Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 17

Geometrische Vektorbündel

Zu einem affinen Schema $U = \operatorname{Spek}(R)$ nennt man

$$\mathbb{A}_U^r := \operatorname{Spek}(R[T_1, \ldots, T_r])$$

zusammen mit der natürlichen Projektion auf $\operatorname{Spek}(R)$, also der Spektrumsabbildung zu $R \to R[T_1, \ldots, T_r]$, das *triviale Bündel* vom Rang r über U. Zu einem Punkt $P \in \operatorname{Spek}(R)$, der dem Ringhomomorphimus $R \to \kappa(P)$ entspricht, ist die Faser von $\mathbb{A}_U^r$ über P durch $\mathbb{A}_{\kappa(P)}^r$, also dem r-dimensionalen affineen Raum über dem Restekörper $\kappa(P)$, gegeben. Zu einem beliebigen Schema X mit einer affinen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ definiert man $\mathbb{A}_X^r$, indem man die $\mathbb{A}_{U_i}^r$ im Sinne von Lemma 7.10 so verklebt, wie es die Verklebungen der U_i (innerhalb von X) vorgeben. Dieses *triviale Bündel* vom Rang r kommt zusammen mit der Projektion $\mathbb{A}_X^r \to X$. Man spricht auch vom *affinen Zylinder* vom Rang r über X und schreibt dafür auch $X \times \mathbb{A}^r$. Diese trivialen Bündel sind die lokalen Bausteine für das Konzept eines geometrischen Vektorbündels über einem Schema.

Definition 17.1. Sei X ein Schema. Ein Schema V zusammen mit einem Morphismus $p\colon V \to X$ heißt *geometrisches Vektorbündel* vom Rang r über X, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und U_i-Isomorphismen

$$\psi_i\colon U_i \times \mathbb{A}^r = \mathbb{A}_{U_i}^r \longrightarrow V|_{U_i} = p^{-1}(U_i)$$

derart gibt, dass für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq U_i \cap U_j$ die Übergangsabbildungen

$$\psi_j^{-1} \circ \psi_i\colon \mathbb{A}_{U_i}^r|_U \longrightarrow \mathbb{A}_{U_j}^r|_U$$

lineare Automorphismen sind, also durch einen Automorphismus des Polynomringes $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[T_1, \ldots, T_r]$ der Form $T_i \mapsto \sum_{j=1}^r a_{ij} T_j$ induziert sind.

Die Abbildungen ψ_i heißen dabei die *Trivialisierungen* des Vektorbündels.

Das folgende Beispiel schließt an Beispiel 14.6 an.

Beispiel 17.2. Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, in dem die Gleichheit

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{5}\mathrm{i})(1 - \sqrt{5}\mathrm{i})$$

gilt und darüber die R-Algebra

$$A = R[X, Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y)$$

mit der zugehörigen Spektrumsabbildung Spek$(A) \to$ Spek(R). Wir behaupten, dass ein geometrisches Geradenbündel vorliegt, wofür wir die offene Überdeckung Spek$(R) = D(2) \cup D(3)$ heranziehen. Es ist

$$A_2 = R_2[X,Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y) \cong R_2[S]$$

mit $X \mapsto 2S$, $Y \mapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{5})S$ wegen $S = X/2$ und $X = 2S$ und $Y = \frac{3}{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}X = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}X = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{5}\right)S$ ein Isomorphismus. Ebenso ist

$$A_3 = R_3[X,Y]/(3X - (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})Y) \cong R_3[T]$$

mit $X \mapsto (1 - \mathrm{i}\sqrt{5})T$, $Y \mapsto 3T$ wegen $T = Y/3$ und $Y = 3T$ und $X = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{3}Y = 1 - \mathrm{i}\sqrt{5}|T$ ein Isomorphismus. Auf $D(6) = D(2) \cap D(3)$ ist die Übergangsabbildung durch $S = \frac{X}{2} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}T$ gegeben, also linear.

Beispiel 17.3. Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$K[X,Y,Z] \longrightarrow K[X,Y,Z][U,V,W]/(XU + YV + ZW),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z][U,V,W]/(XU + YV + ZW)) \longrightarrow \mathbb{A}^3_K$$

sowie deren Einschränkung

$$\begin{aligned} \varphi: &\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z][U,V,W]/(XU + YV + ZW)) \\ &\supseteq D(X) \cup D(Y) \cup D(Z) \longrightarrow \mathbb{A}^3_K \setminus \{(0,0,0)\} = D(X) \cup D(Y) \cup D(Z). \end{aligned}$$

Letzteres ist ein geometrisches Vektorbündel vom Rang 2 über dem punktierten affinen Raum. Natürliche Trivialisierungen sind auf den $D(X)$, $D(Y)$, $D(Z)$ gegeben, vergleiche Beispiel 1.2. Beispielsweise ist

$$(K[X,Y,Z][U,V,W]/(XU + YV + ZW))_X \cong K[X,Y,Z]_X[V,W],$$

da man

$$U = -\frac{YV + ZW}{X}$$

ausdrücken kann.

Beispiel 17.4. Wir betrachten den projektiven Raum

$$\mathbb{P}^n_K = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n])$$

und das projektive Spektrum

$$W_k = \operatorname{Proj}(K[X_0, X_1, \ldots, X_n, Y]),$$

wobei die Grade von X_i gleich 1 sind und Y den Grad k bekommt. Gemäß Satz 12.11 induziert die homogene Inklusion

$$K[X_0, X_1, \ldots, X_n] \subset K[X_0, X_1, \ldots, X_n, Y]$$

einen Schemamorphismus

$$p\colon W_k \supset D_+(X_0, X_1, \ldots, X_n) = V_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_K.$$

Auf $D_+(X_i)$ liegt die Abbildung

$$D_+(X_i) \cong \text{Spek}\left(K[\frac{X_j}{X_i}, j \neq i, \frac{Y}{X_i^k}]\right) \longrightarrow D_+(X_i) \cong \text{Spek}\left(K[\frac{X_j}{X_i}, j \neq i]\right)$$

vor, also ein triviales Geradenbündel. Zu $D_+(X_i)$ und $D_+(X_j)$ werden die Übergangsabbildungen über

$$\Gamma\big(D_+(X_iX_j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}\big) \;=\; K[\frac{X_r}{X_i}, r \neq i, \frac{X_s}{X_j}, s \neq j]$$

durch $\frac{Y}{X_i^k} \mapsto \frac{Y}{X_j^k} \cdot \frac{X_j^k}{X_i^k}$ gegeben. Diese sind also linear und es liegt ein Geradenbündel über dem projektiven Raum vor.

Ein geometrisches Vektorbündel hat weitere Strukturen, die wir uns zuerst im Fall

$$\mathbb{A}^r_{\text{Spek}\,(R)} = \text{Spek}\,(R[T_1, \ldots, T_r]) \longrightarrow \text{Spek}\,(R)$$

klar machen. Der R-Algebrahomomorphismus

$$R[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow R,\, T_i \longmapsto 0,$$

führt zu der Spektrumsabbildung

$$\text{Spek}\,(R) \longrightarrow \text{Spek}\,(R[T_1, \ldots, T_r]),$$

die eine abgeschlossene Einbettung ist und die man den *Nullschnitt* nennt. Der R-Algebrahomomorphismus

$$R[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow R[S_1, \ldots, S_r, T_1, \ldots, T_r],\, T_i \longmapsto S_i + T_i,$$

führt zur Spektrumsabbildung

$$\alpha\colon\ \mathbb{A}^{r+r}_R \cong \mathbb{A}^r_R \times_{\text{Spek}\,(R)} \mathbb{A}^r_R \longrightarrow \mathbb{A}^r_R,$$

die man die Addition auf dem Vektorbündel nennt. Ferner führt der R-Algebrahomomorphismus

$$R[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow R[Z, T_1, \ldots, T_r],\, T_i \longmapsto ZT_i,$$

zu einer Spektrumsabbildung

$$\mathbb{A}^{r+1}_R \cong \mathbb{A}^1_R \times_{\text{Spek}\,(R)} \mathbb{A}^r_R \longrightarrow \mathbb{A}^r_R,$$

die man die Skalarmultiplikation nennt.

LEMMA 17.5. *Ein geometrisches Vektorbündel $p\colon V \to X$ über einem Schema X besitzt einen Nullschnitt*

$$X \longrightarrow V,$$

eine Additionsabbildung

$$V \times_X V \longrightarrow V$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{A}^1_X \times_X V \longrightarrow V.$$

Beweis. Auf einer affinen Teilmenge $U = \text{Spek}\,(R) \subseteq X$ mit einer Trivialisierung

$$V|_U \cong \mathbb{A}^r_U \cong \text{Spek}\,(R[T_1, \ldots, T_r])$$

gibt es den durch $T_i \mapsto 0$ gegebenen Nullschnitt. Wegen der Linearität der Übergangsabbildungen ist dieser Schnitt auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ unabhängig von der gewählten affinen Menge und somit wohldefiniert. Die Existenz der Addition beruht im Wesentlichen darauf, dass bei einem linearen R-Algebraisomorphimus

$$\theta\colon\ R[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow R[U_1, \ldots, U_r]$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R[T_1, \ldots, T_r] & \stackrel{\alpha^*}{\longrightarrow} & R[T_1, \ldots, T_r, S_1, \ldots, S_r] \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \times \theta \\ R[U_1, \ldots, U_r] & \stackrel{\alpha^*}{\longrightarrow} & R[U_1, \ldots, U_r, V_1, \ldots, V_r] \end{array}$$

kommutiert. Die Existenz der Skalarmultiplikation ergibt sich in ähnlicher Weise. $\square$

Vektorbündelhomomorphismen

Definition 17.6. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X. Ein *Homomorphismus von Vektorbündeln* $\varphi\colon V \to W$ ist ein Schemamorphismus von V nach W über X derart, dass es zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene affine Umgebung $P \in U \subseteq X$ gibt, die die vorgegebenen Trivialisierungsumgebungen der Bündel verfeinern (also $U \subseteq U_i, U'_j$ für geeignete i, j) und für die die Hintereinanderschaltungen

$$\mathbb{A}^r_U \xrightarrow{\psi_i|_U} V|_U \xrightarrow{\varphi|_U} W|_U \xrightarrow{\theta_j^{-1}|_U} \mathbb{A}^s_U$$

auf der Ringebene durch einen linearen Einsetzungshomomorphismus gegeben sind.

In der folgenden Aussage ist Kern als Urbild des Nullschnittes zu verstehen, also in jeder Faser als Urbild des Nullpunktes. Bei einem Homomorphismus von Vektorbündeln ist über jedem Punkt $P \in X$ die Faserabbildung durch eine Matrix über dem zugehörigen Restekörper $\kappa(P)$ gegeben, allerdings gibt es in den affinen Räumen über diesem Körper Punkte mit ganz unterschiedlichenen Restekörpern, so dass man Konzepte der linearen Algebra mit einer gewissen Vorsicht anwenden muss.

Lemma 17.7. *Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\varphi\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus von Vektorbündeln . Dann ist der (punktweise genommene) Kern ein Vektorbündel über X.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.18. $\square$

Ohne die Bedingung der Surjektivität ist der Kern eines Vektorbündelhomomorphismus kein Vektorbündel. In Beispiel 17.3 ist der punktweise definierte Kern nur auf dem punktierten Spektrum ein Vektorbündel, im Nullpunkt degeneriert der Kern zu einem dreidimensionalen Vektorraum.

Vektorbündel und lokal freie Garben

Definition 17.8. Zu einem geometrischen Vektorbündel $p\colon V \to X$ auf einem Schema X nennt man die zu einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ durch

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \{s : U \to V|_U \text{ Schemamorphismus} \mid p \circ s = \mathrm{Id}_U\}$$

definierte Garbe $\mathcal{F}$ die *Garbe der Schnitte* in V.

Lemma 17.9. *Zu einem geometrischen Vektorbündel $p\colon V \to X$ ist die Garbe der Schnitte $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe.*

Beweis. Durch die Addition

$$V \times_X V \longrightarrow V$$

gibt es aufgrund von Aufgabe 17.19 eine wohldefinierte Addition auf der Garbe der Schnitte, wodurch $\mathcal{F}$ wegen Aufgabe 17.11 zu einer Garbe von kommutativen Gruppen wird. Durch die Skalarmultipliaktion

$$\mathbb{A}^1_X \times_X V \longrightarrow V$$

erhält man eine $\mathcal{O}_X$-Modulstruktur auf $\mathcal{F}$. Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit $V|_U \cong {\mathbb{A}^r}_U$ ist

$$\mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_X|_U)^r$$

und $\mathcal{F}$ ist lokal frei. ☐

Geometrische Vektorbündel und lokal freie Garben sind im Wesentlichen äquivalente Objekte.

Satz 17.10. *Auf einem Schema entsprechen sich geometrische Vektorbündel und lokal freie Garben. Ferner entsprechen sich Vektorbündelhomomorphismen und $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen. Einem geometrischen Vektorbündel V über X wird dabei die nach Lemma 17.9 lokal freie Garbe der Schnitte $\mathcal{S}_V$ zugeordnet und einem Vektorbündelhomomorphismus $\varphi\colon V \to W$ wird der Modulhomomorphismus $\mathcal{S}_V \to \mathcal{S}_W$ zugeordnet, der einen Schnitt $s\colon U \to V|_U$ auf den Schnitt $\varphi \circ s\colon U \to W|_U$ abbildet.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jede lokal freie Garbe isomorph zu einer Garbe der Schnitte in einem Vektorbündel ist. Eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ vom Rang r ist durch eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (wobei wir die U_i als affin annehmen können) und Isomorphismen

$$\varphi_i\colon \mathcal{O}^r_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$$

gegeben. Die Hintereinanderschaltung

$$\mathcal{O}_{U_i}^r|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r \xrightarrow{\varphi_i|_{U_i\cap U_j}} \mathcal{F}|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j^{-1}|_{U_i\cap U_j}} \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r = \mathcal{O}_{U_j}^r|_{U_i\cap U_j}$$

ist nach Satz 13.10 durch $e_k \mapsto f_k$ mit

$$f_k \in \Gamma\Big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}^r\Big)$$

gegeben. Dabei ist $f_k = (f_{k\ell})_{1\leq \ell \leq r}$ mit

$$f_{k\ell} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X).$$

Ferner ist die Determinante der Matrix $(f_{k\ell})_{k\ell}$ eine Einheit in $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$ Dies definiert über

$$T_k \longmapsto \sum_{\ell=1}^{r} f_{k\ell} S_\ell$$

einen linearen $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$-Algebraisomorphismus

$$\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)[T_1, \ldots, T_r] \longrightarrow \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)[S_1, \ldots, S_r]$$

und einen Schemaisomorphismus

$$\varphi_{ji} \colon \mathbb{A}_{U_i\cap U_j}^r \longrightarrow \mathbb{A}_{U_i\cap U_j}^r,$$

der von der in der Definition eines geometrischen Vektorbündels geforderten Form ist. Wir betrachten das Verklebungsdatum von beringten Räumen

$$\left(W_i = \mathbb{A}_{U_i}^r,\, W_{ij} = \mathbb{A}_{U_i}^r|_{U_j} \subseteq W_i,\, \varphi_{ji} : W_{ij} \longrightarrow W_{ji}\right).$$

Die Kozykelbedingung ist dabei erfüllt, da die Daten von dem globalen Objekt $\mathcal{F}$ herrühren. Aufgrund von Lemma 7.10 gibt es ein Schema W, das dieses Verklebungsdatum realisiert. Die lokalen Projektionen

$$W_i = \mathbb{A}_{U_i}^r \longrightarrow U_i$$

verkleben dabei zu einem Schemamorphismus

$$W \longrightarrow X.$$

Aufgrund der Konstruktion handelt es sich um ein geometrisches Vektorbündel über X. Es sei $\mathcal{S}$ die Garbe der Schnitte zu W. Wir behaupten, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}$$

gibt. Wegen der Konstruktion gibt es natürliche Garbenisomorphismen

$$\mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{S}|_{U_i}$$

für jede offene Menge U_i, und deren Einschränkungen auf die Durchschnitte $U_i \cap U_j$ stimmen überein. Nach Korollar 4.10 gibt es daher einen globalen Garbenhomomorphismus, und dieser ist nach Lemma 4.6 ein Isomorphismus.

Die Injektivität der Zuordnung ergibt sich, da sich ein Vektorbündel (bis auf Isomomorphie) durch seine Garbe der Schnitte durch die beschriebene Konstruktion rekonstruieren lässt. Für die Aussage über die Homomorphismen siehe Aufgabe 17.21, Aufgabe 17.22 und Aufgabe 17.23. □

Die freie Garbe vom Rang r entspricht unter dieser Äquivalenz dem affinen Raum $\mathbb{A}_X^r$ über X.

Beispiel 17.11. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein Element. Dieses definiert über

$$\operatorname{Spek}(R[T]) = \mathbb{A}_R^1 \longrightarrow \operatorname{Spek}(R[T]) = \mathbb{A}_R^1, \, T \longmapsto fT,$$

einen Homomorphismus von Vektorbündeln. Dieser ist in den Fasern über den Punkten $P \in \operatorname{Spek}(R)$, in denen f eine Einheit ist (also den Punkten aus $D(f)$), eine Bijektion und über den anderen Punkten die Nullabbildung. Die Abbildung ist also nur dann injektiv (und zugleich surjektiv und bijektiv), wenn f eine Einheit ist. Das Element f definiert aber auch durch Multiplikation einen Homomorphismus der Strukturgarbe in sich

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X, \, 1 \longmapsto f.$$

Auf jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X = \operatorname{Spek}(R)$ liegt also der $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X), \, r \longmapsto rf,$$

vor. Dabei ist dieser Garbenhomomorphismus genau dann injektiv, wenn f ein Nichtnullteiler in R ist, und bijektiv genau dann, wenn f eine Einheit ist. Der Injektivitätsbegriff fällt also für Vektorbündel und lokal freie Garben auseinander.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9