{z^3}{2}+2\alpha^2 z+az+b=0,$$

故
$$\alpha^2=-\frac{z^2}{4}-\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{z}\right),$$

而

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}z\pm\frac{1}{2}\sqrt{-z^2-2\left(a+\frac{b}{z}\right)}$$

於此 $x_1+x_2=z$, 故若設 $z=2\sqrt{y_1}$, 則 $y_1=\frac{z}{4}$. 如將此值插入用歐氏法所得之三次方程內, 則得

$$z^6+2az^4+(a^2-4c)z^2-b^2=0$$

z 之值卽可由此推之. 而其餘二根則爲

$$\left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}z\pm\frac{1}{2}\sqrt{-z^2-2\left(a+\frac{b}{z}\right)}.$$

例如 $x^4-9=0$ 一方程，由之，可得

$$z^6+36z^2=0,$$

$z^2=0$，或 $z^4=-36$, $z=\sqrt[4]{-36}$ 爲後者之解，因而

$$\left.\begin{array}{l}x_1\\x_2\end{array}\right\}=+\frac{z}{2}\pm\frac{z}{2}\sqrt{-1}=+\frac{1}{2}\sqrt[4]{36}\left(\sqrt[4]{-1}\mp\sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt{-1}\right)$$

$$=+\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{-1}\mp\sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

從此可得原方程之根爲

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=-i\sqrt{3},\ x_3=+\sqrt{3},$$

$$x_4=-i\sqrt{3}.$$

（丙）笛卡士 (Descartes) 之法. 笛氏之法亦由

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

出發. 今設

$$x^4+ax^2+bx+c=(x^2+xy+t)(x^2-xy+z),$$

則將兩端之係數比較後，可得

$$a=t+z-y^2,\quad 或\quad t+z=a+y^2;$$

$$b=y(z-t),\quad z-t=\frac{b}{y};$$

$c=tz$；由此，有

$$2z=a+y^2+\frac{b}{y},\quad 2t=a+y^2-\frac{b}{y},$$

$$\left(a+y^2+\frac{b}{y}\right)\left(a+y^2-\frac{b}{y}\right)=4c,$$

或
$$y^6+2ay^4+(a^2-4c)y^2-b^2=0$$

若得 y 之值，則 t 與 z 之值卽定，於是祇須解

$$x^2+xy+t=0$$

$$x^2-xy+z=0$$

以得 x 之值.

例：
$$x^4-7x^2-12x+18=0.$$

$$y^6-14y^4-23y^2-144=0,\ y=4.$$

$$2z=-7+16-\frac{12}{4}, z=3.$$

$$2t=-7+16+\frac{12}{4},\ t=6.$$

$$x^2+4x+6=0,\quad x^2-4x+3=0.$$

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=2\pm\sqrt{-2};\qquad \left.\begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}\right\}=2\pm1.$$

其他方法實繁有徒，今姑不及.

4. 方程之整數根 若方程之係數統為整數，則其根無有為有理分數者.（於此先假定方程中最高乘方之係數為 1）蓋如不然，則可設其一根為$\frac{r}{s}$，因得

$$\frac{r^n}{s^n}+a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{r}{s}\right)^{n-2}+\cdots=0$$

將 s^{n-2} 乘此式，即有

$$\frac{r^n}{s}+a_1r^{n-1}+a_2sr^{n-2}+\cdots=0$$

此式中第一項爲分數，其餘諸項之和爲整數，分數無論如何不能與整數相等，因而此方程實不能成立．前第一節2中已示其法，任何一方程可使其成

$$(x-a)^n+R_n(x-a)^{n-1}+R_{n-1}(x-a)^{n-2}$$
$$+\cdots+R_1=0$$

式，此中 a 爲一任何數．因

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots=(x-a)^n+R_n(x-a)^n+\cdots+R_1$$

故若於此中設 $x=a$，即得

$$R_1=a^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

是即 R_1 之值也．又將原方程化作 $(x-\beta)$ 之乘方，并求得

$$R_1'=\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\cdots+a_n,$$

而與 R_1 相減，則得

$$R_1-R_1'=(a^n-\beta^n)+a_1(a^{n-1}-\beta^{n-1})+\cdots$$

此式可爲 $(a-\beta)$ 除盡，故若 a 與 β 爲二整數值，則

$\dfrac{R_1-R_1'}{\alpha-\beta}$亦爲一整數.

倘 β 爲原方程之根, 則必 $R_1'=0$, 因而 R_1 亦可爲 $(\alpha-\beta)$ 所除盡.

此理既明, 乃可測定方程之整數根. 今舉例示之如下. 設有方程

$$x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0,$$

今欲求其整數根. 設 x_1, x_2, x_3, x_4 爲此方程之四根, 則必

$$x_1x_2x_3x_4=120,$$

因之, 此根不能出以下諸數之中:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5,\ \pm6,\ \pm8,\ \pm10,$$
$$\pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm40,$$
$$\pm60, \pm120.$$

如於方程內設 $x=1$, 則得 $R_1=+24$. 按適纔所說理, 如前所列諸數中有該方程之根, 則此數減 1 必能將 24 除盡. 因而可先決定以下諸數決不能爲此方程之根:

$$\pm4,\ \pm6,\ \pm8,\ \pm10, 12, \pm15, \pm20,$$
$$\pm24, \pm30, \pm40, \pm60, \pm120,$$

而如此方程有整數根, 則當在以下諸數中: ±1, ±2, ±3,

$\pm 4, \pm 5$. 數目既不多，於是不難一一試之，結果可知 2, 3, 4, 5 四數實爲方程之整數根也.

4. 方程之重複根 今設

$$y=f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

爲任何一整函數，則 $f(x)-f(z)$ 必可用 $(x-z)$ 除盡之. 如將 $\frac{f(x)-f(z)}{x-z}$ 計算出，而於其中設 $x=z$，則普通所得者不爲 0. 此值名爲 $f(x)$ 之第一次引生函數，用 $y', f'(x)$，或 $Df(x)$ 表之. 例如 $f(x)=x^n$，則

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z}=\frac{x^n-z^n}{x-z}=x^{n-1}+x^{n-2}z+\cdots+z^n$$

若 $x=z$，即得

$$Dx^n=n\cdot x^{n-1}.$$

所得之引生函數，仍可求其引生函數，是爲第二次引生函數，以 $y'', f''(x)$, $D^2f(x)$ 表之. 如是，尚可求其第三，第四次引生函數等等.

設 a 爲一方程之重複根，則該方程必可化之作

$$(x-a)^n+R_n(x-a)^{n-1}+\cdots+R_3(x-a)^2=0$$

因 $(x-a)^2$ 爲其因子也. 求其第一次引生函數，得

$$n(x-a)^{n-1}+(n-1)R_n(x-a)^{n-2}+\cdots$$

$$+2R_3(x-\alpha)=0$$

於此可見 α 亦爲引生函數之根. 因知: 倘方程有一重複根, 則此根幷爲其第一次引生函數之根.

本此理, 不難明白一方程之三複根, 於其第一次引生函數爲重複根, 而於第二次引生函數尙爲根也.

第四節 方程之近似解法

1. 拉格倫氏法 凡方程之次數高於四者, 除一二特別形式者外, 都不能用尋常代數上之算法解之, 此事實首爲數學家亞倍爾(Abel)所證明. 緣此, 用其他方法以求高次方程之近似根, 實用上至爲重要. 卽就三四次方程言之, 雖如前所示, 可用代數上尋常解法求解. 但於實用每嫌不便, 故近似解法亦尙焉. 今先述拉格倫(Lagrange)氏之法於下.

今設 $f(x)=x^3-4x-5$, 若於此中設 $x=2$, 則 $f(2)=-5$, 又使 $x=3$, 則得 $f(3)=+10$; 按第一節 3 中所說理, 可知 2 與 3 之間, 必有方程 $x^3-4x-5=0$ 之一根在. 今命此根爲 $2+\frac{1}{y}$, 幷將此值代入原方程之 x 處, 使 $x=2+\frac{1}{y}$, 卽得

$$\left(2+\frac{1}{y}\right)^3-4\left(2+\frac{1}{y}\right)-5=0$$

或 $$5y^3-8y^2-6y-1=0.$$

此方程仍有一根在 2 與 3 之間，故可設 $y=2+\frac{1}{z}$，而得

$$5z^3-22z^2-22z-1=0,$$

此方程有一根在 5 與 6 之間，故可設 $z=5+\frac{1}{n}$ 而作一新方程． 如是輾轉直下，則可得 x 之值爲一連分：

$$x=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

其近似值列下：

$$2,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{5}{11},\ 2\frac{16}{35},\ 2\frac{21}{46},\ 2\frac{58}{127},\ 2\frac{353}{554},$$

是卽原方程之近似根也．

2. 牛頓氏法 設如

$$f(x)=x^3+3x^2+3x-7$$

則 $f(1)=-1$，而 $f(3)=15$，故 1 與 2 間必有方程 $x^3+2x^2+3x-7=0$ 之一根在． 今設 $x=1+h$，則得

$$(1+h)^3+2(1+h)^2+3(1+h)-7=0$$

或 $$-1+10h+\rho h^2+\sigma h^3=0.$$

若將此中帶有 h^2 及 h^3 之二項略去, 則

$$-1+10h=0, \text{ 而 } h=\frac{1}{10}.$$

仿此, 仍設 $x=1\frac{1}{10}+h_1$, 得

$$\left(1\frac{1}{10}+h_1\right)^3+2\left(1\frac{1}{10}+h_1\right)^2+3\left(1\frac{1}{10}+h_1\right)-7=0,$$

而於此中仍略去帶有 $h_1{}^2$ 及 $h_1{}^3$ 之項, 則又可測定

$$h_1=-0,0046\cdots$$

因而 $x=1,0954\cdots$

若欲求其根更近於眞, 則可多用此法幾次.

用此法已得一方程之近似根後, 若欲知其與眞值之相差, 則可如此求之. 設如方程爲

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

而 α 爲其近似根, 試設 $x=\alpha+h$, 即有

$$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d+h(4\alpha^3+3a\alpha^2$$

$$+2b\alpha+c)+\rho h^2++\sigma h^3+h^4=0$$

將此中帶有 h^2,h^3,h^4 之項統略去, 可得

$$h=-\frac{\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}{4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c}=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

是即 α 與眞値之差也.

3. Regula falsi 近似解法中以 Regula falsi 一法爲最便, 且不獨可用於代數方程, 卽其他超絕方程亦頗合宜. 設如 α 與 β 爲二値, 與所求方程之根相近, 則如前所示, 有

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f(\alpha)} \text{ 與 } x=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

因而得
$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\cdot\frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}.$$

此中 $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 近於零, 而 $f'(\alpha)$ 與 $f'(\beta)$ 則普通不能爲零. 若 α 與 β 相差極微, 則 $f'(\alpha)$ 與 $f'(\beta)$ 亦可視爲相差無幾, 因而可設

$$\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}=1,$$

而
$$\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)},$$

卽
$$x=\frac{\beta\cdot f(\alpha)-\alpha f(\beta)}{f(\alpha)-f(\beta)},$$

用此法時, α 與 β 之値須如是選擇, 使 $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 之號相異, 則祇須 $f(x)$ 在 α 與 β 間連續, 便可以此法求得其根. 若 $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 號相同, 則用此法不必能求得根. 其理自明.

例：
$$x^5-100x=0$$

$$\alpha=4,\ \beta=5;\ f(\alpha)=-144,\ f(\beta)=2625.$$

$$x_1=\frac{5\cdot 144+4\cdot 2625}{144+2625}=4{,}05.$$

$$\alpha_1=4,\ \beta_1=4,50;\ f(\alpha_1)=-144,\ f(\beta_1)=-116,45$$

$$x_2=4{,}2\cdots$$

如是多用幾次，可得較逼近於眞之根爲 4,2058696.

此外尚不少其他近似解法，今姑不及。