Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 16

Übungsaufgaben

AUFGABE 16.1. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und L, M, N seien S-Strukturen. Zeige folgende Aussagen.

(1) Die Identität $\mathrm{Id}_M \colon M \to M$ ist ein Isomorphismus.
(2) Zu einem Isomorphismus $\varphi\colon M \to N$ ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon N \to M$ ein Isomorphismus.
(3) Es seien $\psi\colon L \to M$ und $\varphi\colon M \to N$ Homomorphismen (Isomorphismen). Dann ist auch die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ ein Homomorphismus (Isomorphismus).

AUFGABE 16.2. Zeige, dass die Begriffe Gruppenhomomorphismus, Ringhomomorphismus, monotone Abbildung zwischen geordneten Mengen und lineare Abbildung unter den abstrakten Homomorphiebegriff (über welchem erststufigen Symbolalphabet S?) fallen.

AUFGABE 16.3. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet, das keine Relationssymbole enthalte. Zeige, dass ein bijektiver S-Homomorphismus zwischen zwei S-Strukturen bereits ein S-Isomorphismus ist.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es seien $(M_1, \leq_1)$ und $(M_2, \leq_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Ordnung definiert ist. Eine Abbildung

$$F\colon M_1 \longrightarrow M_2,\, x \longmapsto F(x),$$

heißt *ordnungstreu* (oder *monoton*), wenn für alle $x, x' \in M_1$ mit $x \leq_1 x'$ stets auch $F(x) \leq_2 F(x')$ gilt.

AUFGABE 16.4. Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, x \longmapsto \{y \in M \mid y \leq x\},$$

ordnungstreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

AUFGABE 16.5. Es sei M die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_+$, versehen mit der Inklusion als Ordnung, und es sei $[0, 1[$ das rechtsseitig offene reelle Einheitsintervall mit der Kleinergleich-Relation als Ordnung. Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi\colon\, M \longrightarrow [0,1[,\; T \longmapsto \sum_{n \notin T} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

eine bijektive, ordnungstreue Abbildung ist, deren Umkehrabbildung nicht ordnungstreu ist.

Warum beschränkt man sich auf unendliche Teilmengen? Wie sehen die „transportierten Ordnungen“ aus?

Aufgabe 16.6. Es sei S ein Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem einzigen einstelligen Relationssymbol besteht. Was bedeutet ein S-Homomorphismus? Welche mathematische Signifikanz hat dieser Begriff?

Aufgabe 16.7. Es sei S ein Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem einzigen einstelligen Funktionssymbol besteht. Was bedeutet ein S-Homomorphismus? Welche mathematische Signifikanz hat dieser Begriff?

Aufgabe 16.8. Es sei S ein Symbolalphabet erster Stufe. Definiere eine S-„Unterstruktur“ in einer S-Struktur M.

Aufgabe 16.9.*

Es sei S ein Symbolalphabet und L^S die zugehörige Sprache erster Stufe. Es sei I eine S-Interpretation mit der Grundmenge N und es sei $\Gamma := I^{\vDash}$ mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Termmenge T.

(1) Zeige, dass $s \sim t$ genau dann gilt, wenn $I(s) = I(t)$ gilt.
(2) Zeige, dass es eine injektive Abbildung $\psi\colon\, T/\sim \longrightarrow N$ mit
$$\psi([t]) = I(t)$$
gibt.
(3) Zeige, dass ψ ein S-Homomorphismus ist, wenn die Quotientenmenge $T/\sim$ mit der kanonischen S-Struktur versehen wird.
(4) Es sei J die kanonische Interpretation auf $T/\sim$. Es sei vorausgesetzt, dass die Terminterpretation für N surjektiv sei. Zeige, dass $I \vDash \alpha$ genau dann gilt, wenn $J \vDash \alpha$ gilt.

Aufgabe 16.10. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet, M und N seien S-Strukturen und $\varphi\colon\, M \to N$ ein Homomorphismus. Es sei λ eine Variablenbelegung in M und $\varphi \circ \lambda$ die nach N übertragene Variablenbelegung. Es seien I und J die zugehörigen Interpretationen. Zeige, dass

$$\varphi(I(t)) = J(t)$$

für alle S-Terme t gilt.

Unter einem *Automorphismus* einer S-Struktur M versteht man einen Isomorphismus von M nach M. Man spricht von der *S-Automorphismengruppe* von M, geschrieben $S - \mathrm{Aut}\ M$.

Aufgabe 16.11. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und M sei eine S-Struktur. Zeige, dass die Menge der S-Automorphismen auf M eine Gruppe bildet.

Aufgabe 16.12. Es sei $S = \{0, +\}$ und $\mathbb{Z}$ sei versehen mit der natürlichen S-Interpretation. Bestimme die S-Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 16.13. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und M eine S-Struktur. Zeige, dass die elementare Äquivalenz von Elementen $m, n \in M$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Aufgabe 16.14. Wir betrachten das Spiel Schnick Schnack Schnuck mit den Objekten Schere, Stein, Papier, Brunnen. Charakterisiere jedes Objekt mit einem Ausdruck, in dem nur auf die Gewinnrelation Bezug genommen wird.

Aufgabe 16.15. In einer Wohngemeinschaft wohnen Albert, Beowulf, Clara, Dora, Emil und Gundula. Dabei können Albert und Beowulf kochen, die anderen vier nicht. Emil findet Beowulf doof, Dora findet Albert und Clara doof, Clara und Gundula finden beide ebenfalls den Albert doof. Charakterisiere jede Person durch einen sprachlichen Ausdruck, in dem nur auf die Kochfähigkeit und das Dooffinden Bezug genommen wird.

Aufgabe 16.16.*

In einer Wohngemeinschaft leben die Personen A, B, C, D, E. Wir betrachten die folgenden Relationen:

(1) Txy bedeutet, dass x und y manchmal miteinander Tennis spielen,
(2) $Sxyz$ bedeutet, dass x, y und z manchmal miteinander Skat spielen,
(3) $Kxyzw$ bedeutet, dass x, y, z und w manchmal miteinander Doppelkopf spielen.

In der WG gilt

$$TDE, SABC, SABE, KACED\,.$$

(1) Charakterisiere umgangssprachlich die Person D allein unter Bezugnahme auf die gegebenen Spielrelationen.
(2) Charakterisiere umgangssprachlich die Person C allein unter Bezugnahme auf die gegebenen Spielrelationen.
(3) Charakterisiere prädikatenlogisch durch einen Ausdruck mit der einzigen freien Variablen x und den Relationssymbolen T, S, K die Person A.
(4) Charakterisiere prädikatenlogisch durch einen Ausdruck mit der einzigen freien Variablen x und den Relationssymbolen T, S, K die Person B.
(5) Charakterisiere prädikatenlogisch durch einen Ausdruck mit der einzigen freien Variablen x und den Relationssymbolen T, S, K die Person E.

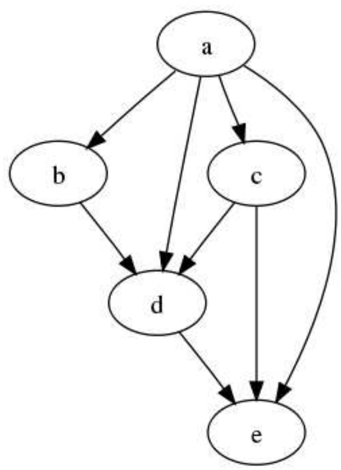
Aufgabe 16.17. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet, das nur aus einer Variablenmenge besteht, die Konstantenmenge und die Mengen der Funktionssymbole und der Relationssymbole seien also leer. Zeige, dass je zwei Elemente $m, n \in M$ elementar äquivalent sind.

Aufgabe 16.18. Es sei S ein Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem einzigen einstelligen Funktionssymbol f besteht und es sei $M = \{1, \ldots, 8\}$ eine S-Struktur, wobei f als die Permutation π mit

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(x)$	2	5	6	8	4	3	1	7

interpretiert werde. Bestimme die elementar äquivalenten Elemente von M.

Aufgabe 16.19.*



Charakterisiere den Punkt d im skizzierten Graphen mit einem Ausdruck in einer freien Variablen x über dem Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem einzigen zweistelligen Relationssymbol R besteht, das im angegebenen Modell durch einen Pfeil wiedergegeben wird.

Aufgabe 16.20. Wir betrachten das Symbolalphabet $S = \{+, 0\}$ mit der natürlichen Interpretation auf $\mathbb{N}$. Zeige, dass jedes Element nur zu sich selbst elementar äquivalent ist.

Aufgabe 16.21. Es seien die Symbolalphabete $S = \{+, 0\}$, $T = \{+, 0, 1\}$, und $R = \{0, 1, +, \cdot\}$ gegeben, die wir auf $\mathbb{Z}$ natürlich interpretieren. Bestimme zu diesen Symbolalphabeten jeweils die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz.

Aufgabe 16.22. Bestimme die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz in der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(4)$ zum Symbolalphabet $S = \{0, +\}$.

Aufgabe 16.23.*

Bestimme die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz in der Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ zum Symbolalphabet $S = \{0, +\}$.

Aufgabe 16.24. Es sei S das Symbolalphabet, das außer Variablen für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein einstelliges Relationssymbol R_k enthält. Wir betrachten die Menge $M = \mathbb{N}_+$, wobei wir das Relationssymbol R_k durch

$$R_k^M(n) \text{ genau dann, wenn } n \text{ ein Vielfaches von } k \text{ ist}$$

interpretieren. Es sei $\alpha \in L^S$ ein Ausdruck in einer freien Variablen x, wobei in α die Relationssymbole $R_{k_1}, \ldots, R_{k_m}$ vorkommen mögen. Es sei k das kleinste gemeinsame Vielfache von $k_1, \ldots, k_m$. Zeige, dass

$$M\frac{n}{x} \vDash \alpha$$

genau dann gilt, wenn

$$M\frac{n+k}{x} \vDash \alpha$$

gilt.

Aufgabe 16.25. Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht und es sei

$$\Gamma = \{\forall x \forall y (Gxy \rightarrow \neg Gyx)\}.$$

Zeige, dass eine vierelementige S-Struktur, die Γ erfüllt, äquivalent zur Gewinnstruktur in einer Vorgruppe bei einer Fußballweltmeisterschaft ist.

(Bemerkung: Eine zweistellige Relation wird oft durch ein Pfeildiagramm veranschaulicht.)

Aufgabe 16.26. Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht und es sei

$$M = \{\mathrm{Bra}, \mathrm{Kam}, \mathrm{Kro}, \mathrm{Mex}\}$$

die S-Struktur, bei der $G(m, n)$ als m gewinnt gegen n (bei der Fußballweltmeisterschaft 2014) interpretiert wird. Bestimme die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz, trennende Ausdrücke und die Automorphismengruppe.

Aufgabe 16.27. Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht. Wir betrachten Modelle, die aus einer vierelementigen Menge M mit einer zweistelligen (Gewinn)-relation G^M bestehen und die die Aussage $\forall x \forall y (Gxy \rightarrow \neg Gyx)$ erfüllen. Zeige, dass zwei verschiedene Elemente $m, n \in M$ zueinander elementar äquivalent sein können, obwohl $G^M(m, n)$ gilt (m und n spielen also nicht unentschieden).

Aufgabe 16.28. Ein Turnier werde im KO-System mit 2^n Mannschaften ausgetragen, jedes Spiel endet also mit einem Gewinner und einem Verlierer und der Verlierer scheidet direkt aus (es gebe kein Spiel um Platz drei oder ähnliches). Das Turnier sei vorbei. Zeige, dass man jede Mannschaft in der Prädikatenlogik allein mit der Gewinnrelation adressieren kann (je zwei Mannschaften sind also nicht elementar äquivalent).

Aufgabe 16.29.*

Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus dem einzigen zweistelligen Relationssymbol G besteht. Wir betrachten die KO-Runden (also ab dem Achtelfinale) der Fußballweltmeisterschaften von 2014 und von 2018, ohne das Spiel um Platz 3, als S-Modelle, wobei wir G als die Gewinnrelation interpretieren, d.h. xGy besagt, dass x gegen y (gespielt und) gewonnen hat.

(1) Welche der folgenden Relationen sind für die WM 2014 wahr: Brasilien G Deutschland, Deutschland G Brasilien, Deutschland G Argentinien, Mexiko G Japan.
(2) Ist $\forall y xGy$ eine Charakterisierung des Weltmeisters?
(3) Charakterisiere durch einen S-Ausdruck in der einen freien Variablen x, dass eine Mannschaft mindestens das Halbfinale erreicht hat.
(4) Charakterisiere durch einen S-Ausdruck in der einen freien Variablen x, dass eine Mannschaft das Halbfinale, aber nicht das Finale erreicht hat.
(5) Betrachte Schweden bei der WM 2018. Man gebe einen S-Ausdruck in der einen freien Variablen x, der Schweden charakterisiert.
(6) Welche(n) Mannschaft(en) der WM 2014 erfüllt (erfüllen) den S-Ausdruck, der Schweden bei der WM 2018 charakterisiert?
(7) Definiere einen S-Isomorphismus zwischen der WM 2014 und der WM 2018.
(8) Ist dies auch ein Isomorphismus, wenn man das Spiel um Platz 3 mitberücksichtigt?

Aufgabe 16.30. Es sei S ein Symbolalphabet erster Stufe und M eine S-Struktur. Für jede elementare Äquivalenzklasse $[m] \subseteq M$ gebe es einen S-Ausdruck $\alpha_{[m]}$ in einer freien Variablen x, der die Klasse $[m]$ beschreibt. Zeige, dass für jedes k-stellige Funktionssymbol f aus $m_1 \sim m_1', \ldots, m_k \sim m_k'$ die elementare Äquivalenz $f^M(m_1, \ldots, m_k) \sim f^M(m_1', \ldots, m_k')$ folgt.

Aufgabe 16.31. Es sei S ein Symbolalphabet erster Stufe und M eine S-Struktur. Für jede elementare Äquivalenzklasse $[m] \subseteq M$ gebe es einen S-Ausdruck $\alpha_{[m]}$ in einer freien Variablen x, der die Klasse $[m]$ beschreibt. Zeige, dass für ein k-stelliges Funktionssymbol f aus $m_1 \sim m_1', \ldots, m_k \sim m_k'$ nicht die Gleichheit $f^M(m_1, \ldots, m_k) = f^M(m_1', \ldots, m_k')$ folgen muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.32. (4 Punkte)

Es seien $\Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq L^S$ widerspruchsfreie Ausdrucksmengen, die unter Ableitungen abgeschlossen seien, und seien M bzw. M' die gemäß der Konstruktion zugehörigen Modelle. Zeige, dass es einen S-Homomorphismus $M \to M'$ gibt.

Aufgabe 16.33. (2 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem einzigen einstelligen Funktionssymbol f besteht und es sei $M = \{1, \ldots, 10\}$ eine S-Struktur, wobei f als die Permutation π mit

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(x)$	5	10	8	4	3	6	9	1	7	2

interpretiert werde. Bestimme die elementar äquivalenten Elemente von M.

Aufgabe 16.34. (4 Punkte)

Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht und es sei

$$M = \{\mathrm{Deu}, \mathrm{Gha}, \mathrm{Por}, \mathrm{USA}\}$$

die S-Struktur, bei der $G(m, n)$ als m gewinnt gegen n (bei der Fußballweltmeisterschaft 2014) interpretiert wird. Bestimme die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz, trennende Ausdrücke und die Automorphismengruppe.

Aufgabe 16.35. (8 Punkte)

Klassifiziere (bis auf Isomorphie) die möglichen Gewinnstrukturen bei einer Verergruppe (wie bei einer Fußballweltmeisterschaft).

(Bemerkung: Es wird also eine vollständige Liste aller möglichen Isomorphietypen verlangt. Die Liste muss systematisch sein und die Vollständigkeit begründet werden.)

Aufgabe 16.36. (2 Punkte)

Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet und M, N seien S-isomorphe S-Strukturen. Zeige, dass die zugehörigen Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}_S\, M$ und $\mathrm{Aut}_S\, N$ isomorph sind.

Aufgabe 16.37. (3 Punkte)

Bestimme die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz in der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(8)$ zum Symbolalphabet $S = \{0, +\}$.

Abbildungsverzeichnis