Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 28

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 28.1. Finde einen Bruch $\frac{a}{p}$ mit einer Primzahl p derart, dass bei der schriftlichen Division eine Periodenlänge ℓ mit $2 \leq \ell < p-1$ auftritt.

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.2. Führe den Divisionsalgorithmus zu $1 : p$ für jede Primzahl $p < 20$ durch. Was kann man an den Periodenlängen beobachten?

Aufgabe 28.3. Führe die schriftlichen Divisionen

$$1 : 7,\ 2 : 7,\ 3 : 7,\ 4 : 7,\ 5 : 7,\ 6 : 7$$

durch. Was fällt bei der Ziffernentwicklung auf? Wie kann man das erklären?

Aufgabe 28.4. Führe den Divisionsalgorithmus zu $5 : 7$ und zu $15 : 21$ durch. Notiere die Restfolge und die Ziffernfolge. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede treten auf?

Aufgabe 28.5. Finde eine Primzahl p derart, dass sich beim Divisionsalgorithmus zu $1 : p$ eine von 0 verschiedene Ziffer wiederholt, dies aber nicht Teil der Periodizität ist.

Aufgabe 28.6. Bestimme die 1000. Nachkommastelle bei der schriftlichen Division $1 : 7$.

Aufgabe 28.7.*

(1) Führe sämtliche Divisionen mit Rest

$$10 \cdot k \;=\; q \cdot 17 + r$$

für

$$k \;=\; 1, \ldots, 16$$

aus.

(2) Bestimme mit Hilfe von Teil (1) die Dezimalentwicklung von $\frac{3}{17}$.

(3) Bestimme mit Hilfe von Teil (1) die Dezimalentwicklung von $\frac{11}{17}$.

AUFGABE 28.8. Berechne 1 durch 37 mit dem Divisionsalgorithmus.

AUFGABE 28.9.*

Berechne 1 durch 41 mit dem Divisionsalgorithmus.

AUFGABE 28.10.*

Berechne 1 durch 81 mit dem Divisionsalgorithmus.

AUFGABE 28.11. Berechne 1 durch 101 mit dem Divisionsalgorithmus.

AUFGABE 28.12.*

Es sei a und b natürliche Zahlen mit b positiv. Zeige durch Induktion nach i, dass man die Restfolgenglieder r_{-i} im Divisionsalgorithmus direkt durch die Division mit Rest

$$10^i a \;=\; xb + r_{-i}$$

erhalten kann.

AUFGABE 28.13. Es sei a und b natürliche Zahlen mit b positiv. Zeige, dass beim Divisionsalgorithmus zu

$$a : b,\; 10^k a : b,\; a : 10^n b$$

die gleiche Ziffernfolge auftritt, allerdings mit verändeter Indizierung.

AUFGABE 28.14. Es sei b eine zu 10 teilerfremde positive Zahl. Zeige, dass die Periodenlänge ℓ beim Divisionsalgorithmus zu $1 : b$ gleich der kleinsten positiven Zahl k ist, für die 10^k bei der Division durch b den Rest 1 besitzt.

Aufgabe 28.15.*

Frau Maier-Sengupta ist für ein halbes Jahr in Elternzeit. Ihr Sohn Siddhartha kam mit einem Gewicht von drei Kilogramm auf die Welt und wurde in den sechs Monaten ausschließlich von Muttermilch ernährt. Nach den sechs Monaten wiegt er zehn Kilogramm. Jeden Tag hat das Kind 150 Milliliter Milch getrunken. Wie viel Milch hat Siddhartha in den sechs Monaten getrunken und wie viel Prozent davon ging in die Gewichtszunahme? (Rechne mit Monat = 30 Tage und setze das Milchgewicht gleich dem Gewicht von Wasser an).

Aufgabe 28.16. Die natürlichen Zahlen a, b seien teilerfremd und b sei teilerfremd zu 10. Zeige, dass dann sämtliche Reste r_{-i} im Divisionsalgorithmus zu $a : b$ teilerfremd zu b sind.

Aufgabe 28.17.*

Führe die schriftliche Division

$$53,4 : 0,07$$

durch.

Aufgabe 28.18. Es sei $z = 999\ldots999$ diejenige Zahl im Zehnersystem, die aus $n \geq 1$ Neunen bestehe. Bestimme das Ergebnis der schriftlichen Division $1 : z$.

In Fakt x.y werden wir zeigen, dass die rationalen Zahlen diejenigen reellen Zahlen sind, für die die Dezimalentwicklung periodisch ist. Die folgende Aufgabe bietet eine algorithmische Vorwegnahme dieses Satzes.

Aufgabe 28.19. Zeige, dass jede endliche Ziffernfolge $z_1 z_2 \ldots z_\ell$ als Periode bei einer schriftlichen Division auftritt.

Aufgabe 28.20. Führe im 3-er System den Divisionsalgorithmus $121 : 102$ aus.

Aufgabe 28.21. Führe im 5-er System den Divisionsalgorithmus $1 : 3$ aus.

Aufgabe 28.22. Führe im 7-er System den Divisionsalgorithmus $6563203 : 1000$ aus.

AUFGABE 28.23. Welche Bedeutung würden Sie dem Ausdruck

$$0,101001000100001...$$

(die Punkte bedeuten, dass die Ziffern in der erkennbaren Regelmäßigkeit unendlich weiter fortgesetzt werden) zuordnen? Gibt es dafür eine Interpretation als rationale Zahl, als reelle Zahl, als Folge?

AUFGABE 28.24. Welche Bedeutung würden Sie dem Ausdruck

$$...1212121212121212121212121212121212121212,0$$

zuordnen (die Periode 12 wiederholt sich also unendlich oft nach links)?

AUFGABE 28.25. Wo tritt in der Mathematik (und in anderen Gebieten) Periodizität auf? Sind die Periodizitäten dabei „diskret“ oder „kontinuierlich“?

AUFGABE 28.26. Es seien die z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, die im Divisionsalgorithmus zu $a : b$ berechneten Ziffern. Ist

$$\sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i} = \left(\sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{n-i} \right) 10^{-n}$$

stets die beste Approximation von $\frac{a}{b}$ unter allen ganzzahligen Vielfachen von 10^{-n}?

AUFGABE 28.27. Es seien a, b natürliche Zahlen mit b positiv und es seien z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, und r_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Zeige durch Induktion nach n, dass

$$a = b\left(\sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i} \right) + r_{-n} 10^{-n}$$

gilt.

AUFGABE 28.28. Bestimme die ersten acht Glieder der Dezimalbruchfolge zu $\frac{1}{11}$.

AUFGABE 28.29. Berechne mit dem Divisionsalgorithmus zu $2 : 13$ die Ziffernfolge, die Restefolge und die Dezimalbruchfolge.

AUFGABE 28.30. Zeige, dass die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, gegen 0 (in $\mathbb{Q}$) konvergiert.

Aufgabe 28.31. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x \in K$ mit $|x| < 1$. Zeige, dass die Folge

$$x_n := x^n$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 28.32. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 28.33. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 28.34. Es sei z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, die Ziffernfolge, die sich beim Divisionsalgorithmus $a : b$ ergibt. Wann ist diese konvergent?

Aufgabe 28.35. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem archimedisch angeordneten Körper. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 28.36.*

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Aufgabe 28.37.*

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0, 1]$ aus. Das Intervall wird in zehn gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das achte Teilintervall. Das entstehende Intervall teilen wir ebenfalls in zehn gleichlange Teilintervalle und nehmen davon wieder das achte Teilintervall. Dieser Teilungsprozess wird unendlich oft durchgeführt, wobei eine Folge von Intervallen I_n, $n \in \mathbb{N}$, entsteht (I_0 ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

(1) Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im zweiten Schritt konstruiert wird.

(2) Erstelle eine Formel, die die untere und die obere Intervallgrenze des Intervalls I_n, $n \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
(3) Es gibt genau eine rationale Zahl c, die in jedem Intervall I_n enthalten ist. Bestimme c als Bruch.

AUFGABE 28.38. Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0, 1]$ aus. Das Intervall wird in sieben gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das sechste Teilintervall. Das entstehende Intervall teilen wir ebenfalls in sieben gleichlange Teilintervalle und nehmen davon wieder das sechste Teilintervall. Dieser Teilungsprozess wird unendlich oft durchgeführt, wobei eine Folge von Intervallen I_n, $n \in \mathbb{N}$, entsteht (I_0 ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

(1) Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im ersten Schritt konstruiert wird.
(2) Erstelle eine Formel, die die untere und die obere Intervallgrenze des Intervalls I_n, $n \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
(3) Es gibt genau eine rationale Zahl c, die in jedem Intervall I_n enthalten ist. Bestimme c als Bruch.

AUFGABE 28.39.*

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0, 1]$ aus. Das Intervall wird in drei gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das dritte (Regel 1). Das entstehende Intervall teilen wir in fünf gleichlange Teilintervalle ein und davon nehmen wir das vierte (Regel 2). Jetzt wenden wir abwechselnd Regel 1 und Regel 2 an, immer bezogen auf das zuvor konstruierte Intervall. Dabei entsteht eine Folge von Intervallen I_n, $n \in \mathbb{N}$ (I_0 ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

(1) Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im zweiten Schritt konstruiert wird (also von I_2, nachdem einmal die Regel 1 und einmal die Regel 2 angewendet wurde).
(2) Wie kann man den Konstruktionsschritt, der durch die einmalige Hintereinanderausführung von Regel 1 und von Regel 2 gegeben ist, mit einer einzigen Regel ausdrücken?
(3) Bestimme ein Intervall der Form $[\frac{a}{100}, \frac{a}{100} + \frac{1}{100}]$ mit $a \in \mathbb{N}$, das ganz in I_2 enthalten ist.
(4) Erstelle eine Formel, die die untere Intervallgrenze des Intervalls I_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
(5) Es gibt genau eine rationale Zahl c, die in jedem Intervall I_n enthalten ist. Bestimme c als Bruch.

(6) Gibt es ein Ziffernsystem, in dem die rationale Zahl c aus (5) eine Ziffernentwicklung mit Periodenlänge 1 besitzt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.40. (3 Punkte)

Berechne 1 durch 271 mit dem Divisionsalgorithmus.

Aufgabe 28.41.* (1 Punkt)

Führe die schriftliche Division

$$162,017 : 0,23$$

durch.

Aufgabe 28.42. (3 Punkte)

Führe im 3-er System den Divisionsalgorithmus 2012 : 112 aus.

Aufgabe 28.43. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 28.44. (3 Punkte)

Zeige, dass die Folge $(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, in einem angeordneten Körper nicht konvergiert.

Abbildungsverzeichnis