

Mトスル。Cノ周ヲ n 等分シ、ソノ一ツヲABトシ、A、Bニ於テ大
圓弧ABニ切線ヲ引キソノ交點ヲTトシ、又大圓MA、MBニ切線
ヲ引キソノ交點ヲPトスル。PTハA及Bニ於ケル球面Oノ切
平面ノ交リデアアルカラ平面OABニ垂直デアアル。ソレ故

$\angle PTA = \angle PTB = R$ デアアル。△ABMノ球面過剰ハ

$$\angle M + \angle PAT + \angle PBT - 2R$$

$$= \angle M - \angle TPA - \angle TPB$$

Cノ n 等分點ヲ結ンデデキル多角形ノ面積ハコノ球面過剰ノ n
倍ニ比例スル。A、Bニ於ケルCノ切線ノ交點ヲTトスルトT'モ
A及Bニ於ケル切平面上ニアルカラPT上ニアル。 $\angle TPA + \angle TPB$
ノ n 倍ハTヲ頂點トシT'ノヤウナ點ヲ底ノ頂點トスル正 n 角錐
ノ頂點ニ於ケル面ノ和デアアル。 n ヲ十分大キクトルトコノ角錐
ハCヲ底トスル圓錐ニ近ヅク。ソレ故 $\angle TPA + \angle TPB$ ノ n 倍ハPA
ヲ半徑トシCノ周ト等シイ長サノ弧ヲモツ扇形ノ中心角ニ近ヅ
ク。コノ中心角ハ

$$\frac{Cノ周 \times 4R}{2\pi PA}$$

デアアル。又LMノ n 倍ハ $4R$ ニ等シイカラSヲ球ノ全面積トスル
トCノ面積ハ

$$\frac{S \left\{ 4R - \frac{Cノ周 \times 4R}{2\pi PA} \right\}}{4R} = S \left\{ 1 - \frac{Cノ周}{2\pi \cdot PA} \right\}$$

球ノ中心ヲOトスルトCノ周ハ $2\pi \cdot AN$ ニ等シク

$$\frac{AN}{PA} = \frac{ON}{OA} = \frac{r-x}{r}$$

ソレ故求ムル面積ハ

$$S \left(1 - \frac{r-x}{r} \right) = \frac{Sx}{r}$$

$$= 4\pi rx$$

注意 コノ結果ハ前章デ豫想シタ結果ト一致スル。即球ノ切
平面 α ト之ニ平行ナ平面 β トノ間ニ夾マレル部分ノ表面積ハ α
上ニ一ツノ底面ヲモツ外接圓嚮ノ側面ノコノ間ニ夾マレル部分
ノ面積ニ等シイ。

例 題 XIII

1. 三ノ球ニ共通ナ切平面ハイクツアルカ。
2. 四面體ノ三ツノ面ガアル球ニ關シ之ニ對スル頂點ノ極面テ
アレバ第四ノ面モ亦之ニ對スル頂點ノ極面デアアル。コノトキコノ
四面體ハ直稜四面體デアアル。
3. 二ツノ與ヘラレタ球ニ關スル極面ガ一致スルヤウナ點ハア
ルカ。
4. 二定點ヲ過ル球ト一定球トノ根面ハ一定直線ヲ含ム。三定
點ヲ過ル球ト一定球トノ根面、二定點ヲ過ル球ト二ツノ定球トノ根
軸、三定點ヲ過ル球ト二ツノ定球トノ根軸ニツイテハドウカ。
5. 二ツノ球ノ共通切線ハ共通切平面上ニアルトハ限ラナイ。
一ツノ平面上ニ二ツノ球ノ共通切線ハイクツアルカ。
6. 二ツノ球ノ共通切線ノ切點間ノ線分ノ中點ハ同一平面上ニ
アル。
7. 三ツノ球ニ共通切平面ガ數多引ケルトキソノ一ツノ切平面
ノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ外心ヲ作レバコレラノ點ハ皆一直線
上ニアル。
8. 二ツノ球ニ關スル方囀ノ比ガ一定比ニ等シイ點ノ軌跡ハ何
カ。又三ツノ球ニ關スル方囀ノ連比ガ一定連比ニ等シイ點ノ軌跡
ハ何カ。
9. 三ツノ球ガ一點テ交ルトキコノ點ト三ツノ球ノ中心ヲ結ブ
三ツノ線分ヲ稜トスル三面角ノ面及二面角ハ三ツノ球ノ二ツツツ
ノ交角及三ツノ球ノ二ツツツノ交リノ圓ノ角ニ等シイ。

10. AB 球 K ノ一ツノ直徑トスル。K ト直角ニ交ル一ツノ球ト AB トノ交點ヲ C, D トスレバ C, D ヲ過ル球ハスベテ K 球ニ直角ニキル。
11. 一定點ヲ過リ一定平面ヲ一定角ニキル球ハ二定球ノ何レカニ切スルコトヲ證明セヨ。但平面ト球トノ交角トハソノ交リノ上ノ點ニ於ケル切平面トコノ平面トノ交角デアアル。
12. ニツノ球ノ相似ノ中心ヲ過ル平面テコノ二球ヲキレバソノ截面ノ半徑ハ球ノ半徑ニ比例スル。三ツノ球ヲ相似ノ軸ヲ含ム平面テキツタトキモ同ジデアアル。
13. ニツノ球ノ二ツノ相似ノ中心ヲ直徑ノ兩端トスル球(之ヲ相似ノ球ト云フ。)上ノ點ノコレヲノ球ニ關スル方器ハ兩球ノ半徑ノ平方ニ比例スル。
14. 三ツノ球 K_1, K_2, K_3 ノ K_1, K_2 ノ相似ノ球 C_3 ト K_2, K_3 ノ相似ノ球 C_1 ガ一ツノ圓 C ヲ共有スルトキ K_3, K_1 ノ相似ノ球 C_2 モ C ヲ含ム。
15. 四ツノ球ノ二ツツツノ相似ノ中心ハ六ツツツ一平面上ニアアル。カヤウナ平面ハイクツアルカ。
16. 球 O ト二點 P, P' ガ與ヘラレタトキ P カラ P' ノ極面ヘ引ク垂線ト P' カラ P ノ極面ヘ引ク垂線トノ比ハ $OP : OP'$ ニ等シイ。
17. 四面體 ABCD ノ BCD ノ外接圓ヲ底トシ A ヲ頂點トスル圓錐ノ側面デアアル圓錐面ヲ A ニ於ケル外接球ノ切平面ニ平行ナ平面テキレバ截面ハ圓デアアル。
18. 球 K ニヨリ球 C ガ球 C' ニ反轉サレルトキ C, C' ノ双方ニ外接スル球ハ K 球ニ直角ニキル。
19. 一ツノ圓周上ニ四ツノ點ガアリ之ガ調和點列ヲナシテ居ルトキコレヲノ點ノ反形モ亦同一圓周上ニアツテ調和點列ヲナシテ居ル。
20. 4 箇ノ平面ガ一直線ヲ共有シテ居ルトキコノ直線ト交ラナイ一ツノ直線トコノ 4 箇ノ平面トノ交點ガ調和點列ヲナシテ他ノ任意ノ直線トノ交點モ調和點列ヲナス。

21. 三ツノ球ヲ反轉シテ半徑ノ等シイ球トスルコトガデキルカ。又四ツノ球テハ如何。
22. 三ツノ球ヲ反轉シテ中心ガ一直線上ニアル球トスルコトガデキルカ。四ツノ球テハ如何。
23. 廻轉錐面又ハ廻轉錐面 K ニ内接スルニツノ球 K_1, K_2 ガアル。 K_1, K_2 ノ共通切平面(K ノ切平面テナイ)ト K トノ交リノ上ノ點ヲ P トシ、コノ切平面ガ K_1, K_2 ニ切スル點ヲ T_1, T_2 トスレバ $T_1P + T_2P$ ハ P ガ交リノ上ヲ動イテモ變ラナイ。
24. ニツノ球 K_1, K_2 ガ圓 C ニソウテ交ルトキ K_1 上ノ圓 C_1 ト C トヲ含ム圓錐面ト K_2 トノ C テナイ交リハ C_1 ノ平面ト平行ナ平面上ニアアル圓デアアル。
25. 一定球内ノ一定點ヲ過リ互ニ垂直ナ三ツノ弦ヲ作ルトキ之等ノ弦ノ平方ノ和ハ一定デアアル。
26. ニツノ球面三角形 AEC, A'B'C' ニ於テ $AB = A'B', AC = A'C', \angle B = \angle B'$ デアルトキ全等デアアルカ。又 $BC = B'C', \angle B = \angle B', \angle A = \angle A'$ デアルトキハ如何。
27. 球面四角形ノ相對スル邊ガソレゾレ相等シケレバ相對スル角モ亦相等シイ。
28. 球面三角形ノ三邊又ハソノ延長ニ切スル圓ハイクツアルカ。
29. 球面三角形ノ邊ノ中點(コノ邊ヲナス大圓弧ヲ二等分スル點)ヲコノ邊ニ對スル頂點ト結ブ三ツノ大圓弧ハ一點ニ會スル。
30. 球面三角形内ノ一點カラ三頂點ニ至ル大圓弧ノ和ハ三邊ノ和ヨリ小サクソノ半分ヨリ大キイ。
31. 球面三角形ニ内接スル圓ノ邊ニ切スル點ヲ之ニ對スル頂點ト結ブ三ツノ大圓ハ同一点ニ會スル。
32. 球面三角形ニ外接スル圓ノコノ三角形ノ頂點ニ於ケル切線ト對邊トノ交點デアアル三點ハ同一ノ大圓上ニアアル。
33. 球面三角形ノ頂點ヲ過リコノ頂點カラ對邊ヘ垂直ニ引イタ大圓ニ垂直ナ大圓ヲ作り之ト對邊トノ交點ヲ求メレバコレヲノ三點ハ一ツノ大圓上ニアアル。

34. 球面上デモげすかるノ定理及ぶりあんしよんノ定理が成立スル。
35. 球面三角形ノ頂點ヲ過リ對邊ニ垂直ナ三ツノ大圓ハ一點ニ會スル。
36. 一ツノ邊 BC ナ共有スル多クノ球面三角形ノ他ノ二邊ノ中點ヲ結ブ大圓ハ定點ヲ過ル。
37. 球面四角形ガ圓ニ内接スルトキ相對スル角ノ和ハ相等シイ。
38. 球面四邊形ノ四邊ガ皆等シイトキ相對スル角ハ相等シク相對スル頂點ヲ結ブ大圓ハ直角ニ交ル。
39. 球面三角形 ABC ガ與ヘラレタトキ OA, OB 上ニ點 P, Q ナトリ $\triangle OPQ$ ノ周ガ一定デアルヤウニスルトキ PQ ハ一ツノ小圓ニ切スル。
40. 球 K ニツキ直線 a, b ガ共軌デアルトキソレゾレ a, b ナ含ム平面 α, β ト K トノ交リハ直角ニ交ル。
41. 球面上テ根軸ヲ共有スル多クノ圓ノ極ハ根軸ニ垂直ナ一ツノ大圓上ニアル。
42. 球面上ノ三ツノ圓ノ二ツツツノ根軸ハ一點ニ會ス。
43. 球面上ノ三ツノ圓ノ二ツツツノ相似ノ中心ハ六ツツ同シ大圓ノ上ニアル。
44. 二ツノ小圓ノ周ヲ二等分スル小圓ハ二定點ヲ過ル。
45. 同一平面上ニ二ツノ圓 C_1, C_2 ガアリソノ根軸ガ δ テアツタトスルト δ ナ軸トシテ C_1 ナソノ平面ト共ニ廻轉シテ新シイ位置 C_1' ニ持ツテクレバ C_1' ト C_2 トハ同一球面上ニアル。
46. 一定圓ヲ含ム球ト一定球 K トノ交リハ K 上テ根軸ヲ共有スル圓群デアル。
47. 根軸ヲ共有スル圓群ノ反形ハ又根軸ヲ共有スル圓群デアル。特ニ平面上ノ共軸圓群ヲ極射影スレバ球面上テ根軸ヲ共有スル圓群ガデキル。
48. 平面 π 上ニ圓 C ガアル。C ナ大圓トスル球 K ナ作リソノ上テ C ノ極ノ一ツヲ N トスル。N カラ π 上ニアツテ C ニツイテ互ニ

- 反形デアル二點 P, Q ナ K 上ニ極射影スルト, ソレラノ點ハ π ニツイテ互ニ對稱デアル。
49. 球面上テ小圓 C_1 ガ小圓 C ニ關シ小圓 C_2 ニ反轉サレルトキ C_1, C, C_2 ハ根軸ヲ共有スル。
50. 球面ヲ全等又ハ對稱ナ球面多角形ニ分ツ方法ヲ求ム。
51. 球面三角形ノ面積ハソノ極三角形ノ周ト大圓周トノ差ニ比例スル。
52. 多面體 P ノ一ツノ多面角ノ補多面角(補三面角ト同様ニ定義スル)ヲ T トシ, 球 K ノ中心ヲ頂點トシ, T ト全等ナ多面角ヲ作り之ト K トノ交リノ球面多角形ヲ S トスル。P ノスベテノ多面角ニツイテ, S ノヤウナ多角形ヲ作レバソノ面積ノ和ハ K ノ全面積ニ等シイ。
53. 球面ノ四分ノ一ニ等シイ面積ヲモツ小圓ノ球面上ノ半徑ノ中心角ハ何程カ。
54. 一定球 O ノ中心ヲ過ル球面ガ O ト交ルトキコノ球面ノ O 内ノ部分ノ面積ハ一定デアル。
55. 半徑 r ナル球ヲ中心カラ d ナル距離ニアル平面テキツタトキ兩部分ノ體積ハ何程カ。
56. 半徑 r ナル球ノ直徑ヲ AB トシ, AB 上ニ $AC=a, CD=h, DB=2r-a-h$ ナル二點 C, D ナトルトキ, CD ナ過リ AB ニ垂直ナ平面ノ間ニ夾マレタ球ノ部分ノ體積ヲ求ム。
57. 半徑 r ナル球ノ一ツノ直徑ヲ軸トシ, 半徑 r ナル廻轉嚙面ヲ作ルトキソノ内部ニアル球ノ部分ノ體積ヲ求ム。

第十四章 軌跡及作圖題

1. 平面幾何學ノ軌跡問題ノ擴張 立體幾何學ノ軌跡問題ニモ平面幾何學ノ軌跡問題ト似タ方法デ解決デキルモノガ多イ。

例 1. 二定點 A, B カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比 $h:k$ ($h \neq k$) ニ等シイヤウナ點 P ノ軌跡。

解 條件ニ適スル一點ヲ P トシ平面 PAB ヲ考ヘル。コノ平面上デ $PA:PB=h:k$ デアルカラ P ハ AB ヲ $h:k$ ノ比ニ内分及外分スル點 C, D ヲ直徑ノ兩端トスル圓周上ニアル。然ルニコノ圓ハ C, D ヲ直徑ノ兩端トスル球 K ノ一ツノ大圓デアアルカラ P ハ球 K ノ上ニアル。

逆ニ K 上ノ一點ヲ P トスル。平面 PAB ト K トノ交リハ CD ヲ直徑トスル圓デアアル。P ハコノ圓周上ニアルカラ $PA:PB=h:k$ デアル。ソレ故 P ハ條件ニ適スル。

即求ムル軌跡ハ K デアル。

コレハ平面幾何ノ軌跡カラ廻轉ニヨツテ立體幾何ノ定理ヲ得タ例デアアル。

例 2. 三定點 A, B, C カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比 $h:k:l$ ニ等シイ點ノ軌跡、但 h, k, l ハ皆等シクナイトスル。

解 A, B カラノ距離ノ比ガ $h:k$ ニ等シイ點ノ軌跡デアアル所ノ球ヲ H トシ、B, C カラノ距離ガ $k:l$ ニ等シイ點ノ軌跡ヲ K トスル。A, B, C カラノ距離ノ比ガ $h:k:l$ ニ等シイ點ハ H 上ニモ K 上ニモナケレバナラナイカラ、ソノ交リノ上ニナケレバナラナイ。ソレ故條件ニ適スル點ハ H ト K トノ交リノ上ニアル。逆ニ H ト K トノ交リノ上ノ一點ヲ P トスルト $AP:BP=h:k, BP:CP=k:l$ デ

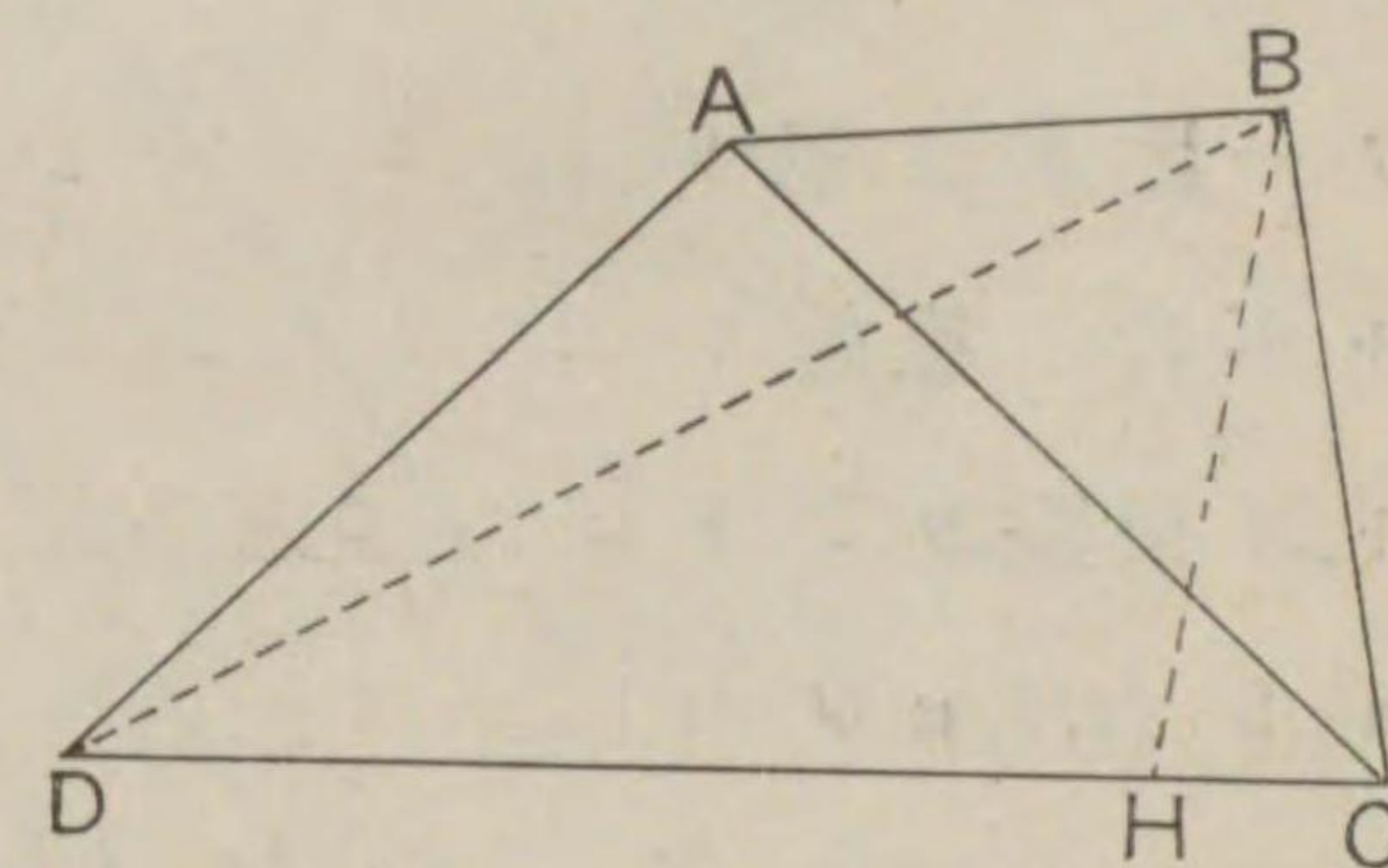
アルカラ P ハ條件ニ適スル。ソレ故求ムル軌跡ハ H ト K トノ交リデアアル。

コノ例ハ二ツノ軌跡ノ交リトシテ所題ノ軌跡ヲ求メタモノデアアル。立體幾何デハ一ツノ條件ニ適スル點ノ軌跡ハ一般ニ面トナリ二ツノ條件ニ適スル點ノ軌跡ハ一般ニ線トナル。軌跡ガ線トナルトキコノ二ツノ條件ヲ一ツヅツニ分ケテ、ソノ各々ニ適スル點ノ軌跡デアアル所ノ面ヲ求メ、コレラノ面ノ交リヲ求メレバ求ムル軌跡ヲ得ルコトガデキル。

例 3. 四面體 ABCD ニ於テ底面 BCD ノ位置及大サガ與ヘラレ且 $\angle BAC = \angle BAD = R$ デアルトキ稜 BA 上ノ點ノ軌跡ヲ求ム。

解 點 A ハ BD ヲ直徑トスル球ト CB ヲ直徑トスル球トノ交リノ上ニアルカラ、之ハ B ヲ過ル一ツノ圓周上ニアル。

(B カラ CD ニ引イタ垂線 BH ヲ直徑トシ $\triangle BCD$ ノ平面ニ垂直ナ平面上ニアル圓) 稜 BA 上ノ



第 246 圖

點ハスベテコノ圓 K 内ニアルコトハ明デアアル。但 BA 上ノ點ハ平面 BCD 上ニハナイカラ線分 BH 上ニハナイ。

次ニ圓 K 内ニアリ且 BH 上ニナイ點ヲ P トスル。PB ト K ノ周トハ交ルカラソノ交點ヲ A トスル。K ハ BC ヲ直徑トスル球ト BD ヲ直徑トスル球トノ交リデアアルカラコノ上ノ點 A ニツイテハ $\angle BAC = \angle BAD = R$ デアル。ソレ故四面體 ABCD ハ所設ノ條件ヲ満足シ、P ハ條件ニ適スル點デアアル。

即求ムル圖形ハ圓 K ノ周及内部ノ點カラ直徑 BH 上ノ點ヲ除

イタ圖形(但 H ハ含マナイガ B ハ含ム)デアル。

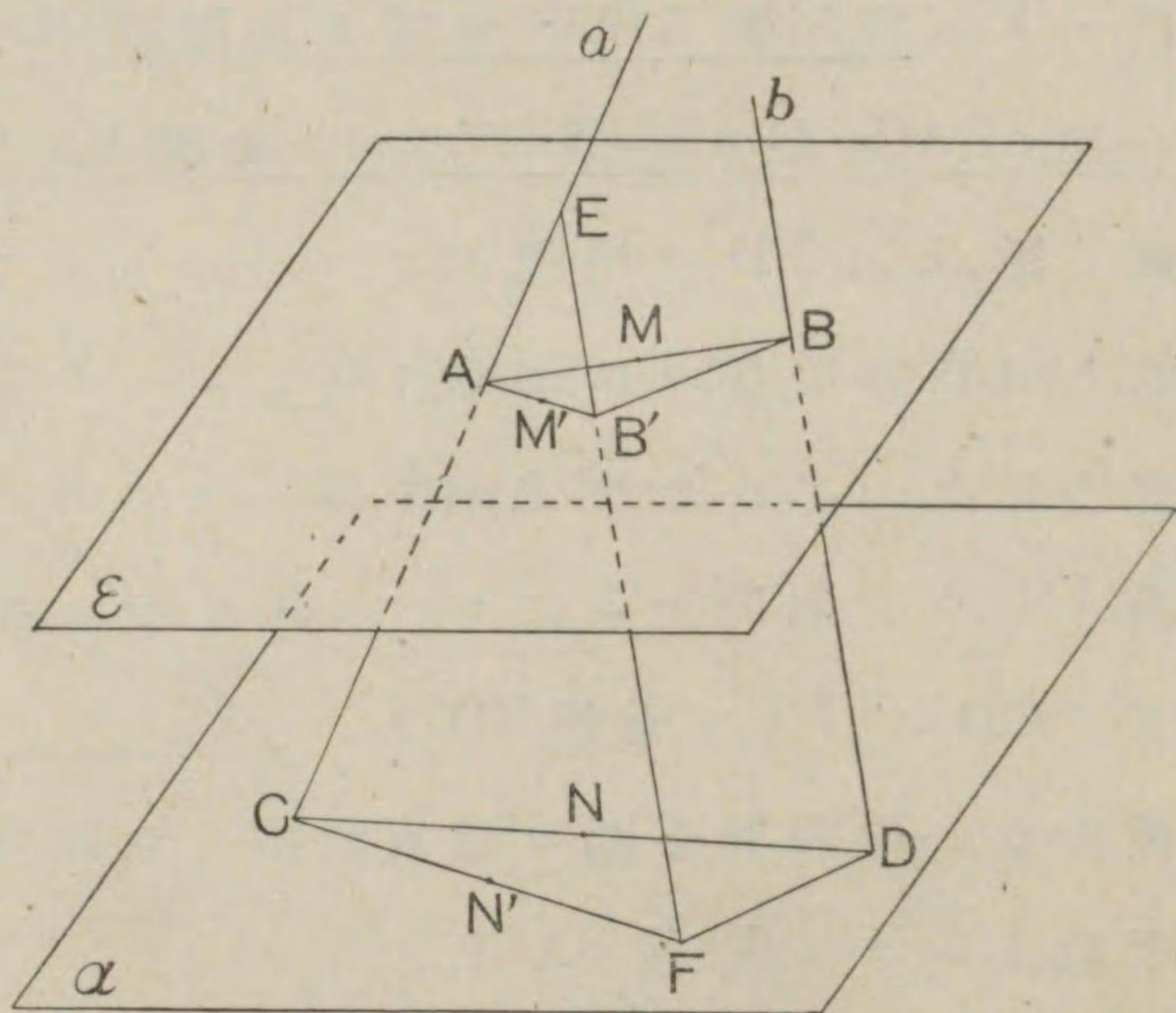
カヤウナ軌跡ヲ線分 AB ノ軌跡ト云フコトガアル。即アル條件 A ニ適スル線ノ軌跡トハ

1. 條件 A ニ適スル線上ノ點ハ皆圖形 K 上ニアリ,
2. 圖形 K 上ノ點ハスベテ條件 A ニ適スル線上ニアル

ヤウナ圖形 K ヲ云フノデアル。

例 4. 二直線 a, b ト平面 α トガ與ヘラレテ居ル。 α ニ平行ナ任意ノ平面 ε ト a, b トノ交點ヲ A, B トスルトキ線分 AB ノ中點 M ノ跡軌ヲ求ム。

解 a, b ト α トノ交點ヲ C, D トシ a 上ノ一點 E ヲ過リ b ト平行ナ直線ト α トノ交點ヲ F トスル。 (a, b, α ノ中平行ナモノガアリ, 又ハ a, b ガ交ツタ場合等ハ略ス) EF



第 247 圖

ト ε ノ交點ヲ B', AB' ノ中點ヲ M', CD, CF ノ中點ヲ N, N' トスル。 M' ノ軌跡ハ直線 EN' (N' ヲ除ク)デアル。 MM' ハ BB' ト平行デソノ半分ニ等シク, BB' ハ定線分 DF ト平行デ且等シイカラ, M ノ軌跡ハ M' ノ軌跡ヲ FD ニ平行ニソノ半分ダケ平行移動シテ求メルコトガデキル。

カヤウニ平面幾何デ用ヒタ幾何學的變換ノ方法モ立體幾何ニ擴張スルコトガデキル。

例 5. 一點 O デ交ル三平面 α, β, γ ニ至ル距離ノ和ガ定線分 k ニ等シイ點 P ノ軌跡。

解 α, β, γ ニヨツテ空間ガ八ツノ部分ニ分タレル。コノ八ツノ部分ノ中ノ一ツ(即一ツノ三面角ノ内部)ヲ考ヘ之ヲ O-ABC トスル。但 OA, OB, OC ハソレゾレ $\beta, \gamma; \gamma, \alpha; \alpha, \beta$ ノ交リトスル。

先ヅ OA, OB, OC 上ニ L, M, N ヲ

$$\triangle OLM = \triangle OMN = \triangle ONL$$

ナルヤウニ定メテ見ヨウ。ソレニハ先ヅ M' ヲ OB 上ニトリ $\triangle OLM', \triangle ONM'$ ガ相等シクナルヤウニ L, N ヲ OA, OC 上ニトル。次ニ M ヲ OB 上ニトリ

$$\triangle OLN : \triangle OLM' = OM : OM'$$

ナルヤウニスレバヨイ。

次ニコノ三面角内ニアツテ條件ニ適スル點ヲ P トシ, P カラ α, β, γ へノ垂線ヲ PH, PG, PK トスル。 $\triangle OLM$ 等ノ面積ヲ S トスルト

$$\text{四面體 ONMP} = \frac{1}{3} S \cdot PH$$

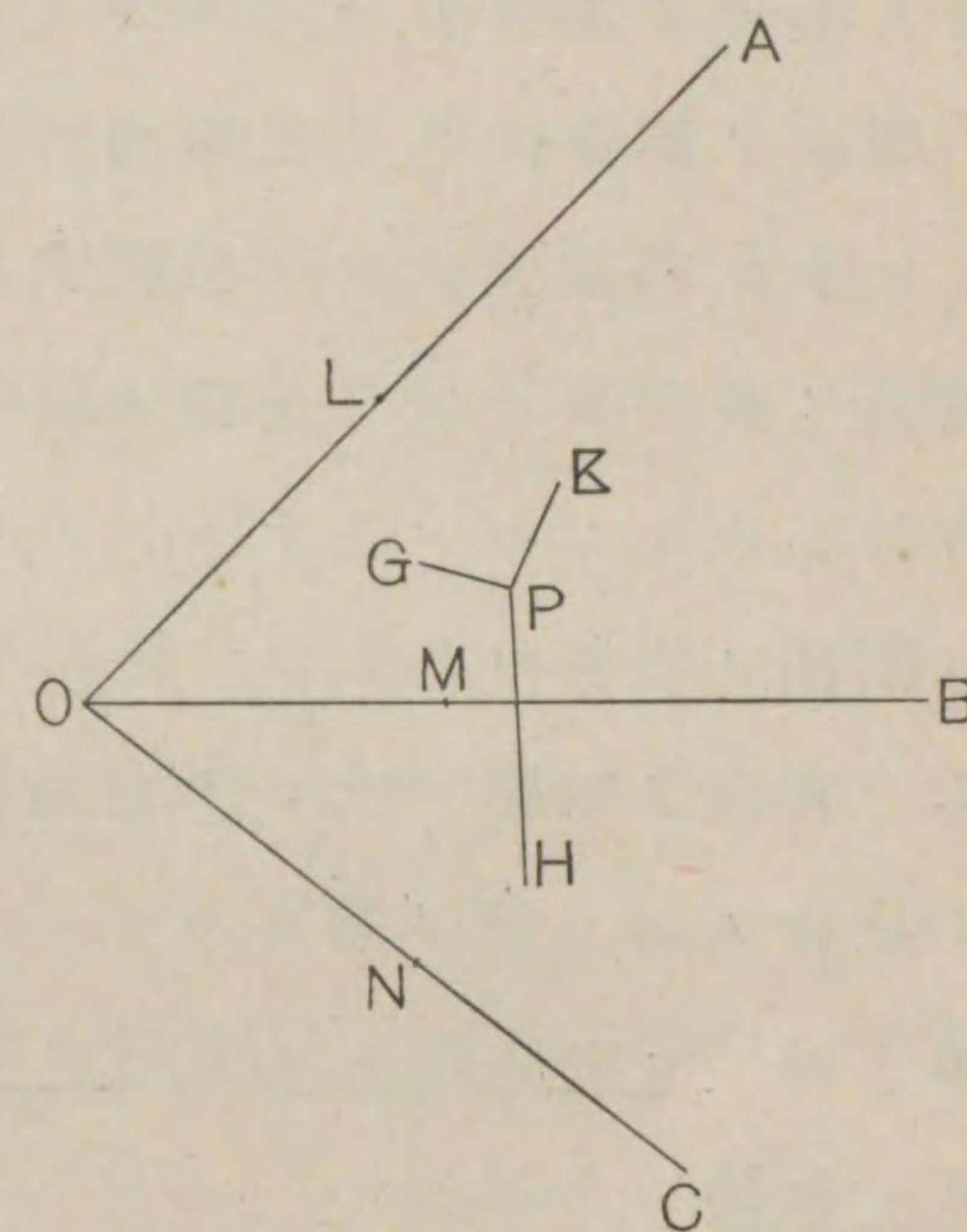
等デアルカラ

$$\text{四面體 OLMP} + \text{四面體 OMNP} + \text{四面體 ONLP}$$

$$= \frac{1}{3} S (PH + PG + PK)$$

$$= \frac{1}{3} S \cdot k$$

デ一定デアル。 OL, OM, ON ヲ充分小サクトレバ四面體 OLMN ハ



第 248 圖

S.k ヨリ小サクナル。サウスルト四面體 LMNP ハ

S.k-四面體-OLMN

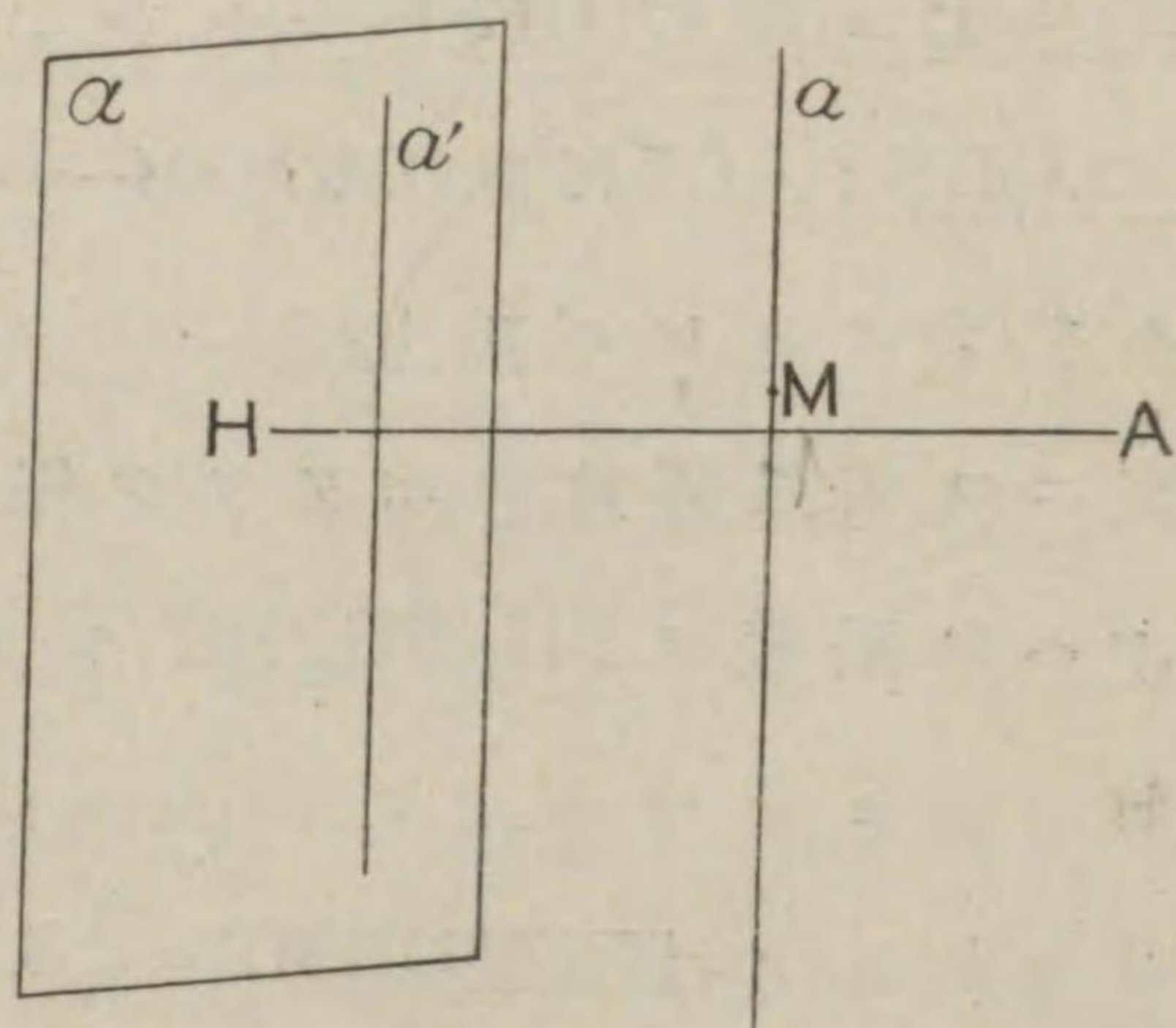
デ一定デアル。且 P ハ LMN ニ關シ O ト反對ノ側ニアルカラ LMN ニ平行ナ一ツノ平面上ニアル。逆ニコノ平面ノコノ三面角内ノ部分ノ點ヲ P トスルト P ハ條件ニ適スルコトガ證明デキル。即コノ部分ガコノ三面角内ニ於ケル軌跡デアル。

カヤウナ軌跡ガ八ツノ三面角ノ何レノ中ニモデキル。且ソノ三面角ノ界デアル所ノ平面 α, β, γ 上デハ之等ノ軌跡ハ同ジ直線ヲ共有シナケレバナラナイ。ソレ故コレラノ軌跡ハ全體デーツノ八面體ノ表面ヲ作ル。

2. 其他ノ軌跡 次ニ平面幾何學ノ軌跡問題デハアマリ起ラナイ場合ノ起ル例ヲ舉ゲヨウ。

例 6. 一定直線 a ニ平行ナ平面へ一定點 A カラ引イタ垂線ノ足ノ軌跡

解 a ニ平行ナ平面ヲ α トシ之ニ A カラ引イタ垂線ヲ AH トスル。 α 上ニハ a ニ平行ナ直線 a' ガアル。 a' ト AH トハ垂直デアルカラ a ト AH トモ垂直デアル。ソレ故 AH ハ A ヲ過リ a ニ垂直ナ平面 π 上ニアル。ソレ故 H モ平面 π 上ニアル。



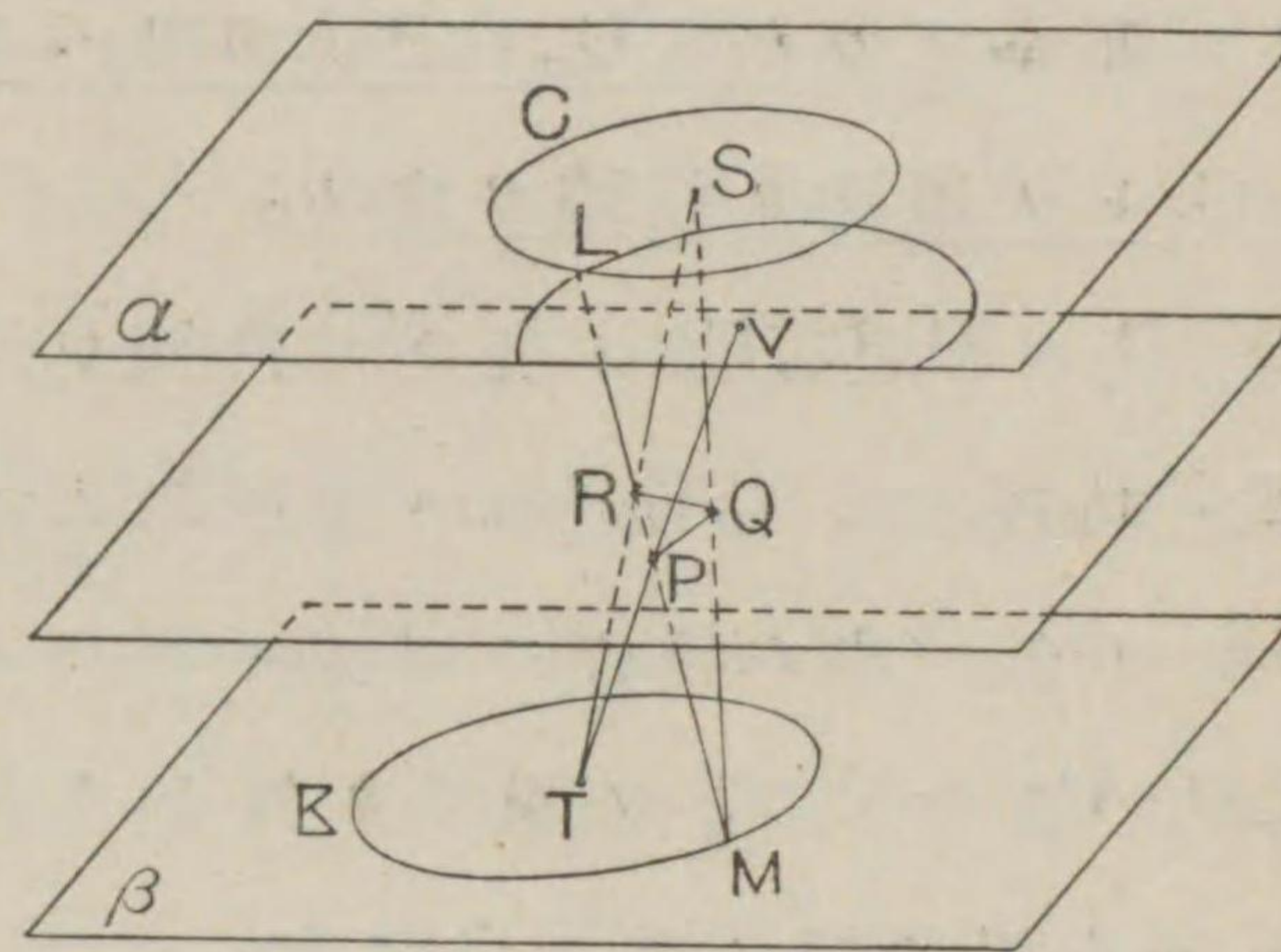
第 249 圖

次ニコノ平面 π 上デ如何ナル點ガ條件ニ適スルカ,如何ナル點ガ條件ニ適シナイカヲ考ヘテ見ヨウ。H ヲ π 上デ A ト異ル點トスル。H ガ條件ニ適シ,之ガ a ト平行ナ平面 α へ A カラ下シタ垂

線ノ足デアツタトスル。サウスルト α ハ H ヲ過リ AH ニ垂直ナ平面デナケレバナラナイ。AH ニ垂直ナ平面ハ a ニ平行デアアルカ又ハ a ヲ含ム。コノ平面ガ a ニ平行デアアルカラ a ヲ含ムコトハナイ。ソレ故 a ト π トノ交點ヲ M トスレバ H ハ AM ヲ直徑トスル圓周 C 上ニハアリ得ナイ。逆ニ H ガコノ圓周上ニナケレバ α ハ a ヲ含マズ從ツテ a ニ平行デアアルカラ H ハ條件ニ適ス。最後ニ點 A ハ A ヲ過リ a ト平行ナ平面ニ A カラ引イタ垂線ノ足デアアルカラ條件ニ適ス。ソレ故軌跡ハ π カラ C ヲ除キ A ヲ加ヘタ圖形デアル。

カヤウニ立體幾何ノ軌跡ハ平面幾何ノ場合ヨリソノ圖形ノ構成ガ複雑ニナルコトガアル。

例 7. 互ニ平行ナ二ツノ平面 α, β 上ニ圓 C, K ガアル。C 上ノ任意ノ點 L ト K 上ノ任意ノ點 M ヲ結ブトキ線分 LM ノ中點 P ノ軌跡。



第 250 圖

解 C, K ノ中心ヲ S, T トシ線分 ST ノ中點ヲ R トスル。R ヲ過リ α, β ニ平行ナ平面ヲ γ トスル。P ハ γ 上ニアルコトハ明デアアル。SM ト γ トノ交點ヲ Q トスル。Q モ SM ノ中點デカラ

$$PQ = \frac{1}{2}SL, RQ = \frac{1}{2}TM.$$

$$RQ \sim PQ \leq RP \leq RQ + PQ$$

$$\frac{1}{2}(SL \sim TM) \leq RP \leq \frac{1}{2}(SL + TM)$$

R ヲ中心トシ $\frac{1}{2}(SL \sim TM)$ ヲ半徑トスル圓ト $\frac{1}{2}(SL + TM)$ ヲ半徑

トスル圓ヲ α 上ニ畫キソノ間ノ部分(圓周上ノ點モ入レテ)ヲDトスレバPハD上ニアル。

次ニD上ノ一點ヲPトシ之トTトヲ結ブ直線ト α トノ交點ヲVトシ、Vヲ中心トシKト等シイ半徑ノ圓K'ヲ α 上ニ畫ク。SVハRPノ二倍デアルカラ之ハ二圓C、K'ノ半徑ノ差ヨリ小サクナク、和ヨリ大キクナイ。ソレ故ニ圓C、K'ハ一點又ハ二點ヲ共有スル。コノ點ヲLトシLPト β トノ交點ヲMトスレバMハK上ニアル。LハC上ニアルカラPハLMノ中點トシテ條件ニ適スル點デアアル。

ソレ故軌跡ハD(二ツノ同心圓ノ間ノ部分)デアアル。

例 8. 三ツノ球 C_1, C_2, C_3 ガ與ヘラレタトキ之等ニ切スル球 Cト C_1 トノ切點ノ軌跡ヲ求ム。

解 Cガ C_1, C_2, C_3 ノ各々ニ内接シ又ハ各々ニ外接スル場合ダケ考ヘヨウ。又 C_1, C_2, C_3 ハ互ニ他ノ外ニアリ半徑モ中心モ皆異ルトシヨウ。(他ノ場合モ同様ニデキル。)

$C_2, C_3; C_1, C_3; C_2, C_1$ ノ相似ノ外心ヲ M_1, M_2, M_3 トスレバ M_1, M_2, M_3 ハ一直線(相似ノ軸) u 上ニアル。Cガ C_1, C_2, C_3 ニ切スル點ヲ T_1, T_2, T_3 トスレバ例ヘバ M_1, T_2, T_3 ハ一直線上ニアリ、 $M_1 T_2 \cdot M_1 T_3$ ハCノ如何ニカ、ハラズ一定デアアル。ソレ故 M_1 ノCニ關スル方冪ハ一定デアアル。 M_2, M_3 ニツイテモ同様デアアルカラCハ全體デ根軸 u ヲ共有スル球群ヲ作ル。

次ニCノ二ツノ位置 C', C'' ヲ考ヘルト、ソノCトノ切點ニ於ケル切平面 t'_1, t''_1 ハ C_1 ト C', C_1 ト C'' トノ根面デアアルカラ、 C', C'' ノ根面ト共ニ同一ノ直線ヲ共有スル。 C', C'' ノ根面ハ u ヲ含ムカラコノ直線ハ u ト交ルカ又ハ之ト平行デアアル。即 t'_1, t''_1 ノ交リハ u

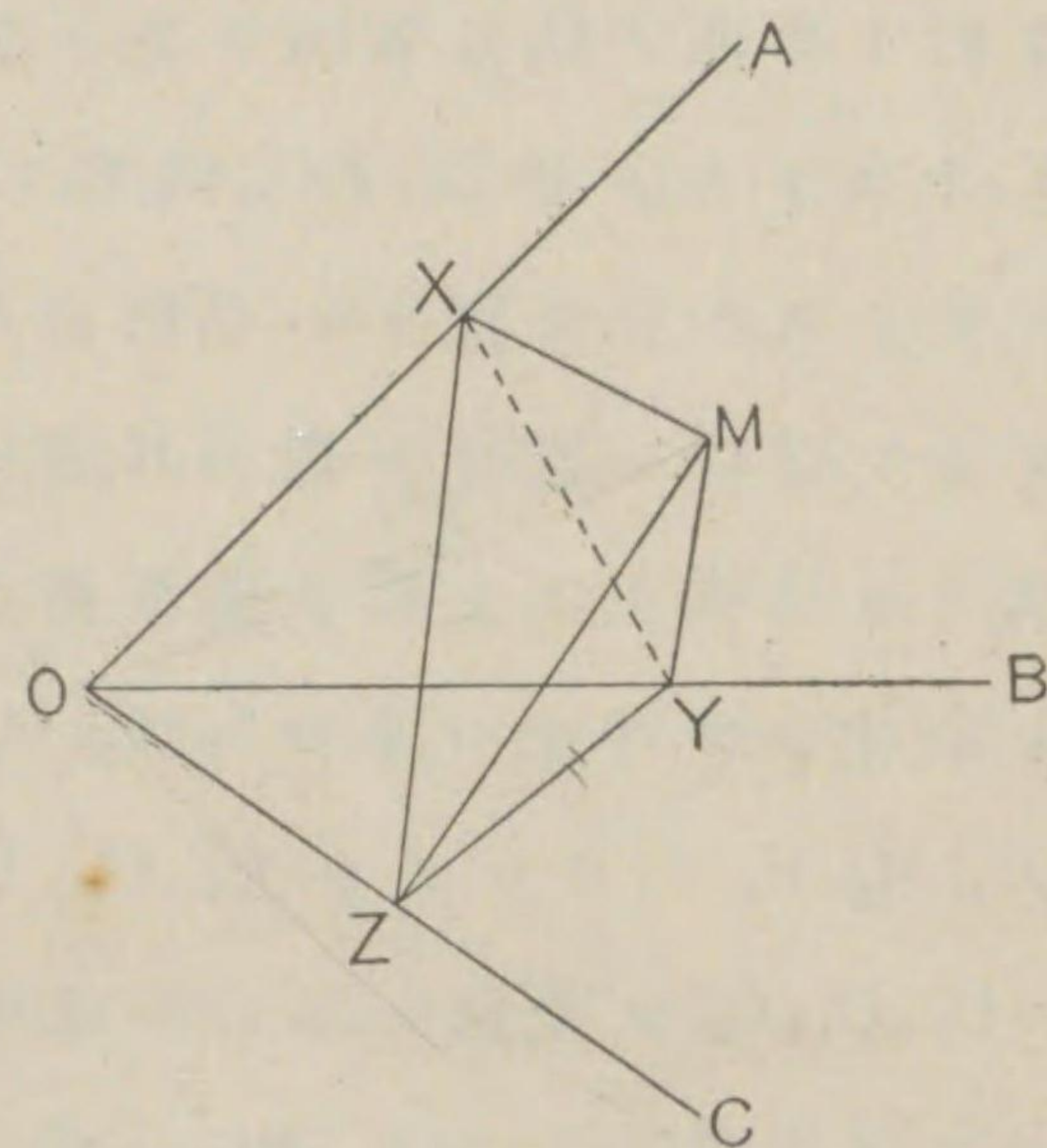
上ノ定點ヲ過ルカ又ハ u ニ平行デアアル。 T_1 ハ t'_1, t''_1 等ノ切點デアアルカラ、 u 上ノ定點 S_1 ヲ過ル C_1 ノ切平面ノ切點デアアルカ又ハ u ニ平行ナ平面ノ C_1 ニ切スル點デアアル。何レニシテモ T_1 ハ一ツノ圓 K_1 上ニアル。但 T_1 ハ C_1, C_2, C_3 ノ共通切平面ノ中之等ヲ一方ノ側ニオクモノノ切點トハ一致シナイ。(コノ共通切平面ハ S_1 ヲ過ルカラソノ C_1 ニ切スル點ハ K_1 上ニアル。)

次ニコノ圓上デ上記ノ切平面ノ切點デナイ點ヲ T_1 トスル。 T_1 ト u ノ定メル平面 α ニヨル C_1, C_2, C_3 ノ截口ヲ C'_1, C'_2, C'_3 トスレバ M_1, M_2, M_3 ハソレゾレ $C'_2, C'_3; C'_3, C'_1; C'_1, C'_2$ ノ相似ノ中心デアアル。 C'_1, C'_2, C'_3 ノ全部ニ外切シ又ハ全部ニ内接スル圓ハ二ツアルカラ之ヲ L, L' トスル。例ヘバLガ C'_1, C'_2, C'_3 ニ切スル點ヲ T'_1, T'_2, T'_3 トスルト $T_2, T'_3; T_3, T'_1; T_1, T'_2$ ハソレゾレ M_1, M_2, M_3 ヲ過ル。 C_1, C_2, C_3 ノ中心ヲ C_1, C_2, C_3 トスレバ $C_2 C_3$ ト T_2, T'_3 トハ M_1 デ交ル。ソレ故 $C_2 T_2' \cdot C_3 T_3'$ トモ一點Cニ於テ會スル。平面 $C_2 T_2' C_3 T_3'$ ト C_2, C_3 トノ交リデアアル二ツノ圓ノ相似ノ中心モ M_1 デアアルカラCハコノ平面上デ T_2', T_3' ニ於テコノ交リノ圓ニ切スル圓ノ中心デアアル。ソレ故 $CT_2' = CT_3'$ デアアル。同様ニ $C_1 T_1'$ モ $C_2 T_2', C_3 T_3'$ トモ交ルカラソノ交點ハCデアリ、且 $CT_1' = CT_2'$ デアアルコトガワカル。ソレ故Cヲ中心トシ T'_1, T'_2, T'_3 ニ於テ C_1, C_2, C_3 ニ切スル球ヲ作ルコトガデキル。L'ノ C'_1, C'_2, C'_3 ニ切スル點 T''_1, T''_2, T''_3 ニツイテモ同様ノコトガ云ヘル。故ニ T'_1, T''_1 ニ於テ C_1 ニ切平面ヲ作レバ S_1 ヲ過ル。 T_1 ハ S_1 カラ C_1 ニ引イタ切平面ノ切點デアリ且 α 上ニアルカラ T'_1 又ハ T''_1 ト一致シナケレバナラナイ。即 T_1 ハ C_1, C_2, C_3 ニ切スル球ノ C_1 ニ切スル點デアアル。

例 9. 與ヘラレタ三面角 O-ABC ヲ一ツノ立體角トシ、ソノ

内ノ與ヘラレタ點Mヲ頂點トスル(三角形ヲ面トス)六面體ガ球ニ
内接スルトキソノ外接球ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

解 條件ニ適スル點Pハ
O, Mカラ等距離ニアルカラ、線
分OMノ垂直二等分面上ニア
ル。且PカラOA, OB, OCニ下
シタ垂線ハコレラノ半直線上
ニアルカラ、PハOニ於テOA,
OB, OCニ垂直ニ作ツタ平面ニ
關シテOA, OB, OCト同ジ側ニ
ナケレバナラナイ。コノ部分
ハーツノ三面角ノ内部トナル。



第 251 圖

ソレ故PハOMノ垂直二等分面上デコノ三面角ノ内部ニアル部
分即一ツノ三角形ノ内ニアル。

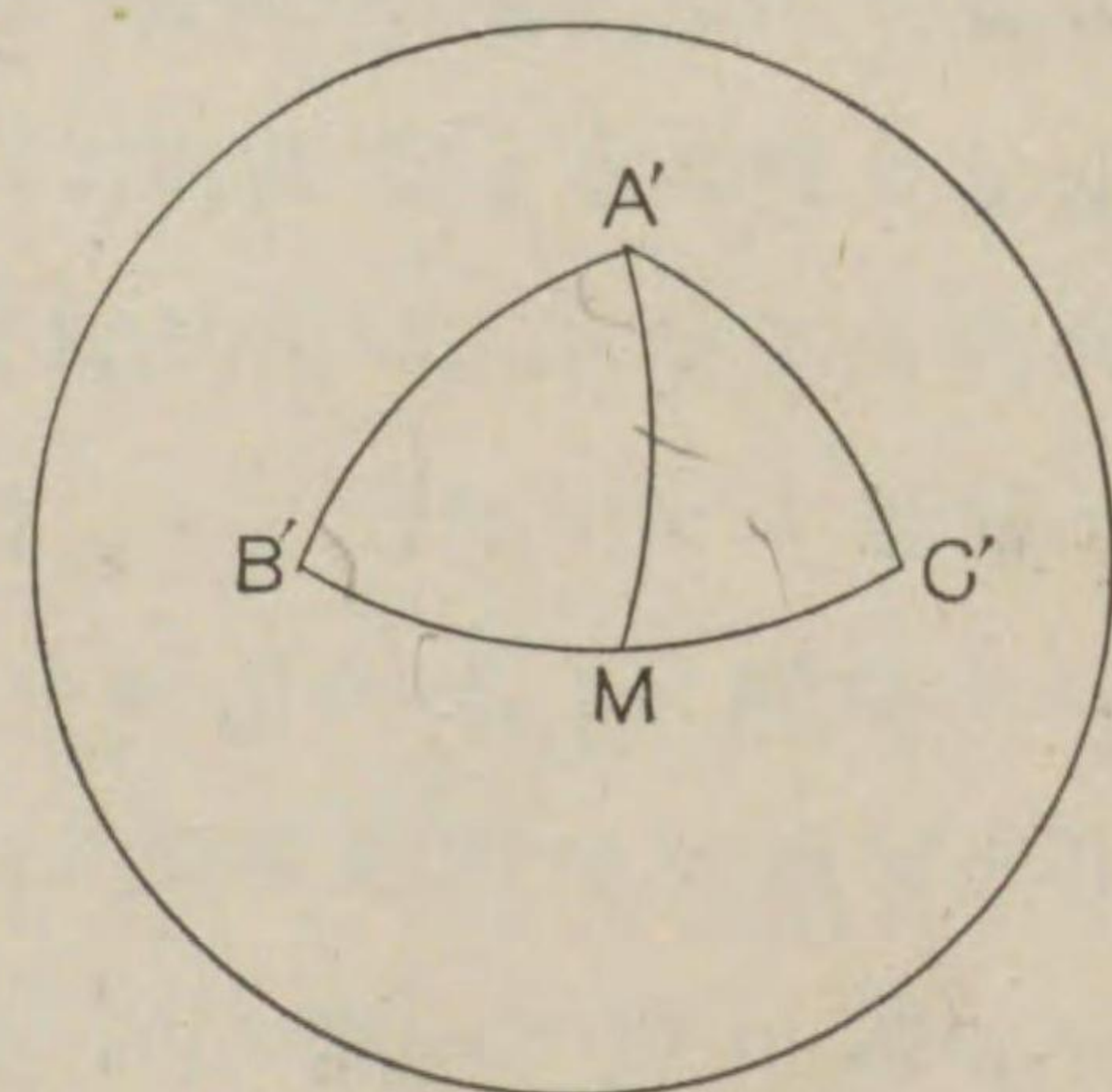
コノ三角形ノ點ガ條件ニ適スルコトハ容易ニ證明デキル。

例 10. 三面角 O-ABCニ於テ $\angle BOC$ ノ位置及大サガ與ヘラ
レ且二面角 OB, OCノ和ガ二面角 OAニ等シイトキOAノ軌跡ヲ
求ム。

解 Oヲ中心トスル一ツノ球ヲ
作り之ヲ以テコノ三面角ヲ截リ、截
口ヲA'B'C'トスル。サウスルト球
面三角形A'B'C'ニ於テ

$$\angle A' = \angle B' + \angle C'$$

トナル。B'C'上ニMヲトリ大圓弧
AMヲ作り



第 252 圖

$$\angle B'A'M = \angle A'B'M$$

ナルヤウニスルト

$$\angle C'A'M = \angle A'C'M$$

トナルカラ

$$A'M = B'M = C'M$$

トナル。MハB'C'ノ中點デA'ハMヲ極トシB'ヲ過ル小圓ノ上ニ
アル。逆ニコノ小圓上ニA'ヲトレバ $\angle A' = \angle B' + \angle C'$ トナル。ソ
レ故A'ノ軌跡ハコノ小圓デアリ、從ツテOAノ軌跡ハ一ツノ直圓
錐面デアル。

3. 作圖題 作圖題ニツイテハ平面幾何學デ詳論シタカラコ
コデハ只立體幾何學ノ特色アル二三ノ例ヲ示スニ止メルコトニ
スル。

例 11. 與ヘラレタ點Aヲ過リ與ヘラレタ二直線a, bト交ル
直線ヲ作レ。但Aハa, b上ニナイトスル。

解析 求ムル直線ヲsトスル。sハAヲ過リa, bトルカ交ラ
Aトaヲ含ム平面 α 上ニモアルシ又Bトbヲ含ム平面 β 上ニモ
アル。ソレ故sハ α ト β ニ共通ナ直線デナケレバナラナイ。

作圖 Aトaノ定メル平面 α トAトbノ定メル平面 β トノ交
線ヲsトスル。sガa又ハbト平行デモナク亦之等ト一致シナ
ケレバ之ハ求メル直線デアル。

證明 α, β ハ共ニAヲ過ルカラソノ交線モ亦Aヲ過ル。aト
sトハ同一平面 α 上ニアリ且平行デナイカラ交ル。同様ニbト
sトモ交ル。ソレ故sハAヲ過リa, bト交ル。

吟味 Aトaハ平面 α ヲ定メ、Bトbモ亦平面 β ヲ定メル。コ
ノ二平面ハ一點Aヲ共有スルカラ一直線sデ交ルカ又ハ一致ス

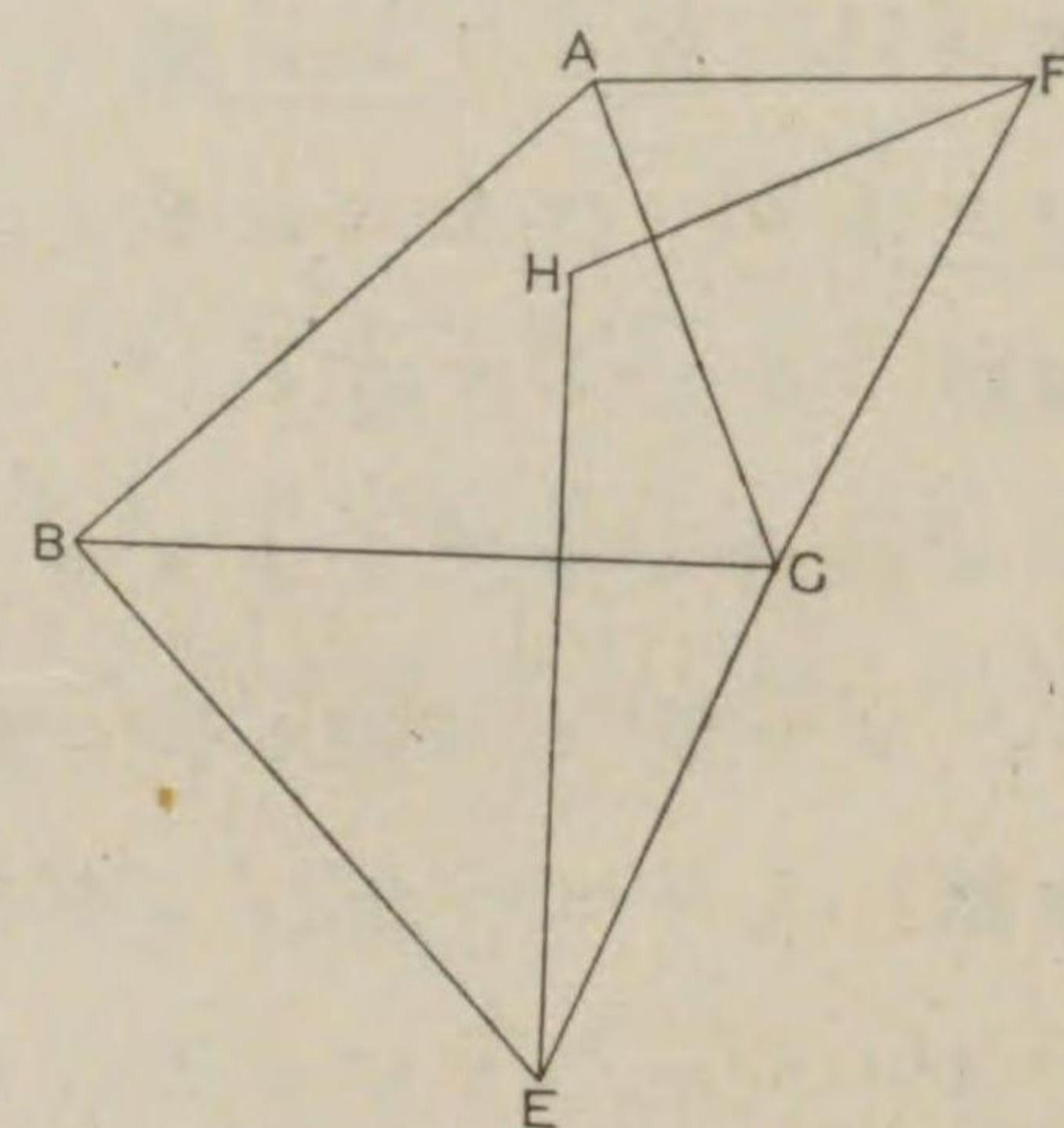
ル。コノ二平面ガ一致スルノハ A, a, b ガ皆同一平面上ニアツタ場合デアル。コノ場合ハ全然平面幾何學ノ問題トナリ解ハ不定トナル。

次ニ A, a, b ガ同一平面上ニナカツタトスルト α, β ノ交線 s ハ存在スル。之ガ a, b ト平行デナイ爲ニハ、 α ガ b ニ平行デナク、 β ガ a ニ平行デナケレバヨイ。即 A ハ a ヲ含ンデ b ニ平行ナ平面及 b ヲ含ンデ a ニ平行ナ平面上ニナケレバヨイ。(a, b ガ平行ノトキハ、 a, b ノ平面上ニナケレバナラナイコトニナル。)

例 12. 六ツノ稜ノ長サヲ與ヘラレテ四面體ヲ作レ。

略解 求ムル四面體ヲ $ABCD$ トシ D カラ ABC ニ下シタ垂線ノ足ヲ H 、 D カラ BC, CA, AB ニ下シタ垂線ノ足ヲ A', B', C' トスル。 $A'H$ 等ハ BC 等ニ垂直デアル。ソレ故次ノヤウナ作圖法ガ得ラレル。

面 ABC ハ三邊ガ知ラレテ居ルカラ作ルコトガデキル。之ヲアル平面上ニ作り、ソノ平面上デ $\triangle BCE, \triangle ACF$ ヲソレゾレ $\triangle BCD, \triangle ACD$ ニ全等ナルヤウニ作ル。 E カラ BC ニ引イタ垂線ト F カラ AC ニ引イタ垂線トノ交點ハ點 H デアル。次



第 253 圖

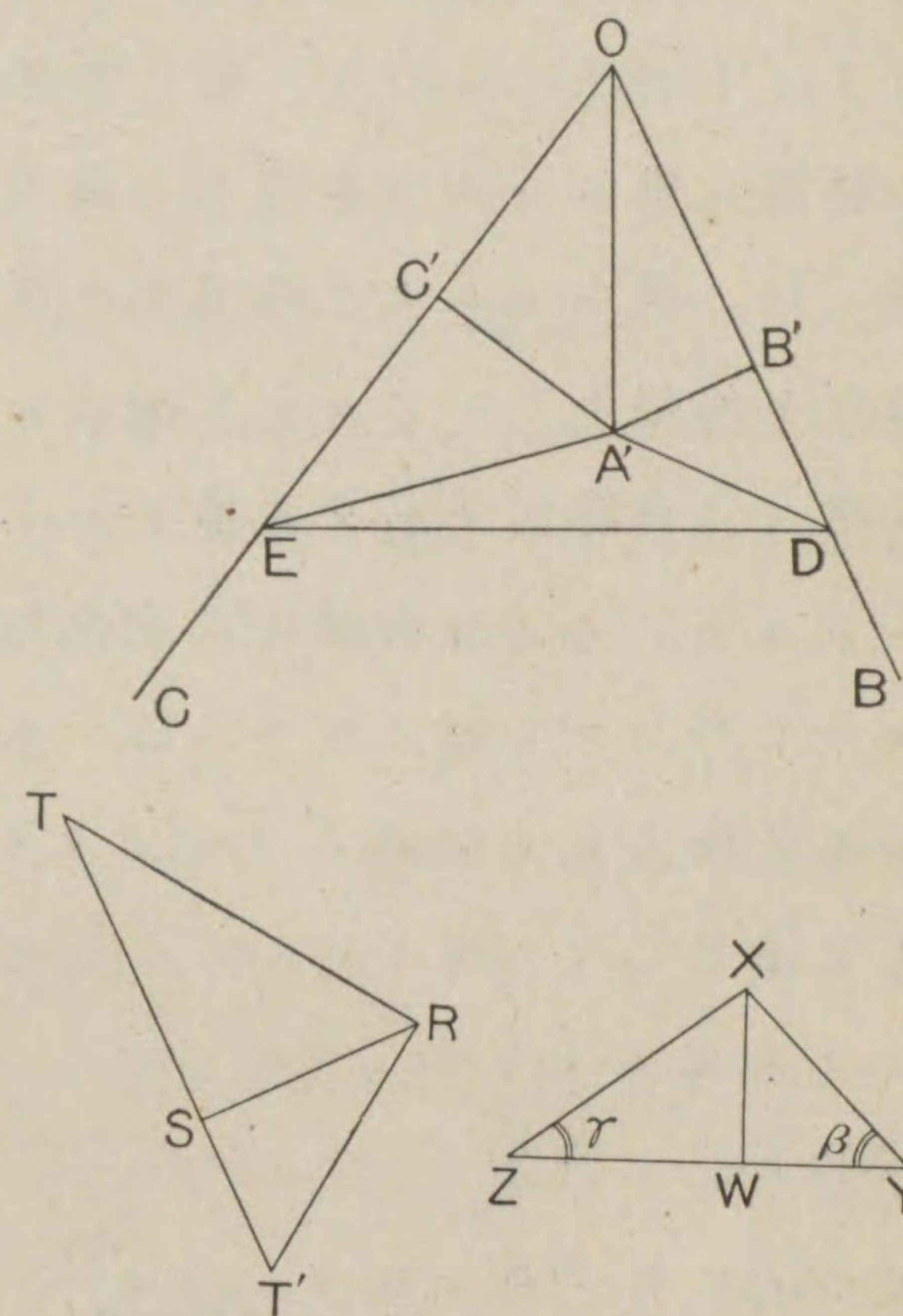
ニ AH ヲ含ミ平面 ABC ニ垂直ナ平面ヲ作り、コノ平面上デ H ヲ過リ AH ニ垂直ナ直線ヲ作ル。コノ直線ト A ヲ中心トシ與ヘラレタ AD ノ長サヲ半径トシコノ平面上ニアル圓トノ交點ヲ求メレバ之ガ點 D デアル。

例 13. 三面角 $O-ABC$ ノ OB, OC ヲ稜トスル二面角 β, γ 及面

BOC ヲ知ツテ OA ヲ稜トスル二面角ヲ求ム。

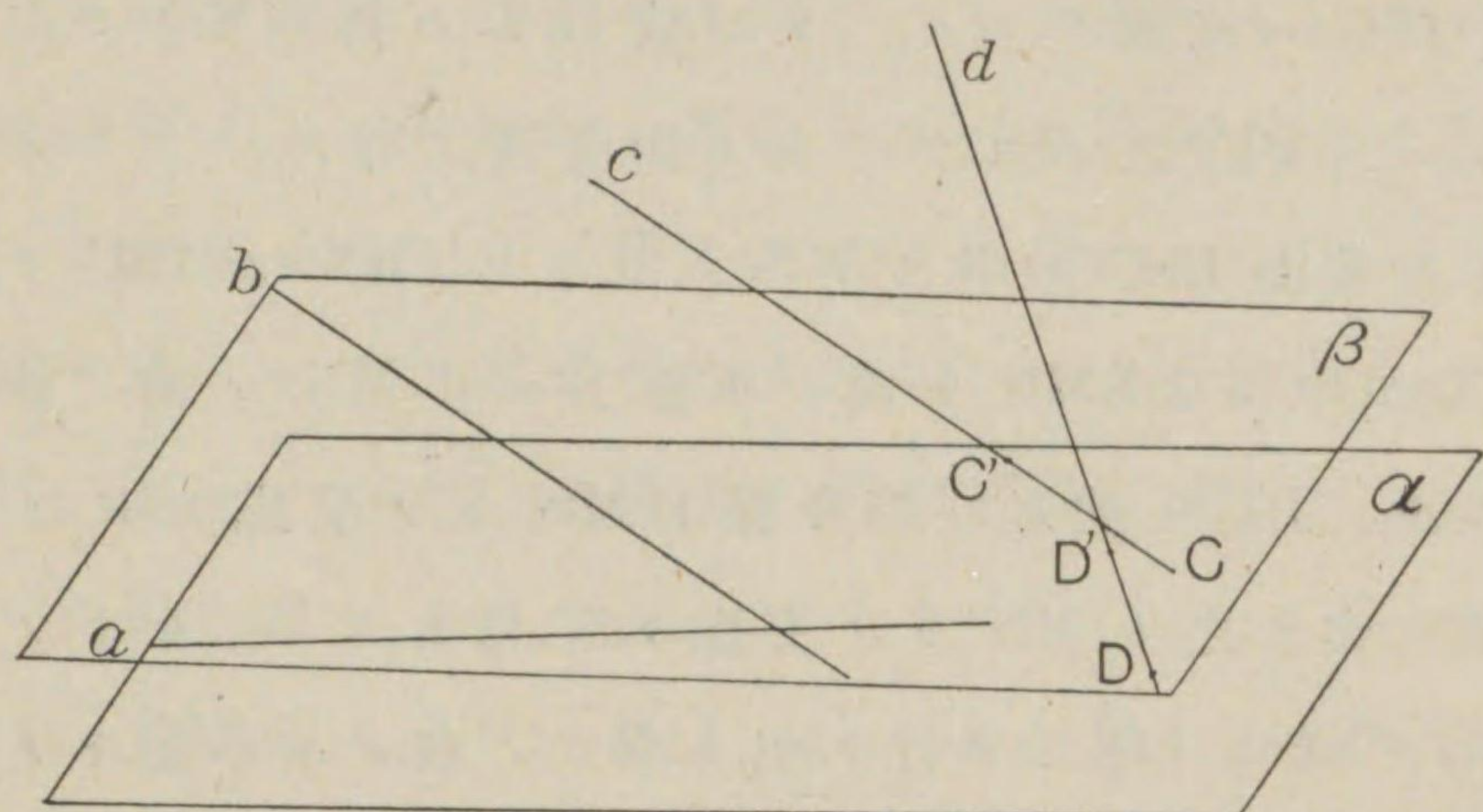
解 平面 BOC ヲ考ヘ

OA 上ノ點 A カラ之ニ垂線 AA' ヲ下ス。 A カラ OB, OC へノ垂線ノ足ヲ B', C' トスル。 $\angle B'A'A, \angle C'A'A$ ハ β, γ ニ等シイ。ソレ故 $\angle Y, \angle Z$ ガ β, γ ニ等シイヤウナ任意ノ三角形 XYZ ヲ作り、 X カラ YZ ニ垂線 XW ヲ下セバ $A'B':A'C' = WY:WZ$ デアル。ソレ故直線 OA' ハ定マル。 A' ハコノ直線上ノ任意ノ點デヨイカラ $A'B' = WY$ ナルヤウニトツテオク。



第 254 圖

次ニ XY, OB' ヲ直角ヲ夾ム二邊トスル直角三角形 RST ($RS=XY, ST=OB'$) ヲ作ルト、之ハ $\triangle OAB'$ ト全等デアル。 R ニ於テ RT ニ垂線ヲ引キ ST ト T' デ交ラセルト、 RT' ハ平面 OAB 上デ A ニ於テ OA ニ立テタ垂線 AD ガ OB ト交ル點 D マデノ長サ AD ニ等シイ。同様ニ A ニ於テ平面 OC 上デ OA ニ立テタ垂線ト OC ト交ル點 E マデノ長サ AE モ求メラレル。 OD, OE ノ長サモ求メラレルカラ(例ヘバ $OD=TT'$) DE ガ求メラレ從ツテ $\triangle DAE$ ト全等ナ三角形ヲ作ルコトガデキル。平面 DEA ハ OA ニ垂直ダカラ、コノ三角形ノ A ニ於ケル内角ガ求ムル二面角ニ等シイ。

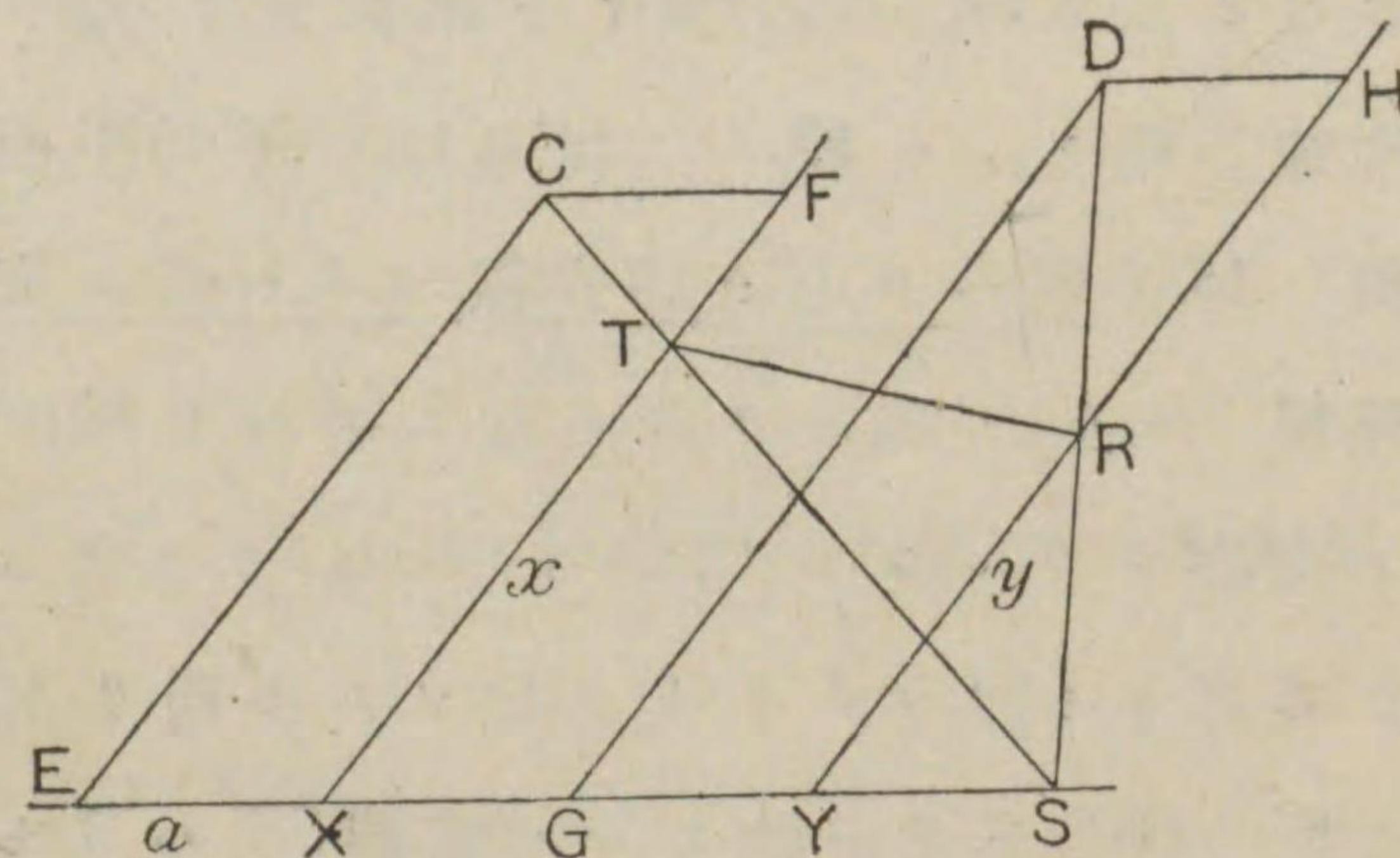


第 256 圖

d と α, β とノ交點ヲ D, D' トシ $S'T, S'R$ ヲ $C'C, D'D$ ニ平行デ且等シイヤウニスルト (S', S'' ハシバラク b 上ノ任意ノ點ト考ヘルト) T, R ハ α 上ニアリ且ソレゾレ α 上デ b ト平行ナニ直線 x, y ノ上ニアル。 S' ト S'' ガ一致スレバ TR ハ一定直線ニ平行デアアル。(即 $C'C$ ト $D'D$ ニ平行ナ定長ナニ邊ヲモツ三角形ノ第三邊ニ平行デアアル。) ソレ故コノ問題ハ次ノ問題ニ歸着スル。

一平面 α 上ニ直線 a ト二ツノ平行線 x, y 及二點 C, D ガ與ヘラレテ居ル。 a 上ニ一點 S ヲ求メ SC, SD ガソレゾレ x, y ト交ル點ヲ T, R トシ TR ヲ與ヘラレタ直線ニ平行ナラシメヨ。

C, D ノ各ヲ過リ a ト平行ナ直線ト x, y トノ交點ヲソレゾレ F, H トシ, x ト平行ナ直線ト a トノ交點ヲソレゾレ E, G トスル。 a ト x, y トノ交點ヲ



第 257 圖

X, Y トスルト

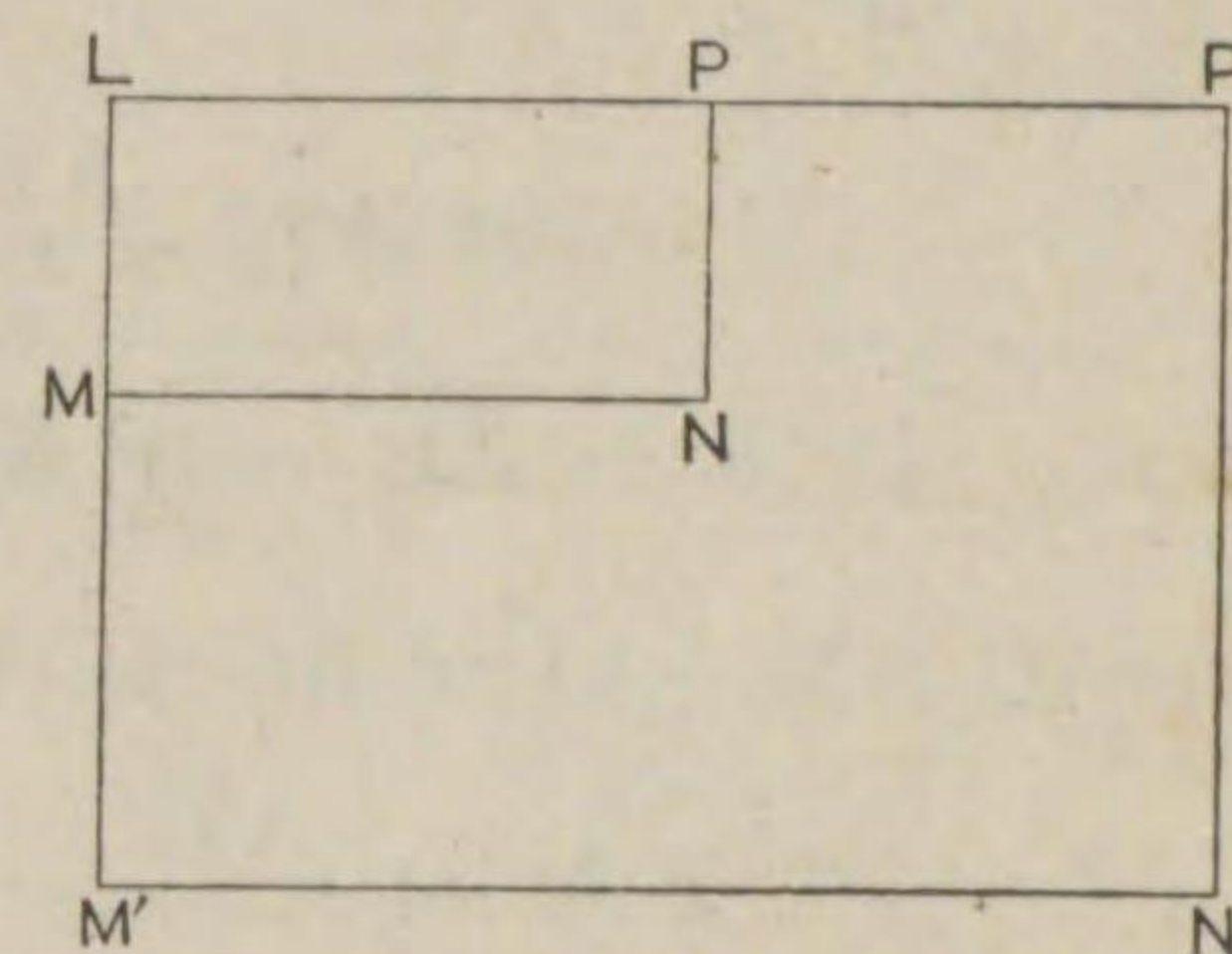
$$CF \cdot FX = ES \cdot FT,$$

$$DH \cdot HY = GS \cdot HR$$

デアアル。即 $ES \cdot FT, GS \cdot HR$ ハ與ヘラレル。トコロガ ES ト GS ノ差 EG ハ與ヘラレテ居ルシ, TR ノ方向モ一定デアアルカラ FT ト HR ノ差(和ノ場合モアル)ハ F カラ TR ト同ジ方向ニ直線ヲ引キ HY ト交ラセテ求メルコトガデキル。 FT, HR ハ共ニ適當ナ同ジ比ニ擴大又ハ縮小シ, $ES \cdot FT, GS \cdot HR$ モ同ジ比ニ擴大又ハ縮小スル事ニヨツテソノ差ヲ ES ト GS トノ差 α ニ等シクシテ考ヘテモヨイ。カヤウニスルト問題ハ次ノ問題ニ歸スル。

一ツノ矩形 $LMNP$ ヲ作り, ソノ面積ヲ與ヘラレタ面積ニ等シクシ, 且ソノ二邊ヲ α ダケ増シタ矩形 $LM'N'P'$ ノ面積モ與ヘラレタ面積トナルヤウニスルコト。

$LM'N'P'$ ト $LMNP$ トノ差ヲ考ヘルト, ソレハ α^2 ト $LM+MN$ ト α ノ包ム矩形トノ和デアアル。ソレ故 $LM+MN$ ハ求メラレル。矩形 $LMNP$ ハ二隣邊ノ和ト面積トガ與ヘラレテ居ルカラ作



第 258 圖

圖スルコトガデキル。之デコノ問題ハ解カレルノデアアル。

コノ問題ノ解ハ一般ニハ二ツデアアル。即四直線ニ交ル直線ハ二ツアル。特ニ CD ト α ト平行ナラバ TR ヲ動カシタトキ CT ト DR ノ交點 S ノ軌跡ハ一ツノ直線トナルコトガ證明デキル。コノ直線ガ a ト一致スルナラバ a 上ノ如何ナ點ヲ S トルシテモ上ノ條件ガ満足サレ, コレラノ四直線ニ交ル直線ガ無數ニアルコトニナル。コノ場合ヲ除ケバ上ノ作圖ノ解ハ二ツヨリ多クハ求メ

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} > k > \frac{1}{2}$$

解二ツ

$$\frac{1}{2} \cong k$$

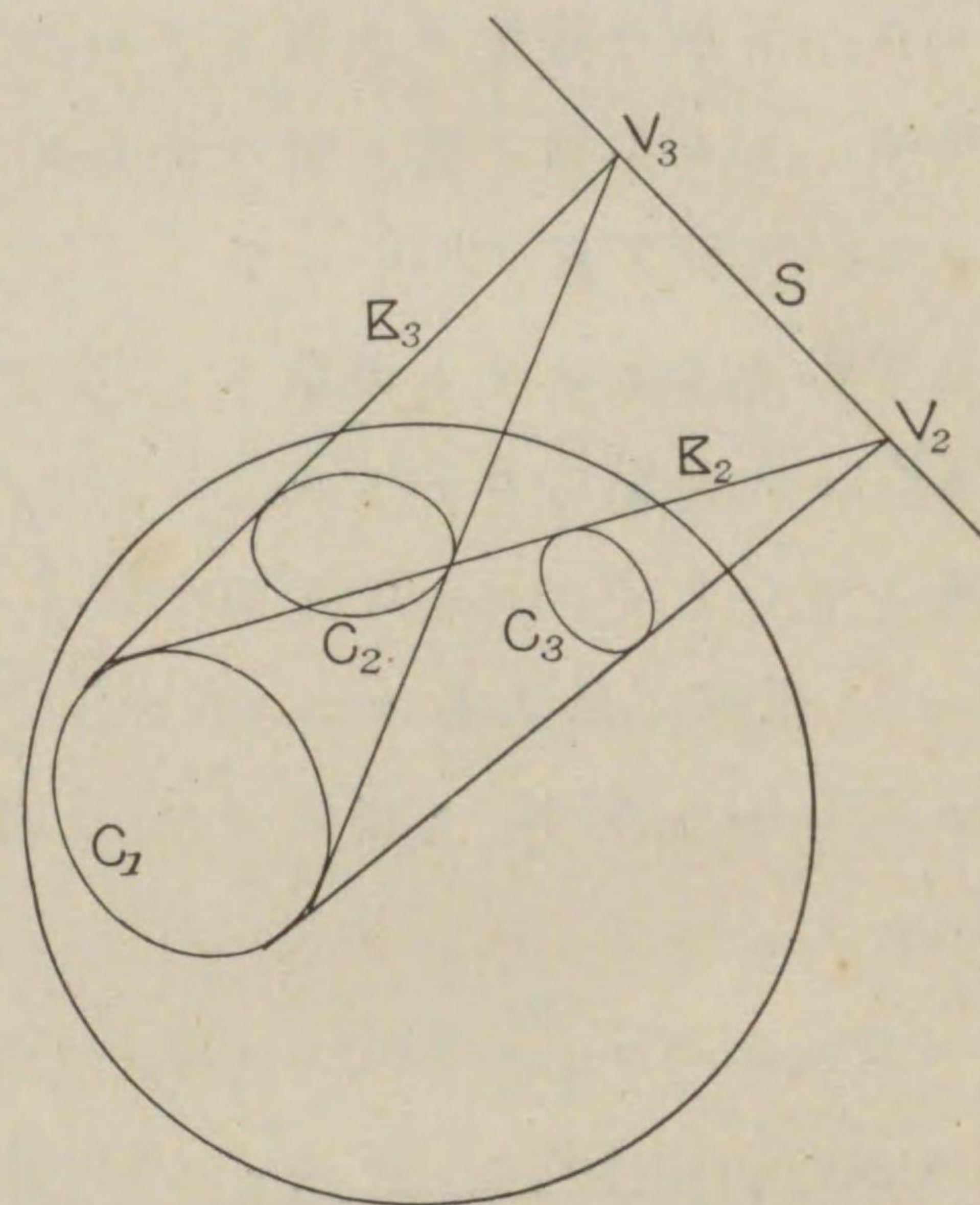
解一ツ

コノ種ノ問題デ體積ニ關スルモノハ作圖不可能デアルモノガ
多イ。

例 19. 球面 O 上ニ三ツノ小圓 C_1, C_2, C_3 ガ與ヘラレテ居ル。
之等ニ切スル小圓 C ヲ作レ。

解 C_1, C_2 ヲ含ム圓錐ヲ K_3 トシ, C_1, C_3 ヲ含ム圓錐ヲ K_2 トスル
ト C ハ K_2 ト K_3 ノ共通切
平面 α ト O トノ交リデア
ル。ソレ故平面 α ヲ作ル
コトヲ考ヘレバヨイ。

先ヅ K_3 ノ頂點 V_3 ヲ求
メヨウ。ソレニハ C_1, C_2
ノ中心ト O ノ中心ヲ含ム
平面ヲ作り, 之ト C_1 トノ
ニツノ交點ヲ C_2 トノニ
ツノ交點ト結ブ直線ノ交
點ヲ求メレバヨイ。(前章
第二項參照) K_2 ノ頂點 V_2



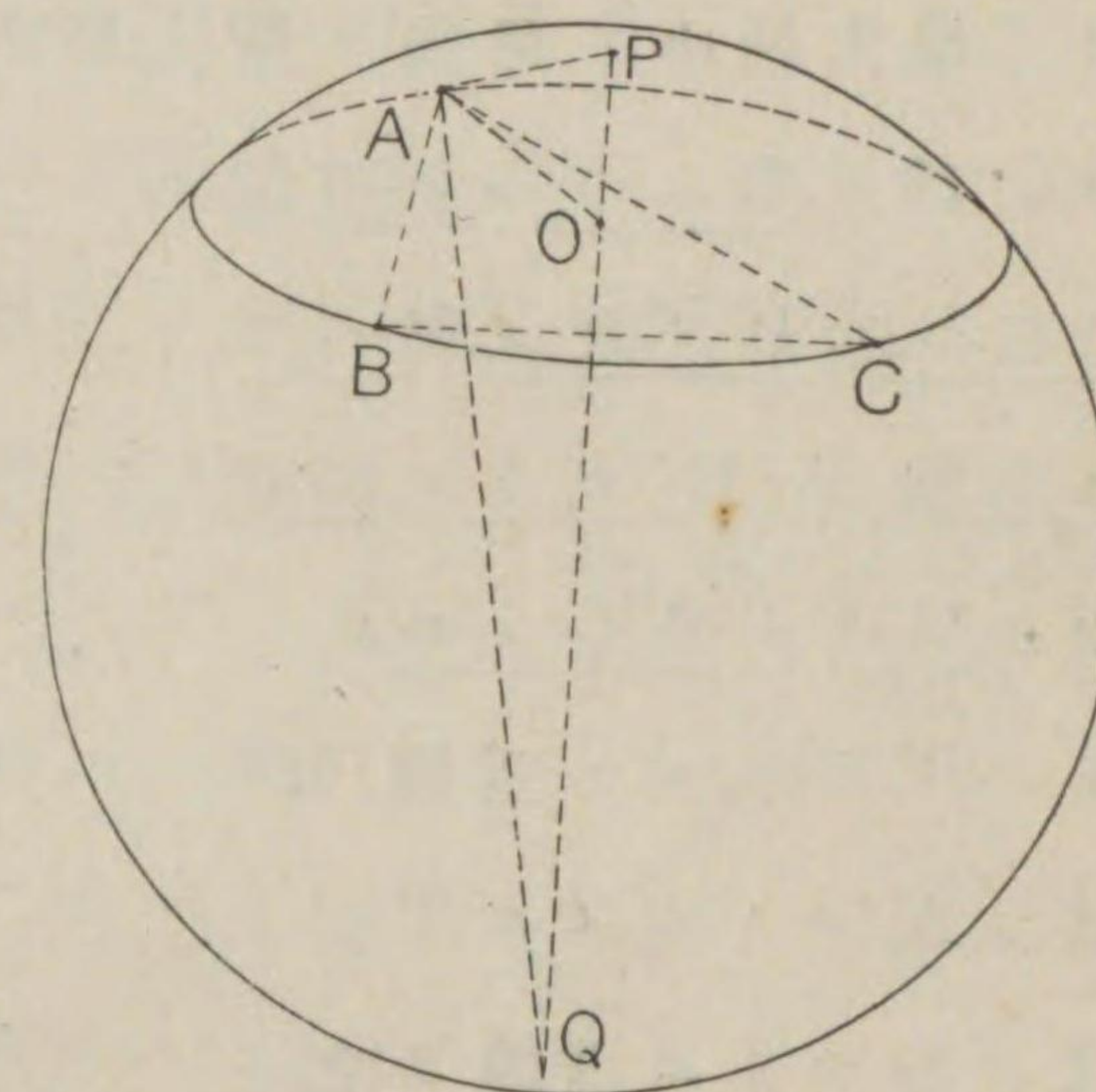
第 262 圖

モ同様ニ求メラレル。共通切平面ハ V_2, V_3 ヲ含ムカラ, 之ヲ結ブ
直線 $s = V_2V_3$ ヲ含ム。次ニ s ト C_1 ノ平面トノ交點ヲ S トスル。
コノ平面上デ S カラ C_1 ニ切線ヲ引ク。コノ切線ト s トノ定メル
平面ガ求ムル共通切平面デアル。

例 18. 球面ガ與ヘラレタトシ, ソノ上ノ點ヲ極トスル圓ヲ畫

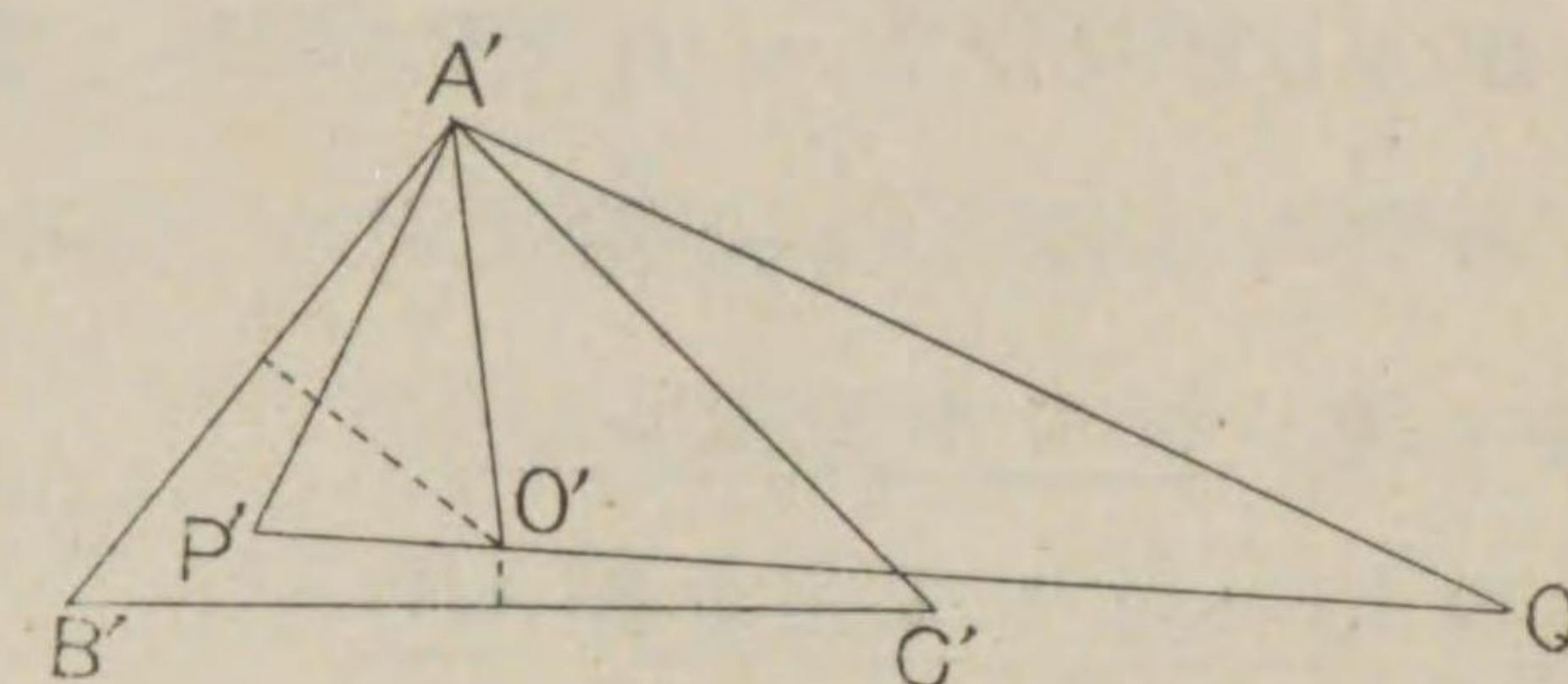
ケルト假定シ, (即球面上ノ一點ニこんばすノ一脚ノ端ヲ固定シテ
オイテ, 他脚ノ端ヲ球面ヲ離レナイヤウニスベラセテ圓ヲ畫クコ
トガデキルト假定スル。) コノ球ノ半徑ヲ求メヨ。

解 球面上ノ任意ノ點 P ヲ
極トスル圓ヲ畫キソノ上ニ三
點 A, B, C ヲトル。 $\triangle ABC$ ノ三
邊ノ長サハこんばすデ求メル
コトガデキルカラ, 之ト全等ナ
三角形 $A'B'C'$ ヲ紙面ニ畫クコ
トガデキル。 $\triangle ABC$ ノ外心ヲ
 O , $\triangle A'B'C'$ ノ外心ヲ O' トシ, O'
ニ於テ $O'A'$ ニ垂直ナ直線上ニ



第 263 圖

P' ヲ $A'P' = AP$ ナルヤウニ
トル, A' ニ於テ $P'A'$ ニ
垂直ナ直線ヲ作り之ト
 $P'O'$ トノ交點ヲ Q' トス
ル, $P'Q'$ ハ求ムル球ノ直



第 264 圖

徑デアル。ナゼナレバ PO ト球トノ第二交點ヲ Q トスルト
 $\triangle PAQ \cong \triangle P'A'Q'$ デアルカラデアル。

カヤウニ球ノ直徑ガ求メラレルトソレヲ對角線トスル正方形
ノ一邊ヲ求メルコトニヨツテ大圓ノ極カラ大圓周上ノ點マデノ
距離ヲ求メルコトガデキ, 之ニヨツテ大圓ヲ畫クコトガデキル。
カクシテこんばすヲ用ヒテ實體球ノ上ノ作圖ヲスルコトハ平面
上ノ作圖ト竝行ニ研究スルコトガデキル。

球面上ノ作圖ハ又之ヲ平面上ニ極射影シテモ行フコトガデキ

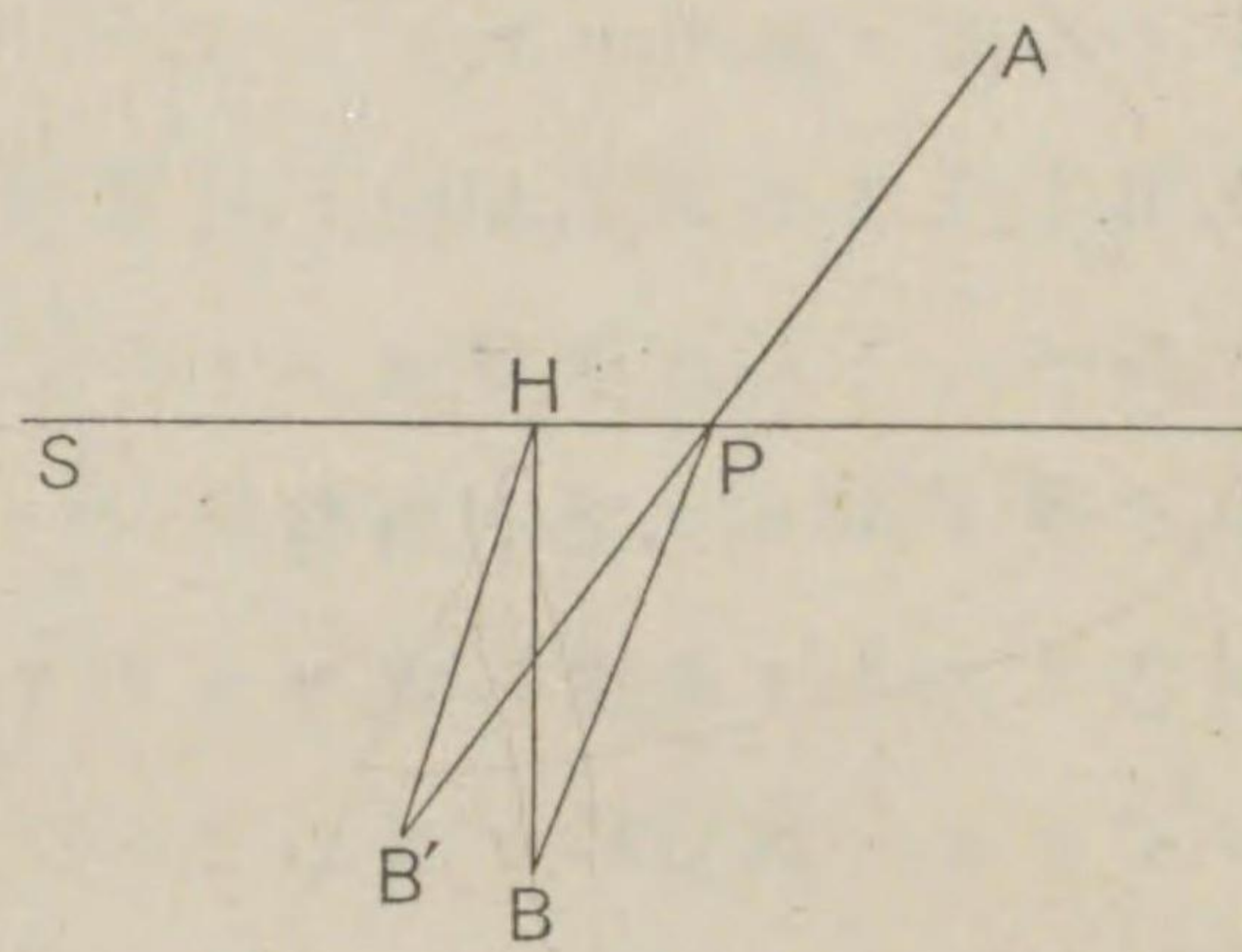
ル。例へば前例ナドモ平面上ニ極射影スルコトニヨツテ平面上ノ三ツノ圓ニ切スル圓ヲ作ル問題ニ歸スルコトガデキル。コノ方法ニツイテハ森本著畫法幾何學ノ第七章ヲ参照セラレタイ。

4. 極大極小 最後ニ極大極小問題ノ二三ノ例ヲ舉ゲル。

例 19. 與ヘラレタ直線

s 上ニ一點 P ヲ求メ、與ヘラレタ二點 A, B カラノ距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

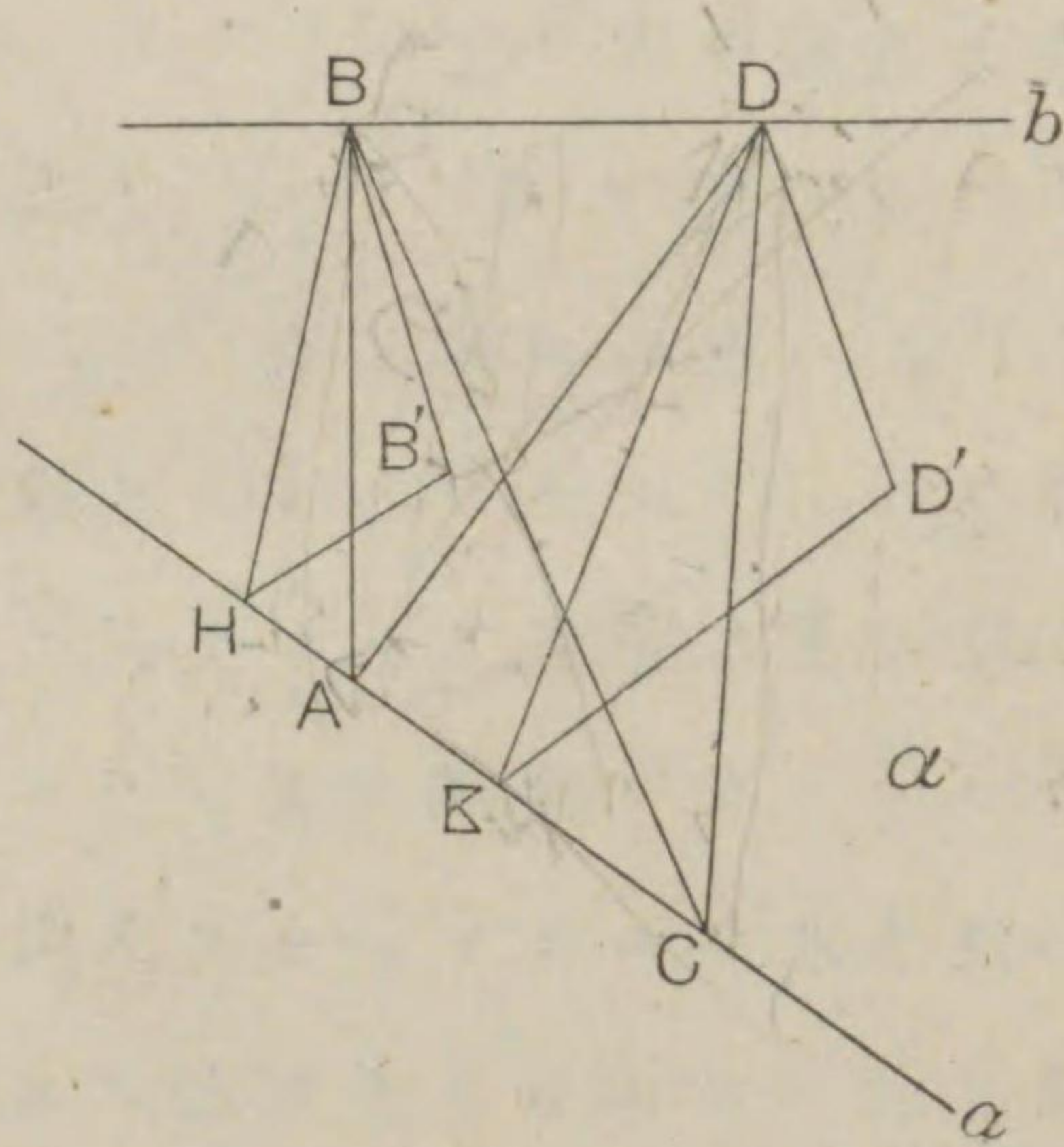
解 B カラ s ニ垂線 BH ヲ下シ A, s ノ定メル平面上デ H ニ於テ s ニ垂線ヲ立テソノ上ニ B' ヲ s ニツイテ A ト反對ノ側ニ $HB' = HB$ ナルヤウニトル。 $BP = B'P$ デアルカラ $B'P + AP$ ヲ最小ナラシメレバヨイ。ソレニハ $B'A$ ト s トノ交點ヲ P トスレバヨイ。



第 265 圖

例 20. 同ジ平面上ニナイ二直線 a, b ト a 上ニ二定點 A, C ガ與ヘラレテ居ル。 b 上ニ與ヘラレタ長サ l ニ等シイ線分 BD ヲトリ四面體 $ABCD$ ノ表面積ヲ最小ナルヤウニセヨ。

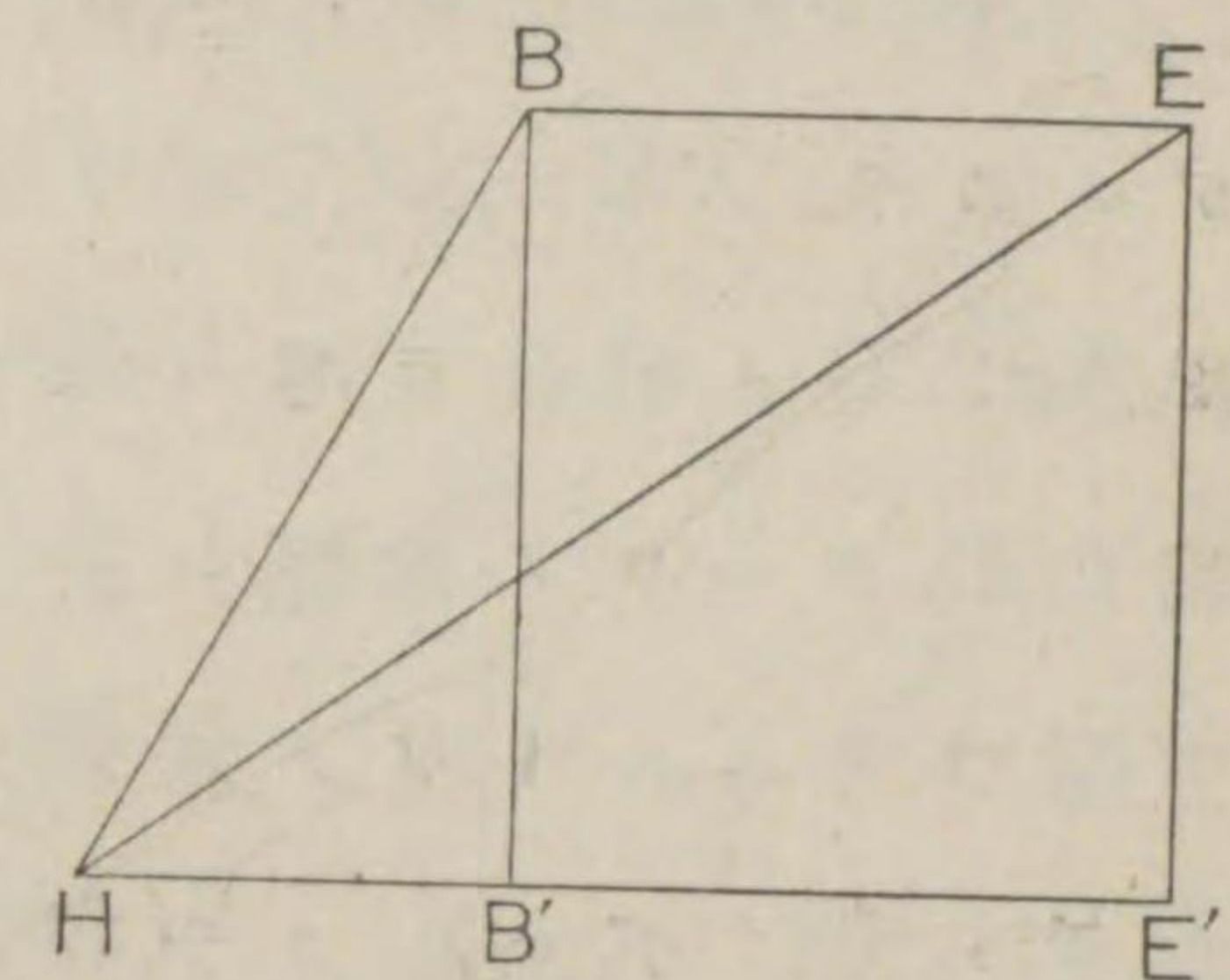
解 $\triangle BDA, \triangle BDC$ ノ面積ハ一定ダカラ $\triangle BAC, \triangle DAC$ ノ面積ノ和ヲ最モ小サクスレバヨイ。ソレニハ B, D カラ a ニ引イタ垂線ノ和ヲ最小ナラシメレバヨイ。



第 266 圖

a ヲ含ミ b ニ平行ナ平面ヲ α トシ B, D カラ a へ下シタ垂線ノ足ヲソレゾレ H, K ; α へ下シタ垂線ノ足ヲソレゾレ B', D' トスル。 $B'D'$ ハ BD ニ等シク且之ト平行デアアルカラ、コノ線分ガ a ト垂直ナ直線ニ投ズル正射影ノ長サハ一定デ、 $B'H$ ト $D'K$ トノ和又ハ差ニ等シイ。ソレ故直線 $B'H$ 上ニ HE' ヲ KD' ニ等シク且同ジ向キヲモツヤウニトレバ BE' モ一定デアアル。矩形 $BB'E'E$ ハ一定デア

アルカラコレニツイテ考ヘレバ、コノ矩形ノ邊 $B'E'$ 又ハソノ延長上ニ一點 H ヲ求メ BH ト EH ノ和ヲ最小ナラシメヨト云フ問題トナル。 B ノ $B'E'$ ニ關スル對稱點ヲ B' トスレバ $BH + EH = B'H + EH$ デアルカラ、之ガ最小ナラバ B', H, E ハ一直線



第 267 圖

上ニアリ、 H ハ $B'E'$ ノ中點トナル。ソレ故上ノ問題デモ $BH = DK$ ナルヤウニ即 $B'H = D'K$ ナルヤウニスレバヨイ。ソレニハ a, b ノ共通垂線 (α ノ垂線) ト b トノ交點ガ BD ノ中點トナルヤウニスレバヨイ。

例 21. 平行デナイ三ツノ稜ノ和ガ與ヘラレタ線分 l ニ等シイヤウナ直方體ノ體積ノ最大ノモノヲ求メヨ。

解 三ツノ稜ノ長サヲ a, b, c トスル。 c ヲ一定ニシテオクト、 a, b ノ包ム矩形ハ $a=b$ ノトキ面積ガ最大トナリ、直方體ノ體積モ最大トナル。ソレ故コ、デハ $a=b$ デアルヤウナ直方體ダケヲ考ヘテソノ體積ガ最大トナルヤウニシテ見ル。コノ場合

$$2a + c = l$$

デアツテ直方體ノ體積ハ a^2c デアル。コノ條件ニ適スル立方體

ヲ作リコノ立方體 Σ ト直方體 Σ' ノ體積ヲ比較シテ見ル。

立方體ヲ ABCDEFGH トシ直方體ヲ A'B'C'D'E'F'G'H' トシ之等ヲ三面角 B, B' ガ重ナルヤウニオイテ見ル。(右圖)

$$3AB = A'B + 2BC'$$

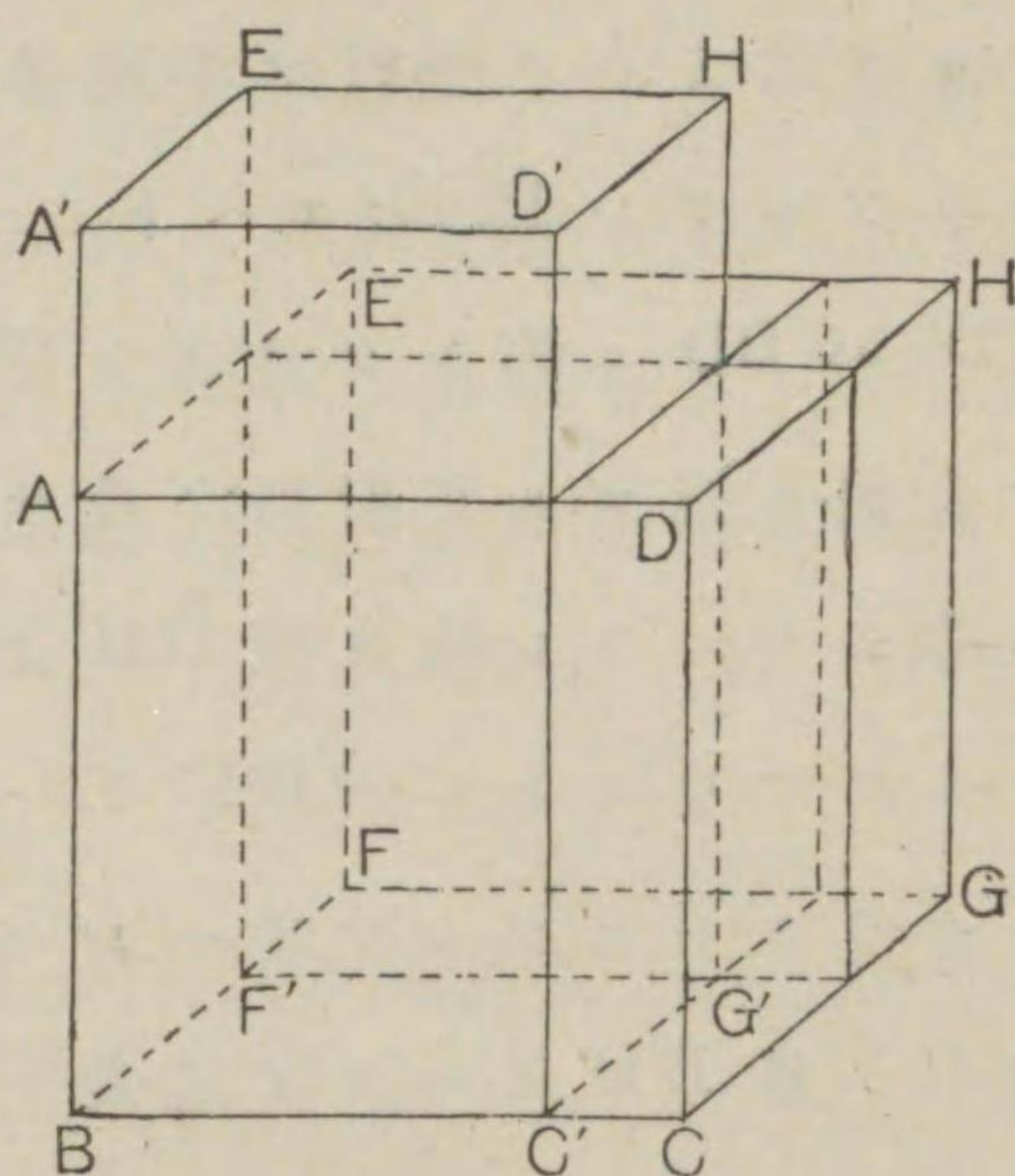
デアアルカラ $AA' = 2CC'$ デアル。

今 $AB < A'B$ ノ場合ヲ考ヘヨウ。

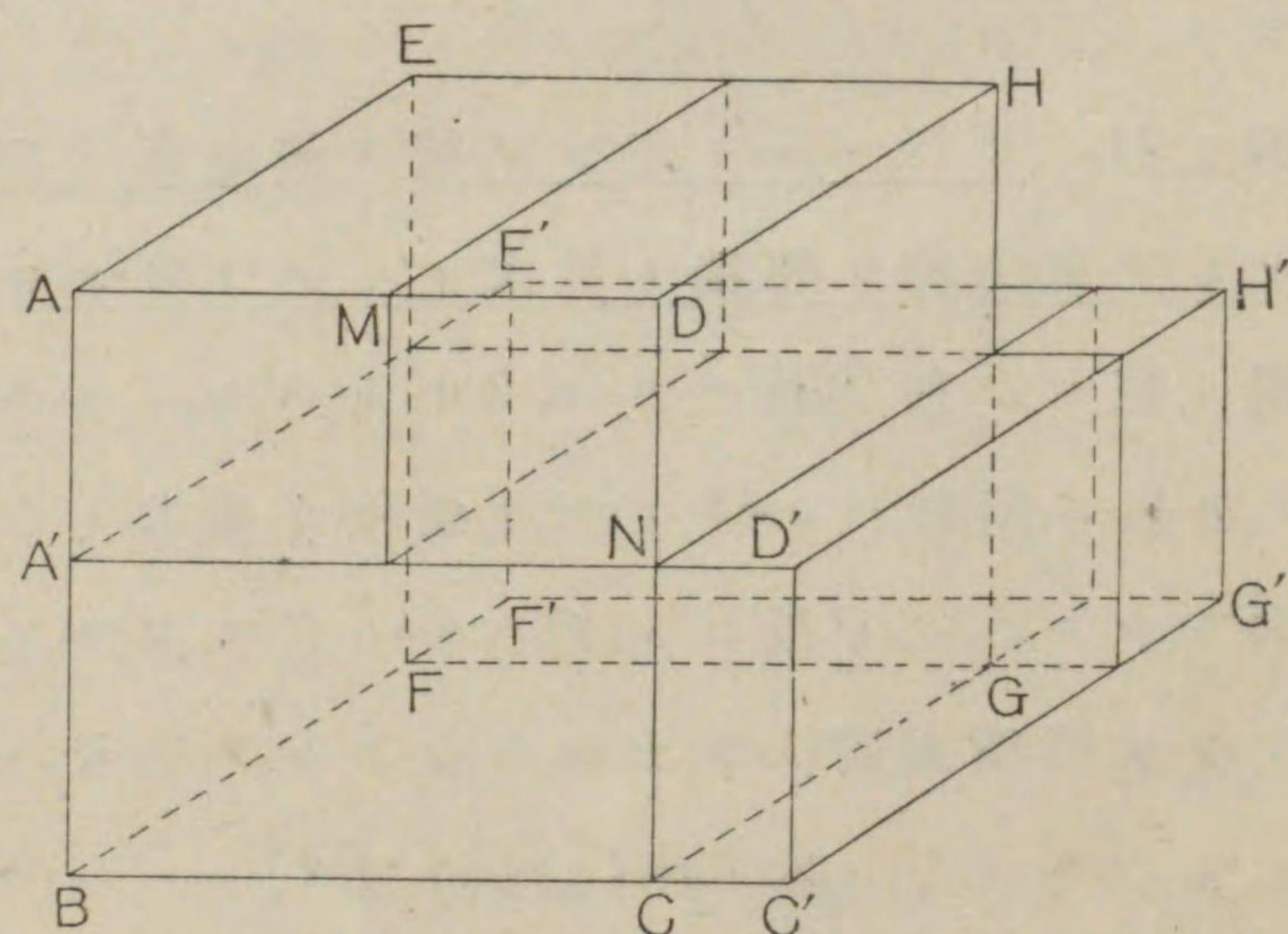
三面角 D ヲ一ツノ頂點ニ於ケル立體角トシ DG' ヲ對角線トスル直方體ヲ考ヘルト、ソノ底面ハ AB, BC' ヲ二邊トスル矩形ニ等シク高サハ CC' デアルカラ、H'A ヲ對角線トスル直方體(Σ' ノ Σ ニ屬サナイ部分)ノ半分ヨリモ大キイ。EG' ヲ對角線トスル直方體モ同ジデアアルカラ Σ ノ Σ' ニ屬サナイ部分ノ方ガ Σ' ノ Σ ニ屬サナイ部分ヨリ大キイ。即 Σ ハ Σ' ヲリ大キイ。

次ニ $AB > A'B$ トシヨウ。コノ場合ニハ AD 上ニ AM ヲ D'C' ニ等シクトレバ、

D'G' ヲ對角線トスル直方體ト EG' ヲ對角線トスル直方體(之等ハ相等シイ)トノ和ハ AM, AA', AE ヲ三稜トスル直方體ニ等シイ。



第 268 圖



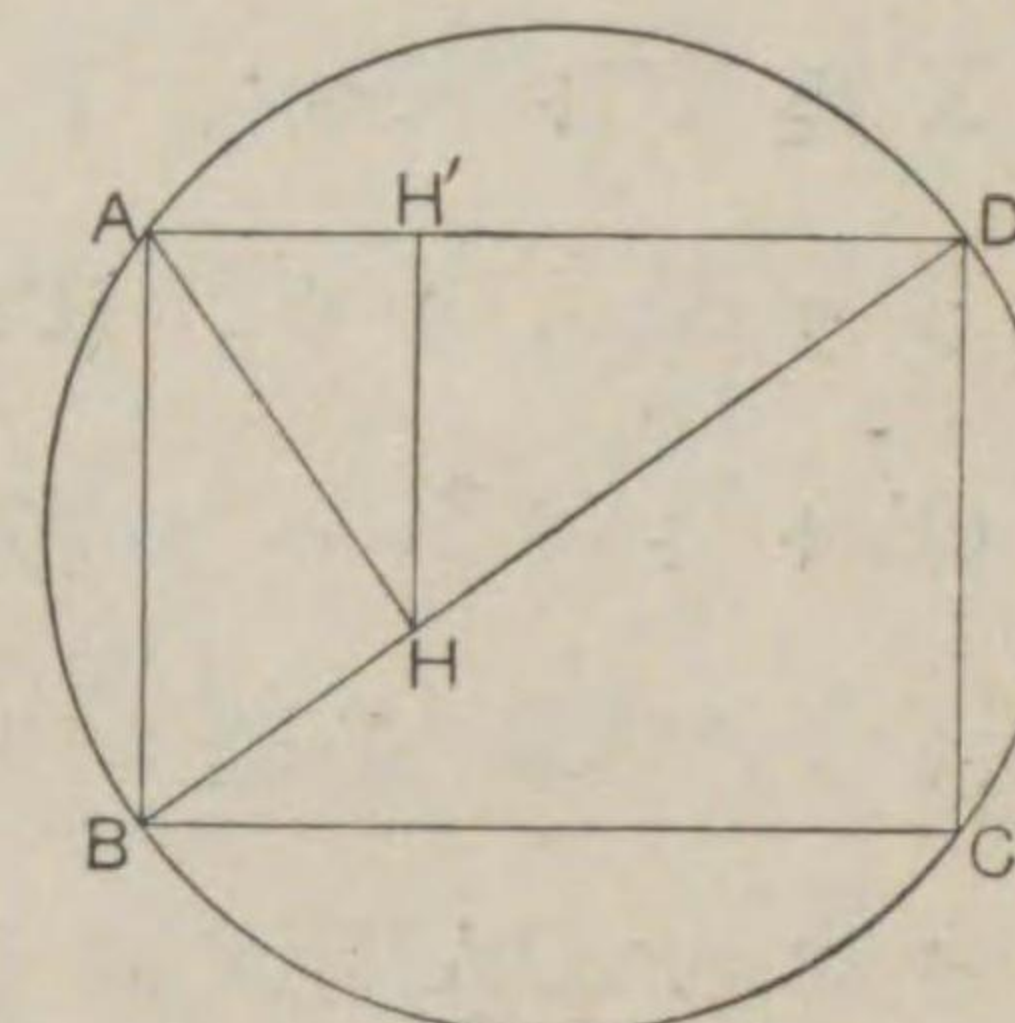
第 269 圖

DC ト D'A' ノ交點ヲ N トスルト DM, DN, DH ヲ三稜トスル直方體ハ H'G' ヲ對角線トスル直方體ヨリ大キイカラ、結局 Σ ハ Σ' ヲリ大キイ。

何レニシテモ Σ ハ Σ' ヲリ大キイカラ、三稜ノ和ガ與ヘラレタ直方體ノ中デハ之ガ立方體トナツタトキ(立方體モ直方體ニ含マセレバ)ガ最大デアアルコトガワカル。

例 22. 與ヘラレタ球ニ内接スル直圓壺ノ體積ノ最大ナモノヲ求メヨ。

解 與ヘラレタ球ニ一ツノ直圓壺ヲ内接シ、ソノ軸ヲ含ム平面デ之ヲキリソノ截口ヲ ABCD トスル。直圓壺ノ體積ハ $AD^2 \cdot AB$ ニ比例スルカラ、之ヲ最大ニスレバヨイ。BD ニ A カラ垂線 AH ヲ引ク。 $AD^2 = DH \cdot DB$ デアルカラ



第 270 圖

$$AD^2 \cdot AB = DH \cdot DB \cdot AB$$

デアアル。BD ハ一定デアアルカラ

$$DH \cdot \frac{AB}{DB}$$

ヲ最大ナラシメルコトヲ考ヘテモヨイ。コレハ一ツノ線分(H カラ AD ニ引イタ垂線 HH' ニ等シイ)デアアルカラソノ上ノ正方形

$$DH^2 \cdot \frac{AB^2}{DB^2} = DH^2 \cdot \frac{BH}{DB}$$

ヲ最大ナラシメレバヨイ。ソレニハ

$$\left(\frac{DH}{2}\right)^2 \cdot BH$$

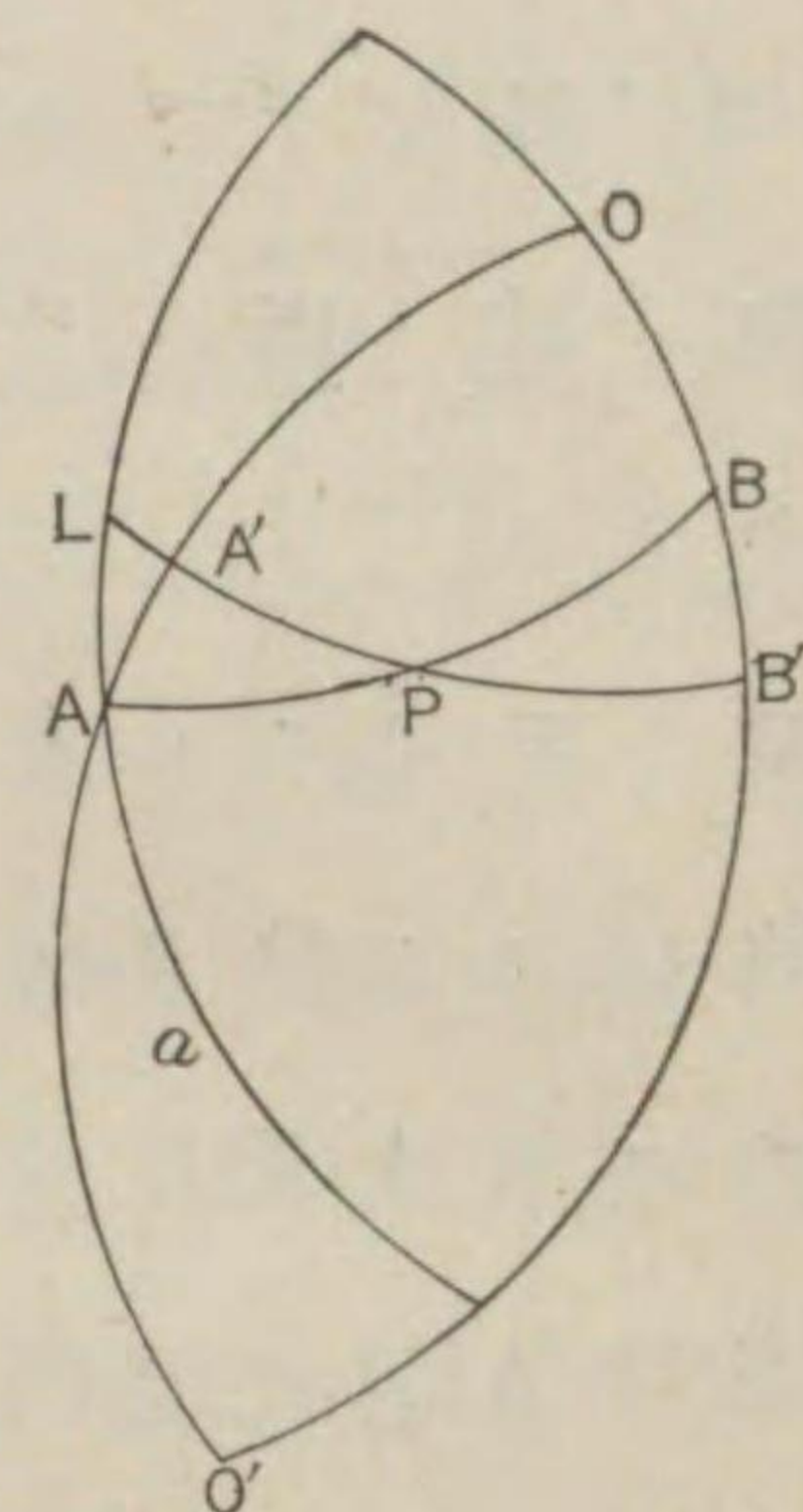
ヲ最大ナラシメレバヨイ。コレハ DH ノ半分ヲニツノ稜トシ BH ヲ第三稜トスル直方體ノ體積デアアル。ソレ故前例ニヨリ

$$\frac{DH}{2} = BH$$

ノトキ最大トナル。コレニヨツテAモ求メラレル。

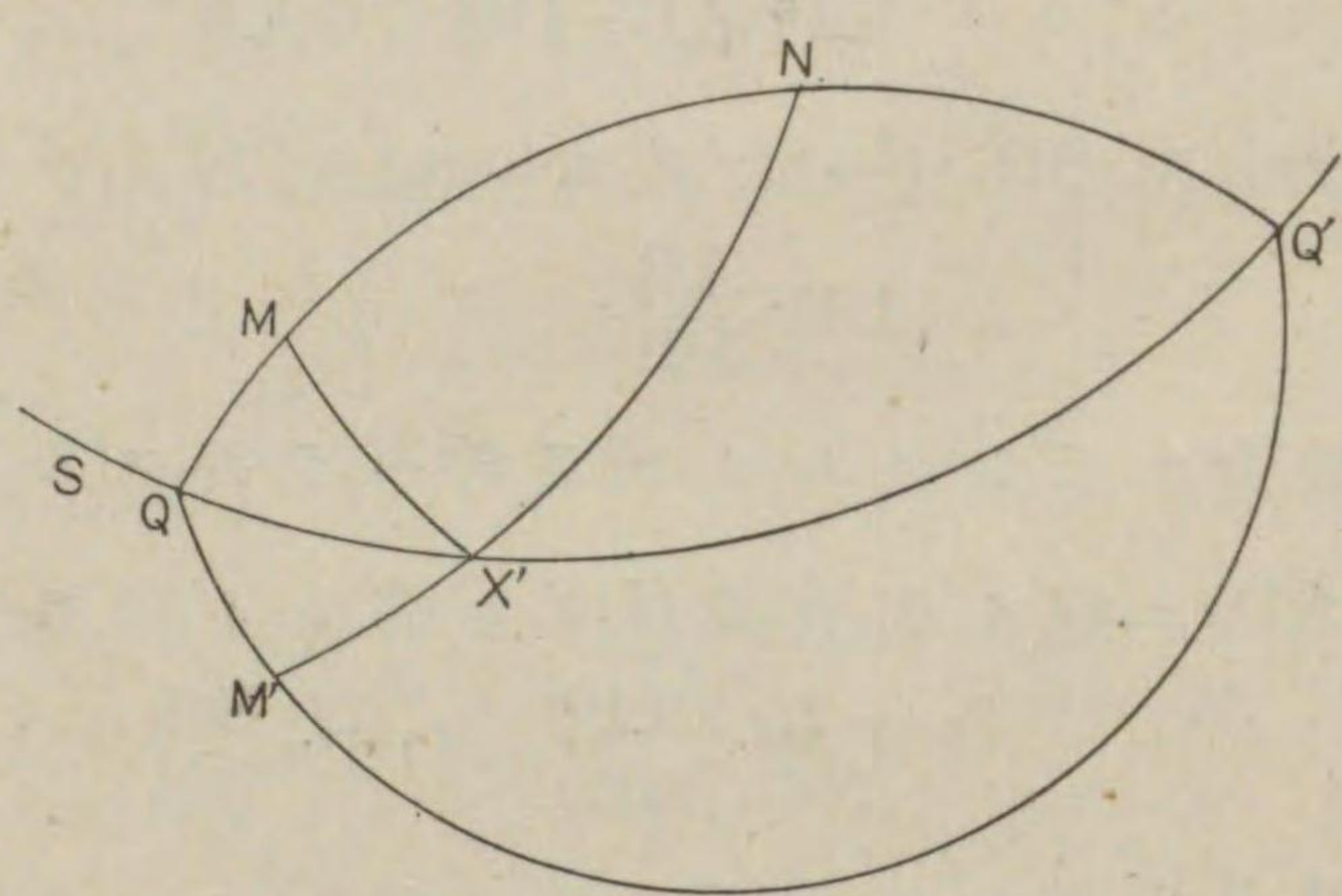
例 23. O, O' ヲ頂點トシ二直角ヨリ小サイ角ヲモツ球面二角形トソノ中ノ一點Pガ與ヘラレタトキ, Pヲ過ル大圓弧ヲ作り二角形ノ邊トA, Bデ交ラセ球面三角形AOBノ面積ヲ最大又ハ最小ニセヨ。

解 先ヅコノ球面三角形ノ極三角形ヲ作ツテ考ヘテ見ヨウ。△OABノ極三角形ヲXMNトシ, Pヲ極トスル大圓ヲs, ABノ極ヲX及X'トスル。PハO'ヨリモOニ近イトシテ考ヘヨウ。(PガOニ近イトキハOトO'トトリカヘテ考ヘレバヨイノデ, ソノトキ△OABガ最大ナラバ△O'ABハ最小トナリ△OABガ最小ナラバ△O'ABハ最大トナル。) MNトsトノ交點即大圓



第 271 圖

OPO'ノ極ヲQ, Q'トスル。M, NハsニツイテPト同ジ側ニアルカラ之ハsノ一方ノ側ニアル。半大圓QMNQ'ト直角ヨリ小サイ角ヲ作ルsノ半圓周QQ'ヲs₁トシ之



第 272 圖

ト共軛ナ半圓周ヲs₂トスル。POハ大圓周ノ四分ノ一ヨリ小サイカラ△OPAノ極三角形XMQノ角XQMハ直角ヨリ大キイ。ソレ故Xハs₂上ニアリX'ハs₁上ニアル。△OABノ面積ヲ最小ニス

ルニハ∠OAP+∠OBPヲ最小ニスレバヨイノデソレニハMX+NXヲ最大ニ即MX'+NX'ヲ最小ニスレバヨイノデアアル。Mノsニ關スル對稱點(空間ニ於テsノ平面ニ關スルMノ對稱點)ヲM'トスル。MX'+NX'=M'X'+NX'デアアルカラ之ヲ最小ニスルニハM'Nトsトノ交點ヲX'トスレバヨイ。(コノトキ大圓M'Qヲ作ルト△M'QMハ二直角ヨリ小サイカラ, 半大圓QM'Q'トQM'Q'トノ間ニ夾マレX'ヲ含ム部分ハ球ノ半分ヨリモ小サク大圓弧NX'M'ハ半大圓周ヨリモ小サイコトヲ注意スル必要ガアル。) 即MX'トNX'トガsト等角ヲナセバヨイ。コノ角ハソレゾレAP, BPノ中心角ノ補角デアアルカラ, APガBPニ等シクナレバヨイノデアアル。又△OABヲ最大ニスルニハMX'+NX'ヲ最大ニスレバヨイノデアアルガ, コレハXガQ又ハQ'ニ近ヅク程大キクナル。ソレ故△OABハABガ大圓OPO'ニ近ヅク程大キクナル。ソレ故△OABニハ最大值ハ存在シナイガ, コレハOPO'ガ與ヘラレタ月形ヲ分ケタ二部分ノ中大キイ方ヨリハ小サイコトガワカル。

カヤウニ球面上ノ作圖(或ハ定理ノ證明等ニ於テモ)ニ於テハ球面三角形ノ代リニソノ極三角形ヲ, 大圓ノ代リニソノ極ヲ, 點ノ代リニ之ヲ極トスル大圓ヲ考ヘコノ新シイ圖形ニツイテ問題ノ解ヲ求メラレルコトガ多イ。カヤウナ圖形ヲ一般ニ原圖形ノ極圖形ト云フ。極圖形ハ一般ニ原圖形ノ性質ト雙對ノ性質ヲモツノデアアル。

本問題ノ解ハカヤウニ求メラレタガ, コノ解ガ△OABノ最大又ハ最小値ヲ與ヘルコトハ原圖形ニツイテ直接證明デキル。ソレニハ極圖形デ證明シタコトヲ原圖形ニツイテ云ヒ直シテ見レバヨイノデアアル。例ヘバPガABノ中點デアルトキ△OABハ最小

面積ヲモツコトヲ證明シテ見ヨウ。PニツイテOBト對稱ナ大圓(Pヲ過ル直徑ヲ軸トシテ大圓OBO'ヲ二直角廻轉シテ得ル大圓,コレガM'ヲ極トスル大圓デアル。)ヲ a トスルト之トOAトノ交點ガAデアル。Pヲ過リABトチガフ大圓ヲ作りOBトB'テ,OA及 a トA'及Lデ交ラセル。

$$\begin{aligned} \angle OB'A' + \angle OA'B' &= \angle ALA' + \angle LA'A. \\ &> 2R - \angle LAO \\ &= \angle OAB + \angle OBA \end{aligned}$$

ソレ故 $\triangle OA'B'$ ハ $\triangle OAB$ ヨリ大キイ。即 $\triangle OAB$ ガ最小ナ面積ヲモツコトガ證明サレタ。

例 題 XIV

1. 與ヘラレタ點Pヲ過ル平面ニ他ノ與ヘラレタ點Qカラ引ク垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム。
2. 與ヘラレタ三點カラノ距離ノ平方ノ和ガ與ヘラレタ量 k^2 ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
3. 與ヘラレタ平面上テ與ヘラレタ二點カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
4. 與ヘラレタ三平面カラノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
- ✧ 5. 四面體ABCDノ底面BCDノ位置及大サガ與ヘラレ、且ツ $AB:AC$ ト AD トガ與ヘラレタトキソノ重心ノ軌跡。
- ✧ 6. 同上稜ADノ軌跡。
7. ニツノ平面 α, β ガ與ヘラレタトキ, α 上ノ點Aト β 上ノ點Bヲ結ブ線分ABノ中點ノ軌跡。
8. ニツノ直線 a, b ガ與ヘラレタトキ, a 上ノ點Aト b 上ノ點Bヲ結ブ線分ABノ中點ノ軌跡。

9. 二直線 a, b ガ直交スルトキ a, b 上ニ兩端ヲモツ線分ABノ長サガ一定ノトキソノ中點ノ軌跡。
10. ニツノ球ヘノ方器ノ比ガ與ヘラレタ比ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
11. 三ツノ球ヘノ方器ノ比ガ與ヘラレタ連比ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
12. ニツノ定球ヲ大圓ニソウテ截ル球ノ中心ノ軌跡。
13. 三ツノ定球ヲ大圓ニソウテ截ル球ノ中心ノ軌跡。
14. ニツノ定球ヲ大圓ニソウテ截リ他ノ一ツノ定球ヲ直角ニ截ル球ノ中心ノ軌跡。
15. 三ツノ與ヘラレタ平面 α, β, γ ヘ點Pカラ垂線PH, PK, PLヲ引クトキ, l, m, n ヲ與ヘラレタ線分トシ

$$lPH + mPK + nPL$$
 ガ與ヘラレタ面積 k^2 ニ等シイヤウナ點ノ軌跡。
16. $\angle AOB$ ガ與ヘラレタトキ點PカラOA, OBニ引ク垂線ヲPH, PKトシ, $OH + OK$ ガ與ヘラレタ線分 k ニ等シイヤウナ點Pノ軌跡。
17. 二直線 a, b ガ互ニ垂直テ相交ラナイトキ一點Pト a トノ定メル平面ガPト b トノ定メル平面ト直角ニ交ルトキP點ノ軌跡ヲ求ム。
18. 四面體ABCDニ於テ底面BCDノ位置及大サガ與ヘラレ $\angle BCD$ ハ直角デアルトスル。又二面角AB, CDガ共ニ直角デアラバ稜ABノ軌跡ハ何カ。
19. 與ヘラレタ立方體ノ各面ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ與ヘラレタヤウナ點ノ軌跡ヲ求ム。
20. 與ヘラレタ直線ヲ含ム平面ニヨル與ヘラレタ球ノ截面ノ中心ノ軌跡。
21. 與ヘラレタ三ツノ球ヲ等角ニ視ル(コノ點ヲ頂點トシコレヲノ球ニ外接スル直圓錐面ノ頂角ガ相等シイコト)點ノ軌跡。
22. 與ヘラレタ直圓錐面ノ切平面ノ交角ガ與ヘラレタ角 α ニ等シイトキソノ交線ノ軌跡ヲ求ム。

23. 四ツノ與ヘラレタ球ガアルトキ之等ノ中心ヲ固定シ半徑ヲ相等シイ線分ダケ増減シタトキソノ根心ノ軌跡ヲ求ム。
24. 與ヘラレタ直線 a ト交リ與ヘラレタ平面ニ平行ナ直線 α 上ノ與ヘラレタ點 A カラ引イタ垂線ノ足ノ軌跡。
25. 三面角 $O-ABC$ ガ與ヘラレタトキ OA, OB, CC 上ニ X, Y, Z ナ $OX+OY+OZ$ ガ與ヘラレタ線分ニ等シクナルヤウニトルトキ四面體 $OXYZ$ ノ外心ノ軌跡ヲ求ム。
26. 三面角 $O-ABC$ ガ與ヘラレタトキ OA, OB, OC 上ニ X, Y, Z ナ四面體 $OXYZ$ ノ外接球ノ半徑ガ一定デアルヤウニツタトキソノ外心ノ軌跡。
27. 與ヘラレタ平面 α 上ニ與ヘラレタ線分 BC ガアル。四面體 $ABCD$ ノ D ハ α 上ニアリ且 AC, AD ノ長サガ與ヘラレテ居ルトキ A 點ノ軌跡ヲ求ム。
28. 與ヘラレタ四面體 $ABCD$ ノ面 BCD 上ニ底ヲ有シ, AB, AC, AD 上ニ他ノ底ノ三頂點ナモツ直三角錐ノ兩底ノ重心ヲ結ブ線分ノ軌跡ヲ求ム。
29. ニツノ定線分 AB, CD 上ノ點 P, Q ナ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。
30. 相交ラナイニツノ定直線上ニ一ツツツアル與ヘラレタ長サノ線分ナニツノ稜ニモツ四面體ノ重心ノ軌跡。
31. 與ヘラレタ線分上ノ點ト與ヘラレタ圓周上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡。但線分ハ圓ノ平面ト平行デアルトスル。
32. 斜圓錐ニ内接(ソノ側面上ニ上底ノ周ヲモチ, 底面又ハソノ延長上ニ下底ヲモツ)スル直圓錐ノ軸ノ軌跡。
33. 與ヘラレタ二點ヲ過リ與ヘラレタ平面ニ切スル球ノ切點ノ軌跡。
34. 一定球面上ニ一定圓 C ガアル。コノ球面上ニ一定半徑ノ圓 K ナトリ, C ト K トヲ含ム圓錐面ヲ作ルトキソノ頂點ノ軌跡。
35. 二直線 a, b ガ交ルトキコノ各々ヲ含ミ垂直ニ交ル二平面ノ交線ノ軌跡ヲ求ム。

36. ニツノ球ノ外相似ノ中心ヲ過ル平面ニヨツテコノニツノ球ヲキルトキ截面ノ内共通切線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム。
37. 底邊ノ位置及大サト頂點カラ底邊ニ垂直ニ引イタ大圓弧ノ長サ(之ヲ球面三角形ノ高サト云フ)ガ與ヘラレタトキ球面三角形ノ頂點ノ軌跡。
38. 球面上テ與ヘラレタ大圓弧 BC ナ底トシ一定面積ヲモツ球面三角形ノ頂點ノ軌跡。
39. 球面上ニ同一大圓上ニアル三點 A, B, C ガ與ヘラレタトキ A, B ナ過ル小圓ニ C カラ引イタ切線ノ切點ノ軌跡。
40. 定小圓 O ニ定點 A ナ過ル割線ヲ引キソノ交點テ切線ヲ作ルトキ切線ノ交點ノ軌跡。
41. 球面上ニ大圓 s ト之ト垂直ナ大圓上ニ二點 A, B トガ與ヘラレテ居ル。大圓 AB ト s トノ交點ヲ C トシ, CB ナ過ル圓 K ト s トノ C デナイ交點ヲ D トスルトキ DA ト K トノ D デナイ交點ノ軌跡ヲ求ム。
42. 與ヘラレタ二直線ト交リ, 他ノ與ヘラレタ直線ニ平行ナ直線ヲ作レ。
43. 與ヘラレタ三直線 a, b, c トソレソレ A, B, C ニ於テ交リ AB ト BC トノ比ガ與ヘラレタ比トナルヤウナ直線ヲ引ケ。
44. 與ヘラレタ二直線 a, b ニ兩端ヲオキ, 與ヘラレタ平面ニ平行テ且與ヘラレタ長サノ線分ヲ作レ。
45. 直角ニ交ル三平面ガ與ヘラレテ居ル。與ヘラレタ長サノ線分ヲ之等ノ平面ヘノ正射影ノ連比ガ與ヘラレタ連比ト等シクナルヤウニオケ。
46. 四面角ヲ平面テ截リ截面ヲ平行四邊形ナラシメヨ。
47. 四面體ヲ平面テ截リ截面ヲ菱形ナラシメヨ。
48. 面ガ皆直角デアル三面角ヲ平面テ截リ截面ヲ與ヘラレタ三角形ニ合同ニセヨ。
49. 立方體ヲ平面テキリ, 截面ヲ正六角形ナラシメヨ。
50. 四面體內ニ一點ヲ求メ之ヲ頂點トシ四ツノ面ヲ底トスル四

面體が皆相等シクナルヤウニセヨ。

51. 正四角錐ノ底ノ一邊ヲ含ム平面ヲ作リソノ體積ヲ二等分セヨ。
52. 四面角ノ一ツノ面上ニ一ツノ直線ガ與ヘラレタトキコノ直線ヲ含ム平面ヲ作り之ト四面角トテ圍ム四角錐ノ體積ヲ與ヘラレタヤウニスルコト。
53. 相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ノ長サ及之等ガ互ニナス角ヲ知ツテ四面體ヲ作レ。
54. 各稜ノ上ノ點チ一ツツ知ツテ四面體ヲ作レ。
55. 四面體ノ五ツノ稜及殘リノ稜ニ於ケル二面角ヲ知ツテコノ稜ノ長サヲ求ム。
56. 三面角 $O-ABC$ ノ二面角 OA, OB 及 $\angle AOB$ ナ知ツテ他ノ面及二面角ヲ求ム。
57. 同上二面角 OA 及 $\angle COA, \angle COB$ ナ知ツテ他ノ面及二面角ヲ求ム。
58. 三面角ノ三ツノ二面角ヲ知ツテ各面ヲ求ム。
59. 二ツノ面ト一ツノ高サトヲ與ヘテ四面體ヲ作レ。(二ツノ場合ガアル。)
60. 四面體 $ABCD$ ノ $\angle ABC, \angle BAC, \angle ABD, \angle CBD, \angle DAB$ ナ知リ且内接球ノ半徑ヲ知リテコノ四面體ヲ作レ。
61. 一ツノ面ノ三邊ノ長サ他ノ三稜ノ比及體積ヲ知ツテ四面體ヲ作レ。
62. 三面角 $A-BCD$ ガ與ヘラレ且面 BCD ガ與ヘラレタ點ヲ過ルコトヲ知ツテ直稜四面體ヲ作レ。
63. 與ヘラレタ廻轉錐面ニ切平面ヲ作り之ヲ與ヘラレタ直線ト平行ナラシメヨ。
64. 與ヘラレタ圓 C ナ底トシ全面積モ體積モ等シイヤウナ直圓錐及直圓壩ヲ作レ。(直圓錐ヲ作ルト云フコトハ底ト其頂點ヲ求メルコトヲ直圓壩ヲ作ルト云フコトハ兩底ヲ求メルコトトスル)。
65. 與ヘラレタ球内ノ與ヘラレタ點ヲ過リ互ニ直交スル三ツノ

弦ヲ作リソノ連比ヲ與ヘラレタ連比ニ等シクセヨ。

66. 與ヘラレタ三點ヲ過リ與ヘラレタ球ニ切スル球ヲ作レ。(球ヲ作ルト云フコトハ中心ト半徑ヲ求メルコトトスル)。
67. 與ヘラレタ三平面ト與ヘラレタ球ニ切スル球ヲ作レ。
68. 與ヘラレタ二直線ニソレゾレ與ヘラレタ點ニ於テ切スル球ヲ作レ。
69. 與ヘラレタ四ツノ球ニ切スル球ヲ作レ。
70. 與ヘラレタ二平面ト與ヘラレタ直線ニ切シ且與ヘラレタ半徑ノ球ヲ作レ。
71. 與ヘラレタ平面ニ與ヘラレタ點ニ於テ切シ且與ヘラレタ球ヲ與ヘラレタ角ニキル球ヲ作レ。
72. 與ヘラレタ平面ニ平行ナ平面ヲ作り與ヘラレタ二ツノ球ト交ラセ、截面ノ半徑ガ相等シクナルヤウニセヨ。
73. 與ヘラレタ直線ヲ含ミ、與ヘラレタ二ツノ球ト交ル平面ヲ作りソノ截面ノ半徑ガ與ヘラレタ比ヲモツヤウニセヨ。
74. 二ツノ球ヲ與ヘルトキこんばすノ一端チ一ツノ球面上ニオキ他端チソノ球面又ハ他ノ球面上ニスベラシテ圓ヲ畫クコト、及平面上ノ作圖ヲスルコトニヨツテソノ球ノ間ノ距離ヲ求メヨ。
75. 本章ノ例18ノヤウナ球面上ノ作圖ニヨツテ球面上ノ與ヘラレタ三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ。又與ヘラレタ球面多角形ト等積ナ球面月形ヲ作レ。
76. 二邊及ソノ一邊ニ對スル高サヲ知ツテ球面三角形ヲ作レ。
77. 面積、一角及之ヲ夾ム一邊ヲ知ツテ球面三角形ヲ作レ。
78. 面積、一角及之ニ對スル邊ヲ知ツテ球面三角形ヲ作レ。
79. 底邊、高サ及面積ヲ知ツテ球面三角形ヲ作レ。
80. $\angle A$, 邊 AB 及 $BC+CA$ ナ知ツテ球面三角形 ABC ナ作レ。
81. $\angle A$, 邊 AB 及 $\angle B+\angle C$ ナ知ツテ球面三角形 ABC ナ作レ。
82. 球面上ニ一ツノ小圓 C 及二ツノ點 A, B ガ與ヘラレテ居ル。 A, B ナ過ル小圓ヲ作り C トノ交點ヲ結ブ大圓弧ノ長サガ與ヘラレタ長サニ等シクナルヤウニセヨ。

83. 球面上ニ二ツノ大圓 OA, OB ト一點 P が與ヘラレタトキ, P ナ過ル大圓ヲ作り OA, OB ト A, B テ交ラセ $\triangle OAB$ ノ面積ガ與ヘラレタ面積ニ等シクナルヤウニセヨ。
84. 球面上テ與ヘラレタ二點ヲ過リ與ヘラレタ小圓ヲ與ヘラレタ角ニキル小圓ヲ作レ。
85. 球面上ニ與ヘラレタ三ツノ小圓ノ周ヲ二等分スル小圓ヲ作レ。
86. 球面上テ與ヘラレタ二ツノ小圓ト同シ根軸ヲモチ, 他ノ與ヘラレタ小圓ニ切スル小圓ヲ作レ。
87. 球面上テ與ヘラレタ小圓ニ與ヘラレタ點ニ於テ切シ他ノ與ヘラレタ小圓ヲ直角ニキル小圓ヲ作レ。
88. 與ヘラレタ半球ニ直圓錐ヲ内接シソノ全面積ヲ與ヘラレタ圓ノ面積ニ等シクセヨ。
89. 四邊ガ皆與ヘラレタ大圓弧ニ等シク各角ガ皆等シイ球面四角形ノ一角ヲ求メヨ。
90. 五ツノ邊ガ皆與ヘラレタ大圓弧ニ等シク各角ガ皆相等シイ球面五角形ノ一角ヲ求メヨ。
91. 前問ノヤウナ五角形ノ一角ヲ與ヘテ邊ヲ求ム。
92. 頂點ヲ共有スル二ツノ廻轉錐面ニ共通ナ切平面ヲ作レ。
93. 與ヘラレタ點ヲ過リ與ヘテレタ二ツノ球ニ共通ナ切線ヲ作レ。
94. 同一平面上ニ三ツノ三角形ガ與ヘラレテ居ル。コノ平面上ニコレラノ三角形ヲキラナイ一直線ヲ求メ, コレヲ軸トシテ三ツノ三角形ヲ廻轉シテ得ル立體ノ體積ガ與ヘラレタ連比ヲモツヤウニセヨ。
95. 三角形ガ與ヘラレタトキソノ平面上ニ此三角形ヲ截ラナイ一直線ヲ求メ之ヲ軸トシテコノ三角形ヲ廻轉シテ得ル立體ノ體積及表面積ガソレゾレ與ヘラレタ大サヲモツヤウニセヨ。
96. 圓 O トソノ周上ノ點 P ガ與ヘラレタトキ, P ニ於テ O ニ外切スル圓 O' ナ作り, O ト O' ノ外共通切線ノ切點間ノ部分ヲ OO' ナ軸ト

- シテ廻轉シテ得ル曲面ノ面積ガ與ヘラレタ面積ニ等シクナルヤウニセヨ。
97. 與ヘラレタ球ニ一ツノ小圓ヲ作り, ソノ面積トソノ周ヲ底ノ周トシ球ノ中心ヲ頂點トスル直圓錐ノ側面積トノ比ヲ與ヘラレタ比ニ等シクセヨ。
98. 球面チ一ツノ平面ヲ分チ, 小サナ部分ノ面積ト接口ノ圓ノ面積トノ和ガ大キナ方ノ部分ノ面積ト等シクナルヤウニセヨ。
99. 與ヘラレタ球ニ小圓ヲ作り, コノ小圓ノ内部ト小圓ノ平面トテ圍マレル立體ノ體積ト, コノ小圓ト小圓ノ周ヲ底ノ周トシ球ノ中心ヲ頂點トスル圓錐ノ側面トニヨツテ圍マレル立體ノ體積トノ比ヲ與ヘラレタ比ニ等シクセヨ。
100. 四面體ノ四ツノ頂點カラ對面ヘ引ク垂線ハ双曲的位置ニアル。
101. 一定平面ニ平行ナ三直線ト交ル直線ハ皆他ノ一定平面ニ平行デアル。
102. 與ヘラレタ平面ニ平行ナ平面ヲ作り與ヘラレタ三直線トノ交點ガ一直線上ニアルヤウニセヨ。
103. 與ヘラレタ平面ニ平行ナ平面ヲ作り與ヘラレタ三直線 a, b, c ナ A, B, C テキリ $AB=AC$ ナラシメヨ。
104. 一平面 π トソノ同シ側ニ二點 A, B ガ與ヘラレタトキ, π 上ニ一點 P ナ求メ $AP+BP$ ナ最小ナラシメヨ。
105. 一平面 π ト三點 A, B, C ガ與ヘラレタトキ π 上ニ一點 P ナ求メ $AP^2+BP^2+CP^2$ ナ最小ナラシメヨ。
106. 與ヘラレタ二直線 a, b 上ニ兩端ヲオキ, 與ヘラレタ平面ニ平行ナ線分ノ中長サノ最小ナモノヲ求メヨ。
107. 與ヘラレタ直線上ニ一點ヲ求メ與ヘラレタ二平面ヘノ距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。
108. 與ヘラレタ球面上ニ一點ヲ求メ, 與ヘラレタ二平面カラノ距離ノ和ヲ最小ニセヨ。
109. 與ヘラレタ圓周上ニ一點ヲ求メ與ヘラレタ球カラノ距離ヲ

最小ナラシメヨ。

110. 與ヘラレタ四面體チ一組ノ相對スル稜ニ平行ナ平面デキリソノ截面チ最大ナラシメヨ。

111. 數箇ノ點ガ與ヘレタトキ與ヘラレタ半徑ノ球チ作り之等ノ點ノコノ球ニ關スル方冪ノ和ガ最小トナルヤウニセヨ。

112. ニツノ球ト一直線ガ與ヘラレタトキコノ直線チ含ム平面チ作り、二球ノ截面ノ面積ノ和チ最大ニスルコト。

113. ニツノ球ノ共通切線ノ中切點間ノ長サガ最大ナモノ及最小ナモノチ求ム。

114. 定球面上デ二邊ガ與ヘラレタ球面三角形ノ面積ノ最大ナモノチ求ム。

115. 定球面上ニ一ツノ小圓トソノ球面直徑 BC (極チ通ル大圓ノ小圓内ノ部分)ガ與ヘラレテ居ル。小圓上ニ一點 P チ求メ、 $\angle BPC$ チ最大ナラシメヨ。

116. 球面上ニ二點 B, C ト一ツノ小圓 K ガ與ヘラレタトキ K 上ニ一點 P チ求メ球面三角形 BPC ノ面積チ最大又ハ最小ニセヨ。

117. 底及周ガ與ヘラレタ球面三角形ノ面積ノ最大ナモノチ求ム。

118. 一點 P ト二直線 a, b ガ與ヘラレタトキ a, b 上ニ二點 A, B チ求メ、 $\triangle PAB$ ノ周チ最小ナラシメヨ。

119. 與ヘラレタ球ニ内接スル直方體ノ體積ノ最大ナルモノチ求メヨ。

120. 表面積ガ與ヘラレタ直方體ノ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

121. 與ヘラレタ四面體ノ正射影ノ最大ナモノチ求メヨ。又與ヘラレタ立方體ノ正射影ノ最大ナモノチ求メヨ。

122. 四面體ノ三ツノ面ノ面積ノ和ガ與ヘラレタトキ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

123. 全面積ガ與ヘラレタ直圓錐ノ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

124. 側高ガ與ヘラレタ直圓錐ノ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

125. 與ヘラレタ三面角 A-BCD 内ノ一點 P チ過ル平面チ作り、稜 AB, AC, AD ト B, C, D デ交ラセ、四面體 A-BCD ノ體積ガ最小トナルヤウ

ニセヨ。

126. 二組ノ相對スル稜ガ與ヘラレタトキ體積ガ最大ナ四面體チ作レ。

127. 半球ニ内接スル直圓錐ノ表面積ノ最大ナモノ及體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

128. 與ヘラレタ球ニ外接スル直圓錐ノ表面積ノ最大ナモノ及體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

129. 與ヘラレタ正方形チ底トスル四角錐ノ體積ガ與ヘラレタトキ表面積ノ最小ナモノチ求ム。

130. 正方形(任意)チ底トスル四角錐ノ體積ガ與ヘラレタトキ表面積ノ最大ナモノチ求メヨ。

131. 與ヘラレタ球ニ内接スル四面體ノ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

132. 四ツノ面ノ面積ガ與ヘラレタトキ四面體ノ體積ノ最大ナモノチ求メヨ。

133. 互ニ平行ナ平面 α, β 及ソノ間ニ二點 P, Q ガ與ヘラレテ居ル α 上ノ與ヘラレタ直線 a 上ニ點 M チ求メ、MP, MQ ト β トノ交點チ P', Q' トシ P'Q' ノ長サチ最小ナラシメヨ。

134. 與ヘラレタ球内ニル箇ノ點チ求メソノ相互ノ距離ノ平方ノ和チ最大ナラシメヨ。

135. 與ヘラレタ四面體內ニ一點チ求メコノ點カラ四面ヘノ距離ノ平方ノ和チ最小ナラシメヨ。

136. 與ヘラレタ球面 K 上ニ二點 A, B ガ與ヘラレテ居ル。コノ球面上ニ一點 P チ求メ AP+2BP チ最大ニセヨ。

137. 定球面上ニ三定點 A, B, C ガアル。コノ球面上ニ一點 P チ求メ $PA^2+PB^2+PC^2$ チ極大又ハ極小ナラシメヨ。

138. 同上 PA+PB+PC チ極大又ハ極小ナラシメヨ。

139. 四面體ノ相對スル稜ノ中點チ過ル平面ノ中之ニヨル四面體ノ截面ノ面積ガ最大ナモノチ求ム。

140. 正八面體チ一雙ノ相對スル面ニ平行ナ平面デキリソノ截面

ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

141. 與ヘラレタ周ノ直角三角形ノ中斜邊ヲ軸トシテ廻轉シテ得ル立體ノ體積ノ最大ナモノヲ求ム。

142. 相對スルニツノ稜ノ長サヲ知リ最大體積ノ四面體ヲ作レ。

143. 與ヘラレタ二平面及與ヘラレタ直線上ニソレゾレ點A, B, Cヲ求メ $\triangle ABC$ ノ周ヲ最小ナラシメヨ。

144. 與ヘラレタ直線上ニ一點ヲ求メ與ヘラレタニツノ平行線ヘノ距離ノ和ヲ極小ナラシメヨ。

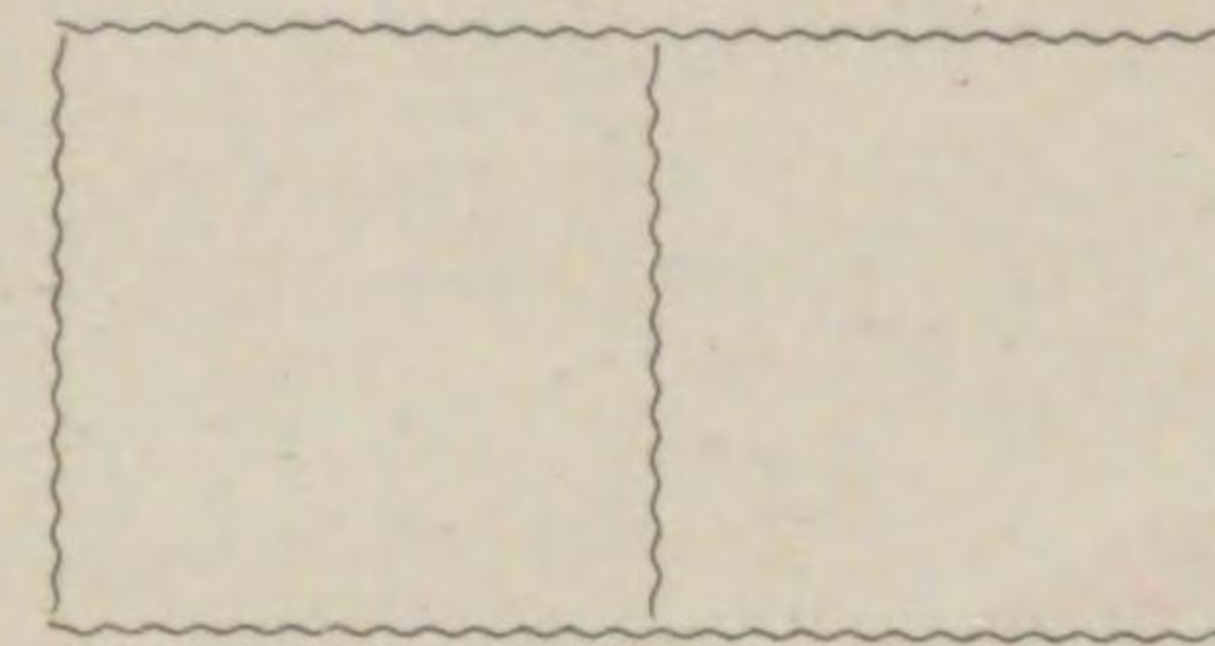
— < 終 > —

昭和6年4月10日印刷

昭和6年4月15日發行

初 等 幾 何 學

定價金3圓50錢



著 作 者 澤 山 勇 三 郎
森 本 清 吾

發 行 者 株式會社 積 善 館
大阪市南區安堂寺橋通三丁目五十三番地

代 表 者 石 田 忠 兵 衛

印 刷 者 竹 內 喜 太 郎

印 刷 所 日 清 印 刷 株 式 會 社
東京市牛込區榎町七番地

發 行 所 株式會社 積 善 館

東京市神田區今川小路三(振替東京2066番)

大阪市南區安堂寺橋通三(振替大阪2981番)

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY
540 EAST 57TH STREET
CHICAGO, ILL. 60637

291-292 脱下

608-269



1200501533479

28

69

