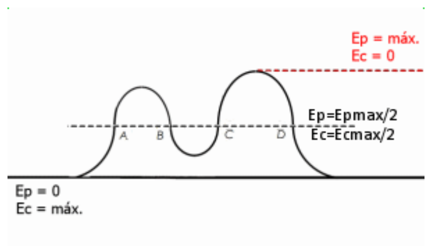
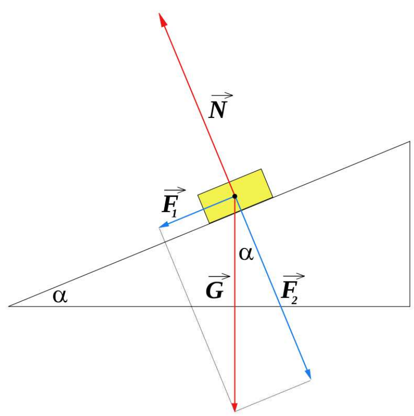
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Geführte Bewegung





Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, wir stellen uns ihren Graphen als ein Profil vor, auf dem sich ein Massekörper (ein Teilchen) unter der konstanten Schwerkraft g bewegt (ohne Reibungsverlust), man spricht von einer *geführten Bewegung*. Die Schwerkraft wirkt nach unten, für die Beschleunigung in Richtung der x-Achse ist aber nur die zum Graphen tangentiale Komponente des Kraftvektors verantwortlich. Der Kraftvektor ist also für jeden Punkt $(x, f(x))$ zu zerlegen in einen zur Tangente parallelen Anteil und einen dazu senkrechten Anteil (letzterer beschreibt die Kraft, die entgegengesetzt aufgewendet werden muss, damit die Bewegung in der vorgegebenen Bahn bleibt, sie ist für das Folgende unerheblich). Dieses Kräftedreieck ist ähnlich zum Steigungsdreieck der Funktion in $(x, f(x))$. Im Steigungsdreieck ist die Länge der horizontalen Komponente gleich 1, die Länge der vertikalen

Komponente gleich $f'(x)$ und die Hypotenuse hat die Länge $\sqrt{1+f'(x)^2}$ (mit dem Steigungswinkel α ist $f'(x) = \tan\alpha$.). Im Kräftedreieck ist die Länge der Hypotenuse gleich g, und wegen der Ähnlichkeit (Stichwort Strahlensatz) ergibt sich für die Stärke der tangentialen Kraft die Beziehung

$$F_{\text{tang}}(x) \,=\, g\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}.$$

Vektoriell handelt es sich um die Kraft

$$-g\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -f'(x) \end{pmatrix}$$

(berechne dessen Norm). Diese durch das Kraftfeld auf ein Teilchen auf der vorgegebenen Bahn (dem Graphen) wirkende tangentiale Beschleunigung muss mit der tangentialen Beschleunigung der Teilchenbewegung übereinstimmen. Diese wird durch die folgende Aussage beschrieben.

Lemma 1. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $h\colon I \to V$ eine zweimal differenzierbare Kurve in einem euklidischen Vektorraum V mit $h'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann ist die tangentiale Beschleunigung gleich*

$$\frac{\langle h'(t), h''(t)\rangle}{\langle h'(t), h'(t)\rangle} h'(t)\,.$$

Beweis. Wegen $h'(t) \neq 0$ ist dieser Vektor Teil einer Orthogonalbasis von V, sei $h'(t)$ zusammen mit $u_2, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis. Es gibt eine eindeutige Darstellung

$$h''(t) \,=\, c_1 h'(t) + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

und $c_1 h'(t)$ ist die tangentiale Komponente. Aus

$$\langle h'(t), h''(t)\rangle \,=\, \langle h'(t), c_1 h'(t) + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n\rangle \,=\, c_1 \langle h'(t), h'(t)\rangle$$

folgt die Behauptung. □

Für die Norm der tangentialen Beschleunigung gilt auch die Beschreibung

$$\|h'(t)\|' \,=\, \frac{\langle h'(t), h''(t)\rangle}{\langle h'(t), h'(t)\rangle} \|h'(t)\|,$$

siehe Aufgabe 38.18.

Lemma 2. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann genügt eine Funktion*

$$x\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto x(t),$$

die die horizontale Komponente einer Bewegung eines Masseteilchens auf dem Graphen von f beschreibt, die durch die konstante vertikale Schwerkraft g hervorgerufen wird, der Differentialgleichung

$$x''(t) \,=\, \frac{-gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1+f'(x(t))^2}.$$

Beweis. Die auf das Teilchen wirkende tangentiale Kraft ist gleich
$$-g\frac{f'(x)}{1+f'(x)^2}\begin{pmatrix}1\\-f'(x)\end{pmatrix}.$$
Die durch die Kraft bewirkte Bewegung (eines Teilchens) auf dem Graphen setzen wir als
$$h(t)\;=\;\begin{pmatrix}x(t)\\f(x(t))\end{pmatrix}$$
an, wobei das Entscheidende in der ersten Komponente geschieht. Wir müssen die zum Graphen tangentiale Kraft, die die tangentiale Beschleunigung bewirkt, mit der tangentialen Beschleunigung der gesuchten Bewegungskurve $h(t)$ gleichsetzen. Es ist
$$h'(t)\;=\;\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix}$$
und
$$h''(t)\;=\;\begin{pmatrix}x''(t)\\f'(x(t))x''(t)+f''(x(t))(x'(t))^2\end{pmatrix}.$$
Daher ist nach Lemma Anhang 1.1 die tangentiale Beschleunigung gleich
$$\begin{aligned}
&\frac{\langle h'(t),h''(t)\rangle}{\langle h'(t),h'(t)\rangle}h'(t)\\
=\;&\frac{\left\langle\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x''(t)\\f'(x(t))x''(t)+f''(x(t))(x'(t))^2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix}\right\rangle}\\
&\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix}\\
=\;&\frac{x'(t)x''(t)+f'(x(t))x'(t)(f'(x(t))x''(t)+f''(x(t))(x'(t))^2)}{x'(t)^2+f'(x(t))^2(x'(t))^2}\\
&\begin{pmatrix}x'(t)\\f'(x(t))x'(t)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$
und dies ist mit der tangentialen Kraftkomponente gleichzusetzen, also mit
$$-g\frac{f'(x(t))}{1+f'(x(t))^2}\begin{pmatrix}1\\-f'(x(t))\end{pmatrix}.$$
In der ersten Komponente führt dies auf
$$\begin{aligned}
&\frac{x'(t)x''(t)+f'(x(t))x'(t)(f'(x(t))x''(t)+f''(x(t))(x'(t))^2)}{x'(t)^2+f'(x(t))^2(x'(t))^2}x'(t)\\
=\;&\frac{x''(t)+f'(x(t))(f'(x(t))x''(t)+f''(x(t))(x'(t))^2)}{1+f'(x(t))^2}\\
=\;&\frac{x''(t)(1+f'(x(t))^2)+f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1+f'(x(t))^2}
\end{aligned}$$

$$= \; -g\frac{f'(x(t))}{1+f'(x(t))^2}.$$

Also ist

$$x''(t)\big(1+f'(x(t))^2\big) \; = \; -gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2$$

und damit

$$x''(t) \; = \; \frac{-gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1+f'(x(t))^2}.$$

□

Bemerkung 3. Die Formel aus Lemma Anhang 1.2, die die geführte Bewegung auf einem Funktionsgraphen im Gravitationsfeld beschreibt, kann man auch aus dem Energieerhaltungssatz ableiten. Die Energie des bewegten Teilchens setzt sich aus der Lageenergie und der Bewegungsenergie zusammen. Die Lageenergie ist dabei gleich $mgf(x(t))$, wobei m die Masse des Teilchens ist (die Lageenergie wird also gleich 0 bei der Höhe 0 gesetzt) und die Bewegungsenergie ist $\frac{1}{2}m\|h(t)\|^2$, wobei $h(t)$ die Gesamtbewegung auf dem Graphen beschreibt. Somit ist die Gesamtenergie gleich das m-fache von

$$\begin{aligned} gf(x(t)) + \frac{1}{2}\|h(t)\|^2 \; &= \; gf(x(t)) + \frac{1}{2}\sqrt{x'(t)^2 + f'(x(t))^2x'(t)^2}^2 \\ &= \; gf(x(t)) + \frac{1}{2}x'(t)^2(1+f'(x(t))^2). \end{aligned}$$

Da diese Energie unabhängig von t ist, muss die Ableitung davon gleich 0 sein, also

$$\begin{aligned} 0 \; &= \; gf'(x(t))x'(t) + x'(t)x''(t) + x'(t)x''(t)f'(x(t))^2 \\ &\quad\; +f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^3 \\ &= \; x'(t)\big(gf'(x(t)) + x''(t) + x''(t)f'(x(t))^2 \; +f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2\big). \end{aligned}$$

Wir ignorieren die konstanten Lösungen und erhalten

$$gf'(x(t)) + x''(t) + x''(t)f'(x(t))^2 + f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2 \; = \; 0.$$

was auf

$$x''(t)\big(1+f'(x(t))^2\big) \; = \; -gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2$$

führt, also

$$x''(t) \; = \; \frac{-gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1+f'(x(t))^2}.$$

Beispiel 4. Sei $f(x) = ax$. Dann wird die geführte Bewegung auf dem geraden Graphen (die schiefe Ebene, die eigentlich eine schiefe Gerade ist) gemäß Lemma Anhang 1.2 durch die Differentialgleichung

$$x''(t) \; = \; \frac{-ga}{1+a^2}$$

beschrieben, die Lösungen haben also die Form

$$x(t) \; = \; -\frac{g}{2}\cdot\frac{a}{1+a^2}t^2 + ct + d$$

mit beliebigen $c, d \in \mathbb{R}$.

Beispiel 5. Sei $f(x) = x^2$. Dann wird die geführte Bewegung auf der Parabel gemäß Lemma Anhang 1.2 durch die Differentialgleichung

$$x'' = \frac{-2gx - 4x(x')^2}{1 + 4x^2}$$

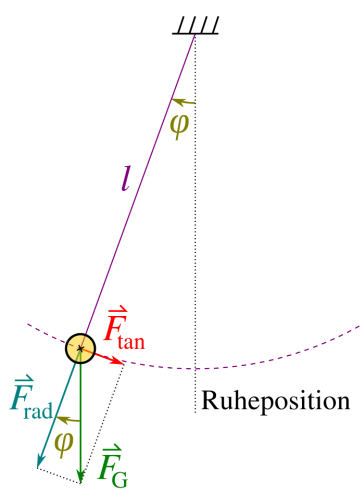
beschrieben.

Beispiel 6. Wir betrachten ein Pendel. Das Pendel habe die Länge r und sei im Punkt $(0, r)$ fest aufgehängt. Die Bahn des Pendels, also der Ort, wo der Endpunkt des Pendels schwingt, ist der Kreis mit diesem Mittelpunkt und dem Radius r. Diese Bahn ist der Graph der Funktion

$$f(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2},$$

und es handelt sich um eine geführte Bewegung im Sinne von Lemma Anhang 1.2. Hier ist es einfacher, die Bewegungsgleichung nicht als $x(t)$ anzusetzen, sondern als eine Bedingung für den (Ausschlags-) Winkel der Bewegung, also als $\alpha(t)$, wobei der Winkel zwischen dem vertikalen Lot und dem Auslenkungsfaden gemessen wird. Es besteht der Zusammenhang

$$x(t) = r \sin \alpha(t).$$



Der Winkel α ist auch die Länge des Bogens, vom Tiefpunkt aus gemessen. Mit der Gravitationskraft g ergibt sich die Differentialgleichung

$$\alpha'' = -\frac{g}{r} \sin \alpha.$$

Dies erhält man auch aus Lemma Anhang 1.2. Es ist

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und

$$f''(x) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}^3}.$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung

$$x''(t) = \frac{-gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1 + f'(x(t))^2}$$

wird in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{-g\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \cdot \frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}^3} x'^2}{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} \\ &= \frac{-gx\sqrt{r^2 - x^2} - x \cdot \frac{r^2}{r^2-x^2} x'^2}{r^2} \\ &= -\frac{gx\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2} - \cdot \frac{xx'^2}{r^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Mit

$$x(t) = r \sin \alpha(t)$$

ist die linke Seite gleich

$$x''(t) = (r \sin \alpha(t))'' = r(\cos \alpha(t) \cdot \alpha'(t))' = r\big(\cos \alpha(t) \cdot \alpha''(t) - \sin \alpha(t) \cdot \alpha'(t)^2\big)$$

und unter Verwendung von

$$f'(x(t)) = \frac{\sin \alpha(t)}{\cos \alpha(t)}$$

und

$$f''(x(t)) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \alpha(t)}^3} = \frac{1}{r \cos^3 \alpha(t)}$$

ist die rechte Seite gleich

$$\begin{aligned} &\frac{-gf'(x(t)) - f'(x(t))f''(x(t))(x'(t))^2}{1 + f'(x(t))^2} \\ = &\frac{-g\frac{\sin \alpha(t)}{\cos \alpha(t)} - \frac{\sin \alpha(t)}{\cos \alpha(t)} \cdot \frac{1}{r \cos^3 \alpha(t)} r^2(\cos^2 \alpha(t))\alpha'(t)^2}{1 + \frac{\sin^2 \alpha(t)}{\cos^2 \alpha(t)}} \\ = &-g \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) - r \sin \alpha(t)\alpha'(t)^2. \end{aligned}$$

Der Term $-r \sin \alpha(t)\alpha'(t)^2$ kommt beidseitig vor, also ist

$$r \cos \alpha(t) \cdot \alpha''(t) = -g \sin \alpha(t) \cos \alpha(t)$$

und Division durch $r \cos \alpha(t)$ ergibt

$$\alpha''(t) = -\frac{g}{r} \sin \alpha(t).$$

Abbildungsverzeichnis