Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 4.2. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ mit der durch $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ (bei $b, d \in \mathbb{N}_+$), falls $ad \geq cb$ in $\mathbb{Z}$ gilt, definierten Beziehung ein angeordneter Körper ist (dabei dürfen nur Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{Z}$ verwendet werden).

Aufgabe 4.3.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 4.4.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 4.5.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

AUFGABE 4.6. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Zeige, dass $x > 0$ genau dann gilt, wenn $-x < 0$ ist.

(Bemerkung: Diese Aussage kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!)

AUFGABE 4.7. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x \in K$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

AUFGABE 4.8. Beweise die folgenden Aussagen:

In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) $1 > 0$,
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$,
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.

AUFGABE 4.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

AUFGABE 4.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

AUFGABE 4.11. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

AUFGABE 4.12. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

AUFGABE 4.13. Zeige, dass der in Aufgabe 3.22 konstruierte Körper K nicht angeordnet werden kann.

AUFGABE 4.14. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 3.6 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\ n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

AUFGABE 4.15. Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n .$$

AUFGABE 4.16. Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 4.17. Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

AUFGABE 4.18. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

AUFGABE 4.19. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a) $|4x - 3| < |2x - 3|$.

b) $\left|\frac{x-2}{3x-1}\right| \leq 1$.

AUFGABE 4.20. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

AUFGABE 4.21. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x, y) \longmapsto \min(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

AUFGABE 4.22. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|,$$

in einem angeordneten Körper(dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 4.23. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \,|\, x \geq n \text{ und } x < n+1\}\,,\; n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.24. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 4.25. (4 (1+3) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 3.6 konstruierte Zuordnung $\mathbb{Z} \to K$.

a) Zeige, dass diese Zuordnung injektiv ist.

b) Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen und die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit der Ordnung auf K übereinstimmt.

AUFGABE 4.26. (7 (2+4+1) Punkte)

Betrachte die Menge

$$K = \left\{ q + p\sqrt{5} \,|\, p, q \in \mathbb{Q} \right\} ,$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist.

a) Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird.

b) Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird.

c) Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

AUFGABE 4.27. (3 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

AUFGABE 4.28. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.