Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 30

Serre-Dualität

Im Beweis der Serre-Dualität orientieren wir uns stark an Forster und Möller.

LEMMA 30.1. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \Omega_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(H^1(X, \mathcal{L}), H^1(X, \Omega_X)\right),\, \theta \longmapsto H^1(\theta),$$

injektiv.

Beweis. Hier stehen links Modulgarbenhomomorphismen und rechts $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen, die Gesamtzuordnung ist ein Gruppenhomomorphismus. Es sei $\theta \in \operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \Omega_X)$ nicht die Nullabbildung. Dann ist $\theta \colon \mathcal{L} \to \Omega_X$ injektiv, da beide Garben invertierbar sind. Es liegt somit eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_X/\mathcal{L} \longrightarrow 0$$

vor, wobei die Quotientengarbe $\Omega_X/\mathcal{L}$ nach Lemma 28.1 einen diskreten Träger besitzt und ihre erste Kohomologie verschwindet. Es liegt somit die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}) \stackrel{H^0(\theta)}{\longrightarrow} H^0(X, \Omega_X) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X/\mathcal{L}) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^1(X, \mathcal{L}) \stackrel{H^1(\theta)}{\longrightarrow} H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow 0$$

vor. Daher ist $H^1(\theta)$ surjektiv und wegen $H^1(X, \Omega_X) \neq 0$ ist es nicht die Nullabbildung. □

Wir wissen noch nicht, dass das Residuum eine Bijektion

$$H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C}$$

definiert, nur, dass die Abbildung nichttrivial, also surjektiv ist. Wir werden von nun an die Dualität über das Residuum betrachten. Wir schreiben $H^1(X, \mathcal{L})^*$ für den Dualraum von $H^1(X, \mathcal{L})$. Die vorstehende Aussage gilt auch in dieser Situation.

KOROLLAR 30.2. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \Omega_X) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(H^1(X, \mathcal{L}), \mathbb{C}\right),\, \theta \longmapsto \operatorname{Res}\left(H^1(\theta)\right),$$

injektiv.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 30.1. □

Lemma 30.3. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ invertierbare Garben auf X. Es sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein nichttrivialer Schnitt. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\left(H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})\right)^* \longrightarrow \left(H^1(X, \mathcal{M})\right)^*$$

injektiv.

Beweis. Der Schnitt führt zu einem injektiven Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ und durch Tensorierung zu einem injektiven Homomorphismus $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$. Nach Lemma 28.1 ist

$$H^1(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$$

surjektiv und daher ist die duale Abbildung injektiv. □

Lemma 30.4. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und seien $D' \leq D$ Divisoren auf X. Es sei K ein kanonischer Divisor von X. Dann liegt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(D))^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D')) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(D'))^* \end{array}$$

vor, wobei alle Abbildungen injektiv sind. Dabei gilt

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D')) \cap H^1(X, \mathcal{O}_X(D))^*.$$

Beweis. Links steht die zu

$$K - D \leq K - D'$$

gehörende Einbettung der zugehörigen invertierbaren Garben, siehe Lemma 20.16. Rechts steht die injektive duale Abbildung zur surjektiven Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(D')) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)),$$

die wiederum zur Einbettung

$$\mathcal{O}_X(D') \subseteq \mathcal{O}_X(D)$$

gehört. Es ist

$$\mathcal{O}_X(K-D) \cong \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D).$$

Ein globaler Schnitt in dieser Garbe ist das gleiche wie ein Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X \otimes \mathcal{O}_X(-D)$$

was wiederum das gleiche wie ein Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \Omega_X$$

ist. Daher folgt die Injektivität der horizontalen Abbildungen aus Korollar 30.2.

Es sei nun eine Linearform $\lambda' \in H^1(X, \mathcal{O}_X(D'))^*$ gegeben, das einerseits von $\lambda \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D))$ und andererseits von $u' \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D')) = \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X(D'), \Omega_X)$ herrührt. Wir müssen $u' \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D))$ zeigen.

Nehmen wir an, dass das nicht gilt. Dann gibt es einen Punkt $P \in X$ derart, dass die Ordnung von u' in P echt kleiner als die Ordnung von $K-D$ in P ist. Um einen Widerspruch zu erreichen, konstruieren wir eine Kohomologieklasse $c' \in H^1(X, \mathcal{O}_X(D'))$, die unter λ, also unter

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(D')) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}\,,$$

und unter $H^1(u')$ einen unterschiedlichen Wert hat.

Es sei $P \in U$ eine Kreisscheibenumgebung derart, dass auf $U \setminus \{P\}$ die Divisoren $D, D', K, \operatorname{div}(u')$ trivial sind. $\square$

Der folgende Satz beschreibt die sogenannte *Serre-Dualität*.

Satz 30.5. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Dann definiert die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \Omega_X) \times H^1(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C},\ (\theta, c) \longmapsto \operatorname{Res}\left(H^1(\theta)(c)\right),$$

eine vollständige Dualität.

Beweis. Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ mit einem Divisor D. Es sei g das Geschlecht von X und es sei K ein kanonischer Divisor. Wegen Korollar 30.2 genügt es zu zeigen, dass

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X(D), \Omega_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(K-D)) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D)), \mathbb{C}\right) \cong \left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D))\right)^*,\ \theta \mapsto$$

auch surjektiv ist. Sei dazu

$$\lambda\colon\ H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Linearform $\neq 0$. Es sei $P \in X$ ein Punkt, wir betrachten die Divisoren $D_n = D-nP$. Sei zunächst n fixiert. Ein globaler Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP))$ definiert durch Tensorierung (siehe Lemma 30.3) mit $\mathcal{O}_X(D_n)$ einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(D_n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_n) \otimes \mathcal{O}_X(nP) \cong \mathcal{O}_X(D)$$

und damit via

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n)) \stackrel{H^1(s)}{\longrightarrow} H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}$$

eine Linearform auf $H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n))$, die wir mit $s\lambda$ bezeichnen. Es sei

$$\Lambda_n = \{s\lambda \mid s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP))\} \subseteq \left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n))\right)^*.$$

Für $s \neq 0$ ist nach Lemma 30.3 auch $s\lambda \neq 0$ und daher ist die Gesamtzuordnung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP)) \longrightarrow \left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n))\right)^*$$

injektiv. Insbesondere haben $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP))$ und Λ_n die gleiche Dimension. Daher haben wir nach Korollar 28.5 die Dimensionsabschätzung

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda_n) \geq n+1-g.$$

Neben Λ_n betrachten wir einen weiteren Untervektorraum von

$$\left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n))\right)^*,$$

nämlich das natürliche Bild

$$B_n = \text{bild}\left(H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n)) \longrightarrow \left(H^1(X, \mathcal{O}_X(D_n))\right)^*\right).$$

Dessen Dimension stimmt nach Korollar 30.2 mit der Dimension von

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n))$$

überein und kann nach Lemma 28.6 (mit $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(K - D)$ und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(nP)$) durch

$$\dim_K \left(H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n))\right) \geq n + c$$

für ein von D und K abhängiges c abgeschätzt werden. Ferner ist für

$$n > \text{Grad}\,(D)$$

der Grad von D_n negativ und somit besitzt für diese D_n keine globalen Schnitte nach Lemma 28.3. Nach Satz 28.4 ist daher

$$h^1(X, \mathcal{O}_X(D_n)) = g - 1 - \text{Grad}\,(D_n) = n + g - 1 - \text{Grad}\,(D).$$

Die Zahl n geht also in alle drei relevanten Dimensionen einfach linear ein. Für n hinreichend groß übertrifft also die Summe der Dimensionen von Λ_n und von B_n die Dimension des umgebenden Raumes. Sei nun ein solches n gewählt. Nach Korollar 9.8 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ist dann

$$\Lambda_n \cap B_n \neq \emptyset.$$

Ein nichttriviales Element darin hat einerseits eine Darstellung als $s\lambda$ mit $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP))$ und andererseits als Bild von einem Element ω aus $H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n))$. Es gilt also

$$s\lambda = \omega.$$

Wegen $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nP))$ ist $\text{div}\,(s) \geq -nP$. Somit ist $-nP - \text{div}\,(s) \leq 0$ und daher ist

$$D' := D_n - \text{div}\,(s) = D - nP - \text{div}\,(s) \leq D.$$

Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D)) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(D))^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D')) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X(D'))^* , \end{array}$$

wobei alle Abbildungen injektiv sind. Wir fassen das λ von rechts oben rechts unten auf. Wegen $\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n))$ ist $\frac{\omega}{s} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D_n + \text{div}\,(s))) = H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D'))$. Dabei gilt rechts unten die Gleichheit $\frac{\omega}{s} = \lambda$. Nach Lemma 30.4 rührt damit λ von oben links her. $\square$

Korollar 30.6. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist $H^1(X, \Omega_X)$ eindimensional und die Residuenabbildung ist bijektiv.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 30.5, wenn man dort $\mathcal{L} = \Omega_X$ setzt. □

Mit diesem Wissen kann man die Serre-Dualität allein mit $H^1(X, \Omega_X)$ und auch ohne die Residuenabbildung formulieren.

KOROLLAR 30.7. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann sind die Vektorräume $H^0(X, \Omega_X)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ in natürlicher Weise dual zueinander.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 30.5 mit $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ unter Verwendung von

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \Omega_X) = H^0(X, \Omega_X).$$

□

BEMERKUNG 30.8. Die bijektive Zuordnung

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \Omega)^*, \, c \longmapsto \big(\omega \mapsto \operatorname{Res}\big(H^1(\omega)(c)\big)\big),$$

aus Korollar 30.7 ist so zu verstehen. Eine globale Differentialform $\omega \in H^0(X, \Omega)$ definiert einen (ebenfalls mit ω bezeichneten) Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X, \, 1 \longmapsto \omega,$$

und dazu die erste Kohomologieabbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X), \, c \longmapsto H^1(\omega)(c).$$

Die Auswertung mit dem Residuum ergibt dann den Wert in $\mathbb{C}$. Der rechnerische Aufwand hängt wesentlich davon ab, in welcher Form die Kohomologieklasse vorliegt. Wenn c ?ech-kohomologisch als U_i, h_{ij} vorliegt, so erhält man bei gegebenem ω eine entsprechende Darstellung $U_i, h_{ij}\omega$. Wenn c als Klasse zu einer Hauptteilverteilung $(\tau_P)_P$ vorliegt, so gehört dazu direkt die Hauptteilverteilung von holomorphen Differentialformen $(\tau_P\omega)_P$ und dazu wiederum die Residuenauswertung im Sinne der Definition 29.2.

KOROLLAR 30.9. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann stimmt das kohomologische Geschlecht von X mit dem differentiellen Geschlecht von X überein.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 30.7. □

SATZ 30.10. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche mit dem Geschlecht g. Dann besitzt ein kanonischer Divisor den Grad $2g-2$.*

Beweis. Der Satz von Riemann-Roch ergibt für einen kanonischen Divisor K wegen $\mathcal{O}_X(K) = \Omega_X$ unter Verwendung von Korollar 30.7 die Gleichheit

$$\begin{aligned} g-1 &= h^0(X, \Omega_X) - h^1(X, \Omega_X) \\ &= h^0(X, \mathcal{O}_X(K)) - h^1(X, \mathcal{O}_X(K)) \\ &= \operatorname{Grad}(K) + 1 - g. \end{aligned}$$

Also ist

$$\operatorname{Grad}(K) = 2g - 2.$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis