Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2018/2019

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 23

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 23.1. Löse in $\mathbb{Q}$ die Gleichung

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.2. Artikuliere die beiden folgenden Brüche mit „tel“

(1) $\frac{500}{19}$,
(2) $\frac{509}{10}$.

Aufgabe 23.3. Sind die beiden rationalen Zahlen

$$\frac{25746}{32987} \text{ und } \frac{47556}{60931}$$

gleich oder verschieden?

Aufgabe 23.4. Finde die gekürzte Darstellung für den Bruch

$$\frac{1517}{1591}.$$

Aufgabe 23.5. Finde die gekürzte Darstellung (ausgerechnet) für den Bruch

$$\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 151}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 151^2}.$$

Aufgabe 23.6. Bestimme die Darstellung der Zahlen

$$\frac{41}{125}, -\frac{91}{350}, \frac{69}{222},$$

mit dem kleinstmöglichen Hauptnenner.

Aufgabe 23.7.*

Im Bruch

$$\frac{|||||||||}{||||||||||||}$$

sind Zähler und Nenner im Strichsystem angegeben. Man gebe die entsprechende gekürzte Darstellung an.

Aufgabe 23.8. Rechne den im Fünfersystem gegebenen Bruch

$$\frac{214}{303}$$

in das Zehnersystem um.

Aufgabe 23.9. Rechne den Bruch

$$\frac{219}{95}$$

in das Dreiersystem um.

Aufgabe 23.10.*

Berechne im Vierersystem

$$\frac{321}{203} + \frac{131}{301}$$

(das Ergebnis muss nicht gekürzt sein).

Aufgabe 23.11. Addiere die ersten fünf Stammbrüche.

Aufgabe 23.12. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

nur die einzige ganzzahlige Lösung $(a, b) = (2, 2)$ besitzt.

Aufgabe 23.13. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Eine natürliche Zahl n heißt *vollkommen*, wenn sie mit der Summe all ihrer von n verschiedenen Teiler übereinstimmt.

Aufgabe 23.14.

(1) Zeige

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

(2) Zeige

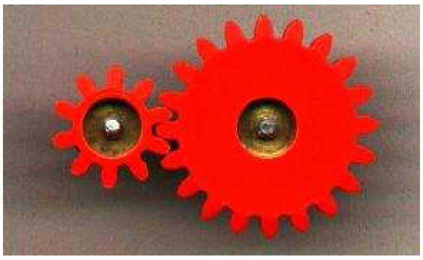
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 1.$$

Aufgabe 23.15. Es sei n eine vollkommene Zahl. Zeige, dass

$$\sum_{k \neq 1,\, k \text{ Teiler von } n} \frac{1}{k} = 1.$$

Aufgabe 23.16. Welche Modelle (Veranschaulichungen, inhaltliche Interpretationen) kennen Sie für die rationalen Zahlen? Vermittelt das Modell eine sinnvolle Größenvorstellung der rationalen Zahlen, lassen sich im Modell sowohl die Addition als auch die Multiplikation sinnvoll interpretieren?

Aufgabe 23.17. Es sei eine Menge von Zahnrädern unterschiedlicher Größe (Zackenanzahl) gegeben, die zueinander passen (Zackengröße und Zackenabstände seien also so, dass die Zahnräder miteinander verkoppelt werden können). Inwiefern stellen zwei miteinander verbundene Zahnräder einen proportionalen Zusammenhang dar? Inwiefern eine rationale Zahl? Wie kann man die Hintereinanderschaltung von drei Zahnrädern mit rationalen Zahlen interpretieren? Kann man eine solche Hintereinanderschaltung (abgesehen vom Drehsinn) durch zwei Zahnräder realisieren?



Aufgabe 23.18. Lucy Sonnenschein legt mit ihrem Fahrrad 15 Meter pro 2 Sekunden zurück, ihre Schwester Veronika 20 Meter pro 3 Sekunden. Besitzt die Summe bzw. das Produkt der beiden Geschwindigkeiten eine sinnvolle inhaltliche Interpretation?

Aufgabe 23.19. Finde physikalische Interpretationen, die die Multiplikation von rationalen Zahlen widerspiegeln. Was passiert dabei mit den Einheiten? (Beispiel: Geschwindigkeit mal Benzinverbrauch pro Streckeneinheit ist Benzinverbrauch pro Zeiteinheit).

Aufgabe 23.20. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q},\ n \longmapsto \frac{n}{1},$$

injektiv ist.

Aufgabe 23.21. Zeige, dass die Multiplikation von rationalen Zahlen wohldefiniert ist.

Aufgabe 23.22. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgabe 23.23. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 23.24. Berechne

$$3^2 \cdot 5^{-1} \cdot 7^{-2} + 2^{-4} \cdot 5^{-2} \cdot 7\,.$$

Aufgabe 23.25. Berechne

$$\frac{\frac{-7}{11}}{\frac{13}{-9}}\,.$$

Aufgabe 23.26. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Aufgabe 23.27. Löse in $\mathbb{Q}$ die Gleichung

$$\frac{7}{11} + x = \frac{5}{9}.$$

Aufgabe 23.28. Löse in $\mathbb{Q}$ die Gleichung

$$\frac{3}{5}x - \frac{2}{7} = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x.$$

Aufgabe 23.29.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 23.30. Lucy Sonnenschein fährt fünf Stunden lang Fahrrad. In den ersten zwei Stunden schafft sie 30 km und in den folgenden drei Stunden schafft sie auch 30 km. Was ist insgesamt ihre Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 23.31.*

Es soll Holz unterschiedlicher Länge (ohne Abfall) in Stücke zerlegt werden, die zwischen 30 und 40 cm lang sein sollen (jeweils einschließlich). Für welche Holzlängen ist dies möglich?

Aufgabe 23.32.*

Ein Metallarbeiter hat zwei Metallstäbe zur Verfügung. Wenn er den kleinen siebenmal hintereinanderlegt, erhält er genau drei Meter. Wenn er den großen achtmal hintereinanderlegt, erhält er genau fünf Meter.

(1) Wie kann er allein mit diesen Stäben eine Länge von einem Meter bestimmen?
(2) Was ist die kleinste positive Strecke, die er mit den Stäben messen kann?
(3) Welche Streckenlängen kann er mit seinen beiden Metallstäben messen?

Aufgabe 23.33.*

Zwei Schmimmer, A und B, schwimmen auf einer 50-Meter-Bahn einen Kilometer lang. Schwimmer A schwimmt $3m/s$ (das ist besser als der Weltrekord) und Schwimmer B schwimmt $2m/s$.

(1) Erstelle in einem Diagramm für beide Schwimmer den Graphen der jeweiligen Abbildung, die für die Zeit zwischen 0 und 100 Sekunden angibt, wie weit der Schwimmer von der Startlinie zu diesem Zeitpunkt (wirklich, also unter Berücksichtigung der Wenden) entfernt ist.
(2) Wie weit von der Startlinie entfernt befindet sich Schwimmer A (und Schwimmer B) nach 30 Sekunden?
(3) Nach wie vielen Sekunden begegnen sich die beiden Schwimmer zum ersten Mal?
(4) Wie oft begegnen sich die beiden Schwimmer (Start mitzählen)?
(5) Wie oft überrundet Schwimmer A den Schwimmer B?

Aufgabe 23.34. Eine Gitarrensaite schwingt beim Ton c ca. 131 mal pro Sekunde hin und her (also 131 Hertz). Wie oft schwingt die Große Septime dazu pro Sekunde? Wie oft schwingt die Quarte zu c pro Minute?

Aufgabe 23.35. Der Preis für eine Maß Bier auf der Münchner Wiesn steht zum Vorjahrespreis im Verhältnis 14 : 13. In welchem Verhältnis steht der heutige Preis zum Preis von vor zehn Jahren?

Aufgabe 23.36. Zeige, dass es ganze Zahlen a, b derart gibt, dass

$$\frac{1}{100} = a\frac{1}{4} + b\frac{1}{25}$$

gilt. Finde solche Zahlen.

Aufgabe 23.37. Finde ganze Zahlen a, b derart, dass

$$\frac{1}{15} = a\frac{1}{3} + b\frac{1}{5}$$

gilt.

Aufgabe 23.38.*

Es seien a, b positive natürliche Zahlen. Die Summe der Stammbrüche ist dann

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}.$$

(1) Zeige, dass bei a, b teilerfremd diese Darstellung gekürzt ist.
(2) Zeige, dass im Allgemeinen diese Darstellung nicht gekürzt sein muss.

Aufgabe 23.39.*

Beweise die *Nichtnullteilereigenschaft* für einen Körper K.

Aufgabe 23.40. Zeige direkt, dass für rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ das Produkt nur dann 0 sein kann, wenn eine der Zahlen 0 ist.

Aufgabe 23.41. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 23.42.*

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $(u^{-1})^k$ ist, verwenden.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 23.43.*

Zeige, dass jede rationale Zahl $z \neq 0$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = \pm \prod_p p^{\nu_p(z)}$$

besitzt, wobei das (endliche) Produkt sich über Primzahlen erstreckt und die Exponenten $\nu_p(z) \in \mathbb{Z}$ sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.44. (3 Punkte)

Finde die gekürzte Darstellung von

$$\frac{8586305}{7190755}.$$

Aufgabe 23.45. (2 Punkte)

Eine lineare Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

hat an der Stelle $\frac{11}{13}$ den Wert $\frac{7}{17}$. Welchen Wert hat sie an der Stelle $\frac{3}{19}$?

Aufgabe 23.46. (3 (1+2) Punkte)

Zum Geburtstag von Mustafa hat Oma Müller drei Kuchen gebacken. Die Kuchen wurden schon gerecht auf die erwarteten sieben Kinder (Mustafa eingeschlossen) aufgeteilt. Alle Kinder kommen, allerdings bringt Lucy noch ihre Schwester Veronika und Heinz bringt Carmen und Conchita mit.

(1) Freunde mitbringen ist kein Problem, allerdings muss man diese vom eigenen Kuchenanteil mitversorgen. Welchen Anteil an Kuchen bekommt Veronika und welchen Anteil Carmen, wenn Lucy bzw. Heinz fair teilt?
(2) Freunde mitbringen ist kein Problem, da wird halt nochmal völlig neu und gerecht aufgeteilt. Welchen Kuchenanteil bekommt jedes Kind? Welchen Anteil von seinem eigentlichen Anteil muss Heinz abgegeben?

Aufgabe 23.47. (5 Punkte)

Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 23.48. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 23.49. (3 Punkte)

Es seien p und q verschiedene Primzahlen. Zeige, dass es ganze Zahlen a, b derart gibt, dass

$$\frac{1}{pq} = a\frac{1}{p} + b\frac{1}{q}$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis