Dr. GUSTAV ZEUNER.

ABHANDLUNGEN

AUS DER

MATHEMATISCHEN STATISTIK.

Abhandlungen

aus der

Mathematischen Statistik.

Von

D^R. GUSTAV ZEUNER,

Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.

Mit 27 in den Text eingedruckten Holzstichen und mehreren Tabellen.

LEIPZIG.

VERLAG VON ARTHUR FELIX.

1869.

Druck von David Bürkli in Zürich.

Vorwort.

Unter den Wissenschaftszweigen, die man häufig unter dem allgemeinen Namen »angewandte Mathematik« zusammenfasst, befindet sich derjenige Zweig, der es sich zur Aufgabe macht, die Mathematik, speziell die Sätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bei Behandlung statistischer Fragen anzuwenden, noch in der ersten Entwickelung.

Die geringe Anzahl von Arbeiten dieser Richtung, die bis jetzt bekannt geworden sind und von denen die wichtigsten und in die folgenden Betrachtungen einschlagenden, Erwähnung finden werden, sind als die ersten Anfänge einer neuen Wissenschaft anzusehen, für welche der Name »mathematische oder analytische Statistik« in Vorschlag gekommen ist.

Schon diese Anfänge zeigen aber, welche grosse Zukunft unserer heutigen Statistik noch bevorsteht und lassen erwarten, dass in der Statistik im Verein mit der Analysis eine Wissenschaft erblühen wird, die wie keine andere auf die Mathematik gegründete, selbst Astronomie, Mechanik, Physik nicht ausgenommen, den grössten Einfluss auf die Entwickelung unserer Cultur üben wird.

Bis jetzt sind fast ausschliesslich nur gewisse Theile der Bevölkerungsstatistik Gegenstand mathematischer Untersuchungen geworden, weil solche zunächst Anknüpfungspunkte für analytische Behandlung geboten haben und weil sich allen denjenigen Mathematikern, die sich mit der Untersuchung und Organisation von Lebensversicherungs-Anstalten zu beschäftigen hatten, zunächst die Frage aufdrängen musste, ob das vorhandene statistische Material als zuverlässig genug angesehen werden könne, um darauf die so ausserordentlich wichtigen Versicherungsrechnungen zu basiren.

Diese von einsichtigen Mathematikern angestellten Prüfungen haben nun keineswegs zu befriedigenden Resultaten geführt, vielmehr den Beweis geliefert, dass es, zunächst wenigstens in der Bevölkerungsstatistik, dringend nothwendig ist, für den beobachtenden Statistiker auf Grund analytischer Voruntersuchungen Regeln abzuleiten, nach denen er seine Beobachtungen anzustellen und das erhaltene Material zu ordnen hat, damit es dann für weitere analytische Untersuchungen verwerthet werden kann; denn nur die Analysis kann uns zur Feststellung rationeller Beobachtungsmethoden führen und andrerseits wieder als Basis dienen bei der Diskussion der Beobachtungsresultate und der Erforschung der Naturgesetze, denen die beobachteten Erscheinungen unterworfen sind.

Schon die ersten Schritte einer mathematischen Behandlung der Frage über Sterblichkeit und menschliche Lebensdauer führten auf die Unhaltbarkeit der bis dahin bei Aufstellung von Mortalitätstafeln befolgten Methoden und lassen den grössern Theil der bis jetzt vorhandenen Tabellen solcher Art von zweifelhaftem Werthe erscheinen; unter solchen Verhältnissen sind natürlich auch die aus solchen Untersuchungen abgeleiteten sogenannten Gesetze über Sterblichkeit keineswegs als so sicher begründet anzusehen, wie es in statistischen Schriften oft dargestellt wird.

Im Weitern hat sich aber auch herausgestellt, dass die Resultate von Volkszählungen, die Zusammenstellungen in Todtenlisten, die Beobachtungen über Zusammensetzung der Bevölkerungen nach Altersklassen, Geschlecht u. s. w. von den statistischen Centralstellen meist nicht in einer für analytische Untersuchungen geeigneten Weise veröffentlicht werden, während wieder andere Fragen, die speziell auch noch für das Versicherungswesen von hervorragender

Bedeutung wären, wie die Fragen nach Erkrankungen und Krankheitsdauer, nach Eintritt der Invalidität in gewissen Berufszweigen, nach den Altersverhältnissen der Heirathenden, nach der Vertheilung der verheirathet und unverheirathet Lebenden und Gestorbenen auf die einzelnen Altersclassen, nach Zahl, Geschlecht und Altersverhältnissen der aus der Lösung von Ehen durch Sterbefälle hervorgehenden Waisen u. s. f. bis jetzt nur flüchtig berührt, grössern Theiles aber noch gar nicht der Beobachtung und speziellen Betrachtung unterworfen worden sind. Mit diesem flüchtigen Hinweis auf vorhandene Lücken soll übrigens durchaus kein Vorwurf gegenüber den Statistikern ausgesprochen werden; in Hinblick auf den grossartigen Aufschwung und die rasche Entwickelung unserer heutigen Statistik wäre das mehr als ungerecht; aber hervorheben wollten wir, dass die Mathematiker mehr, als es bis jetzt geschehen ist, ihre Aufmerksamkeit statistischen Fragen zuwenden sollten; denn schon unter den wenigen vorhin bezeichneten Fällen treten bei näherer Betrachtung einige hervor, bei denen man sogleich die Ueberzeugung gewinnt, dass eine Inangriffnahme derselben ohne gründliche mathematische Voruntersuchungen von gar keinem oder sehr zweifelhaftem Erfolge sein müsste.

Seit vielen Jahren schon bin ich durch zahlreiche Untersuchungen, die mir in Fragen des Lebensversicherungswesens zufielen, auf die Studien geführt worden, welche zum Theil den Gegenstand vorliegender Schrift bilden und in den Vorlesungen, die ich von Zeit zu Zeit am eidgenössischen Polytechnikum über »Theorie der Lebensversicherungen« halte, musste ich neben den Hauptlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung natürlich jederzeit auch eine Diskussion der statistischen Grundlagen als Einleitung vorausschicken. Die wiederholte Prüfung der letztern führte mich auf eine Reihe von einzelnen Arbeiten aus dem Gebiete der »mathematischen Statistik«, die mir der Veröffentlichung nicht unwerth schienen; als ich aber eben mit dem Ordnen des Materiales im vorigen Jahre beschäftigt war, erschien das ausgezeichnete Werk von Knapp, »Ueber die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik. Leipzig 1868.« Nach dem ersten Studium dieses Werkes entschloss ich mich, meine eigenen Arbeiten zurückzulegen; bei wiederholtem Durchgehen der Knapp'schen Schrift ergab sich mir aber denn doch, einestheils, dass diejenigen Ergebnisse meiner Studien, die hier in der zweiten und dritten Abhandlung niedergelegt sind, durch die Knapp'schen Sätze nicht nur nicht geändert werden, sondern selbst mit diesen Sätzen in direkte Beziehung gesetzt werden können, andern theils fand ich, dass die Knapp'schen Untersuchungen, selbst in verallgemeinerter Form, doch auf viel einfacherem Wege sich mathematisch darlegen lassen. Diese veränderte und nach verschiedenen Richtungen hin wesentlich erweiterte Untersuchung lieferte mir nachträglich den Stoff der ersten Abhandlung vorliegender Schrift.

Nur in Betreff der dritten Abhandlung »Ueber Unfallversicherung« halte ich endlich noch eine Bemerkung für nöthig. Jch zähle die Theorie der Versicherungen nicht dem Gebiete der mathematischen Statistik zu und unterliess daher in der ersten und zweiten Abhandlung jeden Hinweis auf die ganz nahe liegende Frage der Versicherung auf Tod resp. Invalidität und die Ableitung der Grundgleichungen für Prämien- und Reserveberechnungen; in der dritten Abhandlung bei Besprechung der Unfälle musste ich dagegen aus dem angegebenen Gebiete heraustreten und die Formeln der bezeichneten Art, wenigstens in Näherungsform, hinstellen, um an der Hand derselben rückwärts auf die Wahrscheinlichkeitswerthe schliessen zu können, welche die bestehenden Unfallversicherungsanstalten ihren Prämientarifen zu Grunde gelegt haben. Zum Zwecke der Gründung einer neuen Anstalt solcher Art würde ich selbst diese Formeln durch andere, vollständigere, ersetzen.

Zürich, im September 1869.

Gustav Zeuner.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erste Abhandlung.

Mathematische Untersuchungen über Sterblichkeit.

Zweite Abhandlung.

Mathematische Untersuchungen über Invalidität.

Dritte Abhandlung.

Mathematische Grundlagen der Unfallversicherung.

Anhang.

ERSTE ABHANDLUNG.

Mathematische Untersuchungen

über

Sterblichkeit.

Vorbemerkungen.

Durch die wissenschaftlichen Untersuchungen der neuern Zeit ist man dazu gelangt, die Mortalitätstabellen, welche das Sterblichkeitsgesetz darlegen sollen, in anderer, als der bisher gebräuchlichen Form darzustellen; man zieht jetzt nämlich vor, für jedes Lebensalter, dasselbe in vollen Jahren ausgedrückt, die Wahrscheinlichkeit anzugeben, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben, oder statt dessen auch die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des nächsten Jahres zu sterben. Es ist gleichgültig, welche von beiden Angaben man wählt; ist nämlich für ein bestimmtes Alter die Wahrscheinlichkeit, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben: p, so ist diejenige, im Laufe des nächsten Jahres zu sterben: $1 - p$.

Bezeichne ich nun die Wahrscheinlichkeit für das Alter 0, d. h. für einen Neugebornen, am Ende des ersten Jahres noch zu leben mit p_1, ferner die Wahrscheinlichkeit für den Einjährigen, das Alter von zwei Jahren zu erreichen, mit p_2, die des Zweijährigen am Ende des dritten Jahres noch zu leben mit p_3 u. s. w., so würde die Mortalitätstabelle eine Form annehmen, wie sie durch die ersten drei Columnen der folgenden Zusammenstellung angedeutet ist. Mit Hülfe der Werthe der zweiten Columne bestimmt sich dann leicht auch nach bekannten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit für einen Neugebornen, nach einer gewissen Reihe von Jahren noch zu leben, durch das Produkt aller dem Endtermin vorhergehenden Werthe von p; so erhält man z. B. für den Neugebornen die Wahrscheinlichkeit, am Ende des zweiten Jahres noch zu leben, $p_1 p_2$, oder die, für das Ende des dritten Jahres $p_1 p_2 p_3$ u. s. w., und in dieser Art die Werthe der vierten Columne folgender Tafel. (a. f. S.)

Multiplicirt man alle Werthe der vierten Columne mit ein und derselben grossen Zahl, z. B. mit 10000, wenn dort die einzelnen Werthe der Wahrscheinlichkeiten auf vier Dezimalstellen gegeben sind, so erhält man nun die Mortalitätstafel in der längst gebräuchlichen und gewöhnlichen Form, in der sie bei Versicherungsrechnungen direct Verwendung findet.

1.	2.	3.	4.
	Wahrscheinlichkeit,		Wahrscheinlichkeit für den Neugebornen, das entsprechende Altersjahr zu erreichen.
Alter in Jahren.	am Ende des nächsten Jahres noch zu leben.	im Laufe des nächsten Jahres zu sterben.	
0	p_1	$1-p_1$	
1	p_2	$1-p_2$	p_1
2	p_3	$1-p_3$	$p_1 p_2$
3	p_4	$1-p_4$	$p_1 p_2 p_3$
4	.	.	$p_1 p_2 p_3 p_4$
.	.	.	.
.	.	.	.

Die einzelnen Zahlenwerthe drücken dann aus, wie viel von 10000 gleichzeitig Gebornen in den einzelnen spätern Altersjahren noch am Leben sind und man erkennt dann deutlich das Gesetz, nach welchem eine Gesellschaft von Personen gleichen Alters von Jahr zu Jahr durch den Tod gelichtet wird; vollends wenn man noch die Werthe durch Zeichnung der sogenannten Mortalitätscurve graphisch vor Augen führt, indem man das Alter als Abscisse und die Anzahl der Lebenden dieses Alters als Ordinaten aufträgt.

Wie erwähnt, ist diese Darstellung des Sterblichkeitsgesetzes die gewöhnliche und längst gebräuchliche und bei Versicherungsrechnungen direct weiter zu verwenden; verschiedene Mortalitätstafeln dieser Form sind aber, wie das so oft übersehen wird, ganz und gar ungeeignet zu einem Vergleiche, und bei der Herstellung solcher Tafeln sollte auch die Bestimmung der Anzahl der Lebenden in verschiedenen Altern, oder, was im Grunde dasselbe ist, die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitswerthe der Col. 4 obiger Zusammenstellung nicht als das nächste Ziel der Untersuchung angesehen werden. Man kann nämlich behaupten und der Beweis wird aus dem Folgenden sich ergeben, dass alles bis jetzt aus Volkszählungs- und Todtenlisten geschöpfte statistische Material ungeeignet und unzureichend ist, direct diese genannten Werthe mit der erforderlichen Genauigkeit zu ermitteln; vielmehr sollte man behufs Ermittlung des Sterblichkeitsgesetzes einer bestimmten Bevölkerungsklasse sein Augenmerk zunächst ausschliesslich auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitswerthe der Col. 2 unserer obigen Tabelle richten; denn nur für diese ist ein Theil des vorhandenen statistischen Materiales mit einiger Zuverlässigkeit benutzbar, oder besser, neues Material leicht zu gewinnen.

Diese Behauptung zugegeben — ihre Richtigkeit wird durch die weitern Untersuchungen nachgewiesen werden — hat sich demnach die mathematische Mortalitätsstatistik in erster Linie mit der Lösung eines Problemes zu beschäftigen, das sich, etwas verallgemeinert, durch folgende Frage ausdrücken lässt:

»Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p für einen »Menschen von bestimmtem Alter, z. B. vom Alter m, »nach t Jahren noch zu leben, d. h. das Alter $m+t$ zu »erreichen?«

Der Lösung dieses Problemes auf analytischem Wege müssen zunächst in gehöriger Form gemachte Beobachtungen voraus gehen; es wird daher vor Behandlung dieser Aufgabe vor Allem die Frage erörtert werden müssen, in welcher Weise man auf zuverlässige Beobachtungsresultate gelangen kann und dann würde auch im Weitern, wie bei allen Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Werth, die Zuverlässigkeit oder das Gewicht des endlichen Rechnungsresultates der Prüfung unterworfen werden müssen.

Angenommen, man hätte beobachten können, — in Wirklichkeit ist das direct, wie sich zeigen wird, unmöglich — wie viel von a Lebenden von genau gleichem Alter m nach t Jahren noch am Leben waren und es sei die Anzahl derselben a_1 gefunden worden, so verhält sich's mit dieser Beobachtung gerade so, als hätte man aus einer Urne, die eine ausserordentlich grosse Anzahl von schwarzen und weissen Kugeln enthält, a Mal gezogen, dabei (vorausgesetzt, die gezogene Kugel sei jedes Mal wieder eingelegt worden) im Ganzen a_1 Mal weiss und $a - a_1$ Mal schwarz gezogen und es käme nun darauf an, auf Grund dieser Beobachtung die einfache Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen Kugel, oder mit andern Worten zu ermitteln, in welchem Verhältniss die Anzahl der weissen Kugeln zur Gesammtzahl aller Kugeln steht.

Die unbekannte Wahrscheinlichkeit x des Zuges einer weissen Kugel kann hier noch jeden zwischen 0 und 1 liegenden Werth haben. Nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber auf Grund der gemachten Beobachtung die Wahrscheinlichkeit h der Hypothese, dass ein bestimmter Werth von x der wahre ist:

$$h = \frac{x^{a_1}(1-x)^{a-a_1}\,dx}{\int_0^1 x^{a_1}(1-x)^{a-a_1}\,dx}$$

Das Integral im Nenner hängt nur von a_1 und a ab, daher sind die Wahrscheinlichkeiten aller der verschiedenen Hypothesen nur vom Werthe des Zählers dieses Bruches abhängig; an sich ist für jede einzelne Hypothese die Wahrscheinlichkeit h unendlich klein; es existirt aber unter allen eine Hypothese, für welche die Wahrscheinlichkeit ein Maximum ist, d. i. nämlich diejenige, für welche man hat

$$x^{a_1}(1-x)^{a-a_1} = \text{Maximum}$$

und hieraus bestimmt sich:

$$x = \frac{a_1}{a}$$

als die einfache Wahrscheinlichkeit für den Zug einer weissen Kugel »nach derjenigen Hypothese, deren Wahrscheinlichkeit auf Grund der gemachten Beobachtung ein Maximum ist,« oder wie sich auch kurz sagen lässt, es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese.

Für den Fall, der uns nun hier speciell beschäftigt, ist der vorstehende Werth sonach auch für einen m-jährigen Menschen die Wahrscheinlichkeit, nach t Jahren noch zu leben, unter Annahme der wahrscheinlichsten Hypothese.

Dieser Werth von x ist es, den man unter der Voraussetzung $t = 1$ für jedes Alter bestimmen und als Werth von p in die Mortalitätstabelle (zweite Columne obiger Zusammenstellung) eintragen würde.

Der wahre Werth von p lässt sich freilich nicht ermitteln, wohl aber lässt sich durch fortgesetzte Beobachtungen der angegebenen Art der Werth x dem wahren Werthe p näher und näher bringen. Nach dieser Bemerkung könnte es allerdings richtiger erscheinen, den Ueberschriften der Mortalitätstabellen: »Wahrscheinlichkeit, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben,« oder »im Laufe des nächsten Jahres zu sterben«, den Zusatz »nach der wahrscheinlichsten Hypothese« beizufügen; für den Mathematiker kann aber hierüber kein Zweifel herrschen, da man es bei allen statistischen Untersuchungen mit der Wahrscheinlichkeit a posteriori zu thun hat, ich werde daher auch dem Gebrauche gemäss im Folgenden den Zusatz weglassen. Dagegen sollte aber nie unterlassen werden, den mittlern oder wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung zu bestimmen und gleichfalls anzugeben. Bei einer Mortalitätstabelle der oben angedeuteten Form würden die Angaben solcher Art bei den Werthen der Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Alters erst den richtigen Massstab bei Beurtheilung des Werthes der ganzen Tabelle an die Hand geben. Man sollte also nie versäumen, die Anzahl der beobachteten Fälle, welche den berechneten Wahrscheinlichkeitswerthen zu Grunde liegt, anzugeben, ebenso die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass der wahre Werth der Wahrscheinlichkeit p zwischen gegebene Grenzen hineinfällt u. s. f. Es liegt nun aber nicht in meiner Absicht, an diesem Orte auf diese zuletzt angedeuteten Untersuchungen näher einzutreten; denn das sind Fragen, die nach den Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich ohne Schwierigkeit lösen lassen.

Der Zweck der folgenden Mittheilungen ist vielmehr, zu untersuchen, wie man die, der wahrscheinlichsten Hypothese entsprechende Wahrscheinlichkeit p eines Menschen vom Alter m, nach t Jahren noch zu leben, ermitteln kann, ob die vorhandenen statistischen Erhebungen bei Volkszählungen und die Angaben der Todtenlisten hierzu hinreichend sind, und wenn nicht, wie die Beobachtungen angestellt und verwerthet werden müssten, um die vorgelegte Frage zu beantworten. Untersuchungen der angegebenen Art erscheinen dem Leser vielleicht als solche, die längst ihre Erledigung gefunden haben und die ihrer Einfachheit wegen kaum weitere Besprechung verdienen und doch ist es nicht an dem. Erst in der neuesten Zeit hat Knapp in seiner schon im Vorwort erwähnten, meisterhaft geschriebenen Abhandlung überzeugend nachgewiesen, wie wenig die von den statistischen Centralstellen veröffentlichten Volkszählungs- und Sterbelisten geeignet sind, auf die oben gestellte einfache Frage Antwort zu geben und welche Ungenauigkeiten, um nicht zu sagen Unrichtigkeiten, den meisten der nach dieser Richtung bis jetzt ausgeführten Beobachtungen und Berechnungen anhängen. Ich werde mich in dem Folgenden z. Th. auf Knapp's Arbeit beziehen, die von ihm schon gegebenen Sätze jedoch zunächst in anderer und wie ich glaube, in einfacherer und übersichtlicherer Weise ableiten.

Ueber die verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden.

Wenden wir uns zur nähern Betrachtung der Frage, die oben als die wichtigste der Mortalitätsstatistik bezeichnet wurde, so erscheint deren Lösung auf den ersten Blick als ausserordentlich leicht. Um für einen m-jährigen Menschen die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass er nach t Jahren noch lebt, hätte man nur zuzusehen, wie viel von a Personen, sämmtlich von gleichem Alter m, nach t Jahren noch am Leben sind; ist ihre Anzahl a_1, so wäre sofort das Verhältniss $a_1 : a$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der wahrscheinlichsten Hypothese. Das Resultat ist um so zuverlässiger, d. h. der Fehler in demselben um so kleiner, je grösser die Anzahl der Personen ist, die man der Beobachtung unterwirft. In dieser Forderung, möglichst viele bestimmte Personen von gleichem Alter während der Zeit t im Auge zu behalten, hat man nun jederzeit die Hauptschwierigkeit der praktischen Lösung der Frage gefunden; es tritt jedoch zu dieser Schwierigkeit noch eine andere hinzu, auf welche im Grunde genommen zuerst Knapp mit Entschiedenheit hingewiesen hat; sie liegt nämlich in der Erfüllung der Bedingung, eine möglichst grosse Anzahl von Personen von genau gleichem Alter der Beobachtung zu unterwerfen; diese Bedingung ist aber im mathematischen Sinne unerfüllbar; denn gleich alt können im jetzigen Augenblicke in solchem Sinne nur diejenigen sein, die im gleichen Zeitpunkte, aber nicht innerhalb einer willkührlichen Zeitstrecke, z. B. innerhalb eines Kalenderjahres, geboren sind. Die Geburtenmengen sind vielmehr als eine stetige Funktion der Zeit aufzufassen; die Anzahl der Geburten in einem Zeitmomente und ebenso die Anzahl von Personen von gleichem Alter ist unendlich klein, mag die Bevölkerung, aus der man seine Beobachtungen schöpft, auch noch so beträchtlich sein. Fasst man Geburtenmengen oder Personenmengen höhern Alters aus kürzern oder längern Zeitstrecken zusammen, so muss bei Beurtheilung und Benutzung der entsprechenden Zahlenwerthe mit Vorsicht verfahren werden und diese Vorsicht wird bei statistischen Erhebungen nur zu wenig befolgt. In dem Uebersehen des Umstandes, dass die Geburten in stetiger Aufeinanderfolge stattfinden und in der willkührlichen Annahme, dass man sich ohne Fehler die Geburtenmenge aus einer bestimmten Zeitstrecke jederzeit auf einen bestimmten Zeit punkt vereinigt denken könne, ist es, wie Knapp mit Recht so bestimmt hervorhebt, begründet, dass die bisherigen Mittheilungen der Resultate statistischer Erhebungen so wenig geeignet sind, das Sterblichkeitsgesetz auf analytischem Wege zu erforschen.

Bei den Zusammenstellungen von Lebenden oder Verstorbenen sollte man nach Knapp drei Zeitwerthe unterscheiden, den Zeitpunkt der Geburt, das Alter und den Zeitpunkt, für den das angegebene Alter gültig ist; der erstere Zeitpunkt heisse die »Geburtszeit«, der letztere die »Zählungszeit« (Knapp nennt sie »Erfüllungszeit«). Bezeichnen wir die Geburtszeit, die immer von Christi Geburt abgerechnet werden mag, mit t, das Alter mit x und die Zählungszeit, wie die Geburtszeit gerechnet, mit τ, so ist offenbar

$$\tau = t + x.$$

Man denke sich nun drei im Raume senkrecht auf einander stehende Axen OX, OY und OZ (Fig. 1) und die Geburtszeiten auf die Axe OY aufgetragen; der Coordinatenanfangspunkt O entspreche einem gewissen festen Zeitpunkte, z. B. dem von Christi Geburt; angenommen im Weitern, man habe innerhalb des Zeitraumes t_1 bis t_2 hin die Anzahl aller Geburten in einer bestimmten Bevölkerung und deren Vertheilung

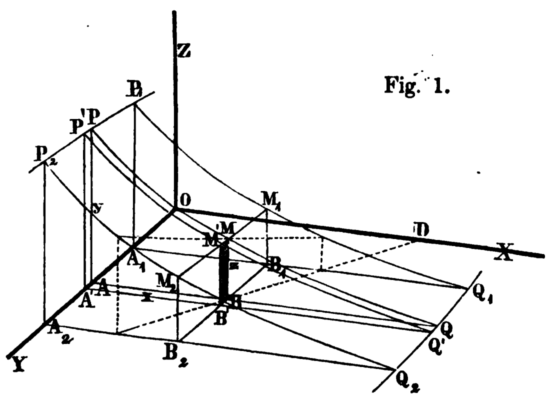


Fig. 1.

beobachtet, so liesse sich das Resultat solcher Beobachtungen in der Art graphisch dargestellt denken, dass man auf die Axe OY $OA_1 = t_1$ und $OA_2 = t_2$ aufträgt und die ganze Geburtenzahl im Zeitraume t_1 bis t_2 durch eine Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ darstellt, die durch die Curve $P_1 P P_2$ begrenzt ist. Man sieht leicht die Bedeutung dieser Curve ein; die Ordinaten derselben geben ein Bild von der Vertheilung der Geburten auf den ganzen Zeitraum und stellen die Geburten-Dichtigkeit für die einzelnen Zeitpunkte dar.

Für den Zwischenzeitraum $OA = t$ bis $OA' = t + dt$ repräsentirt der Flächenstreifen $AA'P'P$ die Geburtenmenge und diese ist, wenn $AP = y$ die der Abscisse $OA = t$ entsprechende Ordinate ist:

$$y\,dt,$$

so dass also die Geburtenmengen, die wir mit $V(0)$ bezeichnen, für den ganzen Zeitraum t_1 bis t_2 sich durch den Ausdruck:

$$V(0) = \int_{t_1}^{t_2} y\,dt \tag{1}$$

darstellen lässt.

Die Curve P_1PP_2, die wir die Geburtencurve nennen wollen, wäre bei gleichmässiger Vertheilung der Geburten über den ganzen Zeitraum t_1 bis t_2, d. h. bei constanter Dichtigkeit y, eine der Axe OY parallele Gerade; im Allgemeinen werden aber mehr Menschen geboren als sterben, die Geburtendichtigkeit y nimmt zu und daher erhebt sich die Curve allmälig. Ueber ihren Verlauf mögen zunächst keine weitern Annahmen gemacht werden.

Die in der Zeit t bis $t + dt$ Gebornen, deren Anzahl durch $y\,dt$ dargestellt wurde, sterben nun allmälig aus; das Gesetz, nach welchem das Aussterben erfolgt, lässt sich wieder einfach graphisch darlegen. Man lege durch die beiden Ordinaten AP und $A'P'$ zwei Ebenen parallel der Coordinatenebenen XOZ und denke sich in diesen die beiden Curven PMQ und $P'M'Q'$ gezogen, die wir die Absterbecurven nennen wollen und die in Q und Q' die Horizontalebenen schneiden. Legen wir weiter in der Entfernung $AB = x$ von der Ebene YOZ einen dieser Ebene parallelen Schnitt und bezeichnen wir die Ordinaten BM der beiden unendlich nahe an einander liegenden Absterbecurven mit z, so repräsentirt nun ohne Weiteres der Flächenstreifen $BMM'B' = z\,dt$ die Anzahl derjenigen, welche von den $y\,dt$ in der Zeit t bis $t + dt$ Gebornen das Alter von x Jahren erreichen.

Die ganze Schnittfläche $B_1M_1M_2B_2$, die mit $V(x)$ bezeichnet werden mag (vorausgesetzt, es seien auch durch die Endpunkte P_1 und P_2 der Endordinaten A_1P_1 und A_2P_2 die Absterbecurven $P_1M_1Q_1$ und $P_2M_2Q_2$ gelegt), bestimmt sich durch die Formel

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2} z\,dt \tag{2}$$

und giebt an, wie viel von den im Zeitraume t_1 bis t_2 Gebornen das Alter von x Jahren erreichen und zwar geschieht das innerhalb des Zeitraumes $t_1 + x = \tau_1$ bis $t_2 + x = \tau_2$. Die Curve $M_1 M M_2$ giebt zugleich ein Bild von der Art der Aufeinanderfolge, in der der Eintritt ins Alter x allmälig stattfindet. Die Fläche $V(x)$ repräsentirt eine Gesammtheit von Lebenden gleichen Alters, die aber zu verschiedenen Zeiten geboren sind (innerhalb des Zeitraumes t_1 bis t_2) und dieses Alter zu verschiedenen Zeiten (innerhalb des Zeitraumes τ_1 bis τ_2) erreichen.

Ist z. B. $t_1 = 1850$ (1. Januar) und $t_2 = 1851$ (1. Januar), sowie $x = 10$ Jahre, so würde nach dem Angegebenen die Fläche (Fig. 1) $A_1 P_1 P_2 A_2 = V(0) = \int_{t_1}^{t_2} y\,dt$ die im Jahre 1850 Gebornen darstellen, dagegen die Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2 = V(x) = \int_{t_1}^{t_2} z\,dt$ diejenigen derselben repräsentiren, welche im Jahre 1860, d. h. die, welche vom 1. Januar 1860 bis 1. Januar 1861

$$\begin{aligned} \text{von } \tau_1 &= t_1 + x = 1850 + 10 \text{ bis} \\ \tau_2 &= t_2 + x = 1851 + 10 \end{aligned}$$

das Alter von 10 Jahren erreichen.

Schon aus diesen vorläufigen Andeutungen geht hervor, welche bedeutungsvolle Rolle die krumme Fläche spielt, die von den Absterbecurven $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$, sowie von der Geburtscurve $P_1 P_2$ und der Curve $Q_1 Q_2$ umschlossen wird. Wären wir im Stande, diese, einer bestimmten Bevölkerungsklasse entsprechende, Fläche darzustellen, so wären damit mit einem Male alle Fragen gelöst, die hinsichtlich der Bevölkerungs-, Geburts- und Sterblichkeitsverhältnisse überhaupt gestellt werden könnten.

Mathematisch gesprochen, betrachte ich die Aufstellung der Gleichung

$$z = f(t, x) \tag{3}$$

dieser krummen Fläche als das entfernte, aber streng mathematisch betrachtet, unerreichbare Ziel, dem alle statistischen Untersuchungen und die analytischen Erläuterungen derselben bezüglich der Bewegung der Bevölkerungen zusteuern müssen. Wäre die Form dieser Funktion bekannt, so wären damit alle bezüglichen Fragen gelöst, die man bis jetzt nur vereinzelt hervorhob und behandelte; selbst

Knapp betrachtet die ganze vorliegende Aufgabe nicht von diesem allgemeinen Gesichtspunkte aus.

Setzt man in Gl. (3) das Alter x constant, so ergiebt sich die Gleichung der Curve $M_1 M M_2$ und somit ein Bild des Gesetzes, nach welchem die Menschen einer bestimmten Bevölkerung allmälig in das Alter x eintreten, der Werth z repräsentirt dann die Dichtigkeit der x-Jährigen in dem betreffenden Zeitpunkte.

Setzt man dagegen $x = o$, so ergiebt sich die Gleichung der Geburtencurve und der Werth $z = y$ repräsentirt dann die Geburtendichtigkeit zur Zeit t.

Die Geburtenmenge aus dem Zeitraume t_1 bis t_2 (nach Knapp die »Generation« dieser Geburtenstrecke) schreibt sich nach Gl. (1)

$$V(0) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dt, \quad \text{wobei } x = o \text{ zu setzen ist.}$$

Die Zahl derjenigen dieser Generation, welche das Alter x erreicht, schreibt sich nach Gl. (2)

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dt, \quad \text{wobei } x \text{ constant vorausgesetzt ist.} \tag{4}$$

Setzt man weiter in Gl. (3) t constant, so ergiebt sich die Gleichung der der Geburtszeit t entsprechenden Absterbecurve.

Von grösserer Wichtigkeit ist im Weitern folgende Betrachtung, da sie in directem Zusammenhange mit den Resultaten der gewöhnlichen Volkszählungen steht.

Die zur Zeit t (richtiger im Zeitraume t bis $t + dt$) Gebornen erreichen das Alter x zur Zeit $\tau = t + x$; ich nenne τ die Zählungszeit, um anzudeuten, dass in diesem Zeitpunkte die Zählung der $x$jährigen, deren Anzahl $z\,dt$ allerdings unendlich klein ist, stattfinde.

Ich will nun annehmen, es sei τ constant, also $\tau = t + x = t_1 + x_1 = t_2 + x_2$, so entspricht diese Annahme einem Verticalschnitte unserer Fläche, dessen Horizontalspur $E C_1 C_2$ (Fig. 2) die Axen OX und OY unter dem Winkel von 45^0 schneidet. Die Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ hat eine sehr wichtige Bedeutung; die Projection des Flächenstreifens $C N N' C'$ auf die Ebene $Y O Z$ nämlich $A S S' A'$ ist $z\,dt$, d. h. sie ergiebt die Anzahl derjenigen, die aus der Geburtszeit t bis $t + dt$ das Alter x erreichten oder zum

Zeitpunkte $\tau = t + x$ **noch am Leben sind.** Es begreift sich nun sofort, dass die Projection $A_1 S_1 S_2 A_2$ der **ganzen** Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ auf die Ebene YOZ die Anzahl der Personen repräsentirt, welche im Zeitraume $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ geboren wurden und die zum Zeitpunkte τ, d. h. zur Zeit der Volkszählung in diesem Zeitpunkte noch am Leben sind.

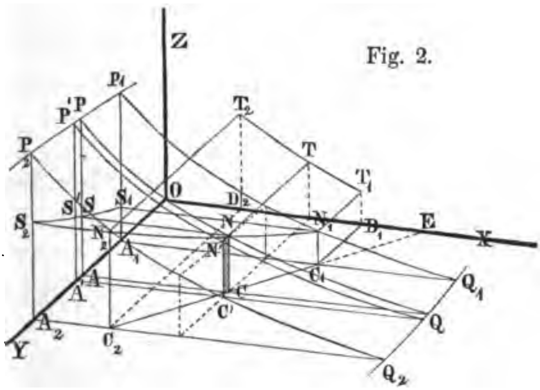


Fig. 2.

Alle diese Personen leben gleichzeitig, sind aber zu verschiedenen Zeiten geboren (zwischen t_1 und t_2) und sind von verschiedenem Alter; ihr Alter fällt zwischen $A_2 C_2 = x_2$ und $A_1 C_1 = x_1$ und zwar ist

$$x_2 = \tau - t_2 \text{ und } x_1 = \tau - t_1.$$

Die Curve $S_1 S S_2$ deutet durch ihren Verlauf, oder besser gesagt, durch die Art der Abgrenzung der Fläche $A_1 S_1 S_2 A_2$ an, wie sich die aus der Geburtszeit t_1 bis t_2 stammenden und zur Zeit τ der Volkszählung lebenden Personen **über die Geburtsstrecke vertheilen.**

Wäre die Gleichung unserer Fläche

$$z = f(x, t)$$

gegeben, so fände sich daraus sofort die Gleichung der Curve $S_1 S S_2$; substituirt man nämlich $x = \tau - t$, so folgt diese Gleichung

$$z = f\Big((\tau - t), t\Big) \text{ wobei } \tau \text{ constant.} \qquad (5)$$

Die Volkszählung liefert dann an Lebenden aus der Geburtsstrecke t_1 bis t_2, deren Anzahl wir mit $V(\tau)$ bezeichnen wollen,

$$V(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} f\Big((\tau - t), t\Big)\, dt, \text{ wobei } \tau \text{ constant ist} \qquad (6)$$

(Inhalt der Fläche $A_1 S_1 S_2 A_2$).

Man kann die Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ auch auf die Coordinatenebene XOZ projiciren, man erhält dann die Fläche $D_1 T_1 T_2 D_2$, deren Inhalt ebenfalls $V(\tau)$ ist, also ebenfalls die Anzahl der zur Zeit τ der Volkszählung lebenden und aus der Geburtszeit stammenden Personen repräsentirt.

Die Curve $T_2 T T_1$, deren Gleichung

$$z = f\Big(x, (\tau - x)\Big) \tag{7}$$

ist (wobei τ constant zu setzen ist), giebt an, wie sich diese Personen dem Alter nach auf die Strecke

$$D_2 D_1 = x_1 - x_2 = t_2 - t_1 \text{ vertheilen;}$$

das niedrigste Alter ist $OD_2 = x_2 = \tau - t_2$, das höchste $OD_1 = x_1 = \tau - t_1$.

Der Flächeninhalt ist

$$V(\tau) = \int_{x_2}^{x_1} f\Big(x, (\tau - x)\Big)\, dx \quad \text{(für } \tau \text{ constant)} \tag{8}$$

Ersetzt man hier x durch $\tau - t$ und setzt ebenso die Grenzen $x_1 = \tau - t_1$ und $x_2 = \tau - t_2$, so muss sich der gleiche Werth wie nach Gl. (6) ergeben, wie das schon angedeutet wurde.

Für die gewöhnlichen Betrachtungen ist es übrigens nicht einmal immer nöthig, die Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ erst auf eine der beiden Coordinatenebenen zu projiciren, man kann sich direct ihren Flächeninhalt bestimmt denken und erhält dann den Werth $V(\tau)$ der Gl. (6) oder (8), wenn man den Inhalt durch $\sqrt{2}$ dividirt.

Als Beispiel zu vorstehenden Sätzen wollen wir annehmen, es $t_1 = 1850$ (1. Januar) und $t_2 = 1851$ (1. Januar); die Anzahl der Gebornen innerhalb dieses Jahres sei durch die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ (Fig. 2) dargestellt. Es finde nun zur Zeit $\tau = 1867$ (1. Januar) eine Zählung dieser im Kalenderjahre 1850 gebornen und noch lebenden Personen statt. Die Anzahl derselben ist dann durch die Projection der Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ auf eine der beiden verticalen Coordinatenebenen dargestellt. Alle diese Personen stehen im Alter $x_2 = \tau - t_2 = 1867 - 1851 = 16$ bis

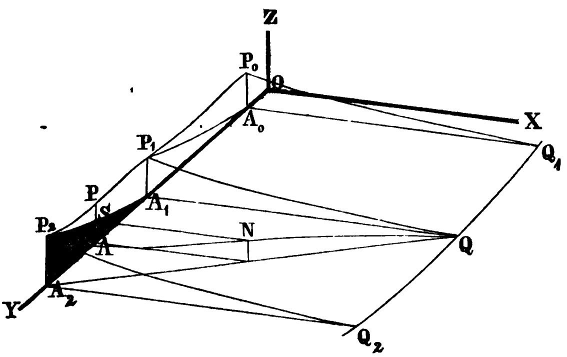
$$x_1 = \tau - t_1 = 1867 - 1850 = 17$$

Jahren u. s. w.

Die zuletzt angestellten Betrachtungen führen übrigens zu einem recht klaren Einblick in die Bedeutung der Resultate unserer

Volkszählungen. Denke man sich die ganze Geburtenstrecke OA_1 bis OA_2 (Fig. 3), d. h. t_1 bis t_2 sei so gross, wie das höchste Alter, welches überhaupt beobachtet wird, beispielsweise 100 Jahre; ferner denke man, um den Wohnortswechsel ausser Einfluss zu setzen, an sämmtliche auf der Erde lebenden Menschen, so wird die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ die Summe aller binnen 100 Jahren Geborenen darstellen, und die Curve $P_1 P P_2$ giebt das Gesetz der Aenderung der Geburtendichtigkeit; setzen wir ferner das Gesetz der Absterbecurven,

Fig. 3.



überhaupt das Gesetz unserer krummen Fläche $P_1 Q Q_2 P_2$ als bekannt voraus, so würde nun eine Zählung aller auf der Erde lebenden Menschen auf eine Bevölkerungszahl führen, die durch den Flächeninhalt $A_1 S P_2 A_2$ (vertical schraffirt) repräsentirt wird; diese Fläche findet sich nach Obigem, wenn man der Zählungszeit $\tau = t_2$ entsprechend durch $A_2 P_2$ eine Verticalebene legt, die um 45^0 gegen die beiden verticalen Coordinatenebenen geneigt ist und wenn man die entsprechende Schnittfläche $A_2 P_2 Q$ auf die Ebene YOZ projicirt. Die Curve $A_1 S P_2$, oder besser die von ihr begrenzte, in Verticalstreifen zerlegte Fläche, giebt dann auch noch das Gesetz der Vertheilung dieser lebenden Bevölkerung nach Alters- und Geburtsclassen an. Da die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ sämmtliche im Zeitraume $A_1 A_2$, d. h. von t_1 bis t_2 Geborne, und die Fläche $A_1 A_2 P_2$ die Anzahl der Personen darstellt, die von den erstern am Ende A_2 des Zeitraumes noch am Leben sind, so giebt offenbar die Differenz beider Flächen, nämlich die Fläche $A_1 P_2 P_1$ die Zahl der Personen, welche von den im Zeitraume t_1 bis t_2 Gebornen im gleichen Zeitraume gestorben sind. Das sind aber nicht die Verstorbenen dieses Zeitraumes überhaupt, weil überdies auch diejenigen noch gestorben sind, die im Anfange A_1 der Zeitstrecke t_1 bis t_2 schon am Leben waren. Um diese Gesammtheit von Verstorbenen zu finden, muss man von A_1 um den ganzen Zeitraum $A_1 A_0$ (100 Jahre) weiter zurückgehen und für diesen die Curve der Lebenden $A_0 P_1$ in gleicher Art bestimmen, wie das vorhin mit der Curve $A_1 P_2$ geschah. Die Fläche $A_0 P_1 P_2 A_1$ giebt dann die Anzahl sämmtlicher Menschen, die im Zeitraume $A_1 A_2$ überhaupt gestorben sind; davon gehört dann die Zahl, welche durch die Fläche $A_1 P_1 P_2$ dargestellt ist, der neueren Generation $A_1 A_2$, und die, durch die Fläche $A_0 P_1 A_1$ gegebene, der älteren Generation $A_0 A_1$ an.

Ein Blick auf die Fig. 3, die wir vorstehenden Betrachtungen zu Grunde legten, zeigt recht deutlich, wie sehr die Resultate unserer Volkszählungen, bei denen die Lebenden nach Alters- oder Geburtsjahren gruppirt werden, vom Verlauf der Geburtencurve beeinflusst werden und ebenso vom Verlauf der unendlich vielen Absterbecurven wie $P_0 Q_1$, $P_1 Q$, $P_2 Q_2$ etc., welche in Verbindung mit ersterer das Gesetz der krummen Fläche darlegen. Denkt man noch an die Bevölkerung eines bestimmten Landes, bei der sich der Zu- und Wegzug geltend macht, so muss man die Ueberzeugung gewinnen, dass unsere Volkszählungen allein noch keineswegs genügen können, einen Einblick in die Bewegung der Bevölkerung zu gewähren. Die Aufgabe, die hier dem Statistiker vorliegt, ist, wie aus unserer Darstellung hervorgehen muss, weit complicirter, als gewöhnlich angenommen wird.

Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zum Ausgangspunkt unserer Untersuchungen zurück. Bei den Betrachtungen, denen wir Fig. 1 und 2 zu Grunde legten, haben wir (nach Knapp's Benennungsweise) zwei verschiedener Gesammtheiten von Lebenden unterschieden. In Fig. 1 ergab die Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2$, die durch $V(x)$ bezeichnet wurde, die Anzahl derjenigen, welche aus der Generation $A_1 A_2$, d. h. aus der Geburtenstrecke $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ das Alter von x Jahren erreichen; diese Personen sind gleich alt, sind aber zu verschiedenen Zeiten geboren und erreichen auch das Alter x nicht gleichzeitig. Nach Knapp's Vorgang nennen wir $V(x)$ die Gesammtheit der Lebenden der ersten Art.

In Fig. 2 dagegen ergab die Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$, oder vielmehr ihre Projection auf eine der beiden verticalen Coordinatenebenen, die Anzahl derjenigen aus der Generation $A_1 A_2$, die zu einem gewissen Zeitpunkte τ (Tag einer Volkszählung) noch am

Leben sind. Wir bezeichneten ihre Anzahl mit $V(\tau)$ und nennen sie, wie Knapp, Gesammtheit der Lebenden der zweiten Art. Man begreift nun, dass diese beiden Gesammtheiten wesentlich von einander verschieden sind; eine Zählung der Lebenden aus einer bestimmten Generation in einem bestimmten Zeitpunkte liefert uns nicht gleich alte Personen (in streng mathematischem Sinn), aus dem Resultate der Zählung können wir daher nicht ohne Weiteres den Schluss ziehen, wie viel Menschen aus einer bestimmten Generation ein bestimmtes Alter erreichen; umgekehrt kann man wieder nicht aus einer Beobachtung der letztern Art eigentliche Zählungsresultate ableiten.

Dieser wesentliche Unterschied zwischen den beiden Gesammtheiten von Lebenden wird nun aber gänzlich verwischt und verdeckt, wenn man sich gleich von vorne herein erlaubt, wie das jetzt noch fast allgemein üblich ist, die willkührliche Annahme zu machen, die in einer gewissen Zeitstrecke Gebornen seien gleichzeitig, d. h. im gleichen Zeitpunkte geboren, also man könne beispielsweise die Geburten in einem ganzen Kalenderjahre als am gleichen Tage, z. B. am 1. Januar dieses Jahres, sich stattgefunden denken. Diese Annahme führt dann sofort zu der weitern, dass die Lebenden in einem spätern Jahre bei der Zählung am 1. Januar auch alle gleich alt sein müssen. Wir haben aber gesehen, dass wegen der Stetigkeit der Geburtenfolge Zählungen an bestimmten Terminen nicht auf gleich alte Personen führen können. Die beiden Flächen $V(x)$ und $V(\tau)$, die die beiden Gesammtheiten von Lebenden darstellen, sind begrifflich verschieden. Es giebt freilich Fälle, in denen die Benutzung der einen oder andern Gesammtheit in gewissen analytischen Ausdrücken auf gleiche oder nahe gleiche Resultate führt; solche Fälle, wie wir sie auch behandeln werden, erfordern aber besondere Voruntersuchungen und vorerst den Nachweis, dass wirklich das Zusammenziehen von Zeitstrecken auf Zeitpunkte erlaubt ist; im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall und daher wird es nothwendig sein, dass man in der Bevölkerungsstatistik endlich diese willkührliche Annahme fallen lässt und die Geburten und den Eintritt in bestimmte Altersklassen als in stetiger Aufeinanderfolge und nicht gleichzeitig stattfindend in ganzen Gruppen sich denkt.

Es gebührt Knapp das Verdienst, den Unterschied der zwischen den beiden Gesammtheiten von Lebenden stattfindet, zuerst mit mathematischer Strenge dargestellt zu haben; er benutzt jedoch hierzu andere Hülfsmittel, als wir im Vorstehenden; seine graphischen Darstellungen (a. a. O.) erscheinen mir nicht recht übersichtlich, da er die Einführung von Raumcoordinaten verschmäht, während doch gerade diese, wie ich bis jetzt schon nachgewiesen zu haben glaube und wie wohl auch aus dem Weitern noch hervorgehen wird, ein recht deutliches und klares Bild über alle Vorgänge, die wir der Untersuchung zu unterwerfen haben, verschaffen. Was die analytische Behandlung der vorliegenden Frage von Seiten Knapp's betrifft, so ist diese nicht anders als geistvoll zu nennen; es ist aber als eine unnöthige Einschränkung zu bezeichnen, dass Knapp von vorn herein die Absterbecurven der verschiedenen Geburtszeiten ($P_1 Q_1$, PQ, $P_2 Q_2$ Fig. 1) als dem gleichen Gesetze unterworfen ansieht, mit andern Worten, dass er die Gleichungen aller dieser unendlich vielen Curven als von gleicher Form annimmt und nur eine Constante derselben (die überdies als Faktor auftretend angenommen wird) von Curve zu Curve ändert.

Wir haben nur angenommen, dass die Absterbecurven wie PMQ (Fig. 1) sich der Horizontalebene XOY nähern und diese (im Punkte Q) endlich durchdringen; ob sie nun alle demselben Gesetze unterliegen oder nicht, ist zunächst ganz gleichgültig; alle von Knapp herrührenden Sätze lassen sich ohne jede weitern Rechnungen aus unserer Fig. 1 ablesen; es bedarf hierzu eigentlich überhaupt nicht des von Knapp benutzten umfänglichen mathematischen Apparates und das ist ein Vortheil. Es wird gut und nützlich sein, in der mathematischen Statistik so lange als möglich die einfachsten Hülfsmittel zu benutzen, weil dadurch eine raschere und grössere Verbreitung ihrer Sätze auch unter denjenigen Statistikern sich erwirken lässt, die nicht zugleich Mathematiker sind.

Recht deutlich tritt der Vortheil unserer Darstellung durch Ableitung der folgenden beiden Sätze hervor, die Knapp analytisch auf Umwegen gewinnt. In Fig. 1 bedeutet die Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2$ die Anzahl derjenigen Personen aus der Generation $A_1 A_2$ (Geburtszeit t_1 bis t_2), welche das Alter von x Jahren erreichen und zwar geschieht das im Zeitraume $\tau_1 = t_1 + x$ bis $\tau_2 = t_2 + x$.

Legt man nun durch die Verticale BM, deren Coordinaten t und x sind, eine Schnittfläche unter 45^0 gegen die Ebene XOZ, so giebt nach Obigem die Projection dieser (in der Figur punktirten)

Schnittfläche auf YOZ die Anzahl der Lebenden aus der Generation $A_1 A_2$, auf welche eine Zählung zum Zeitpunkte $\tau = t + x$ führen würde. Man kann nun offenbar diese Schnittfläche so legen, d. h. die Durchschnittslinie MB so wählen, dass die Projection dieser Fläche gleich der Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2$ wird und daraus folgt der Satz, dass jederzeit innerhalb der Zeitpunkte $\tau_1 = t_1 + x$ bis $\tau_2 = t_2 + x$ ein Zeitpunkt $\tau = t + x$ existirt, in welchem eine Zählung der Lebenden aus der Generation t_1 bis t_2 zugleich die Anzahl derjenigen ergiebt, welche aus der gleichen Generation das Alter x erreichen. (S. Knapp a. a. O.) Ich werde später bei der Ableitung gewisser Näherungsformeln von diesem Satze nützlichen Gebrauch machen.

Ein ähnlicher Satz leitet sich aus Fig. 2 ab. Die Fläche $C_1 N_1 N_2 C_2$, oder richtiger deren Projection $A_1 S_1 S_2 A_2$, ergab die Anzahl der lebenden Personen aus der Generation t_1 bis t_2 zum Zeitpunkte einer Zählung $\tau = t_2 + x_2 = t + x = t_1 + x_1$, diese Personen stehen sämmtlich zwischen den Altersgrenzen $x_1 = \tau - t_1$ bis $x_2 = \tau - t_2$. Man kann nun durch CN in der Entfernung x von der Coordinatenebene YOZ, parallel zu dieser, einen Verticalschnitt legen (in Fig. 2 punktirt), dessen Fläche gerade so gross ist, wie die Projection $A_1 S_1 S_2 A_2$, man muss nur die Lage der Durchschnittslinie CN, d. h. das Alter x richtig wählen, dessen Werth aber offenbar zwischen die Altersgrenzen x_1 und x_2 hineinfällt. Hieraus folgt der Satz: Zwischen den beiden Altersgrenzen x_1 und x_2, zwischen welche die Lebenden aus einer bestimmten Generation t_1 bis t_2 zur Zeit τ einer Zählung hineinfallen, existirt immer ein gewisses Alter x, welches von gerade so viel Personen dieser Generation erlebt wird, als sich zur Zeit der Zählung Lebende überhaupt vorfinden. (S. auch Knapp S. 24.) Der Satz ist, wie der vorige, nicht ohne Weiteres zu verwerthen; man müsste sich denn erlauben, über den Verlauf der Geburtencurve und der Absterbecurven bestimmte Annahmen zu machen.

Ueber die verschiedenen Gesammtheiten von Verstorbenen.

Die vorstehenden Betrachtungen haben uns zunächst im Allgemeinen einen Einblick in die Bedeutung der Volkszählungen verschafft und gezeigt, dass man zwei Gesammtheiten von Lebenden zu unterscheiden hat; die Zahl derjenigen, die gleichzeitig leben, von denen unterscheiden muss, die das gleiche Alter erreichen. Wir müssen nun, bevor wir auf die eigentliche Hauptfrage zurückgehen, zunächst auch die Bedeutung derjenigen statistischen Erhebungen näher beleuchten, die sich auf die Verstorbenen beziehen.

Hier unterscheide ich mit Knapp drei verschiedene Gesammtheiten von Gestorbenen:

1) Anzahl derjenigen Personen, die aus der gleichen Geburtenstrecke stammend, zwischen bestimmten Altersgrenzen sterben.
2) Anzahl derjenigen Personen, welche aus der gleichen Geburtenstrecke herrührend (Personen derselben Generation) zwischen zwei bestimmten Zählungsterminen sterben.
3) Anzahl derjenigen Personen, welche zwischen zwei bestimmten Zählungsterminen und zwischen bestimmten Altersgrenzen sterben.

Diese drei Gesammtheiten und die aus Betrachtung derselben hervorgehenden Knapp'schen Sätze lassen sich mit Leichtigkeit aus unserer Figur ableiten.

Erste Gesammtheit von Verstorbenen.

Es sei wieder, wie früher, in Fig. 4 die Geburtenstrecke $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ und die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ repräsentire die Anzahl der Geburten in dieser Zeitstrecke t_1 bis t_2; denken wir uns nun wieder die krumme Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ in der von früher bekannten Weise dargestellt, so giebt der Schnitt $B_1 M_1 M_2 B_2$ parallel der Ebene YOZ in der Entfernung x_1, die Anzahl derjenigen, welche aus der Generation t_1 bis t_2 das Alter x_1

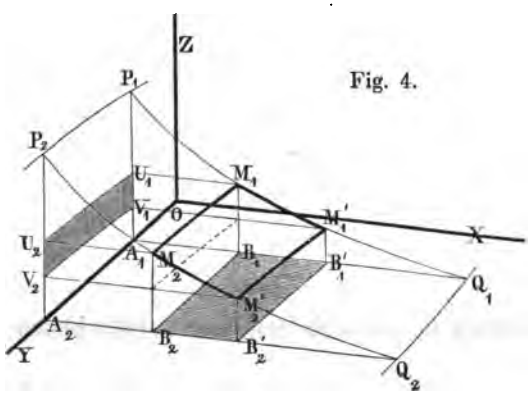


Fig. 4.

erreichen; lege ich dagegen einen zweiten parallelen Schnitt $B'_1 M'_1 M'_2 B'_2$ in der Entfernung x_2, so giebt diese Schnittfläche die Anzahl derjenigen, die aus der gleichen Generation das Alter x_2 erreichen; hieraus folgt nun ohne Weiteres, dass die Differenz der beiden Flächen, die wir mit $V(x_1)$ und $V(x_2)$ bezeichnen wollen, die gesuchte Gesammtheit der Verstorbenen giebt, d. h. die Anzahl derjenigen Personen, die aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammend, zwischen dem Alter x_1 und x_2 sterben. Projicirt man die Fläche $B'_1 M'_1 M'_2 B'_2$ auf die Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2$, oder beide auf die Coordinatenebene YOZ, so repräsentirt die in Fig. 4 durch verticale Schraffur gefüllte Fläche $V_1 U_1 U_2 V_2$ diese erste Gesammtheit. Ist $z = f(t, x)$ die Gleichung unserer krummen Fläche, so stellt sich nach den auf S. 12 entwickelten Sätzen auf analytischem Wege diese Gesammtheit dar durch den Ausdruck

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_2)\, dt \qquad (9)$$

wobei x_1 und x_2 als constant anzusehen sind.

Die Figur führt aber zugleich noch zu einem andern sehr wichtigen Satze.

Der Eintritt der Lebenden aus der Generation t_1 bis t_2 in das Alter x_1 beginnt im Punkte B_1 (Fig. 4), d. h. zur Zeit $t_1 + x_1$ und hier beginnt auch das Sterben der mehr als x_1-jährigen; im Punkte B'_2 (Fig. 4), d. h. zur Zeit $t_2 + x_2$ erreichen die letzten dieser Generation das Alter x_2 und hier hört auch das Sterben der weniger als x_2-jährigen auf. Hieraus folgt, dass die zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 aus der Generation t_1 bis t_2 Gestorbenen im Zeitraume $t_1 + x_1$ bis $t_2 + x_2$ zu suchen sind; die Sterbezeit dieser Gesammtheit erstreckt sich also über die Zeitstrecke von

$$\begin{aligned}(t_2 + x_2) - (t_1 + x_1)\\ = t_2 - t_1 + x_2 - x_1 \text{ Jahre.}\end{aligned}$$

Beispiel. Will man bestimmen, wie viel von den im Kalenderjahre 1850 Gebornen im Alter von 10—11 Jahren gestorben sind, so ist $t_1 = 1850$ (1. Januar) und $t_2 = 1851$ (1. Januar),

sowie $x_1 = 10$ und $x_2 = 11$;

man erhält daher

$$t_2 - t_1 + x_2 - x_1 = 2,$$

d. h. einen **zwei**jährigen Zeitraum; diese Verstorbenen sind zu suchen in der Zeit

$$t_1 + x_1 = 1850 + 10 = 1860 \text{ (1. Januar) bis}$$
$$t_2 + x_2 = 1851 + 11 = 1862 \text{ (1. Januar),}$$

d. h. in den beiden Kalenderjahren 1860 **und** 1861. Nimmt man die Generationen nach einzelnen Geburtsjahren und einjährige Altersdifferenzen, wie dies ja Gebrauch ist, so liegen die Gestorbenen immer auf zwei Sterbejahre vertheilt; die Statistiker haben aber immer solche Verstorbene nur in einem Jahre gesucht; man kann daraus einen Schluss ziehen auf den Werth gewisser statistischer Erhebungen und der damit verbundenen Besprechung der Resultate derselben. Es ist ein grosses Verdienst Knapp's, diesen Wirrwarr zum ersten Male gründlich beleuchtet zu haben.

Als Erweiterung zu Vorstehendem diene schliesslich noch die Bemerkung, dass endlich auch die Fläche $U_1 P_1 P_2 U_2$ die Anzahl derjenigen Personen aus der Generation t_1 bis t_2 repräsentirt, welche vor Erreichung des Alter x_1 gestorben sind, und die Fläche $V_1 P_1 P_2 V_2$ giebt ebenso diejenigen, die zwischen den Altersgrenzen o und x_2 starben; für die erstere ist die Sterbezeitstrecke t_1 bis $t_2 + x_1$ und für die andere t_1 bis $t_2 + x_2$.

Zweite Gesammtheit von Verstorbenen.

Diese Gesammtheit besteht aus denjenigen Personen einer bestimmten Generation, die zwischen zwei bestimmten Zählungsterminen sterben oder gestorben sind.

Es repräsentire wieder in Fig. 5 die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ die Zahl derjenigen, welche im Zeitraume $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ geboren wurden; wir legen, wie bisher, durch die Endordinaten OA_1 und OA_2 zwei Verticalebenen parallel der Coordinatenebene XOY, welche unsere krumme Fläche, die wir einführten, in den Curven $P_1 N_1 N'_1$ und $P_2 N_2 N'_2$ schneiden. Es sei nun der erste Zählungstermin τ_1, der zweite τ_2; machen wir auf der Strecke OX die Länge $OD_1 = \tau_1$ und $OD_2 = \tau_2$ und legen wir durch die Punkte D_1 und D_2 zwei Verticalebenen, welche die Ebene ZOX

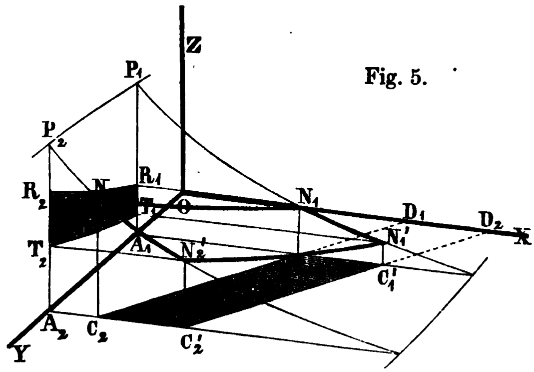


Fig. 5.

unter 45 ⁰ schneiden, so ergeben sich zwischen den beiden Grenzcurven die beiden Schnittflächen $C_1 N_1 N_2 C_2$ und $C'_1 N'_1 N'_2 C'_2$; projicirt man diese Flächen auf die Coordinatenebene $Y\,O\,Z$, so giebt nach dem auf S. 13 entwickelten Satze die Projection $A_1 R_1 R_2 A_2$ die Zahl derjenigen, welche aus der Generation t_1 bis t_2 zum Zählungstermin τ_1 am Leben sind, während die Projection $A_1 T_1 T_2 A_2$ die Lebenden dieser Generation zum zweiten Zählungstermin τ_2 angiebt.

Die Differenz beider Flächen, d. h. die Fläche $T_1 R_1 R_2 T_2$ (in der Fig. 5 vertical schraffirt) stellt daher die gesuchte Gesammtheit von Verstorbenen dar, d. h. diejenigen, welche aus der Generation t_1 bis t_2 zwischen den beiden Zählungsterminen τ_1 bis τ_2 gestorben sind.

Alle Lebenden bei der ersten Zählung stehen, wie sogleich die Figur ersichtlich macht, zwischen dem Alter:

$$A_2 C_2 = \tau_1 - t_2 \text{ und } A_1 C_1 = \tau_1 - t_1.$$

Die Lebenden bei der zweiten Zählung stehen dagegen zwischen den Altersjahren:

$$A_2 C_2' = \tau_2 - t_2 \text{ und } A_1 C_1' = \tau_2 - t_1.$$

Für diejenigen Personen, die zwischen beiden Zählungsterminen gestorben sind, ist $A_2 C_2 = \tau_1 - t_2$ das niedrigste und $A_1 C_1' = \tau_2 - t_1$ das höchste Alter; der ganze Altersspielraum beträgt demnach:

$$(\tau_2 - t_1) - (\tau_1 - t_2) = \tau_2 - \tau_1 + t_2 - t_1.$$

B e i s p i e l. Angenommen, man habe am 1. Januar 1867 diejenigen Lebenden gezählt, die aus dem Geburtsjahre 1850 stammen und am 1. Januar 1868 die gleiche Zählung wiederholt, so würde die Differenz beider Zählungen die Verstorbenen aus der Generation $t_1 = 1850$ (1. Januar) bis $t_2 = 1851$ (1. Januar) ergeben; das Alter dieser im gleichen Jahre Geborenen und im gleichen Jahre Gestorbenen fällt also nach dem Angegebenen zwischen $\tau_1 - t_2 = 1867 - 1851 = 16$ und

$$\tau_2 - t_1 = 1868 - 1850 = 18 \text{ Jahre};$$

der Altersspielraum ist also zwei Jahre, aber nicht ein Jahr, wie man gewöhnlich anzunehmen geneigt ist.

Nach Gl. (6) findet sich endlich, analytisch dargestellt, diese Gesammtheit von Verstorbenen, die mit M_2 bezeichnet werden mag, ohne Weiteres:

$$M_2 = \int_{t_1}^{t_2} f((\tau_1 - t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f((\tau_2 - t), t)\, dt \qquad (10)$$

wobei τ_1 und τ_2 constant anzunehmen sind und die Gleichung unserer krummen Fläche

$$z = f(x, t) = f((\tau - t), t)$$

als gegeben anzusehen ist.

Dritte Gesammtheit von Verstorbenen.

Diese Gesammtheit umfasst alle diejenigen Personen, welche zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 und zwischen den beiden Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind; sie findet sich aus unserer graphischen Darstellung leicht auf folgende Weise:

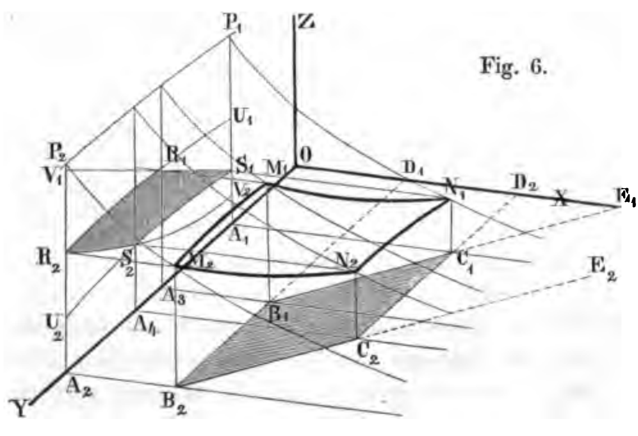


Fig. 6.

Man trage auf die Strecke OX (Fig. 6) die Länge $OD_1 = x_1$ und $OD_2 = x_2$ und lege durch die beiden Punkte D_1 und D_2 zwei verticale Ebenen parallel der Coordinatenebene YOZ; trage ferner ebenfalls auf der Strecke OX die Länge $OE_1 = \tau_1$ und $OE_2 = \tau_2$ auf und lege durch die beiden Punkte E_1 und E_2 wiederum zwei Verticalebenen, welche aber die Axe OX unter einem Winkel von 45^0 schneiden. Diese vier Verticalebenen durchschneiden sich und umschliessen einen parallelepipedischen Raum, dessen horizontale Basis das Parallelogramm $B_1 B_2 C_2 C_1$ bildet und der oben durch unsere krumme Fläche geschlossen ist, die in den Curven $M_1 M_2$, $N_1 N_2$, $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ geschnitten wird.

Projicire ich die vier verticalen Seitenflächen des Parallelepipedes auf die Ebene YOZ, so umschliessen die Projectionen $S_1 R_1$, $R_1 R_2$, $R_2 S_2$ und $S_2 S_1$ der vier genannten Curven eine Fläche (in Fig. 6 vertical schraffirt), welche die gesuchte Gesammtheit der Gestorbenen darstellt, d. h. diejenigen, welche zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 zwischen dem Alter x_1 und x_2 gestorben sind.

Nach dem früher Mitgetheilten ist leicht die Richtigkeit des Gesagten einzusehen; denn:

a. Die Fläche $A_1 S_1 R_1 A_3$ (Projection der Seitenfläche $B_1 C_1 N_1 M_1$ des Parallelepipedes) stellt die Zahl derjenigen Lebenden dar, die bei der ersten Zählung im Zeitpunkte τ_1 im Alter von x_1 bis x_2 vorhanden sind. Sie entstammen, wie sich sogleich der Figur entnimmt, der Geburtenstrecke $OA_1 = \tau_1 - x_2$ bis $OA_3 = \tau_1 - x_1$.

b. Die Fläche $A_3 R_1 R_2 A_2$ giebt die Anzahl derjenigen Personen, welche zwischen den beiden Zählungsterminen τ_1 und τ_2 das Alter x_1 erreichen. Diese Personen stammen aus der Geburtenstrecke $OA_3 = \tau_1 - x_1$ bis $OA_2 = \tau_2 - x_1$.

c. Die Fläche $A_4 S_2 R_2 A_2$ (Projection der Seitenfläche $B_2 C_2 N_2 M_2$ des Parallelepipedes) giebt die Anzahl Derjenigen, die zwischen dem Alter x_1 und x_2 stehend, zur Zeit τ_2 noch am Leben sind; sie entstammen der Geburtenstrecke $OA_4 = \tau_2 - x_2$ bis $OA_2 = \tau_2 - x_1$ und endlich giebt

d. die Fläche $A_1 S_1 S_2 A_4$ die Anzahl der Personen, welche innerhalb der Zählungstermine τ_1 und τ_2 das höhere Alter x_2 überschreiten; sie stammen aus der Geburtszeit

$$OA_1 = \tau_1 - x_2 \text{ bis } OA_4 = \tau_2 - x_2.$$

Nun besteht doch offenbar unsere dritte Gesammtheit von Verstorbenen aus der Summe derjenigen, die Anfangs im Zählungstermine τ_1 zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 vorhanden sind und denen, welche in der Zeit τ_1 bis τ_2 das Alter von x_1 Jahren erreichten, — vermindert um die Summe Derjenigen, die im zweiten Zeitpunkte τ_2 der Zählung noch im Alter x_1 bis x_2 leben und denen die zwischen beiden Zählungszeiten das Alter x_2 überschreiten. Der hieraus resultirende Werth wird aber eben durch die Fläche $S_1 R_1 R_2 S_2$ dargestellt.

Analytisch ergiebt sich diese Gesammtheit, die wir mit M_3 bezeichnen wollen, unter Beachtung der Gln. (4) und (6) und der so eben unter *a* bis *d* gegebenen Grenzen:

$$M_3 = \int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_1 - x_1} f((\tau_1 - t), t)\, dt + \int_{\tau_1 - x_1}^{\tau_2 - x_1} f(x_1, t)\, dt - \int_{\tau_2 - x_2}^{\tau_2 - x_1} f((\tau_2 - t), t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_2 - x_2} f(x_2, t)\, dt \qquad (11)$$

was leicht einzusehen ist.

Aus Fig. 6 ist im Weitern ersichtlich, dass sich die sämmtlichen Gestorbenen der dritten Gesammtheit auf die Geburtenstrecke

$$O A_1 = \tau_1 - x_2 \text{ bis } O A_2 = \tau_2 - x_1$$

vertheilen; die Streckenlänge ist

$$A_1 A_2 = \tau_2 - \tau_1 + x_2 - x_1 \text{ Jahre.} \qquad (12)$$

Beispiel. Aus Kirchenregistern hat man in einem Lande die Zahl der Personen ermittelt, welche im Zeitraume $\tau_1 = 1860$ (1. Januar) bis $\tau_2 = 1865$ (1. Januar) im Alter zwischen $x_1 = 20$ und $x_2 = 25$ Jahren gestorben sind.

Nach den letzten Angaben gehören diese Verstorbenen der Geburtenstrecke

$O A_1 = \tau_1 - x_2 = 1835$ bis $O A_2 = \tau_2 - x_1 = 1845$ (1. Januar)

an und die ganze Strecke hat eine Länge von

$$A_1 A_2 = 10 \text{ Jahren.}$$

Diejenigen, welche zur Zeit $\tau_1 = 1860$ (1. Januar) in der zugehörigen Bevölkerung im Alter von 20 bis 25 Jahren lebend vorhanden waren, gehören nach Obigem der Geburtenstrecke:

$$\tau_1 - x_2 = 1835 \text{ bis } \tau_1 - x_1 = 1840 \text{ (1. Januar) an.}$$

Diejenigen, welche von 1860 bis 1865 das Alter von 20 Jahren überschritten, entstammen der Geburtenstrecke:

$$\tau_1 - x_1 = 1840 \text{ bis } \tau_2 - x_1 = 1845.$$

Diejenigen, welche am Schlusse, zur Zeit $\tau_2 = 1865$ (1. Januar), zwischen den Altersgrenzen 20 bis 25 Jahre noch am Leben sind, gehören in die Geburtenstrecke

$$\tau_2 - x_2 = 1840 \text{ bis } \tau_2 - x_1 = 1845 \text{ (1. Januar)}$$

und endlich diejenigen, welche zwischen 1860 bis 1865 das Alter von 25 Jahren überschreiten, entstammen der Geburtenstrecke

$$\tau_1 - x_2 = 1835 \text{ bis } \tau_2 - x_2 = 1840.$$

Eine nähere Betrachtung unserer Fig. 6 giebt noch andere interessante Ergebnisse, auf welche hier noch hingewiesen werden mag.

Fassen wir die ganze Geburtenstrecke OA_1 bis OA_2 ins Auge, der unsere dritte Gesammtheit von Gestorbenen angehört, die durch die Fläche $S_1 R_1 R_2 S_2$ dargestellt wird, so ist sofort ersichtlich, dass durch diese Fläche nicht alle Personen gegeben sind, die aus dieser Geburtenstrecke stammend, zwischen den Altern x_1 und x_2 sterben, sondern nur diejenigen, welche zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 mit Tod abgehen.

Verlängern wir nämlich die beiden Curvenprojectionen $R_1 R_2$ und $S_1 S_2$ bis zu den Endordinaten $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$, also bis zu den Punkten U_1 und U_2, so stellt nach den Sätzen über die erste Gesammtheit von Verstorbenen die Fläche $S_1 U_1 R_2 U_2$ die Zahl derjenigen dar, welche aus der Geburtenstrecke OA_1 bis OA_2 stammend, zwischen dem Alter x_1 und x_2 sterben, und von dieser Fläche bildet die Fläche, welche die dritte Gesammtheit repräsentirt, nur einen Theil. Der Rest wird durch die beiden, von je drei Curven umschlossenen, Flächen $S_1 R_1 U_1$ und $S_2 R_2 U_2$ gebildet, deren Bedeutung aber sofort einleuchtet.

Die Fläche $S_1 R_1 U_1$ repräsentirt diejenigen Personen, die schon vor dem ersten Zählungstermine τ_1 im Alter von x_1 bis x_2 Jahren gestorben sind und die Fläche $S_2 R_2 U_2$ giebt die Zahl derjenigen, welche erst nach dem spätern Zählungstermine τ_2 zwischen diesen Altersgrenzen starben.

Die erstere Classe entstammt ganz der Geburtenstrecke $O A_1 = \tau_1 - x_2$ bis $O A_3 = \tau_1 - x_1$ und bestimmt sich, wenn wie immer die Gleichung $z = f(x, t) = f((\tau - t), t)$ unserer Grenzfläche bekannt wäre, durch den Ausdruck

$$\int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_1 - x_1} f(x_1, t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_1 - x_1} f((\tau_1 - t), t)\, dt$$

Die andere Classe entstammt der Geburtenstrecke $O A_4 = \tau_2 - x_2$ bis $O A_2 = \tau_2 - x_1$ und bestimmt sich analytisch:

$$\int_{\tau_2 - x_2}^{\tau_2 - x_1} f((\tau_2 - t), t)\, dt - \int_{\tau_2 - x_2}^{\tau_2 - x_1} f(x_2, t)\, dt$$

in welchen Formeln die Zählungstermine τ_1 und τ_2 und die Altersgrenzen als gegebene, constante Grössen anzusehen sind.

In gleicher Weise kann man aber auch die beiden Curvenprojectionen $S_1 R_1$ und $S_2 R_2$ bis zu den Grenzordinaten $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$, d. h. bis zu den Punkten V_1 und V_2 sich verlängert denken.

Die Fläche $V_2 S_1 V_1 R_2$ giebt dann nach Früherem die zweite Gesammtheit von Verstorbenen, d. h. die Anzahl Derjenigen, welche aus der Geburtenstrecke $O A_1$ bis $O A_2$ zwischen den beiden Zählungszeiten τ_1 und τ_2 überhaupt sterben; auch von dieser Fläche bildet die schraffirte Fläche, welche die dritte Gesammtheit repräsentirt, nur einen Theil; der andere Theil besteht aus den Flächenstücken $R_1 V_1 R_2$ und $V_2 S_1 S_2$.

Man begreift nun leicht, dass die Fläche $R_1 V_1 R_2$ die Anzahl der Personen repräsentirt, welche zwischen den Zählungszeiten τ_1 und τ_2 **vor** Erreichung des untern Grenzalters x_1 sterben. Dieselben gehören der Geburtenstrecke

$$O A_3 = \tau_1 - x_1 \text{ bis } O A_2 = \tau_2 - x_1$$

an und ihre Zahl bestimmt sich durch den Ausdruck:

$$\int_{\tau_1 - x_1}^{\tau_2 - x_1} f((\tau_1 - t), t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_1}^{\tau_2 - x_1} f(x_1, t)\, dt$$

Die Fläche $V_2 S_1 S_2$ dagegen giebt die Anzahl derjenigen Personen, die zwischen den beiden Zählungszeiten τ_1 und τ_2 **nach** Ueberschreitung des obern Grenzalters x_2 sterben. Sie gehören der Geburtenstrecke $OA_1 = \tau_1 - x_2$ bis $OA_4 = \tau_2 - x_2$ an und ihre Anzahl findet sich auf analytischem Wege:

$$\int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_2 - x_2} f(x_2, t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_2 - x_2} f((\tau_2 - t), t)\, dt.$$

Die ganzen vorstehenden Untersuchungen bieten ein besonderes Interesse dar, denn sie liefern ein Mittel zur Beurtheilung des Werthes und der Bedeutung der gewöhnlichen Auszüge aus Kirchenregistern. Zählt man z. B. in einem Lande die Verstorbenen des Jahres 1868, so ist nach unserer Bezeichnung $\tau_1 = 1868$ (1. Januar) und $\tau_2 = 1869$ (1. Januar); diese Verstorbenen, nach Altersclassen geordnet, liefern dann die Gesammtheiten von Verstorbenen der dritten Art, wie wir sie so eben genauer betrachtet haben. Aus diesen Betrachtungen geht nun aber hervor, welche complicirte Bedeutung die so erhaltenen Werthe haben und — man darf es wohl sagen — wie bedeutungslos die Resultate solcher zeitraubenden und mühevollen Zusammenstellungen sind! Durch solche Angaben allein, für sich genommen, und anders findet man sie ja in den statistischen Mittheilungen kaum, werden keine Grundlagen für wirklich wissenschaftliche Untersuchungen gewonnen und es wäre nun wirklich zeitgemäss, die statistischen Erhebungen zum Zwecke der Untersuchung über Bewegung der Bevölkerung in vollkommenerer Weise, als dies bisher geschehen ist, auszuführen. Dieser Wunsch ist um so berechtigter, als die Anforderungen, welche die Mathematik in dieser Beziehung stellt, so einfach und leicht zu erfüllende sind. Ich betrachte es als eine Hauptaufgabe dieser Abhandlung, weiter unten diese Anforderungen bestimmt zu bezeichnen; an diesem Orte mag nur der geringe Werth der gebräuchlichen Kirchenbuch-Auszüge zunächst beleuchtet werden. Ich habe schon früher hervorgehoben, dass im Grunde genommen die ganze Aufgabe der Bevölkerungsstatistik, soweit sie sich auf Leben und Sterben bezieht, darin sich zusammenfassen lässt, die Gleichung $z = f(x, t)$ der krummen Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ (Fig. 1) zu ermitteln oder wenigstens durch Beobachtungen die

Lage und den Verlauf ganzer Strecken dieser Fläche festzustellen. Giebt man nun auf Grund der Kirchenregister an, wie viel Personen in einem gewissen Zeitraume, z. B. in einem Jahre, zwischen gewissen Altersgrenzen gestorben sind, so heisst dies nach obigen Untersuchungen, es wird nur der Inhalt der Fläche $S_1 R_1 R_2 S_2$ (in Fig. 6) gegeben und überdies sind die Coordinaten der Fusspunkte B_1, B_2, C_2 und C_1 durch die angenommen Werthe $\tau_1\, \tau_2\, x_1$ und x_2 bekannt. Aus diesen Angaben soll man nun einen Schluss auf die Lage des Theiles $M_1 M_2 N_2 N_1$ der krummen Fläche ziehen! Die Aufgabe in solcher Weise mathematisch gestellt, zeigt sofort, dass ihre Lösung unmöglich ist und dass die angenommenen Beobachtungen noch durch gewisse weitere statistische Erhebungen ergänzt werden müssen; doch das ist eben die Frage, auf deren Untersuchung wir zurückkommen werden.

Nebengesammtheiten von Lebenden.

Die bis hierher angestellten Untersuchungen enthalten u. A. auch die wichtigsten von denjenigen Sätzen, die zuerst von Knapp (a. a. O.) gegeben worden sind. Ausser den genannten Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen spricht aber Knapp noch von Nebengesammtheiten, auf die ich ebenfalls in der Kürze noch eingehen will, obgleich die Fragen, um die es sich hier handelt, so einfach sind, wenn man die von mir benutzte Methode der Darstellung wählt, dass es fast unnöthig erscheint, die Untersuchungen der folgenden Art hier noch besonders zu besprechen.

Wie bisher, so haben wir es auch im Folgenden bei der analytischen Behandlung nur mit zwei Integralausdrücken zu thun, die beide aus dem allgemeinen Integral

$$\int z\, d\, t$$

hervorgehen, in welchem Ausdrucke $z = f(x, t)$ die eine der drei Coordinaten MB der krummen Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ (Fig. 1, S. 9) darstellt, welche dem Alter $AB = x$ und dem Zeitpunkte $OA = t$ der Geburt entspricht. Wir haben nun durch Verticalebenen nur Schnitte zweierlei Art gelegt; entweder liegt die Schnittfläche parallel der Coordinatenebene YOZ, dann ist in dem Ausdrucke $z = f(x, t)$ das x constant und das eine Integral

$$\int f(x, t)\, dt$$

bei constantem x zwischen den entsprechenden Grenzen $OA_1 = t_1$ und $OA_2 = t_2$ der Geburtenstrecke $A_1 A_2$ zu bestimmen. Das Integral

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dt \tag{13}$$

giebt dann, wie oft erwähnt, die Zahl der Personen, die aus der Geburtenstrecke $A_1 A_2$ stammend, das Alter x erreichen.

Oder wir haben die Verticalebene so gelegt, dass sie die verticalen Coordinatenebenen unter einem Winkel von 45° durchschneiden (Fig. 2, S. 13). Dann ist die Zählungszeit $\tau = x + t$ constant und wir haben wegen $x = \tau - t$ das Integral

$$\int f((\tau - t), t)\, dt$$

zu bestimmen, das uns, wenn wir mit t_1 und t_2 die Grenzen bezeichnen (bei constantem τ) die Anzahl der Personen giebt, die aus der Geburtenstrecke $A_1 A_2$ stammend (Fig. 2) zum Zeitpunkte τ der Zählung noch am Leben sind; wir haben für diese Anzahl:

$$V(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} f((\tau - t), t)\, dt. \tag{14}$$

Im ersten Falle (bei Gl. 13) setzten wir als gegeben das Alter x und die Grenzen t_1 und t_2 der Geburtenstrecke voraus, im andern Falle (bei Gl. 14) ebenfalls diese Grenzen, sonst aber der Zeitpunkt τ der Zählung.

Wegen der Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= x_1 + t_1 \text{ und} \\ \tau_2 &= x_2 + t_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

kann man nun aber bei Bestimmung der beiden Integrale auch andere Grössen, als die angezeigten, als bekannt voraussetzen und dadurch gelangt man auf das, was Knapp »Nebengesammtheiten von Lebenden« nennt.

1) Es sei gegeben das Alter $AB = x$ (Fig. 1, S. 9) und der Beginn $OA = t_1$ der Geburtenstrecke, so ist der Zeitpunkt, in welchem man die noch Lebenden vom Alter x zu zählen beginnen soll $\tau_1 = x + t_1$; ist nun noch der später liegende Zeitpunkt τ_2 (Punkt B_2) gegeben, wo man mit der Zählung dieser Lebenden schliessen will, so folgt $t_2 = \tau_2 - x$ und daher statt Gl. (13)

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2 = \tau_2 - x} f(x, t)\, dt \text{ für } x \text{ constant.}$$

Dieser Ausdruck giebt die Anzahl derjenigen, welche nach dem Zeitpunkte t_1 geboren, vor dem Zählungszeitpunkte τ_2 das Alter von x Jahren erreichen.

Wäre z. B. $t_1 = 1850$ (1. Januar), $x = 10$ und $\tau_2 = 1869$ (1. Januar), so giebt dieser Ausdruck die Zahl der Menschen, welche nach dem 1. Januar 1850 geboren sind und vor dem 1. Januar 1869 10 Jahre alt wurden; sie stammen aus der Geburtenstrecke: $t_1 = 1850$ bis $\tau_2 - x = 1869 - 10 = 1859$ (1. Januar).

2) Es könnte auch umgekehrt gegeben sein das Alter x und das Ende t_2 der Geburtenstrecke; dann ist $\tau_2 = x + t_2$ der Zeitpunkt, in welchem man zu zählen aufhören will; ist nun noch ein früherer Zeitpunkt τ_1 gegeben, in welchem man die Zählung derjenigen beginnen will, die das Alter von x Jahren erreichen, so erhält man für die untere Grenze der Geburtszeit $t_1 = \tau_1 - x$ und der Ausdruck

$$V(x) = \int_{t_1 = \tau_1 - x}^{t_2} f(x, t)\, dt \text{ für } x \text{ constant}$$

giebt dann die Anzahl der Personen, die vor dem Zeitpunkte t_2 geboren wurden und nach dem Zählungstermine τ_1 das Alter von x Jahren erreichten. Wäre z. B. $x = 20$ Jahre, $t_2 = 1849$ (1. Januar) und $\tau_1 = 1859$ (1. Januar), so giebt diese Formel die Zahl Derjenigen, die vor dem 1. Januar 1849 geboren wurden und vom 1. Januar 1859 abgerechnet, das Alter von 20 Jahren erreichten.

Zu ähnlichen Betrachtungen giebt die Gl. (6) Anlass, welche sich auf die Bestimmung gleichzeitig Lebender bezieht:

3) Es sei gegeben die obere Altersgrenze $A_1 C_1 = x_1$ (Fig. 2, S. 13) und der Zeitpunkt τ der Zählung, so ist sofort die untere Grenze der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1 = \tau - x_1$. Ist nun ferner noch die obere Grenze t_2 der Geburtenstrecke direct gegeben, so ist die Anzahl der gleichzeitig Lebenden nach Gl. (6), S. 13,

$$V(\tau) = \int_{t_1 = \tau - x_1}^{t_2} f((\tau - t), t)\, dt.$$

Die untere Altersgrenze dieser Lebenden ist $x_2 = \tau - t_2$.

Beispiel. Es sei $x_1 = 30$ Jahre die obere Altersgrenze, der Zeitpunkt der Zählung $\tau = 1869$ (1. Januar). Die obere Grenze der Geburtenstrecke $t_2 = 1849$ (1. Januar). Für diesen Fall giebt vorstehender Ausdruck die Zahl der Lebenden am 1. Januar 1869, welche vor dem 1. Januar 1849 geboren wurden und höchstens 30 Jahre alt sind. Die jüngsten dieser Personen haben eben das Alter von $x_2 = \tau - t_2 = 20$ Jahren überschritten und sämmtliche gehören der Geburtenstrecke $t_1 = \tau - x_1 = 1839$ bis $t_2 = 1849$ (1. Januar) an.

4) Ist dagegen die untere Altersgrenze $A_2 C_2 = x_2$ (Fig. 2) neben dem Zeitpunkte τ der Zählung gegeben, so ist sogleich die obere Grenze der Geburtenstrecke aus $t_2 = \tau - x_2$ gefunden und man erhält, wenn die untere Grenze t_1 der Geburtenstrecke direct gegeben ist, durch den Ausdruck

$$V(\tau) = \int_{t_1}^{t_2 = \tau - x_2} f((\tau - t), t)\, dt$$

die Anzahl der Lebenden zum Zeitpunkte τ, die nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden und mindestens x_2 Jahre alt sind; das höchste Alter, das unter diesen Lebenden vorkommt, ist $x_1 = \tau - t_1$, also ebenfalls bekannt.

Solche Betrachtungen liessen sich leicht vermehren; es könnten auch die beiden Altersgrenzen x_1 und x_2 gegeben sein und hierzu der Zählungstermin τ, dann ist in Gl. (6) $t_1 = \tau - x_1$ und

$t_2 = \tau - x_2$ einzusetzen, oder statt der letztern Angabe könnte eine der Grenzen der Geburtenstrecke t_1 oder t_2 bekannt sein; die beiden Integrale (4) und (6) lassen sich dann immer als bestimmbar ansehen, wenn nur eben die Gleichung $z = f(x, t)$ unserer krummen Fläche gegeben wäre, und man erkennt nun aus Allem, dass zur Bestimmung der beiden Gesammtheiten von Lebenden von den sechs Grössen x_1 x_2 t_1 t_2 τ_1 und τ_2 nur drei gegeben zu sein brauchen, weil sie unter sich noch in der Beziehung $\tau = x + t$ stehen.

Nebengesammtheiten von Verstorbenen.

Nebengesammtheit der ersten Art.

Hier ist die Anzahl der Verstorbenen aus der Generation $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ (Fig. 7 und 8) zu ermitteln, die zwischen einem gegebenen Zählungstermin und einem gegebenen Grenzalter gestorben sind. Man kann hier zwei Fälle unterscheiden:

a. Zahl der Personen, die von einem gewissen Zählungstermin τ_1 abgerechnet aus dieser Generation sterben, bevor sie das Alter x_2 erreichen, und

b. Zahl der Personen dieser Generation, welche nach Ueberschreitung eines gewissen Alters x_1 vor dem Zählungstermine τ_2 sterben.

Der erste Fall ergiebt sich sogleich aus Fig. 7; hier sind gegeben die Grenzen $OA_1 = t_1$ und $OA_2 = t_2$ der Geburtenstrecke; ferner ist bekannt der Zeitpunkt $OE = \tau_1$ der Zählung der Lebenden dieser Generation und das Alter $OD = x_2$. Lege ich nun durch den Punkt D einen Verticalschnitt parallel der Coordi-

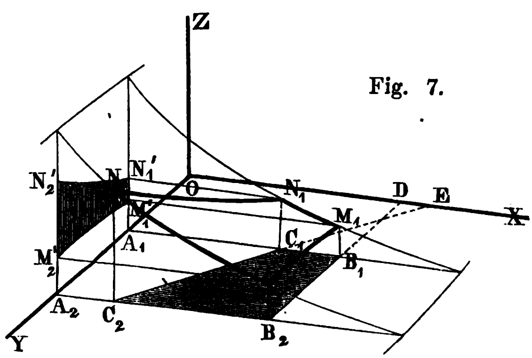


Fig. 7.

natenebene YOZ (ich werde der Einfachheit wegen im Weitern einen solchen Schnitt einen »Verticalschnitt erster Art« nennen) und lege ich ferner durch den Punkt E eine Verticalebene, die die Coordinatenebene XOZ unter 45^0 schneidet (der Schnitt heisse von nun an kurz ein »Verticalschnitt zweiter Art«), so erhalte ich die beiden Schnittflächen $B_1 M_1 M_2 B_2$ und $C_1 N_1 N_2 C_2$, die, wenn sie auf die Coordinatenebene YOZ projicirt werden, nach unsern bekannten Sätzen Folgendes ergeben: Die Projection $A_1 N'_1 N'_2 A_2$ giebt die Gesammtzahl Derjenigen, die am Zählungstermine τ_1 am Leben sind, sie stehen zwischen den Altersgrenzen $A_2 C_2 = \tau - t_2$ bis $A_1 C_1 = \tau - t_1$; die Projection $A_1 M'_1 M'_2 A_2$ giebt dagegen die Anzahl der Personen aus der gleichen Generation, welche das Alter von x_2 Jahren erreichen, es geschieht dies innerhalb des Zeitraumes $t_1 + x_2$ bis $t_2 + x_2$. Die Differenz der beiden Flächenprojectionen, also die Fläche $M'_1 N'_1 N'_2 M'_2$ (in Fig. 7 vertical schraffirt), ergiebt nun ohne Weiteres die gesuchte Gesammtheit der Verstorbenen, d. h. die Zahl Derjenigen, die vom Zählungstermine τ_1 abgerechnet, aus der Geburtenstrecke $A_1 A_2$ gestorben sind, bevor sie das Alter von x_2 Jahren erreichten. Analytisch ausgedrückt ist diese Gesammtheit

$$\int_{t_1}^{t_2} f((\tau_1 - t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2, t)\, dt \tag{16}$$

Beispiel: $t_1 = 1840$, $t_2 = 1850$, $\tau_1 = 1860$; $x_2 = 15$. Hier giebt die Figur und vorstehender Ausdruck die Zahl Derjenigen aus der Geburtenstrecke vom 1. Januar 1840 bis 1. Januar 1850, welche nach dem 1. Januar 1860 starben, bevor sie das Alter von 15 Jahren erreichten.

Als ein Spezialfall ist derjenige zu betrachten, wo die beiden Punkte C_1 und B_1 zusammenfallen, was eintritt, wenn $A_1 B_1 = A_1 C_1$ oder $x_2 = \tau_1 - t_1$ ist. Es könnte aber offenbar auch $A_1 B_1 < A_1 C_1$, d. h. $x_2 < \tau_1 - t_1$ sein; dann ist im vorstehenden Ausdrucke für die untere Grenze t_1 der beiden Integrale $\tau_1 - x_2$ zu substituiren und die Figur leicht unter dieser Voraussetzung zu ergänzen.

In dem andern Falle b, in welchem neben den Grenzen t_1 und t_2 der Geburtenstrecke das Alter x_1 und die Zählungszeit τ_2 gegeben ist und die Verstorbenen gesucht werden, die aus dieser Generation vor dem Zählungstermine τ_2 starben, nachdem sie das Alter x_1 überschritten hatten, gibt Fig. 8 a. f. S.

Man mache $OD = x_1$ und lege durch den Punkt D einen Verticalschnitt erster Art; mache ferner $OE = \tau_2$ und lege durch E einen Schnitt der zweiten Art. Die erstere Schnittfläche $B_1 M_1 M_2 B_2 = A_1 M'_1 M'_2 A_2$ giebt diejenigen der Generation $A_1 A_2$, welche das Alter x_1 überschreiten, was innerhalb der Zeitstrecke $t_1 + x_1$ bis $t_2 + x_2$ geschieht; die Projection $A_1 N'_1 N'_2 A_2$ der zweiten Schnittfläche liefert diejenigen, die zur Zählungszeit τ_2 noch am Leben sind, sie stehen zwischen dem Alter $A_2 C_2 = \tau_2 - t_2$ bis $A_1 C_1 = \tau_2 - t_1$; die Differenz beider Flächenprojectionen, nämlich die Fläche $N'_1 M'_1 M'_2 N'_2$ (in Fig. 8 vertical schraffirt) ergiebt die gesuchte Zahl der Verstorbenen, die sich analytisch darstellt durch den Ausdruck:

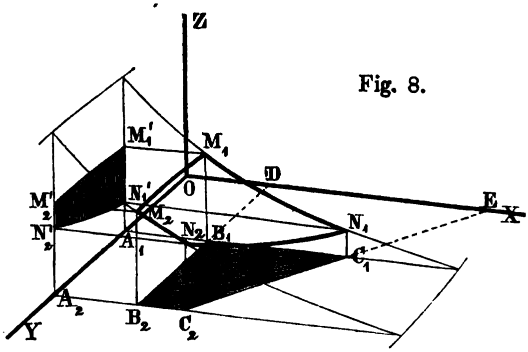


Fig. 8.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x_1, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f((\tau_2 - t), t)\, dt \qquad (17)$$

Beispiel. $t_1 = 1840$; $t_2 = 1850$; $x_1 = 15$ und $\tau_2 = 1869$. Hier erhält man nach diesem Ausdrucke und auf die angedeutete Weise aus der Figur die Personen aus der Geburtenzeit 1840 bis 1850 (1. Januar), welche nach Ueberschreitung des Alters von 15 Jahren vor der Zählungszeit $\tau_2 = 1869$ (1. Januar) gestorben sind.

Hierbei ist $A_2 C_2 > A_2 B_2$, d. h. $\tau_2 - t_2 > x_1$ vorausgesetzt worden; als ein Spezialfall ist der anzusehen, wo $\tau_2 - t_2 = x_1$ ist, dann fallen in Fig. 8 die beiden Punkte B_2 und C_2 zusammen. Wäre endlich $\tau_2 - t_2 < x_1$, so wäre in den beiden Integralen für die obere Grenze t_2 der Werth $\tau_2 - x_1$ zu substituiren; die beobachtete Zahl der Verstorbenen gehört dann nur dem Theile t_1 bis $\tau_2 - x_1$ der Geburtenstrecke an; der andere Theil der Strecke, nämlich $\tau_2 - x_1$ bis t_2, fällt dann ausser Betracht; er umschliesst lauter Personen, die im Zählungstermine das Alter von x_1 Jahren noch gar nicht erreicht haben.

Nebengesammtheit der zweiten Art.

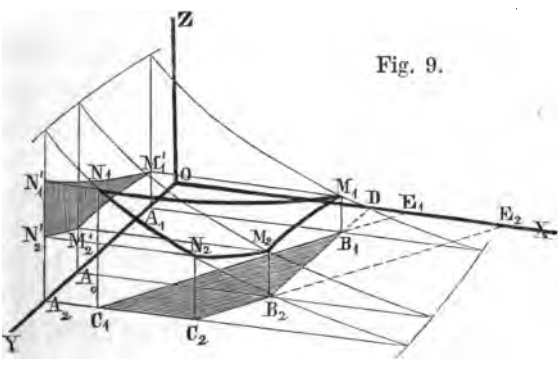
Hier sind gegeben die beiden Zählungstermine τ_1 und τ_2, ferner ist bekannt eine Grenze der Geburtenstrecke und ein Grenzalter.

Auch hier unterscheiden sich zwei Fälle:

a. Es ist die obere Grenze t_2 der Geburtenstrecke bekannt und die Zahl der Personen darzulegen, die vor der Grenze t_2 geboren und zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind, bevor sie das Alter x_2 erreichten, und

b. Es ist die untere Grenze t_1 der Geburtenstrecke gegeben und die Zahl der Personen zu ermitteln, welche zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind, nachdem sie das Alter x_1 überschritten hatten.

Für den ersten Fall gilt Fig. 9. Man trage auf die Y-Axe die Länge $OA_2 = t_2$ auf und lege eine Verticalebene parallel der X-Axe; mache ferner $OD = x_2$ und lege durch D einen Schnitt der ersten Art und bestimme endlich auf der X-Axe die beiden Punkte E_1 und E_2 so, dass $OE_1 = \tau_1$ und $OE_2 = \tau_2$. Legt man dann noch durch diese beiden Punkte zwei Verticalebenen der zweiten Art, so schneiden diese vier Ebenen unsere krumme Fläche in den Curven M_1N_1, M_1M_2, M_2N_2 und N_1N_2, von welchen die letztere die Absterbecurve darstellt, die der Geburtszeit t_2 entspricht.



Projicire ich die vier Curven auf die Ebene YOZ, so erhalte ich dort die Flächenprojection $M'_1N'_1N'_2M'_2$ (in Fig. 9 vertical schraffirt) und diese Fläche stellt die gesuchte Nebengesammtheit von Gestorbenen dar. Die Richtigkeit dieser Angabe ist leicht einzusehen, denn die Projection $A_1M'_1N'_1A_2$ des Schnittes $B_1M_1N_1C_1$ repräsentirt diejenigen Lebenden zum Zählungszeitpunkte τ_1, die vor dem Zeitpunkte t_2 geboren wurden und das Alter x_2 noch nicht erreicht haben; das höchste Alter dieser Lebenden ist $A_1B_1 = x_2$, das niedrigste Alter ist $A_2 C_1 = \tau_1 - t_2$; sie gehören, wie auch gleich aus der Figur folgt, der Geburtenstrecke $O A_1 = \tau_1 - x_2$ bis $O A_2 = t_2$ an. Von dieser Gesammtheit von Lebenden sind nun diejenigen abzuziehen, die bei der zweiten Zählung im Zeitpunkte τ_2 noch am Leben sind (Projection $A_0 M'_2 N'_2 A_2$ des Schnittes $B_2 M_2 N_2 C_2$), sowie diejenigen Personen, welche zwischen beiden Zählungsterminen das Alter x_2 überschreiten und die durch die Projection $A_1 M'_1 M'_2 A_0$ des Schnittes $B_1 M_1 M_2 B_2$ dargestellt werden. Die Ersteren gehören der Geburtenstrecke $O A_0 = \tau_2 - x_2$ bis $O A_2 = t_2$ an und stehen zwischen den Altersgrenzen $A_0 B_2 = x_2$ und $A_2 C_2 = \tau_2 - t_2$; die Letztern dagegen stammen aus der Geburtenstrecke $O A_1 = \tau_1 - x_2$ bis $O A_0 = \tau_2 - x_2$.

Auf analytischem Wege findet sich diese Gesammtheit:

$$\int_{\tau_1 - x_2}^{t_2} f((\tau_1 - t), t)\, dt - \int_{\tau_2 - x_2}^{t_2} f((\tau_2 - t), t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_2 - x_2} f(x_2, t)\, dt \qquad (18)$$

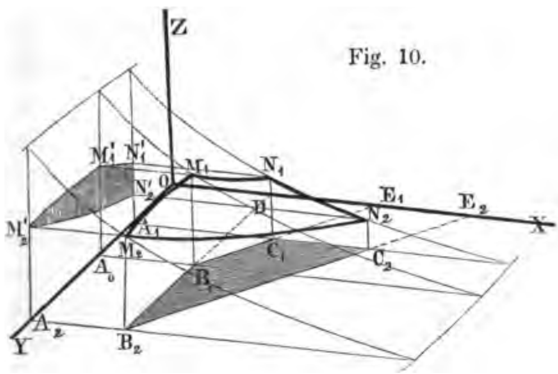
B e i s p i e l. Es sei die Anzahl der Personen anzugeben, welche v o r dem 1. Januar 1858 geboren wurden und die zwischen 1860 (1. Januar) und 1865 (1. Januar) gestorben sind, b e v o r sie das Alter von 10 Jahren erreichten.

Hier ist einfach in den vorstehenden Betrachtungen zu setzen $\tau_1 = 1860$, $\tau_2 = 1865$, $t_2 = 1858$ und $x_2 = 10$. Diese Verstorbenen stammen aus der Geburtenstrecke $\tau_1 - x_2 = 1850$ (1. Januar) bis $t_2 = 1858$ (1. Januar); dieser Strecke entstammen auch alle Diejenigen, welche im Zählungszeitpunkte $\tau_1 = 1860$ am Leben sind; sie stehen zwischen den Altern $\tau_1 - t_2 = 2$ bis $x_2 = 10$ Jahren. Diejenigen dagegen, welche zwischen beiden Zählungen das Alter von 10 Jahren überschreiten, stammen aus der Geburtenstrecke $\tau_1 - x_2 = 1850$ bis $\tau_2 - x_2 = 1855$, und die, welche bei der Zählung noch leben, gehören der Geburtenstrecke $\tau_2 - x_2 = 1855$ bis $t_2 = 1858$ (1. Januar) an und stehen zwischen den Altern $\tau_2 - t_2 = 7$ und $x_2 = 10$ Jahren.

Was nun den z w e i t e n Fall betrifft, so ist hier neben den Zählungszeitpunkten τ_1 und τ_2 die u n t e r e Grenze t_1 der Geburtensrecke und das Alter x_1 gegeben, welches die Gestorbenen aus der Zeit zwischen beiden Zählungen ü b e r s c h r i t t e n haben sollen. Hier gilt Fig. 10. Man trage auf die Y-Axe die Länge $O A_1 = t_1$

auf und lege durch A_1 eine Verticalebene parallel der X-Axe, mache ferner auf der X-Axe $OD = x_1$, $OE_1 = \tau_1$ und $OE_2 = \tau_2$, lege durch D einen Verticalschnitt der ersten Art und durch E_1 und E_2 Verticalschnitte der zweiten Art. Durch diese vier Schnitte werden aus unserer krummen Fläche die vier Curven $N_1 M_1$, $M_1 M_2$, $M_2 N_2$ und $N_1 N_2$ gebildet, von denen die letztere die Absterbecurve für den Geburtszeitpunkt t_1 ist; projicirt man diese Curven oder das aus der krummen Fläche herausgeschnittene Flächenstück $N_1 M_1 M_2 N_2$ auf die Coordinatenebene YOZ, so giebt die Projection $N'_1 M'_1 M'_2 N'_2$ dieser Fläche (in Fig. 10 vertical schraffirt) die gesuchte Nebengesammtheit von Verstorbenen, d. h. Diejenigen, welche nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden und die zwischen den Zählungszeiten τ_1 und τ_2 nach Ueberschreitung des Alters x_1 gestorben sind.

Fig. 10.



Die Richtigkeit dieser Angabe ist wieder leicht einzusehen; die Fläche $A_1 N'_1 M'_1 A_0$ (Projection von $C_1 N_1 M_1 B_1$) giebt die Personen, welche nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden und zur Zeit τ_1 der ersten Zählung am Leben sind; sie gehören der Geburtenstrecke $OA_1 = t_1$ bis $OA_0 = \tau_1 - x_1$ an und stehen im Alter zwischen $A_0 B_1 = x_1$ und $A_1 C_1 = \tau_1 - t_1$ Jahren. Zu diesen Lebenden sind diejenigen hinzu zu rechnen, welche zwischen den Zählungszeiten τ_1 und τ_2 das Alter von x_1 Jahren überschreiten; ihre Anzahl wird durch die Fläche $B_1 M_1 M_2 B_2 = A_0 M'_1 M'_2 A_2$ dargestellt; diese Personen gehören der Geburtenstrecke $OA_0 = \tau_1 - x_1$ bis $OA_2 = \tau_2 - x_1$ an. Von der Summe dieser beiden Gesammtheiten von Lebenden muss nun die Zahl derjenigen abgezogen werden, welche zur spätern Zählungszeit τ_2 noch am Leben und älter als x_1 Jahre sind; diese Anzahl wird repräsentirt durch die Fläche $A_1 N'_2 M'_2 A_2$ (Projection vom Schnitte $C_2 N_2 M_2 B_2$); das Zusammenfassen der drei Flächenprojectionen in der angegebenen Weise, führt dann, wie bemerkt, in der vertical schraffirten Fläche auf die gesuchte Gesammtheit. Die Lebenden im Zeitpunkte τ_2 stehen zwischen den Altersgrenzen $A_2 B_2 = x_1$ und $A_1 C_2 = \tau_2 - t_1$ und stammen, wie auch die Verstorbenen der gesuchten Nebengesammtheit, aus der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1$ bis $O A_2 = \tau_2 - x_1$.

Nach dem Bekannten ist nun leicht zu übersehen, dass die gesuchte Gesammtheit durch folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$\int_{t_1}^{\tau_1 - x_1} f((\tau_1 - t), t)\, dt + \int_{\tau_1 - x_1}^{\tau_2 - x_1} f(x_1, t)\, dt - \int_{t_1}^{\tau_2 - x_1} f((\tau_2 - t), t)\, dt \qquad (19)$$

Beispiel. Es ist die Anzahl derjenigen Personen anzugeben, die nach dem 1. Januar 1830 geboren wurden und die zwischen den Zählungsterminen 1860 (1. Januar) und 1865 (1. Januar) nach Ueberschreitung des Alters von 20 Jahren (älter als 20 Jahre) gestorben sind.

Hier ist in vorstehenden Untersuchungen zu setzen $t_1 = 1830$; $\tau_1 = 1860$; $\tau_2 = 1865$ und $x_1 = 20$.

Diese Gestorbenen entstammen der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1 = 1830$ bis $O A_2 = \tau_2 - x_1 = 1845$ (1. Januar). Diejenigen, welche bei der ersten Zählung am Leben waren, entstammen der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1 = 1830$ bis $O A_0 = \tau_1 - x_1 = 1840$ und standen im Alter von $A_0 B_1 = x_1 = 20$ bis $A_1 C_1 = \tau_1 - t_1 = 30$ Jahre; Diejenigen dagegen, welche zwischen beiden Zählungen das Alter von $x_1 = 20$ Jahren überschritten, stammen aus der Geburtszeit $O A_0 = \tau_1 - x_1 = 1840$ bis $O A_2 = \tau_2 - x_1 = 1845$ (1. Januar) und es stehen alle diejenigen Personen, die bei der zweiten Zählung noch am Leben und älter als 20 Jahre sind, zwischen den Altern $A_2 B_2 = 20$ und $A_1 C_2 = \tau_2 - t_1 = 35$ Jahren.

Die beiden Fälle, die wir hier behandelt haben, führen auf dieselben Spezialfälle, die wir schon bei der Betrachtung der Nebengesammtheit von Verstorbenen der ersten Art erwähnt haben, wenn nämlich in Fig. 9 die Punkte B_2 und C_2 zusammenfallen, im ersten Falle also $t_2 = \tau_2 - x_2$ ist oder wenn in Fig. 10 der Punkt C_1 auf B_1 fällt, im zweiten Falle also $t_1 = \tau_1 - x_1$ gegeben wäre.

Nebengesammtheit der dritten Art.

Hier sind gegeben die beiden Grenzalter x_1 und x_2 und überdies ist bekannt ein Zählungstermin und eine Grenze der Geburtenstrecke. Hier sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

a. Es ist die obere Grenze t_2 der Geburtenstrecke gegeben und es sei die Anzahl der Personen darzulegen, die vor diesem Zeitpunkte geboren wurden und nach dem angenommenen Zählungstermine τ_1 zwischen den Altersjahren x_1 und x_2 gestorben sind.

b. Es ist die untere Grenze t_1 der Geburtenstrecke und ein Zählungstermin τ_2 gegeben und man soll ermitteln, wie viel von Denjenigen, die nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden, vor dem Zählungstermine τ_2 zwischen den Altergrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.

Für den ersten Fall gilt Fig. 11. Man trage auf die Axe OY die Strecke $OA_2 = t_2$ auf und lege durch den Punkt A_2 eine Verticalebene parallel der X-Axe; trage ferner auf die Axe OX die Strecken $OD_1 = x_1$, $OD_2 = x_2$ und $OE_1 = \tau_1$ auf, lege durch die beiden Punkte D_1 und D_2 Verticalschnitte erster Art und durch den Punkt E_1 einen Verticalschnitt der zweiten Art.

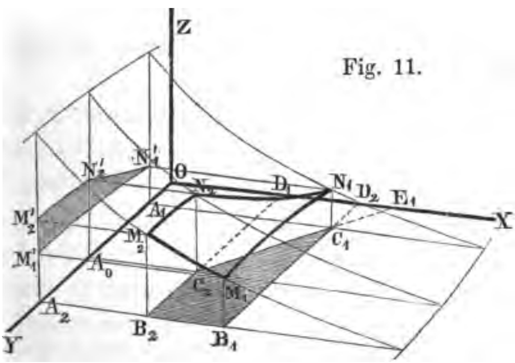


Fig. 11.

Diese vier Verticalebenen begrenzen aus unserer krummen Fläche das Flächenstück $M_1 M_2 N_2 N_1$ und die Projection desselben auf die Coordinatenebene YOZ, nämlich die Fläche $M'_1 M'_2 N'_2 N'_1$ (in Fig. 11 vertical schraffirt) liefert nun die gesuchte Nebengesammtheit von Verstorbenen.

Die Projection $A_1 N'_1 N'_2 A_0$ des Schnittes $C_1 N_1 N_2 C_2$ repräsentirt nämlich Diejenigen, welche im Zählungszeitpunkte τ_1 zwischen den Altersgrenzen $A_0 C_2 = x_1$ und $A_1 C_1 = x_2$ am Leben sind; sie entstammen, wie die Figur sogleich ersehen lässt, der Geburtenstrecke $OA_1 = \tau_1 - x_2$ bis $OA_0 = \tau_1 - x_1$; hierzu sind nun Diejenigen zu rechnen, deren Anzahl durch die Flächenprojection $A_0 N'_2 M'_2 M'_1$ gegeben ist, die aus der Geburtenstrecke $OA_0 = \tau_1 - x_1$ bis $OA_2 = t_2$ stammen und die nachträglich noch das Alter x_1 überschreiten; bei den Letzten derselben geschieht dies in dem, dem Punkte B_2 entsprechenden Zählungszeitpunkte $t_2 + x_1$;

von der Summe dieser beiden Gesammtheiten ist dann die Zahl Derjenigen abzuziehen, welche das Alter x_2 erreichen; diese Anzahl wird durch die Projection $A_1 N'_1 M'_1 A_2$ des Schnittes $C_1 N_1 M_1 B_1$ dargestellt; diese Personen entstammen der Geburtenstrecke $O A_1 = \tau_1 - x_2$ bis $O A_2 = t_2$ und der Letzte erreicht das Alter x_2 in dem, dem Punkte B_1 entsprechenden Zählungszeitpunkte $t_2 + x_2$. Die gefundene Differenz bildet offenbar die gesuchte Gesammtheit und wird eben durch die schraffirte Fläche $N'_1 N'_2 M'_2 M'_1$ repräsentirt.

Leicht einzusehen ist, dass diese Nebengesammtheit analytisch durch den Ausdruck:

$$\int_{\tau_1 - x_2}^{\tau_1 - x_1} f((\tau_1 - t), t)\, dt + \int_{\tau_1 - x_1}^{t_2} f(x_1, t)\, dt - \int_{\tau_1 - x_2}^{t_2} f(x_2, t)\, dt \qquad (20)$$

wobei τ_1, x_1 und x_2 constant und als gegeben voraus zu setzen sind, dargelegt wird.

Beispiel. Es sei die Zahl Derjenigen zu bestimmen, welche vor dem 1. Januar 1850 geboren wurden und die nach dem Zählungstermine 1. Januar 1855 zwischen den Altersgrenzen 10 und 15 Jahre gestorben sind.

Hier ist zu setzen

$$t_2 = 1850,\ \tau_1 = 1855,\ x_1 = 10 \text{ und } x_2 = 15.$$

Diejenigen, welche zur Zeit der Zählung lebend zwischen diesen Altersgrenzen vorhanden sind, entstammen der Geburtenstrecke

$$\tau_1 - x_2 = 1840 \text{ bis } \tau_1 - x_1 = 1845 \text{ (1. Januar)}$$

und diejenigen Lebenden, welche aus dem weitern Theile der Geburtenstrecke $\tau_1 - x_1 = 1845$ bis $t_2 = 1850$ herrühren, überschreiten das untere Grenzalter $x_1 = 10$ Jahre innerhalb der Zeit $\tau_1 = 1855$ bis $t_2 + x_1 = 1860$ (1. Januar), während die hier in Betracht kommenden Lebenden, die das Alter $x_2 = 15$ erreichten, innerhalb der Zeitstrecke $\tau_1 = 1855$ bis $t_2 + x_2 = 1865$ in dieses Alter eintreten; sie entstammen der Geburtenstrecke $\tau_1 - x_2 = 1840$ bis $t_2 = 1850$.

Es soll nun auch noch der zweite Fall, der durch Fig. 12 dargestellt wird, näherer Betrachtung unterworfen werden; es sei die untere Grenze t_1 der Geburtenstrecke und der Zählungszeitpunkt τ_2 gegeben, sowie die beiden Grenzalter, und man soll die Anzahl der Personen darlegen, die n a c h dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden und die v o r dem Zählungstermine τ_2 zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.

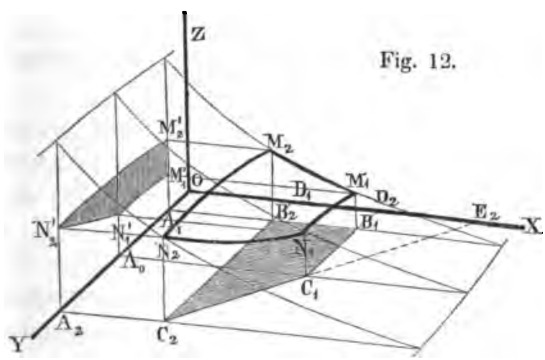


Fig. 12.

Man trage in Fig. 12 auf die Axe OY die Strecke $OA_{1'} = t_1$ auf und lege eine Verticalebene durch den Punkt A_1 parallel der OX-Axe; mache ferner auf der X-Axe $OD_1 = x_1$, $OD_2 = x_2$ und $OE_2 = \tau_2$; lege durch die ersten beiden Punkte D_1 und D_2 Verticalebenen e r s t e r Art und durch E_2 eine Ebene z w e i t e r Art. Die vier Ebenen schneiden aus der krummen Fläche das Flächenstück $M_1 M_2 N_2 N_1$ heraus und die Projection desselben auf die Ebene YOZ, also die Fläche $M'_1 M'_2 N'_2 N'_1$ (in der Figur vertical schraffirt) giebt nun die gesuchte Nebengesammtheit von Verstorbenen, die sich übrigens auf die Geburtenstrecke $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = \tau_2 - x_1$ vertheilen. Dieser Geburtenstrecke gehören diejenigen Personen an, die nach der Zeit t_1 geboren v o r dem Zählungstermine τ_2 das untere Grenzalter x_1 überschreiten und die durch die Fläche $A_1 M'_2 N'_2 A_2$ (Projection von $B_2 M_2 N_2 C_2$) dargestellt werden; von diesen Lebenden sind nun, um die verlangte Gesammtheit von Verstorbenen zu erhalten, einestheils zu subtrahiren Diejenigen derselben, die zum Zählungszeitpunkt τ_2 zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 noch am Leben sind und welche durch die Projection $A_0 N'_1 N'_2 A_2$ der Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ repräsentirt werden, anderntheils Diejenigen, welche das höhere Alter x_2 überschreiten und die durch die Fläche $A_1 M'_1 N'_1 A_0$ (Projection von $B_1 M_1 N_1 C_1$) dargestellt werden. Die hieraus hervorgehende Differenz ist nun eben die bezeichnete schraffirte Fläche. Die das Alter x_2 Ueberschreitenden gehören übrigens der Geburtenstrecke $OA_1 = t_1$ bis $OA_0 = \tau_2 - x_2$ an.

Analytitisch ausgedrückt, ergiebt sich für diese Nebengesammtheit:

$$\int_{t_1}^{\tau_2 - x_1} f(x_1, t)\,dt - \int_{\tau_2 - x_2}^{\tau_2 - x_1} f((\tau_2 - t), t)\,dt - \int_{t_1}^{\tau_2 - x_2} f(x_2, t)\,dt \qquad (21)$$

in welchem Ausdrucke die Grössen x_1, x_2, t_1 und τ_2 als gegebene constante Werthe zu betrachten sind.

Beispiel. Es sei die Anzahl derjenigen Personen darzustellen, die nach dem 1. Januar 1840 geboren wurden und vor dem 1. Januar 1869 zwischen den Altersgrenzen von 20 und 25 Jahren gestorben sind.

Hier ist einfach zu setzen $t_1 = 1840$, $\tau_2 = 1869$, $x_1 = 20$, $x_2 = 25$; diese Verstorbenen vertheilen sich auf die Geburtenstrecke $t_1 = 1840$ bis $\tau_2 - x_1 = 1849$ (1. Januar), während diejenigen der hier in Betracht kommenden Personen, welche das obere Grenzalter überschreiten, der Geburtenstrecke $t_1 = 1840$ bis $\tau_2 - x_2 = 1844$ entstammen; sie überschreiten dieses Alter innerhalb der Zeit $t_1 + x_2 = 1865$ bis $\tau_2 = 1869$.

Auf besondere Spezialfälle gelangt man hier und zwar auf dieselben, auf die schon bei den ersten beiden Nebengesammtheiten hingedeutet wurde, wenn im ersten Falle $\tau_1 = t_2 + x_1$ und im andern Falle $\tau_2 = t_1 + x_2$ ist, d. h. wenn in Fig. 11 die beiden Punkte B_2 und C_2 und in Fig. 12 die Punkte B_1 und C_1 zusammenfallen.

Mit den bis hieher behandelten Haupt- und Nebengesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen sind nun alle diejenigen Fälle behandelt, die auch Knapp (a. a. O.) als wesentlich wichtige schon hervorgehoben hat, wenn auch hier in anderer Weise die Sache dargelegt wurde. Die Fälle liessen sich leicht noch vermehren, doch genügt das Vorstehende offenbar vollständig, um den Gang anzudeuten, der bei Lösung ähnlicher Aufgaben einzuschlagen ist. Ich wende mich nun dazu, die vorstehenden theoretischen Studien praktisch zu verwerthen und Regeln abzuleiten, nach denen die statistischen Erhebungen ausgeführt werden müssen, wenn dieselben einer wissenschaftlichen, analytischen Verwerthung zugänglich gemacht werden sollen.

Ueber Volkszählungen und die Anlage von Todtenregistern.

Es ist schon früher darauf hingewiesen worden, dass als das Hauptziel aller statistischen Erhebungen über Geburt, Leben und Sterben die Auffindung des Gesetzes der krummen Fläche anzusehen ist, die wir in die obigen Untersuchungen eingeführt haben. Als nächste Aufgabe liegt uns aber zunächst die vor, die Wahrscheinlichkeitswerthe der auf S. 4 angedeuteten Mortalitätstafel mit wissenschaftlicher Strenge zu ermitteln. Stellen wir uns die Aufgabe erst ganz allgemein und führen wir statt der dort angewandten Bezeichnung diejenige ein, die wir zuletzt benutzt haben, so hätten wir, um das Gesetz des Absterbens einer gewissen Generation zu ermitteln, nur zu untersuchen, wie viel aus derselben erst das Alter x_1 und wie viel dann das höhere Alter x_2 überschreiten; wir hätten also in Fig. 4, S. 20, die Flächeninhalte $V(x_1)$ und $V(x_2)$ der beiden Schnitte $B_1 M_1 M_2 B_2$ und $B'_1 M'_1 M'_2 B'_2$ zu ermitteln und dann wäre einfach die Wahrscheinlichkeit (nach der wahrscheinlichsten Hypothese) für die x_1-jährige Person dieser Generation das Alter x_2 zu erreichen:

$$p = \frac{V(x_2)}{V(x_1)}$$

Wollte man nun diese Wahrscheinlichkeitswerthe der angenommenen Generation (aus der Geburtenstrecke $O A_1$ bis $O A_2$ Fig. 4) für jedes Alter kennen lernen, so hätte man in den Abständen von einem Jahr in Fig. 4 lauter Schnitte erster Art zu legen und die Inhalte dieser Schnitte würden dann ohne Weiteres die Werthe ergeben, die man sonst in den Mortalitätstafeln als Anzahl der Lebenden von dem betreffenden Alter angegeben findet. Man hätte dann eine Mortalitätstafel dieser Generation gewonnen.

Man sieht also, die ganze Aufgabe läuft einfach darauf hinaus, für jedes Alter den Werth $V(x)$, die erste Gesammtheit von Lebenden, zu ermitteln; dass man dann an die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitswerthe alle die Betrachtungen zu knüpfen hat, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt (Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler etc.), ist selbstverständlich. Das unterliegt aber für den Mathematiker keiner Schwierigkeit, wenn nur erst einmal in richtiger Weise geordnetes statistisches Material vorliegt.

Die erste Gesammtheit von Lebenden vom Alter x aus eine bestimmte Generation, d. h. der Werth $V(x)$ lässt sich nun weder durch Volkszählungen allein, noch aus noch so zweckmässig angelegten und ausgefüllten Todtenregistern ermitteln; wohl aber, und Das zu zeigen, ist der nächste Zweck der folgenden Untersuchungen, aus richtiger Durchführung und Benutzung beider Arten dieser statistischen Erhebungen.

In Fig. 13 ist wieder derjenige Theil unserer krummen Fläche dargestellt, welcher der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1$ bis $O A_2 = t_2$ entspricht. Denke ich mir nun zum Zeitpunkte τ eine Zählung der Lebenden dieser Generation ausgeführt, so habe ich, um ihre Anzahl darzulegen, auf der Axe OX die Strecke $OD = \tau$ aufzutragen und durch den Punkt D einen Verticalschnitt zweiter Art (um 45° gegen die Coordinatenebene XOZ geneigt) zu legen. Die Projection $A_1 N'_2 N'_1 A_2$ des Schnittes $C_1 C_2 N_2 N_1$ ergiebt dann die gesuchte Zahl der Lebenden $V(\tau)$ aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 zum Zählungszeitpunkte τ. Ihr Alter fällt zwischen

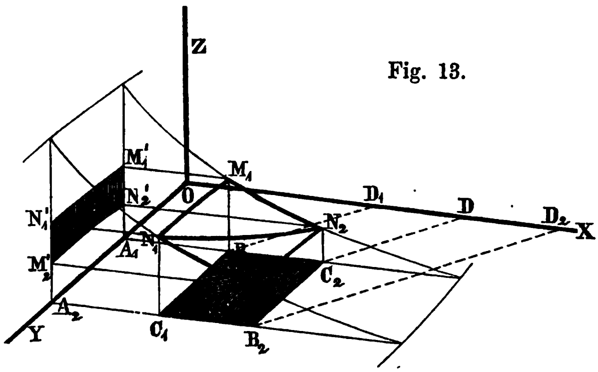


Fig. 13.

$$A_2 C_1 = x_1 = \tau - t_2 \text{ bis } A_1 C_2 = x_2 = \tau - t_1. \qquad (22)$$

Lege ich nun durch die Punkte C_1 und C_2 Verticalschnitte der ersten Art (parallel der Axe OY), so ergiebt der Schnitt $B_1 M_1 N_1 C_1$ oder seine Projection $A_1 M'_1 N'_1 A_2$ die Zahl Derjenigen der Generation $A_1 A_2$, welche das Alter x_1 überschreiten, während die Fläche $C_2 N_2 M_2 B_2$ oder ihre Projection $A_1 N'_2 M'_2 A_2$ die Zahl der Personen derselben Generation anzeigt, die das höhere Alter x_2 überschreiten; die erstere Fläche ist $V(x_1)$, die andere $V(x_2)$, auf deren Bestimmung es uns ankommt.

Der Punkt B_1 entspricht der Zählungszeit

$$\tau_1 = O D_1 = t_1 + x_1 = \tau - (t_2 - t_1) \qquad (23)$$

wenn ich obigen Werth von x_1 benutze, und der Punkt B_2 entspricht der Zählungszeit:

$$\tau_2 = O D_2 = t_2 + x_2 = \tau + (t_2 - t_1). \tag{24}$$

Die Personen der angenommenen Generation, welche das Alter x_1 erreichen, überschreiten dasselbe also innerhalb der Zeit $\tau_1 = \tau - (t_2 - t_1)$ bis τ und die, welche das Alter x_2 erreichen, gehen durch dieses Alter innerhalb der Zeit τ bis $\tau + (t_2 - t_1)$ hindurch.

Man übersieht nun aber im Weitern, dass die Differenz $V(x_1) - V(\tau)$, die durch die Fläche $N'_2 M'_1 N'_1$ (in der Fig. 13 vertical schraffirt) dargestellt wird, nichts anderes darlegt, als die Anzahl der Personen, welche aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 herrühren und die vor dem Zählungstermine τ nach Ueberschreitung des Alters x_1 gestorben sind; sie sind gestorben zwischen den Altersgrenzen:

$$x_1 = \tau - t_2 \text{ und } x_2 = \tau - t_1$$

und innerhalb des Zeitraumes

$$\tau_1 = \tau - (t_2 - t_1) \text{ und } \tau.$$

Diese besondere Gesammtheit von Gestorbenen, die sich ganz leicht aus Kirchenbuchregistern nachweisen liesse, bezeichnen wir kurz mit $M'(x_1 . x_2)$.

Die Differenz $V(\tau) - V(x_2)$ der beiden Flächenprojectionen $A_1 N'_2 N'_1 A_2$ und $A_1 N'_2 M'_2 A_2$, also die Fläche $N'_2 N'_1 M'_2$ (in Fig. 13 horizontal schraffirt) giebt dagegen, wie sich sofort erkennen lässt, die Anzahl der Personen, welche aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 herrühren und nach dem Zählungstermine τ gestorben sind, bevor sie das Alter x_2 erreichten.

Diese Personen sind also ebenfalls zwischen den Altersgrenzen:

$$x_1 = \tau - t_2 \text{ und } x_2 = \tau - t_1,$$

aber innerhalb der Zeit

$$\tau \text{ bis } \tau_2 = \tau + (t_2 - t_1$$

gestorben.

Diese Gesammtheit von Verstorbenen mag mit $M''(x_1 x_2)$ bezeichnet werden.

Die Summe $M'(x_1 x_2) + M''(x_1 x_2)$ giebt die Anzahl derjenigen Personen aus der Generation t_1 bis t_2, welche überhaupt zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 starben; das erste Glied giebt aber Diejenigen, welche vor, das andere Glied Die, welche nach dem Zählungstermine τ gestorben sind. Beide Glieder lassen sich ganz leicht durch Beobachtungen finden, sind aber bis jetzt nirgends ermittelt worden.

Sind sie bestimmt, so findet sich

$$V(x_1) = V(\tau) + M'(x_1 x_2) \tag{25}$$

$$\text{und } V(x_2) = V(\tau) - M''(x_1 x_2) \tag{26}$$

und hieraus für die betreffende Generation die Wahrscheinlichkeit des x_1-Jährigen, das Alter x_2 zu erreichen.

$$p = \frac{V(x_2)}{V(x_1)} \tag{27}$$

und diese Werthe sind frei von allen willkührlichen Annahmen über Altersbestimmungen, unabhängig von dem Verlaufe der Gebürtencurve und der Absterbecurven, sowie von der Zahl der Gebornen der betreffenden Geburtenstrecke.

Beispiel. Es habe am 1. Januar 1868 in einem Lande eine Volkszählung stattgefunden, bei welcher die Lebenden nach ihren Geburtsjahren ausgeschieden wurden. Es sei speziell die Anzahl $V(\tau)$ derjenigen aus dem Geburtsjahre 1840 ermittelt worden, so wäre hier $t_1 = 1840$ und $t_2 = 1841$ (1. Januar), sowie $\tau = 1868$; dann folgt nach der Gl. 22:

$$x_1 = \tau - t_2 = 17 \text{ und } x_2 = \tau - t_1 = 18,$$

sowie nach Gl. 23 und 24

$$\tau_1 = \tau - (t_2 - t_1) = 1867 \text{ und } \tau_2 = \tau + t_2 - t_1 = 1869.$$

Man hat also zur Ermittlung der einen Gesammtheit von Gestorbenen, nämlich $M'(x_1 x_2)$, nachzusehen, wie viel von den aus dem Geburtsjahre 1840 stammenden Personen im Jahre 1867 zwischen 17 und 18 Jahren gestorben sind und zur Ermittlung der andern Gesammtheit $M''(x_1 x_2)$ nachzuschlagen, wie viel von derselben Generation zwischen denselben Altersgrenzen im Jahre 1868, d. h. vom 1. Januar 1868 bis 1. Januar 1869 gestorben sind.

Die Gln. 25, 26 und 27 führen dann auf die Wahrscheinlichkeit der 17-Jährigen aus dem Geburtsjahre 1840, das Alter von 18 Jahren zu erreichen.

Dieselbe Volkszählung liefert aber auch die Lebenden aus jedem andern Geburtsjahre, und die Todtenregister vom vorhergehenden und die vom nachfolgenden Jahre geben, wenn man nur die Gestorbenen nicht nur nach Altersklassen von Jahr zu Jahr, sondern auch nach ihren Geburtsjahren gruppirt, die entsprechenden Werthe von $M'(x_1 x_2)$ und $M''(x_1 x_2)$ und sonach erlangen wir nach streng mathematischen Grundsätzen durch eine einzige Volkszählung und durch die Todtenregister aus dem Vorjahre und dem nachfolgenden Jahre, also schon im Verlaufe von zwei Jahren, alles Material zur Aufstellung einer Mortalitätstafel für die Bevölkerung des betreffenden Landes. Angenommen wieder, es habe die Volkszählung am 1. Januar 1868 stattgefunden, so wären also folgende Register zu füllen:

Tab. I. **Todtenregister.** Erhebungsjahr 1867 (1. Januar) bis 1868 (1. Januar).

Alter:	0 — 1		1 — 2		2 — 3		3 — 4	
Geburtsjahr:	1867	1866	1866	1865	1865	1864	1864	1863
Anzahl der Gestorbenen:					$M'(x_1 x_2)$			

Tab. II. **Volkszählung** am 1. Januar 1868.

Geburtsjahr:	1867	1866	1865	1864
Anzahl der Lebenden aus dem angegebenen Geburtsjahr:			$V(\tau)$	

Tab. III. **Todtenregister.** Erhebungsjahr 1868 (1. Januar) bis 1869 (1. Januar).

Alter:	0 — 1		1 — 2		2 — 3		3 — 4	
Geburtsjahr:	1868	1867	1867	1866	1866	1865	1865	1864
Anzahl der Gestorbenen:						$M''(x_1 x_2)$		

Die übereinanderstehenden, demselben Geburtsjahre entsprechenden Zahlenwerthe von $M'(x_1 x_2)$, $V(\tau)$ und $M''(x_1 x_2)$ sind dann diejenigen, welche durch die Gleichungen (25) (26) und (27) verwerthet werden.

Was nun die hier in Vorschlag gekommene Erhebungsmethode betrifft, so ist das Schema für die Aufnahme der Verstorbenen auch von Knapp (a. a. O. S. 67) verlangt worden. Das Neue in der Anordnung der Todtenregister besteht einfach darin, dass die Gestorbenen auch noch nach dem Geburtsjahre ausgeschieden werden; denn bei einjähriger Altersdifferenz vertheilen sich, wie Knapp zuerst gezeigt hat und auch wir oben nachgewiesen haben, die Gestorbenen des gleichen Sterbejahres bei gleichen Altersgrenzen auf eine zweijährige Geburtenstrecke und die Verstorbenen aus dem gleichen Geburtsjahre auf eine zweijährige Sterbezeitstrecke. Der Knapp'sche Vorschlag ist so einfach und für eine wissenschaftliche und analytische Verwerthung des statistischen Materiales von so hoher Bedeutung, dass die Statistiker ihn sofort befolgen sollten.

Auf Grund der obigen Untersuchungen trete ich mit einem weitern Vorschlag hinzu, nämlich dem, den Termin der Volkszählungen jederzeit auf die Grenzscheide zweier auf die Verstorbenen bezüglichen Erhebungsjahre zu legen. Da nun die Todtenregister nach den Kirchenbüchern mit dem bürgerlichen Jahre abgeschlossen werden, so müssten die Volkszählungen jederzeit am 1. Januar (oder am 31. Dezember) vorgenommen werden, wie dies in Belgien, Italien und Oesterreich bereits geschieht; überdies aber müssten die Lebenden nach ihren Geburtsjahren ausgeschieden werden (wie in Preussen und der Schweiz) oder was bei den Zählungen von Lebenden auf das Gleiche hinausläuft, nach einjährigen Altersdifferenzen gruppirt werden; das oben gegebene Schema für die Volkszählung könnte also auch durch Folgendes ersetzt werden:

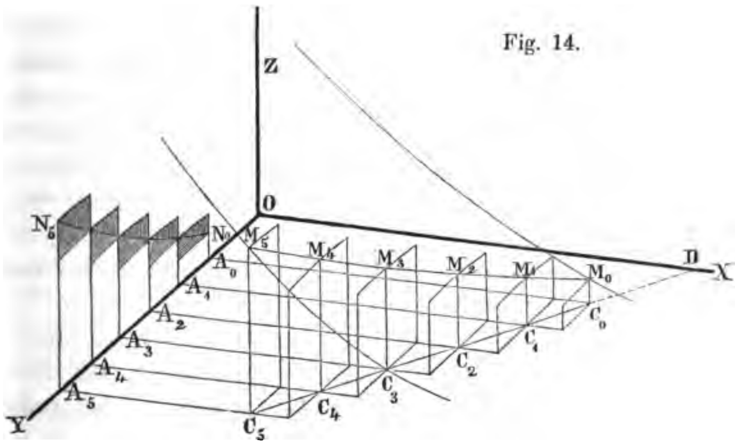
Alter:	0 — 1	1 — 2	2 — 3	3 — 4
Anzahl der Lebenden:			$V(\tau)$	

Denn Diejenigen z. B., welche 1865 geboren wurden, stehen am 1. Januar 1868 sämmtlich im Alter von 2 bis 3 Jahren.

Dass man bei den Erhebungen auch noch männliches und weibliches Geschlecht getrennt halten wird, vielleicht auch die Trennung noch auf Stadt- und Landbevölkerung, vielleicht noch in weiterer Richtung ausdehnen muss und kann, ist selbstverständlich.

Die Werthe, welche die drei oben gegebenen Formulare enthalten, wenn wir sie uns ausgefüllt denken, lassen sich leicht graphisch darlegen. Denken wir uns aus der ganzen Geburtenstrecke,

Fig. 14.



die die Bevölkerung eines Landes umfasst (ungefähr 100 Jahre) nur einige auf einander folgende Jahre, z. B. 5 Jahre herausgenommen (um die Figur deutlich zu halten), die entsprechende Geburtenstrecke OA_0 bis OA_5 (Fig. 14) in 5 Theile getheilt und durch alle Theilpunkte Verticalebenen parallel der Axe OX gelegt, sowie durch die beiden Absterbecurven an den Grenzen unsere krumme Fläche angedeutet, so ergeben sich die Lebenden bei der Volkszählung zur Zeit τ, wenn man auf die Axe OX die Länge $OD = \tau$ aufträgt und durch D einen Schnitt zweiter Art legt. Die ganze Schnittfläche $C_0 M_0 M_5 C_5$ zerfällt in 5 Theile, wie $C_0 M_0 M_1 C_1$, $C_1 M_1 M_2 C_2$ u. s. f., die nun, auf die Ebene YOZ projicirt, die Zahl der Lebenden aus den einzelnen Geburtsjahren, also die Werthe des oben gegebenen Tabellenschemas für die Volkszählung darlegt.

Legt man nun weiter durch die Punkte M_0, M_1, M_2, M_3 u. s. w. Schnitte erster Art und verfährt man, wie dies vorhin bei Betrachtung der Fig. 13 dargelegt wurde, so erhält man für jede einjährige Strecke der ganzen Geburtenstrecke die besondere Gesammtheit von Verstorbenen, die wir dort näher besprochen haben. Man sieht sogleich ein, dass die einzelnen, in der Figur vertical schraffirten, von Curven umschlossenen Dreieckflächen die Werthe darlegen, welche das oben angedeutete Todtenregister (Tab. I) enthält, während die horizontal schraffirten Dreieckflächen die Werthe des Todtenregisters (Tab. III) darstellen, d. h. diejenigen Werthe $M'(x_1 x_2)$ und $M''(x_1 x_2)$, die wir für vorliegende Zwecke gerade brauchen; die Register enthalten aber, wenn sie so ausgefüllt würden, wie es Knapp vorschlägt, sogar mehr, als zunächst nothwendig wäre, wenn es sich nur um Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeit handelte; denn hier brauchen wir ja von den beiden Columnen, welche den einzelnen Altersklassen zukommen, aus dem ersten Todtenregister nur die Werthe der linksseitigen und aus dem andern nur die Werthe der rechtsseitigen Columne. Man wird leicht, ohne dass es hier weiter besprochen wird, erkennen, welche Bedeutung und welchen Werth für weitere Untersuchungen die Werthe derjenigen Columnen haben, die wir hier zunächst ausser Acht lassen.

Aus Allem ist nun klar, dass durch Tabellen der oben angegebenen Art unter Benutzung der Gln. (25), (26) und (27) für jedes Altersjahr die Wahrscheinlichkeit (nach der wahrscheinlichsten Hypothese) bestimmt werden kann, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben; wir erhalten auf solche Weise die Wahrscheinlichkeitswerthe der Col. 2 unseres Planes einer Mortalitätstafel, wie wir ihn auf S. 4 hingestellt haben; gleichzeitig gewinnen wir aber auch ein Mittel, uns eine Vorstellung von dem Verlaufe unserer krummen Fläche in der Richtung der Schnittlinie $M_0 M_5$ zu bilden. Werden dann in einem grössern Lande die Todtenregister der oben angegebenen Art jährlich ausgefüllt, so liefert uns jede neue Volkszählung neues Material, einen neuen Streifen der krummen Fläche darzulegen und dadurch erhielten wir mit der Zeit ein Bild von der Bewegung der Bevölkerung, das hinsichtlich der Wahrheit und Deutlichkeit und mathematischen Strenge Alles hinter sich liesse, was bis jetzt die Statistik in dieser Beziehung geliefert hat.

Aber schon eine Volkszählung an der Grenzscheide zweier Jahre und Ausfüllung der Todtenregister aus dem Jahre vorher und nachher liefert, wie erwähnt, das Material zur Herstellung einer Mortalitätstafel; es ist wahr, die angegebene Methode kann allerdings nur in einem grossen Lande, das aus allen Altersjahren genug Beobachtungen liefert, angewendet werden; aber ich bin es überzeugt, schon die Schweiz könnte mit grossem Vortheil und sicherem Erfolg den Plan durchführen.

Die Mortalitätstabelle, — ich will immer annehmen, die Gewinnung einer solchen sei das nächste Ziel, ohne damit sagen zu wollen das wichtigste; denn das bedeutendste Ziel, dem man zustreben muss, ist die Darlegung des Verlaufes unserer krummen Fläche, — die Mortalitätstabelle, die wir in der angedeuteten Weise gewinnen, ist nun aber eine Tabelle ganz besonderer Art; es ist eine »Mortalitätstabelle gleichzeitig Lebender«, die wohl zu unterscheiden ist von einer »Mortalitätstabelle einer bestimmten Generation«. Man hat bis jetzt noch nicht diesen Unterschied klar ausgesprochen. *) Die dargelegte, durch Fig. 14 verdeutlichte Methode, liefert eine Tabelle der erstern Art; jede einjährige Altersklasse, für die man die Lebenswahrscheinlichkeit bestimmt, entstammt einer andern einjährigen Geburtenstrecke. Die Aufstellung der Tabellen der andern Art erfordert dagegen, eine bestimmte Generation zu verfolgen und anzugeben, wie viel derselben durch die einzelnen Altersjahre hindurchgehen. Die Bestrebungen der

---

*) Knapp erkennt den angedeuteten Unterschied allerdings, hat dann aber durchgängig doch ausschliesslich die Construction von »Mortalitätstafeln bestimmter Generationen« im Auge und selbst in diesem Falle betrachtet er, um es kurz auszusprechen, die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitswerthe der Col. 4, statt die der Col. 2 unseres Tabellenschemas (S. 4), als Hauptsache. Knapp vergleicht die Anzahl der Personen einer bestimmten Generation, die das angenommene Alter x erreichen, immer mit der Gesammtzahl der Geburten der Strecke, aus der diese Personen stammen, während nach der oben behandelten Methode die Kenntniss der Anzahl der Geburten der betreffenden Generation gar nicht erforderlich ist. Bei der Knapp'schen Methode muss sich aber doch sicher bei mittlern und höhern Altern der Einfluss der Ein- und Auswanderung sehr fühlbar machen, während dieser Einfluss bei der im Texte behandelten Methode fast verschwindet oder durch Beobachtungen über die Wanderung beseitigt werden kann, weil diese Methode nur die Kenntniss dieser Vorgänge zwischen zwei Zählungsterminen fordern würde. Wenn etwas gegen dieselbe eingewendet werden könnte, so wäre es das, was Knapp (in seiner Schrift S. 80) bei der Besprechung einer andern Methode hervorhebt, dass nämlich bei Volkszählungen viele Leute ihr Alter falsch angeben, theils absichtlich, theils weil sie es nicht sicher anzugeben wissen. Wie weit ein solcher Einwurf auch meine Methode trifft, vermag ich nicht zu entscheiden und muss die Frage, ob durch irgend welche Mittel, wie veränderte Fragestellung u. s. f., sich genauere Zählungsresultate erzielen lassen, den Statistikern von Fach überlassen.

neuern Zeit sind immer nur auf die Herstellung solcher Tabellen gerichtet gewesen und doch haben die der erstern Art im allgemein statistischen Sinne den gleichen wissenschaftlichen Werth und es tritt hier der grosse Vortheil hinzu, dass man in kurzer Zeit, ja, wenn die Bevölkerung, die der Beobachtung unterworfen wird, zahlreich genug ist, schon innerhalb von zwei Jahren das nöthige Material erhält, um eine solche Tabelle zu entwerfen und den allgemeinen Verlauf eines Streifens unserer krummen Fläche darzulegen.

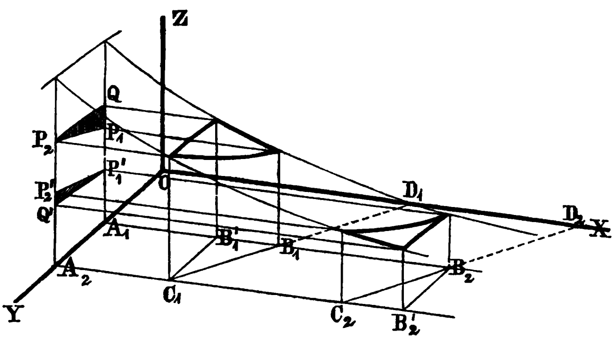
Die Herstellung einer Tabelle »einer bestimmten Generation« erfordert dagegen mindestens ein ganzes Menschenalter als Beobachzeit, und Tabellen solcher Art wären es vorzugsweise, die man zur Aufsuchung des Sterblichkeits**gesetzes** verwenden müsste. Wir besitzen übrigens bis jetzt keine Mortalitätstafel weder der ersten, noch der zweiten Art; selbst die besten vorhandenen Tabellen, wozu z. B. die von Dr. Heym für das Königreich Sachsen, die Tabelle der 17 englischen Gesellschaften und die bekannten Brune'schen Tabellen gehören, sind nach Methoden hergestellt worden, die eine Mischung der beiden angegebenen Methoden darstellen. Schöpft man das Material aus Beobachtungen der Lebensversicherungsgesellschaften, so bleibt freilich kein anderer Weg als eine solche Vermischung übrig; wegen der verhältnissmässig geringen Zahl zu beobachtender Fälle muss man hier zur Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeiten Personen zusammenfassen, die aus vieljähriger Geburtenstrecke stammend, die entsprechenden Alter erreichen. Wir kommen übrigens auf die Frage zurück, wie das Material der Versicherungsanstalten zu verwerthen ist; hier handelt es sich noch um die Frage des Sammelns und Verwerthens des Materiales, das aus den Beobachtungen in grössern Ländern gewonnen wird.

Würden wir übrigens die aus solchem Materiale gewonnenen Mortalitätstabellen bei Versicherungsrechnungen verwenden wollen, so würde für solche Zwecke die »Mortalitätstabelle gleichzeitig Lebender« Anwendung finden müssen, nicht die »einer bestimmten Generation«.

Wie nun endlich eine »Mortalitätstabelle einer bestimmten Generation« aus den statistischen Erhebungen eines ganzen Landes erstellt werden könnte, geht eigentlich sofort aus dem früher Gesagten, besonders leicht aus Fig. 14 hervor. Doch mögen noch einige Bemerkungen folgen.

Das Schema für die Erhebungen bleibt dasselbe, wie es auf S. 49 angegeben wurde; die Erhebungen betreffend die Verstorbenen werden jährlich stattfinden; am vollkommensten wäre es nun, wenn auch jährlich, aber an der Grenzscheide zweier Jahre, d. h. am 1. Januar oder 31. Dezember, Volkszählungen veranstaltet würden. Das ist leider nicht wohl möglich; liegen nun zwischen zwei Zählungsterminen mehrere Jahre, z. B. 3, 5 oder 10 Jahre, so würde die Verwerthung in solcher Weise erfolgen können, wie es aus der folgenden Betrachtung hervorgeht.

Fig. 15.



Es sei wieder (Fig. 15) die Geburtenstrecke von $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$ genommen und wie bisher die dieser Generation entsprechende krumme Fläche durch die Absterbecurven dargestellt. Der erste Zählungstermin sei τ_1, der spätere τ_2; mache nun $OD_1 = \tau_1$ und $OD_2 = \tau_2$ und lege durch die Punkte D_1 und D_2 Schnitte der zweiten Art. Nach dem oft Erwähnten stellt jetzt die Projection $A_1 P_1 P_2 A_2$ des ersten Schnittes die Anzahl der Lebenden der Generation $A_1 A_2$ zum Zählungszeitpunkte τ_1 dar und die Projection $A_1 P'_1 P'_2 A_2$ die Lebenden der gleichen Generation zum Zeitpunkte τ_2; sie seien resp. mit $V(\tau_1)$ und $V(\tau_2)$ bezeichnet.

Ich lege nun durch die Punkte C_1 und B_2 Schnitte der ersten Art und erhalte dadurch, wie auch schon vielfach hervorgehoben wurde, in der Projection $A_1 Q P_2 A_2 = V(x_1)$ die Personen der angenommenen Generation, welche das untere Alter x_1 überschreiten und in der Projection $A_1 P'_1 Q' A_2 = V(x_2)$ des zweiten Schnittes Diejenigen, welche das obere Grenzalter x_2 erreichen; dabei ist das untere Grenzalter x_1 durch die Länge $A_2 C_1 = \tau_1 - t_2$ und das obere Alter x_2 durch $A_1 B_2 = \tau_2 - t_1$ gegeben. Da der Punkt B'_1

der Zählungszeit $t_1 + x_1$ oder $t_1 + \tau_1 - t_2 = \tau_1 - (t_2 - t_1)$ und der Punkt B'_2 der Zählungszeit $t_2 + x_2 = \tau_2 + (t_2 - t_1)$ entspricht, so überschreiten die $V(x_1)$ Personen unserer Generation das Alter x_1 innerhalb der Zeit

$$\tau_1 - (t_2 - t_1) \text{ bis } \tau_1$$

und die $V(x_2)$ Personen erreichen das obere Grenzalter in der Zeit

$$\tau_2 \text{ bis } \tau_2 + (t_2 - t_1).$$

Nun ist sogleich klar, dass die (in der Fig. 15 vertical schraffirte) Dreieckfläche $P_1 P_2 Q$, die mit $M'(x_1)$ bezeichnet werden mag, die Anzahl der Personen darstellt, welche in der Zeit

$$\tau_1 - (t_2 - t_1) \text{ bis } \tau_1,$$

d. h. bis zum ersten Zählungstermine nach Ueberschreitung des Alter $x_1 = \tau_1 - t_2$ gestorben sind, und diese besondere Nebengesammtheit von Gestorbenen lässt sich leicht beobachten; man hat dann

$$V(x_1) = V(\tau_1) + M'(x_1) \tag{28}$$

Die andere, in der Fig. 15 horizontal schraffirte Fläche $P'_1 P'_2 Q'$ stellt ferner die Anzahl der Personen dar (sie sei mit $M''(x_2)$ bezeichnet), welche vom zweiten Zählungstermine τ_2 abgerechnet in der Zeit

$$\tau_2 \text{ bis } \tau_2 + (t_2 - t_1)$$

vor Erreichung des Alters $x_2 = \tau_2 - t_1$ gestorben sind. Auch diese Gesammtheit ergiebt sich aus Todtenregistern und daher erhält man

$$V(x_2) = V(\tau_2) - M''(x_2), \tag{29}$$

sowie endlich für die betreffende Generation die Wahrscheinlichkeit für den x_1-Jährigen, das Alter x_2 zu erreichen

$$p = \frac{V(x_2)}{V(x_1)} \tag{30}$$

Beispiel. Es sollen die im Jahre 1839 Gebornen unsere Generation bilden; es ist daher $t_1 = 1839$ und $t_2 = 1840$; die erste Zählung fand 1860 (1. Januar) und die zweite 1865 (1. Januar) statt; es ist also $\tau_1 = 1860$ und $\tau_2 = 1865$. Hier ist nun das untere Grenzalter

$$x_1 = \tau_1 - t_2 = 20,$$

das obere Grenzalter

$$x_2 = \tau_2 - t_1 = 26.$$

Ferner ist $\tau_1 - (t_2 - t_1) = 1859$ (1. Januar),

$\tau_2 + (t_2 - t_1) = 1866$ (1. Januar).

Hiernach ist $M'(x_1)$ die Anzahl der Personen, welche im Jahre 1859, aus dem Geburtsjahre 1839 stammend, nach Ueberschreitung des Alters von 20 Jahren gestorben sind.

$M''(x_2)$ ist dagegen die Zahl Derjenigen, welche im Jahre 1865, aus dem gleichen Geburtsjahre stammend, gestorben sind, bevor sie das Alter von 26 Jahren erreicht hatten (zwischen 25 und 26 Jahren). $V(\tau_1)$ und $V(\tau_2)$ stellen die Anzahl der Lebenden aus dem Geburtsjahre 1839 an den beiden Zählungsterminen dar.

Die Benutzung der Formeln (28), (29) und (30) liefert dann die Wahrscheinlichkeit des 20-Jährigen dieser Generation, das Alter von 26 Jahren zu erreichen.

Die Anzahl $M'(x_1)$ der Gestorbenen findet sich im Todtenregister des Erhebungsjahres 1859 und die Anzahl $M''(x_2)$ in dem des Jahres 1865.

Wir würden hier auch noch durch die Punkte B_1 und C_2 (Fig. 15) Schnitte erster Art legen können und erhielten dann mit Hülfe der Todtenregister vom Jahre 1860 und 1864 die Werthe $M''(x_1)$ und $M'(x_2)$, mit deren Hülfe man dann durch die Formeln

$$V(\tau_1) - M''(x_1)$$

$$\text{und } V(\tau_2) + M'(x_2)$$

auch noch die Anzahl Derjenigen erhält, die aus dem Geburtsjahre 1839 stammend, durch das Alter von 21 und 25 Jahren hindurch gehen.

Es wird nicht nöthig erscheinen, hier weiter auf die Sache einzugehen; man erkennt, welche Fülle von herrlichem Material sich herausstellt, wenn man die Knapp'schen Todtenregister einführt und nach meinem Vorschlage die Volkszählungen auf die Grenzscheide zweier Jahre legt und ihre Resultate in sachgemässer Weise mit den Erhebungen der Sterberegister verbindet.

Schon einige auf einander folgende Volkszählungen würden dann Material genug liefern, ganze grosse Theile der krummen Fläche darzustellen, die in so schöner übersichtlicher Weise alles das darstellt, was man bis jetzt in der Statistik unter der Benennung »Bewegung der Bevölkerung« zusammenfasste.

Werden vom Statistiker dem Mathematiker die Beobachtungsresultate in der hier verlangten Form geliefert, so hat für diesen eine weitere mathematische Verwerthung keine Schwierigkeit; die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird dann erst mit wahrem Erfolge in statistische Fragen eingreifen können.

Entwickelung von Näherungsformeln.

Die Methoden, die wir oben besprochen haben, können heute noch keine Verwerthung finden, weil das statistische Material nicht in der verlangten Form bis jetzt gesammelt worden ist.

Es fragt sich nun aber, ob nicht doch auch alles angehäufte Material, wie es vorliegt, ebenfalls nach mathematischen Grundsätzen verwerthet werden könnte und wie man in solchen Fällen noch zu brauchbaren Resultaten gelangen könnte, in denen auch in Zukunft, wie dies z. B. bei den Erhebungen in Lebensversicherungsgesellschaften immer der Fall sein wird, die gegebenen Methoden nicht benutzen kann, da sie doch vorzugsweise nur in grössern Ländern mit zahlreicher Bevölkerung zu brauchbaren Resultaten führen.

Es lässt sich aber zeigen, dass die angedeutete Frage recht wohl und zwar bejahend beantwortet werden darf, wenn man die Resultate in Betracht zieht, auf welche die Ableitung von Näherungsformeln führt.

Die sämmtlichen analytischen Ausdrücke, die ich oben für die Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen hingestellt habe, enthalten nur zwei Integralausdrücke, die sich immer wiederholen und für die sich leicht unter Voraussetzung verschiedener Hypothesen, von denen ich nur zwei hervorheben will, Näherungsausdrücke aufstellen lassen, aus denen sich dann im Weitern nützliche und werthvolle Regeln für Beobachtungen und Benutzung derselben ableiten.

Die Gleichung der krummen Fläche, welche in allen bis jetzt angegebenen Figuren durch die Absterbecurven angedeutet wurde, schrieb sich allgemein

$$z = f(x, t),$$

wo t der Zeitpunkt der Geburt und x das Alter darstellte. Der Zählungszeitpunkt τ war:

$$\tau = t + x$$

und daher schrieb sich die Gleichung der Fläche auch:

$$z = f((\tau - t), t)$$

und endlich hätten wir auch t eliminiren können und erhalten:

$$z = f(x, (\tau - x)),$$

von welch letzterer Gleichung wir aber keinen Gebrauch gemacht haben.

Von dieser krummen Fläche ist uns nun nichts weiter als der ganz allgemeine Verlauf bekannt, wie ich ihn in den angegebenen Figuren angedeutet habe. Man kann aber, und das ist die erste Hypothese, von der ich zunächst einmal ausgehen will, die Annahme machen, es sei erlaubt, einzelne Theile dieser krummen Fläche durch ein ebenes Flächenstück zu ersetzen, das sich möglichst genau an das betreffende Stück der krummen Fläche anschliesst und anschmiegt. Das ist gewiss erlaubt, wenn man nur die Strecke der Geburtszeit t_1 bis t_2 sehr klein, ebenso die Altersdifferenz $x_2 - x_1$ klein voraussetzt und endlich zwei auf einander folgende Zählungstermine τ_1 und τ_2 nahe bei einander liegend sich vorstellt. Die Verticalschnitte, die wir gelegt haben und die einen Theil der krummen Fläche herausschnitten, deren Projection auf die Ebene YOZ uns dann in allen Fällen auf die gesuchte Gesammtheit führte, liegen dann sehr nahe bei einander und die Gleichung des umschlossenen Flächenstückes kann dann ersetzt werden durch die Gleichung einer ebenen Fläche:

$$\frac{x}{a} + \frac{t}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{31}$$

wobei a, b, c die Parameter der Ebene sind, d. h. sie geben die Entfernungen an, in denen die Ebene, verlängert gedacht, die Axen OX, OY und OZ vom Ursprung O abgerechnet, schneiden. Diese Parameter sind ohne Weiteres nicht bekannt, doch ist für uns eine nähere Kenntniss derselben zunächst auch nicht nöthig, da wir nur im Auge haben, die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen auf dem Näherungswege festzustellen.

In Fig. 13 (S. 46) denken wir uns also die Hauptschnitte so nahe bei einander liegend, dass das Flächenstück $M_1 N_1 M_2 N_2$ als eben anzusehen ist, dann gilt für einen Punkt desselben innerhalb der Schnitte für die Verticale der drei Coordinaten, nach (31), die Formel:

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{t}{b}\right) \tag{32}$$

und wenn wir x durch $\tau - t$ ersetzen, auch:

$$z = c\left(1 - \frac{\tau}{a} - \frac{a-b}{ab}\,t\right) \tag{33}$$

Jetzt können wir nun sofort den Ausdruck für die erste Gesammtheit von Lebenden ermitteln, d. h. für die Anzahl derjenigen, die aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammend, das Alter x erreichen; wir erhielten hiefür nach Gl. (4), S. 12:

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dt.$$

Ersetzen wir hier die Form $f(x, t)$ durch den Werth z nach Gl. (32) und integrirt man unter der Voraussetzung, dass x constant ist, so folgt:

$$V(x) = c\left(1 - \frac{x}{a}\right)(t_2 - t_1) - \frac{c}{2b}(t_2^2 - t_1^2)$$

oder nach einfacher Umformung:

$$V(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dt = c\,(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{x}{a} - \frac{t_1 + t_2}{2b}\right] \tag{34}$$

Ebenso leicht findet sich dann auch die zweite Gesammtheit von Lebenden, d. h. die Anzahl derjenigen, die aus der Geburtszeit t_1 bis t_2 stammend, am Zählungstermine τ noch am Leben sind; nach Gl. (6), S. 13, ist:

$$V(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} f((\tau - t), t)\, dt.$$

Ersetzen wir hier die Form $f((\tau - t), t)$ durch den Werth von z nach Gl. (33), so findet sich durch Integration, wenn man τ constant setzt:

$$V(\tau) = c\left(1 - \frac{\tau}{a}\right)(t_2 - t_1) - c\frac{(a-b)}{2ab}(t_2^2 - t_1^2),$$

oder nach geringer Umformung:

$$V(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} f((\tau - t), t)\, dt$$

$$= c\,(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{\tau}{a} - \frac{(a-b)}{ab} \cdot \frac{(t_1 + t_2)}{2}\right] \quad (35)$$

Die beiden Formeln (34) und (35) sind an sich direct nicht praktisch zu verwerthen, weil die Parameter a, b, c nicht bekannt sind; mit ihrer Hülfe kann man aber doch sogleich alle übrigen Gesammtheiten, die früher behandelt wurden, ohne weitere Integration ableiten.

Bevor das geschieht, mag aber eine Anwendung der Formeln gezeigt werden, die von besonderm Interesse ist, da wir von dem Ergebniss in der zweiten Abhandlung nützlichen Gebrauch machen können. Es betrifft eine Frage, die schon auf S. 19 angedeutet wurde.

In Fig. 16 ist $OA_1 = t_1$, $OA_2 = t_2$, $A_1B_1 = AB = A_2B_2 = x$; der Schnitt $B_1M_1M_2B_2$ ergiebt Diejenigen der Generation A_1A_2, welche das Alter x erreichen. Man kann sich nun durch den Punkt B, dessen Coordinaten $OA = t$ und $AB = x$ sind und der der Zählungszeit $\tau = x + t$ entspricht, einen Schnitt zweiter Art gelegt denken, dessen Projection auf die Ebene YOZ die Zahl der Lebenden derselben Generation zum Zeitpunkt τ darlegt.

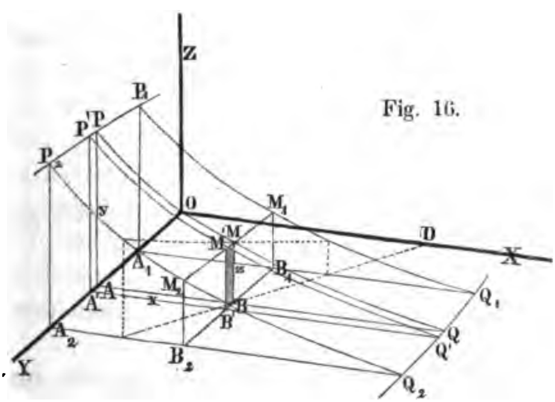


Fig. 16.

Dieser Zeitpunkt soll jetzt so gewählt werden, dass die Zahl der Lebenden $V(\tau)$ mit der Anzahl derjenigen, die das Alter x erreichen, nämlich $V(x)$ übereinstimmt. Man erhält sofort durch Gleichsetzen der Ausdrücke (34) und (35), da der gemeinschaftliche Faktor $c\,(t_2 - t_1)$ wegfällt:

$$1-\frac{x}{a}-\frac{t_1+t_2}{2b}=1-\frac{\tau}{a}-\frac{(a-b)}{ab}\cdot\frac{t_1+t_2}{2}$$

und hieraus folgt das einfache Resultat:

$$\tau=x+\frac{t_1+t_2}{2} \tag{36}$$

und dann weiter:

$$t=\frac{t_1+t_2}{2}. \tag{37}$$

Die Punkte B_1 und B_2 entsprechen den Zählungszeiten $\tau_1=x+t_1$ und $\tau_2=x+t_2$, zwischen denen die Personen dieser Generation in das Alter x eintreten; es folgt daher auch:

$$\tau=\frac{\tau_1+\tau_2}{2} \tag{38}$$

Hieraus ergiebt sich der einfache Satz:

Wenn man die Lebenden aus der Generation t_1 bis t_2 in der Mitte des Zeitraumes $\tau_1=t_1+x$ bis $\tau_2=t_2+x$ zählt, so erhält man näherungsweise die Anzahl derjenigen, welche aus derselben Geburtenstrecke stammend innerhalb dieses Zeitraumes das Alter x erreichen.

Wollte ich z. B. die Anzahl Derjenigen bestimmen, die im Jahre 1850 geboren wurden und das Alter von 20 Jahren erreichen; so wäre hier $t_1=1850$, $t_2=1851$, $x=20$; demnach $\tau_1=1870$ und $\tau_2=1871$ und die Zählung müsste stattfinden zur Zeit $\tau=1870\,{}^1/_2$, d. h. in der Mitte des Jahres 1870 (am 1. Juli). Zählt man in der Mitte des Jahres 1871 wieder die Personen aus dem gleichen Geburtsjahre, so ergiebt sich die Anzahl derjenigen, welche das Alter von 21 Jahren erreichen. Sind die Zahlen gross genug, so fände sich die Wahrscheinlichkeit der 20-Jährigen dieser Generation, das Alter von 21 Jahren zu erreichen, einfach durch den Quotienten der beiden Zählungsresultate.

In diesen Resultaten ist eine Methode begründet, die man hier und da schon beim Sammeln des statistischen Materiales aus den Aufzeichnungen in Lebensversicherungsanstalten benutzt hat. Nehmen wir an, wie das gewöhnlich der Fall ist, die Abschlüsse würden auf den 1. Januar bezogen und das Zählungsjahr sei τ (z. B. 1869) und man wollte die Anzahl Derjenigen wissen, welche im Laufe des letzten Halbjahres das Alter von x (z. B. 20 Jahre) erreichten und dazu diejenigen nehmen, welche dieses Alter im nächsten Halbjahre erreichen werden, so zählt man zur Zeit t einfach diejenigen Personen, welche aus der Geburtenstrecke $t_1 = \tau - x - \frac{1}{2}$ bis $t_2 = \tau - x + \frac{1}{2}$ stammend (also in dem angenommenen Falle die, welche aus der Geburtszeit vom 1. Juli 1848 bis 1. Juli 1849), vorhanden sind. Das einfachste Verfahren ist hierbei, die Geburtstage sämmtlicher Versicherten gleich von vorn herein auf den 1. Januar zu verlegen und zwar für diejenigen, welche im ersten Halbjahre des bürgerlichen Jahres geboren wurden auf den 1. Januar des gleichen Jahres und diejenigen aus dem zweiten Halbjahre auf den 1. Januar des nächstfolgenden Jahres; das so gefundene Geburtsjahr wird dann einfach vom Zählungsjahr subtrahirt, um das Alter zu erhalten und man kann dann die Sache so auslegen, als seien zum Zählungstermine τ so und so viel Personen von gleichem Alter x vorhanden; die Zählung, welche streng genommen den Werth $V(\tau)$ ergiebt, giebt hier näherungsweise zugleich den Werth $V(x)$, der allein bei Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeiten massgebend ist.

Ordnet man in dieser Art jährlich die Versicherten nach ihrem Alter und fasst man schliesslich eine grössere Reihe von Jahren zusammen, so findet man dann die Anzahl derjenigen, die das Alter x erreichten $V(x)$ und derjenigen, welche durch das Alter $x+1$ hindurch gingen, nämlich $V(x+1)$, und dann ist die Lebenswahrscheinlichkeit des x-Jährigen:

$$p = \frac{V(x+1)}{V(x)}$$

Man darf aber nie übersehen, dass die durch diese Methode gewonnenen Resultate nur als erste Näherungswerthe aufzufassen sind; die ganze obige Entwicklung zeigt, welche Voraussetzungen man bei Anwendung dieser Methode macht. Ich glaube aber doch, dass man unter Beibehaltung einjähriger Geburtenstrecken und einjähriger Altersdifferenzen das Verfahren auch fernerhin bei Versicherungsanstalten benutzen darf, nur tritt hier ein besonderer Umstand hinzu, wie nämlich diejenigen Personen in Rechnung gezogen werden sollen, die im Laufe des letzten Jahres eingetreten sind oder austraten? Das ist eine Frage, die schon mehrfach behandelt worden ist und auf die ich ausführlich in der zweiten Abhandlung zu sprechen kommen werde.

Wir wollen nun unsere Näherungsformeln (34) und (35) benutzen, um Näherungsgleichungen auch für alle übrigen Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen, die früher besprochen wurden, abzuleiten. Die beiden Hauptgesammtheiten von Lebenden werden schon durch (34) und (35) gegeben, bestimmen wir daher zuerst die drei Hauptgesammtheiten von Verstorbenen.

Die erste Gesammtheit von Verstorbenen ist auf S. 20 unter Zugrundelegung von Fig. 4 abgeleitet worden. Die Gl. (9) ergiebt die Anzahl Derjenigen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind; aus der dort gegebenen Gleichung:

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2, t)\, dt$$

ersieht man, dass man einfach in Gl. (34) das x einmal durch x_1, dann durch x_2 zu ersetzen und die Formeln, die sich so ergeben, von einander zu subtrahiren hat; man erhält sogleich:

$$M_1 = \frac{c}{a}(t_2 - t_1)(x_2 - x_1) \tag{39}$$

für die gesuchte erste Hauptgesammtheit der Verstorbenen unter der diesen Untersuchungen zu Grunde gelegten Annahme, dass das entsprechende Stück der krummen Fläche durch ein ebenes Flächenstück ersetzt werden darf.

Für die zweite Hauptgesammtheit M_2 von Verstorbenen, nämlich für die Anzahl derjenigen, die aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammend, zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind, ergab sich nach Gl. (10), S. 24, und nach Fig. 5, S. 23:

$$M_2 = \int_{t_1}^{t_2} f((\tau_1 - t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f((\tau_2 - t), t)\, dt.$$

Setzen wir daher in Gl. (35) statt τ zuerst τ_1 und dann τ_2 ein, so ergiebt die Differenz der beiden so erhaltenen Ausdrücke sogleich:

$$M_2 = \frac{c}{a}(t_2 - t_1)(\tau_2 - \tau_1) \tag{40}$$

als Näherungsformel.

Für die dritte Hauptgesammtheit von Verstorbenen, d. h. die Zahl derjenigen, die zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 und den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind, gilt Gl. (11), S. 26, und Fig. 6, S. 24. In dem Ausdrucke für M_3 kommen vier Integrale vor, die sich für vorliegenden Fall aus den Gl. (34) und (35) bestimmen. Man erhält nach längeren, aber leicht nachzuführenden Reductionen:

$$M_3 = \frac{c}{a}(\tau_2 - \tau_1)(x_2 - x_1) \tag{41}$$

als Näherungsformel.

Für einjährige Geburtenstrecke, einjährige Altersdifferenz resp. einjährige Differenz der Zählungszeiten ergeben die Gleichungen (39), (40) und (41) für die drei Hauptgesammtheiten beziehungsweise

$$M_1 = \frac{c}{a}; \quad M_2 = \frac{c}{a}; \quad M_3 = \frac{c}{a}.$$

Merkwürdig einfache Resultate, die sich leicht in Worte fassen lassen! Bemerkenswerth ist, dass in den vorstehenden Nährungsformeln von den drei Parametern a, b und c des ebenen Flächenstückes, welches an der betreffenden Stelle die krumme Fläche ersetzen soll, der Parameter b, der hauptsächlich vom Verlaufe der Geburtencurve abhängig sein wird, gar nicht vorkommt. Wäre eine dieser drei Gesammtheiten durch Beobachtung ermittelt, so liesse sich rückwärts der Werth $c : a$ ermitteln, und hieraus ergäbe sich die Neigung der in der Ebene XOZ liegenden Spur unserer Ebene gegen die X-Axe; überhaupt nehme ich an, dass die vorstehenden und folgenden Näherungsformeln einst dazu dienen können, die Lage einzelner Flächenelemente unserer krummen Fläche im Raume zu bestimmen.

Mit gleicher Leichtigkeit lassen sich nun auch mit Gl. (34) und (35) die früher für die Nebengesammtheiten gegebenen allgemeinen Formeln (S. 30 und f.) in Näherungsausdrücke umwandeln. Diese Umformung ist so leicht durchführbar, dass ich im Folgenden nur die Resultate meiner Rechnungen und auch nur diejenigen aufführen will, die sich auf die Nebengesammtheiten der Verstorbenen beziehen.

Erste Nebengesammtheit der Verstorbenen.

1. Fall. Anzahl der Personen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche von dem Zählungstermine τ_1 abgerechnet gestorben sind, bevor sie das Alter x_2 erreichten:

$$M = \frac{c}{a}(t_2 - t_1)\left[\frac{t_1 + t_2}{2} - \tau_1 + x_2\right] \tag{42}$$

(Hervorgegangen aus dem Ausdruck (16), S. 35 und Fig. 7.)

2. Fall. Anzahl der Personen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche vor dem Zählungstermine τ_2 gestorben sind, nachdem sie das Alter x_1 überschritten hatten:

$$M = \frac{c}{a}(t_2 - t_1)\left[\tau_2 - \frac{t_1 + t_2}{2} - x_1\right] \tag{43}$$

(Hervorgegangen aus dem Ausdruck (17), S. 36 und Fig. 8.)

Zweite Nebengesammtheit der Verstorbenen.

1. Fall. Anzahl der Personen, die vor dem Zeitpunkte t_2 geboren wurden und zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind, bevor sie das Alter x_2 erreichten:

$$M = \frac{c}{a}(\tau_2 - \tau_1)\left[t_2 - \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} + x_2\right] \tag{44}$$

(Entwickelt aus dem Ausdruck (18), S. 38 und Fig. 9.)

2. Fall. Anzahl der Personen, die nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden und zwischen den beiden Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind, nachdem sie das Alter x_1 überschritten hatten:

$$M = \frac{c}{a}(\tau_2 - \tau_1)\left[\frac{\tau_2 + \tau_1}{2} - t_1 - x_1\right] \tag{45}$$

(Hervorgegangen aus dem Ausdruck (19), S. 40 und Fig. 10.)

Dritte Nebengesammtheit der Verstorbenen.

1. Fall. Die Anzahl der Personen, welche vor dem Zeitpunkte t_2 geboren wurden und die nach dem Zählungstermine τ_1 zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind, findet sich näherungsweise:

$$M = \frac{c}{a}(x_2 - x_1)\left[t_2 - \tau_1 + \frac{x_1 + x_2}{2}\right] \tag{46}$$

(Entwickelt aus dem Ausdruck (20), S. 42 nach Fig. 11.)

2. Fall. Die Anzahl der Personen, welche dagegen zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 vor dem Zählungszeitpunkte τ_2 gestorben sind, die aber nach dem Zeitpunkte t_1 geboren wurden, ist:

$$M = \frac{c}{a}(x_2 - x_1)\left[\tau_2 - t_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right] \tag{47}$$

(Entwickelt aus dem Ausdruck (21), S. 44, nach Fig. 12.)

Die Näherungsformeln (39) bis (47), wie sie hier als hervorgegangen aus den allgemeinen Gleichungen hingestellt wurden, lassen sich mit Leichtigkeit direct aus den Figuren ableiten, die wir für die verschiedenen Fälle früher zu Grunde gelegt haben.

Lassen wir in allen diesen Näherungsgleichungen vorübergehend den, allen gemeinschaftlichen Factor $c:a$ weg, so erhält man in allen den genannten Fällen einen Ausdruck von sehr einfacher Bedeutung. Der Ausdruck stellt dann nichts anderes dar, als die Projection des betreffenden Theiles unserer krummen Fläche auf die Horizontalebene XOY.

So ist z. B. der Ausdruck $(t_2 - t_1)\,(x_2 - x_1)$ in Gl. (39) für die erste Hauptgesammtheit der Verstorbenen in Fig. 4, S. 20, einfach die Flächenprojection $B_1 B_2 B'_2 B'_1$.

Ebenso der Ausdruck $(t_2 - t_1)\,(\tau_2 - \tau_1)$ in Gl. (40) für die zweite Hauptgesammtheit in Fig. 5, S. 23, das Parallelogramm $C_1 C_2 C'_2 C'_1$ und in der Gl. (41) für die dritte Hauptgesammtheit der Werth $(\tau_2 - \tau_1)\,(x_2 - x_1)$ der Flächeninhalt des Parallelogramms $B_1 B_2 C_2 C_1$ in Fig. 6, S. 24.

Ganz so verhält sich's auch mit den Nebengesammtheiten der Gestorbenen, wie man sich leicht überzeugen kann.

Diese Formeln für die Flächeninhalte dieser Projection auf die XOY-Ebene behalten ihre Richtigkeit unter allen Umständen, welches auch der Verlauf des betreffenden Theiles der krummen Fläche sein mag. Die gesuchten Gesammtheiten ergaben sich aber durch die Projectionen des Flächenstückes auf die Ebene YOZ; in dem Spezialfalle nun, den wir hier vor Augen haben, wonach wir näherungsweise das betreffende Stück der krummen Fläche durch ein ebenes Stück ersetzten, lässt sich aber die eine Projection aus der andern ableiten.

Es sei ABC die Ebene, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ seien ihre Parameter (Fig. 17 a. f. S.); dann lässt sich leicht zeigen, dass die Winkel φ, ψ und χ, welche die Ebene beziehungsweise mit den drei Coordinatebenen XOY, YOZ, XOZ einschliesst, sich durch folgende Formeln bestimmen:

$$cos\,\varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$$

$$cos\,\psi = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$$

$$\cos\chi = \frac{a\,c}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$$

Denken wir uns einen Theil F der Ebene $A\,B\,C$ auf die beiden Coordinatenebenen $X\,O\,Y$ und $Y\,O\,Z$ projicirt, so sind diese Flächenprojectionen, die mit F_1 und F_2 bezeichnet werden mögen:

$$F_1 = F\cos\varphi \text{ und } F_2 = F\cos\psi,$$

und daraus folgt durch Division:

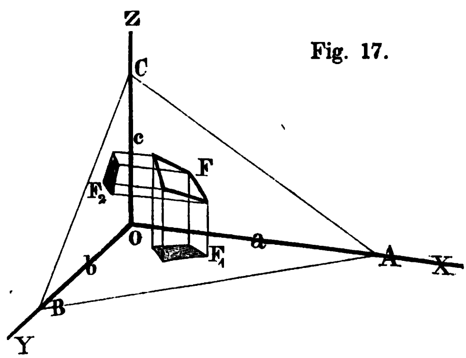
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$$

oder wenn man die vorstehenden Formeln benutzt:

$$F_2 = \frac{c}{a}\cdot F_1,$$

und hieraus tritt der Grund hervor, dass in allen obigen Näherungsformeln einfach auf der rechten Seite der Factor $c : a$ erscheint; in diesem Falle kann man eben aus der Projection des Flächenstückes auf die Horizontalebene $X\,O\,Y$ sogleich auf die in der Coordinatenebene $Y\,O\,Z$ liegende Projection, d. h. auf die gesuchte Gesammtheit schliessen.

Fig. 17.



Als Beispiel hierzu wollen wir noch näherungsweise die Werthe der besondern Nebengesammtheiten bestimmen, die wir bei Aufstellung der Todtenregister auf S. 47 einführten und mit $M'(x_1 x_2)$ und $M''(x_1 x_2)$ bezeichnet haben.

Der erstere Werth war die Projection der Fläche $M_1 N_1 N_2$ (Fig. 18 a. f. S.) und der andere die der Fläche $M_2 N_2 N_1$ auf die Ebene $Y\,O\,Z$. Die Projectionen auf die Horizontalebene $X\,O\,Y$ sind aber durch die beiden rechtwinkligen und c o n g r u e n t e n D r e i e c k e $B_1 C_1 C_2$ und $B_2 C_1 C_2$ gegeben, deren Inhalt F_1 sich

$$F_1 = \frac{(t_2 - t_1)\,(x_2 - x_1)}{2}$$

ergiebt, weil nach der bekannten Bezeichung in Fig. 18:

$$B_1 C_1 = B_2 C_2 = t_2 - t_1$$
$$\text{und } B_1 C_2 = C_1 B_2 = x_2 - x_1$$

ist. Erlauben wir uns jetzt wieder das Flächenstück $M_1 N_1 M_2 N_2$ (wenn es klein genug ist) als ebene Fläche anzusehen, so finden sich die beiden Projectionen $M'_1 N'_1 N'_2$ und $M'_2 N'_1 N'_2$ in der

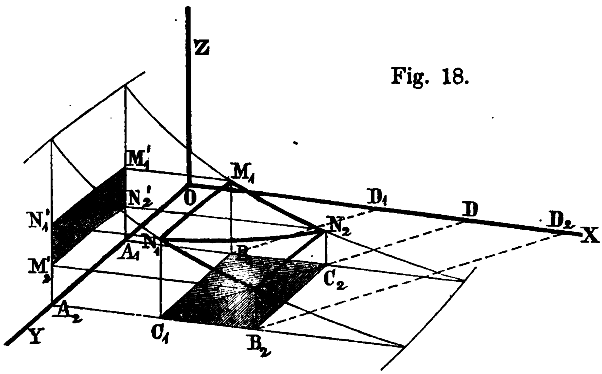


Fig. 18.

Coordinatenebene YOZ, die wir mit $M'(x_1 x_2)$ und $M''(x_1 x_2)$ bezeichneten; nach obigem Satze

$$M'(x_1 x_2) = M''(x_1 x_2) = \frac{c}{2a}(t_2 - t_1)(x_2 - x_1). \qquad (48)$$

Hiernach lässt sich erwarten, dass die wirklichen Beobachtungen und die Zusammenstellungen nach Anordnung der Tab. I und III auf S. 49 für die Werthe $M'(x_1 x_2)$ und $M''(x_1 x_2)$ immer nahezu auf gleiche Zahlenwerthe führen werden. Es springt übrigens auch der nahe Zusammenhang der besondern Nebengesammtheiten der Gl. (48) mit den Hauptgesammtheiten von Verstorbenen in die Augen, wie sie durch die Formeln (39), (40) und (41) gegeben werden. Die bisher gebräuchlichen Todtenregister enthalten, wie wir auf S. 29 auseinandersetzten, die dritte Hauptgesammtheit von Verstorbenen; man könnte also aus diesen Werthen leicht auf die Werthe der besondern Nebengesammtheit der Gl. (48) zurückschliessen und so doch noch das bisher gesammelte Material bis zu einem gewissen Grade nützlich verwerthen. Es liegt aber nicht in meiner Absicht, hier diese Frage weiter zu verfolgen; die Sache ist einfach und ohne Schwierigkeit durchführbar, wenn man sich einmal entschliesst, die Hypothese, die allen unseren Näherungsrechnungen zu Grunde liegt, als annehmbar zu erklären.

Von den verschiedenen Hypothesen, von denen man bei den hier in Rede stehenden Untersuchungen ausgehen kann, will ich zum Schluss nur noch eine zweite anführen. Statt anzunehmen, das betreffende Stück der krummen Fläche, z. B. $M_1 N_1 M_2 N_2$ (Fig. 18 a. v. S.) sei, wenn klein genug, näherungsweise durch ein ebenes Flächenstück zu ersetzen, will ich voraussetzen, es sei krummflächig, aber genau genug von solcher Beschaffenheit anzunehmen, dass jede Verticalebene parallel der OX- und OY-Axe das Flächenstück geradlinig schneidet; es seien also in Fig. 18 die Verbindungslinien $M_1 N_1$, $M_2 N_2$, $N_1 M_2$ und $M_1 N_2$ als gerade Linien anzusehen. Mathematisch gesprochen denke ich mir das Flächenstück als ein Stück Oberfläche eines Hyperboloides von der Gleichung

$$z = k\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right) \tag{49}$$

wobei k, a und b constante Grössen sind, die für das betreffende kleine Flächenstück bei Ableitung der Formeln für die verschiedenen Gesammtheiten als gegeben und wie erwähnt als constant angesehen werden, die sich aber in Wirklichkeit bei unserer krummen Fläche von Element zu Element ändern.

Für constante Geburtszeit t giebt dann die Gl. (49) als kurzes Stück der Absterbecurve einen geradlinigen Verlauf.

Ist dagegen x constant, so erhält man ebenfalls eine Gerade und für den speziellen Fall $x = o$ stellt dann die Formel

$$z = k\left(1 + \frac{t}{b}\right)$$

ein kurzes geradliniges Stück der Geburtencurve dar; die Vorzeichen sind gleich von vorn herein so gewählt, dass z mit wachsendem t zunimmt, wie das im Allgemeinen bei der Geburtencurve der Fall ist, und dass umgekehrt mit wachsendem x eine Abnahme von z verbunden ist, weil die Absterbecurven nach der Horizontalebene abfallen. Durch alle andern Verticalebenen als solche, die den beiden Axen OX und OY parallel liegen, wird die Fläche in einer Curve zweiten Grades geschnitten. Uns interessirt hier nur noch der Schnitt durch eine Ebene, welche um 45^0 gegen die beiden bezeichneten Axen geneigt ist. Dann ist in Gl. (49) $x = \tau - t$

zu substituiren und die Zählungszeit τ eine Constante; man erhält für die Gleichung der Schnittcurve

$$z = k\left(1 - \frac{\tau - t}{a}\right)\left(1 + \frac{t}{b}\right) \tag{50}$$

Nun finden sich wieder leicht Näherungsformeln für die beiden Hauptgesammtheiten von Lebenden. Nach Gl. (4) S. 12 erhält man die Anzahl Derjenigen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche das Alter x erreichen, wenn man dort für $f(x, t)$ den Werth von z nach Gl. (49) einsetzt und unter der Voraussetzung integrirt, dass x constant ist

$$V(x) = k(t_2 - t_1)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{2b}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right) \tag{51}$$

Die zweite Hauptgesammtheit von Lebenden, nämlich die Anzahl der Personen, die, aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 herrührend, zum Zählungszeitpunkt τ am Leben sind, ergiebt sich, wenn man $f(x, t)$ durch z nach Gl. (50) ersetzt und unter der Voraussetzung integrirt, dass τ constant ist; man erhält nach einigen Reductionen:

$$V(\tau) = k(t_2 - t_1)\left[\left(1 - \frac{\tau}{a}\right)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{2b}\right) + \frac{t_1 + t_2}{2a} + \frac{t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2}{3ab}\right]$$

oder auch:

$$V(\tau) = k(t_2 - t_1)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{2b}\right) \times \left[1 - \frac{\tau}{a} + \frac{t_1 + t_2}{2a} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{6a(2b + t_1 + t_2)}\right] \tag{52}$$

Die beiden Gleichungen (51) und (52) können nun in ganz gleicher Weise zur Ermittlung aller übrigen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen verwendet werden, ohne dass man nöthig hätte, zu weitern Integrationen zu schreiten, wie es bei Annahme der ersten Hypothese mit den Gleichungen (34) und (35) gezeigt wurde.

Als Anwendung der Formel will ich nur die Frage behandeln, zu welchem Zeitpunkte τ man die lebenden Personen aus der Generation t_1 bis t_2 zählen müsste, um dadurch zugleich die Anzahl derjenigen zu erhalten, die, aus der gleichen Generation stammend, das Alter von x Jahren erreichen (vergl. S. 19 und S. 61).

Hier setze einfach $V(x) = V(\tau)$ und dann giebt sich unter Zugrundelegung vorstehender Formeln (51) und (52) nach leicht zu übersehenden Umformungen:

$$\tau = x + \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{6\,(2b + t_1 + t_2)} \tag{53}$$

(vergl. Gl. 36 auf S. 62).

Die Personen dieser Generation treten nach frühern Angaben (Fig. 16 auf S. 61) allmälig zwischen den Zählungszeiten) $\tau_1 = x + t_1$ bis $\tau_2 = x + t_2$ in das Alter x ein; bestimmen wir aus diesen Formeln t_1 und t_2 und substituiren wir die Werthe in (53), so folgt auch:

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{6\,(\tau_1 + \tau_2 + 2(b - x))} \tag{54}$$

(vergl. Gl. (38) auf S. 62).

Hieraus folgt, dass die Zählung der Lebenden etwas nach der Mitte der Zeitstrecke τ_1 bis τ_2 vorgenommen werden müsste, um dadurch die Personen der Generation t_1 bis t_2 zu erhalten, die das Alter x erreichen. Der Zeitpunkt lässt sich aber nicht ermitteln, weil die Gl. (54) von den drei Constanten k, a und b noch die Constante b enthält, die im Allgemeinen nicht bekannt ist.

Die erste Hypothese ergab (S. 59) für vorliegenden Fall ein weit einfacheres Resultat; überhaupt gestalten sich unter der vorstehenden zweiten Hypothese alle Formeln complicirter und desshalb sowohl, als auch, weil nicht einzusehen ist, weshalb die zweite Hypothese auf genauere Näherungsformeln führen soll, als die erstere, unterlasse ich es, die Sache in der angezeigten Richtung weiter zu verfolgen.

Ich habe übrigens diese zweite Hypothese nur erwähnt, weil man auf dieselbe stösst, wenn man, wie es Knapp in allen seinen Entwickelungen gethan hat, von vorn herein annimmt, die sämmtlichen Absterbecurven ($P_1 Q_1$; PQ; $P_2 Q_2$ in Fig. 1 auf S. 9) seien demselben Gesetze unterworfen. Das ist aber eine Annahme, die gar nicht zutrifft, man muss erwarten, dass mit der Zeit auch diese Curven in ihrem Verlaufe sich ändern werden. Ich betrachte daher die sämmtlichen Formeln, die Knapp entwickelt, als Näherungsformeln, denn übertrage ich dessen Darsellungsweise in die meinige, so setzt er im Grunde genommen voraus, die Gleichung unserer krummen Fläche sei durch:

$$z = \varphi(t) \,.\, f(x)$$

darstellbar, wo φ und f Functionszeichen sind. Das ist aber schon eine Beschränkung und nichts anderes, als eine Näherungsform der allgemeinen Formel:

$$z = f(x, t)$$

wie ich sie benutzt habe. Einige Entwickelungen Knapp's sind daher auch keineswegs streng mathematisch richtig und von derjenigen Allgemeinheit, wie es Knapp sagt; das bezieht sich besonders auf einige Stellen im 3. und 4. Capitel seiner Schrift. Damit will ich aber durchaus nicht sagen, dass ich die grossen Verdienste Knapp's nicht im vollsten Masse anerkenne; ich bin vielmehr der Meinung, dass sein Buch allen künftigen mathematisch-statistischen Untersuchungen über Ermittlung der Sterblichkeit als Ausgangspunkt dienen wird. Nur die vorhin bezeichnete Beschränkung wird man fallen lassen, sie ist unnöthig und erleichtert in keiner Weise den Einblick in die ganze Frage.

Ueber die Geburts- und Sterblichkeitsziffer.

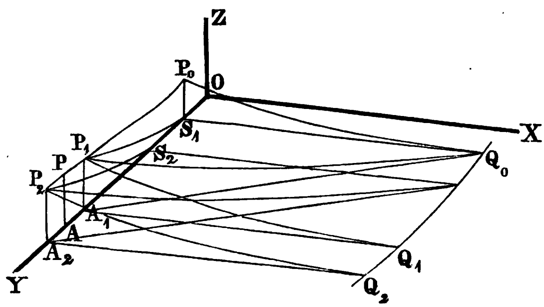
Die Fragen, um welche es sich der Ueberschrift nach bei den folgenden Betrachtungen handelt, betrachte ich zum Theil als von so geringem wissenschaftlichen Werth und sie sind auch von Knapp schon so erschöpfend behandelt worden, dass mir blos die Aufgabe zufällt, mit Hülfe meiner veränderten Darstellungsmethode diese Fragen kurz zu berühren.

Zuerst die Geburtsziffer. Man versteht darunter den Quotienten, der gebildet wird aus einer Anzahl von Gebornen, dividirt durch eine Gesammtheit gleichzeitig Lebender; gewöhnlich vergleicht man die Anzahl der in einem Jahre Gebornen mit der Zahl der Lebenden im Anfange des Jahres, oder derjenigen am Ende des Jahres oder, wie Engel vorschlägt, mit dem Mittelwerthe beider Zahlen von Lebenden.

Zur Bildung der Sterbeziffer setzt man statt der Zahl der Gebornen einfach die Anzahl der in einem bestimmten Zeitraume (gewöhnlich in einem Jahr) Gestorbenen als Zähler des Bruches an.

Der Werth und die Bedeutung dieser Quotienten geht sogleich aus der Betrachtung der Fig. 19 hervor. Es stelle $P_0 P_1 P_2$ die Geburtencurve für den Zeitraum $O S_1$ bis $O A_2$ dar, dann giebt nach unserer Methode die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ die Anzahl der Gebornen des Zeitraumes $OA_1 = t_1$ bis $OA_2 = t_2$. Denkt man sich weiter die krumme Fläche durch die Absterbecurve $P_0 Q_0$; $P_1 Q_1$; $P_2 Q_2$ dargelegt (die Curve $Q_0 Q_1 Q_2$ in der Ebene XOY ist die Curve der höchsten Alter), so hat man jetzt nur durch die beiden Punkte A_1 und A_2 zwei Verticalschnitte zweiter Art (unter 45^0 gegen die Axe OY geneigt) zu legen, und die Schnitte auf die Coordinatenebene YOZ zu projiciren. Die Fläche $A_1 P_1 S_1 = V(t_1)$ stellt dann die Anzahl der Lebenden (nach der Volkszählung) im Anfange des Zeitraumes t_1 bis t_2 dar, während die Fläche $A_2 P_2 S_2 = V(t_2)$ die Anzahl der Lebenden am Ende dieser Zeitstrecke repräsentirt. Die Fläche $P_2 P_1 S_1 S_2$ endlich giebt die Anzahl aller Derjenigen, die in der Zeit t_1 bis t_2 gestorben sind; bezeichnen wir diese Anzahl durch M und die Anzahl der Gebornen, die die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ darstellt durch G, so ist, wenn wir die Lebenden im Anfange des Zeitraumes t_1 bis t_2 zum Nenner wählen, die Geburtsziffer:

Fig. 19.



$$\frac{G}{V(t_1)} = \frac{\text{Fläche } (A_1 P_1 P_2 A_2)}{\text{Fläche } (A_1 P_1 S_1)} \tag{55}$$

und die Sterblichkeitsziffer:

$$\frac{M}{V(t_1)} = \frac{\text{Fläche } (P_2 P_1 S_1 S_2)}{\text{Fläche } (A_1 P_1 S_1)} \tag{56}$$

Aus Fig. 19 ist überdiess sogleich ersichtlich, dass zwischen den einzelnen Grössen die Beziehung:

$$V(t_1) + G = V(t_2) + M$$

besteht, woraus folgt:

$$V(t_2) - V(t_1) = G - M \tag{57}$$

und hieraus ist zu schliessen, dass die Geburts- und Sterblichkeitsziffer gleich gross ausfällt, wenn $V(t_2) = V(t_1)$ ist, d. h. wenn die Volkszahl am Anfang und am Ende des Zeitraumes gleich gross ist.

Setzt man constante Geburtendichtigkeit voraus, d. h. denkt man sich die Geburtencurve $P_0 P_1 P_2$ als gerade Linie parallel der Axe OY, und bezeichnen wir dann die constante Ordinate $AP = A_1 P_1 = A_2 P_2$ mit a, so ist ohne Weiteres die Geburtenzahl:

$$G = a(t_2 - t_1)$$

Nehme ich fernerhin an, wie es Knapp durchgängig gethan hat, dass die Absterbecurven sämmtlich in ihrem Verlaufe denselben Gesetzen unterworfen sind, so sind in Fig. 19 auch die beiden Curven $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ gleich und erscheinen nur um die Strecke $P_1 P_2$ verschoben. Sie schliessen daher zwischen sich eine Fläche ein, die ebenfalls $a(t_2 - t_1)$ ist, und es wäre daher in diesem Fall $M = G$, also wieder Geburts- und Sterbeziffer gleich gross. Hier erkennt man aber recht deutlich, dass die Knapp'sche Annahme einer unveränderlichen Absterbeordnung nicht blos eine unnöthige, sondern unzulässige Annahme ist. Die Curve $Q_0 Q_1 Q_2$ der höchsten Alter wird dadurch zur Geburtencurve in eine Abhängigkeit gebracht, die nicht existirt; dann müsste z. B. bei constanter Geburtendichtigkeit auch die Curve $Q_0 Q_2$ der höchsten Alter eine gerade Linie werden, welche der Axe OY parallel läuft.

Da der nach Gl. (56) berechneten Sterblichkeitsziffer der Vorwurf gemacht wird, dass sie Gestorbene mit solchen Lebenden in Beziehung setzt, aus denen sie nicht sämmtlich herrühren, so giebt Knapp an, wie man auf eine vollkommenere Geburts- und Sterblichkeitsziffer gelangen könne, denen dieser Mangel nicht anhängt.

Wähle ich zwischen den Punkten A_1 und A_2 den Punkt A so, dass $OA = t$ ist und nenne ich die Anzahl der Lebenden in diesem Zeitpunkte $V(t)$, so beträgt deren Aenderung in der folgenden Zeit dt offenbar $dV(t)$; die Anzahl der Geburten und der Gestorbenen in der gleichen Zeitstrecke dt ist dann mit dG und dM zu bezeichnen, und man erhält für diese Zeitstrecke die Geburts- und Sterblichkeitsziffer resp.

$$\frac{dG}{V(t)} \quad \text{und} \quad \frac{dM}{V(t)}$$

und daher entsprechend dem ganzen Zeitraum t_1 bis t_2, wenn wir beide Verhältnisse beziehungsweise mit φ und ψ zeichnen:

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{V(t)} \quad \text{und} \quad \psi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dM}{V(t)} \tag{58}$$

Zwischen beiden Werthen besteht eine einfache Beziehung; geht man nämlich in Gl. (57) zum Differential über, so folgt:

$$dV(t) = dG - dM \tag{59}$$

oder wenn wir diese Gleichung auf beiden Seiten mit $V(t)$ dividiren und zwischen den Grenzen t_1 und t_2 integriren:

$$\operatorname{logn} \frac{V(t_2)}{V(t_1)} = \varphi - \psi \tag{60}$$

eine Beziehung, die auch Knapp abgeleitet hat. Ein eigentlich wissenschaftlicher Werth lässt sich aber allen diesen Untersuchungen nicht abgewinnen. Was will man nun eigentlich schliessen, wenn sich bei einer abgeschlossenen Bevölkerung diese »Ziffern« heute so und im nächsten Jahre anders stellen? Wer will dann sagen, welche Veränderungen im Verlaufe unserer krummen Fläche die beobachteten Aenderungen in der Geburts- und Sterblichkeitsziffer hervorgebracht haben?

Es wäre gewiss besser, diese »Ziffern« ganz zu beseitigen und die Zeit und Mühe, die ihre Ermittelung fordert, zu fruchtbringendern Rechnungen zu verwenden! Glaubt man sie beibehalten zu müssen, so sollte man sie wenigstens nach den Knapp'schen Formeln (58) bestimmen, die, in richtiger Weise behandelt, doch wenigstens auf Näherungsformeln führen, die etwas mehr befriedigen könnten, als die bisher angewandten Gl. (55) und (56).

Nimmt man die Zeitstrecken t_1 bis t_2 nicht zu gross an, so kann man die Geborenen und Gestorbenen auf diese Strecke gleich vertheilt sich vorstellen und setzen

$$dG = a\,dt \quad \text{und} \quad dM = b\,dt$$

wobei a und b constante Grössen bedeuten und woraus folgt

$$G = a(t_2 - t_1) \tag{61}$$

$$M = b(t_2 - t_1) \tag{62}$$

während Gl. (59) ergiebt:

$$d\,V(t) = (a - b)\,d\,t.$$

Bestimme hieraus $d\,t$, substituire diesen Werth in den Gleichungen für $d\,G$ und $d\,M$, so folgt:

$$d\,G = \frac{a}{a - b}\,d\,V(t) \quad \text{und} \quad d\,M = \frac{b}{a - b}\,d\,V(t)$$

und daher nach der Gl. (58):

$$\varphi = \frac{a}{a - b} \text{ logn. } \frac{V(t_2)}{V(t_1)}$$

$$\psi = \frac{b}{a - b} \text{ logn. } \frac{V(t_2)}{V(t_1)}$$

und wenn man endlich noch die Constanten a und b mit Hülfe der Gl. (61) und (62) eliminirt, findet sich die Geburtsziffer:

$$\varphi = \frac{G}{G - M} \text{ logn. } \frac{V(t_2)}{V(t_1)} \tag{63}$$

und die Sterblichkeitsziffer:

$$\psi = \frac{M}{G - M} \text{ logn. } \frac{V(t_2)}{V(t_1)} \tag{64}$$

Gleichungen, die ihrer Form nach noch einfacher gebaut sind, als die von Knapp gegebenen, im Uebrigen aber mit denselben identisch sind. Sind die Anzahlen der Lebenden im Anfange und am Ende nur wenig verschieden, so lässt sich der Logarithmus noch in eine Reihe verwandeln, und wenn man von dieser nur das erste Glied benutzt, gehen diese Formeln in die bisher benutzten unter No. 55 und 56 angegebenen Gleichungen über. Alle diese Betrachtungen setzen voraus, dass die Volkszahl nicht auch durch Ein- und Auswanderung eine Aenderung erlitten hat.

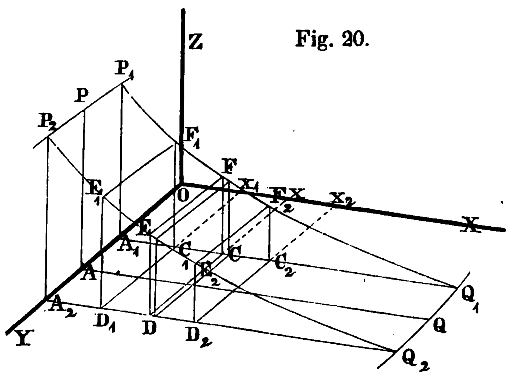
Ueber die mittlere Lebensdauer.

Viel mehr Bedeutung, als den vorstehenden Betrachtungen ist den Untersuchungen beizulegen, die sich auf die Bestimmung von »mittlern Altern« oder »Durchschnittsaltern« und auf Ermittlung der »mittlern Lebensdauer« beziehen.

Zuerst das Wichtigste über die mittlere Lebensdauer.

Der bekannten Darstellung gemäss ist nach Fig. 20 die Anzahl der Personen aus der Generation $A_1 A_2$, welche das Alter $x = A_1 C = A_2 D$ erreichen, durch die Schnittfläche $CDEF$ darstellt, die wir mit $V(x)$ bezeichnet haben. Man darf sich nun vorstellen, dass alle diese Personen auch durch das höhere Alter $x + dx$ hindurchgehen und dass die dem Tode Verfallenen erst am Ende des Zeittheilchens dx sterben. Daraus folgt sofort eine besondere Bedeutung des Productes $V(x)\,dx$; es stellt vor die Zeit, welche die $V(x)$ Lebenden zusammen durchlebt haben in der Zeitstrecke dx, und dieses Product ist der Figur gemäss nichts anderes als der Cubikinhalt eines Prismas von der Basis $CDEF$ und der Höhe dx. Man begreift nun sofort weiter, dass der Cubikinhalt des Körpers $C_1 D_1 E_1 F_1 F_2 C_2 D_2 E_2$, der von den beiden Endflächen $V(x_1)$ und $V(x_2)$ begrenzt wird, die ganze Zeit darstellt, welche von denjenigen Personen der Generation aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 zwischen den Altern x_1 und x_2 durchlebt wird, die das Alter x_1 überschreiten.

Fig. 20.



Der Cubikinhalt dieses Körpers, der mit J bezeichnet werden mag, ist analytisch dargestellt durch:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\, dx\, dt. \qquad (65)$$

Dividirt man diesen Werth durch die Anzahl Derjenigen, welche durch das Alter x_1 hindurchgehen, nämlich durch

$$V(x_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1\, t)\, d\, t,$$

so erhält man die Zeit in Jahren, die jeder x_1-Jährige noch durchleben würde, wenn die ganze durchlebte Zeit auf alle gleichmässig vertheilt wäre; es ist mit kurzen Worten: die Lebenserwartung des x_1-Jährigen der Generation t_1 bis t_2 bis zum Alter x_2. Es ist, was man bisher immer versäumt hat und selbst Knapp beachtet das nicht, unbedingt nothwendig, beizufügen, welcher Generation die betreffenden Personen angehören. Da ich der Ansicht bin, dass man, bei den allgemeinen Betrachtungen wenigstens, das Gesetz des Verlaufes der Absterbecurven als veränderlich anzusehen hat, so wird die vorhin ermittelte Lebenserwartung für verschiedene Personen aus verschiedenen Geburtenstrecken verschieden sein.

Man erkennt nun schon, welche merkwürdige Bedeutung auch noch einzelnen Theilen des körperlichen Inhaltes des Raumes beigelegt werden kann, den unsere krumme Fläche umschliesst.

Denkt man sich den Raum, den die beiden Endflächen $V(x_1)$ und $V(x_2)$ abschliessen in ein Prisma von der Basis $V(x_1)$ verwandelt, so ist dessen Höhe die vorhin bestimmte Lebenserwartung und wenn man hierzu die schon durchlebten Jahre (nämlich x_1) addirt, so erhält man die mittlere Lebensdauer des x_1-Jährigen bis zum Alter x_2, aber eben nur desjenigen, der der Geburtszeit t_1 bis t_2 entstammt. Für kurze Geburtenstrecke $t_2 - t_1$ und geringe Altersdifferenz $x_2 - x_1$ könnten wir wieder die Fläche $E_1 F_1 F_2 E_2$ als eine Ebene behandeln, deren Parameter a, b, c sind, dann ist nach Gl. (34), S. 60:

$$V(x_1) = c\,(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{x_1}{a} - \frac{t_1 + t_2}{2b}\right]$$

und der Cubikinhalt des Körpers findet sich:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\, dx = \int_{x}^{x_2} c\,(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{x}{a} - \frac{t_1 + t_2}{2b}\right] dx$$

oder:

$$J = c\,(t_2 - t_1)\,(x_2 - x_1)\left[1 - \frac{x_1 + x_2}{2a} - \frac{t_1 + t_2}{2b}\right]$$

Die mittlere Lebenserwartung fände sich dann weiter durch den Ausdruck:

$$x_1 + \frac{J}{V(x_1)}$$

Man erhält also selbst für diesen einfachsten Fall der Annäherung einen ziemlich complicirten Ausdruck, der die unbekannten Parameter und die Grenzzeitpunkte der Geburtenstrecke enthält.

Kehre ich wieder zum allgemeinen Fall zurück, so ist zunächst hervorzuheben, dass in der obigen Darstellung das obere Alter x_2 gewöhnlich das höchste Alter bedeutet, das überhaupt die betreffenden Lebenden erreichen können; dann spricht man kurzweg von der mittlern Lebensdauer des x_1-Jährigen und fasst dabei die ganze Zeit ins Auge, welche die $V(x_1)$ Lebenden bis zum gänzlichen Aussterben Aller zusammen noch durchleben; diese gesammte Zeit wird in Fig. 20 dargestellt durch den Cubikinhalt des keilförmigen Körpers $C_1 D_1 E_1 F_1 Q_1 Q_2$; ist dieser Cubikinhalt mit J bezeichnet und die Schnittfläche $C_1 D_1 E_1 F_1$ mit $V(x_1)$, so findet sich die mittlere Lebensdauer l_m des x_1-Jährigen, der aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammt:

$$l_m = x_1 + \frac{J}{V(x_1)} \qquad (66)$$

Bei der analytischen Darstellung ist hierbei zu beachten, dass die obere Altersgrenze x_2 für jede Geburtszeit t eine andere, also variabel ist; sie ist als eine Function von t anzusehen, die sich aber leicht bestimmt. Die Gleichung unserer krummen Fläche ist

$$z = f(x, t).$$

Für die Curve $Q_1 Q Q_2$ der höchsten Alter (Fig. 20) ist aber $z = o$, setze ich daher x_2 statt x (in der Fig. 20 ist $OA = t$, $AQ = x_2$), so erscheint

$$o = f(x_2, t)$$

und das ist die Gleichung dieser Curve, in der ich mir die Variable gesondert denken will; es könnte demnach auch:

$$x_2 = \varphi(t)$$

geschrieben werden.

Jetzt schreibt sich nun der Cubikinhalt J:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_{x_1}^{x_2 = \varphi(t)} f(x, t)\,d\,x \tag{67}$$

während andrerseits ist:

$$V(x_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1, t)\,d\,t \tag{68}$$

Die Substitution in Gl. (66) ergiebt dann die allgemeine Formel zur Bestimmung der mittlern Lebensdauer des x_1-Jährigen der Generation t_1 bis t_2.

Setzt man in dieser Formel $x_1 = o$, so ergiebt sich die mittlere Lebensdauer der Neugebornen dieser Generation; der Werth, den man hier erhält, ist nichts anderes als der Werth eines Bruches, dessen Zähler der Inhalt des keilförmigen Körpers $A_1 P_1 P_2 A_2 Q_2 Q_1$ und dessen Nenner die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ ist, die die Anzahl der Geburten im Zeitraume $A_1 A_2$ darlegt. Man hat also den keilförmigen Körper in ein Prisma zu verwandeln, dessen Basis eben die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$ ist; die Höhe dieses Prisma's ist dann die mittlere Lebensdauer der Neugebornen der betreffenden Generation.

Die mittlere Lebensdauer in diesem Sinne ist bis jetzt niemals ermittelt worden; denn die Werthe, die man dafür aus den vorhandenen Mortalitätstabellen abgeleitet hat, haben eine andere und sehr verwickelte Bedeutung; diese haben durchaus keinen wissenschaftlichen Werth. Die Angaben der mittlern Lebenserwartung in unsern Mortalitätstafeln haben mehr Schaden als Nutzen gebracht, da u. A. viele Personen glauben, man mache von diesen Werthen Gebrauch bei den Berechnungen der Leibrenten und Lebensversicherungen!

Ich glaube, die mittlere Lebensdauer in dem vorhin gegebenen, schärfern Sinne dagegen wird einst, wenn der Verlauf unserer krummen Fläche auf längere Zeitstrecken näher dargelegt worden ist, eine sehr bedeutungsvolle Rolle spielen; denn der Werth kann für eine bestimmte Generation, d. h. für die Personen aus einer gewissen Geburtenstrecke als einfachstes Mass für die Lebenskraft dieser Generation angesehen werden. Wenn sich ergeben würde, dass diese mittlere Lebensdauer für die Personen aus aufeinander folgenden gleichen Geburtenstrecken zunimmt, so wäre das doch offenbar ein untrügliches Zeichen, dass die Lebensverhältnisse mit der Zeit bessere geworden sind. Aus dem bis jetzt vorhandenen und geordneten statistischen Material aber solche Schlüsse zu ziehen, wie es so häufig geschieht, ist sehr gewagt und wenig gerechtfertigt; am wenigsten sind dazu die Werthe der Geburts- und Sterblichkeitsziffern geeignet; nur in einem Falle wäre das gestattet, auf den man aber unter Voraussetzungen gelangt, die nicht zutreffen.

Setze ich nämlich constante Geburtendichtigkeit und ein unveränderliches Gesetz für die Absterbecurven voraus, so sind die Geburtencurve $P_0 P_2$ (Fig. 19, S. 74) und die Curve der höchsten Alter $Q_0 Q_2$ gerade Linien, parallel der Axe OY. Die Schnittfläche $A_1 P_1 Q_0$ giebt dann, wie sich leicht übersieht, weil sie um 45^0 gegen die Axen geneigt, gleiche Werthe für die Projectionen $A_1 P_1 S_1$ und $A_1 P_1 Q_1$; die erstere Projection ist aber die Anzahl der Lebenden zum Zeitpunkte t_1, die wir mit $V(t_1)$ bezeichneten; daher folgt im vorliegenden Falle sogleich der Cubikinhalt J des keilförmigen Körpers $A_1 P_1 P_2 A_2 Q_2 Q_1$:

$$J = (t_2 - t_1)\, V(t_1).$$

Die Anzahl der Gebornen der Zeitstrecke $t_2 - t_1$ haben wir aber früher mit G bezeichnet und fanden (S. 75), dass sie unter den hier gemachten ganz speziellen Voraussetzungen auch übereinstimmt mit der Anzahl M der Gestorbenen der gleichen Zeitstrecke.

Daher wäre dann hier die mittlere Lebensdauer l_m der Neugebornen:

$$l_m = \frac{(t_2 - t_1)\, V(t_1)}{G} = \frac{(t_2 - t_1)\, V(t_1)}{M}$$

Oder wenn wir die Geburtsziffer φ und Sterblichkeitsziffer ψ nach Gln. (55) und (56), S. 74, bestimmt hätten:

$$l_m = \frac{t_2 - t_1}{\varphi} = \frac{t_2 - t_1}{\psi}$$

und für einjährige Geburtenstrecken fände sich:

$$l_m = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\psi}$$

Ein merkwürdig einfaches Resultat; die mittlere Lebensdauer ist also einfach der reciproke Werth der Geburts- und Sterblichkeitsziffer, welche letzten beiden Werthe auch noch gleich gross wären.

Nur treffen leider alle die gemachten Voraussetzungen in Wirklichkeit gar nicht zu, woraus folgt, dass den zuletzt gefundenen Sätzen gar kein Werth beizulegen ist und dass diese oft besprochene Frage nach dem Zusammenhange der mittlern Lebensdauer mit der Geburts- und Sterblichkeitsziffer eine müssige ist, die man in der Statistik endlich einmal zur Seite legen sollte.

Neben der mittlern Lebensdauer der x_1-Jährigen einer gewissen Generation könnte man, wenn damit irgend ein Gewinn verbunden wäre (was jedoch keineswegs der Fall ist), auch von der wahrscheinlichen Lebensdauer sprechen; darunter wäre das Alter x_2 zu verstehen, für welches für den x_1-Jährigen die Wahrscheinlichkeit, es zu erreichen, gerade $\frac{1}{2}$ ist. Nach der Bezeichnung in Fig. 20 S. 78 müsste also sein:

$$\frac{V(x_2)}{V(x_1)} = \frac{1}{2}$$

und es fände sich demnach die wahrscheinliche Lebensdauer $A_2 D_2 = x_2$ dadurch, dass man den Schnitt $C_2 D_2 E_2 F_2$ in Fig. 20 so weit verschiebt, bis sein Inhalt gerade die Hälfte des Inhaltes vom Schnitte $C_1 D_1 E_1 F_1$ beträgt. Diese kurze Bemerkung genüge.

Im Weitern könnte man endlich auch von der Lebenserwartung gleichzeitig Lebender einer bestimmten Generation sprechen; auch diese Frage mag nur flüchtig berührt werden.

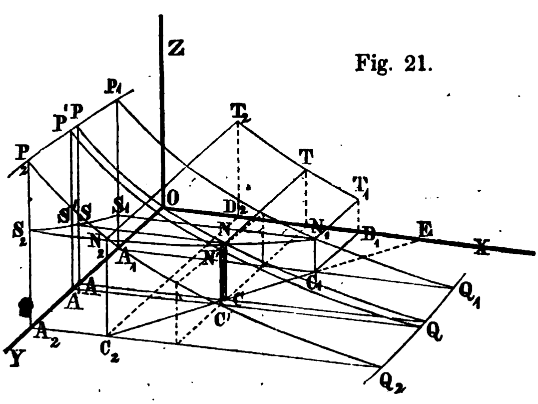


Fig. 21.

In Fig. 21 giebt nach frühern Darlegungen die Projection $A_1 S_1 S_2 A_2$ des Schnittes $C_1 N_1 N_2 C_2$ die Anzahl Derjenigen aus der Geburtenstrecke $O A_1 = t_1$ bis $O A_2 = t_2$, welche zum Zählungszeitpunkte

$OE = \tau$ am Leben sind. Es begreift sich nun sofort, dass der Cubikinhalt des keilförmigen Körpers $C_1 N_1 N_2 C_2 Q_2 Q_1$ die ganze Zeit repräsentirt, welche sie zusammen bis zum Tode Aller noch durchleben; denkt man sich wieder diese Zeit auf alle anfänglich Lebenden gleich vertheilt, so ergäbe sich die gesuchte Lebenserwartung; man hätte also nur den Rauminhalt des genannten Körpers durch die Fläche $V(\tau) = A_1 S_1 S_2 A_2$ zu dividiren oder wie sich auch sagen lässt, diesen Körper in ein Prisma von der Basis $V(\tau)$ zu verwandeln; dessen Höhe giebt dann die Lebenserwartung Derjenigen, die aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammen und zum Zeitpunkte τ am Leben sind.

Ueber die mittlern Alter von Lebenden und Gestorbenen.

Ich komme nun endlich noch zum Schlusse zu der Frage nach dem sogenannten durchschnittlichen Alter von Lebenden und Gestorbenen.

Bei den Lebenden kann nur die Frage interessiren nach dem mittlern Alter gleichzeitig Lebender und zwar denken wir ausdrücklich an solche Lebende, die einer gegebenen Geburtenstrecke t_1 bis t_2 entstammen.

Fig. 21 a. v. S. giebt das Mittel an die Hand, die vorliegende Frage zu beantworten. Der Flächenstreifen $CNN'C' = z\,dt$ giebt uns die Anzahl der Lebenden aus der Geburtenstrecke t bis $t + dt$ zum Zählungszeitpunkte τ; ihr Alter ist $x = \tau - t$ und alle zusammen genommen haben seit ihrer Geburt eine Zeit in Jahren verlebt, die sich ermittelt zu:

$$x z\, d t,$$

oder wenn ich $x = \tau - t$ und $z = f((\tau - t), t)$ einsetze:

$$(\tau - t)\, f((\tau - t), t)\, d t$$

und diesen Werth nennt man das summirte Alter; integrirt man den Ausdruck bei constantem τ zwischen den Grenzen t_1 und t_2, so erhält man das summirte Alter aller Lebenden aus der genannten Geburtenstrecke oder die Zeit in Jahren, die Alle zusammen genommen seit ihrer Geburt durchlebt haben; dividirt man dieses Integral durch die Anzahl $V(\tau)$ der Lebenden, so ergiebt sich das mittlere Alter, das mit x_m bezeichnet werden mag, d. h. die Anzahl von Jahren, die auf jeden Einzelnen kommen, wenn die verlebte Zeit gleichmässig vertheilt wäre. Man erhält:

$$x_m = \frac{\int_{t_1}^{t_2} (\tau - t)\, f((\tau - t), t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f((\tau - t), t)\, dt} \tag{69}$$

Der Zähler dieses Bruches, die von Allen durchlebte Zeit, wird übrigens dargestellt durch den Cubikinhalt des schief abgeschnittenen Prisma's von der Basis $A_1 S_1 S_2 A_2$ und der schiefen Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ (Fig. 21). Da die Basis mit dem Nenner des Bruches identisch ist, so findet sich noch eine andere Deutung des mittlern Alters: man hat nämlich das schief abgeschnittene Prisma nur auf eines mit ebenen parallelen Endflächen von gleicher Basis zu reduciren; die Höhe des reducirten Prismas ist sogleich das gesuchte mittlere Alter. Endlich giebt es noch eine andere, recht merkwürdige Bedeutung des Durchschnittsalters; mit Leichtigkeit lässt sich nämlich auch zeigen, dass die Höhe des reducirten Prisma's, d. h. eben das mittlere Alter x_m, weiter nichts ist, als der Abstand des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche $C_1 N_1 N_2 C_2$ von der Coordinatenebene YOZ.

Ich unterlasse es, den früher angedeuteten Gang der Näherungsrechnungen auf Gl. (69) anzuwenden; man stösst auf complicirte Ausdrücke, die keine Verwendung finden können. Auch lohnt es nicht, zu untersuchen, ob etwa das mittlere Alter gleichzeitig Lebender in engerer Beziehung zu früher erwähnten Zahlenwerthen, wie mittlere Lebensdauer u. s. w. steht.

Ich gehe nun endlich über zu der Bestimmung der mittlern Alter der Verstorbenen und werde hierbei, am Schlusse dieser Abhandlung, zugleich noch die Gelegenheit benutzen, zu zeigen, dass alle früher gegebenen analytischen Ausdrücke für die Gesammtheiten von Lebenden und Gestorbenen sich unter gewisse allgemeine Formen bringen lassen, die verschiedene Fälle gleichzeitig umschliessen. In Fig. 21 S. 83 war $CN = z$ die Verticale der drei Coordinaten t, x und z des Punktes N unserer krummen Fläche und der Flächenstreifen $CNN'C' = z\,dt$ stellte die Lebenden vom Alter x aus der Geburtenstrecke t bis $t + dt$ dar zum Zählungszeitpunkte $\tau = t + x$. Die Gesammtheit von Lebenden einer bestimmten Generation findet sich dann einfach durch Integration von $z\,dt$ zwischen den entsprechenden Grenzen.

Da jeder dieser Lebenden ferner das Alter x hat, so ist das Alter aller zusammen genommen

$$x\,z\,dt$$

und dieser Ausdruck wieder zwischen den entsprechenden Grenzen integrirt, giebt dann das summirte Alter aller der Lebenden der angenommenen Gesammtheit und wenn man diesen Ausdruck dann durch die ganze Anzahl der Lebenden dieser Gesammtheit dividirt, so ergiebt sich das durchschnittliche Alter derselben. Dieses mittlere Alter von Lebenden haben wir oben für eine gewisse Gesammtheit, nämlich für gleichzeitig Lebende einer bestimmten Generation durch Gleichung (69) ermittelt; allgemeiner wäre aber für alle Fälle das mittlere Alter x_m

$$x_m = \frac{\int x\,z\,dt}{\int z\,dt}$$

wobei dann nur über die Art der Integration und über die Grenzen noch das Nähere gesagt werden müsste.

Denken wir ferner (Fig. 21) das Alter x um dx zunehmend, so ist die Anzahl der Lebenden aus der gleichen Geburtenstrecke t bis $t + dt$ jetzt:

$$\left[z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\right] dt$$

und diese Lebenden haben das Alter von $x + dx$ Jahren; subtrahire ich diese von der Zahl der Lebenden vom Alter x, nämlich $z\,dt$, so erhalte ich in dem Ausdrucke

$$-\left(\frac{dz}{dx}\right) dx\,dt \tag{70}$$

die Anzahl Derjenigen, welche, aus der Geburtenstrecke

t bis $t + dt$ stammend, zwischen den Altersgrenzen x und $x + dx$ gestorben sind.

Es ergiebt sich daher als allgemeiner Ausdruck für die Gesammtheit M von Verstorbenen irgend welcher Art:

$$M = -\iint \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\, dt \tag{71}$$

wobei dann der Gang der Integration und die Wahl der Grenzen abhängig ist von der Art der Gesammtheit, die man bestimmen will. Die durch den Ausdruck (70) gegebenen Verstorbenen haben sämmtlich das gleiche Alter x beim Tode gehabt; ihr summirtes Alter ist daher

$$-x\left(\frac{dz}{dx}\right) dx\, dt$$

und daher das summirte Alter für eine Gesammtheit von Verstorbenen irgend welcher Art

$$-\iint x\left(\frac{dz}{dx}\right) dx\, dt \tag{72}$$

wobei hinsichtlich der Integration und der Grenzen wieder das vorhin Gesagte gilt. Hiernach folgt endlich, wenn man durch den Ausdruck (71), d. h. die Anzahl der Gestorbenen, dividirt das mittlere Alter x_m der Verstorbenen der angenommenen Art:

$$x_m = \frac{\iint x\left(\frac{dz}{dx}\right) dx\, dt}{\iint \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\, dt} \tag{73}$$

Wir wollen die vorstehenden Gleichungen (71) und (73) nur auf die drei Hauptgesammtheiten von Verstorbenen anwenden, die wir auf S. 20 bis S. 26 behandelt haben. Die dort gegebenen Ausdrücke für M_1, M_2 und M_3, Gln. (9), (10) und (11), unterscheiden sich von dem allgemeinen Ausdrucke (71) nur dadurch, dass wir uns dort die eine der angedeuteten Integration ausgeführt gedacht und einfach gesetzt haben:

$$\int\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)d\,x = f(x, t)$$

Zur Bestimmung des summirten Alters nach (72) könnten wir nun analog ebenfalls

$$\int x\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)d\,x = F(x, t)$$

gesetzt denken, wo das Zeichen F eine andere Funktionsform andeutet; beide Funktionen stehen aber, wie sich durch partielle Integration findet, in der Beziehung

$$F(x, t) = x\,f(x, t) - \int f(x, t)\,d\,x$$

zu einander.

Man sieht nun sofort, wie sich jetzt für die drei Hauptgesammtheiten von Verstorbenen das summirte Alter ermittelt; man hat einfach nur in den Formeln (9), (10) und (11) das Funktionszeichen f durch das Zeichen F zu ersetzen. So wäre denn z. B. für die erste Hauptgesammtheit von Gestorbenen (diejenigen aus der Generation t_1 bis t_2, welche zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind) nach Gl. (9) S. 21 das summirte Alter:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t, x_1)\,d\,t - \int_{t_1}^{t_2} F(t, x_2)\,d\,t$$

Dieser Ausdruck durch den nach Gl. (9) gegebenen dividirt, ergiebt dann das mittlere Alter dieser Gestorbenen.

In gleicher Weise wäre bei den andern beiden Hauptgesammtheiten zu verfahren; es ist unnöthig, die allgemeinen Gleichungen (71), (72) und (73) in dieser veränderten Form hier niederzuschreiben; dagegen mag der Gebrauch dieser Formeln an der Ableitung von Näherungsformeln noch vorgeführt werden.

Für kurze Geburtenstrecken, nahe bei einander liegende Zählungstermine und geringe Altersdifferenzen können wir wie früher (S. 59) näherungsweise das entsprechende Stück unserer krummen Fläche durch ein ebenes Stück von der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{t}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

uns ersetzt denken, also innerhalb des engen Gebietes setzen:

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{t}{b}\right)$$

Dann folgt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{c}{a}x$$

und hiernach allgemein näherungsweise nach Gl. (71) die Anzahl der Verstorbenen der angenommenen beliebigen Gesammtheit:

$$M = \frac{c}{a}\iint dx\,dt \tag{74}$$

Dann nach Gl. (72) das summirte Alter dieser Verstorbenen:

$$\frac{c}{a}\iint x\,dx\,dt \tag{75}$$

und ihr durchschnittliches Alter x_m;

$$x_m = \frac{\iint x\,dx\,dt}{\iint dx\,dt} \tag{76}$$

Diese Formeln sollen nun angewandt werden auf unsere drei Hauptgesammtheiten von Verstorbenen.

a. Erste Hauptgesammtheit von Verstorbenen. (Vergl. S. 20 und S. 64.) »Personen, welche aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2 stammend zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.«

Hier giebt sogleich Gl. (74) die Anzahl der Gestorbenen:

$$\frac{c}{a}\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} dx\,dt = \frac{c}{a}(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)$$

wie wir schon auf S. 64 fanden.

Das summirte Alter ergiebt sich auf gleiche Weise nach Gl. (75):

$$\frac{c}{a}\cdot\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}(t_2 - t_1)$$

und dann folgt sogleich durch Division:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

d. h. näherungsweise ist das mittlere Alter der ersten Gesammtheit von Verstorbenen, das arithmetische Mittel aus den Grenzaltern.

b. Zweite Hauptgesammtheit von Verstorbenen. (Vergl. S. 22 u. S. 64.) »Personen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche zwischen den beiden Zählungsterminen τ_1 und τ_2 gestorben sind.«

Hier integrire Gl. (74) und (75) erst unter der Voraussetzung, dass t constant ist und nimm für x die Grenzen $x_1 = \tau_1 - t$ bis $x_2 = \tau_2 - t$, d. g. beziehungsweise

$$\frac{c}{a}\int_{t_1}^{t_2}(\tau_2 - \tau_1)\,dt$$

und

$$\frac{c}{2a}\int_{t_1}^{t_2}(\tau_2 - \tau_1)\left[(\tau_2 + \tau_1) - 2t\right]dt$$

Durch wiederholte Integration folgt nun aus der ersten Formel die Anzahl der Gestorbenen

$$\frac{c}{a}(\tau_2 - \tau_1)(t_2 - t_1)$$

(wie in Gl. 40, S. 64) und aus der andern Formel das summirte Alter derselben nach leichter Reduction:

$$\frac{c}{2a}(\tau_2 - \tau_1)(t_2 - t_1)\left[(\tau_1 + \tau_2) - (t_1 + t_2)\right]$$

und hieraus durch Division das mittlere Alter der Gestorbenen dieser Gesammtheit:

$$x_m = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - \frac{(t_1 + t_2)}{2}$$

c. Dritte Hauptgesammtheit von Verstorbenen. (Vergl. S. 24 und S. 64.) »Personen, welche zwischen den Zählungsterminen τ_1 und τ_2 und den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.«

Hier intregire die Gln. (74) und (75) erst unter der Voraussetzung, dass x constant ist, und setze für t die Grenzen $t_1 = \tau_1 - x$ und $t_2 = \tau_2 - x$; d. g. beziehungsweise:

$$\frac{c}{a}\int dx\,(\tau_2 - \tau_1)$$

und

$$\frac{c}{a}\int x\,dx\,(\tau_2 - \tau_1)$$

Durch wiederholte Integration zwischen den Grenzen x_1 und x_2 folgt nun die Anzahl der Gestorbenen dieser Gesammtheit näherungsweise:

$$\frac{c}{a}(\tau_2 - \tau_1)(x_2 - x_1)$$

(wie in Gl. 41, S. 65); ihr summirtes Alter ist näherungsweise

$$\frac{c}{2a}(\tau_2 - \tau_1)(x_2^2 - x_1^2)$$

und endlich folgt durch Division ihr mittleres Alter nach leichter Reduction:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ist also gleich dem arithmetischen Mittel aus den Grenzaltern, wie bei der ersten Gesammtheit.

Mit dem Gegebenen glaube ich alle Fragen berührt zu haben, die bezüglich der Sterblichkeit zunächst einmal mathematisch und gründlich beleuchtet werden mussten; nur eine Besprechung der bisher gebräuchlichen Methoden der Herstellung von Mortalitätstabellen aus dem vorhandenen statistischen Material, wie die Methode von Halley, von v. Herrmann u. A. habe ich unterlassen und zwar aus dem einfachen Grunde, weil Knapp diese Frage schon in einer Weise behandelt hat, die Nichts zu wünschen übrig lässt. Der Zweck dieser Abhandlung war wesentlich, die Knapp'schen Sätze auf anderem Wege, sowohl in graphischer, als in analytischer Richtung, abzuleiten und dadurch auch meinen Theil beizutragen an der Grundsteinlegung der neuen Wissenschaft »der mathematischen

Statistik«. Trotzdem, dass ich gewisse Beschränkungen, die Knapp in seinen Darlegungen noch aufrecht erhielt (Annahme unveränderlicher Absterbeordnung) fallen liess, glaube ich doch, dass meine Methode der graphischen Darstellung einfacher und übersichtlicher, als die Knapp'sche ist und dass selbst die aus dieser Darstellung hervorgegangene neue analytische Behandlung der Fragen leichter zu verfolgen ist. Sie hat übrigens, besonders hinsichtlich der Näherungsbestimmungen gewisser Werthe, auf Resultate geführt, die sich nur schwer aus den Knapp'schen Formeln hätten ableiten lassen und die sich daher in dessen Schrift auch nicht vorfinden.

Für eine rationelle Verwerthung des schon vorhandenen statistischen Materiales können aber die Resultate dieser Näherungsrechnungen besondere Bedeutung gewinnen. Die Näherungsformeln auf S. 60 und S. 64 hätte ich schon hier benutzen können, um z. B. auf Grund der Volkszählungen in den preussischen Staaten vom 3. Dezember 1864 für dieses Ländergebiet eine »Mortalitätstabelle gleichzeitig Lebender« zu berechnen. Die Veröffentlichung der Zählungsresultate (Zeitschrift des königl. preuss. stat. Bureau's 1866) giebt die Zahl der Lebenden zum Zeitpunkt $\tau = 1864,9233$ für einjährige Geburtenstrecken und die Zahl der Verstorbenen des Jahres 1864 nach Geburtsjahren geordnet (zweite Hauptgesammtheit, S. 22) und das genügt, um näherungsweise mit Hülfe von Gl. 35, S. 61, und Gl. 40, S. 64, die Constanten a und c zunächst wenigstens unter der weitern Voraussetzung $b = \infty$ zu berechnen und dann mit Hülfe von Gl. 34, S. 60, für alle Altersklassen (jede gehört einer andern einjährigen Geburtenstrecke an) einen ersten Näherungswerth der Lebenswahrscheinlichkeit zu bestimmen. Ich gedenke jedoch an einem andern geeignetern Orte auf die angedeutete praktische Verwerthung meiner Näherungsformeln zurückzukommen.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Mathematische Untersuchungen

über

Invalidität.

Vorbemerkungen.

Ganz gewiss steht der Eintritt bleibender Invalidität, in gewissen Berufszweigen sowohl, wie im Allgemeinen, in gleicher Weise in einer ganz gesetzmässigen Beziehung zum Alter, wie das Sterben. Wie man für verschiedene Alter die Wahrscheinlichkeit ermittelt, am Ende einer gegebenen Zeitstrecke noch zu leben oder bis dahin gestorben zu sein, ebenso wird man auch angeben können, wie gross für eine Person von bestimmtem Alter und aus einer gewissen Berufsklasse die Wahrscheinlichkeit ist, am Ende einer gegebenen Zeitstrecke noch zu leben und bis dahin bleibend invalid oder bleibend arbeits- und erwerbsunfähig geworden zu sein, oder wie gross die Wahrscheinlichkeit für eine solche Person ist, innerhalb dieser Zeitstrecke zu sterben und zwar im Zustande bleibender, lebenslänglicher Invalidität oder nicht. Wie mit der bleibenden, so verhält es sich auch mit der temporären Invalidität, Krankheit, vorübergehenden Arbeitsunfähigkeit. In dieser Beziehung kennen wir schon, vorzugsweise auf Grund von Untersuchungen englischer Statistiker, bis zu einem gewissen Grade das Gesetz, wie die Krankheitsdauer sich mit dem Alter ändert, d. h. wie gross für ein gewisses Alter derjenige Theil einer gewissen Zeitstrecke, z. B. eines Jahres ist, der von der betreffenden Person im kranken, arbeitsunfähigen Zustande durchlebt wird.

Die grosse Bedeutung der Fragen, die uns in der hier bezeichneten Richtung entgegentreten, leuchtet ohne Weiteres ein und ebenso die Nothwendigkeit, Fragen solcher Art der analytischen Voruntersuchung zu unterwerfen, um daraus Regeln abzuleiten, nach denen man entsprechendes statistisches Material zu sammeln hat.

Es existiren schon seit Jahrhunderten Kranken- und Invaliden-Pensionscassen und doch sind die mathematischen Grundlagen, auf denen deren Tarife ruhen müssten, bis jetzt kaum näherer Prüfung unterworfen worden. Nur die Grundlagen der Krankencassen wurden näher studirt, und vorzugsweise ist es der um Fragen des Versicherungswesens hochverdiente Schriftsteller Dr. Carl Heym, welcher an der Hand der englischen und französischen Erhebungen aus der Krankenstatistik Tarife für Krankenkassen berechnet hat.*) Heym ist meines Wissens auch der Erste, welcher den Versuch machte, eine Invaliditätstabelle aufzustellen;**) hatte aber auch hier, wie bei den Untersuchungen über temporäre Invalidität, mehr die Anwendung auf Herstellung von Tarifen für Pensionscassen im Auge, als eigentliche mathematische Untersuchungen über Invalidität; was Heym in dieser Beziehung seinen Tabellen zu Grunde legt, ist sogar unrichtig und verstösst gegen einen der ersten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Am nächsten ist Wittstein***) an die Frage herangetreten, wenn er es auch unterlässt, seine Formeln, was möglich gewesen wäre, zur Construction von Invaliditätstafeln zu benutzen. Ich werde übrigens auf die ausgezeichnete Abhandlung Wittstein's und auf Heym's vortreffliche Arbeiten zurückkommen.

Noch mehr als durch die vorhin gemachten Bemerkungen tritt die Wichtigkeit der Fragen hervor, mit denen ich mich im Folgenden beschäftigen will, wenn man bei den Untersuchungen über Invalidität, bleibende wie temporäre, auch noch die Ursachen in Betracht zieht, welche die Invalididät herbeigeführt haben; hier stossen wir auf ein Gebiet von Fragen, das für die sogenannten »Unfallversicherungen« von hoher Bedeutung ist. Die Zahl der Versicherungsgesellschaften, die auf den Unfall versichern (auf Verunglückungen überhaupt oder speziell auf Eisenbahnunfälle) ist jetzt noch gering; man darf aber wohl erwarten, dass Anstalten solcher Art mit der Zeit einen grossartigen Aufschwung nehmen werden, und dass sie noch Versicherungszweige in den Bereich ihrer Thätigkeit ziehen werden, an die man heute noch kaum denkt, wie z. B. Versicherung gegen Tod und Verstümmelung im Kriege u. s. f. An Material ist von den Statistikern schon seit längerer Zeit gesammelt worden; doch kann man nicht sagen, dass es immer in richtiger Weise geschehen wäre;

---

*) Heym. Ueber die Versicherung gegen Krankheit. (Masius. Rundschau der Versicherungen. B. V, S. 14, 76, 174.)

**) Heym. Ueber Invaliden-Pensionen. (Masius. Rundschau der Versicherungen. B. V, S. 332. B. VI, S. 49. B. IX, S. 109, 165, 265, 335.)

***) Wittstein. Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern. In »Grunert's Archiv der Mathematik und Physik«. B. XXXIX.

auch ist das bis jetzt Vorhandene zerstreut und schwer zu vereinigen. Vielleicht trägt das Folgende dazu bei, die Aufmerksamkeit auf die hierher gehörigen Fragen zu lenken und das Interesse für diese Richtung statistischer Untersuchungen zu erregen. Ich will zeigen, welche Fülle von interessanten Resultaten die einfachste mathematische Formel zu liefern im Stande ist, welch weitgehende Schlüsse sich aus einer solchen Formel ziehen lassen und wie leicht sich richtig gesammeltes statistisches Material mit Nutzen verwerthen lassen würde.

Bevor ich jedoch auf die Frage eintrete, welche durch den Titel dieser Abhandlung angedeutet wird, soll zunächst eine Untersuchung angestellt werden, die zum grossen Theil den Gegenstand betrifft, den ich schon in der ersten Abhandlung behandelt habe; es sollen jedoch die Untersuchungen in der Art geführt werden, dass aus ihnen schliesslich auch alle diejenigen Resultate herfliessen, die bei den Fragen der bleibenden und temporären Invalidität, den sogenannten Unfällen u. s. w., von Bedeutung sind.

Ueber die Sterblichkeit in Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern.

Die Ableitung des Sterblichkeitsgesetzes aus den Beobachtungen in grössern Gesellschaften, wie bei den einzelnen Versicherungsanstalten, ist mit Schwierigkeiten eigenthümlicher Art verbunden. Abgesehen davon, dass man wegen der verhältnissmässig geringen Zahl von Gesellschaftsmitgliedern die Beobachtungen über längere Zeiträume ausdehnen muss, um die nöthige grössere Anzahl von Beobachtungsfällen zu erhalten und daher die entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerthe mit einiger Zuverlässigkeit zu gewinnen, so tritt hier als störend der Umstand auf, dass fortwährend Mitglieder die Gesellschaft verlassen und daher weiterer Beobachtung entgehen und dass andererseits wieder immer neue Mitglieder zur Gesellschaft treten. Diesen Zu- und Abfluss von Mitgliedern will man in einfacher und zuverlässiger Weise mit in Rechnung ziehen und hat es bis jetzt auch vielfach schon gethan, nur gieng man in der Methode, die hierbei zu befolgen ist, auseinander. Fände in einer solchen grössern Gesellschaft solcher Ein- und Austritt von Mitgliedern nicht statt, oder wollte man hierbei solche Mitglieder ausser Betrachtung fallen lassen, so wäre die Art der Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeit für die verschiedenen Alter eine sehr einfache. Zu einem bestimmten Zählungstermin (Zeitpunkt der Bilanz), z. B. am 1. Januar des Jahres, ordnet man die Mitglieder nach ihrem Alter und bestimmt für jedes Altersjahr die Summe der gleichalten Personen, indem man bei der Altersbestimmung von dem Satze Gebrauch macht, den ich in Abhandl. I, S. 62, gegeben habe; ist τ der Zählungstermin, z. B. 1869 (1. Januar), und x das Alter, z. B. $x = 30$, so betrachtet man als $x = 30$-Jährige alle diejenigen Personen, welche aus der Geburtenstrecke

$$t_1 = \tau - x - \frac{1}{2} \text{ bis } t_2 = \tau - x + \frac{1}{2}$$

$$\text{oder } t_1 = 1869 - 30 - \frac{1}{2} \text{ bis } t_2 = 1869 - 30 + \frac{1}{2}$$
$$= 1838\frac{1}{2} \text{ bis } 1839\frac{1}{2}$$

stammen; ein Satz, den ich dort näher begründet habe. Man beobachtet nun (unter Ausschliessung der Ein- und Austretenden) die Zahl der Ueberlebenden nach einem Jahre, und würde dadurch, vorausgesetzt, dass jede Altersklasse genug Beobachtungsfälle bietet, leicht den wahrscheinlichsten Werth der Lebenswahrscheinlichkeit oder kurz gesagt, für Personen eines bestimmten Alters die Wahrscheinlichkeit finden, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben. Wäre z. B. a die Anzahl der Personen vom Alter m im Anfange und lebten davon am Ende noch a_1 Personen, so wäre die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ohne Weiteres:

$$p = \frac{a_1}{a} \tag{1}$$

Da nun aber in Wirklichkeit ein einzelnes Jahr selbst bei den grössten Versicherungsanstalten zu wenig Material liefert, um p mit der entsprechenden Genauigkeit zu ermitteln, so sammelt man in angegebener Weise das Material aus einer längern Reihe von Jahren und betrachtet die auf einander folgenden Jahrgänge, wie ebenso viele neben einander bestehende Gesellschaften, die man dann in e i n e Gesellschaft vereinigt. Wäre demnach die Anzahl der Personen vom Alter m im Anfange des ersten Jahrganges

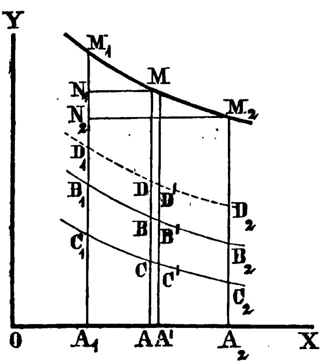
a', in dem des zweiten a'' u. s. w.; wäre ferner a'_1 die Zahl der Ueberlebenden des ersten Jahrganges, a''_1 die des zweiten u. s. f., so fände sich, wie sich leicht nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als zuverlässig nachweisen lässt, die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{a'_1 + a''_1 + a'''_1 + \ldots.}{a' + a'' + a''' + \ldots.} \tag{2}$$

wobei man freilich die Voraussetzung machen muss, dass der Werth p der Wahrscheinlichkeit für die ganze Zeitstrecke, welche diese Jahrgänge umfasst, unveränderlich geblieben ist.

Um nun auf den allgemeinen Fall überzugehen, bei dem man die Ein- und Austretenden mit in Rechnung ziehen soll, so denke ich mir zunächst, das Mortalitätsgesetz sei für die angenommene Gesellschaft vollständig schon bekannt und durch eine Mortalitätstafel von der Form gegeben, wie ich sie auf S. 4 hingestellt habe.

Fig. 22.



Es sei nun in Fig. 22 $M_1 M M_2$ ein Stück der Mortalitätscurve, die man sich in bekannter Weise dargestellt denkt, indem man als Abscissen die Alter $OA_1 = m$, $OA = m + x$, $OA_2 = m + t$ und als Ordinaten die Anzahl der Lebenden dieser Alter sich vorstellt, wie sie von der Mortalitätstafel gegeben werden. (Col. 1 der Tab. II_a und Col. 1 der Tab. II_b im Anhange giebt z. B. eine solche Tafel und zwar diejenige, welche B r u n e für Frauen aus den Beobachtungen an der allgemeinen Wittwenverpflegungsanstalt in Berlin abgeleitet hat. Col. 1 von Tab. II_a giebt für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben und Col. 1 von Tab. II_b die Anzahl der Lebenden in den verschiedenen Altern in der Weise ermittelt, wie es auf S. 3 und 4 angegeben wurde.)

Ich bezeichne nun in Zukunft allgemein die Anzahl von Lebenden eines bestimmten Alters, wenn diese Zahl einer Mortalitätstabelle entnommen ist, dadurch, dass ich das entsprechende Alter in Parenthese schreibe. So sei also (m) die Anzahl der Lebenden vom Alter m, analog diesem $(m + x)$ und $(m + t)$

die Zahl der Lebenden vom Alter $m + x$ und $m + t$, in unserer Fig. 22 ist daher $A_1 M_1 = (m)$, $AM = (m + x)$ und $A_2 M_2 = (m + t)$. Hiernach schreibt sich nun ohne Weiteres die Wahrscheinlichkeit p für eine m-jährige Person, nach t Jahren noch zu leben:

$$p = \frac{(m + t)}{(m)} \tag{3}$$

und ebenso ist für die $m + x$-jährigen Personen die Wahrscheinlichkeit p_x dasselbe Alter $m + t$ zu erreichen:

$$p_x = \frac{(m + t)}{(m + x)}$$

Ersetzt man die variable Ordinate $AM = (m + x)$ der Mortalitätscurve einfach durch den Buchstaben y, so ist auch:

$$p_x = \frac{(m + t)}{y}$$

und durch Verbindung mit Gl. (3) folgt endlich auch:

$$p_x = \frac{(m)\,p}{y} \tag{4}$$

eine Formel, von der ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

Es sei nun vorausgesetzt, dass in der Gesellschaft bei einem bestimmten Zählungstermine beim Beginn der Beobachtungen a Personen vom Alter m vorhanden sind, dass ferner in der nächst folgenden Zeit t allmälig b Personen eintreten und c Personen die Gesellschaft verlassen; dabei soll aber ausdrücklich angenommen werden, dass die zuletzt genannten Personen im Augenblick ihres Ein- oder Austrittes genau dasjenige Alter haben, welches die in der Gesellschaft von Anfang an befindlichen Mitglieder im gleichen Zeitpunkte besitzen. Bei den Austretenden wird diese Voraussetzung ohne Weiteres schon erfüllt, bei den Eintretenden dagegen erfordert sie die Erfüllung der Regel, dass man sie derjenigen Altersgruppe zutheilt, der sie angehören würden, wenn sie schon im Anfange der Zeitstrecke t der Gesellschaft angehört hätten; man bestimmt also behufs ihrer Vertheilung auf die verschiedenen Altersgruppen ihr Alter zum Zeitpunkte des Beginnes der Beobachtungen.

Die Aus- und Eintretenden vertheilen sich über die ganze Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ (Fig. 22); wie aber diese Vertheilung stattfindet, darüber ist im Allgemeinen zunächst nichts bekannt; um auch über diese Frage schon hier etwas Bestimmtes nicht festsetzen zu müssen, denke ich mir in Fig. 22 zwei beliebige Curven $B_1 B B_2$ und $C_1 C C_2$ gezogen und die ganze Zahl b der innerhalb der Zeit t Eintretenden durch den Inhalt der Fläche $A_1 B_1 B_2 A_2$ dargestellt, die von der Curve $B_1 B B_2$ begrenzt wird. Ebenso soll der Inhalt der von der Curve $C_1 C C_2$ begrenzten Fläche $A_1 C_1 C_2 A_2$ die Anzahl c derjenigen Personen repräsentiren, welche in der Zeitstrecke t die Gesellschaft verlassen. Rechne ich die Abscissen der Curven von A_1 aus, statt wie bis jetzt von O ab, und sind y' und y'' die Ordinaten der beiden Curven, die wir so eben eingeführt haben, so stellt sich analytisch die Anzahl b der Eintretenden dar durch:

$$b = \int_o^t y'\, dx$$

und die Anzahl c der Austretenden durch:

$$c = \int_o^t y''\, dx$$

Denkt man sich die beiden Flächen in Flächenstreifen zerlegt, wie $ABB'A'$ und $ACC'A'$, so giebt der erstere Streifen $y'\,dx$ die Zahl der Eintretenden, der andere $y''\,dx$ die der Austretenden in der Zeitstrecke x bis $x + dx$; ihr Alter ist $m + x$ und die Wahrscheinlichkeit derselben, das Alter $m + t$ zu erreichen, nach der oben gegebenen Bezeichnung p_x; daher ist die Anzahl derjenigen, die von den in der Zeit dx Eingetretenen am Ende der Zeitstrecke t noch am Leben sind,

$$p_x y'\, dx,$$

während von denjenigen, die in der Zeitstrecke x bis $x + dx$ austraten, im gleichen Zeitpunkte noch

$$p_x y''\, dx$$

am Leben sein werden. Ersetzt man in diesen beiden Ausdrücken p_x durch Gl. (4) und integrirt man sie zwischen den Grenzen o und t, so ergiebt:

$$a' = (m)p \int_0^t \frac{y'\,dx}{y} \tag{5}$$

die Gesammtzahl a' Derjenigen, welche von den in der Zeit t in die Gesellschaft Eingetretenen am Ende dieser Zeitstrecke noch am Leben sind.

Andererseits giebt:

$$a'' = (m)p \int_0^t \frac{y''\,dx}{y} \tag{6}$$

die Anzahl derjenigen von allen ausgetretenen Personen, welche am Ende der Zeit t noch leben. Die erstere Anzahl a' lebt aber schliesslich in der Gesellschaft, die andere a'' ausserhalb derselben.

Von den a Personen, welche Anfangs in der Gesellschaft gezählt wurden, leben am Ende der Zeit t noch ap, weil nach oben gegebener Bezeichnung p die Wahrscheinlichkeit für den m-Jährigen ist, nach t Jahren noch zu leben; nennen wir diese Zahl von Ueberlebenden a_0, so wäre also:

$$a_0 = ap. \tag{7}$$

Bezeichnen wir nun endlich mit a_1 die Anzahl der Personen, welche am Ende des Zeitraumes t in der Gesellschaft vorhanden sind, so gilt unter den vier genannten Arten von Ueberlebenden dieser Altersgruppe folgende Beziehung:

$$a_1 = a_0 + a' - a''; \tag{8}$$

denn offenbar hat man zu den Ueberlebenden a_0 der anfänglich in der Gesellschaft befindlichen Personen die Ueberlebenden a' der inzwischen Eingetretenen zu addiren und dann abzuziehen die Anzahl a'' der Ueberlebenden der Ausgetretenen, um die Anzahl a_1 derjenigen zu finden, die schliesslich in der Gesellschaft leben.

Benutzt man in der zuletzt gegebenen Beziehung Gl. (5), (6) und (7), so findet sich nach leichter Umformung:

$$a_1 = p\left[a + (m)\int_0^t \frac{(y' - y'')\,dx}{y}\right] \tag{I.}$$

wobei die Anzahl b der Eintretenden durch:

$$b = \int_0^t y'\,dx \qquad \text{II.}$$

und die Anzahl c der Austretenden durch:

$$c = \int_0^t y''\,dx \qquad \text{III.}$$

dargestellt wird.

Diese drei Gleichungen sind es denn, welche die Grundlagen für alles Folgende in allgemeinster Form enthalten. Man kann ihnen übrigens noch einige Formeln beifügen, die sich auf Bestimmung der Zahl der Verstorbenen beziehen. In dieser Personengruppe, die wir im Auge haben, wurden vorhin vier Arten von Ueberlebenden unterschieden; in gleicher Art können wir auch vier Classen von Verstorbenen unterscheiden, und zwar:

1. Anzahl derjenigen Personen, welche von den anfänglich in der Gesellschaft vorhandenen Personen in der folgenden Zeitstrecke t sterben; ist diese Anzahl α_0, so findet sich:

$$\alpha_0 = a(1-p). \qquad (9)$$

Diese Personen sterben zum Theil in der Gesellschaft, zum Theil ausserhalb derselben.

2. Anzahl derjenigen Personen aus der Zahl der Eintretenden, die nach ihrem Eintritt in der Gesellschaft bis zum Ende der Zeitstrecke t sterben; ihre Anzahl sei α' und diese findet sich, wenn man von der Zahl b aller Eintretenden diejenigen, nämlich a' subtrahirt, die am Ende noch leben; es ist daher:

$$\alpha' = b - a'$$

oder unter Benutzung von Gl. (5):

$$\alpha' = b - (m)\,p\int_0^t \frac{y'\,dx}{y} \qquad (10)$$

3. Anzahl derjenigen Personen aus der Zahl der Austretenden, die nach ihrem Austritte, also ausserhalb der

Gesellschaft bis zum Ende der Zeitstrecke t sterben. Ihre Anzahl sei α'' und da überhaupt c Personen austreten und davon a'' am Ende noch leben sollen, so ist:

$$\alpha'' = c - a''$$

oder unter Benutzung von Gl. (6):

$$\alpha'' = c - (m)\, p \int_0^t \frac{y''\, dx}{y} \tag{11}$$

Endlich haben wir 4. noch die Zahl der Sterbefälle innerhalb der Gesellschaft; bezeichnen wir diese Zahl, die besonders wichtig ist, weil sie in der Gesellschaft direct beobachtet wird, mit α, so ist:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha' - \alpha'' \tag{12}$$

oder wenn wir die vorstehenden Gleichungen benutzen:

$$\alpha = a + b - c - p \left[a + (m) \int_0^t \frac{(y' - y'')\, dx}{y}\right]$$

und hieraus endlich unter Benutzung von Gl. (I):

$$\alpha = a + b - c - a_1. \tag{13}$$

Es folgt also eine Formel, die wir direct hätten anschreiben können; denn offenbar ist die Anzahl der Sterbefälle innerhalb der Gesellschaft gleich der Zahl der anfänglich vorhandenen Personen, vermehrt um die Zahl der Eingetretenen und vermindert um die Zahl der Austretenden und um die Zahl derjenigen, die am Ende noch vorhanden sind.

Ich gehe nun dazu über, die allgemeinen Ausdrücke, die im Vorstehenden abgeleitet wurden, für den praktischen Gebrauch umzuformen. Vorzugsweise sind es die Gleichungen I, II und III, die in's Auge zu fassen sind und zunächst mag immer noch als Hauptaufgabe die angesehen werden, für eine m-jährige Person die Wahrscheinlichkeit p zu ermitteln, die sie für sich hat, am Ende der Zeitstrecke t noch zu leben. Bei diesen Untersuchungen soll aber zunächst auf die Arbeiten eingetreten werden, die in der gleichen Richtung schon von Andern geliefert worden sind und erst dann werde ich die Gleichungen entwickeln, von denen bei den unten folgenden Aufgaben Gebrauch gemacht werden soll.

Hypothese von Wittstein.

Handelt es sich darum, aus unsern drei Hauptgleichungen I, II und III mit Hülfe der beobachteten Werthe a, a_1, b und c den Werth der Wahrscheinlichkeit p abzuleiten, so muss, um die angedeuteten Integrationen ausführen zu können, bekannt sein, wie sich die Ordinaten y, y' und y'' der drei Curven in Fig. 22, S. 99, nämlich der Mortalitätscurve $M_1 M M_2$, der Curve $B_1 B B_2$ der Eintretenden und der Curve $C_1 C C_2$ der Austretenden, mit der Zeit x ändern. Wittstein, der zuerst nach Heym, auf dessen Darlegungen ich unten eintrete, die vorliegende Frage in rationeller Weise in Angriff genommen hat, geht nun (a. a. O.) gleich von vorn herein, d. h. schon bei der Anlage seiner Entwickelungen, von der Annahme aus, dass die Ein- und Austretenden sich gleichförmig über die ganze Zeit t verbreiten; es sollen also nach ihm in gleichen Zeittheilen gleichviel Personen austreten und ebenso eintreten.

Uebertrage ich diese Annahme in meine Darstellungsweise, so nimmt Wittstein im Grunde genommen an, die beiden Curven $B_1 B B_2$ und $C_1 C C_2$ in Fig. 22 dürften als gerade, der Abscissenaxe parallele Linien angesehen werden, es seien also die Ordinaten y' und y'' constant.

Unter dieser Voraussetzung verwandeln sich nun sofort unsere drei Hauptgleichungen I, II und III in folgende:

$$a_1 = p\left[a + (m)(y' - y'')\int_0^t \frac{dx}{y}\right] \tag{14}$$

$$b = y'.t \tag{15}$$

$$c = y''.t \tag{16}$$

Eliminirt man aus den letzten beiden Gleichungen die Werthe y' und y'' und setzt man sie in die erste Formel ein, so folgt:

$$a_1 = p\left[a + (b - c)\frac{(m)}{t}\int_0^t \frac{dx}{y}\right] \tag{17}$$

Hier muss noch die angedeutete Integration ausgeführt werden und das erfordert eine weitere Annahme hinsichtlich des Verlaufes der Mortalitätscurve $M_1 M M_2$ in Fig. 22. Es werde nun in dieser Beziehung vorausgesetzt, die Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ sei so kurz, dass man das Stück $M_1 M_2$ der Mortalitätscurve als eine Gerade ansehen dürfe. Ziehe ich in Fig. 22 durch die Punkte M und M_2 die horizontalen Linien MN_1 und $M_2 N_2$, so ist $MN_1 = x$ und $M_2 N_2 = t$ und man erhält die beiden ähnlichen Dreiecke $M_1 M N_1$ und $M_1 M_2 N_2$ und daraus die Proportion:

$$\frac{M_1 N_1}{M_1 N_2} = \frac{M N_1}{M_2 N_2}$$

Nach der früher angegebenen Bezeichnung ist aber $A_1 M_1 = (m)$, $AM = y$, $A_2 M_2 = (m + t)$ und diese Ordinaten stellten vor die Anzahl der Lebenden nach der Mortalitätstafel, entsprechend den Altern m, $m + x$ und $m + t$.

Vorstehende Proportion schreibt sich daher auch wie folgt:

$$\frac{(m) - y}{(m) - (m + t)} = \frac{x}{t}$$

und hiernach findet sich, wenn man nach Gl. (3) noch $(m + t)$ durch $(m)p$ ersetzt:

$$y = (m)\left[1 - (1 - p)\cdot\frac{x}{t}\right] \tag{18}$$

Das in Gl. (17) vorkommende Integral schreibt sich daher:

$$\int_0^t \frac{dx}{y} = \frac{t}{(m)}\int_0^t \frac{d\left(\frac{x}{t}\right)}{1 - (1 - p)\frac{x}{t}}$$

Hieraus folgt, wie sich leicht übersieht:

$$\int_0^t \frac{dx}{y} = -\frac{t}{(m)(1 - p)}\,\text{logn.}\,p \tag{19}$$

und nun erhält man endlich durch Substitution in Gl. (17):

$$a_1 = p\left[a - \frac{(b-c)}{(1-p)} \operatorname{logn.} p\right] \qquad (20)$$

die Formel, welche Wittstein zuerst gegeben hat und die in erster Linie dazu dienen könnte, mit Hülfe der beobachteten Werthe a, b, c und a_1 den Werth der Wahrscheinlichkeit p zu ermitteln; würden innerhalb der Zeit t weder Ein- noch Austritt von Personen stattfinden, so wäre $b = o$ und $c = o$ oder würden gerade so viel Personen austreten, als eintreten, wäre also $b = c$, so erhielte man, wie es sein muss:

$$a_1 = ap,$$

wie schon Gl. (1) angab. Die Formel (20) gilt selbst noch für den Fall, dass im Anfange gar Niemand der Gesellschaft angehört, also $a = o$ ist, wie das z. B. der Fall wäre bei einer Versicherungsgesellschaft, die eben erst ins Leben tritt.

Von den a_1 Lebenden, welche am Ende der Zeitstrecke t aus der entsprechenden Altersgruppe in der Gesellschaft vorhanden sind, rührt eine gewisse Anzahl a' von den eingetretenen Personen her, die sich nach Gl. (5) bestimmt, wenn man dort den Werth y' aus Gl. (15) und den Werth des Integrales nach Gl. (19) substituirt; man erhält:

$$a' = -\frac{pb}{(1-p)} \operatorname{logn.} p$$

und daher sind nach ihrem Eintritt in die Gesellschaft bis zum Ende der Zeitstrecke t gestorben:

$$\alpha' = b\left[1 + \frac{p}{1-p} \operatorname{logn.} p\right]$$

wie ohne Weiteres aus Gl. (10) folgt.

Von denjenigen Personen, welche in der Zeit t die Gesellschaft verlassen haben, leben am Ende dieser Zeit noch a'', und ihre Anzahl bestimmt auf gleichem Wege aus Gl. (6):

$$a'' = -\frac{pc}{(1-p)} \operatorname{logn.} p;$$

es sind also innerhalb der Zeitstrecke t nach ihrem Austritte nach Gl. (11) gestorben:

$$\alpha'' = c\left[1 + \frac{p}{1-p}\,\text{logn.}\,p\right]$$

Die Anzahl α_0 derjenigen, welche von den a anfänglich vorhandenen Personen sterben, bestimmt sich dann nach Gl. (9), während endlich Gl. (13) die Anzahl α der Sterbefälle angiebt, die im Laufe der Zeit t in der Gesellschaft selbst beobachtet wurden. Was nun die Brauchbarkeit der vorstehenden Gleichungen, speziell von Gl. (20), die vorzugsweise von Bedeutung ist, betrifft, wenn es sich um Bestimmung von p handelt, so ist eine directe Auflösung derselben nicht möglich. Es hat daher Wittstein selbst schon für Gl. (20) eine Näherungsformel abgeleitet. Da der Wahrscheinlichkeitswerth p nur wenig von Eins verschieden ist, so lässt sich log. p durch eine Reihe ersetzen, von der man genau genug nur die ersten Glieder zu benutzen braucht, um auf einfachere Formeln zu gelangen, aus denen sich dann p mit genügender Genauigkeit ermitteln lässt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\text{logn.}\,p &= \text{logn.}\left[1-(1-p)\right]\\ &= -\left[(1-p)+\frac{(1-p)^2}{2}+\frac{(1-p)^3}{3}+\ldots\right]\end{aligned}$$

und daher folgt in allen vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{p\,\text{logn.}\,p}{1-p} = -p\left[1+\frac{(1-p)}{2}+\frac{(1-p)^2}{3}+\ldots\right]$$

Führt man in Gl. (20) auch noch den Werth ein, der sich für a_1 aus Gl. (13) findet, wo α die Anzahl der in der Gesellschaft gestorbenen Personen repräsentirt, so folgt nach einfacher Reduction:

$$\begin{aligned}\alpha = (1-p)&\left[a+\frac{b-c}{2}\right]\\ &+(b-c)\left[\frac{(1-p)^2}{2\,.\,3}+\frac{(1-p)^3}{3\,.\,4}+\ldots\right] \qquad (20_a)\end{aligned}$$

oder auch unter Vernachlässigung der höhern Potenzen von $(1-p)$:

$$\alpha = (1-p)\left[a+\frac{b-c}{2}\right] \qquad (20_b)$$

aus welchen beiden Näherungsformeln, die in neuester Zeit auch

Lazarus*) gegeben hat, der Werth von p sich nach Wittstein genau genug ermitteln lässt.

Bemerken will ich endlich noch, dass Wittstein (a. a. O.) hinsichtlich des Verlaufes der Mortalitätscurve $M_1 M M_2$ (Fig. 22, S. 99) und daher in Hinsicht der Bestimmung des in Gl. (17) vorkommenden Integrales auch noch von einer andern, als der oben erwähnten Hypothese des geradlinigen Verlaufes derselben ausgeht. Er nimmt nämlich in einem andern Theile seiner Entwickelungen an, innerhalb der Zeitstrecke t sei in gleichen Zeittheilen die Wahrscheinlichkeit zu sterben, constant. Nach der Mortalitätstafel leben im Alter $m + x$ nach unserer obigen Bezeichnung y Personen; in der Zeit dx sterben daher $-dy$ Personen und daher wäre die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der Zeitstrecke dx zu sterben:

$$-\frac{dy}{y}$$

Für diesen Werth kann man $\lambda\, dx$ setzen, wo λ eine Constante ist, deren Bedeutung sich sogleich aus der Integration der Gleichung

$$-\frac{dy}{y} = \lambda\, dx$$

ergiebt. Man erhält nämlich:

$$\text{logn.}\, y = -\lambda x + \text{Const.}$$

Nun ist aber im Anfange der Zeitzählung, d. h. für $x = o$, die Anzahl der Lebenden nach der Mortalitätstabelle $y = (m)$; man hat daher nach vorstehender Gleichung auch:

$$\text{logn.}\, (m) = o + \text{Const.}$$

Am Ende der Zeitstrecke, d. h. für $x = t$, ist die Anzahl der Lebenden $(m + t)$ und daher folgt ebenso:

$$\text{logn.}\, (m + t) = -\lambda t + \text{Const.}$$

*) Lazarus. Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebens-Versicherungs-Anstalten.

Journal des Collegiums für Lebens-Versicherungs-Wissenschaft. Bd. I, Heft 2. Berlin 1869.

Durch Verbindung (Subtraction) erhält man dann, wie sich leicht verfolgen lässt, wenn man noch nach Gl. (3) den Werth $(m+t)$ durch $(m)\,p$ ersetzt:

$$\lambda = -\frac{\text{logn.}\,p}{t}$$

und dann für den Verlauf der Mortalitätscurve $M_1 M M_2$ (Fig. 22) unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung:

$$y = (m)\,e^{-\frac{x}{t}\,\text{logn.}\,p} \tag{21}$$

Jetzt findet sich nun das in Gl. (17) auftretende Integral:

$$\int_0^t \frac{dx}{y} = -\frac{t\,(1-p)}{(m)\,\text{logn.}\,p}$$

wenn man vorstehenden Werth von y substituirt und die Integration zwischen den angegebenen Grenzen ausführt.

Benutzt man endlich diesen Ausdruck in Gl. (17), so folgt als Grundgleichung unter der veränderten Annahme, dass die Gleichung der Mortalitätscurve durch Gl. (21) gegeben wäre:

$$a_1 = p\left[a - \frac{(b-c)\,(1-p)}{\text{logn.}\,p}\right] \tag{22}$$

und in gleicher Weise, wie es auf S. 107 geschah, liessen sich dann auch die andern Gleichungen für die verschiedenen Arten von Lebenden und Gestorbenen entwickeln, was aber hier unterbleiben soll, weil vorstehende Formel ebensowenig wie Gl. (20) zur directen Bestimmung von p geeignet ist, also die zweite Annahme Wittstein's auch nicht zu brauchbareren Formeln führt.

Hypothese von Heym.

Heym *) war der erste Schriftsteller, der die Frage, die hier in Betrachtung liegt, behandelt hat; doch wird in seinen

*) Masius. Rundschau etc. Bd. III (1853), p. 335. »Lebensversicherung.« Einige Betrachtungen über Sterblichkeit von Dr. Carl Heym.

Entwickelungen auf die eintretenden Personen keine Rücksicht genommen und gleich von vorn herein die Annahme gemacht, dass die Sterbefälle und die Austretenden sich gleichförmig über das ganze Jahr vertheilen. Die Differentialgleichung, durch deren Integration Heym auf seine Grundformel gelangt, leitet er aber auf grossem Umwege ab, während sich doch, wenigstens unter den angegebenen speziellen Annahmen, diese Differentialgleichung ohne alle weitern Rechnungen sofort anschreiben lässt.

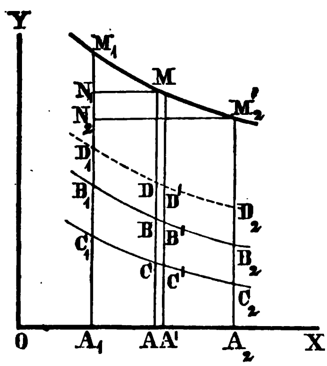
Ich will auf die Heym'sche Hypothese im Folgenden ebenfalls näher eintreten und zeigen, dass sich das Problem in viel allgemeinerer Weise lösen lässt und dass die Heym'sche Formel ebenso als ein Spezialfall aus ganz allgemeinen Gleichungen hergeleitet werden kann, wie die Wittstein'sche Formel aus meinen Fundamentalgleichungen I bis III. Es bietet sich mir hier recht gute Gelegenheit, zu zeigen, dass man überhaupt bei der Behandlung des ganzen vorliegenden Problemes in der Anlage und Durchführung der Rechnungen zwei verschiedene Wege verfolgen kann; den einen derselben habe ich oben eingeschlagen, der andre Weg soll nun verfolgt werden.

Es sollen wieder, wie oben die beiden Flächen, welche von den Curven $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ (Fig. 23 a. f. S.) umschlossen werden, andeuten, in welcher Weise sich die eintretenden und austretenden Personen über die ganze Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ vertheilen. Nun mag aber noch eine dritte Curve $D_1 D_2$ (in der Figur punktirt) hinzugefügt werden, und die Fläche $A_1 D_1 D_2 A_2$, welche diese Curve begrenzt, in Flächenstreifen zerlegt gedacht, soll angeben, wie sich die Sterbefälle über die ganze Zeit t verbreiten. Hierbei ist aber wohl zu unterscheiden, ob die Sterbefälle in Betracht kommen sollen, welche in der Zeit t innerhalb der Gesellschaft beobachtet werden oder diejenigen Sterbefälle, welche nur von den a Personen herrühren, die anfänglich in der Gesellschaft vorhanden waren. Wir wollen ausdrücklich die erstere Annahme machen, weil es ja die in der Gesellschaft vorkommenden Sterbefälle sind, die der Beobachtung unterworfen werden können. Bezeichne ich nun die variable Ordinate AD der Curve $D_1 D_2$ mit y_α und wie früher mit α die Anzahl aller Sterbefälle, die in der Zeitstrecke t in der Gesellschaft beobachtet werden; sowie weiter, wie oben die variabeln Ordinaten der Curve $B_1 B_2$ der Eintretenden und der Curve $C_1 C_2$ der Austretenden mit y' und y'' und mit b die ganze Anzahl der Eintretenden, mit c die Anzahl der Ausscheidenden, so gelten nun ohne Weiteres folgende Gleichungen:

$$a = \int_o^t y_a\, dx; \quad b = \int_o^t y'\, dx; \quad c = \int_o^t y''\, dx \qquad \text{(IV)}$$

Bis zum Ende der Zeitstrecke $A_1 A = x$ sind dagegen in der Gesellschaft gestorben:

Fig. 23.



$$\int_o^x y_a\, dx \quad (\text{Fläche } A_1 D_1 D A)$$

bis dahin sind eingetreten:

$$\int_o^x y'\, dx \quad (\text{Fläche } A_1 B_1 B A)$$

und ausgetreten:

$$\int_o^x y''\, dx \quad (\text{Fläche } A_1 C_1 C A)$$

Da a Personen Anfangs in der Gesellschaft waren, so ist nun die Anzahl der Personen, die am Ende der Zeitstrecke x in der Gesellschaft leben, ausgedrückt durch:

$$a - \int_o^x (y_a + y'' - y')\, dx.$$

Davon stirbt eine gewisse Anzahl in der nächsten unendlich kleinen Zeit dx; da aber diese Anzahl durch den Flächenstreifen $A D D' A' = y_a\, dx$ gegeben ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser $m + x$ jährigen Personen in der Zeit dx zu sterben:

$$\frac{y_a\, dx}{a - \int_o^x (y_a + y'' - y')\, dx}$$

wobei die Anzahl der Sterbefälle, die von den in der Zeit dx Ein- und Ausgetretenen herrühren, als unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unberücksichtigt bleiben.

Für vorstehende Wahrscheinlichkeit lässt sich aber noch ein zweiter Ausdruck geben. Ist nämlich $AM = y$ die der Abscisse x entsprechende Ordinate der Mortalitätscurve $M_1 M_2$, so ändert sich diese Ordinate in der Zeit dx um dy, die Anzahl der Sterbenden, herrührend von den y Lebenden, ist demnach $-dy$ und die Wahrscheinlichkeit des $m+x$-Jährigen in der nächstfolgenden Zeit dx zu sterben, ist auch:

$$-\frac{dy}{y}$$

Durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke erhält man nun für vorliegendes Problem die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{y_a\,dx}{a - \int_0^x (y_a + y'' - y')\,dx}$$

die jetzt zwischen den Grenzen o und t zu integriren ist. Links ist die Integration ohne Weiteres ausführbar; man erhält logn. y; am Ende der Zeit t ist aber $y = (m+t) = A_2 M_2$, im Anfang $y = (m) = A_1 M_1$, daher folgt unter Benutzung von Gl. (3):

$$\int_0^t \frac{dy}{y} = \text{logn.}\,\frac{(m+t)}{(m)} = \text{logn.}\,p$$

und hiernach zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p des m-Jährigen nach t Jahren noch zu leben:

$$\text{logn.}\,p = -\int_0^t \frac{y_a\,dx}{a - \int_0^x (y_a + y'' - y')\,dx} \qquad \text{(V)}$$

Diese Formel bildet jetzt im Verein mit den unter IV angegebenen Formeln ein neues, zweites System von Fundamentalgleichungen, die in gleicher Weise, wie das erste System von Gleichungen I bis III, unendlich viele Spezialfälle umschliessen. Die einfachste und zunächstliegende Annahme hinsichtlich des Verlaufes der drei Curven $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ und $D_1 D_2$ ist nun die, dass die Ordinaten $y_a\ y'\ y''$ constante Grössen sind, die Curven also in horizontale gerade Linie übergehen, mit andern Worten, dass die Aus- und Eintretenden sowohl, wie die in der Gesellschaft sterbenden Personen sich gleichförmig über den ganzen Zeitraum t erstrecken.

Die Gl. IV gehen dann über in folgende:

$$\alpha = y_a t \quad b = y' t \quad c = y'' t \tag{23}$$

und Gl. V giebt:

$$\text{logn.}\, p = -\int_o^t \frac{y_a\, dx}{a - (y_a + y'' - y')\, x}$$

oder wenn man die Integration ausführt und nach der Gl. (23) die Werthe y_a, y' und y'' eliminirt:

$$\text{logn.}\, p = \frac{\alpha}{\alpha + c - b}\, \text{logn.} \frac{a - (\alpha + c - b)}{a}$$

Schreibt man endlich, unter gleichzeitiger Benutzung von Gl. (13), wo a_1 die Anzahl der Lebenden am Ende der Zeit t und zwar die in der Gesellschaft lebenden Personen darstellt, diese Gleichung als Exponentialgleichung, so folgt auch:

$$p = \left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha + c - b}} \tag{24}$$

und das ist in allgemeinerer Form die Gleichung von Heym; nur nimmt derselbe auf die Anzahl b der Eintretenden keine Rücksicht; man kommt erst auf dessen Formel, wenn man noch $b = o$ setzt.

Es lässt sich übrigens, wie ich nun noch darlegen will, die Heym'sche Formel auch aus der Wittstein'schen als Näherungsformel ableiten.

Dividirt man Gl. (20), S. 107, auf beiden Seiten durch a und nimmt man beiderseits den Logarithmus, so schreibt sie sich, wie folgt:

$$\text{logn.}\, \frac{a_1}{a} = \text{logn.}\, p + \text{logn.} \left[1 - \frac{(b - c)\, \text{logn.}\, p}{a\,(1 - p)}\right]$$

Der Ausdruck in der Klammer der rechten Seite ist aber im Allgemeinen nur wenig von Eins verschieden, da logn. p wenig von $1 - p$ differirt und die Anzahl der Ein- und Austretenden meist sehr klein gegen die Anzahl a der anfänglich vorhandenen Mitglieder ist. Jn solchem Falle kann man den Logarithmus des Klammerausdrucks in eine Reihe entwickeln und braucht von dieser genau genug nur das erste Glied zu benutzen; man erhält also näherungsweise:.

$$\text{logn.}\left[1-\frac{(b-c)\,\text{logn.}\,p}{a\,(1-p)}\right]=-\frac{(b-c)\,\text{logn.}\,p}{a\,(1-p)}$$

und daher durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$\text{logn.}\,\frac{a_1}{a}=\left[1-\frac{(b-c)}{a\,(1-p)}\right]\text{logn.}\,p$$

oder wenn diese Gleichung als Exponentialgleichung geschrieben wird:

$$p=\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{a\,(1-p)}{a\,(1-p)+c-b}}$$

Nach Gl. (9) repräsentirt der Werth $a\ (1-p)$ im Exponenten die Anzahl α_0 der Personen, welche von den anfänglich in der Gesellschaft vorhandenen a Personen in der Zeit t sterben; sie sterben zum Theil in der Gesellschaft, zum Theil ausserhalb derselben. Ist nun aber die Anzahl c der Austretenden gegen die Anzahl a der anfänglich in der Gesellschaft lebenden Personen klein und die Zeitstrecke t, die man ins Auge fasste, verhältnissmässig kurz, so kann man α_0 mit α identisch annehmen, also alle Sterbefälle als in der Gesellschaft selbst stattfindend sich denken. Setzt man sonach in vorstehende Formel α statt $a\ (1-p)$ ein, so ergiebt sich wieder die Heym'sche Formel. Daraus erkennt man recht deutlich, dass man bei strenger Entwickelung das α_0 nicht mit α verwechseln darf. Heym übersieht, wie aus seinen Betrachtungen unzweifelhaft hervorgeht, diesen Unterschied der beiden Arten von Sterbenden; in der Einleitung zu seinen Entwickelungen (a. a. O.) wird ausdrücklich gesagt, es sei (unsere Bezeichnung benutzt) a die Anzahl der Lebenden im Anfange und α die Anzahl der im Laufe des nächsten Jahres davon Sterbenden, während dann in der Ableitung der Grundformel doch stillschweigend und bei der Anwendung derselben offen unter α die Anzahl der in der Gesellschaft Sterbenden gemeint ist.

Aus allen diesen Betrachtungen ist übrigens ersichtlich, dass die zweite Art von Fundamentalgleichungen (IV und V) selbst unter der einfachsten Annahme auf Formeln führen, die sehr unbequem für den praktischen Gebrauch sind. Andere Annahmen führen ebenso wenig auf einfache Ausdrücke; ich werde daher im Folgenden ausschliesslich von der ersten Art der Gleichungen (I bis III) Gebrauch machen, und weitere Spezialfälle aus Gl. IV und V hier nicht behandeln; immerhin hielt ich für zweckmässig, beide einzuschlagenden Wege in dieser Schrift näher zu bezeichnen und den Zusammenhang zwischen den Formeln von Wittstein und Heym und meinen eigenen nun folgenden Entwickelungen darzulegen.

Neue Hypothese.

Bei der Ableitung der allgemeinen Gl. I bis III, S. 101, habe ich zunächst den Verlauf der drei Curven $M_1 M_2$, $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ (Fig. 23, S. 112) ganz unbestimmt gelassen, dann nach Wittstein's Vorgang die Curve der Eintretenden $B_1 B_2$ und die der Austretenden $C_1 C_2$ zunächst als gerade Linien parallel der Axe OX vorausgesetzt und schliesslich auch zwei verschiedene Annahmen hinsichtlich des Verlaufes der Mortalitätscurve $M_1 M_2$ erwähnt.

Obgleich man nun hinsichtlich der Vertheilung der Aus- und Eintretenden auf die Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ d. h. über den Verlauf der Curven $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ unendlich viele Annahmen machen kann, so erscheint doch immer auf den ersten Augenblick die Wittstein'sche Hypothese der gleichförmigen Vertheilung als die nächstliegende und natürlichste und daher erklärt sich's, dass auch Andre bei ähnlichen Untersuchungen, wie z. B. Heym, bei Vertheilung der Sterbefälle von gleichen Voraussetzungen ausgingen. Ich glaube aber, gerade in vorliegendem Falle lässt sich noch eine andere Hypothese aufstellen, die besser der Wirklichkeit entspricht. Denke ich mir eine grosse Gesellschaft inmitten eines grossen Landes, so wird die Vertheilung der Lebenden nach ihrem Alter in der Gesellschaft, wie ausserhalb derselben ohngefähr den Ordinaten $A_1 M_1$, AM, $A_2 M_2$ der Mortalitätscurve entsprechen, d. h. die Anzahl der Lebenden von geringerem Alter ist grösser, als die der Lebenden von höherem Alter; daraus folgt nun, wenigstens für die mittlern Lebensalter, die doch bei Versicherungsanstalten vorzugsweise in Betracht kommen, dass die niedern Altersklassen ein stärkeres Contingent von austretenden und eintretenden Personen liefern, als die höhern Altersklassen. Ich schliesse daraus, dass es richtiger und der Wirklichkeit mehr entsprechend ist, anzunehmen, dass die beiden Curven $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$, ähnlich wie die Mortalitätscurve $M_1 M_2$, sich mit wachsendem Alter der Abscissenaxe nähern, also etwa den Verlauf haben, wie es in Fig. 23 wirklich angedeutet ist und stelle nun die Hypothese hin, »dass einfach die Ordinaten y' und y'' dieser beiden Curven der dem gleichen Zeitpunkte x entsprechenden Ordinate y der Mortalitätscurve **proportional** sind.«

Ich setze also:

$$AB = y' = \varphi y \text{ und } AC = y'' = \psi y,$$

wobei φ und ψ zwei constante Faktoren sind, Werthe, die wenigstens innerhalb der Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ als unveränderlich angesehen werden dürfen.

Unter dieser Voraussetzung verwandeln sich unsere Fundamentalgleichungen I, II und III, S. 102, sogleich in folgende:

$$a_1 = p\left[a + (m)\, t\, (\varphi - \psi)\right] \tag{25}$$

$$b = \varphi \int_0^t y\, dx$$

$$c = \psi \int_0^t y\, dx$$

Nun bedeutet aber das Integral der beiden letzten Formeln nichts weiter, als den Inhalt der Fläche $A_1 M_1 M_2 A_2$, die von der Mortalitätscurve begrenzt wird; bezeichnen wir diesen Inhalt vorübergehend mit F, so wäre also die Zahl der Eintretenden dargestellt durch die Gleichung:

$$b = \varphi F \tag{26}$$

und die Anzahl der Austretenden durch:

$$c = \psi F \tag{27}$$

Meine Hypothese liesse sich also auch in der Art in Worten aussprechen, dass man sagt, die Anzahl der innerhalb der Zeit t

Ein- und Austretenden sei der Fläche proportional, die auf derselben Zeitstrecke von der Mortalitätscurve begränzt wird. Diese Fläche ist aber wiederum der Anzahl aller in dem betreffenden Lande oder in der Gesellschaft zwischen den Altersgrenzen m und $m + t$ stehenden Lebenden proportional und so kommt man wieder auf die Fassung der Hypothese zurück, von der ich ausgieng.

Bestimme ich jetzt aus den beiden letzten Formeln die Werthe φ und ψ, und substituire ich sie in Gl. (25), so folgt:

$$a_1 = p\left[a + \frac{(m)\,t}{F}(b - c)\right] \tag{28}$$

Jetzt ist es erforderlich, eine bestimmte Annahme hinsichtlich des Verlaufes der Mortalitätscurve zu machen und den Flächeninhalt F zu ermitteln. Für kurze Zeitstrecken t kann man aber das Stück $M_1 M_2$ dieser Curve als geradlinig ansehen und daher läuft die Aufgabe einfach darauf hinaus, den Flächeninhalt des Paralleltrapezes $A_1 M_1 M_2 A_2$ auszudrücken. Die Anfangsordinate ist $A_1 M_1 = (m)$, die Endordinate $A_2 M_2 = (m + t)$ und die Strecke $A_1 A_2$ ist durch t ausgedrückt; man hat also:

$$F = \frac{(m) + (m + t)}{2} \cdot t$$

und erhält hieraus, wenn man nach Gl. (3) noch $(m + t)$ durch $(m)\,p$ ersetzt:

$$F = \frac{(1 + p)}{2}(m)\,t \tag{29}$$

Dieser Werth in Gl. (28) substituirt, giebt endlich die Gleichung, die nun allen weitern Betrachtungen zu Grunde gelegt werden soll und die eine Fülle von interessanten Resultaten liefern wird. Man erhält:

$$a_1 = p\left[a + \frac{2\,(b - c)}{1 + p}\right] \tag{VI}$$

Wäre demnach für die m-jährige Person die Wahrscheinlichkeit p gegeben, nach t Jahren noch zu leben, so liesse sich aus der Anzahl a der anfänglich in der Gesellschaft vorhandenen Mitglieder, aus der Anzahl b der eingetretenen und der Anzahl c der ausgeschiedenen Mitglieder die Anzahl a_1 der Mitglieder berechnen, die am Ende der Zeit t in der Gesellschaft noch lebend vorhanden sind.

Setzt man in die Gln. (5) und (6), S. 102, ebenfalls $y' = \varphi y$ und $y'' = \psi y$, so findet sich dort durch Integration:

$$a' = (m)\, p \varphi t$$

$$\text{und } a'' = (m)\, p \psi t$$

oder unter Benutzung der Gln. (26) und (27):

$$a' = \frac{(m)\, t}{F} b p$$

$$\text{und } a'' = \frac{(m)\, t}{F} c p$$

Macht man in diesen beiden Formeln endlich von dem Ausdrucke (29) Gebrauch, so erhält man zur Berechnung der Anzahl derjenigen aller zur Gesellschaft Gekommenen, die am Ende der Zeit t daselbst noch am Leben sind, die Formel:

$$a' = \frac{2p}{1+p} \cdot b \tag{30}$$

Dann die Anzahl aller derjenigen, welche die Gesellschaft innerhalb der Zeit t verlassen haben und am Ende derselben noch leben:

$$a'' = \frac{2p}{1+p} \cdot c \tag{31}$$

Ferner findet sich die Anzahl derjenigen, die nach ihrem Eintritt in die Gesellschaft bis zum Verfluss der Zeit t daselbst gestorben sind, unter Benutzung von Gl. (30):

$$\alpha' = b - a' = \frac{1-p}{1+p} \cdot b \tag{32}$$

und die Anzahl derjenigen, die nach ihrem Austritt aus der Gesellschaft bis zum Ende der Zeit t starben, mit Hülfe von Gl. (31):

$$\alpha'' = c - a'' = \frac{1-p}{1+p} \cdot c \tag{33}$$

Die Anzahl der Personen, die von den anfänglich vorhandenen Mitgliedern sterben, ist, wie schon Gl. (9) giebt:

$$\alpha_0 = a\,(1-p) \tag{34}$$

während die Anzahl der Sterbefälle, die man in der Gesellschaft selbst beobachtet, sich nach Gl. (13) bestimmt:

$$\alpha = a + b - c - a_1.$$

Setzt man hier den Werth von a_1 nach Gl. (IV) noch ein, so findet sich auch direct:

$$\alpha = (1-p)\left[a + \frac{b-c}{1+p}\right] \tag{35}$$

Diese Gleichung, verglichen mit den Näherungsformeln 20_a und 20_b, S. 108, die Wittstein zuerst gegeben hat, zeigt recht deutlich den Zusammenhang meiner Entwickelung mit denen von Wittstein; noch besser tritt der Zusammenhang durch folgende Betrachtung hervor:

Unter der Voraussetzung $x > o$ ist bekanntlich:

$$\text{logn.}\, x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$

Ist x wenig von Eins verschieden, was mit unserem Wahrscheinlichkeitswerth p der Fall ist, so kann man sich mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen und erhält dann die Beziehung

$$-\text{logn.}\, p = 2 \cdot \frac{1-p}{1+p}$$

Benutzt man diese Relation in allen vorstehenden Formeln, so erhält man ohne Weiteres die Gleichungen, die ich oben unter Annahme der Wittstein'schen Hypothese entwickelt habe und umgekehrt hätte schon Wittstein meine Gleichungen auf diesem Wege aus den seinigen ableiten können; dieselben wären dann freilich als Näherungsformeln erschienen, wie ich sie keineswegs betrachtet wissen will; ich glaube vielmehr, dass meine Hypothese der Wirklichkeit mehr entspricht, als die Wittstein'sche, und betrachte daher dessen Gleichungen mehr als Näherungsformeln der meinigen. Uebrigens ist es gleichgültig, wie man die Sache auffassen will; die Hauptsache war, unter Aufstellung einer Hypothese, mit der man sich leichter befreunden kann, Formeln zu entwickeln, die ihrer grössern Einfachheit wegen bequemer in ihrer Anwendung sind und Das scheint mir durch die obigen Entwickelungen erreicht zu sein.

Ich will nun dazu übergehen, zu zeigen, wie man bei Lebensversicherungsgesellschaften die Formel VI benutzen wird, um aus den entsprechenden Beobachtungen daselbst für die verschiedenen Alter die Lebenswahrscheinlichkeit zu ermitteln. Zunächst ist hervorzuheben, dass diese Gleichung die Zeit t nicht mehr enthält, sie gilt eben für jeden Zeitwerth, so lange man annehmen kann, innerhalb der Zeitstrecke t dürfe das entsprechende Stück der Mortalitätscurve als geradlinig angesehen werden. Zum Zweck der Construction neuer oder Correction schon vorhandener Mortalitätstafeln beträgt diese Zeitstrecke immer ein Jahr und für diese kurze Strecke ist (mit Ausnahme der ersten Lebensjahre) die erwähnte Annahme ganz und gar zulässig.

Ich denke mir nun, man wird bei den Versicherungsanstalten alljährlich Tabellen von folgender Anordnung ausfüllen:

Jahr 18..

Alter:	Es waren vorhanden bei Beginn des Jahres:	Im Laufe des Jahres traten ein:	Im Laufe des Jahres traten aus:	Es starben in der Gesellschaft im Laufe des Jahres:	Es waren vorhanden am Ende des Jahres:
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
m	a	b	c	α	$a_1 = a + b - c - \alpha$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Da ein Jahr aber zu wenig Material liefert, so fasst man schliesslich eine ganze Reihe von Jahrgängen zusammen, indem man diese einzelnen Jahrgänge, wie eben so viele neben einander bestehende Gesellschaften ansieht. Dass man bei Ausfüllung und Anordnung dieser Tabellen auch noch Unterscheidung treffen kann und wird hinsichtlich des Geschlechtes u. s. w. ist selbstverständlich. Aus der Generaltabelle, die schliesslich aus dem Zusammenziehen aller einzelnen Jahrgänge entstanden ist, entnimmt man nun für jedes Alter die Werthe a, b c und a_1 und berechnet dann nach Gl. VI für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit p am Ende des nächsten Jahres noch zu leben. Bei Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers u. s. f. kommen schliesslich nur die Werthe a_1 und a in

Betracht und überdies gilt dann in Hinsicht der Beurtheilung der so erhaltenen Mortalitätstafel das, was ich schon in Abh. I, S. 54, ausgesprochen habe.

Was nun die Berechnung von p nach Gl. VI betrifft, so stösst man bei der Auflösung dieser Gleichung in Hinsicht p allerdings auf eine unrein quadratische Gleichung, deren Benutzung aber durchaus keine Schwierigkeiten bietet. Man erhält, wie sich leicht verfolgen lässt:

$$p = -\frac{a - a_1 + 2(b - c)}{2a} + \sqrt{\frac{a_1}{a} + \left(\frac{a - a_1 + 2(b - c)}{2a}\right)^2} \quad (36)$$

oder auch, wenn man vorzieht, die Anzahl der in der Gesellschaft beobachteten Sterbefälle nach Gl. (13) einzuführen:

$$p = -\frac{\alpha + b - c}{2a} + \sqrt{\frac{a + b - c - \alpha}{a} + \left(\frac{\alpha + b - c}{2a}\right)^2} \quad (36_a)$$

In den meisten Fällen ist das in Gl. (36) unter der Wurzelgrösse im Quadrat vorkommende Glied so klein, dass man es ohne Weiteres vernachlässigen kann; man erhält dann als Näherungsformel den Ausdruck:

$$p = \sqrt{\frac{a_1}{a}} - \frac{a - a_1 + 2(b - c)}{2a} \quad . \quad (37)$$

Besser ist aber folgende Umformung der Gl. (36). Quadrirt man das Glied unter der Wurzel, so findet sich:

$$p = -\frac{a - a_1 + 2(b - c)}{2a} + \frac{a + a_1}{2a}\sqrt{1 + \frac{4(b - c)(a + b - c - a_1)}{(a + a_1)^2}}$$

Das zweite Glied unter der Wurzel ist aber meist so klein, dass man den Wurzelausdruck nach der binomischen Reihe entwickeln kann und von der Reihe nur die ersten beiden Glieder zu benutzen braucht; man erhält dann:

$$p = -\frac{a - a_1 + 2(b - c)}{2a} + \frac{a + a_1}{2u}\left[1 + 2 \cdot \frac{(b - c)(a + b - c - a_1)}{(a + a_1)^2}\right]$$

und hieraus nach einigen Umformungen:

$$p = \frac{a_1}{a} - \frac{(b - c)}{a} \cdot \frac{(2a_1 - b + c)}{(a + a_1)} \quad (38)$$

welche Formel für die meisten Fälle der Anwendung genau genug erscheinen wird. Endlich könnte man bei der Berechnung von p auch in folgender Art vorgehen und dieser Weg erscheint vielleicht als der beste.

Da p im Allgemeinen nur wenig von Eins verschieden ist, so setzt man in der Klammer des Ausdruckes (35) zuerst $p = 1$, berechnet also aus

$$\alpha = (1 - p)\left[a + \frac{b - c}{2}\right]$$

einen ersten Näherungswerth von p und setzt diesen nun, um zu einer zweiten Näherung zu gelangen, auf der rechten Seite der folgenden Formel ein, die aus Gl. (35) hervorgeht:

$$1 - p = \frac{\alpha}{a + \frac{b - c}{1 + p}}$$

In den meisten Fällen der praktischen Anwendung wird dieser zweite Näherungswerth, ebenso wie der direct aus Gl. (38) hervorgehende Werth genügen.

Heym berechnet (Masius Rundschau etc. B. V, p. 108), um den Gebrauch seiner Formel (Gl. 24) zu zeigen, folgendes Beispiel, das wir des Vergleiches wegen auch nach den zuletzt gegebenen Gleichungen behandeln wollen.

Aus einer Gesellschaft, die im Anfange des Jahres aus $a = 10000$ Personen im Alter von 35 Jahren bestand, traten im Laufe des nächsten Jahres $c = 145{,}9$ Personen aus und es starben (in der Gesellschaft) $\alpha = 92{,}8$ Personen, während keine Personen dieses Alters zur Gesellschaft traten, es war also $b = o$.

Hier giebt die Heym'sche Formel Gl. (24) für die Wahrscheinlichkeit p der 35jährigen Personen, am Ende des nächsten Jahres noch zu leben:

$$p = \left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{a}{a + c}} = 0{,}99065,$$

wenn man nach Gl. (13) $a_1 = a - c - \alpha = 9761{,}3$ substituirt.

Für denselben Fall liefert unsere genaue Gl. (36):

$$p = 0{,}990652.$$

Dagegen die Näherungsformel (37):

$$p = 0{,}990648$$

und die besser begründete Näherungsformel (38):

$$p = 0{,}99065$$

Man ersieht also, dass alle Formeln genau auf den gleichen Werth führen, man also die Heym'sche Gleichung ganz wohl ihrer unbequemen Form wegen verlassen kann. Die gute Uebereinstimmung hat ihren Grund wesentlich darin, dass die Anzahl der Personen, die von den anfänglich vorhandenen Personen überhaupt sterben, nur sehr wenig verschieden ist von der Anzahl der Personen, die in der Gesellschaft sterben. Benutze ich den Werth $p = 0{,}99065$, so findet sich nach Gl. (34) die Zahl der Sterbefälle überhaupt $\alpha_0 = a\,(1 - p) = 93{,}5$, während in der Gesellschaft $\alpha = 92{,}8$ Sterbefälle beobachtet wurden. Von den 145,9 Personen, welche austraten, starben also im gleichen Jahre nach ihrem Austritte nur 0,7 Personen.

Den Gleichungen, die ich zuletzt entwickelt habe, lag die Hypothese zu Grunde, dass die Ordinaten y' und y'' der beiden Curven $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ in Fig. 23, S. 112, der dem gleichen Werthe von x entsprechenden Ordinate y der Mortalitätscurve proportional seien; da nun überdies schliesslich noch das Stück $M_1 M_2$ der Mortalitätscurve als geradlinig vorausgesetzt wurde, so folgt daraus auch der geradlinige Verlauf der beiden Curvenstücke $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ und aus der angenommenen Proportionalität folgt weiter, dass die drei geraden Linien $M_1 M_2$, $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ verlängert sich im gleichen Punkte der Abscissenaxe schneiden würden. Es wäre nun leicht, die Voraussetzung, dass die Werthe y' und y'' der Ordinate y proportional sind, auch noch fallen zu lassen und nur anzunehmen, dass die drei Curven innerhalb der kurzen Zeitstrecke t als geradlinig angesehen werden könnten; man hätte dann einfach in den Fundamentalgleichungen I bis III, S. 102, nach Gl. (18)

$$y = (m)\left[1 - (1 - p)\,\frac{x}{t}\right]$$

und

$$y' = \beta' + \gamma' x$$

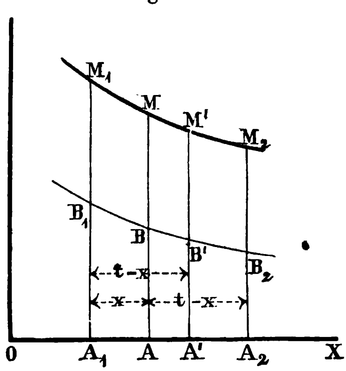
sowie

$$y'' = \beta'' + \gamma'' x$$

zu setzen, wobei β', β'', γ' und γ'' noch näher zu bestimmende constante Grössen wären, von denen zwei sich durch Gl. II und III noch eliminiren liessen. Die in Gl. I angedeutete Integration ist dann noch ganz wohl ausführbar und würde eine Gleichung ergeben, die nicht blos alle bis jetzt entwickelten Formeln gleichzeitig umschliesst, sondern zugleich noch unendlich viele andere Hypothesen über die Art der Vertheilung der ein- und austretenden Personen auf die Zeitstrecke t umfasst. Die Formel, die man auf solche Weise erhält, ist aber sehr complicirten Baues und schon aus diesem Grunde, dann aber auch, weil meine oben gegebene Hypothese für alles Folgende vollkommen genügt, unterlasse ich die Ausdrücke, in welche die allgemeinen Gleichungen für den bezeichneten Fall übergehen, hier aufzuführen.

Dagegen halte ich es für angemessen, noch auf einen andern Punkt hinzuweisen. Bei der Ableitung der Grundgleichungen habe ich die Annahme gemacht, dass die zur Gesellschaft tretenden Personen das Alter besitzen sollten, welches die schon in der Gesellschaft befindlichen Personen eben haben; es sollten also die Eintretenden derjenigen Altersgruppe zugetheilt werden, der sie angehören würden, wenn sie schon im Anfange der Zeit t der Gesellschaft angehört hätten. Es giebt nun aber einen Fall, bei dem diese Annahme gar nicht zulässig ist und dieser soll noch in der Kürze behandelt werden. Denke ich mir, es soll für einen Neugebornen die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, die er für sich hat, am Ende der Zeitstrecke t noch zu leben, und es sei b die Anzahl der Geburten, die innerhalb der ganzen Zeitstrecke stattfinden und a' die Anzahl der Kinder, die am Ende noch am Leben sind, so sind diese anzusehen, wie Personen, die sämmtlich mit dem gleichen Alter o zu einer Gesellschaft treten oder wenn wir allgemeiner den früher behandelten Fall ins Auge fassen, so hätten die Eintretenden zur Zeit x genau das Alter m, welches die schon in der Gesellschaft befindlichen Personen im Anfange **hatten.** Es sei wieder Fig. 24 $M_1 M_2$ dasjenige Stück der

Fig. 24.



Mortalitätscurve, welches den Altersgrenzen $OA_1 = m$ bis $OA_2 = m + t$ entspricht; die Anzahl der Lebenden nach der Mortalitätstafel werden wieder bezeichnet mit $A_1 M_1 = (m)$ und $A_2 M_2 = (m + t)$ und die von der Curve $B_1 B_2$ umschlossene Fläche $A_1 A_2 B_2 B_1$ repräsentire wieder die ganze Anzahl b der Personen, die innerhalb der Zeitstrecke $A_1 A_2 = t$ zur Gesellschaft kommen, so dass also der Verlauf der Curve das Gesetz der Vertheilung der Eintretenden auf diese Zeitstrecke anzeigt. Rechne ich die Zeit wieder vom Punkte A_1 ab und bezeichne ich die Ordinate AB dieser Curve mit y', so ist die Zahl der in der Zeitstrecke x bis $x + dx$ Eintretenden dargestellt durch

$$y'\,dx,$$

wo man sich allgemein y' als Funktion von x gegeben denkt. Es ist nun darzulegen, wie viel von diesen Personen, die nach der neuen Voraussetzung sämmtlich das Alter m haben, am Ende der Zeit t, d. h. nach Verfluss der Zeitstrecke $AA_2 = t - x$, noch leben. Ist hierfür die Wahrscheinlichkeit p_x, so ist die gesuchte Anzahl der Lebenden am Ende:

$$p_x y'\,dx$$

oder die Anzahl a' der Lebenden von allen Eingetretenen:

$$a' = \int_0^t p_x y'\,dx$$

während die Zahl der Eintretenden nach obiger Darstellung durch:

$$b = \int_0^t y'\,dx \tag{39}$$

gegeben ist.

Was nun den Werth der Wahrscheinlichkeit p_x betrifft, so bestimmt sich derselbe in folgender Art; man trage von A_1 aus die Strecke $A_1 A' = t - x$ auf und bestimme die zugehörige Ordinate $A'M'$ der Mortalitätscurve, die mit y_{t-x} bezeichnet werden mag; nun ist $A_1 M_1 = (m)$, die Zahl der Lebenden vom Alter m $A'M' = y_{t-x}$ die der Lebenden vom Alter $m + t - x$, d. h. derjenigen, die um $t - x$ Jahre älter sind. Hiernach folgt einfach:

$$p_x = \frac{y_{t-x}}{(m)}$$

und daher durch Substitution in die vorige Gleichung für a':

$$a' = \int_0^t \frac{y' \cdot y_{t-x}\, dx}{(m)} \tag{40}$$

woraus sich die Anzahl derjenigen ermitteln lässt, die von allen innerhalb der Zeit t Eingetretenen am Ende noch am Leben sind, wenn man nur weiss, wie y' und y_{t-x} mit x zusammenhängt.

Nimmt man, um sofort einen bestimmten Fall zu behandeln, an, die Zeitstrecke t sei verhältnissmässig so kurz, dass man das betreffende Stück $M_1 M_2$ der Mortalitätscurve als geradlinig ansehen darf (für die Zeitstrecke von einem Jahre halte ich das für Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeit für Neugeborne schon für unzulässig), so schreibt sich die Gleichung der Mortalitätscurve nach Gl. (18):

$$y = (m)\left[1 - (1-p)\frac{x}{t}\right]$$

Setzt man hier $t - x$ für x ein, so ergiebt sich die Ordinate y_{t-x} nach einfacher Umformung:

$$y_{t-x} = (m)\left[p + (1-p)\frac{x}{t}\right]$$

und daher folgt nach Gl. (40):

$$a' = \int_0^t y' \cdot \left[p + (1-p)\frac{x}{t}\right] dx$$

Die weitere Benutzung der Gleichung erfordert nun die Kenntniss, wie sich die ganze Zahl b der Eintretenden, resp. die Geburten, auf die Zeitstrecke t vertheilen. Angenommen, es sei die Curve $B_1 B_2$ eine gerade Linie von der Gleichung

$$y' = \beta + \gamma x,$$

wo β und γ constante Grössen sind, so ergiebt die Integration vorstehender Formel:

$$a' = \frac{1+p}{2} \cdot \beta t + \frac{2+p}{6}\gamma \cdot t^2,$$

wobei die ganze Zahl der Eintretenden nach Gl. (39) zu setzen ist:

$$b = \beta t + \frac{\gamma t^2}{2}$$

Mit Hülfe dieser beiden Formeln liesse sich beispielsweise folgendes Problem lösen. Angenommen, es sei die Anzahl b der Geburten eines Landes innerhalb der kurzen Zeitstrecke t bestimmt und beobachtet worden, wie viel (a') davon am Ende der Zeit t noch am Leben waren, so liesse sich für den Neugebornen die Wahrscheinlichkeit p berechnen, am Ende der Zeitstrecke noch zu leben, vorausgesetzt freilich, dass von den beiden Constanten β und γ, welche den Verlauf der Geraden $B_1 B_2$ fixiren, wenigstens eine bekannt wäre.

Wäre z. B. $\gamma = o$, d. h. nehmen wir gleichförmige Vertheilung der Geburten an, so ergäbe die Verbindung der beiden letzten Gleichungen:

$$a' = \frac{1+p}{2} \cdot b$$

woraus sich dann p leicht berechnen liesse.

Diese Andeutungen mögen hier genügen; ich betrachte zwar die Lösung des Problems der Bestimmung der Kindersterblichkeit als ein sehr wichtiges, doch ist hierbei nicht auf dem im Vorstehenden angegebenen Wege, der bis zu gewissem Grade schon von Andern betreten wurde, vorzugehen, sondern man wird hierbei die Sätze benutzen müssen, die in der ersten Abhandlung dargelegt worden sind.

Das Hauptziel, welches ich mir in den vorstehenden Untersuchungen gesteckt hatte, ist erreicht und bestand im Grunde genommen nur in der Aufstellung der Hauptgleichung VI, S. 118; alles Uebrige sollte mehr dazu dienen, den Zusammenhang meiner Untersuchungen mit denen Anderer darzulegen und zu zeigen, dass eigentlich Alles, was auf analytischem Wege in der angegebenen Richtung bis jetzt erforscht wurde, aus meinen allgemeinen Gleichungen I bis III, S. 102, hergeleitet werden kann.

Neue Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, angewandt auf die Frage der lebenslänglichen Invalidität.

Bei der Ableitung unserer Gleichung VI, die wir oben, S. 118, zum Zwecke der Bestimmung der Lebenswahrscheinlichkeiten für verschiedene Alter aus den Aufzeichnungen von Versicherungsgesellschaften näher erläutert haben, nahmen wir an, es seien im Anfange einer gewissen Zeitstrecke t, für die wir von jetzt an immer ein Jahr rechnen wollen, a Personen von gleichem Alter m vorhanden gewesen; im Laufe der Zeit t traten dann b neue, der gleichen Altersgruppe zugehörige Personen hinzu und c Personen verliessen die Gesellschaft; dann ergab diese Gleichung die Anzahl a_1 der Mitglieder, die schliesslich noch in der Gesellschaft lebend vorhanden waren:

$$a_1 = p\left(a + \frac{2(b-c)}{1+p}\right)$$

wobei p für den m-Jährigen die Wahrscheinlichkeit war, am Ende der Zeitstrecke t, also z. B. nach einem Jahre überhaupt noch zu leben. Denken wir jetzt an eine geschlossene Gesellschaft, geschlossen insofern, als neue Mitglieder nicht zutreten, so ist einfach $b = o$ und wir erhalten dann:

$$a_1 = p\left(a - \frac{2c}{1+p}\right) \tag{41}$$

eine Gleichung, welche uns angiebt, in welcher Weise sich diese Gesellschaft im nächsten Jahre lichtet, und zwar geschieht das hier in doppelter Art: theils durch Tod, theils dadurch, dass aus irgend welchem Grunde eine Reihe von Mitgliedern die Gesellschaft lebend verlässt. Als Grund des Austrittes können wir nun Verschiedenes bezeichnen; für die nächstfolgenden Untersuchungen denken wir, die Gesellschaft soll nur aus gesunden arbeitsfähigen Personen bestehen und die c Personen nehmen desshalb ihren Austritt, weil sie bleibend, lebenslänglich invalid geworden sind. Die vorstehende Formel drückt dann aus, wie viel am Ende des Zeitraumes t oder des nächsten Jahres noch active oder nicht invalide Personen vorhanden sind, wie sich also die Gesellschaft durch den Tod und den Eintritt bleibender Invalidität lichtet.

Dividirt man Gl. (41) auf beiden Seiten durch a, so erhält man:

$$\frac{a_1}{a} = p - \frac{2p}{1+p} \cdot \frac{c}{a}$$

Nun giebt aber offenbar $c : a$ die Wahrscheinlichkeit an, im nächsten Jahre auszutreten, d. h. hier invalid zu werden und $a_1 : a$ ist die Wahrscheinlichkeit, am Jahresende noch der Gesellschaft anzugehören, also noch zu leben und nicht invalid zu sein.

Bezeichne ich nun die erstere Wahrscheinlichkeit mit q und die andere mit w, so folgt die einfache Formel:

$$w = p - \frac{2pq}{1+p} \tag{42}$$

Wäre also die Wahrscheinlichkeit q, im nächsten Jahre invalid zu werden, und die Wahrscheinlichkeit p, am Ende des Jahres überhaupt noch zu leben, bekannt, so fände sich hiernach aus Gl. (42) »die Wahrscheinlichkeit w am Ende des Jahres noch zu leben und nicht invalid zu sein«.

Von den Ausgetretenen, d. h. hier von den invalid Gewordenen, leben am Ende des Jahres noch a'' Personen, die wir nach Gl. (31) S. 119 berechnen können; dividiren wir diese Gleichung, nämlich:

$$a'' = \frac{2p}{1+p} \cdot c$$

wieder auf beiden Seiten durch a, so ergiebt uns der Ausdruck:

$$\frac{a''}{a} = \frac{2pq}{1+p} \tag{43}$$

für die m-jährige Person die Wahrscheinlichkeit, »im Laufe des nächsten Jahres invalid zu werden und am Ende des Jahres noch zu leben«. Unter Benutzung von Gl. (42) findet sich übrigens auch:

$$\frac{a''}{a} = p - w \tag{43$_a$}$$

Weiter ergab uns Gl. (33) S. 119 für die Anzahl α'' der Personen, die nach ihrem Austritte bis zum Ende der Zeit t sterben:

$$\alpha'' = c - a'' = \frac{1-p}{1+p} \cdot c$$

Dividirt man diese Gleichung durch a, so ergiebt unter Beachtung von Gl. (43) der Ausdruck:

$$\frac{\alpha''}{a} = q - \frac{2pq}{1+p} = \frac{1-p}{1+q}q \qquad (44)$$

»die Wahrscheinlichkeit des m-Jährigen, im Laufe des nächsten Jahres invalid zu werden **und** zu sterben«. Unter Benutzung von Gl. (42) schreibt sich übrigens vorstehende Formel einfacher auch, wie folgt:

$$\frac{\alpha''}{a} = w + q - p \qquad (44_a)$$

Ferner war die Anzahl der Sterbefälle, die in der Gesellschaft selbst beobachtet werden, nach Gl. (35), wenn wir wieder $b = o$ setzen:

$$\alpha = a(1-p) - \frac{1-p}{1+p} \cdot c$$

und hieraus folgt durch Division mit a:

$$\frac{\alpha}{a} = (1-p) - \frac{1-p}{1+p} \cdot q \qquad (45)$$

oder unter Benutzung vorstehender Formeln:

$$\frac{\alpha}{a} = 1 - w - q \qquad (45_a)$$

»für die Wahrscheinlichkeit des m-Jährigen, im nächsten Jahre in der Gesellschaft, d. h. nicht im Zustande bleibender Invalidität zu sterben«.

Endlich giebt, wie das ohne Weiteres klar ist, die Gl. (34) für den m-Jährigen die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre überhaupt, sei es im Zustande bleibender Invalidität oder nicht, zu sterben:

$$\frac{\alpha_0}{a} = 1 - p \qquad (46)$$

Man sieht also, dass uns die vorliegende Frage auf sieben verschiedene Wahrscheinlichkeitswerthe führt und dass in den gegebenen Formeln eine eigenthümliche Bereicherung der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten ist; wir haben es hier mit einer besondern Art von zusammengesetztem Ereigniss zu thun. In allen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung giebt man den Satz: »Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses A und q die für das Eintreffen des Ereignisses B, so stellt das Product pq die Wahrscheinlichkeit dar, dass beide Ereignisse zusammen eintreten«; man vergisst jedoch nicht, ausdrücklich hinzuzufügen, dass dieser Satz nur richtig ist, so lange beide Ereignisse unabhängig von einander sind, dass also nicht etwa der Eintritt des Ereignisses A den Eintritt des andern B unmöglich macht oder überhaupt beeinflusst; es ist mir aber kein Lehrbuch bekannt, in welchem ein Fall, bei dem diese Bedingung nicht erfüllt wird, näher behandelt worden wäre; unsere obige Untersuchung bietet nun ein Beispiel hierzu. Es wäre also ganz unrichtig, zu sagen: Ist für die m-jährige Person die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre zu sterben, $(1 - p)$, und q diejenige, invalid zu werden, so ist:

$$(1 - p)\, q$$

die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre invalid zu werden und zu sterben; denn diese beiden Ereignisse sind von einander in eigenthümlicher Art abhängig; man kann zwar erst invalid werden und dann sterben, aber das Umgekehrte hat keinen Sinn; der Eintritt des Todes hebt die Möglichkeit des Eintrittes der Invalidität auf. Ein Vergleich des vorstehenden fehlerhaften Ausdruckes mit Gl. (44) zeigt, dass derselbe die Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden und zu sterben, um mehr als das Doppelte zu gross ergiebt. Den hier angedeuteten Verstoss gegen die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung macht Heym in seinem Aufsatze »Ueber Invalidenpensionen« (a. a. O.), der ersten mathematischen Arbeit in dieser Richtung; die theoretischen Grundlagen zu dessen Berechnungen der Pensionen für Invalide sind daher als unrichtig zu bezeichnen. *)

Ganz abgesehen von der Hypothese, von der ich bei der Entwickelung vorstehender Formeln ausgegangen bin, kann man nun

---

*) S. auch: Heym. Die Kranken- und Invalidenversicherung. Leipzig 1863. Hinrich's Buchhandlung.

Genau derselbe Fehler findet sich auch in:

Wiegand. Versicherung gegen Erwerbsunfähigkeit. Halle 1865. In Commission bei H. Berner.

aber einen Einwand gegen dieselben insofern erheben, als ihnen die Annahme zu Grunde liegt, dass die Sterblichkeit unter den invaliden und den nicht invaliden, d. h. in der Gesellschaft zurückbleibenden, Personen dieselbe ist. Es wäre aber recht gut ausführbar gewesen, oben bei der Ableitung der allgemeinen Gleichungen, S. 101, die Sterblichkeit unter den Austretenden anders, also beispielsweise grösser anzunehmen, als unter den Zurückbleibenden, demnach dem bezeichneten Einwurf von vorn herein zu begegnen. Ich unterliess aber eine Erweiterung in dieser Richtung, weil vorläufig für die Praxis damit nichts gewonnen ist. Wir besitzen bis jetzt noch nicht einmal zuverlässige Sterblichkeitstafeln für verschiedene Stände überhaupt, geschweige denn Beobachtungen, wie es sich mit der Sterblichkeit von Invaliden verhält; es schien mir daher angemessen, eine gewisse mittlere Sterblichkeit, d. h. für beide Classen von Gesellschaftsmitgliedern dieselbe anzunehmen.

Ueber die Construction von Invaliditätstabellen.

Die vorstehenden Untersuchungen liefern uns das Mittel an die Hand, Invaliditätstabellen zu entwerfen; setzen wir voraus, es sei für jedes Alter m, $m + 1$, $m + 2$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, p_3 u. s. w. am Ende des nächsten Jahres noch zu leben gegeben, und es seien fernerhin für die gleichen Alter durch Beobachtung die Werthe der Wahrscheinlichkeiten q_1, q_2, q_3 u. s. w., im nächsten Jahre bleibend invalid zu werden, ermittelt, so erhielte man mittelst dieser Werthe, die in der 1. und 2. Columne der folgenden Zusammenstellung (a. f. S.) eingetragen sind, sofort mit Hülfe der obigen Formeln diejenigen Wahrscheinlichkeitswerthe, die in den übrigen Columnen angegeben sind und deren Bedeutung aus den Ueberschriften hervorgeht. Nur die letzte Columne 8, welche für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit angiebt, überhaupt in Zukunft invalid zu werden, d. h. einst im Zustande bleibender Invalidität zu sterben, erfordert noch einige Bemerkungen.

Für die m-jährige Person ist q_1 die Wahrscheinlichkeit, im nächsten, d. h. im ersten Jahre invalid zu werden. Für dieselbe Person ist die Wahrscheinlichkeit, am Ende des ersten Jahres noch activ zu sein, w_1, im zweiten Jahre invalid zu werden, q_2, also ist die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des zweiten Jahres erst invalid zu werden:

$$w_1 q_2.$$

Ebenso folgt für diese Person die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des dritten Jahres invalid zu werden:

$$w_1 w_2 q_3 \quad \text{u. s. f.}$$

Daher ist endlich die Wahrscheinlichkeit, im ersten, oder im zweiten, oder im dritten Jahre u. s. f., d. h. überhaupt in Zukunft vor dem Sterben noch bleibend invalid zu werden:

$$q_1 + w_1 q_2 + w_1 w_2 q_3 + w_1 w_2 w_3 q_4 + \ldots\ldots$$

Diese Summe, genommen bis zum Ende der Tabelle, giebt dann die Werthe der 8. Columne folgender Zusammenstellung:

Invaliditätstabelle.

Alter.	Werthe der Wahr-			
	1	2	3	4
	am Ende des Jahres noch zu leben:	im nächsten Jahre invalid zu werden:	am Ende des Jahres noch zu leben und nicht invalid zu sein:	am Ende des Jahres noch zu leben und invalid geworden zu sein:
	p	q	$w = p - \frac{2pq}{1+p}$	$p - w$
m	p_1	q_1	w_1	$p_1 - w_1$
$m+1$	p_2	q_2	w_2	$p_2 - w_2$
$m+2$	p_3	q_3	w_3	$p_3 - w_3$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Mit Hülfe der vorstehenden Tabelle liesse sich nun weiter eine Tabelle von folgender Form (Schema *b*) ableiten, aus der man unmittelbar, schon aus den ersten drei Columnen erkennen könnte, in welcher Weise eine Gesellschaft arbeits- und erwerbsfähiger Personen durch Tod und Invalidität gelichtet wird. Diese Columnen wären es auch vorzugsweise, die man bei der Berechnung von Ta-

Führen wir übrigens für die einzelnen, den Altern m, $m+1$, $m+2$ u. s. f. entsprechenden Werthe der Wahrscheinlichkeiten in Col. 8 die Bezeichnung W_1, W_2, W_3 ... ein, so erkennt man, dass folgende Beziehungen stattfinden:

$$W_2 = \frac{W_1 - q_1}{w_1}$$

$$W_3 = \frac{W_2 - q_2}{w_2} \quad \text{u. s. f.}$$

Ist also nur einmal der dem Alter m entsprechende Werth W_1 berechnet, so kann man von Jahr zu Jahr die folgenden Werthe W_2, W_3 ... bestimmen. Es leuchtet ein, dass man aber auch vom untern Ende der Tabelle beginnend, Werth nach Werth rückwärts berechnen kann.

Schema a.

scheinlichkeit:

5 im Laufe des nächsten Jahres überhaupt zu sterben: $1-p$	6 im Laufe des nächsten Jahres invalid zu werden und zu sterben: $w+q-p$	7 im nächsten Jahre zu sterben, ohne vorher bleibend invalid geworden zu sein: $1-w-q$	8 überhaupt in Zukunft noch invalid zu werden:
$1-p_1$	$w_1+q_1-p_1$	$1-w_1-q_1$	$q_1+w_1q_2+w_1w_2q_3+\ldots\ldots$
$1-p_2$	$w_2+q_2-p_2$	$1-w_2-q_2$	$q_2+w_2q_3+w_2w_3q_4+\ldots\ldots$
$1-p_3$	$w_3+q_3-p_3$	$1-w_3-q_3$	$q_3+w_3q_4+w_3w_4q_5+\ldots\ldots$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

rifen für Invaliden-Pensionscassen verwenden würde. Aus den letzten Columnen ginge dann weiter hervor, wie sich die Gestorbenen, bleibend invalide und nicht invalide, auf die verschiedenen Altersklassen vertheilen.

Uebrigens ist in diesem Tabellenschema (a. f. S.) unter M irgend eine ganze, grosse Zahl, z. B. 10000 verstanden, wobei man sich vor-

Invaliditätstabelle.

Alter.	1 Lebende überhaupt.	2 Nicht invalid Lebende.	3 Invalid Lebende.	4 Es werden im nächsten Jahre invalid.
m	M	M	0	Mq_1
$m+1$	Mp_1	Mw_1	$M(p_1-w_1)$	Mw_1q_2
$m+2$	Mp_1p_2	Mw_1w_2	$M(p_1p_2-w_1w_2)$	$Mw_1w_2q_3$
$m+3$	$Mp_1p_2p_3$	$Mw_1w_2w_3$	$M(p_1p_2p_3-w_1w_2w_3)$	$Mw_1w_2w_3q_4$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

stellt, M sei die Anzahl der Lebenden im Beginn des Altersjahres m, von dem an überhaupt erst vom Invalidwerden gesprochen werden kann, in welchem also erst der Eintritt in wirkliche Berufsthätigkeit stattfindet.

Columne 1 in Schema b ist aus Columne 1 in Schema a auf die Weise bestimmt, wie das schon in der ersten Abhandlung S. 3 u. 4 angedeutet wurde, und auf gleiche Weise gewinnt man die in Columne 2 angedeuteten Werthe mit Hülfe der Werthe der Columne 3 von Schema a. Die übrigen Columnen bedürfen keiner weitern Erläuterung; die Herleitung der angegebenen Werthe geht unmittelbar aus den Columnenüberschriften hervor.

Invaliditätstabellen der hier angedeuteten Art sind bis jetzt noch nicht bekannt; nur zwei Versuche liegen in dieser Richtung vor und zwar der schon erwähnte von Heym*) und ein anderer von Albert.**)

Heym setzt, wenn ich bei den Erläuterungen unser obiges Schema a zum Anhalten nehme, in Columne 1 die Werthe p der Wahrscheinlichkeit ein, die er seiner Mortalitätstabelle für das Königreich Sachsen (nebenbei bemerkt eine der besten Tabellen dieser Art, die existiren) entnommen hat; für die Werthe q der Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre invalid zu werden, geht er dagegen, weil ihm jedes Beobachtungsmaterial mangelt, von der willkührlichen Annahme aus, im 20. Lebensjahre

---

*) Masius. Rundschau etc. Ueber Invaliden-Pensionen. Bd. V (1855), S. 332; Bd. VI (1856), S. 49, und Bd. IX (1859), S. 109, 165, 265 und 335.

**) L. Albert. Hülfstafeln zur Berechnung der Invaliden-, Wittwen- und Waisenpensionen. Leipzig 1863.

Schema b.

5 Invalid Gewordene, überhaupt. (Successive Summen der Werthe von Col. 4.)	6 Invalid Gestorbene überhaupt. (Differenzen der Werthe der Col. 5 und 3.)	7 Es sterben im nächsten Jahre im Zustand der Invalidität. (Differenzen der Werthe von Col. 6.)
Mq_1	$M[q_1 - (p_1 - w_1)]$	$M[q_1 - (p_1 - w_1)]$
$M(q_1 + w_1 q_2)$	$M[q_1 + w_1 q_2 - (p_1 p_2 - w_1 w_2)]$	u. s. f.
$M(q_1 + w_1 q_2 + w_1 w_2 q_3)$	u. s. f.	
	.	
	.	

sei $q = 0{,}0001$ und im 79. Jahre $q = 1$ und setzt voraus, dieser Werth nehme vom erstern bis zum letztern Alter nach einer geometrischen Progression zu.

Bei einem Vergleiche der allgemeinen Resultate seiner Tabelle mit einigen Beobachtungen, die Hülsse aufführt und auf die wir zurückkommen, stellten sich ihm aber solche Abweichungen heraus, dass er sich in einem spätern Artikel (a. a. O. Bd. IX, p. 165) veranlasst sieht, den Werth von q für das 20. Altersjahr auf 0,00002 anzusetzen; die übrigen erwähnten Annahmen wurden dabei aufrecht erhalten. Endlich noch später (Bd. IX, p. 335) verlässt Heym alle frühern Annahmen und setzt die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre invalid zu werden, aus einem constanten und einem mit dem Alter wachsenden Theil zusammen und giebt zur Bestimmung von q eine Regel, die sich in folgende Formel fassen lässt:

$$\log._{10}(q - 0{,}001) = 0{,}0796456\, m - 6{,}2918810,$$

in welcher Formel m das Alter in Jahren und q die Wahrscheinlichkeit ist, im nächsten Jahre invalid zu werden. Man erhält hieraus, wie Heym direct angiebt:

$m = 20$;	$q = 0{,}00102$	$m = 50$;	$q = 0{,}00590$
30	0,00113	60	0,03168
40	0,00178	70	0,19298
		78	0,83345

Albert geht dagegen (a. a. O.) von derselben Voraussetzung aus, wie anfänglich Heym, setzt für das Alter $m = 20$ einmal $q = 0{,}0001$, ein anderes Mal $q = 0{,}00004$ und lässt die Wahrscheinlichkeit q

in geometrischer Progression wachsen bis $q = 1$, im ersten Falle bis zum Alter $m = 70$, im andern bis zum Alter von $m = 75$ Jahren.

Die Resultate, die auf solche Weise Heym und Albert gewinnen, erscheinen plausibel und für den Zweck, den sie einzig nur im Auge hatten, Berechnung von Tarifen für Pensionscassen, vielleicht annehmbar; immerhin ist sehr zu beklagen, dass bis jetzt von den Statistikern in dieser Richtung auch gar nichts geschehen ist, das erforderliche Material zu sammeln, obgleich es an vortrefflicher Gelegenheit hierzu nicht fehlt.

Wenn man Invaliditätstabellen gewinnen will, ist es zweckmässig, sein Augenmerk zunächst ausschliesslich einem bestimmten Stande zuzuwenden und hierzu eignet sich kein Stand besser, als der Bergmannsstand, der in grossen Bergwerksdistricten, wie sie z. B. in Preussen und Sachsen vorkommen, fast abgeschlossene Bevölkerungsmassen bildet, wo die Söhne mit wenig Ausnahmen wieder dem Berufe des Vaters folgen, da sie in diesem durchschnittlich armen Stande schon frühzeitig auf den Gruben beschäftigt werden. Die gefahrvolle und aufreibende Beschäftigung der anfahrenden Mannschaften, der regelmässige Wechsel von Tag- und Nachtarbeit, die ärmliche und dürftige Lebensweise u. A. m. muss zur Folge haben, dass in dieser Bevölkerungsklasse das Sterblichkeitsgesetz gegenüber dem, welches dem ganzen Lande entspricht, ein verändertes sein wird und dass dieser Stand zahlreiche Invaliden (Bergfertige) erzeugt. Für nähere Untersuchungen tritt nun gerade hier der günstige Umstand auf, dass seit Langem schon in den grossen Bergwerksdistricten Invaliden-, Wittwen- und Waisen-Pensionscassen, die sogenannten Knappschaftscassen, bestehen, deren Aufzeichnungen das vortrefflichste statistische Material liefern könnten, wenn die Bücher mit einiger Rücksicht darauf geführt würden.

Schon im Jahre 1853 habe ich den Versuch gemacht, eine Invaliditätstabelle für den Bergmannsstand zu entwerfen, als mir die Aufgabe zufiel, für die grosse Bergknappschaftscasse in Freiberg (Königreich Sachsen) einen Einnahmen- und Ausgaben-Etat zu entwerfen. In Ermangelung alles und jedes statistischen Materiales und weil die Bücher der Casse aller hierzu erforderlichen Notizen mangelten, blieb mir damals nichts anderes übrig, als zunächst die Sterblichkeit im Bergmannsstande auf Grund der Kirchenbücher Freibergs und aller umliegenden Ortschaften nach der alten, und heut zu Tage mit Recht als schlecht bezeichneten Methode von Halley festzustellen. Ein grösserer Auszug aus dieser Arbeit findet sich in der »Zeitschrift des statistischen Bureaus des königl. sächs. Ministeriums des Innern«, 9. Jahrgang, 1863. So wenig ich selbst dieser Arbeit einen eigentlich wissenschaftlichen Werth beilege, so enthält sie doch genug, um mit Bestimmtheit erkennen zu lassen, dass die Sterblichkeit unter den Bergleuten von der im ganzen Lande (Sachsen) geltenden wesentlich abweicht. Auffallend ist besonders die Anhäufung von Sterbefällen im Alter zwischen 50 bis 60 Jahren, in welchem Alter auch die meisten Invaliden entstehen, und überhaupt weicht die Art der Vertheilung der Sterbefälle auf die verschiedenen Altersklassen so bestimmt und entschieden von der ab, wie man sie sonst im ganzen Königreiche beobachtet, dass man beim Bergmannsstande Sachsens durchaus keinen Gebrauch von der vortrefflichen sächsischen Mortalitätstabelle Heym's machen könnte, wenn es sich um Berechnung der Tarife für die Knappschaftscasse handelt.

Damals nun habe ich auch, so weit es möglich war und mit grosser Mühe Notizen darüber gesammelt, in welchem Alter die Invaliden, welche bis zu ihrem Tode Pensionen bezogen, in den Zustand der Invalidität traten; zwar konnte ich dieses Alter nur bei 1317 Männern ermitteln, doch vertheilen sich diese so regelmässig auf die verschiedenen Altersklassen, dass ich zugleich unter Benutzung einiger Angaben vom Geh. Regierungsrath Hülsse*) den Versuch gemacht habe, die Invaliditätstabelle I_a und I_b, die sich im Anhange dieser Schrift befindet, zu entwerfen. Ich spreche ausdrücklich von einem Versuche, und dann gelten die Tabellen auch nur für den Freiberger Bergmannsstand; es lag mir nur daran, zu zeigen, wie eine Invaliditätstabelle nach wissenschaftlichen Grundsätzen sich gestalten wird und ferner daran, obige analytischen Darlegungen durch ein Zahlenbeispiel näher zu erläutern. Ich kann aber doch nicht unterlassen, zu bemerken, dass meiner Ansicht nach die Tabelle in auffallender Weise bestätigt, was man in Freiberg über die Vertheilung der Bergfertigen auf die verschiedenen Altersklassen und über den Eintritt der bleibenden Invalidität bisher im Allgemeinen angenommen und beobachtet hat.

*) Hülsse. Ueber die Einrichtung und Berechnung von Knappschafts- und ähnlichen Unterstützungscassen.
Programm der polytechnischen Schule in Dresden. 1859.

Einigen Werth besitzt die Tabelle daher doch vielleicht, wenigstens insofern, als ich noch einen Schritt weiter gegangen bin, als Heym, und statt willkührliche Annahmen zu machen, versucht habe, aus dem vorhandenen, freilich sehr dürftigen Material den Werth q der Wahrscheinlichkeit, invalid zu werden, zu berechnen.

Nach Dem, was schon oben über die Construction und den Bau von Invaliditätstabellen gesagt wurde, bedürfen die beiden Tabellen im Anhange dieses Buches kaum einer Erläuterung; nur über die Entstehung derselben sollen einige Andeutungen gegeben werden.

Als Grundlage für die Tabelle benutzte ich zuerst meine schon erwähnten Beobachtungen, nach denen ich von 1317 verstorbenen Invaliden (Bergfertigen) das Alter notirte, in welchem sie in den Genuss der bis zu ihrem Tode fortdauernden Pensionen traten, sie also bleibend invalid wurden. Columne 1 der folgenden Zusammenstellung enthält die Anzahl dieser invalid Gewordenen nach Altersklassen gruppirt, wie sie die Beobachtung ergab; die Bedeutung von Columne 2 wird erst aus dem Weitern folgen:

Altersclassen.	Anzahl der Männer, die im nebenstehenden Alter bleibend invalid wurden. 1. Nach der Beobachtung.	2. Nach Tabelle Ib, Col. 4.
18 bis mit 22 Jahren	7	5
23 » 27 »	12	11
28 » 32 »	16	17
33 » 37 »	29	30
38 » 42 »	55	61
43 » 47 »	122	124
48 » 52 »	196	202
53 » 57 »	293	283
58 » 62 »	281	270
63 » 67 »	191	188
68 » 72 »	87	92
73 » 77 »	25	31
78 » 82 »	3	3
Summen	1317	1317

Dass, der Beobachtung nach, der Eintritt der bleibenden Invalidität schon im 20. Altersjahre beginnt, darf nicht auffallen; der gefahrvolle Beruf des Bergmannes bringt es mit sich, dass auch junge Männer und diese zwar fast ausschliesslich durch Unfälle und Verunglückung in den Zustand der lebenslänglichen Invalidität übergeführt werden.

Ferner benutzte ich als weitere Grundlagen einige schon erwähnte Angaben von Hülsse.

Hülsse giebt (a. a. O.) für eine Reihe von Knappschaftscassen an, wie viel die Casse in einzelnen Jahrgängen Mitglieder zählte und wie viel Invaliden, auf 1000 Cassenmitglieder gerechnet, vorhanden waren. Folgendes giebt einen Auszug:

	Zahl der Cassenmitglieder:	Auf 1000 Cassenmitglieder kommen lebende Invaliden:
1) Bei sämmtlichen Cassen des Sächs. Regalbergbaues zusammen genommen		
im Mittel aus den 2 Jahren 1853—1855	12245	83
im Jahre 1856	12626	95
2) Im Freiberger Bergamtsrevier allein		
1853—1855	8135	81
im Jahre 1856	8355	98
3) Bei sämmtlichen Knappschaftscassen des Preuss. Staates, die unter Aufsicht der Bergbehörden stehen		
im Jahre 1852	38186	70
4) Bei der Saarbrücker Knappschaft		
im Jahre 1852	1906	93

Aus diesen Beobachtungen schliesse ich mit Hülsse, dass man auf 1000 Cassenmitglieder, d. h. nicht invalide Bergleute, ohngefähr 90 lebende Bergfertige oder Invaliden rechnen kann.

Endlich musste ich mich bei der Construction der Invaliditätstabelle I_a und I_b für eine bestimmte Mortalitätstabelle entschliessen. Zuerst entwarf ich diese Tafeln unter Zugrundelegung der Heym-schen Tabelle, musste mich aber bald überzeugen, dass es hierbei ganz unmöglich war, den vorstehenden Beobachtungsresultaten Rechnung zu tragen und zwar desswegen, weil im Freiberger Bergmannsstande die Sterblichkeit nicht blos eine grössere ist, als sie die Heym'sche Tabelle für das ganze Königreich Sachsen angiebt, sondern auch, weil entschieden das Sterblichkeitsgesetz in diesem Stande ein verändertes ist.

Es blieb mir daher nichts anderes übrig, als die Mortalitätstabelle herbeizuziehen, die ich nach der verwerflichen Halley'schen Methode für diesen Stand s. Z. besonders angefertigt hatte. Ich kann dieses nur dadurch rechtfertigen, dass es hier nur, wie schon erwähnt, darauf ankommt, zu zeigen, wie sich eine nach richtigen Grundsätzen entworfene Invaliditätstabelle der Form und Anordnung nach gestaltet und um als Beispiel doch auch eine Tabelle zu geben, die wenigstens im Allgemeinen die obigen Beobachtungsresultate wieder giebt.

Die Col. 1 in Tab. I_a und I_b giebt diese Mortalitätstabelle. Das Hauptziel war nun die Bestimmung der Werthe von q der Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre invalid zu werden, wie sie Col. 2 in I_a angiebt und ferner wie sich die Lebenden überhaupt dem Alter nach in invalide und nicht invalide Männer trennen (Col. 2 und 3, I_b).

Der Gang meiner Schlüsse und Rechnungen war nun folgender:

Ich nahm an, dass die Bergleute, die nach meinen Beobachtungen (in Col. 1 obiger Zusammenstellung, S. 140) in den Zustand bleibender Invalidität übergingen, sämmtlich im gleichen Jahre invalid geworden seien und dass daher die Werthe dieser Columne andeuten, wie sich die im nächsten Jahre invalid Werdenden dem Alter nach vertheilen. Auf graphischem Wege vertheilte ich aber erst diese Invaliden auf die einzelnen Altersjahre und erhielt dadurch eine Zahlenreihe (Proportionalzahlen), ähnlich wie die in Col. 4, Tab. I_b, angegebene. Ich bekam also zuerst eine Tabelle von folgender Form:

Alter:	Es werden im nächsten Jahre invalid:
$m = 20$	$n_1 = 10$
$m + 1 = 21$	$n_2 = 12$
$m + 2 = 22$	$n_3 = 13$
. .	. .
. .	. .
. .	. .

Diese aus der graphischen Darstellung hervorgegangenen Proportionalzahlen n_1, n_2, n_3 etc. mussten nun, um die richtigen Werthe der Col. 4, I_b, zu erhalten, sämmtlich mit einem gewissen Coefficienten (Reductionsfactor) φ multiplicirt werden, dessen Bestimmung mir, wie sich gleich zeigen wird, die Hülsse'schen Angaben ermöglichten.

Ist (m) die Anzahl der Lebenden überhaupt vom Alter m nach der Mortalitätstafel und bezeichnet $(m)_a$ die Anzahl derer, die davon noch in Activität sind und $(m)_i$ die Anzahl der lebenden Invaliden dieses Alters, so bestimmt sich die Anzahl $(m + 1)_i$ der lebenden Invaliden vom Alter $m + 1$ in folgender Art:

Die Wahrscheinlichkeit q_1 des m-jährigen nicht invaliden Bergmannes, im nächsten Jahre invalid zu werden, ist nach vorstehenden Bemerkungen:

$$q_1 = \frac{n_1 \varphi}{(m)_a}$$

für den $m + 1$-Jährigen folgt:

$$q_2 = \frac{n_2 \varphi}{(m + 1)_a} \quad \text{u. s. f.}$$

Von den $(m)_i$ invalid lebenden Männern leben am Ende des Jahres noch $(m)_i p_1$.

Ferner ist nach frühern Sätzen die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre invalid zu werden und am Ende noch zu leben:

$$\frac{2 p_1 q_1}{1 + p_1}$$

also leben von den anfänglich $(m)_a$ activen Personen am Ende des Jahres als Invaliden:

$$\frac{2 p_1 q_1}{1 + p_1} (m)_a$$

Die ganze Anzahl von Invaliden im Alter $m + 1$ ist daher:

$$(m + 1)_i = (m)_i p + \frac{2 p_1 q_1}{1 + p_1} (m)_a$$

oder wenn man obigen Werth von q_1 benutzt:

$$(m + 1)_i = (m)_i p_1 + \frac{2 p_1 n_1}{1 + p_1} \varphi$$

Auf gleichem Wege findet sich die Anzahl der lebenden Invaliden vom Alter $m + 2$:

$$(m+2)_i = (m+1)_i q_2 + \frac{2p_2 n_2}{1+p_2}\varphi$$

Die Anzahl Derjenigen vom Alter $m+3$:

$$(m+3)_i = (m+2)_i p_3 + \frac{2p_3 n_3}{1+p_3}\varphi \quad \text{u. s. f.}$$

Ist nun m das Alter, in dem das Invalidwerden überhaupt erst beginnt (in unserer Tabelle ist $m = 20$), so ist $(m)_i = o$; setze ich überdiess allgemein:

$$\frac{2pn}{1+p} = k$$

welcher Werth sich nach der angenommenen Mortalitätstafel und unter Zugrundelegung der oben erwähnten Proportionalzahlen n_1, n_2 etc. für jedes Altersjahr berechnen lässt, so erhält man:

$$\begin{aligned} (m+1)_i &= k_1\varphi \\ (m+2)_i &= (m+1)_i p_2 + k_2\varphi \\ (m+3)_i &= (m+2)_i p_3 + k_3\varphi \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

oder auch, wenn ich jeden einzelnen Ausdruck im nachfolgenden benutze, die invalid Lebenden in den einzelnen Altersjahren unter gleichzeitiger Angabe der ersten durch Rechnung erhaltenen Zahlenwerthe:

$$\begin{array}{ll} (m+1)_i = k_1\varphi & (21)_i = 9{,}9499\,.\,\varphi \\ (m+2)_i = (k_1 p_2 + k_2)\varphi & (22)_i = 21{,}7887\,.\,\varphi \\ (m+3)_i = ((k_1 p_1 + k_2) p_3 + k_3)\varphi & (23)_i = 34{,}5001\,.\,\varphi \\ \qquad\text{u. s. f.} & \qquad\text{u. s. f.} \end{array}$$

Diese angedeutete Zahlenreihe bis zum Ende der Mortalitätstabelle berechnet und addirt, lieferte mir dann als Anzahl aller invalid Lebenden:

$$100748\,.\,\varphi$$

Die Summe der Lebenden überhaupt findet sich dagegen durch Addition aller Werthe der Col. 1 der Tab. I_b:

328090.

Die Summe aller in Activität Lebenden ist daher:

$$328090 - 100748\,.\,\varphi.$$

Diese Summe verhält sich zu der Zahl der invalid Lebenden nach Hülsse's Angaben, wie 1000 zu 90; man erhält also zur Bestimmung des Reductionsfactors φ die Proportion:

$$\frac{328090 - 100748\,\varphi}{100748\,\varphi} = \frac{1000}{90}$$

und hieraus folgt $\varphi = 0{,}2931$, wofür ich aber schliesslich in den Rechnungen den Werth $\varphi = 0{,}2608$ adoptirte, um gleichzeitig der Voraussetzung zu genügen, dass vom 80. Altersjahre an sämmtliche noch lebende Männer invalid seien.

Die vorhin angedeutete Zahlenreihe n_1, n_2 etc. mit diesem Werthe von φ multiplicirt, lieferte mir nun die Col. 4 der Tab. I_b, und ebenso die vorhin angedeutete Reihe von Proportionalzahlen für die invalid Lebenden lieferte unter Benutzung von φ die Col. 3 der Tab. I_b.

Die Differenzen der in der gleichen Zeile stehenden Werthe von Col. 1 und 3, Tab. I_b, ergab dann in Col. 2 für jedes Alter die in Activität lebenden Männer und diese Columne zeigt nun, wie sich die Gesellschaft in Folge des Absterbens und des Eintrittes der Invalidität allmälig lichtet. Aus den am Schlusse der Tabelle angegebenen Summen der drei Columnen 1, 2 und 3 ist zu schliessen unter der Voraussetzung, dass diese bergmännische Bevölkerung im Beharrungszustande und nach dem Alter so zusammengesetzt wäre, wie die Tabelle giebt, dass auf 1000 nicht invalide Bergleute 87 Bergfertige zu rechnen sind, was immer noch gut genug mit Hülsse's Angaben stimmt. (Die Abweichung von der ersten Annahme von 90 Bergfertigen erklärt sich aus der vorhin angegebenen Aenderung des Reductionsfaktors φ.)

Nach Col. 3, I_b, stehen die meisten lebenden Invaliden im Alter von 60 bis 65 Jahren, das mittlere Alter aller Invaliden zusammengenommen berechnet sich zu:

58,75 Jahren.

Was die Werthe der Col. 4 betrifft, die angeben wie viel von jedem Altersjahre im nächsten Jahre invalid werden, so beträgt deren Summe 2607; fasse ich die einzelnen Werthe nach denjenigen Altersgruppen zusammen, die in der kleinen Tafel auf S. 140 angegeben sind und reducire ich die Werthe auf die Summe 1317, so erhalte ich die Zahlenwerthe der Col. 2 dieser kleinen Tafel, welche wiederum recht gut mit meinen Beobachtungen (Col. 1) harmoniren.

Aus Col. 4, Tab. I_b, ersieht man weiter, dass die meisten Bergleute in der Mitte der fünfziger Jahre invalid werden; das mittlere Alter für den Eintritt der Invalidität berechnet sich aus den Werthen dieser Columne zu 55,49 Jahren:

Dieses Resultat stimmt wieder vortrefflich mit der Angabe von Hülsse, dass bei der Saarbrücker Knappschaft im 12jährigen Durchschnitt, das Alter, in welchem die Mitglieder invalid wurden, 55,36 Jahre betragen habe. Ein anderes Resultat (derselben Knappschaftscasse allerdings entnommen) stimmt aber weniger gut mit unserer Tabelle; doch ist es eine Beobachtung, deren Abweichung sich erklären liesse. Nach der Tabelle müssten, den Beharrungszustand vorausgesetzt, von 301819 activen Bergleuten jährlich 2607 invalid werden und ebenso viele Invalide sterben; das würde also auf 1000 Männer 8,64 solche Invalide geben, während nach Hülsse bei der Saarbrücker Knappschaft von 1000 Mitgliedern jährlich 16,08 in den Zustand der Invalidität traten und auf 1000 Mitglieder jährlich 15,45 Invaliden starben. Ich bin geneigt, diese Beobachtungswerthe wirklich als zu gross anzusehen und es fragt sich, ob unter den invalid Gewordenen nicht auch blos temporär invalide Personen mitgezählt wurden, während andererseits die zahlreichen Todesfälle unter den Invaliden wohl auf eine grössere Sterblichkeit derselben hindeuten. Es ist zu bedauern, dass nicht gerade aus Freiberg solche Beobachtungen vorliegen; denn die Zahlenwerthe, die für die Saarbrücker Knappschaft gefunden worden sind, fussen doch auf zu geringer Zahl von Beobachtungen.

Was weiter die Col. 5, 6 und 7 betrifft, so genügen für deren Erläuterung die Columnenüberschriften; aus Col. 7 geht hervor, dass in der Mitte der sechziger Jahre die meisten Invaliden sterben; das mittlere Alter der sterbenden Invaliden berechnet sich aus den Werthen dieser Columne zu:

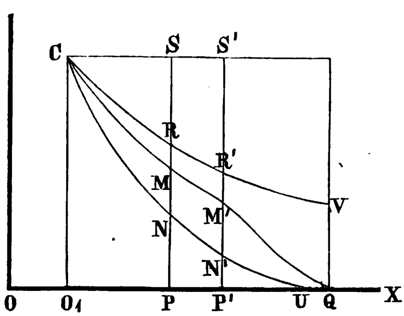
66,57 Jahren.

Ich komme nun endlich zum wichtigsten Resultate der Tabellen. Dividirt man die Werthe der Col. 4, Tab. I_b, durch die auf derselben Zeile stehenden Werthe der Col. 2, so erhält man für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit q, im nächsten Jahre invalid zu werden, wie sie in Col. 2, Tab. I_a, angegeben sind. Dass die erhaltenen Werthe ganz bedeutend von denen abweichen, die Heym angiebt (s. S. 137), wird wohl nicht gegen dieselben sprechen, da dessen Werthe aus willkührlichen Annahmen hervorgegangen sind. Die Werthe der übrigen Col. 3 — 6 der Tab. I_a bedürfen nach dem früher Gesagten keiner weitern Erläuterung; bemerken will ich nur, dass die zahlreichen Decimalstellen, mit welchen die einzelnen Werthe notirt sind, nicht etwa eine denselben entsprechende Genauigkeit andeuten sollte, vielmehr sollte dadurch nur die Regelmässigkeit und Gesetzmässigkeit der einzelnen Zahlenreihen aufrecht erhalten werden. Die Tabellen sind übrigens sämmtlich mit Hülfe des Thomas'schen Arithmometers berechnet.

Von Interesse sind unter den Zahlenwerthen der einzelnen Columnen der Tab. I_a die Werthe von Col. 6, welche für die verschiedenen Alter die Wahrscheinlichkeit angeben, in Zukunft überhaupt invalid zu werden. Die Werthe nehmen regelmässig von 0,2607 bis 1 zu; erst vom Alter von 66 Jahren an ist der Wahrscheinlichkeitswerth grösser als 0,5; bis dahin ist es also, dem gewöhnlichen Sprachgebrauch gemäss, nicht wahrscheinlich, im Zustande bleibender Invalidität zu sterben.

Der Vollständigkeit wegen und weil es nun einmal bei Aufführung von Mortalitätstafeln heute noch Gebrauch ist, habe ich auf Tab. I_b, Col. 8, noch die mittlere Lebenserwartung angegeben und in Col. 9 auf ähnlichem Wege berechnet, die mittlere Activitätserwartung beigefügt.

Fig. 25.



Trage ich in Fig. 25 als Abscissen OP die Alter in Jahren und als Ordinaten PM die Anzahl der Lebenden überhaupt nach Col. 1, Tab. I_b, auf, so ergiebt sich die Mortalitätscurve CMQ, welche deutlich übersehen lässt, wie eine Gesellschaft gleichalter Personen durch den Tod gelichtet wird; die Anfangsordinate O_1C repräsentirt die sämmtlichen Lebenden im Anfange; nach dem Gesagten folgt daher sogleich, dass die Strecke MS die Anzahl derjenigen darstellt, welche innerhalb der Zeit O_1P gestorben sind.

Entspricht der Punkt P dem Alter m, ist ferner $MP = (m)$ die Anzahl der Lebenden dieses Alters, und soll der Punkt Q dem höchsten Alter, d. h. dem Alter der zuletzt Sterbenden entsprechen, so ergiebt, wie sich leicht begreift, die Fläche MQP, die abgerechnet von der Ordinate MP von der Mortalitätscurve umschlossen wird, die Zeit in Jahren gerechnet, welche von sämmtlichen (m) Lebenden zusammen noch durchlebt wird; denkt man sich diese Zeit gleichmässig auf die (m) anfangs lebenden Personen vertheilt, so erhält man für das betreffende Alter m die mittlere Lebenserwartung. Die einzelnen Flächenstreifen der Fläche MQP lassen sich aber näherungsweise als Paralleltrapeze ansehen und daher schreibt sich der ganze Flächeninhalt in Anwendung der aus bisherigen Angaben bekannten Bezeichnung:

$$\frac{(m) + (m+1)}{2} + \frac{(m+1) + (m+2)}{2} + \ldots\ldots$$

oder es findet sich durch Division mit (m) und etwas veränderter Schreibweise die mittlere Lebenserwartung:

$$\frac{1}{2} + \frac{(m+1) + (m+2) + (m+3) + \ldots \text{ bis Ende der Tafel.}}{(m)}$$

Nun kann man sich weiter in Fig. 25 für jedes Alter auch die Anzahl der in Activität lebenden, also der nicht invalid lebenden Personen als Ordinate PN aufgetragen denken; man erhält dann die Curve CNU, die jetzt ein deutliches Bild darüber giebt, wie sich die Gesellschaft durch Tod und Eintritt bleibender Invalidität lichtet. Bezeichnet man mit $(m)_a$ die Anzahl der Personen vom Alter m, die noch in Activität sind (Col. 2, Tab. I_b), so erhält man analog dem Vorigen die mittlere Activitätserwartung:

$$\frac{1}{2} + \frac{(m+1)_a + (m+2)_a + \ldots \text{ bis Ende der Tafel.}}{(m)_a}$$

die in der Fig. 25 auch gegeben ist durch den Inhalt der Fläche PNU dividirt durch NP.

Nach vorstehenden beiden Ausdrücken sind die Werthe der Col. 8 und 9, Tab. I_b, mittelst der Col. 1 und 2 berechnet.

Die Strecke MN (Fig. 25) bedeutet nach dem Gegebenen die Anzahl der invalid Lebenden vom Alter m; der gegenseitige Verlauf der beiden Curven giebt also ein Bild, wie sich die invalid Lebenden auf die einzelnen Altersjahre vertheilen.

Endlich kann man noch von der Mortalitätscurve abgerechnet für jedes Alter die Werthe der Col. 6, Tab. I_b, durch die Strecken MR sich aufgetragen denken, wodurch eine dritte Curve CRV entsteht, welche die Verstorbenen in zwei Gruppen trennt.

Die Strecken MR geben die Anzahl derjenigen, die bis zum Alter $OP = m$ als Invaliden starben und die Strecken RS die, welche nicht im Zustande bleibender Invalidität gestorben sind.

Unter Zugrundelegung der Col. 2, 3 und 4 der Tab. I_b könnte ich nun schliesslich ohne Weiteres Tarife für eine Invalidenpensionscasse berechnen; ganz abgesehen aber davon, dass ich in vorliegenden Abhandlungen auf spezielle Fragen des Versicherungswesens überhaupt nicht eingehen will, möchte ich auch nicht wagen, von der vorliegenden Invaliditätstabelle einen so ausgedehnten Gebrauch zu machen. Ich wiederhole die frühere Bemerkung, dass ich nur die oben gegebenen allgemeinen Sätze durch ein numerisches Beispiel erläutern und an diesem zeigen wollte, welche Menge von Fragen hinsichtlich des Eintrittes bleibender Invalidität in gewissen Berufszweigen sich beantworten liessen, wenn nur das entsprechende statistische Material vorliegen würde.

Ueber die Construction von Heirathstabellen.

Als besonderes Beispiel und um die Vielseitigkeit der obigen Wahrscheinlichkeitsformeln zu zeigen, habe ich nach denselben noch die im Anhange befindliche Heirathstabelle berechnet. Wittstein *) hat zwar unter Benutzung seiner Näherungsformeln (siehe obige Gl. 20_b, S. 108) mit denselben Grundlagen schon eine ähnliche Tabelle berechnet, doch lässt sich, wie meine Tafel zeigt, die Sache viel weiter verfolgen, als es von Wittstein geschehen ist.

Denkt man sich eine grosse Anzahl unverheiratheter Mädchen sämmtlich von gleichem Alter, so wird sich ihre Zahl durch Hei-

*) Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Bd. XXXIX.

rathen und Todesfälle von Jahr zu Jahr vermindern. Das Gesetz, nach welchem diese Gesellschaft sich auf solche Weise lichtet, lässt sich nun leicht ermitteln, wenn man für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit p kennt, am Ende des Jahres noch zu leben und ebenso die Wahrscheinlichkeit q, im Laufe des nächsten Jahres zu heirathen.

Tab. II_a, Col. 1, giebt zunächst für die verschiedenen Altersjahre die Wahrscheinlichkeitswerthe p, die Brune für das weibliche Geschlecht aus den Beobachtungen an der allgemeinen Wittwenverpflegungsanstalt in Berlin (1776 — 1845) abgeleitet hat.

In Col. 2 ist dann für Mädchen jedes Alters die Wahrscheinlichkeit q angegeben, im nächsten Jahre zu heirathen, entnommen der Berliner Börsenzeitung vom 17. April 1862 (Abendausgabe); da aber die dort angegebene Tabelle mit dem Alter von 50 Jahren abbricht, so habe ich, unter der Annahme, dass vom 60. Altersjahre an für eine Jungfrau jede Aussicht, noch zu heirathen, als erloschen zu betrachten ist, die Wahrscheinlichkeitswerthe q bis zu dem Alter von 60 Jahren noch beigefügt. Diese Werthe sind nicht beobachtet, sondern, allerdings auf ziemlich willkührliche Weise dadurch ermittelt worden, dass ich nach der angegebenen Tabelle *) die Wahrscheinlichkeitscurve zeichnete und die Curve so weit verlängerte, bis sie sich beim Alter von 60 Jahren an die Abscissenaxe anlegte.

Mit Hülfe der Werthe der Col. 1 und 2, Tab. II_a, sind alle übrigen Columnen von Tab. II_a und II_b berechnet; über den Gang der Rechnungen selbst klären nicht nur die Ueberschriften auf, sondern es müsste bei einer nähern Erläuterung auch nur alles wiederholt werden, was schon bei der Construction der Invaliditätstabellen gesagt worden ist. Das Tabellenschema auf S. 134 u. 136 gilt ohne Weiteres auch für Heirathstabellen; man hat dort nur die Worte »invalid zu werden oder geworden zu sein« zu ersetzen durch »heirathen oder geheirathet zu haben« und ebenso die Worte »invalid und nicht invalid Lebende und Gestorbene« durch die Worte »verheirathet und unverheirathet Lebende und Gestorbene«.

---

*) Es ist mir nicht möglich gewesen, zu erfahren, von wem diese Tabelle der Berliner Börsenzeitung herrührt; nach dem der Tabelle dort beigefügten Text muss man annehmen, dass dieselbe dem Plane ihre Entstehung verdankt, in Anhalt-Dessau eine Pensionscasse für unverheirathete Beamtentöchter zu gründen.

Eine aufmerksame Betrachtung der Tabelle führt zu manchem recht interessanten Ergebniss; hier aber mögen nur einige kurze Andeutungen genügen. So zeigt sich, dass für das Alter von 26 Jahren die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre zu sterben, ein Minimum ist, weil diejenige, am Ende des Jahres noch zu leben, ein Maximum ist; für dasselbe Alter ist aber auch die Wahrscheinlichkeit, binnen Jahresfrist zu heirathen, ein Maximum, und die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre unverheirathet zu sterben, ein Minimum, natürlich immer vorausgesetzt, dass Wittwen als Verheirathete gezählt werden.

Für unsere Frauen und Mädchen wäre, wenn sich dieselben dem Studium der Wahrscheinlichkeitsrechnung hingeben würden, Col. 7, Tab. II_a, vielleicht von besonderm Interesse:

Im Alter von 20 Jahren ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt in Zukunft zu heirathen, am grössten; vom 16. Jahre an gerechnet nimmt dieselbe bis dahin zu; im Alter von 16 Jahren ist der Werth der Wahrscheinlichkeit 0,740, d. h. von 1000 Mädchen heirathen überhaupt nur 740, die andern sterben unverheirathet. Vom Alter von 20 Jahren an nimmt aber die Wahrscheinlichkeit, zu heirathen ab und sinkt im Alter zwischen 31 und 32 Jahren unter 0,5; von da an ist also die Wahrscheinlichkeit, unverheirathet zu sterben, grösser als diejenige, noch zu heirathen. Wittstein, der (a. a. O.) dieselbe Columne berechnet und Zahlenwerthe giebt, die wenig von den unsrigen abweichen, macht den Scherz, dass damit die »alte Jungfer« mathematisch scharf definirt sei.

Für Renten- und Versicherungsrechnungen könnte unter Umständen Tab. II_b einen praktischen Werth gewinnen; man könnte sie anwenden, um Prämientarife für wirkliche Aussteuerversicherungen oder Renten für unverheirathet bleibende Mädchen zu berechnen; freilich hätte man sich hier vorerst zu fragen, ob nicht die Gründung derartiger grösserer Cassen einen gewissen Einfluss rückwärts auf die angenommenen und beobachteten Wahrscheinlichkeitswerthe q ausüben würde.

Hinsichtlich der Tab. II_b sei nur bemerkt, dass nach Col. 3 die meisten verheiratheten Frauen im Alter von 39 Jahren leben; von da an erst überwiegt die Anzahl der Sterbenden den Zuwachs durch neu Verheirathete; die einzelnen Werthe der betreffenden Columnen liessen sich ferner in derselben Weise graphisch vor Augen führen, wie das mit Fig. 25, S. 147, hinsichtlich der Invaliditätstabellen gezeigt wurde und endlich hätten die Col. 1, 2, 3, sowie 7 und 8 nach Brune's Tafel noch bis zum höchsten Alter der Mortalitätstafel fortgeführt werden können; ich habe aber unterlassen, die Werthe aufzuführen; es mag nur erwähnt werden, dass die Summen aller Zahlenwerthe von Col. 2 und 3 sich resp. zu 148277 und 261719 herausstellte; dürften wir die Tabelle auf eine bestimmte Bevölkerung beziehen und dort den Beharrungszustand voraussetzen, so würde sich also die Zahl der Verheiratheten zu der Anzahl der unverheiratheten (heirathsfähigen) Mädchen wie 1000 zu 566 verhalten, während in jedem Jahre auf 1000 verheirathet Gestorbene 351 Unverheirathete (Heirathsfähige) zu rechnen wären.

Nach der Volkszählung vom Jahre 1864 waren z. B. in den preussischen Staaten vorhanden 1820638 unverheirathete (niemals verheirathet gewesene) weibliche Personen über 16 Jahre alt, *) während die Anzahl der Verheiratheten, Wittwen und Geschiedenen 3910635 betrug; das Verhältniss der letztern zur erstern Zahl ist 1000 : 465; dagegen war im Jahre 1864 das Verhältniss unter den Verstorbenen derselben Kategorie 92890 : 23421 oder 1000 : 252. Die Abweichungen von den Resultaten unserer Tabelle sind nicht unbedeutend, doch erklären sich die Unterschiede leicht, ohne dass man die Richtigkeit der Zahlenwerthe q in Col. 2 der Tab. II_a desswegen anzuzweifeln braucht.

Wäre übrigens unsere Tabelle aus den Beobachtungen in einem grossen Lande, wie den preuss. Staaten, hervorgegangen, so lohnte es sich der Mühe, dieselbe auch noch nach anderer Richtung hin zu vervollständigen. Man könnte nämlich auch für jedes Alter der Heirathenden die Wahrscheinlichkeiten ermitteln, innerhalb einer gewissen Zeit, z. B. des nächsten Jahres, Wittwe zu werden oder die Wahrscheinlichkeit, einst als Wittwe zu sterben oder nicht u. s. f. Da Fragen solcher Art bis jetzt nie berührt wurden und selbst, wenigstens meines Wissens nach, in der betreffenden Richtung von statistischen Beobachtungen durchaus nichts vorliegt, so mögen hier noch einige Bemerkungen folgen.

Ist bei einem Ehepaare das Alter von Mann und Frau bekannt, so lässt sich nach den Mortalitätstafeln in bekannter Weise die

---

*) Zeitschrift des königl. preuss. statist. Bureau's. VI. Jahrg. 1866. S. 90.

Wahrscheinlichkeit ermitteln, dass nach Verfluss einer gewissen Zeit beide noch leben, oder beide gestorben sind, oder dass nur der Mann oder nur die Frau gestorben ist. Ist p die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau nach einer gewissen Zeit noch lebt und p_1 derselbe Wahrscheinlichkeitswerth für den Mann, so ist z. B.

$$p\,(1 - p_1)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende der angenommenen Zeit der Mann gestorben ist, die Frau aber noch lebt, also als Wittwe noch am Leben ist.

Betrachten wir nun die Zahlenwerthe der Col. 4 der Tab. II_b, so könnte die Frage aufgeworfen werden, wie viel von diesen heirathenden Mädchen am Ende eines gewissen Zeitraumes, z. B. eines Jahres, als Wittwen noch am Leben sind. Diese Frage erscheint auf den ersten Moment unlösbar, weil man nach den Angaben dieser Columne zwar das Alter der heirathenden Frauen, aber nicht das Alter ihrer Männer kennt. Der gesuchte Wahrscheinlichkeitswerth liesse sich aber doch ermitteln, wenn statistische Erhebungen über alle möglichen Altersdifferenzen zwischen Mann und Frau zahlreicher Ehepaare vorliegen würden; man erhielte auf solche Weise die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem gewissen Ehepaare eine gegebene Altersdifferenz vorliegt und auf diese Art das Mittel, die vorgelegte Frage zu beantworten.

Da statistische Erhebungen der bezeichneten Art nicht vorliegen, wenigstens nicht veröffentlicht worden sind, so habe ich mir selbst bei Anlass von Untersuchungen von Wittwenpensionscassen (hier in der Schweiz) einiges Material gesammelt, indem ich von, allerdings nur 552 Ehepaaren (zum grössern Theil aus dem Lehrerstande), die Alter von Mann und Frau notirte. Obgleich die Anzahl der Beobachtungen durchaus ungenügend ist, um das Gesetz damit als festgestellt ansehen zu dürfen, so erhält man doch durch die folgende Zusammenstellung einigermassen einen Einblick in die Sache. Die angegebenen Altersdifferenzen sind als positiv bezeichnet bei denjenigen Paaren, bei denen der Mann älter, als die Frau ist und als negativ im umgekehrten Fall:

Altersdifferenz	Mittel der Altersdifferenz.	Beobachtete Anzahl der Ehepaare.	Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen der angegebenen mittlern Altersdifferenz:
+ 22 bis + 18	+ 20	7	0.01268
+ 17 bis + 13	+ 15	25	0.04529
+ 12 bis + 8	+ 10	75	0.13587
+ 7 bis + 3	+ 5	173	0.31341
+ 2 bis — 2	0	174	0.31522
— 3 bis — 7	— 5	79	0.14312
— 8 bis — 12	— 10	15	0.02715
— 13 bis — 17	— 15	4	0.00726
		Summe 552	

Würde man die Altersdifferenzen (Mittel) als Abscissen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerthe als Ordinaten auftragen, so erhielte man die entsprechende Wahrscheinlichkeitscurve, die zwischen den Abscissenwerthen 0 und + 5 ein Maximum der Ordinate zeigt und nach beiden Seiten derselben rasch gegen die Abscissenaxe abfällt.

Wäre nun das Alter einer verheiratheten Frau bekannt, so ist für dieselbe die Wahrscheinlichkeit p, nach einer gewissen Zeit, allgemein nach t Jahren noch zu leben, nach der Mortalitätstafel gegeben. Für jede mögliche Altersdifferenz ist nun auch das Alter des Mannes bekannt und damit ist weiter nach der Mortalitätstafel für das männliche Geschlecht (z. B. nach Brune's Tafel) für jedes Alter die Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, p_3 u. s. f. gegeben, nach t Jahren noch zu leben. Bezeichnen wir nun noch die Wahrscheinlichkeitswerthe für das Eintreffen der angenommenen Altersdifferenzen mit v_1, v_2, v_3 (letzte Columne obiger Zusammenstellung), so findet sich nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für diese verheirathete Frau von angenommenem Alter die Wahrscheinlichkeit, nach t Jahren als Wittwe noch am Leben zu sein:

$$p\,[(1 - p_1)\,v_1 + (1 - p_2)\,v_2 + (1 - p_3)\,v_3 + \ldots\ldots]$$

Dagegen die Wahrscheinlichkeit, mit ihrem Manne noch zusammen zu leben:

$$p\,[p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \ldots\ldots]$$

u. s. f. Mit Hülfe obiger Tabelle und der Mortalitätstafel von Brune liesse sich das Vorstehende leicht durch ein Zahlenbeispiel erläutern; doch glaube ich auch ohne ein solches meinen Zweck erreicht zu haben, nämlich zu zeigen, welche Menge von Fragen, die sich an die Tab. II knüpfen, noch gestellt und beantwortet werden könnten. Vielleicht habe ich auch den zuletzt angedeuteten Fall schon zu eingehend behandelt.

Allgemeine Darlegung der Sätze über Invalidität.

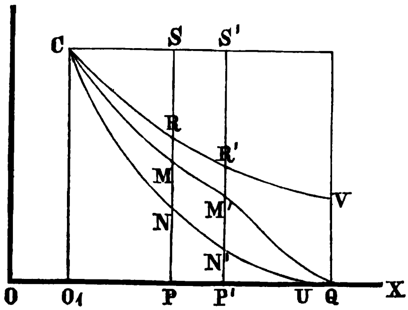
In den vorstehenden Untersuchungen wurden Lebende und Gestorbene nach Invaliden und Nichtinvaliden oder nach Verheiratheten und Unverheiratheten unterschieden; natürlich könnte man sich die Lebenden und Gestorbenen auch nach andern zwei Richtungen geschieden denken, ohne dass damit die abgeleiteten Sätze in ihrer mathematischen Form Aenderungen erleiden würden. Bei allen Darlegungen ging ich aber von der Voraussetzung aus, dass es sich darum handle, statistisches Material zu verwerthen, welches in geschlossenen Gesellschaften zu gewinnen wäre; es liessen sich aber die Untersuchungen viel weiter ausdehnen und könnten dann als eine Erweiterung derjenigen Sätze hingestellt werden, die ich in der ersten Abhandlung, wo einfach nur Lebende den Gestorbenen gegenüber gestellt wurden, entwickelt habe. Da von den allgemeinen Sätzen, die ich im Auge habe, wegen fast gänzlichen Mangels statistischer Erhebungen, zunächst kein Gebrauch gemacht werden kann, so werden hinsichtlich dieser Erweiterungen nur Andeutungen genügen.

Es sei in Fig. 26 a. f. S. $O\,O_1 = m$ das Alter, in welchem der Eintritt in einen bestimmten Beruf stattfinde, und die Ordinate $O_1\,C$ repräsentire die Anzahl der Lebenden dieses Alters, welche sämmtlich in Activität sind. Lege ich durch C die Mortalitätscurve CMQ, so ist entsprechend dem Alter $OP = x_1$ die Ordinate $PM = z$ die Anzahl der Personen, die das Alter x_1 erreichen, während die Strecke MS die Anzahl derjenigen darstellt, die bis dahin gestorben sind. Es seien nun überdies noch die beiden Curven CNU und CRV gegeben; der Punkt N der erstern theilt die Ordinate PM in zwei Theile; der untere Theil, die Ordinate $PN = y$, giebt die Anzahl derjenigen, die im Alter x_1 noch in Activität sind, während die Strecke $NM = z - y$ die Anzahl der lebenden Invaliden dieses Alters giebt.

Ebenso theilt der Punkt R die Ordinate MS der Curve CRV

in zwei Theile; ist $PR = u$ die Ordinate des Punktes R, so soll $MR = u - z$ die Anzahl der Personen darstellen, die vor dem Alter x_1 als Invaliden gestorben sind, während der Rest RS Diejenigen repräsentirt, die bis dahin nicht im Zustande bleibender Invalidität gestorben sind.

Fig. 26.



In gleicher Weise giebt nun t Jahre später, entsprechend dem Alter $OP' = x_2$ die Strecke $P'M' = z'$ die Lebenden überhaupt, $P'N' = y'$ die in Activität Lebenden und $N'M' = z' - y'$ die invalid Lebenden und ferner $M'S'$ die Verstorbenen überhaupt; davon $M'R' = u' - z'$ die invalid Verstorbenen und $R'S'$ diejenigen, die nicht im Zustande bleibender Invalidität gestorben sind.

Ich setze nun einmal voraus, der Verlauf dieser drei Curven sei gegeben und will zeigen, wie man rückwärts aus diesen Angaben alle die Wahrscheinlichkeitswerthe ableiten kann, die oben bei der Aufstellung von Invaliditätstabellen (S. 137) erwähnt wurden. Der Nutzen dieser Darlegungen wird aus den Bemerkungen am Schlusse sich ergeben.

Die Zahl der Lebenden überhaupt im Alter x_1 ist $PM = z$ und im höheren Alter x_2 ist diese Zahl $P'M' = z'$; daher ist die Wahrscheinlichkeit p für den x_1-Jährigen nach $t = x_2 - x_1$ Jahren noch zu leben:

$$p = \frac{z'}{z} \tag{47}$$

und die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieses Zeitraumes zu sterben:

$$1 - p = 1 - \frac{z'}{z}.$$

Im Alter x_1 leben $PN = y$ in Activität, im höheren Alter x_2 dagegen noch $P'N' = y'$; daher ist die Wahrscheinlichkeit w für die x_1-jährige Person, nach t Jahren noch zu leben und n i c h t invalid zu sein:

$$w = \frac{P'N'}{PN} = \frac{y'}{y} \tag{48}$$

Von den y in Activität lebenden Personen vom Alter x_1 sterben ferner innerhalb der nächsten t Jahre:

$$y\left(1-\frac{z'}{z}\right)$$

Dagegen leben am Ende noch y' Personen in Activität, daher wurden im Laufe der nächsten t Jahre invalid und leben am Ende dieses Zeitraumes noch:

$$y-y'-y\left(1-\frac{z'}{z}\right)=y\frac{z'}{z}-y' \tag{49}$$

Anfänglich waren aber y Personen in Activität, daher ist die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten t Jahren invalid zu werden und am Ende noch zu leben:

$$\frac{z'}{z}-\frac{y'}{y}=\frac{P'M'}{PM}-\frac{P'N'}{PN} \tag{50}$$

Ferner sind bis zum Alter x_1 überhaupt im Zustande der Invalidität gestorben: $MR = u - z$ und bis zum Alter x_2 starben $M'R' = u' - z'$; daher starben überhaupt innerhalb des Zeitraumes $t = x_2 - x_1$ an Invaliden:

$$M'R'-MR=u'-u-z'+z.$$

Im Anfange, d. h. im Alter x_1, leben aber $z - y$ Invaliden und von diesen sterben in der Zeit t im Ganzen:

$$(z-y)\left(1-\frac{z'}{z}\right)$$

Die Differenz mit dem vorigen Werthe giebt daher nach kurzer Reduction durch den Ausdruck:

$$u'-u+y\left(1-\frac{z'}{z}\right) \tag{51}$$

die Anzahl der Personen vom Alter x_1, welche innerhalb der Zeit t invalid werden und sterben; da anfänglich y Personen in Activität sind, so ist nun für dieselben die Wahrscheinlichkeit, in den nächsten t Jahren invalid zu werden und zu sterben:

$$\frac{u'-u}{y}+\left(1-\frac{z'}{z}\right) \tag{52}$$

Weiter ergiebt der Ausdruck (49) die Zahl der Personen, welche invalid werden und am Ende noch leben und der Ausdruck (51) die Zahl derer, welche invalid werden und sterben, die Summe beider nämlich:

$$u' - u + y - y';$$

in Fig. 26 ausgedrückt durch die Differenz $N'R' - NR$ giebt daher die Anzahl der Personen vom Alter x_1, welche in den nächsten t Jahren überhaupt invalid werden, und daher folgt endlich die Wahrscheinlichkeit q für dieses Alter innerhalb der kommenden Zeitstrecke t invalid zu werden:

$$q = \frac{u' - u + y - y'}{y} \tag{53}$$

Die gleichen Sätze gelten natürlich auch für den Fall, dass man von Verheiratheten und Unverheiratheten statt von Invaliden und Nichtinvaliden spricht und geben nun den Zusammenhang an, der zwischen den bezeichneten Curven und den früher berechneten Wahrscheinlichkeitswerthen besteht, wenn man nur die Zeit t zu einem Jahre annimmt.

Die ganze vorstehende Untersuchung lässt sich aber weit allgemeiner durchführen, wenn man von der graphischen Darstellung und den Sätzen Gebrauch macht, die ich in der ersten Abhandlung vorgeführt habe.

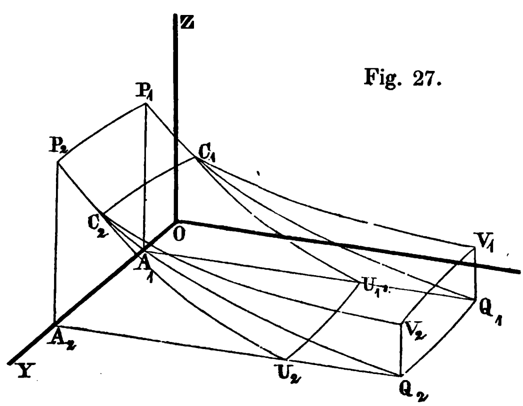


Fig. 27.

In Fig. 26, S. 156, zweigen sich im Punkte C von der Mortalitätscurve CMQ die beiden Curven CNU und CRV ab, deren Bedeutung wir vorhin angegeben haben; übertragen wir nun dieselbe Darstellungsweise auf Fig. 1, S. 9, und Fig. 2, S. 13, in welchen die Curve PQ die Absterbecurve (Mortalitätscurve) derjenigen Personen darstellte, welche innerhalb der Zeitstrecke $OA = t$

bis $O A' = t + dt$ geboren wurden, und gehen wir dann auf eine endliche Geburtenstrecke über, so erhalten wir, wie Fig. 27 zeigt, statt der drei Curven von vorhin drei krumme Flächen. Die Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ ist diejenige, deren Verlauf und Bedeutung in der ersten Abhandlung dargelegt wurde und die durch entsprechende Verticalschnitte uns auf die verschiedenen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen führte, überhaupt dazu diente, die in der Zeitstrecke $O A_1 = t_1$ bis $O A_2 = t_2$ Gebornen während ihrer Lebenszeit zu verfolgen. Von dieser Fläche lassen wir nun in der Schnittlinie $C_1 C_2$ einmal die Fläche $C_1 U_1 U_2 C_2$ und dann die Fläche $C_1 V_1 V_2 C_2$ sich abzweigen. Denken wir statt an Invaliden und Nichtinvaliden an Verheirathete (incl. Verwittwete und Geschiedene) und Unverheirathete, weil nach dieser Seite hin am leichtesteu sich die erforderliche Menge statistischer Beobachtungsresultate sammeln lässt, so wird nun die Fläche $C_1 U_1 U_2 C_2$ das Mittel an die Hand geben, darzulegen, wie sich die Personen der Generation $A_1 A_2$ von Jahr zu Jahr nach Alter oder Zählungsterminen gerechnet in Unverheirathete und Verheirathete trennen. Die andere krumme Fläche $C_1 V_1 V_2 C_2$ liefert dagegen in Verbindung mit der Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ das Hülfsmittel, die bis zu einem gewissen Alter oder Zählungstermine Gestorbenen aus dieser Generation in Unverheirathete und Verheirathete zu trennen.

Es sei wieder, wie in Abhandlung I, die Geburtszeit t und x das Alter, sowie $z = f(x, t)$ die Gleichung der Fläche $P_1 Q_1 Q_2 P_2$.

Ferner sei jetzt in gleicher Weise die Gleichung der Fläche $C_1 U_1 U_2 C_2$ durch $y = \varphi(x, t)$ und die der Fläche $C_1 V_1 V_2 C_2$ durch $u = \psi(x, t)$ dargestellt, so lässt sich Alles, was ich in der ersten Abhandlung vorgeführt habe, in ausserordentlicher Weise erweitern und man gewinnt, ohne den Ueberblick über das Ganze zu verlieren, noch eine ganze Reihe von neuen Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen. Unter Hinweis auf die Darlegungen der Sätze in der ersten Abhandlung werden nur kurze Andeutungen genügen. Lege ich z. B. in der Entfernung x_1 parallel der Coordinatenebene $Y O Z$ einen Verticalschnitt und projicire ich die Schnittflächen und Schnittlinien mit den drei krummen Flächen auf der Coordinatenebene $Y O Z$, so ergiebt sich durch den Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt, \quad \text{wobei } x_1 \text{ constant ist,}$$

die Anzahl der Personen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche das Alter x_1 erreichen.

Dagegen stellt der Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t, x_1)\, dt, \quad \text{wobei } x_1 \text{ constant ist,}$$

die Zahl Derjenigen dar, die aus der gleichen Generation unverheirathet (resp. nicht invalid) durch dieses Alter hindurchgehen, während die Differenz beider Integrale die Anzahl der Personen giebt, welche verheirathet (incl. Verwittwete und Geschiedene) resp. invalid dieses Alter x_1 erreichen.

Bis zu diesem Alter sind aus der angenommenen Generation überhaupt gestorben:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, 0)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt$$

und darunter waren verheirathete Personen:

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi(t, x_1)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt$$

Die Differenz beider Ausdrücke giebt die Anzahl der unverheirathet Gestorbenen. Das erste Integral im erstern Ausdrucke stellt die Fläche $A_1 P_1 P_2 A_2$, d. h. die Anzahl der in der Zeitstrecke t_1 bis t_2 Gebornen dar.

Andererseits lassen sich nun aber auch wirkliche Zählungsresultate durch unsere Figur darlegen.

Ist τ_1 der Zählungstermin, so ist, wie früher (S. 13):

$$\int_{t_1}^{t_2} f((\tau_1 - t), t)\, dt$$

die Anzahl derjenigen Personen aus der Geburtenstrecke t_1 bis t_2, welche zum angenommenen Zählungstermine noch am Leben sind; man hat eben nur die Zeit τ_1 auf die Axe OX aufzutragen, durch den entsprechenden Punkt eine verticale Ebene unter 45^0 gegen OX geneigt zu legen und die Schnittfläche auf die Ebene YOZ zu projiciren. Von diesen Lebenden sind unverheirathet:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi\left((\tau_1 - t), t\right) dt$$

und die Differenz beider Integralwerthe liefert die Anzahl der Verheiratheten.

Ferner sind aus der angenommenen Generation bis zum Zählungstermine τ_1 überhaupt gestorben:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, 0)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f\left((\tau_1 - t), t\right) dt$$

und unter diesen Verstorbenen waren Verheirathete:

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi\left((\tau_1 - t), t\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} f\left((\tau_1 - t), t\right) dt$$

u. s. f.

Es wird nicht erforderlich sein, weiter in die Sache einzutreten; es ist zu leicht ersichtlich, wie alle in der ersten Abhandlung behandelten Fragen auf die hier angedeutete Weise sich erweitern lassen und welche Fülle von interessanten Resultaten sich ergeben würde, wenn man das erforderliche statistische Material besässe. Zur Ansammlung bedürfte es nichts weiter, als in den Tabellen, die auf S. 49 angegeben wurden, die Verheiratheten, Verwittweten, Geschiedenen und Unverheiratheten, resp. in gewissen Berufszweigen Invaliden und Nichtinvaliden auszuscheiden. In derselben Weise, wie nach frühern Angaben der Verlauf der Fläche $P_1\,Q_1\,Q_2\,P_2$ aus solchen Tafeln ermittelt werden könnte, liessen sich dann auch die Flächen $C_1\,U_1\,U_2\,C_2$ und $C_1\,V_1\,V_2\,C_2$ feststellen. Die Veröffentlichungen der statistischen Bureau's geben uns noch heute als Resultat von Volkszählungen und Zählungen von Verstorbenen nichts weiter als die Gesammtzahl der lebenden und gestorbenen Verheiratheten und Unverheiratheten; Werthe, die allein gewiss keinen grossen Werth haben. Welche Schlüsse auf die gesellschaftlichen Zustände und deren Aenderungen wären aber möglich, wenn in angegebener Weise bei den Zählungen von Lebenden und Gestorbenen auch nur eine Ausscheidung in Verheirathete und Unverheirathete erfolgte und für alle Alter diejenigen Wahrscheinlichkeitswerthe ermittelt werden könnten, für die ich oben die analytischen Ausdrücke gegeben habe! Jetzt können wir noch nicht einmal beweisen, dass der bekannte Satz: die Lebenswahrscheinlichkeit sei im Allgemeinen bei den Verheiratheten grösser, als bei Unverheiratheten wirklich richtig ist; der Satz hat sich ergeben bei der Construction von Mortalitätstafeln nach der verwerflichen Halley'schen Methode; dass ganz besonders hier, bei der Trennung der Gestorbenen in Verheirathete und Unverheirathete diese Methode zu unrichtigen Resultaten führen muss, zeigt schon ein Blick auf die Col. 7 und 8 der Tab. II_b. Dass in den jüngern Jahren mehr unverheirathete als verheirathete Personen sterben, ist ganz erklärlich, da anfangs weniger Personen verheirathet sind. Nach den Resultaten, auf welche die Halley'sche Methode führte, hat man aber, im Grunde genommen, den bezeichneten Umstand dahin gedeutet, dass die Verheiratheten eine grössere Lebenskraft zeigen sollen. Es wäre schon möglich, dass die Sache sich so verhält; als erwiesen darf man es aber, wie so manches Andere, was man auf Grund statistischer Untersuchungen schon behauptet hat, noch nicht ansehen. Hier und in ähnlichen Fragen kann nur eine Verwerthung der analytischen Voruntersuchungen, wie solche im Obigen vorgeführt und zum Theil nur angedeutet wurden, zum rechten Ziele führen.

Ueber temporäre Invalidität.

Die Frage über temporäre Invalidität oder über die Erkrankungen ist von Heym in seinem Schriftchen »Die Kranken- und Invaliden-Versicherung«, Leipzig 1863, in so vortrefflicher und, soweit es die bekannten Beobachtungsresultate gestatten, in so erschöpfender Weise behandelt worden, dass ich mich am Schlusse dieser Abhandlung nur auf einige kurze Bemerkungen beschränken kann. Es muss sich mir nur darum handeln, die bisher gebräuchliche Darstellung dahin abzuändern, dass sie leicht in Einklang gebracht werden kann mit dem oben Gegebenen und so, dass meine graphischen Darstellungen in der Art erweitert erscheinen, dass dieselben auch die temporär Invaliden oder die Kranken hervortreten lassen.

Die Statistik der Erkrankungen ist vorzugsweise in England gepflegt worden, während in Frankreich und Deutschland verhältnissmässig in dieser Richtung weniger geschehen ist. Was aus Deutschland darüber bekannt wurde, verdanken wir fast ausschliesslich Heym. Die gebräuchliche Darstellung ist kurz folgende: Man beobachtet, wie viel von einer bestimmten Anzahl, z. B. von 100 Personen eines gewissen Alters, im nächsten Jahre erkrankten; die ganze Zeit, welche diese Personen vom laufenden Jahre im kranken Zustande durchleben, vertheilt man nun entweder auf alle Kranken und erhält so die mittlere Krankheitsdauer der kranken Personen (gewöhnlich in Tagen oder Wochen ausgedrückt) oder man vertheilt diese Zeit auf alle beobachteten Personen (Kranke und Gesunde) überhaupt und erhält so die Krankheitsdauer für das betreffende Alter auf die beobachtete Person.

Das vollständigste Material rührt von Finlaison her, der seine Beobachtungen auf verschiedene Stände, auf Stadt- und Landbewohner, und wiederum auf solche Personen ausgedehnt hat, die schwere oder leichte Arbeit zu verrichten haben.

So findet beispielsweise Finlaison, dass von 100 Personen vom Alter von 40 Jahren überhaupt im nächsten Jahre erkranken

23,26 Männer und 24,41 Frauen.

Daraus fände sich also für den 40-jährigen Mann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre krank zu werden 0,2326 und für eine 40-jährige Frau 0,2441.

Die Krankheitsdauer dieser Kranken beträgt im Mittel:

bei den Männern 35,31,
bei den Frauen 41,33 Tage.

Es kommen daher auf die 100 Personen gerechnet an Krankentagen im nächsten Jahre:

bei den 40-jährigen Männern: $23,26 \times 35,31 = 821,3$,
» » » Frauen: $24,41 \times 41,33 = 1008,9$.

Auf jede einzelne beobachtete Person kommen daher im nächsten Jahre Krankentage:

bei den Männern: 8,21,
bei den Frauen: 10,09.

Die zuletzt bezeichneten Werthe sind es, die zur Bildung sogenannter Krankentabellen benutzt werden und die noch etwas näher besprochen werden sollen, ohne dass damit angedeutet werden sollte, dass nicht auch die vorhin besprochenen Beobachtungsresultate von Finlaison eine wichtige Bedeutung hätten oder besser gesagt, durch gründlichere analytische Behandlung nicht noch besondern Werth gewinnen könnten.

Tab. III des Anhanges enthält in Col. 1 für die verschiedenen Alter die jährliche Krankheitsdauer in Tagen, wie sie von Heym für die Leipziger Krankencassen zu Grunde gelegt wurden. Heym hat sie dadurch erhalten, dass er aus den Finlaison'schen Krankendauern für Männer und Frauen das Mittel nahm und dann die Mittel mit dem Coefficienten 0,8689 multiplicirte, um damit gewissen Beobachtungen der Leipziger Krankencassen Rechnung zu tragen. Diese Art der Uebertragung der englischen Beobachtungen auf die deutschen Verhältnisse lässt sich freilich nur dadurch rechtfertigen, dass wir eben von Deutschland noch zu wenig zuverlässige Beobachtungen in dieser Richtung besitzen; die Mittheilungen, welche Heym (a. a. O.) indessen über den Gang der Beobachtungen macht, welche an der »Leipziger Kranken-, Invaliden- und Lebensversicherungsgesellschaft Gegenseitigkeit« angestellt wurden und die fortgesetzt werden, lassen erwarten, dass wir in nicht zu langer Zeit von dort aus vortreffliches Material erhalten werden. Für die folgenden Betrachtungen ist es gleichgültig, wie weit die Heym'sche Krankentabelle mit der Wirklichkeit übereinstimmt; denn es soll sich nur darum handeln, die Tabelle in eine andere Form und zwar in eine solche überzuführen, die mit den bisher angestellten Betrachtungen besser harmonirt.

Neben der Heym'schen Krankentafel (Col. 1, Tab. III) ist zunächst in Col. 2 auch dessen vortreffliche Mortalitätstafel für Sachsen aufgeführt und Col. 3 enthält die Zahl der Sterbenden, bestimmt durch die Differenzen der Zahl der Lebenden in Col. 2. Drückt man nun die Krankheitsdauer nicht in Tagen, sondern in Jahren aus (das Jahr ist im Folgenden zu 365,24 Tagen angesetzt) und multiplicirt man sie dann mit der Anzahl der Lebenden der Mortalitätstafel vom gleichen Alter, so erhält man die Zahlenreihe der Col. 4 der Tab. III, auf die ich eben aufmerksam machen wollte. Den Zahlenwerthen dieser Columne lässt sich eine doppelte Bedeutung unterlegen.

So ist z. B. die Zahl der Lebenden vom Alter von 20 Jahren 6415 und die von 21 Jahren 6368; das Mittel aus beiden Zahlenwerthen, nämlich 6391,5 stellt dann, vorausgesetzt die Mortalitätscurve dürfe für die kurze Zeitstrecke von einem Jahre als geradlinig angesehen werden, die ganze Zeit in Jahren dar, welche die 6415 20-jährigen Personen im nächsten Jahre überhaupt zusammen durchleben.

Der zugehörige Zahlenwerth 118 in Col. 4 dagegen giebt dann an, wie viel Jahre die 6415 anfänglich Lebenden im nächsten Jahre **im kranken Zustande** durchleben.

Besser ist aber die andere Darstellung. Man kann sich nämlich vorstellen, dass nur solche Kranke existiren, die während des ganzen Jahres krank sind. Die Werthe der Col. 4 drücken dann aus, wie viel solcher Kranke in jedem Altersjahre gerechnet werden können; so wäre also nach der Tabelle für das Alter von 20 Jahren von den 6415 anfänglich Lebenden während des ganzen folgenden Jahres krank 118 Personen, während im Laufe des gleichen Jahres 47 Personen sterben. Eine solche Tabelle liesse sich dann leicht mit der Invaliditätstabelle, die nur bleibend Invalide aufführt (wie Tab. I_b), vereinigen und liesse auch eine graphische Darstellung zu; man könnte in Fig. 25, S. 147, noch eine vierte Curve einführen, indem man von der Curve CNU abwärts für jedes Alter die Werthe der Col. 4 als Längen auftrüge. Die Länge PM giebt dann nach dem dort Angegebenen die Anzahl der Lebenden überhaupt vom Alter OP, die Strecke NM die Anzahl der bleibend Invaliden und PN die Anzahl der Nichtinvaliden; die letztere Strecke würde nun durch die neue Curve wieder in zwei Theile getheilt, der obere Theil ergäbe die temporär Invaliden oder Kranken und der untere Theil die Gesunden, d. h. die während des ganzen Jahres in Activität lebenden Personen.

Ein weiterer Gewinn würde aber bei der in Tab. III gegebenen Anordnung für die Berechnung der Tarife für Krankencassen sich herausstellen; die Werthe der Col. 4 ergeben dann die Anzahl der Personen, die während des ganzen Jahres Krankengelder beziehen und man gelangt bei Einführung dieser Zahlenwerthe auf einfachere und elegantere Formeln für Berechnung der Tarife; doch unterlasse ich es auch hier, wie oben, speziell auf derartige Versicherungsrechnungen einzugehen. Auch über die Frage der temporären Invalidität überhaupt sind vorläufig weitere analytische Untersuchungen von untergeordnetem Werth; es werden solche erst eine Bedeutung gewinnen, wenn sie zum Zwecke der

Discussion von umfänglichem statistischem Material, wie wir es noch nicht besitzen, angestellt werden. Ueber die Methode des Sammelns von solchem Material wird sich kaum etwas Besseres angeben lassen, als was Heym darüber sagt. Es wäre nur zu wünschen, dass die von Heym bei der Leipziger Krankencasse eingeführte Beobachtungsmethode auch anderwärts Nachahmung fände, vorzüglich bei den grössern Knappschaftscassen, die für die nähere Erforschung der Gesetze über bleibende und temporäre Invalidität das brauchbarste und vollständigste Material zu liefern im Stande wären.

DRITTE ABHANDLUNG.

Mathematische Grundlagen

der

Unfallversicherung.

Vorbemerkungen.

Schon in den einleitenden Bemerkungen der vorigen Abhandlung über Invalidität wurde hervorgehoben, dass man auf ein besonderes Gebiet von Untersuchungen geführt wird, wenn man bei der Frage der lebenslänglichen und temporären Invalidität und wie ich hier hinzufüge, bei der Frage über Sterblichkeit auch noch die Ursachen in Betracht zieht, welche die Invalidität, beziehungsweise den Tod herbeigeführt haben. Natürlich denken wir hier an Ursachen besonderer Art und zwar an diejenigen Fälle, wo der Eintritt der Invalidität oder des Todes plötzlich, in Folge von Verunglückung stattfindet. Bei den obigen Untersuchungen haben wir diese Fälle nicht getrennt gedacht von den weit zahlreichern, bei welchen die Invalidität und der Tod als eine natürliche Folge von Krankheit und der Abnahme der Lebenskraft überhaupt erscheint. Scheidet man aber zum Zwecke spezieller Untersuchungen die genannten Fälle aus, so bieten sich eine Reihe von interessanten Fragen, deren nähere Erörterung die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung bilden soll.

So unvollständig im Ganzen das statistische Material noch ist, welches uns in der so eben bezeichneten Richtung bis jetzt vorliegt, so geht doch schon aus den bisher gemachten Beobachtungen unzweifelhaft hervor, dass die Unglücksfälle oder kürzer, Unfälle, tödtliche, wie nicht tödtliche, in merkwürdiger und erschreckend regelmässiger Weise sich wiederholen. In einem grossen Lande mit zahlreicher Bevölkerung steht die jährliche Zahl der Unfälle in beinahe constantem Verhältniss zur Volkszahl; unter allen Todesfällen des laufenden Jahres erscheint regelmässig eine gewisse Anzahl solcher, die durch Verunglückung herbeigeführt wurden und dieser Zahl entspricht wieder eine andere, welche die nicht tödtlichen Unfälle, die Verletzungen umfasst, die bleibende oder vorübergehende Invalidität erzeugen.

Wie man bei den Untersuchungen über das Sterblichkeitsgesetz im Allgemeinen wohl im Auge behält, dass dieses Gesetz nicht zu allen Zeiten dasselbe war, sondern dass es allmäligen Aenderungen unterworfen ist; dass es bei beiden Geschlechtern, in verschiedenen Ländern und verschiedenen Ständen verschieden ist, so hat man auch bei den Beobachtungen zur Feststellung des Gesetzes, dem die Unfälle unterworfen sind, von Anfang an unterschieden, ob man es mit den Unfällen im Allgemeinen oder ob man es nur mit denen zu thun hat, die ausschliesslich Personen aus gewissen Ständen (z. B. die Bergleute) treffen können oder man hat diejenigen Unfälle herausgehoben, denen die Menschen blos unter bestimmten Verhältnissen (z. B. bei Reisen auf Eisenbahnen und Dampfschiffen) ausgesetzt sind u. s. w.; in allen Fällen tritt unter den beobachteten Unfällen eine gewisse Regelmässigkeit und Gesetzmässigkeit hervor und daher ist der Gedanke wohl begründet, durch Errichtung von Unfallversicherungsanstalten die Nachtheile zu paralysiren, die den Verunglückten (ihn persönlich oder im Fall des Todes seine Hinterlassenen) treffen.

Im Grunde genommen ist zwar die Unfallversicherung nichts Neues, da die gewöhnlichen Invalidencassen, speziell die Knappschaftscassen, längst schon auch an diejenigen ihrer Mitglieder Invalidenpensionen zahlten, die in Folge von Unfällen in den Zustand bleibender oder temporärer Invalidität übergingen und auch die Hinterlassenen tödtlich Verunglückter erhielten Unterstützungen (allerdings gewöhnlich nur in Form von Wittwen- und Waisenpensionen); neu aber ist der Gedanke der Ausscheidung, d. h. die Versicherung auf Tod und Invalidität ausschliesslich nur auf solche Fälle zu beschränken, wo das eine oder das andere durch Unglücksfall herbeigeführt wird.

Die ersten Versicherungsanstalten dieser Art und zwar solcher, welche speziell die Assecuranz gegen Verletzungen und Tod auf Eisenbahnen und Dampfschiffen betrieben, entstanden nach Engel's Mittheilung *) vor nun bald 20 Jahren in Nordamerika; später

*) Dr. Engel lieferte zwei ausgezeichnete Abhandlungen über die Unfallversicherung in der »Zeitschrift des königl. preussischen statistischen Bureaus«, die ich in der unten folgenden allgemeinen Besprechung der Organisation der betreffenden Versicherungsanstalten vielfach benutzt habe. In der ersten Abhandlung »Die Unfallversicherung« (Jahrgang VI, 1866) hebt Engel mit Recht hervor, welch unberechenbaren Nutzen eine gross und solid angelegte und allgemein benutzte Anstalt dieser Art haben müsste und beleuchtet die Organi-

verpflanzte sich dieser Versicherungszweig nach England und von da nach Frankreich und Belgien; in andern Ländern existiren keine Anstalten dieser Art, selbst in Deutschland ist die Sache noch fast gänzlich unbeachtet geblieben, nur einige Lebensversicherungsanstalten (Thuringia, Providentia, Anker) haben auch den Zweig der Unfallversicherung, aber in beschränkter Weise, ihren übrigen Versicherungszweigen beigefügt.

Die Berechnung von Tarifen für die verschiedenen Arten der Unfallversicherungen ist leicht ausführbar, wenn man einmal das erforderliche statistische Material hat und wenn man von den Sätzen Gebrauch macht, die ich oben in der zweiten Abhandlung gegeben habe.

In der Literatur über Versicherungswesen ist die Frage über die mathematischen Grundlagen der Unfallversicherung nirgends behandelt, es mag daher das Folgende als der erste Versuch angesehen werden, die Lücke zu füllen. Ich würde mich reichlich belohnt sehen, wenn Andere sich durch das hier Gegebene angeregt fühlen würden, die Frage weiter, gründlicher und besser zu behandeln, vor Allem aber, wenn dadurch der Anstoss gegeben würde, dass auch in Deutschland und der Schweiz Versicherungsanstalten für Unfälle ins Leben treten würden. Die Sache ist von grosser Bedeutung; denn in der Unfallversicherung gelangt, wie Engel so richtig hervorhebt, die ihr zu Grunde liegende Humanität nicht blos in dem Streben zum Ausdruck, eingetretene Nachtheile zu paralysiren, sondern noch weit mehr in der unausbleiblichen Wirkung, solchen Nachtheilen vorzubeugen, d. h. die Unfälle selbst soweit als möglich zu verhüten. Wie die Feuerversicherungsanstalten ganz wesentlich zur Verminderung der Feuersbrünste, die Dampfkesselversicherungsanstalten zur Verminderung der Kesselexplosionen (wegen der Controlle und Beaufsichtigung der Kesselanlagen von Seiten der Versicherungsgesellschaften) beigetragen haben, so wird die Anzahl der Unfälle wesentlich vermindert werden, wenn grosse und vom Staate mit entsprechenden

---

sation solcher Institute an der besteingerichteten Unfallversicherungsanstalt »Sécurité générale« in Paris.

Die zweite Abhandlung »Materialien zur Unfallversicherung« (Jahrgang VIII, 1867) liefert eine vortreffliche Zusammenstellung des vorhandenen statistischen Materials.

Vollmachten versehene Unfallversicherungsanstalten ihren Einfluss geltend machen und in Bergwerken, Fabriken und auf allen Eisenbahnen und Dampfschiffen auf Herstellung und vorzügliche Instandhaltung aller Vorrichtungen dringen, wodurch die Gefahr für die Versicherten vermindert und beseitigt werden kann.

Statistische Erhebungen über Unfälle.

Es kann nicht in der Aufgabe dieser Schrift liegen, ein vollständiges Referat über die Ergebnisse der statistischen Erhebungen über Unfälle zu liefern, es sollen vielmehr im Folgenden nur die Hauptresultate aufgeführt werden, und auch diese nur, soweit sie verwerthbar als Grundlage für Unfallversicherungen erscheinen. Ich benutze dabei die schon erwähnten vorzüglichen Arbeiten Engel's, in denen das Material in weit grösserer Vollständigkeit und übersichtlich geordnet, vorgeführt wird.

Bei der Frage nach den Unfällen und den entsprechenden Beobachtungen ist, mathematisch gesprochen, festzustellen, wie gross für einen Lebenden die Wahrscheinlichkeit ist, »im nächsten Jahre zu verunglücken«; dabei wäre zu unterscheiden, ob der Unfall tödtlich oder nicht tödtlich ist und ob er im letztern Falle in einer Verletzung besteht, die bleibende oder temporäre Invalidität und Erwerbsunfähigkeit zur Folge hat. In beiden Fällen wäre wieder zu unterscheiden, von welcher Art der beobachtete Unfall war; bei den tödtlichen Unfällen ist beispielsweise hervorzuheben, ob der Tod durch Ertrinken, durch Verbrennen oder Ersticken, durch Herabstürzen von hoch gelegenen Punkten u. s. w. erfolgte, während bei den blosen Verletzungen vielleicht mehr die Art der Verletzungen (Quetschungen, Arm- und Beinbruch u. s. w.) als die Ursache selbst, durch welche die Verletzung herbeigeführt wurde, von Wichtigkeit wäre. Im Weitern wird man das Geschlecht und das Alter (Geburtstag und Tag des Unfalles) der Getödteten und Verletzten notiren, um auf solche Weise zu der Erkenntniss zu gelangen, wie die Unfallwahrscheinlichkeit mit dem Alter variirt.

Weiterhin wird man die beobachteten Unfälle nach der Berufsthätigkeit der Betreffenden ordnen und speziell diejenigen Fälle zusammenfassen, in denen der Unfall in Folge und während der Berufsausübung erfolgte, und wird hierbei vorzugsweise auf Fabrikarbeiter, Berg- und Eisenbahnarbeiter und auf die Beamten dieser Berufsklassen seine Aufmerksamkeit richten müssen, weil doch gewiss diesen Kreisen die Wohlthat der Unfallversicherung zunächst zugewendet werden sollte. Ferner ist dringend die genaueste Statistik aller Eisenbahnunfälle zu wünschen, wobei die Reisenden und das Eisenbahnpersonal gesondert aufzuführen sind.

Die bis jetzt bekannten Beobachtungen erstrecken sich fast ausschliesslich nur auf tödtliche Unfälle, im Uebrigen hat man aber doch schon beim Sammeln des Materiales die verschiedenen Richtungen, die so eben bezeichnet wurden, im Auge behalten und hat auf solche Weise schon, wie aus dem Folgenden hervortreten wird, höchst interessante und für den Zweck der Versicherung auf tödtliche Unfälle ganz werthvolle Resultate erhalten. Was dagegen die nicht tödtlichen Unfälle betrifft, so fehlt es hier noch fast gänzlich an Beobachtungen und doch wären gerade diese Fälle von besonderer Bedeutung bei der Frage der Versicherung. Beim Sammeln des hierher gehörigen Materiales zeigen sich allerdings eigenthümliche Schwierigkeiten; einestheils ist es schwer, eine scharfe Grenze zwischen schweren und leichten Verletzungen aufzustellen, anderntheils ist schwer zu sagen, von wo an überhaupt noch von einer Verletzung gesprochen werden soll; denn unbedeutende Hautschürfungen und Fingerquetschungen wird man doch nicht mehr zu den Unfällen rechnen. Ein sicherer Massstab in dieser Beziehung wäre die Angabe, auf welchen Zeitraum der Verletzte durch die Verletzung arbeits- und erwerbsunfähig geworden ist und das ist auch der Weg, der von der französischen Versicherungsgesellschaft »Sécurité générale«, deren Tarife wir unten besprechen werden, eingeschlagen wurde; jedenfalls haben wir in der bezeichneten Richtung zuverlässiges statistisches Material erst von den grössern Unfallversicherungsanstalten, sobald solche ins Leben getreten sind, selbst zu erwarten; nur etwa von den bestehenden Krankenkassen und den Knappschaftskassen beim Bergbau wäre vielleicht jetzt schon einiges Material zu gewinnen.

Uebrigens verdient noch hervorgehoben zu werden, dass auch bei den Beobachtungen über die tödtlichen Unfälle, auf deren Statistik wir nun in der Kürze eingehen wollen, eine Schwierigkeit sich in den Weg stellt, die kaum je gänzlich überwunden werden wird; dass beim Notiren der plötzlichen Todesfälle die Fälle von Hinrichtungen, Mord und Todtschlag nicht mitgezählt werden, ist selbstverständlich, schwierig ist es aber, die Selbstmorde auszuscheiden, die bei den Unfallversicherungen so wenig, wie bei den gewöhnlichen Lebensversicherungen in Betracht fallen dürfen. Unter den im Folgenden aufgezählten tödtlichen Unfällen befinden sich wahrscheinlich zahlreiche Fälle von verschleiertem Selbstmord.

Fassen wir zunächst, gestützt auf Engel's Mittheilungen, sämmtliche tödtliche Unfälle ins Auge, die in verschiedenen Ländern beobachtet und mit der Bevölkerungszahl verglichen wurden, so ergiebt sich folgende Uebersicht:

Staaten:	Zeitraum der Beobachtung:	Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken: Geschlecht: Männlich.	Weiblich.	Zusammen.
Preussen	1861 bis mit 1864	0.000633	0.000163	0.000397
In den grössern Städten Preussens	1861 » 1864	644	129	391
Hannover	1855 » 1864	649	157	403
Sachsen	1851 » 1863	418	094	253
Bayern	1840 » 1862	341	124	230
Baden	1852 » 1863	—	—	333
Deutsch-Oestreich	1851	444	143	295
Belgien	1856 bis mit 1863	514	152	333
England	1858 » 1861	1032	349	682
Frankreich	1854 » 1860	443	103	277
Insgesammt in den genannten Ländern		0.000591	0.000171	0.000381
In den genannten deutschen Staaten		0.000515	0.000143	0.000336

Die Werthe dieser Uebersicht lassen sich leicht deuten. Nehmen wir die letzte Zeile zum Anhalten, so würde anzunehmen sein, dass in den deutschen Staaten auf 1 Million Lebende männlichen Geschlechtes im nächsten Jahre 515 Todesfälle zu rechnen sind, die durch Verunglückung herbeigeführt werden; beim weiblichen Geschlechte wären auf 1 Million Lebende nur 143 solcher Todesfälle zu zählen und ohne Rücksicht auf Geschlecht sind auf jede Million Lebende im nächsten Jahre 336 tödtliche Unfälle zu erwarten.

Dass die Zusammenstellung in jeder Zeile für das männliche Geschlecht bedeutend grössere Werthe für die Wahrscheinlichkeit des tödtlichen Unfalles giebt, als für das weibliche, ist erklärlich; dieses Resultat wäre im Voraus zu erwarten gewesen, weil eben beim männlichen Geschlechte eine grosse Zahl tödtlicher Unfälle der Berufsthätigkeit entspringt. Weniger leicht zu erklären ist, wenn die angegebenen Zahlenwerthe auf volle Richtigkeit Anspruch machen dürften und in allen Ländern die Beobachtungsmethode die gleiche gewesen wäre, der Umstand, dass in den verschiedenen Staaten die angegebenen Wahrscheinlichkeitswerthe verhältnissmässig stark von einander abweichen. Auffallend tritt mit übermässig vielen tödtlichen Unfällen England hervor und zwar bei beiden Geschlechtern, so dass es nicht genügen dürfte, diese Erscheinung durch die ausgedehnte Industrie und die zahlreiche bergmännische Bevölkerung zu erklären; dagegen tritt Frankreich auffallend zurück, obgleich die für dieses Land oben gegebenen Zahlenwerthe auch die vor Hunger, Kälte und Ermattung, die durch übermässigen Genuss von Spirituosen und die plötzlich in Folge natürlicher Krankheiten Gestorbenen mit einschliessen, was bei den andern Ländern nicht oder nur zum Theil der Fall ist. Nahe wie in Frankreich stellen sich die Zahlenwerthe in Sachsen, Bayern und Deutsch-Oestreich, während in Preussen mit Hannover eine verhältnissmässig grössere Zahl tödtlicher Unfälle hervortritt. Trotz dieser Differenzen erscheinen mir, speziell für Deutschland, die angegebenen Zahlenwerthe, besonders die in der letzten Zeile der vorstehenden Tabelle stehenden Mittelwerthe, schon verwendbar zur Berechnung von Unfallversicherungsprämien.

Eine weitere Frage, deren Beantwortung betreffs der tödtlichen Unfälle von Interesse ist, bezieht sich auf die verschiedenen Arten der Unfälle. Die folgende kleine Uebersicht zeigt, was sich in dieser Beziehung durch statistische Erhebungen bis jetzt ergeben hat.

		Wahrscheinlichkeit, dass der tödtliche Unfall erfolgt durch:				
		Ertrinken.	Verbrennen, Verbrühen, Ersticken, durch Blitzschlag.	Erschlagen, Erdrückt und Verschüttet werden.	Fallen, Herabstürzen von hoch gelegenen Punkten.	Fuhrwerke, Ueberfahrenwerden.
Königr. Sachsen 1853—1863.	Männlich:	0.3332	0.0596	0.1799	0.1507	0.0943
	Weiblich:	0.4595	0.1592	0.0602	0.0792	0.0749
	Zusammen:	0.3573	0.0786	0.1571	0.1370	0.0906
Hannover 1855 — 1864.	Männlich:	0.3967	0.0264			
	Weiblich:	0.3946	0.1088			
	Zusammen:	0.3963	0.0425			
England 1858 und 1859.	Männlich:	0.2056	0.2164			
	Weiblich:	0.1105	0.5756			
	Zusammen:	0.1805	0.3111			
Frankreich 1851—1860.	Zusammen:	0.4721	0.1086	0.0905	0.1471	0.1153

Das statistische Material in der hier bezeichneten Richtung ist sehr zerstreut und schwer zu vereinigen, weil in den einzelnen Ländern die verschiedenen Arten von tödtlichen Unfällen in verschiedener Weise zusammengefasst werden. Aus Engel's Mittheilungen hierüber sind hier nur diejenigen Länder aufgeführt, aus denen Beobachtungsresultate vorliegen, die unter sich wenigstens annähernd einen Vergleich zulassen; jedenfalls herrscht aber auch unter den hier gegebenen Wahrscheinlichkeitswerthen noch grosse Unsicherheit. Es stimmt mit der gewöhnlichen Erfahrung überein, wenn sich in Sachsen, Hannover und Frankreich herausstellt, dass die meisten tödtlichen Unfälle durch Ertrinken herbeigeführt werden; in Sachsen und Hannover umfassten diese Fälle etwas mehr als ein Drittheil, in Frankreich beinahe die Hälfte aller Unfälle. Ganz merkwürdig tritt hier wieder England hervor; dort sind nicht die Fälle des Ertrinkens, sondern die des Verbrennens und Erstickens die zahlreichern; innerhalb der beiden Jahre 1858 und 1859 sollen unter den tödtlichen Unfällen beim weiblichen Geschlecht 57 Procent von allen Fällen durch Verbrennen, Verbrühen und Ersticken herbeigeführt worden sein!?

Aus der ganzen Tabelle lässt sich nur so viel schliessen, dass es als gewagt bezeichnet werden müsste, wenn man auf Grund der angegebenen Beobachtungsresultate irgend welche Schlüsse auf Land und Leute ziehen und diese Resultate anwenden wollte, um bei der Berechnung von Prämientarifen die verschiedenen Arten der tödtlichen Unfälle gesondert zu behandeln; nur so viel lässt sich erkennen, dass eine in allen Ländern gleichmässig geregelte Beobachtungsweise in der angedeuteten Richtung auf höchst interessante und sehr bezeichnende Ergebnisse führen würde.

Wichtiger als die Frage, die wir so eben nur berühren konnten, ist die, wie sich die tödtlichen Unfälle auf die verschiedenen Altersklassen vertheilen; wenigstens für die Frage der Unfallversicherung ist es erforderlich, in der genannten Beziehung Anhaltspunkte zu besitzen. Auch hier liegt im Ganzen bis jetzt nur wenig statistisches Material vor, aber doch, wie ich glaube, vorläufig genug, um einen Satz als näherungsweise begründet anzusehen, von dem wir später Gebrauch machen werden. Es sollen im Folgenden nur diejenigen Resultate statistischer Erhebungen angegeben werden, die eine grössere Vollständigkeit zeigen; es sind diejenigen, welche aus Bayern, Belgien und England herrühren.

Aus der Zusammenstellung auf folgender Seite ist für unsere Zwecke der Satz zu entnehmen, dass für die Altersklassen vom 20. bis 60. Jahre, die bei der Unfallsversicherung doch wohl ausschliesslich in Betracht kommen, die Wahrscheinlichkeit des tödtlichen Unfalles nur innerhalb sehr enger Grenzen variirt, so dass man sie zwischen diesen Grenzen bis auf Weiteres als constant, als nahezu unabhängig vom Alter ansehen darf. Es wäre auch hier gewagt, aus den angegebenen Zahlenwerthen, obgleich sie ziemliche Regelmässigkeit zeigen, weitere Schlüsse zu ziehen.

Mit dem bis hierher Gegebenen sind schon die Hauptergebnisse statistischer Erhebungen über tödtliche Unfälle im Allgemeinen zusammengefasst; was nun im Weitern die Unfälle in verschiedenen Ständen, also diejenigen tödtlichen Unfälle betrifft, die vorzugsweise als eine Folge der Berufsausübung erscheinen, so liegen hierüber nur Beobachtungen vor, die man beim Bergbau gemacht hat. Engel führt (a. a. O.) sehr sorgfältig alle Resultate solcher Beobachtungen auf und kommt schliesslich auf das Gesammtresultat, welches folgende Uebersicht zeigt; ich habe auch hier,

Staaten:	Altersklassen:	Wahrschein- dass der tödtliche Unfall auf die Unter 1 Jahr.	1—5 Jahre.	5—10 Jahre.	10—20 Jahre.
Bayern 1840 — 1862.	Männlich:	0.024	0.155	0.068	0.109
	Weiblich:	0.054	0.283	0.080	0.075
Belgien 1856 — 1863.	Männlich:	0.028	0.127	0.043	0.133
	Weiblich:	0.069	0.294	0.093	0.102
	Altersklassen:	Unter 1 Jahr.	1—5 Jahre.	5—10 Jahre.	10—15 Jahre.
England 1858 und 1859.	Männlich:	0.056	0.138	0.078	0.079
	Weiblich:	0.137	0.288	0.140	0.048

wie bei den vorangehenden Tabellen, unterlassen, die Anzahl der Fälle aufzuführen, die den berechneten Wahrscheinlichkeitswerthen zu Grunde gelegt werden konnten und verweise zur Vervollständigung in dieser Beziehung auf Engel's Abhandlung, in der sich auch alle Quellen verzeichnet finden.

Staaten:	Wahrscheinlichkeit für Bergleute, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken: Zeitraum der Beobachtung.	
Preussen	1841—1864	0,00184
Sachsen: Erz-Bergbau . . .	1825—1863	0,00092
Kohlen-Bergbau . .	1847—1863	0,00265
Oestreich	1862—1865	0,00136
Grossbritannien	1856—1865	0,00351
Im Mittel in den ersten drei genannten deutschen Staaten:		0,00158

Bemerkenswerth ist, dass die meisten tödtlichen Unfälle beim Bergbau durch Erschlagen, Erdrücken und Verschütten erfolgen, dann erscheinen nach der Anzahl der Fälle gerechnet die tödtlichen Verunglückungen durch Fallen und durch Hinabstürzen in den Schacht; weniger oft, als man vermuthen sollte, kommen tödtliche Unfälle durch Pulverexplosionen vor, dagegen treten beim

lichkeit,

angegebenen Altersklassen fällt:

20—30 Jahre.	**30—40 Jahre.**	**40—50 Jahre.**	**50—60 Jahre.**	**60—70 Jahre.**	**70—80 Jahre.**	**80 u. darüber Jahre.**
0.138	0.127	0.127	0.109	0.089	0.043	0.010
0.092	0.085	0.086	0.086	0.088	0.056	0.016
0.177	0.143	0.122	0.113	0.072	0.032	0.007
0.066	0.057	0.070	0.078	0.078	0.069	0.025
15—25 Jahre.	**25—35 Jahre.**	**35—45 Jahre.**	**45—55 Jahre.**	**55—65 Jahre.**	**65—75 Jahre.**	**75 u. darüber Jahre.**
0.155	0.127	0.117	0.101	0.076	0.048	0.026
0.054	0.041	0.042	0.048	0.051	0.063	0.089

Kohlenbergbau, besonders in England, in erschreckender Weise zahlreich die Unfälle hervor, die durch »böse und vorzugsweise schlagende Wetter« herbeigeführt werden. Die Zahlenwerthe vorstehender Zusammenstellung zeigen unter sich starke Abweichungen; vergleicht man sie mit den Werthen der Tabelle auf S. 174, so erhält man aber doch annähernd einen Massstab zur Beurtheiluug, welcher erhöhten Lebensgefahr der Bergmann ausgesetzt ist. In den einzelnen Staaten sowohl, als im Mittel, ist die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken, bei den Bergleuten ungefähr drei bis vier Mal so gross, als sonst beim männlichen Geschlechte im Allgemeinen; es ist daher ganz gerechtfertigt, wenn die Unfallversicherungsanstalten ihre Versicherten nach deren Beruf in Classen gruppiren und in jeder Classe einen andern Massstab bei Beurtheilung der Gefahr eines tödtlichen Unfalles anlegen. Freilich kann hierbei bis jetzt nicht anders, als mit gewisser Willkühr verfahren werden, da es eben noch viel zu sehr an dem entsprechenden statistischen Material fehlt, denn meines Wissens nach ist das von Engel gesammelte Material, wovon das zunächst Verwerthbare hier aufgeführt wurde, dasjenige, was fast allein Anspruch auf einige Zuverlässigkeit machen kann, da den angegebenen Werthen wenigstens eine sehr grosse Zahl von beobachteten Fällen zu Grunde gelegt werden konnte.

An das Vorstehende mag sofort die Notiz über statistische Erhebungen der nicht tödtlichen Unfälle beim Bergbau angeführt werden; nach dieser Richtung sind nun freilich die Resultate der Beobachtungen ausserordentlich dürftig, was grossentheils dem schon erwähnten Umstand zuzuschreiben ist, dass man sehr verschiedener Meinung darüber sein kann, welche Beschädigungen und Verletzungen noch zu den eigentlichen Unfällen gerechnet werden sollen. So wäre nach den Beobachtungen in Preussen bei den Knappschaftsvereinen für einen Bergmann die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre einen nicht tödtlichen Unfall zu erleiden, d. h. einen solchen, der kürzere oder längere Zeit andauernde oder lebenslängliche Arbeitsunfähigkeit nach sich zieht: 0,0956, während sich derselbe Wahrscheinlichkeitswerth nach den Beobachtungen in Oestreich nur zu 0,01087 (0,00867 für leichte, 0,00220 für schwere Verletzungen) herausstellte. Es liegt auf der Hand, dass aus der grossen Verschiedenheit der für die beiden Länder angegebenen Werthe zunächst nichts weiter geschlossen werden kann, als dass man beim Bergbau in Preussen unter nicht tödtlichem Unfall etwas ganz anderes versteht, als in Oestreich, und dass im ersteren Lande Verletzungen als Unfall notirt wurden, die im andern Lande gar nicht beachtet worden sind. Jedenfalls ist es durchaus unmöglich, diese Beobachtungsresultate bei Berechnung von Prämien für die Versicherung auf nicht tödtliche Unfälle beim Bergbau zu verwenden; eine fühlbare Lücke soll aber damit nicht bezeichnet werden; denn für den Bergarbeiterstand wird man auch fernerhin, wie bisher, die Gründung und Erhaltung von Invaliden-, Wittwen- und Waisencassen (Knappschaftscassen) als das ansehen, was den Bedürfnissen dieses Standes am besten entspricht, d. h. man wird hier die Wohlthat der Versicherung allen Invaliden, nicht blos denen zu Theil werden lassen, die durch Unglücksfall in den Zustand der Invalidität übergehen. Die eigentlichen Unfallversicherungsanstalten werden hier einst mehr ergänzend neben den sogenannten Knappschaftscassen ihre Wohlthaten spenden.

Ich komme nun am Schlusse dieser kurzen und flüchtigen Darlegung statistischer Ergebnisse über Unfälle zu der Frage der Eisenbahnunfälle. Hier stossen wir auf einen merkwürdigen Umstand; obgleich die bestehenden Unfallversicherungsanstalten vorzugsweise Versicherung auf Eisenbahnunfälle betreiben und die ersten Anstalten solcher Art (in Amerika) ausschliesslich die Nachtheile heben sollten, die diesen Unfällen entspringen, so sind doch gerade die statistischen Erhebungen über Eisenbahnunfälle so unsicher und unbestimmt, dass es noch jetzt unmöglich ist, auch nur mit einiger Zuverlässigkeit diejenigen Wahrscheinlichkeitswerthe hinzustellen, die bei der Berechnung von Prämientarifen als Grundlage dienen müssten. Aus Engel's Zusammenstellungen (a. a. O.) lässt sich, was die Reisenden selbst betrifft, nur so viel entnehmen, dass die Sicherheit gegen Verletzungen auf Eisenbahnfahrten eine überraschend grosse ist. So kamen z. B. auf den preussischen Eisenbahnen in den 7 Jahren 1859 bis 1865 jährlich im Durchschnitt auf 27034400 Reisende (mit 144037500 Personenmeilen) nur 2,3 tödtliche Unfälle und 10,8 nicht tödtliche Verletzungen und beim deutsch-östreichischen Eisenbahn-Vereinsnetz in den 9 Jahren 1856 bis 1864 jährlich im Durchschnitt auf 346374000 Personenmeilen 6,7 tödtliche und 24,9 nicht tödtliche Unfälle vor. Man kann hieraus wenigstens im Allgemeinen einen Schluss ziehen auf die Kleinheit des Werthes der Wahrscheinlichkeit für einen Eisenbahnreisenden, einen Unfall zu erleiden; unverhältnissmässig viel häufiger sind die Unfälle, die andere Personen (durch Unvorsichtigkeit beim Betreten der Bahn u. s. w.) durch Eisenbahnen erleiden; bei den preussischen Bahnen kamen auf solche Weise in den oben bezeichneten 7 Jahren jährlich im Durchschnitt 26,7 Personen ums Leben und 12,3 Personen wurden verletzt (mit Ausschluss derjenigen, die den Tod absichtlich suchten). Zu ganz besondern Betrachtungen haben in neuerer Zeit in Deutschland aber die zahlreichen Unfälle geführt, die bei Eisenbahnbeamten und Bahnarbeitern beobachtet wurden. Wenn es auch begreiflich ist, dass das Eisenbahnpersonal weit stärker den Unfällen ausgesetzt ist, als es die Reisenden sind, so hat es doch den Anschein, als wenn auf den deutschen Bahnen die Beamten und Arbeiter ganz besonderer Gefahr ausgesetzt seien. So ist nach den Beobachtungen im deutsch-östreichischen Eisenbahn-Vereinsnetz auf Grund der Beobachtungen aus den Jahren 1856—1864 für das Personal der Bahnen die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken: 0,00191 und diejenige, nicht tödtlich verletzt zu werden: 0,00302. Vergleicht man den erstern Werth mit den Werthen, die oben für den Bergmannsstand angegeben wurden, so ergiebt sich das Resultat, dass das deutsche Eisenbahnpersonal beinahe derselben Lebensgefahr ausgesetzt ist, wie der Bergmann, dessen Beruf doch sonst zu den gefährlichsten gerechnet wird! In der That ein Resultat, das zu besondern Betrachtungen Anlass giebt *). Freiherr von Weber, dem wir über die hier in Betrachtung liegenden und ähnliche Fragen ausgezeichnete Arbeiten **) verdanken, legt in einem Zusatz in der unten citirten Schrift von Dr. Lehmann (S. 86) schlagend die Gründe dieses betrübenden Resultates dar. Sein Vergleich der Unfälle auf den englischen und preussischen Bahnen reducirt auf gleiche Verkehrsmassen führt zu dem Resultate, dass für die Reisenden selbst, in Bezug auf Tödtung in England und Preussen die gleiche Sicherheit herrscht, und dass in Bezug auf blosse Verletzungen der Passagiere die preussischen Bahnen sicherer sind als die englischen. Ganz anders verhält es sich aber mit der Sicherheit der Beamten und Arbeiter der Bahn; in dieser Beziehung sind die Verhältnisse in England weit günstiger. Wir verweisen wegen des Nähern auf die citirte Stelle und wollen hier nur noch diejenigen Beobachtungsresultate aufführen, die für die Beamten und Arbeiter der preussischen Bahnen eine Berechnung der Unfallwahrscheinlichkeit zulassen.

Jahre:	Beschäftigte Beamte und Arbeiter:	Es wurden getödtet:	Es wurden verletzt:
1860	44852	48	99
1861	48420	71	86
1862	51502	71	90
1863	54755	78	138
1864	56143	98	181
1865	60326	119	144
1866	64859	122	185

*) Vergleiche hierüber das vortreffliche Schriftchen von Dr. Gustav Lehmann: »Körperverletzungen und Tödtungen auf deutschen Eisenbahnen und die Unzulässigkeit des Rechtsschutzes«. Erlangen 1869.

**) M. M. Freiherr von Weber. »Die Technik des Eisenbahnbetriebes in Bezug auf die Sicherheit desselben«. Leipzig 1854. — »Die Lebensversicherung der Eisenbahnpassagiere in Verbindung mit der Unterstützung und Pensionirung der Eisenbahnbeamten« etc. Leipzig 1855. — »Die Gefährdungen des Personales beim Maschinen- und Fahrdienst der Eisenbahnen«. Leipzig 1862.

Die angegebenen Zahlenwerthe für die Unfälle beziehen sich nicht blos auf die Unfälle, die auf fahrenden Zügen stattfanden, sondern umfassen alle Unglücksfälle. Bezeichnet man mit N_1, N_2, ... die Anzahl der in den einzelnen Jahren beschäftigten Beamten und Arbeiter und mit n_1, n_2, n_3 .. die Anzahl der beobachteten Unfälle, so findet sich nach der Methode der kleinsten Quadrate die Wahrscheinlichkeit x für den Eintritt des Unfalles im nächsten Jahre, nach der Formel *):

$$x = \frac{N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + \dots}{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + \dots}$$

Nach dieser Formel ergiebt sich aus vorstehender Tabelle für das Bahnpersonal der preussischen Bahnen die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken:

0,001624,

und die Wahrscheinlichkeit, einen nicht tödtlichen Unfall zu erleiden:

0,002459.

Auch diese Werthe bestätigen das oben Gesagte; denn für die Bergleute in den preussischen Staaten fand sich oben die Wahrscheinlichkeit des tödtlichen Unfalles 0,00184, also ebenfalls wenig abweichend von der für das Bahnpersonal.

Vorstehende Wahrscheinlichkeitswerthe liessen sich schon bis auf Weiteres verwenden, um für das Bahnpersonal der deutschen Staaten Unfallversicherungsprämien zu berechnen; anders steht es

---

*) Diese Formel leitet sich leicht ab, wie folgt: Ist x die gesuchte Wahrscheinlichkeit, so berechnet sich unter Annahme der Bezeichnung des Textes die Anzahl der Unfälle in den einzelnen Jahren: xN_1, xN_2, xN_3 ... während beobachtet wurden n_1, n_2, n_3 ...; die Fehler sind daher:

$$(xN_1 - n_1),\ (xN_2 - n_2),\ (xN_3 - n_3), \dots$$

Quadrirt man diese Ausdrücke, so liefert die Addition für die Summen der Fehlerquadrate, wenn man das Summenzeichen Σ einführt:

$$x^2 \Sigma(N^2) - 2x\Sigma(Nn) + \Sigma(n^2)$$

und das ist ein Minimum für:

$$x = \frac{\Sigma(Nn)}{\Sigma(N^2)}.$$

dagegen mit der Versicherung der Reisenden; doch das ist eine Frage, auf deren Besprechung wir zurückkommen werden. Im Vorstehenden sollten zunächst nur die wichtigsten Ergebnisse der statistischen Erhebungen über Unfälle angegeben werden; wenn das Vorgeführte lückenhaft und unvollständig erscheint, so hat das seinen Grund nicht allein darin, dass in der vorliegenden Schrift, die sich mehr der mathematischen Seite der Frage zuwendet, nicht auf ausführlichere statistische Zusammenstellungen eingegangen werden konnte, sondern auch, weil es wirklich noch zu sehr an entsprechendem Beobachtungsmaterial mangelt und weil die eigentliche Unfallstatistik einen Zweig der Statistik bildet, der erst in neuester Zeit besondere Beachtung gefunden hat.

Einrichtung bestehender Unfallversicherungsanstalten.

Die Unfallversicherungsanstalten gehen gegen gewisse Einzahlungen die Verpflichtung ein, ihren Versicherten, respective deren Rechtsnachfolgern bestimmte Zahlungen zu leisten, wenn die Versicherten während des Bestandes der Versicherung ein Unfall trifft, der vorübergehende oder bleibende Arbeitsunfähigkeit oder den Tod zur unmittelbaren Folge hat.

Die Einzahlungen, die Prämien, bestehen entweder in einer Einmaleinlage, zahlbar beim Abschluss der Versicherung oder in periodisch (jährlich, monatlich oder wöchentlich) zu zahlenden Summen.

Die Leistung der Anstalt dagegen besteht entweder in Zahlung einer Summe, der Versicherungssumme, an die Erben oder Rechtsnachfolger im Falle tödtlicher Verunglückung des Versicherten oder in Auszahlung einer »lebenslänglichen Rente« oder einer bestimmten dem Unfalle angemessenen Entschädigungssumme an den Versicherten, wenn derselbe durch Unfall in den Zustand bleibender Invalidität oder Erwerbsunfähigkeit gekommen ist oder endlich in einer »täglichen oder wöchentlichen Geldverwilligung« bei temporärer, durch Unfall herbeigeführter Arbeitsunfähigkeit.

Die Versicherung wird immer nur auf eine bestimmte Zeit, gewöhnlich auf ein Jahr, abgeschlossen, kann aber, wenn inzwischen in der Stellung und den Verhältnissen des Versicherten keine Aenderungen eingetreten sind, wieder erneuert werden.

Bei den Leistungen der Anstalt kommen nur unfreiwillige Unfälle in Betracht, solche, die durch Zufall oder fremdes Verschulden herbeigeführt wurden: dagegen wird keine Haftung übernommen, wenn der Tod in Folge von Selbstmord oder die Verstümmelung durch Selbstmordversuch stattfand, selbst wenn die Unzurechnungsfähigkeit nachgewiesen werden kann. Ebenso kommen die Unfälle nicht in Betracht, die durch Trunkenheit und grobe Fahrlässigkeit des Versicherten herbeigeführt wurden und die, welche den Versicherten durch Krieg oder Aufruhr, im Raufhandel oder im Duell betroffen haben. Dagegen haften die Gesellschaften im Allgemeinen für die Folgen solcher Unglücksfälle, die sich bei der Rettung von Menschen und Eigenthum ereignen, was wichtig für die Feuer-Lösch- und Rettungsmannschaften ist.

Die Personen, welche mit schweren und chronischen Krankheiten behaftet sind, werden nicht zur Versicherung angenommen und ebenso verlangt man gewöhnlich, dass das Alter des zu Versichernden zwischen gewisse vorgeschriebene Grenzen falle.

Die Versicherung ist entweder individuell oder collectiv. Erstere wird von einer bestimmten Person und für eine solche geschlossen; die Collectivversicherung dagegen wird von den Inhabern grösserer Fabriken, Bauwerkstätten und ähnlicher Unternehmungen im Interesse sämmtlicher Arbeiter, Beamten und Arbeitgeber eingegangen.

Durch Auszahlung der Versicherungsbeträge erwirbt sich die Gesellschaft das Recht auf Entschädigung gegen den etwaigen verantwortlichen Urheber oder Verschulder des Unglücksfalles, aber selbstverständlich nur auf den Betrag jener Summe, welche die Gesellschaft in Folge der Versicherung als Entschädigung ausbezahlt hat.

Die Gesellschaften behalten sich das Recht vor, nach einem Unglücksfalle die Police ganz oder theilweise aufzuheben.

Hat ein Unfall stattgefunden, so ist innerhalb einer vorgeschriebenen Zeit unter Beilegung der den Fall beglaubigenden Documente Anzeige an die Gesellschaft zu erstatten. Verfälschung solcher Documente, absichtlich wahrheitswidrige Angaben darin verwirken die Versicherungssumme und alle bisher gezahlten Prämien zu Gunsten der Gesellschaft.

Der Versicherte ist verpflichtet, bei eingetretenem Unglücksfall einen Arzt beizuziehen und verliert das Anrecht auf Entschädigung, wenn er dem Arzte oder einer Vertrauensperson der Gesellschaft den Besuch und damit eine genauere Prüfung der Folgen des Unfalles unmöglich macht.

Mit dem Vorstehenden sind die von den Unfallversicherungsgesellschaften aufgestellten allgemeinen Bedingungen angegeben; ein Aufführen der speziellen Bestimmungen, z. B. derjenigen über die Art der Einzahlungen, der Auszahlung der versicherten Summen, über Verjährung der Ansprüche u. s. f. unterlassen wir, da solche Bestimmungen in allen Tarifen und deren Erläuterungen sich finden, welche von den Gesellschaften und deren Agenten ausgegeben werden.

Dagegen sollen im Folgenden noch einige Mittheilungen von Tarifsätzen folgen und zwar soll etwas näher auf die Tarife der französischen Gesellschaft »La Sécurité générale« *) eingegangen werden, welche auch Engel (a. a. O.) seinen Besprechungen zu Grunde legt.

Diese Versicherungsbank erscheint vorzüglich organisirt und veröffentlicht vollständigere Tarife, als andere.

Die »Sécurité générale« unterscheidet drei grosse Kategorien von Unfällen:

1. Kategorie. Allgemeine Unfälle, solche welche jeden Menschen zu jeder Zeit treffen können.

Hierher gehören: Unfälle, verursacht durch in Freiheit befindliche, angespannte oder gerittene Pferde; Unfälle im Wasser und auf dem Eise; Unfälle verursacht durch Frost, Erfrieren, verursacht durch Ueberschwemmuugen und Wasserfluthen, durch Gebrauch von Schiesswaffen, durch Feuerwerk und Explosionen; Unfälle, verursacht durch Blitzschlag, Wirbel- und Sturmwind und andere Elementarereignisse; verursacht durch Feuer, durch Feuerfangen der Kleider, beim Retten und Löschen des Feuers und endlich Unfälle verschiedener Art, wie Fallen und Ausrutschen auf Treppen und in den Strassen; Biss toller Hunde, Biss von Schlangen, Beschädigungen durch wild gewordenes Schlachtvieh u. A. m.

---

*) La Sécurité générale, Compagnie d'Assurances à primes fixes contre les Accidents de toute nature pouvant atteindre les personnes. Siège Social: 10 Rue de Ménars. Paris.

2. Kategorie. Unfälle in Bergwerken und Steinbrüchen, bei der Land- und Forstwirthschaft und der Viehzucht; die Unfälle in Industriewerkstätten aller Art und in chemischen Fabriken und die Unfälle auf Bauplätzen und in Bauwerkstätten.

3. Kategorie. Sämmtliche Unfälle auf Eisenbahnen und zwar diejenigen auf fahrenden Zügen.

Die Versicherten werden nach den Gefahren, denen sie ihrer Lebensstellung und ihrem Berufe nach ausgesetzt sind, in folgende Gefahrclassen getheilt:

1. Classe. Gewöhnliche oder solche Risken, welche das Publikum zu jeder Zeit läuft. Die Constituenten dieser Classe sind: Agenten, Advocaten, Kaufleute, Aerzte, Grundbesitzer, Rentiers, Domestiken (mit Ausnahme der in den Ställen arbeitenden) u. s. w.

2. Classe. Gefährliche Risken, d. h. solche, welche vorzugsweise in der Industrie vorkommen. Hierunter sind begriffen unter Andern: Architecten, Ingenieure, Constructeure, Bauunternehmer, Maurer, Zimmerleute, sonstige Bauhandwerker.

3. Classe. Höchst gefährliche Risken. Hierher gehören Locomotivführer, Feuerleute, Kesselheizer, Bergleute, Steinbrecher, Brunnenmacher, Dachdecker etc.

Auch andere Unfallversicherungsanstalten unterscheiden die angegebenen Classen, alle geben in ihren Tarifen, wie das auch in den folgenden Auszügen geschehen soll, nur die Prämiensätze für die 1. und 2. Classe. Die Prämien für die 3. Classe erfährt man erst in jedem besondern Falle bei der Administration.

Die folgenden Prämiensätze, den Tarifen der »Sécurité générale« entnommen, beziehen sich sämmtlich auf eine Versicherungssumme von 2500 Franken (100 Liv. Sterl. oder 1000 fl. östr.) im Falle des Todes oder auf eine jährliche Leibrente von 150 Fr. (6 Liv. Sterl. = 60 Gulden) beim Eintritt bleibender Invalidität oder auf eine tägliche Geldbewilligung von 1,25 Fr. (0,05 Liv. Sterl. = 1 Schilling oder 0,5 fl. = 50 kr.) im Falle vorübergehender Arbeitsunfähigkeit auf eine Dauer von 5 bis 90 Tagen.

Prämientarif für Versicherung gegen Unfälle jeder Art.

(Sécurité générale.)

Prämie.	Classe.	Individuelle Versicherung.	Versicherung auf Unfälle während der Arbeitszeit.	Collectivversicherung für die Arbeitgeber.	Leistung der Anstalt.
		Prämie in Franken.			
Jährlich	1	3. 95	2. 40	2. 65	Nur die Versicherungssumme von 2500 Fr. bei tödtlichem Unfall.
	2	5. 65	3. 40	3. 75	
Monatlich	1		0. 216	0. 239	
	2		0. 307	0. 341	
Jährlich	1	4. 20	2. 55	2. 80	Nur die jährliche Leibrente von 150 Fr. bei lebenslänglicher Unfall-Invalidität.
	2	4. 80	2. 85	3. 15	
Monatlich	1		0. 230	0. 254	
	2		0. 262	0. 287	
Jährlich	1	4. 85	2. 90	3. 25	Nur die tägliche Geldverwilligung von 1,25 Fr. bei temporärer Unfall-Invalidität. (5 bis 90 Tage.)
	2	6. 20	3. 75	4. 15	
Monatlich	1		0. 265	0. 293	
	2		0. 338	0. 378	
Jährlich	1	7. 90	4. 70	5. 25	Die jährliche Leibrente oder die tägliche Geldbewilligung, je nach dem Falle.
	2	9. 65	5. 75	6. 35	
Monatlich	1		0. 430	0. 478	
	2		0. 521	0. 577	
Jährlich	1	11. 25	6. 75	7. 50	Die Todesversicherungssumme oder die Leibrente oder die tägliche Geldverwilligung, je nach dem Falle.
	2	14. 60	8. 75	9. 70	
Monatlich	1		0. 612	0. 682	
	2		0. 798	0. 883	

Die Gesellschaft sichert natürlich auch höhere oder niedrigere Summen beim Tode und ebenso verschiedene Invalidenrenten als die hier speziell bezeichneten. Die Prämie ändert sich nahe proportional der Höhe der zu versichernden Summen, ich sage nahezu, in Wirklichkeit sind für höhere Versicherungssummen die Prämien etwas billiger, weil die Verwaltungskosten für höhere Versicherungen nur unwesentlich sich steigern. Während nach vorstehender Tabelle z. B. die Prämie (1. Classe) für individuelle Versicherung auf 2500 Fr. Capital 3,95 Fr. beträgt, ist sie bei 25,000 Fr. Versicherungssumme den Tarifen gemäss nicht 39,50, sondern nur 31,50 Fr.

Die Prämien, welche von andern Anstalten gefordert werden, weichen wenig von denen der Sécurité générale ab. So ist z. B. der Tarif der Gesellschaft für Lebens- und Rentenversicherungen in Wien »der Anker« bei individueller Versicherung gegen Unfälle aller Art folgender:

Classe.	Jahresprämie in Franken.	
1	3,75	Für die Versicherungssumme von 2500 Fr. (1000 fl.) bei tödtlichem Unfall.
2	5,625	
1	11,25	Für die Todesversicherungssumme von 2500 Fr. oder je nach dem Falle eine wöchentliche Geldbewilligung von 15 Fr. (6 fl.) bei eingetretener Invalidität. (Längstens durch ein Jahr.)
2	18,875	

Bei dieser Gesellschaft sind die Prämien genau den Versicherungssummen proportional, so dass also bei einer Todesversicherung von 25000 Fr. (die höchste Summe, auf welche diese Anstalt, wie die »Sécurité générale« überhaupt versichert) die Prämie 37,50 Fr. beträgt. Wenig abweichend sind auch die Tarife englischer Gesellschaften, wie der »Accident-Insurance-Company« (London), der »Railway-Passengers-Assurance-Company« etc.

Die angegebenen Tarife beziehen sich auf Unfälle jeder Art, also auch auf die auf Eisenbahnen vorkommenden, indessen können letztere auch separat versichert werden und die Sécurité générale im Besondern führt Tarife für Eisenbahversicherung, die den verschiedenartigsten Verhältnissen angepasst sind; es sind hier jedoch jederzeit nur die Unfälle auf fahrenden Zügen, welche zur Versicherung gelangen können; alle andern Unfälle, auf Bahnhöfen, bei Bahnübergängen, in Wartesäälen etc. vorkommenden, sind ausgeschlossen.

Prämientarif für Versicherung gegen Eisenbahnunfälle.

(Sécurité générale.)

Leistung der Anstalt.	Für Eisenbahnreisende allein.	Für Post- und Telegraphenbeamte, die dienstlich die Bahn regelmässig benutzen.
	Jahresprämie in Franken.	
Die Versicherungssumme von 2500 Fr. bei tödtlichem Unfall	1,00	2,00
Die Leibrente von 150 Fr. beim Eintritt lebenslänglicher Unfallinvalidät	0,90	1,80
Die tägliche Geldbewilligung von 1,25 Fr. beim Eintritt temporärer Unfallinvalidität. (Bis auf 90 Tage.)	1,25	2,50
Die jährliche Leibrente oder die tägliche Geldverwilligung, je nach Falle	2,00	4,00
Die Todesversicherungssumme oder die jährliche Leibrente oder die tägliche Geldverwilligung, je nach dem Falle	2,50	5,00

Die Prämien sind hier den Versicherungssummen oder Invalidenpensionen proportional, so dass die zwei oder dreifache Prämie auch das Anrecht auf die zwei- oder dreifache Höhe der Versicherungssumme oder Pension giebt. Der vorstehende Tarif gilt aber nicht für das Eisenbahnpersonal; für dieses erfährt man die Höhe der Prämie bei der Administration.

Der »Anker« in Wien verlangt von Eisenbahnreisenden für die Todesversicherung von 2500 Fr. die Jahresprämie von 1,25 Fr., dagegen die Prämie von 3,75 Fr., wenn man sich im Falle des Todes die Summe von 2500 Fr. oder im Falle Eintrittes der Arbeitsunfähigkeit längstens durch ein Jahr die wöchentliche Pension von 15 Fr. sichern will.

Bei der »Sécurité générale« kann sich das reisende Publikum auch auf längere Zeit, auf 5 oder 10 Jahre gegen Eisenbahnunfälle versichern.

Für die Leistung der Anstalt: im Falle des Todes die Versicherungssumme von 2500 Fr., im Falle der Verwundung, die jährliche Leibrente von 150 Fr. oder je nach dem Falle die tägliche Geldverwilligung von 1,25 Fr. auf längstens 90 Tage gelten folgende Prämiensätze:

Jährliche Prämie für die Versicherung auf 5 oder 10 Jahre für:			Einmaleinlage für eine Versicherung auf 5 Jahre:			Einmaleinlage für eine Versicherung auf 10 Jahre:		
Tod allein.	Verwundung allein.	Tod und Verwundung.	Tod allein.	Verwundung allein.	Tod und Verwundung.	Tod allein.	Verwundung allein.	Tod und Verwundung.
Franken			Franken			Franken		
0,75	1,50	2,00	3,35	6,65	8,75	5,65	11,25	15,00

Auch hier sind nach den vollständigen Tarifen der Gesellschaft die Prämien den Versicherungssummen und Pensionen proportional, so dass sich leicht für jede höhere oder geringere Anforderung an die Gesellschaft die Prämie aus den vorstehenden Angaben ermitteln lässt.

Endlich kann man sich gegen Eisenbahnunfälle bei der Sécurité générale auch für das ganze Leben versichern und zwar entweder durch eine einzige Einzahlung, eine Einmaleinlage, oder durch Prämien. Im erstern Falle hängt die Höhe vom Zutrittsalter ab, nach Massgabe des folgenden Tarifes:

Versicherung gegen Eisenbahnunfälle für das ganze Leben.

Leistung der Anstalt:	Einmaleinlage in Franken:								
Alter beim Eintritt.	20	25	30	35	40	45	50	55	60
	Jahre.								
Nur für eine Versicherungssumme v. 2500 Fr. bei tödtlichem Unfall:	10.50	10.00	9.50	9.00	8.50	8.00	7.50	7.00	6.50
Nur für Unfallinvalidität eine lebenslängliche Leibrente von 150 Fr. oder eine tägliche Geldverwilligung v. 1,25 Fr., je nach dem Falle:	16.50	15.75	15.00	14.25	13.50	12.75	12.00	11.25	10.50
Für die Versicherungssumme oder Invalidenpensionen der einen oder andern Art, je nach dem Falle:	25.00	23.75	22.50	21.25	20.00	18.75	17.50	16.25	15.00

Für kleinere oder grössere Versicherungssummen und Invalidenpensionen sind auch hier die Prämien im gleichen Verhältniss kleiner oder grösser.

Will man sich dagegen die gleiche Summe beim Tode oder die lebenslängliche Geldverwilligung je nach dem Falle durch Jahresprämien sichern, so hat man zu zahlen

in den ersten vier Jahren jährlich 2,50 Fr.,
in den nächsten vier Jahren jährlich 2,00 Fr.,
in den nächsten vier Jahren jährlich 1,50 Fr.,
in den nächsten vier Jahren jährlich 1,00 Fr.,
endlich bis zum Lebensende jährlich 0,50 Fr,

ohne Rücksicht auf das Eintrittsalter.

Für den vorliegenden Zweck, das Wesen und die Einrichtung bestehender Unfallversicherungsanstalten darzulegen, wird das Gegebene genügend erscheinen, jedenfalls würde mit einem Hinweis auf die Tarife anderer Gesellschaften, z. B. der englischen Anstalten, von denen uns eine Reihe Tarife vorliegen, für das Folgende nichts genommen, da die Prämien der verschiedenen Anstalten nur wenig von einander abweichen.

Ueber Unfallwahrscheinlichkeit und Berechnung der Prämien für Unfallversicherung.

Ein Vergleich der oben aufgeführten Ergebnisse statistischer Untersuchungen über Unfälle mit den vorhin angegebenen Prämientarifen von Unfallversicherungsanstalten führt ohne Weiteres schon zu dem Resultate, dass diese Tarife zum weitaus grössten Theile nicht durch strenge Rechnungen gewonnen worden sein können, da hierzu viel umfänglicheres statistisches Material erforderlich gewesen sein würde, als überhaupt bis jetzt gesammelt werden konnte. Wie diese Tarife entstanden sind und welche Grundlagen hierzu z. B. die »Sécurité générale« benutzt hat, ist dem Verfasser gänzlich unbekannt; es verhält sich mit den Unfallversicherungsanstalten wie mit den gewöhnlichen Lebensversicherungsanstalten, die ebenfalls, mit wenig Ausnahmen, die Grundlagen ihrer Prämienberechnung nicht veröffentlichen. Kennt man die Mortalitätstafel und den Zinsfuss, den eine Lebensversicherungsanstalt zu Grunde legte, so kann man leicht für die wichtigsten Versicherungszweige die Nettoprämien berechnen und dann aus dem Vergleiche mit den Bruttoprämien ihrer Tarife auf die Höhe der Zuschläge schliessen, die eine solche Anstalt angewandt hat, um aus den Nettoprämien die Bruttoprämien zu gewinnen, oder kennt man umgekehrt die Höhe des Zuschlages und den Zinsfuss (gewöhnlich 3, 3 $^1/_2$ oder 4 $^0/_0$), so kann man rückwärts aus den Bruttoprämientarifen, wie sie im Publikum vertheilt werden, die Mortalitätstabelle berechnen, die bei der Prämienberechnung angenommen wurde. Liegen aber, wie das leider meist der Fall ist, nur die veröffentlichten Tarife vor, so fehlen alle Hülfsmittel, um auf dem Rechnungswege die Grundlagen der Prämienberechnung einer solchen Anstalt der Prüfung zu unterwerfen.

Genau so, wie im zuletzt angedeuteten Falle, verhält es sich mit den heutigen Unfallversicherungsanstalten; ein Blick auf deren Tarife lehrt zunächst nur zweierlei, einmal, dass hier auf die Nettoprämien ausserordentlich starke Zuschläge (wegen der Verwaltungskosten u. s. w.) gemacht worden sind, um die Bruttoprämien zu gewinnen, und dann, dass wie schon erwähnt, einzelne der verschiedenen Prämientarife gar nicht nach den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und auf Grund statistischer Beobachtungen eigentlich berechnet, sondern mehr durch Schätzung gewonnen wurden. Für unsere Zwecke ist es übrigens zunächst ganz gleichgültig, wie sich die Sache in der bezeichneten Richtung verhält, da im Folgenden zuerst der Versuch gemacht werden soll, unter der Voraussetzung, dass alles erforderliche statistische Material vollständig vorhanden wäre, für verschiedene Zweige der Unfallversicherung zur Berechnung der Nettoprämien, d. h. derjenigen Prämien Formeln aufzustellen, auf die man gelangt, wenn man zunächst allen Verwaltungsaufwand und die möglichen Abweichungen der wirklichen Erscheinungen von den erwarteten unbeachtet lässt.

Sehen wir zuerst auch von der Eisenbahnversicherung, überhaupt von solchen Versicherungen ab, die sich auf die Unfälle beziehen, welchen die Menschen nur unter bestimmten Verhältnissen ausgesetzt sind, so kann man sich das erforderliche statistische Material in der Weise als gegeben denken, wie es folgendes Tabellenschema *a* bezeichnet, aus dem dann in leicht ersichtlicher Weise das Schema *b* sich ableitet.

Unfalltabelle.

Alter in Jahren.	Werthe der Wahr-			
	1	2	3	4
	am Ende des Jahres noch zu leben:	im Laufe des nächsten Jahres zu sterben überhaupt:	plötzlich durch Unfall:	im nächsten Jahre durch Unfall bleibend invalid zu werden:
	p	$1-p$	r	q
m	p_1	$1-p_1$	r_1	q_1
$m+1$	p_2	$1-p_2$	r_2	q_2
$m+2$	p_3	$1-p_3$	r_3	q_3
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Unfalltabelle.

Alter in Jahren.	1 Lebende überhaupt:	2 Es sterben im nächsten Jahre überhaupt:	3 plötzlich durch Unfall:
m	M	$M(1-p_1)$	Mr_1
$m+1$	Mp_1	$Mp_1(1-p_2)$	Mp_1r_2
$m+2$	Mp_1p_2	$Mp_1p_2(1-p_3)$	$Mp_1p_2r_3$
.	.	.	.
.	.	.	.

Die Columnen 1 und 2 der beiden Zusammenstellungen repräsentiren eine gewöhnliche Mortalitätstafel; die Columnen 3, 4, 6 und 7 von Schema *a* deuten dagegen alle Wahrscheinlichkeitswerthe an, deren Ermittelung auf statistischem Wege als erledigt hier vorausgesetzt wird; der Index an den einzelnen Buchstaben soll bedeuten, dass diese Ermittelung selbst auf die einzelnen Altersklassen ausgedehnt worden ist. Columne 5 von Schema *a* ist identisch mit Columne 3 der Zusammenstellung auf S. 134, nur dass im vorliegenden Falle blos diejenigen Personen gezählt werden, die durch Unfall invalid geworden sind. Der vorliegenden Zusammenstellung *a* müssten dann in dem eben bezeichneten

Schema a.

scheinlichkeit:

5	6	7
am Ende des Jahres noch zu leben und nicht durch Unfall bleibend invalid geworden zu sein: $w = p - \frac{2pq}{1+p}$	im nächsten Jahre durch Unfall vorübergehend invalid zu werden: s	Mittlere Dauer der vorübergehenden Unfallinvalidität in Tagen: t
w_1	s_1	t_1
w_2	s_2	t_2
w_3	s_3	t_3
.	.	.
.	.	.

Schema b.

4	5	6
Es werden im nächsten Jahre durch Unfall invalid		Es kommen auf die temporär invalid Lebenden im nächsten Jahre Krankentage:
bleibend:	vorübergehend:	
Mq_1	Ms_1	$Ms_1 t_1$
$Mw_1 q_2$	$Mw_1 s_2$	$Mw_1 s_2 t_2$
$Mw_1 w_2 q_3$	$Mw_1 w_2 s_3$	$Mw_1 w_2 s_3 t_3$
.	.	.
.	.	.

Sinne auch noch bezüglich der bleibend Invaliden die Columnen 4, 6, 7 und 8 der Zusammenstellung auf S. 134 angefügt werden, wodurch erst diese Unfalltabelle vollständig würde.

Wie die Werthe der Columnen der zweiten Zusammenstellung (der Buchstabe M bedeutet irgend eine grosse ganze Zahl, z. B. 10000) aus denen der ersten hervorgehen, bedarf keiner weitern Erläuterung, doch muss auch diese Tafel durch Beifügung von Columne 2, 3, 5, 6 und 7 von Schema b, S. 136, noch vervollständigt und erweitert werden, wobei man wieder unter Invaliden nur solche versteht, die durch Unglücksfall invalid wurden. Diese hier angedeuteten Tabellen geben das Ziel an, das man beim Sammeln von statistischem Material verfolgen sollte; das bis jetzt vorhandene Material reicht bei Weitem nicht hin, Tabellen von der angedeuteten Vollständigkeit zu berechnen, da wie früher schon erwähnt wurde, die bis jetzt gemachten Beobachtungen sich fast nur auf tödtliche Unfälle beziehen. Diese Beobachtungen haben aber doch einen Satz ergeben, auf den schon auf S. 177 hingedeutet wurde und der jetzt nützliche Verwerthung finden kann. Es zeigte sich nämlich, dass die Wahrscheinlichkeit r, im Laufe des nächsten Jahres tödtlich zu verunglücken, nahezu vom Alter unabhängig ist, wenigstens für die Altersklassen, die wohl bei der Unfallversicherung nur allein in Betracht kommen können (vom 20. bis zum 60. Lebensjahre). Sehen wir diesen Satz als genau genug begründet an, so lässt sich in vorstehenden Tabellen einfach setzen: $r = r_1 = r_2 = r_3 \ldots.$, so dass die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines tödtlichen Unfalles nur auf eine einzige Unbekannte führt, die für verschiedene Verhältnisse nach obigem Referate über statistische Erhebungen über Unfälle (S. 174 bis S. 183) schon als bekannt angesehen werden könnte.

Ganz unzureichend ist aber das statistische Material hinsichtlich der Werthe von q und s in Columne 4 und 6 von Schema a; will man daher mit der Berechnung von Unfallversicherungsprämien trotzdem vorgehen, so bleibt nichts übrig, als auf Grund einer Hypothese diese Werthe festzustellen.

Ich glaube nun, man darf bis auf Weiteres die Annahme machen, dass die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre bleibend oder vorübergehend invalid zu werden, auch vom Alter unabhängig ist, so dass anzunehmen wäre, wenigstens für die vorhin bezeichneten Altersklassen:

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = \cdots$$
$$s = s_1 = s_2 = s_3 = \ldots$$

oder mit andern Worten, dass man vorläufig für beide Reihen von Wahrscheinlichkeitswerthen wenigstens zwei Mittelwerthe in die Rechnungen einführen könnte. Vollkommen zuverlässig ist die Annahme ohne Zweifel nicht, da doch wohl gesagt werden muss, dass Personen von höherem Alter leichter bei Unfällen in den Zustand bleibender Invalidität übergehen werden, als jüngere, bei denen wegen ihrer grössern Lebenskraft häufiger die Invalidität nur eine temporäre sein wird.

Was weiter die Werthe der Columne 7 in Schema a, die mittlere Dauer der vorübergehenden Unfallinvalidität, betrifft, so ist auch über diese durch Beobachtungen durchaus nichts festgestellt; klar ist nur, dass diese Werthe mit wachsendem Alter zunehmen werden. Bei der Frage der Berechnung von Unfallprämien kann man aber bis auf Weiteres für diese Zeitdauer einen gewissen Mittelwerth t in Rechnung bringen, weil die Versicherungsanstalten nur während einer bestimmten Zeit Pensionen bei temporärer Invalidität zahlen; die »Sécurité générale« z. B. nur während 5 bis höchstens 90 Tagen, der »Anker« in Wien nur höchstens ein Jahr lang.

Denkt man sich nun eine solche Anstalt mit sehr vielen Mitgliedern, so ist wohl die nächst liegende Annahme die, dass die temporär Invaliden zwischen beide Zeitgrenzen gleichförmig vertheilt sind, so dass das Mittel dieser Grenzen als mittlere Invaliditätsdauer t anzunehmen wäre; bei der »Sécurité générale« wäre demnach dieses Mittel 47,5 Tage, beim »Anker« 26 Wochen; wir werden später Gebrauch von diesen Werthen machen.

Endlich verdienen die Werthe von Columne 5, Schema a, noch nähere Beachtung; die Formel für die Wahrscheinlichkeit w, am Ende des Jahres noch zu leben und nicht invalid zu sein:

$$w = p - \frac{2pq}{1+p}$$

wie sie oben in der zweiten Abhandlung (S. 130) gefunden wurde, lässt sich nämlich näherungsweise

$$w = p\,(1 - q)$$

schreiben, weil die Unfallinvaliditätswahrscheinlichkeit q ein sehr kleiner Werth ist und $1 + p$ nur wenig von 2 abweicht; in dieser letztern Formel ist p für jedes Alter verschieden und nach der Mortalitätstafel bekannt, während der Werth q, wie erwähnt, als constant für alle Alter angesehen werden kann.

Nach allen diesen Bemerkungen schreibt sich jetzt die Unfalltabelle (Schema b) zum Zwecke der Prämienberechnung einfach in folgender Form:

		m	$m+1$	$m+2$	u. s. f.
Alter		m	$m+1$	$m+2$	u. s. f.
Lebende		M	Mp_1	$Mp_1 p_2$	»
Es sterben im nächsten Jahre	überhaupt	$M(1-p_1)$	$Mp_1(1-p_2)$	$Mp_1 p_2(1-p_3)$	»
	plötzlich durch Unfall	Mr	$Mp_1 r$	$Mp_1 p_2 r$	»
Es werden im nächsten Jahre durch Unfall invalid	bleibend	Mq	$Mw_1 q$	$Mw_1 w_2 q$	»
	vorübergehend	Ms	$Mw_1 s$	$Mw_1 w_2 s$	»
Anzahl der Krankentage der temporär Invaliden im nächsten Jahre		Mst	$Mw_1 st$	$Mw_1 w_2 st$	»

wobei zu setzen ist $w_1 = p_1(1-q)$

$w_2 = p_2(1-q)$ u. s. f.

Die Werthe $p_1, p_2, p_3 \ldots$ der Mortalitätstafel können nun für die betreffende Bevölkerung oder Bevölkerungsklasse als bekannt angesehen werden, ebenso ist nach den früher aufgeführten Resultaten statistischer Erhebungen über tödtliche Unfälle für gewisse Fälle der Wahrscheinlichkeitswerth r gegeben. Nicht so ist es mit den Werthen q und s der Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre bleibend oder temporär invalid zu werden; es soll aber der Versuch gemacht werden, im Folgenden aus den Prämientarifen der »Sécurité générale« abzuleiten, welche Werthe diese Anstalt für die Grössen r und s zu Grunde gelegt hat, im Falle deren Prämien wirklich nach den Formeln berechnet wären, die wir nun ableiten wollen.

Prämien für kurze Versicherungen.

Unter kurzen Versicherungen verstehen wir solche, die nur auf ein Jahr abgeschlossen werden. Denke man sich zuerst den einfachen Fall, dass es sich nur um eine Versicherung auf den durch Unfall herbeigeführten Todesfall handelt, so berechnet sich die erforderliche Nettoprämie einfach wie folgt:

Angenommen es treten M (eine sehr grosse Anzahl) Personen zur Anstalt, jede Person zahle die Einlage oder Prämie von a_1 Franken, so ist die Einnahme der Bank: Ma_1 Franken. Von diesen Personen sterben im nächsten Jahre durch Unfall Mr und wenn den Hinterlassenen jeder dieser Personen die Versicherungssumme K gezahlt werden soll, so wäre die Ausgabe der Bank: MrK; durch Gleichsetzen von Einnahme und Ausgabe findet sich daher

$$Ma_1 = MrK$$

oder einfach die erforderliche Nettoprämie

$$a_1 = rK. \tag{1}$$

Da die Zahlungen der Versicherungssummen allmählig im Verlaufe des Jahres und nicht gleich im Anfange erfolgen, so hat allerdings die Anstalt einen gewissen Zinsgenuss; es wäre leicht, unter der Annahme, dass die Auszahlungen gleichmässig über das Jahr vertheilt sind, diese Zinsen in Rechnung zu ziehen; doch wird dadurch hier die Sache ganz unnöthig verwickelt; wir rechnen daher diese Zinsen als Zuschläge auf die Nettoprämien, als Beitrag zu den Verwaltungskosten. Die Bruttoprämie der Tarife wird nun, wie bei gewöhnlichen Lebensversicherungsanstalten, dadurch gebildet, dass man die Nettoprämie mit einem gewissen Faktor φ, der grösser als Eins ist, multiplicirt, bezeichnen wir diese Prämie der Tarife mit a_1', sowie

$$a_1' = \varphi rK. \tag{2}$$

Für Frankreich ist (S. 174) im Allgemeinen die Wahrscheinlichkeit des tödtlichen Unfalles beim männlichen Geschlechte $r = 0{,}000443$. Für eine Versicherungssumme von 2500 Franken wäre daher die Nettoprämie $a_1 = 1{,}11$ Franken nach Gl. (1). Die »Sécurité générale« verlangt aber (S. 188) für diesen Fall die Bruttoprämie $a_1' = 3{,}95$ Franken und zwar für die erste Versicherungsklasse; es wäre also hier der Faktor $\varphi = 3{,}55$.

Man erkennt hieraus, dass die Unfallversicherungsanstalten ganz bedeutende Zuschläge auf die Nettoprämien werfen. Das ist aber auch ganz gerechtfertigt; denn bei diesen Anstalten stehen die Verwaltungskosten zu der Höhe der einzuziehenden Prämien in einem andern und zwar viel ungünstigerm Verhältnisse, als bei den gewöhnlichen Lebensversicherungsanstalten.

Die Prämien für den Fall, dass sich die Beitretenden nur im Falle Eintritts bleibender Unfallinvalidität eine lebenslängliche jährliche Leibrente sichern wollen, berechnet sich in folgender Art.

Es sei a_2 die Nettoprämie, so ist die Einnahme der Bank von den M gleichzeitig Eintretenden Ma_2. Im nächsten Jahre werden von diesen Personen Mq Personen bleibend durch Unfall invalid. Ich nehme nun an, dass die Anstalt alle diese Personen bei einer Rentenanstalt auf lebenslängliche Leibrenten einkaufen wolle. Ist ρ die Leibrente und R_m das dem Alter m entsprechende Leibrentencapital (brutto) für die Leibrente 1, d. h. das Capital, welches eine derartige Anstalt als Einlage für eine solche Rente verlangt und nimmt man zunächst an, die M eintretenden Personen seien alle von gleichem Alter m, so ist die Ausgabe der Bank:

$$M q R_m \rho$$

und man erhält durch Gleichsetzen mit der Einnahme die Nettoprämie:

$$a_2 = q R_m \rho \tag{3}$$

und auf dem gleichen Wege, wie vorhin, die Bruttoprämie a_2':

$$a_2' = \varphi q R_m \rho. \tag{4}$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, dass hier die Prämie vom Alter des zu Versichernden abhängig ist, weil das Leibrentencapital mit dem Alter variirt. Die »Sécurité générale« nimmt ihren Tarifen nach auf das Eintrittsalter keine Rücksicht, so dass man, um auf deren Prämien zu gelangen, für das Leibrentencapital einen mittlern Werth in Rechnung bringen müsste. Das ist allerdings eine Annahme, die auf den ersten Augenblick unzulässig erscheint, sie lässt sich aber zum Theil dadurch rechtfertigen, dass der Wahrscheinlichkeitswerth q streng genommen nicht constant ist, sondern wohl mit dem Alter wächst, während andererseits das Leibrentencapital abnimmt. Andere Anstalten besitzen übrigens diesen Versicherungszweig gar nicht.

Nimmt man an, die »Sécurité générale« habe bei den beiden Versicherungszweigen, die eben besprochen wurden, dieselben Zuschläge auf die Nettoprämien gelegt, es sei also der Faktor φ derselbe, so fände sich durch Division von Gl. (4) und (2):

$$\frac{a_2'}{a_1'} = \frac{q R_m \rho}{r K}.$$

Nun ist z. B. nach dem Prämientarife auf S. 188 für die individuelle Versicherung $a_1' = 3{,}95$, $a_2' = 4{,}20$, $K = 2500$ und $\rho = 150$ Franken; daraus folgt:

$$\frac{q}{r} = \frac{17{,}72}{R_m}.$$

Das Leibrentencapital beträgt aber für die Leibrente 1 im Mittel nach den Tarifen verschiedener Versicherungsanstalten für die Alter:

$m =$	20	30	40	50	60	
$R_m =$	18	17	15,5	13	10.	(ungefähr)

und hiernach lässt sich ein Schluss auf das Verhältniss der beiden Wahrscheinlichkeitswerthe q und r ziehen; man erkennt wenigstens so viel, dass nach den Prämientarifen der genannten Anstalt, die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre durch Unfall bleibend invalid und arbeitsunfähig zu werden, gleich oder nur wenig grösser vorausgesetzt wird, wie die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre tödtlich zu verunglücken; eine Annahme, die wohl wirklich wenig von der Wahrheit abweichen wird. Bei der Berechnung von Prämien einer neu zu gründenden Unfallversicherungsanstalt könnte man aber auch sich entschliessen, den Werth q dem R_m umgekehrt proportional statt constant zu setzen; dann wäre qR_m also auch die Prämie wirklich constant für jedes Alter, wie es eben in den angegebenen Tarifen der Fall ist. Was nun weiter die dritte Art der Versicherung des Tarifes auf S. 188 betrifft, die Versicherung auf eine tägliche Geldverwilligung beim Eintritt temporärer Unfallinvalidität, so berechnet sich die Prämie wieder leicht in folgender Art: Ist a_3 die Nettoprämie, so ist die Einnahme der Bank von M Beitretenden Ma_3; nach der Tabelle auf S. 198 ist aber die Anzahl der Krankentage im nächsten Jahre Mst; beträgt die Pension pro Tag k Franken, so ist ohne Rücksicht auf die Zinsen die Ausgabe der Bank im nächsten Jahre $Mstk$ und daher folgt wieder durch Gleichsetzen von Einnahme und Ausgabe die Nettoprämie:

$$a_3 = stk \tag{5}$$

und die Bruttoprämie:

$$a_3' = \varphi stk. \tag{6}$$

Wird hier angenommen, die »Sécurité générale« habe auch wieder dieselben Zuschläge, wie bei den vorigen Versicherungszweigen, auf die Nettoprämien gelegt, so fänden sich durch Division der Gl. (6) und (2):

$$\frac{a_8'}{a_1'} = \frac{s\,t\,k}{r\,K}$$

Nun ist nach dem Tarife für die individuelle Versicherung (1. Classe) $a_8' = 4{,}85$, $a_1' = 3{,}95$, $k = 1{,}25$, $K = 2500$ und nach frühern Bemerkungen die mittlere Dauer der vorübergehenden Invalidität, für welche überhaupt Pension gezahlt wird, 47,5 Tage, daher ergiebt vorstehender Ausdruck:

$$\frac{s}{r} = 51{,}7.$$

Hieraus würde folgen, dass die Wahrscheinlichkeit s, im nächsten Jahre durch Unfall vorübergehend arbeitsunfähig zu werden, etwa 50 Mal so hoch angesetzt worden ist, wie der Werth r der Wahrscheinlichkeit, einen tödtlichen Unfall zu erleiden; ein Resultat, das leider nicht mit entsprechenden allgemeinen Beobachtungen verglichen werden kann, das aber ziemlich gut übereinstimmt mit den Erfahrungen, die man beim Bergbau in Preussen gemacht hat. (Vrgl. S. 178 und 180.)

Der Prämientarif auf S. 188 enthält endlich noch zwei weitere Versicherungsformen, deren Prämien aber ohne Weiteres aus den Prämien der im Vorstehenden behandelten Zweige sich bestimmen lassen. Die Einlage zur Sicherung einer jährlichen Leibrente oder einer täglichen Geldbewilligung findet sich, wenn man die Einlagen addirt, die zu machen sind, wenn nur das eine oder nur das andere zur Versicherung kommt und ebenso ist es mit der Versicherung auf den Todesfall oder auf Leibrente oder auf die tägliche Geldbewilligung. So wäre also für individuelle Versicherung (1. Classe) Tarif S. 188 die Prämie

im ersten Falle $4{,}20 + 4{,}85 = 9{,}05$

im andern Falle $3{,}95 + 4{,}20 + 4{,}85 = 13{,}00$ Franken

im Tarife stehen aber hierfür nur die Werthe resp. 7,90 und 11,25 Franken, was einfach darauf hindeutet, dass die »Sécurité générale« bei diesen combinirten Zweigen geringere Zuschläge auf die Nettoprämien gelegt hat, als bei den gesonderten Zweigen.

Durch das Vorstehende sollte nur im Allgemeinen angedeutet werden, in welcher Weise sich Prämientarife von Unfallversicherungsanstalten beurtheilen lassen und wie sich wenigstens annähernd die Wahrscheinlichkeitswerthe aus den Prämien ermitteln lassen, die den Tarifberechnungen zu Grunde gelegt wurden. Die Willkühr in der Wahl der Zuschläge und deren verschiedene Höhe bei den einzelnen Zweigen der Versicherung und der Umstand, dass die Anstalten über diesen Punkt nichts in den Tarifen und Statuten andeuten, erschwert freilich die angedeutete Controlle ausserordentlich; wären die Wahrscheinlichkeitswerthe, welche vorhin rückwärts aus den Prämien der »Sécurité générale« berechnet wurden, durch Beobachtungen mit Sicherheit bestimmt, so würde es auch am Platze sein, die Formeln in anderer und vollkommener Form, zugleich mit Rücksicht auf Zinstragung, zu entwickeln; vorläufig haben aber derartige tiefer auf die Sache eingehenden Entwickelungen keinen praktischen Werth; übrigens kann Jeder, der mit der Art der Berechnung der Prämien und Reserven der gewöhnlichen Lebensversicherungen nur einigermassen vertraut ist, die angedeuteten Erweiterungen in den mathematischen Entwickelungen leicht selbst durchführen. Diese Bemerkung bezieht sich auch auf die folgenden Darlegungen.

Prämien für lange Versicherungen.

Unter langen Versicherungen mögen solche verstanden werden, bei denen man sich durch eine Einmaleinlage oder durch jährliche Prämienzahlungen auf länger als ein Jahr, auf 5 oder 10 Jahre oder selbst auf Lebenszeit gegen Unfall versichert. Für Unfälle im Allgemeinen führen unsere Unfallversicherungsanstalten die hierher gehörigen Versicherungszweige noch nicht, nur die »Sécurité générale« hat sie speziell für Eisenbahnunfälle in ihre Tarife aufgenommen, wie oben unser Referat zeigt. Die folgenden Entwickelungen, die für alle Arten von Unfällen gültig sind, wenn man nur die richtigen entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerthe substituirt, sollen sich aber nur auf lebenslängliche Versicherungen beziehen; denn es ist leicht ersichtlich, wie sich auf gleiche Weise Einlagen und Prämien für (auf 5 oder 10 Jahre) abgekürzte Versicherungen berechnen lassen.

Wir legen den Entwickelungen das Tabellenschema auf S. 198 zu Grunde, indem wir uns vorstellen, die Zahlenwerthe einer derartigen Tabelle seien sämmtlich bekannt.

Angenommen, es versichern sich gleichzeitig eine sehr grosse Anzahl (M) von Personen, die sämmtlich von gleichem Alter m sind; jede zahlt beim Eintritt die Nettoeinlage a und überdies im Falle des Ueberlebens im Anfange eines jeden Jahres die Nettoprämie b, so berechnet sich die gesammte zu erwartende Einnahme der Anstalt leicht in folgender Art.

Von den M Personen zahlt jede beim Eintritt die Einlage a und die erste Prämie b, die Einlage ist also $Ma + Mb$.

Nach einem Jahre leben noch Mp_1 Personen, von denen jede wieder die Prämie b bezahlt. Bezeichnen wir mit e den Werth des Capitales 1 nach einem Jahre, wenn die Zinsen jährlich zum Capital geschlagen werden (es ist $e = 1{,}03$ bei 3 %, $e = 1{,}04$ bei 4 % Zins etc.), so beträgt die Einnahme der Bank am Ende des ersten Jahres discontirt auf die Eintrittszeit:

$$\frac{Mp_1 b}{e}$$

Am Ende des zweiten Jahres leben noch $Mp_1 p_2$ Personen, die Prämieneinnahme von diesen auf die Eintrittszeit discontirt, ist

$$\frac{Mp_1 p_2 b}{e^2} \text{ u. s. f.}$$

Man erhält also als Einnahme E der Bank discontirt auf die Eintrittszeit:

$$E = Ma + Mb \Big[1 + \frac{p_1}{e} + \frac{p_1 p_2}{e^2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{e^3} + \dots \text{ u. s. f. bis Ende der Tafel}\Big]$$

Denkt man sich den Ausdruck in der Klammer mit L_m bezeichnet und für jedes Altersjahr m nach der Mortalitätstafel berechnet, so ist:

$$E = M(a + b L_m). \tag{7}$$

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass man hier, wie es bei Berechnung der Prämien der gewöhnlichen Lebensversicherungen mit so grossem Vortheile geschieht, die discontirten

Zahlen der Lebenden der Mortalitätstafel und deren Summen im Voraus berechnen und die Formel (7) in entsprechender Weise umformen kann; hier mag diese Umformung, wie auch im Folgenden unterbleiben und angenommen werden, es sei dagegen der Ausdruck für L_m für jedes Alter im Voraus bestimmt worden.

Ebenso ist auch leicht zu übersehen, wie die Entwickelung für die Einnahme E durchzuführen ist, wenn die zu zahlenden Prämien nicht gleich hoch, sondern in beliebiger Art veränderlich angenommen werden oder wenn die Prämien nur während einer gewissen Reihe von Jahren gezahlt werden sollen.

Bei der vorhin entwickelten Formel für die Einnahme wurde aber vorausgesetzt, dass alle Lebenden, auch diejenigen ihre Prämien fortzahlen, welche unterdessen durch Unfall in den Zustand bleibender Invalidität übergegangen sind. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, sondern zahlen nur diejenigen Personen die Prämien, welche zur Zeit nicht bleibend invalid sind, wie das der Fall ist, wenn die Versicherung auf Tod und Invalidität gleichzeitig erfolgt, so ist Formel (7) durch eine andere zu ersetzen.

Es leben nämlich nicht bleibend Invalide am Ende des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Jahres nach der Tabelle auf S. 136:

$$Mw_1,\ Mw_1 w_2,\ Mw_1 w_2 w_3,\ \ldots.$$

und daher findet sich hier auf dem gleichen Wege, wie vorhin die ganze zu erwartende Prämieneinnahme auf die Eintrittszeit discontirt:

$$E = Ma + Mb\left[1 + \frac{w_1}{e} + \frac{w_1 w_2}{e^2} + \frac{w_1 w_2 w_3}{e^3} + \ldots.\right]$$

oder wenn man sich den Klammernausdruck für jedes Alter m im Voraus berechnet, denkt und mit P_m bezeichnet:

$$E = M(a + bP_m) \tag{7$_a$}$$

Wir kommen nun zur Berechnung der Ausgabe der Bank. Wird zuerst angenommen, es handle sich nur um die Zahlung der Versicherungssummen im Falle tödtlichen Unfalles, und setzen wir auch hier der Einfachheit wegen voraus, die Anstalt lege gleich im Anfang eines jeden Jahres die Summe zurück, die sie im Laufe des nächsten Zahres voraussichtlich zu zahlen hat; berücksichtigen wir also die Zinsen nicht, welche die Anstalt dadurch gewinnt, dass die Versicherungssummen nicht im Anfange, sondern im Verlaufe des Jahres zu zahlen sind, so findet sich die Ausgabe A_1 wie folgt:

Im Laufe des ersten Jahres verunglückten tödtlich Mr Personen; ist wieder K die Versicherungssumme, so ist die Ausgabe im ersten Jahre: MrK.

Nimmt man an, dass zugleich auch an diejenigen Personen, die inzwischen bleibend invalid wurden, Pensionen gezahlt werden sollen, so fallen diese aus der Zahl derjenigen, die Anspruch auf Versicherungssummen haben, aus, nun leben aber am Ende des ersten Jahres nicht bleibend Invalide Mw_1 (nach dem Tabellenschema S. 136), davon verunglücken tödtlich im Laufe des zweiten Jahres $Mw_1 r$, die Ausgabe im zweiten Jahre auf die Eintrittszeit discontirt ist daher:

$$\frac{Mw_1 r K}{e}.$$

Am Ende des zweiten Jahres ist die Zahl der nicht bleibend Invaliden $Mw_1 w_2$, daher ist die Ausgabe an diese im dritten Jahre, discontirt auf den Eintritt:

$$\frac{Mw_1 w_2 r K}{e^2} \text{ u. s. f.}$$

Durch Summiren folgt denn nun die gesammte zu erwartende Ausgabe an Versicherungssummen auf die Eintrittszeit discontirt:

$$A_1 = MrK\left[1 + \frac{w_1}{c} + \frac{w_1 w_2}{e^2} + \frac{w_1 w_2 w_3}{e^3} + \ldots\right]$$

Auch hier kann man sich wieder den Klammerausdruck, den wir vorhin mit P_m bezeichneten, für jedes Alter m im Voraus berechnet denken, oder den Ausdruck dadurch umformen, dass man die discontirten Zahlen der nicht invalid lebenden Personen und deren Summen berechnet und sich in die Formel eingeführt denkt. Durch die eingeführte vereinfachte Bezeichnung ist jetzt:

$$A_1' = Mr P_m K. \tag{8}$$

Für den Fall, dass keine Invalidenpensionen, sondern nur Todesversicherungen gezahlt werden, ist, wie leicht zu übersehen, P_m mit L_m (in Gl. 7) identisch.

Es soll nun die Ausgabe berechnet werden, welche diejenigen verursachen, die durch Unfall bleibend invalid werden.

Im ersten Jahre werden invalid Mq Personen; das Leibrentencapital, das entsprechend dem Alter m erforderlich ist, um jeder dieser Personen eine lebenslängliche, nachschussweise Leibrente 1 zu erwerben, sei R_m, dann ist die ganze Ausgabe an diese Personen im ersten Jahre bei der Leibrente ρ

$$Mq\rho R_m.$$

Am Ende des ersten Jahres leben noch Mw_1 nicht invalide Personen; ihr Alter ist $m+1$ und das entsprechende Leibrentencapital sei R_{m+1}, daher beträgt die Ausgabe im zweiten Jahre für diese neu hinzugekommenen Invaliden, auf die Eintrittszeit discontirt

$$\frac{Mw_1 q\rho R_{m+1}}{e}$$

Im dritten Jahre werden invalid $Mw_1 w_2 q$ Personen, ihr Alter im Anfange ist $m+2$; das Leibrentencapital sei R_{m+2}, dann beträgt die Ausgabe im dritten Jahre, auf die Zeit des Eintrittes discontirt

$$\frac{Mw_1 w_2 q\rho R_{m+2}}{e^2} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt denn nun die ganze Ausgabe A_2 an Pensionen, welche diejenigen beziehen, die durch Unfall bleibend invalid werden, discontirt auf das Eintrittsjahr:

$$A_2 = Mq\rho\left[R_m + \frac{w_1}{e}R_{m+1} + \frac{w_1 w_2}{e^2}R_{m+2} + \cdots \text{ bis Ende der Tafel}\right]$$

Hier könnte nun wieder der Klammerausdruck, der mit Q_m bezeichnet werden mag, für jedes Alter im Voraus bestimmt werden. Man könnte auch zu weiterer Vereinfachung sich erlauben, für die verschiedenen Leibrentencapitalien einen gewissen mittlern Werth R substituiren oder was sich eher rechtfertigen liesse, den Wahrscheinlichkeitswerth q, wie schon früher angedeutet wurde, in der Art veränderlich nehmen, dass das Product qR als constant vorausgesetzt wird; dann wäre, das übersieht sich leicht:

$$A_2 = Mq\rho R P_m.$$

Behalten wir dagegen die allgemeine Beziehung bei, so findet sich aus der vorletzten Gleichung, wenn für den Werth des Klammerausdruckes die Bezeichnung Q_m benutzt wird:

$$A_2 = M q \rho Q_m. \tag{9}$$

Schon früher und auch bei vorstehenden Entwickelungen wurde gesagt, dass die Unfallversicherungsanstalt diejenigen Personen, die bleibend invalid werden, bei einer Rentenanstalt auf Leibrenten einkaufe. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass dies in Wirklichkeit nicht geschieht, sondern dass die Anstalt selbst ihren Invaliden gegenüber die Stellung der Rentenanstalt einnehmen wird.

Wir kommen nun endlich zur Berechnung derjenigen Ausgaben, welche von den Personen herbeigeführt werden, die vorübergehend invalid werden und die zeitweilig tägliche Geldunterstützung erhalten sollen.

Wird diese tägliche Geldunterstützung mit k bezeichnet, so ist die Ausgabe der Bank im 1., 2., 3. Jahre etc. nach dem Tabellenschema S. 198:

$$Mstk,\ Mw_1 stk,\ Mw_1 w_2 stk \text{ u. s. f.},$$

also die zu erwartende Gesammtausgabe A_3, auf die Eintrittszeit discontirt:

$$A_3 = Mstk\left[1 + \frac{w_1}{e} + \frac{w_1 w_2}{e^2} + \frac{w_1 w_2 w_3}{e^3} + \ldots\right]$$

oder wenn man die bei Gl. (7_a) angezeigte Abkürzung benutzt:

$$A_3 = MstkP_m. \tag{10}$$

Durch Addition der Gesammtausgaben nach Gl. (8), (9) und (10) und durch Gleichsetzen mit der Einnahme nach Gl. (7_a) erhält man jetzt als Fundamentalgleichung:

$$a + bP_m = rKP_m + q\rho Q_m + stkP_m \tag{11}$$

und diese Gleichung umschliesst alle Fälle lebenslänglicher Versicherung gleichzeitig; findet die Versicherung durch Einmaleinlage statt, so ist $b = o$ zu setzen; werden nur Prämien gezahlt, so ist $a = o$; findet die Versicherung nur auf Invalidenrenten und tägliche Geldbewilligung statt, so ist $K = o$ oder verlangt der Versicherte nur die Versicherungssumme im Ealle des Todes, so ist $\rho = o$, $k = o$ und wie früher erwähnt $P_m = L_m$ zu setzen. Die

Sache ist so einfach, dass weitere Erläuterungen zu der Formel unnöthig sind; bemerkenswerth ist nur noch, dass bei der Entwickelung der Gleichung ausdrücklich vorausgesetzt worden ist, dass diejenigen, welche sich auf Tod, bleibende und temporäre Invalidität zugleich versichert haben, ihre Anwartschaft auf die Versicherungssumme beim Tod und auf die Pension bei bleibender Invalidität nicht verlieren, wenn sie auch vorübergehend eine tägliche Geldunterstützung bezogen haben, vorausgesetzt, dass sie bei Versicherung mit Jahresprämien ihre Prämien fortzahlen.

Natürlich ergiebt Gl. (11) die Nettoprämie; zur Berechnung der Brutto- oder Tarifprämie wird der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung noch mit einem gewissen Faktor φ, der grösser als Eins ist, multiplicirt. Dieselbe Gleichung giebt auch zugleich das Mittel an die Hand, das Deckungscapital, die Reserve oder Prämienreserve zu berechnen, d. h. die Summe, die bei der Bilanz der Bank zu beliebiger Zeit für jeden lebenden Versicherten in Cassa sein muss. Hat die Versicherung durch Einmaleinlage stattgefunden, so muss i Jahre nach dem Eintritte für den betreffenden Versicherten offenbar bei der Bilanz so viel in Cassa sein, als er zahlen müsste, wenn er heute zur Zeit der Bilanz erst einträte; für diesen Fall ist also die Reserve, die mit D bezeichnet werden mag:

$$D = rKP_{m+i} + q\rho Q_{m+i} + stkP_{m+i}. \qquad (12)$$

Zahlt dagegen der Versicherte jährliche Prämie und ist b_m die seinem Eintrittsalter entsprechende Nettoprämie, so wäre nach Gl. (11)

$$b_m = \frac{rKP_m + q\rho Q_m + stkP_m}{P_m}$$

Würde er erst zur Zeit der Bilanz, also i Jahre später eintreten, so hätte er die grössere Prämie b_{m+i} zu zahlen; er zahlt aber die bisherige kleinere Prämie b_m fort, und daher muss für für ihn zur Deckung ein Betrag in Cassa sein, gleich demjenigen, den er als Einmaleinlage extra zahlen müsste, wenn er heute im Alter $m+i$ erst einträte und nur die Prämie b_m zahlen wollte. Setzt man daher in Gl. (11) $m+i$ statt m und b_m statt b, so ist $a = D$ die gesuchte Reserve, also:

$$D = rKP_{m+i} + q\rho Q_{m+i} + stkP_{m+i} - b_m P_{m+i} \qquad (13)$$

Ausdrücklich mag wiederholt werden, dass bei der Anwendung dieser Formeln bei den Reserveberechnungen die Nettoeinlagen und nicht die Bruttoprämien in Rechnung gebracht werden, wie das auch bei den gewöhnlichen Lebensversicherungsgesellschaften geschieht. Mehr noch als bei solchen Anstalten, wird es aber bei den Unfallversicherungsbanken (wegen der Unsicherheit der statistischen Grundlagen) nothwendig erscheinen, neben dem berechneten Prämienreservefond noch einen Sicherheitsfond zurückzulegen und hierauf erst den etwaigen Ueberschuss als Gewinn anzusehen, der in Form von Dividenden zur Vertheilung gelangt.

Die angegebene Reservcberechnung erfordert übrigens für die vorhandenen Invaliden (bleibend Invalide) noch eine gesonderte Reservebestimmung. Für diejenige Person, welche bei der Bilanz (i Jahre nach ihrem Eintritte) schon im Genusse der Pension ρ für bleibende Invalidität steht, muss als Reserve D vorhanden sein:

$$D = \rho R_{m+i} \tag{14}$$

wobei wieder R_{m+i} das dem jetzigen Alter $m + i$ entsprechende Leibrentencapital für die jährliche, lebenslängliche, nachschussweise Leibrente 1 darstellt und wobei angenommen wird, die zur Bilanzzeit fällige Leibrente ρ sei schon bezahlt. Bei diesen und den obigen Rechnungen erscheint es mir rathsam, der Sicherheit wegen und so lange nicht zuverlässigeres statistisches Material den Berechnungen zu Grunde gelegt werden kann, für das Leibrentencapital den Bruttowerth und nicht den Nettowerth zu verwenden.

Leicht zu erkennen ist aus Allem, dass die Reserveberechnungen sehr erleichtert werden durch den Gebrauch der Tabellen, die die Nettoprämien und Nettoeinmaleinlagen enthalten und dass unter Voraussetzung des Vorhandenseins solcher Tabellen vorstehende Formeln sich noch in einfachere Gestalt bringen lassen. Das sind aber Fragen, auf die wir nicht näher eintreten und ebenso wenig hat es uns nöthig geschienen, die abgeleiteten Formeln durch Zahlenbeispiele weiter zu erläutern.

Versicherung gegen Eisenbahnunfälle und über die Kriegsversicherung.

Die Formeln, welche oben für Unfallversicherungen überhaupt abgeleitet worden sind, könnten ohne Weiteres auch zur Berechnung und Beurtheilung von Prämientarifen benutzt werden, die speziell für Versicherung gegen Eisenbahunfälle gelten.

Die Gesellschaft »Sécurité générale« hat, wie ich oben gezeigt habe, gerade für diese Versicherungsart umfängliche Tarife, die wir ebenfalls unter gewissen Annahmen über die Prämienzuschläge benutzen könnten, um rückwärts auf die Wahrscheinlichkeitswerthe zu schliessen, welche diesen Prämientarifen zu Grunde gelegt wurden; ich unterlasse aber eine solche weitere Prüfung, da in dieser Richtung nur wiederholt werden müsste, was schon bei Besprechung der Tarife für Unfälle überhaupt auf S. 199 gegeben wurde, hauptsächlich aber, weil ich der Ansicht bin, dass die bis jetzt gebräuchliche Art der Versicherung gegen Eisenbahnunfälle streng genommen wissenschaftlich gar nicht begründet werden kann. Ich bin nämlich nicht der Meinung, dass die obigen Formeln auch zur Berechnung von Prämientarifen für derartige Versicherungen benutzt werden sollen, halte vielmehr die gebräuchlichen Tarife, daher auch diejenigen der »Sécurité générale«, soweit sie sich auf Versicherung gegen Eisenbahnunfälle beziehen, für nicht sachgemäss.

Die Begründung dieser Ansicht ist sehr leicht. Der Berechnung solcher Tarife liegt eine gewisse Annahme zu Grunde über den Werth der »Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahre auf der Eisenbahn zu verunglücken«. Nehmen wir nun auch an, dass sich nur solche Personen versichern, welche die Eisenbahnen wirklich benutzen, so ist doch klar, dass für jeden Eisenbahnreisenden die Wahrscheinlichkeit eines Unfalles eine andere ist, und dass die Unterschiede so bedeutend sein werden, dass die Annahme eines gewissen mittleren Werthes durchaus unzulässig erscheint. Ein Geschäftsreisender z. B., der jahraus, jahrein die Eisenbahn benutzt, ist doch offenbar den Unfällen mehr ausgesetzt, als eine andere Person, die im Jahre vielleicht nur ein oder zweimal kurze Strecken auf der Bahn zurücklegt, und doch sollen beide bei gleicher Versicherungsart dieselbe Prämie zahlen! Daraus ist sogleich ersichtlich, dass man, wenn bei einem Reisenden von der Wahrscheinlichkeit eines Unfalles auf der Eisenbahn gesprochen werden soll, zugleich die Strecke mit in Betracht ziehen muss, die er auf der Bahn zurücklegt, dass also auch die Versicherungsprämie nicht von der Sicherheit der Bahnen überhaupt und allein, sondern auch von der Zeit abhängig sein wird, die der Reisende im Eisenbahnwagen zubringt.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall darf jedenfalls der Fahrzeit oder Fahrstrecke proportional gesetzt werden und ist demnach nur für eine gewisse Einheit Fahrstrecke für alle Reisenden (bei derselben Wagenklasse) als constante Grösse anzusehen; bei Eisenbahnen sind aber die Fahrpreise gleichfalls den Fahrstrecken nahe proportional und daraus folgt, dass die richtigste Form der Prämieneinziehungen bei Eisenbahnunfallversicherungen darin bestehen würde, dass man einen proportionalen Zuschlag auf die Fahrpreise legt und diesen Zuschlag als Prämie für die Versicherung benutzt.

Diese Betrachtung führt eben auf das Resultat, dass unsere bestehenden Unfallversicherungsgesellschaften in ihrer losen und unabhängigen Stellung gegenüber den Eisenbahnverwaltungen die Versicherung gegen Eisenbahnunfälle streng genommen gar nicht in rationeller Weise betreiben können und dass sich wohl in dieser Beziehung mit der Zeit ganz andere Verhältnisse hieraus bilden werden. Die Eisenbahnverwaltungen selbst oder die diesen übergeordneten Staatsbehörden allein nur sind in der Lage, diesen besondern Zweig der Unfallversicherung in richtiger Form ins Leben treten zu lassen und es erscheint selbst schon bei flüchtiger Betrachtung der Sache auffallend, dass solches bei uns noch nicht, wie in England, geschehen ist, obgleich von competenter Seite schon auf die hohe Bedeutung und die grossen Vortheile hingewiesen wurde, welche die angedeutete Form der Eisenbahnunfallversicherung für die Eisenbahnverwaltungen selbst haben müssten. Freiherr von Weber *) berechnet nämlich, dass bei zwangsweiser Unfallversicherung aller Passagiere und nur 0,8 Pfennig Zuschlag auf den Fahrpreis pro Meile nicht nur alle Ausgaben gedeckt werden könnten, welche die Versicherung der Passagiere (im Todesfalle mit 3000, 2000, 1000 Thaler resp. für 1., 2. und 3. Wagenklasse und 600 und 400 Thaler Entschädigung bei resp. schwerer und leichter Verletzung) verursacht, sondern dass die Einnahmen auch noch zur Pensionirung aller Invaliden der Eisenbahnangestellten und zur Zahlung von namhaften Pensionen für deren Wittwen nnd Waisen hinreichend wären. Ich bin gleichfalls der Ansicht, dass eine zwangsweise Versicherung aller Eisenbahnreisenden mit Prämienzahlungen, die faktisch als Zuschlag auf die Fahrpreise geleistet werden, nicht blos zulässig, sondern für alle Theile vortheilhaft wäre. Der Zu-

---

*) Die Lebensversicherung der Eisenbahnpassagiere etc. Leipzig 1855.

schlag auf die Fahrpreise ist so ausserordentlich gering, dass darauf hin kein Einwurf gegen den Versicherungszwang erhoben werden kann. Im neun-jährigen Durchschnitt (1856 bis 1864) kam im deutsch-östreichischen Eisenbahnvereinsnetz auf circa 52 Millionen Personenmeilen unter den Reisenden nur ein tödtlicher Unfall und auf circa 14 Millionen Personenmeilen nur eine Verletzung vor; selbst wenn man von diesen beiden Zahlenwerthen der Sicherheit wegen nur den zehnten Theil in Rechnung bringen wollte (und wenn man zunächst nur die Versicherung der Reisenden allein ins Auge fasst) würde man einen Zuschlag auf die Fahrtaxe erhalten, der für Jedermann, selbst für die Aermsten unmerklich wäre. Der von Freiherr von Weber angenommene Zuschlag erscheint nur desswegen ziemlich hoch, weil nach dessen Vorschlag die Passagiere zugleich auch die ganze Pensionirung und Versorgung der sämmtlichen Eisenbahnangestellten und ihrer Hinterlassenen tragen sollen; dieser Zuschlag würde sich aber noch wesentlich reduciren lassen, wenn, was gerechter Weise gefordert werden kann, die Eisenbahnangestellten selbst und auch die Verwaltungen für ihre Angestellten zu Prämienzahlungen oder besser zu Gründung eigener Hülfscassen verpflichtet würden und wenn die Reisenden nur etwa insoweit in Mitleidenschaft gezogen würden, als es sich um Aufbringung der Summen handelte, welche die Versicherung der Bahnangestellten gegen die Unfälle im Dienste erfordert.

Die Einführung der zwangsweisen Eisenbahnunfallversicherung in der angedeuteten Art in einem grösseren Ländergebiete, z. B. im norddeutschen Bund unter der Leitung und Controlle der Staatsregierung würde segensreiche Folgen haben und auch ganz vorzugsweise die Mittel liefern, eine Reihe von Schäden und Uebelständen im deutschen Eisenbahnwesen, die gerade jetzt vielfach besprochen werden, zu beseitigen und zu mildern. (Vrgl. S. 182 und die dort angeführte Lehmann'sche Schrift.) Von allen Versicherungszweigen bietet gerade der genannte bezüglich der Aufstellung der Prämientarife u. s. w. die geringsten Schwierigkeiten, sobald nur das erforderliche statistische Material besser gesichtet vorliegt.

Es bleibt mir endlich noch übrig, auf einen Zweig der Unfallversicherung hinzudeuten, der der Beachtung im höchsten Grade werth und dessen Einführung ein ganz dringendes Bedürfniss ist;

ich meine die »Versicherung gegen Tod und Verstümmelung im Kriege«. Erst in allerneuester Zeit ist man dazu gelangt, die Frage der Kriegsversicherung in schärfere Ueberlegung zu ziehen, nachdem man erkannt hatte, wie wenig in den verschiedenen Staaten die gesetzlichen Militärpensionen geeignet sind, die Bedürfnisse der Pensionsberechtigten trotz der grossen staatlichen Opfer zu befriedigen und in welch', man muss sagen, hülfsloser und trauriger Lage sich beim Ausbruche eines Krieges alle Militärpersonen befinden, die sich bei einer Lebensversicherungsgesellschaft versichert haben, bei Gesellschaften, die ihre Versicherungen sofort suspendiren oder zur Aufrechterhaltung der Versicherung unerschwingliche Kriegsprämien fordern. In der That, hier ist Hülfe dringend nöthig und vor Allem dort, wo wie in der Schweiz und in den meisten deutschen Staaten allgemeine Wehrpflicht herrscht; man kann wohl sagen, dass man sich bis jetzt viel zu wenig vergegenwärtigt hat, welche Opfer der Staat von den im Militärdienst stehenden Männern verlangt, die in der Sorge um das Wohl ihrer Familie sich versichern, jahrelang Prämie zahlen und die beim Ausbruche eines Krieges beim Verlassen der Ihrigen zu allem Andern auch noch die Ansprüche auf die von ihnen versicherten Summen hingeben müssen!

Es ist allbekannt, dass eine Reihe von Lebensversicherungsanstalten in verschiedener Form die Kriegsversicherung ins Bereich ihrer Thätigkeit zogen und so einem grossen Bedürfniss abzuhelfen, eine grosse Lücke im Versicherungswesen auszufüllen suchten, aber glücklicher Weise mit wenig Erfolg; ich sage, glücklicher Weise; denn allmälig scheint sich doch mehr und mehr die richtige Ansicht Bahn zu brechen, dass die gewöhnlichen Anstalten dieser Art die Kriegsversicherungsbranche weder führen können noch dürften, wenn dieselben im Allgemeinen unter etwas schärferer staatlicher Controlle ständen.

Karup *) sagt mit vollem Rechte, »die Lebensversicherung auf den Todesfall im Kriege darf mit der allgemeinen Lebensversicherung nicht identificirt werden. Sie ist fast nach allen

---

*) Prof. Karup. Die Lebensversicherung auf den Todesfall im Kriege. Leipzig 1869. Ein ausgezeichnetes Schriftchen, welches zugleich die ersten Anfänge einer Kriegsstatistik enthält und auf das wir im Texte zurückkommen werden. S. auch »Rundschau der Versicherungen«. Jahrg. XIX. 1869.

Richtungen hin so verschieden von dieser letzteren, dass die Mitglieder einer solchen gewiss mit Recht von ihrer Verwaltung verlangen können, dass sie dieselbe nicht als Nebenbranche oder gar gemeinschaftlich betreibt. Die Kriegsversicherung muss selbständig betrieben werden.«

Gewiss! Die Kriegsversicherung gehört in das Gebiet der Unfallversicherung und erfordert ganz neue Schöpfungen; nur diejenigen Lebensversicherungsgesellschaften, welche die Versicherungen der Militärpersonen bei ausbrechendem Kriege suspendiren, verfahren rationell und entsprechend den wissenschaftlichen, mathematischen Grundlagen ihrer Anstalt. Bei den Berechnungen der Prämien und Reserven und bei Aufstellung der Mortalitätstafeln hat bis jetzt Niemand dem Todesfalle im Kriege Rechnung getragen und daher kommt die Lösung der Frage über Kriegsversicherung nicht den bestehenden Versicherungsanstalten zu, und wenn sie es dennoch in dieser oder jener Form versuchen, so geschieht es unter Hintansetzung ihrer Verpflichtungen gegenüber ihren übrigen Versicherten.

Wie aber nun auf anderem Wege die Idee der Kriegsversicherung realisiren? Hören wir zuerst Engel, der in seiner Abhandlung *) »Materialien zur Unfallversicherung« sich folgendermassen ausspricht: »Es muss einmal eine Zeit kommen, wo das Militär-Invalidenwesen und die Sorge für die Hinterlassenen der im Felde Gebliebenen in die Formen des rationellen Versicherungswesens gegossen werden wird und wo die Prämien selbstverständlich vom Staate selbst entrichtet werden« und fügt dann hinzu, dass diejenigen die erste und grösste Pflicht haben, den Prämienfond zu bilden, die zwar erwerbs-, aber nicht wehrfähig sind und darum statt der Blutsteuer wenigstens das ungleich geringere Opfer einer Geldsteuer zu übernehmen hätten.

Es ist schwer, aus dieser kurzen Andeutung einen Schluss zu ziehen, wie sich Engel die praktische Ausführung denkt; wenn ich sie recht verstehe, so würden die Prämien für Kriegsrisico (Tod und Invalidität) berechnet; sie würden aber nicht durch das Militär eingezahlt, sondern durch den Staat, resp. durch Verwendung einer Art Militärsteuer der erwerbsfähigen Nicht-Combattanten.

*) Zeitschrift des königl. preuss. statistischen Bureaus 1867, S. 172.

Das Versicherungsprinzip würde hier also nur in einer versicherungsartigen Form von Pensionsfond-Ansammlung zur Geltung kommen.

Einen ganz andern Standpunkt nimmt Karup (a. a. O.) in der Frage ein; nach ihm sollte man an die Gründung einer Anstalt denken, welche allen Militärpersonen ermöglicht, sich auf den Todesfall im Kriege zu versichern. Der Plan, den Karup entwirft, entspricht ganz richtig dem einer Unfallversicherungsbank. Die Wahrscheinlichkeit, bei ausgebrochenem Kriege im nächsten Jahre im Kriegsdienst zu sterben (auf dem Schlachtfeld oder an Krankheit) wird zu 0,103 (nach den Beobachtungen in der französischen Armee im Krimkrieg) angesetzt, die Wahrscheinlichkeit für den Kriegsausbruch, die Kriegswahrscheinlichkeit, dagegen zu 0,17 nach den Erfahrungen in Preussen und daraus wird dann allgemein für Krieg und Frieden für einen Soldaten die Wahrscheinlichkeit, im Kriege zu sterben, zu $0{,}103 \times 0{,}17 = 0{,}01751$ abgeleitet. Mit Hülfe dieses Werthes berechnet dann Karup mit 4 % Zins und 10 % Zuschlag die jährliche Prämie, die ein Combattant zu zahlen hätte, um sich eine Summe von 1000 Franken auf den Todesfall im Kriege zu sichern, zu 18,5 Franken. Bei Militärbeamten wird die Prämie nur halb so hoch angesetzt. Indem wir wegen des Nähern auf die angezeigte Schrift verweisen, heben wir nur noch speziell hervor, dass Karup die ganze Frage des Militärpensionswesens unberührt lässt, das Militär auf Selbsthülfe anweist und vom Staate nichts weiter verlangt, als Schutz und Oberaufsicht und nach Befinden einen Grundfond von einer Million Thalern, der verzinst und nach und nach amortisirt werden soll. Man erkennt, dass Karup mittelst der von ihm vorgeschlagenen Bank, gewissermassen die Lebensversicherungsgesellschaften ergänzend, das bieten will, was letztere auf Grund ihrer Organisation nicht bieten können; so richtig und ausführbar der Gedanke erscheint, so glaube ich doch nicht, dass er Anklang beim Militär selbst finden dürfte, da in Staaten mit allgemeiner Wehrpflicht der Soldat in der That berechtigt ist, nicht so ganz und gar auf Selbsthülfe verwiesen zu werden und der erwähnte Vorschlag Engel's bis zu gewissem Grade gewiss seine Berechtigung hat. Familienväter würden neben der Kriegsversicherung noch zur Lebensversicherung greifen müssen und wegen der ziemlich beträchtlichen Kriegsprämie von 1,85 % dann doch nicht in sie beruhigender Weise für die Ihrigen sorgen können.

Am weitesten ist die Prüfung der Frage der Kriegsversicherung in der Schweiz gediehen, wo schon im Jahre 1866 vom eidgenössischen Militärdepartement die nöthigen Untersuchungen angeordnet wurden und wo auf Anregung von C. Widmer, Director der Schweiz. Rentenanstalt in Zürich, bei der Frage der Umgestaltung des Militärpensionswesens zum ersten Male der Gedanke in gründlichere Erwägung gezogen wurde, ob sich hierbei nicht mit Vortheil das Element der gegenseitigen Versicherung verwerthen liesse. Bekanntlich ist jeder waffenfähige Schweizer in Wirklichkeit militärpflichtig und die Schweiz vermag bei nur etwas über $2\frac{1}{2}$ Millionen Einwohnern ohne Landsturm etwa 190000 Mann ins Feld zu stellen. Das Militärpensionsgesetz, welches die Pensionen der Militärinvaliden und der hinterlassenen Wittwen und Waisen feststellt, ist ähnlich dem anderer Staaten, leidet also an denselben bekannten Gebrechen. Die Nothwendigkeit einer Aenderung der gesetzlichen Bestimmungen wird fast allgemein zugegeben, doch denkt man in den militärischen Kreisen hierbei mehr nur an Erhöhung der im Gesetze festgestellten Pensionen und will durch Gründung eines Fonds, oder besser gesagt, weil ein solcher schon besteht (Winkelriedstiftung), durch Eröffnung neuer und stärkerer Zuflüsse zu demselben, das Mittel finden, im Fall der Noth die Staatshülfe zu verstärken. Die überwiegende Mehrheit der zur Untersuchung der Frage vom eidgenössischen Militärdepartement niedergesetzten Commission einigte sich dagegen zu einem Plane, der in flüchtigem Umrisse hier angegeben werden mag, *) weil er eben die hier in Betrachtung liegende Frage der »Kriegsversicherung« in neuer Form zur Lösung zu bringen sucht und weil in ähnlicher Weise auch in andern Staaten vorgegangen werden könnte; der Plan war folgender:

Es möge in der Schweiz unter Staatsgarantie ein allgemeines, gegenseitiges Lebensversicherungsinstitut (Union Winkelried) gegründet werden. Der Geschäftsbetrieb beschränke

---

*) Es würde der ganzen Anlage dieser Schrift nicht entsprechen, die Entstehung, Entwickelung und Begründung des Planes hier zu erörtern; ich verweise wegen des Nähern auf die vortrefflichen Schriften von Widmer:

1) »Gedanken über die Gründung einer Schweiz. Lebensversicherungscasse.«
2) »Bericht der Winkelriedcommission an das Schweiz. Militärdepartement betreffend Gründung einer Union Winkelried.« Bern 1868.
3) »Rückblicke auf die Frage der Winkelriedstiftung.« Zürich 1869.

sich nur auf die Schweiz, die Centralverwaltung stehe unter der Aufsicht der Bundesbehörden, Gründer sei die Armee, der gesammte Gewinn falle an die Versicherten zurück. Die Anstalt soll in zwei Richtungen zerfallen; die eigentliche Lebensversicherungsanstalt gilt für alle Bewohner der Schweiz und umschliesst auch alle Militärs (facultativ), für welche aber der gleiche Prämientarif gilt wie für die Civilversicherten; man verlange von ihnen bis auf die Versicherungssumme von 10000 Franken keine besonderen Prämienzuschläge und selbst beim Kriegsausbruch keine Kriegsprämie. Neben dieser fakultativen Versicherung soll für die Militärpersonen noch eine obligatorische Versicherung, unabhängig von der vorigen, einzig auf den Tod im Kriege in der Art eingeführt werden, dass gegen Abzug eines Tagessoldes für jedes Dienstjahr jeder Militärangehörige auf 1000 Franken versichert sei.

Die Pensionen für die Militärinvaliden sollte, wie bisher, der Staat allein auf sich nehmen, wie auch diejenigen an hinterlassene Wittwen und Waisen der Gefallenen, nur seien die Invalidenpensionen etwas zu erhöhen (das jetzige Maximum beträgt für den Ganzinvaliden nur 500 Franken jährlich).

Die Anstalt sollte von Grund aus neu errichtet werden, doch rechnete man auf die freiwillige Einverleibung einer oder mehrerer der schon bestehenden (drei) schweiz. Lebensversicherungsinstitute. Nach Aufstellung einer schweiz. Mortalitätstafel nach, den neuesten Forschungen entsprechenden Grundsätzen (das noch fehlende Material liesse sich meiner Ansicht nach gewinnen) sollten die Nettoprämien berechnet und auf diese zur Gewinnung der Bruttoprämien die Zuschläge gelegt werden; aber auch hinsichtlich dieser Frage mit Berücksichtigung der einschlägigen wissenschaftlichen Untersuchungen. Man erwartete auf solche Art im Allgemeinen auf Prämien zu gelangen, die wenig von denen der besten bestehenden Anstalten, z. B. Gotha abweichen würden.

Neben dem regelmässigen Deckungscapital oder der Prämienreserve sollte aus dem Reinüberschuss im Friedensjahre mit 5 % der Prämien aller facultativ Versicherten (auch der Civilversicherten) eine Kriegsreserve gebildet werden, die dann im Kriegsfalle für die Gefallenen verwendet würde und zwar in folgender Art. Für jeden im Kriege gestorbenen Militärversicherten wird die Versicherungssumme aus dessen Prämienreserve und mittelst der Kriegsreserve gebildet und wenn diese, was bei baldigem Kriegausbruche zu erwarten stände, erschöpft würde, müssten staatliche Vorschüsse erfolgen. Der andere Zweig, die obligatorische Versicherung aller Militärs auf den Tod im Kriege (Unfallversicherung), würde unabhängig vom erstern in den Rechnungen gehalten. Aus dem eingezahlten Tagessold würde eine »Kriegsversicherungsreserve« gebildet, aus der die Summe von 1000 Franken an jeden im Kriege verstorbenen Militär auszurichten wäre. Tritt der Krieg ein, bevor dieser Fond die erforderliche Höhe erreicht hat, so übernimmt hier der Bund ohne Rückvergütung die Zahlungen. Die vorläufigen Berechnungen, die unter Annahme der ungünstigsten Verhältnisse durchgeführt wurden, zeigten, dass eine verhältnissmässig kurze Reihe von Friedensjahren hinreicht, die beiden Kriegsreservefonds der Art zu kräftigen, dass die Wahrscheinlichkeit, die Staatshülfe in Anspruch zu nehmen, allmälig erlöscht.

Die Verwaltungskosten des Institutes würden geringer ausfallen, als bei allen bestehenden Privatanstalten; neben der Centralverwaltung dachte man an Bildung von Comité's in den einzelnen Kantonen und dadurch an Entbehrung des Schweifes von Agenten mit ihren Abschluss- und Incassoprovisionen. Diese Ersparniss würde die in die Kriegsreserve gelegten 5 % des Prämienzuschlages ausgleichen, so dass trotz der Kriegsreservebildung der an die facultativ Versicherten (Militärs und Civils) jährlich erfallende Gewinnantheil ungefähr dieselbe Höhe haben könnte, wie bei andern gegenseitigen Lebensversicherungsgesellschaften.

Das ist in flüchtigem Umriss der Plan, den man in der Schweiz zur Ausführung zu bringen hoffte, der aber vielleicht scheitert an der abweisenden Stellung, welche dort gerade die militärischen Kreise in der Frage einnehmen. Ich enthalte mich hier einer weitern Besprechung des Projectes und der Einwürfe; es kam hier nur darauf an, darzulegen, was bis jetzt in der wichtigen Frage der Kriegsversicherung überhaupt ausgesprochen und angestrebt wurde.

Bemerken muss ich aber doch, dass ich die Gründung derartiger Lebensversicherungsanstalten mit Staatsgarantie als den einzigen Weg ansehe, eine vollständige Lösung zunächst der Frage der Kriegsversicherung herbeizuführen: im glücklichen Zusammenwirken des Staates, der Militärs und der Civilversicherten und in richtiger Vertheilung der Deckung des Kriegsrisikos auf mehrere Generationen.

Zugleich wäre dieser Weg geeignet, auch die Idee der Lebensversicherung überhaupt mehr und mehr in alle Kreise der Bevölkerung zu verpflanzen und damit einen grossen socialen Fortschritt wirksam zu befördern.

ANHANG.

Tabellen.

Tabelle Iᵃ.

Entwurf einer

(Gültig für den Sächsischen

Alter.	Werthe der Wahrscheinlichkeit:					
	1	2	3	4	5	6
	Am Ende des Jahres noch zu leben:	Im nächsten Jahre invalid zu werden:	Am Ende des Jahres noch zu leben und nicht invalid zu sein:	Am Ende des Jahres noch zu leben und invalid geworden zu sein:	Im nächsten Jahre invalid zu werden und zu sterben:	Ueberhaupt in Zukunft invalid zu werden:
m	p	q	$w = p - \frac{2pq}{1+p}$	$p - w$	$w + q - p$	
20	0.99003	0.000261	0.98977	0.000259	0.000001	0.2607
21	98993	313	98961	312	2	2631
22	98983	347	98948	345	2	2656
23	98977	371	98940	369	2	2680
24	98962	407	98921	405	2	2706
25	0.98951	0.000464	0.98904	0.000461	0.000002	0.2731
26	98936	501	98886	498	3	2757
27	98923	560	98867	557	3	2782
28	98903	600	98844	596	3	2809
29	98882	662	98817	658	4	2835
30	0.98861	0.000726	0.98789	0.000721	0.000004	0.2863
31	98839	820	98757	816	5	2890
32	98813	927	98721	921	5	2918
33	98787	1055	98682	1048	6	2947
34	98759	1198	98640	1190	7	2976
35	0.98728	0.001393	0.98590	0.001384	0.000009	0.3004
36	98683	1606	98524	1596	11	3033
37	98617	1839	98435	1825	13	3062
38	98549	2117	98339	2102	15	3092
39	98453	2533	98201	2513	20	3123
40	0.98355	0.002966	0.98061	0.002941	0.000025	0.3154
41	98212	3682	97847	3649	33	3186
42	98048	4435	97609	4391	44	3219
43	97876	5231	97368	5175	56	3252
44	97693	6222	97078	6149	73	3286
45	0.97499	0.007137	0.96794	0.007046	0.000090	0.3321
46	97263	8125	96461	8012	113	3357
47	97023	9360	96102	9219	141	3396
48	96735	10712	95681	10535	178	3436
49	96405	12214	95206	11990	224	3479
50	0.96043	0.013899	0.94681	0.013618	0.000280	0.3526
51	95609	16375	94008	16007	368	3578
52	95105	19219	93232	18737	482	3632
53	94462	22117	92313	21487	630	3689
54	93802	25593	91324	24775	819	3758
55	0.93182	0.029045	0.90380	0.028019	0.001025	0.3834
56	92660	32694	89515	31449	1245	3920
57	92249	36535	88743	35062	1473	4016
58	91889	40809	87981	39084	1725	4113
59	91489	45161	87174	43154	2007	4210

Invaliditätstabelle.

Tabelle I^a.

(Freiberger) Bergmannsstand.)

Alter.	Werthe der Wahrscheinlichkeit:					
	1	2	3	4	5	6
	Am Ende des Jahres noch zu leben:	Im nächsten Jahre invalid zu werden;	Am Ende des Jahres noch zu leben und nicht invalid zu sein:	Am Ende des Jahres noch zu leben und invalid geworden zu sein:	Im nächsten Jahre invalid zu werden und zu sterben:	Ueberhaupt in Zukunft invalid zu werden:
m	p	q	$w = p - \frac{2pq}{1+p}$	$p - w$	$w + q - p$	
60	0.91075	0.049977	0.86310	0.047642	0.002334	0.4313
61	90649	55228	85397	52519	2709	4418
62	90179	60923	84401	57777	3146	4529
63	89742	66962	83408	63344	3620	4643
64	89276	73149	82375	69004	4145	4764
65	0.88778	0.081257	0.81135	0.076426	0.004831	0.4897
66	88249	89453	79915	83869	5584	5033
67	87828	98827	78585	92423	6404	5193
68	87289	108721	77155	101342	7378	5352
69	86750	118784	75714	110360	8425	5525
70	0.86350	0.127737	0.74512	0.118380	0.009357	0.5730
71	85714	142157	72592	131222	10935	5980
72	85109	168919	69576	155331	13588	6284
73	84591	194174	66794	177965	16209	6602
74	83871	217246	64052	198190	19057	6956
75	0.83258	0.272727	0.58477	0.247811	0.024916	0.7500
76	82609	307654	54773	278353	29301	8162
77	82237	461538	40582	416550	44988	9284
78	81200	571429	29986	512143	59286	1.0000
79	80295	666666	20915	593807	72860	
80	0.79755	1.000000	0.00000	0.797546	0.202454	
81	78461					
82	78431					
83	76250					
84	75410					
85	0.73913					
86	70588					
87	70833					
88	64706					
89	63636					
90	0.42857					
91	33333					
92						
93						
94						
95						

Tabelle I^b.

Entwurf einer

(Gültig für den Sächsischen

Alter. m	1 Lebende überhaupt: (m)	2 In Activität Lebende: $(m)_a$	3 Invalid Lebende; $(m)_i$	4 Es werden im nächsten Jahre invalid: $q(m)_a$	5 Invalid gewordene Personen überhaupt (Succ. Summen von Col. 4):	6 Invalid gestorbene Personen überhaupt (Differenzen der Col. 5 u. 3):	7 Es sterben invalid im nächsten Jahre (Differenzen der Col. 6):	8 Mittlere Lebenserwartung	9 Mittlere Activitätserwartung
20	10000	10000	0	2.6			0	32.31	29.68
21	9900.3	9897.7	2.6	3.1	2.6	0	0	31.03	28.98
22	9800.6	9794.9	5.7	3.4	5.7	0	0	30.95	28.28
23	9700.9	9691.9	9.0	3.6	9.1	0.1	0.1	30.26	27.58
24	9601.3	9588.8	12.5	3.9	12.7	0.2	0.1	29.59	26.87
25	9501.6	9485.3	16.3	4.4	16.6	0.3	0.1	28.87	26.16
26	9401.9	9381.3	20.6	4.7	21.0	0.4	0.1	28.17	25.44
27	9301.9	9276.9	25.0	5.2	25.7	0.7	0.3	27.47	24.72
28	9201.7	9171.8	29.9	5.5	30.9	1.0	0.3	26.76	24.00
29	9100.8	9065.8	35.0	6.0	36.4	1.4	0.4	26.05	23.27
30	8999.1	8958.5	40.6	6.5	42.4	1.8	0.4	25.34	22.55
31	8896.6	8850.0	46.6	7.3	48.9	2.3	0.5	24.63	21.82
32	8793.3	8740.0	53.3	8.1	56.2	2.9	0.6	23.91	21.09
33	8688.9	8628.2	60.7	9.1	64.3	3.6	0.7	23.20	20.35
34	8583.5	8514.4	69.1	10.2	73.4	4.3	0.7	22.47	19.62
35	8477.0	8398.7	78.3	11.7	83.6	5.3	1.0	21.75	18.87
36	8369.2	8280.2	89.0	13.3	95.3	6.3	1.0	21.02	18.15
37	8259	8158	101	15	109	8	1.7	20.30	17.41
38	8145	8030	115	17	124	9	1	19.58	16.68
39	8027	7897	130	20	141	11	2	18.86	15 95
40	7903	7755	148	23	161	13	2	18.14	15.23
41	7773	7605	168	28	184	16	3	17,44	14.52
42	7634	7441	193	33	212	19	3	16.75	13.83
43	7485	7264	221	38	245	24	5	16.06	13.16
44	7326	7072	254	44	283	29	5	15.41	12.50
45	7157	6866	291	49	327	36	7	14.76	11.86
46	6978	6646	332	54	376	44	8	14.12	11.24
47	6787	6410	377	60	430	53	9	13.51	10.63
48	6585	6161	424	66	490	66	13	12.91	10.04
49	6370	5895	475	72	556	81	15	12.33	9.47
50	6141	5612	529	78	628	99	18	11.77	8.93
51	5898	5313	585	87	706	121	22	11.23	8.40
52	5639	4995	644	96	793	149	28	10.73	7.90
53	5363	4657	706	103	889	183	34	10.25	7.44
54	5066	4298	768	110	992	224	41	9.82	7.12
55	4752	3925	827	114	1102	275	51	9.44	6.64
56	4428	3548	880	116	1216	336	61	9.09	6.29
57	4103	3175	928	116	1332	404	68	8.77	5.97
58	3785	2818	967	115	1448	481	77	8.47	5.66
59	3478	2480	998	112	1563	565	84	8.17	5.37

Invaliditätstabelle.

(Freiberger) Bergmannsstand.)

Tabelle I^b.

Alter. m	1 Lebende überhaupt: (m)	2 In Activität Lebende: $(m)_a$	3 Invalid Lebende: $(m)_i$	4 Es werden im nächsten Jahre invalid: $q(m)_a$	5 Invalid gewordene Personen überhaupt (Succ.Summen von Col. 4):	6 Invalid gestorbene Personen überhaupt (Differenzen der Col. 5 u. 3):	7 Es sterben invalid im nächsten Jahre (Differenzen der Col. 6):	8 Mittlere Lebens-erwartung	9 Mittlere Activitäts-erwartung
60	3182	2161	1021	108	1675	654	89	7.89	5.09
61	2898	1865	1033	103	1783	750	96	7.61	4.82
62	2627	1592	1035	97	1886	851	101	7.35	4.56
63	2369	1344	1025	90	1983	958	107	7.09	4.30
64	2126	1121	1005	82	2073	1068	110	6.84	4.06
65	1898	923	975	75	2155	1180	112	6.61	3.82
66	1685	749	936	67	2230	1294	114	6.38	3.59
67	1487	597	890	59	2297	1407	113	6.16	3.38
68	1306	469	837	51	2356	1519	112	5.94	3.17
69	1140	362	778	43	2407	1629	110	5.74	2.96
70	989	274	715	35	2450	1735	106	5.53	2.75
71	854	204	650	29	2485	1835	100	5.33	2.52
72	732	148	584	25	2514	1930	95	5.14	2.29
73	623	103	520	20	2539	2019	89	4.95	2.07
74	527	69	458	15	2559	2101	82	4.76	1.85
75	442	44	398	12	2574	2176	75	4.58	1.63
76	368	26	342	8	2586	2244	68	4.40	1.42
77	304	13	291	6	2594	2303	59	4.22	1.34
78	250	7	243	4	2600	2357	54	4.03	1.07
79	203	3	200	2	2604	2403	46	3.84	0.85
80	163	1	162	1	2606	2444	41	3.67	0.50
81	130	0	130		2607	2477	33	3.47	
82	102		102			2505	28	3.28	
83	80		80			2527	22	3.05	
84	61		61			2546	19	2.84	
85	46		46			2561	15	2.61	
86	34		34			2573	12	2.35	
87	24		24			2583	10	2.13	
88	17		17			2590	7	1.79	
89	11		11			2596	6	1.50	
90	7		7			2600	4	1.07	
91	3		3			2604	4	0.83	
92	1		1			2606	2	0.50	
93						2607	1		
94									
95									
	328090	301820	26269	Summen					

Tabelle 11ᵃ. **Entwurf einer Heiraths-**

Alter.	Werthe der Wahrscheinlichkeit:						
	1	2	3	4	5	6	7
	Am Ende des Jahres noch zu leben: (nach Brune)	Im Laufe des nächsten Jahres zu heirathen:	Am Ende des Jahres noch unverheirathet zu leben:	Am Ende des Jahres noch zu leben und inzwischen geheirathet zu haben:	Im nächsten Jahre zu heirathen und zu sterben:	im nächsten Jahre noch unverheirathet zu sterben:	Ueberhaupt in Zukunft noch zu heirathen:
m	p	q	$w = p - \frac{2pq}{1+q}$	$p - w$	$w + q - p$	$1 - w - q$	
16	0.98380	0.013	0.97091	0.01289	0.000106	0.01609	0.7400
17	98414	019	96529	01885	142	01572	7488
18	98461	026	95881	02580	201	01519	7561
19	98521	037	94849	03672	276	01451	7614
20	0.98594	0.051	0.93530	0.05064	0.000361	0.01370	0.7638
21	98661	066	92105	06555	445	01294	7620
22	98719	080	90771	07948	516	01229	7558
23	98769	090	89825	08944	557	01175	7445
24	98810	095	89367	09443	569	01133	7286
25	0.98841	0.099	0.88999	0.09842	0.000577	0.01101	0.7090
26	98851	103	88610	10240	595	01089	6854
27	98849	103	88609	10240	596	01091	6573
28	98835	102	88695	10140	598	01105	6253
29	98834	095	89390	09444	557	01110	5902
30	0.98832	0.082	0.90680	0.08152	0.000482	0.01120	0.5540
31	98818	068	92058	06760	404	01142	5205
32	98816	061	92752	06064	363	01148	4915
33	98802	058	93037	05765	350	01163	4641
34	98800	057	93134	05666	344	01166	4365
35	0.98798	0.053	0.93530	0.05268	0.000320	0.01170	0.4072
36	98797	050	93827	04970	303	01172	3790
37	98782	049	93912	04870	300	01188	3507
38	98780	048	94009	04770	295	01190	3209
39	98792	046	94220	04572	280	01180	2901
40	0.98804	0.046	0.94232	0.04572	0.000277	0.01168	0.2590
41	98817	047	94145	04672	280	01155	2259
42	98817	043	94543	04274	256	01157	1902
43	98817	035	95338	03479	208	01162	1540
44	98803	026	96219	02584	157	01181	1266
45	0.98774	0.020	0.96786	0.01988	0.000123	0.01214	0.1047
46	98730	016	97140	01590	102	01260	0879
47	98690	014	97299	01391	092	01301	0743
48	98651	013	97360	01291	088	01340	0616
49	98603	011	97511	01092	077	01389	0503
50	0.98537	0.0096	0.97584	0.00953	0.000071	0.01456	0.0402
51	98468	0082	97654	00814	063	01526	0317
52	98381	0070	97687	00694	057	01613	0238
53	98273	0057	97708	00565	050	01722	0177
54	98128	0045	97682	00446	043	01868	0125
55	0.97942	0.0034	0.97605	0.00336	0.000035	0.02054	0.0089
56	97762	0025	97515	00247	028	02235	0056
57	97571	0016	97413	00158	020	02427	0032
58	97385	0010	97286	00099	013	02614	0017
59	97223	0005	97174	00049	007	02776	0007
60	0.97049	0.0002	0.97029	0.00020	0.000003	0.02951	0.0002
61	96862		96862				
62	96639		96639				
63	95356		95356				
	u. s. f.		u. s. f.				