Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

AUFGABE 4.1. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und $\alpha \in L^V$. Es gelte $\Gamma \vdash \alpha$. Zeige, dass es dann auch eine endliche Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\Delta \vdash \alpha$ gibt.

AUFGABE 4.2. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V. Es gelte $p \rightarrow q \in \Gamma$ und $q \rightarrow r \in \Gamma$. Folgt daraus $p \rightarrow r \in \Gamma$?

AUFGABE 4.3. Es sei $\Gamma = \{p, \neg q, r \rightarrow s\} \subseteq L^V$ (p, q, r, s seien Aussagenvariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \rightarrow q,\ \neg p \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg q,\ \neg p \rightarrow \neg q,\ r \rightarrow q,\ (r \rightarrow q) \rightarrow \neg p,\ (s \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)\,,\ (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow s.$$

AUFGABE 4.4. Zeige, dass man aus $\Gamma = \{p\}$ unendlich viele Aussagen ableiten kann, die keine Tautologien sind.

AUFGABE 4.5.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V. Zeige

$$\Gamma^{\vdash} = \left(\Gamma^{\vdash}\right)^{\vdash}.$$

AUFGABE 4.6. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V. Zeige die folgenden Regeln für die Ableitungsbeziehung (dabei seien $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_i$ Aussagen).

(1) Konjunktionsregel: $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \beta$.
(2) Kettenschlussregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$, dann auch $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.
(3) Modus Ponens: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, dann ist auch $\Gamma \vdash \beta$.

(4) Wenn $\Gamma \vdash \alpha$, so auch $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$.
(5) Wenn $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$ und $\Gamma \vdash \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
(6) Widerspruchsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.
(7) Fallunterscheidungsregel: Wenn $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$, dann auch $\Gamma \vdash \beta$.

Aufgabe 4.7. Es sei $V = \{p, q, r\}$ eine Aussagenvariablenmenge. Welche der folgenden Aussagen aus L^V lassen sich aus $\Gamma = V$ ableiten?

(1)
$$p\,,$$
(2)
$$p \wedge q \rightarrow r\,,$$
(3)
$$\neg p \wedge q \rightarrow r\,,$$
(4)
$$\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg r\,,$$
(5)
$$p \rightarrow (q \rightarrow r)\,,$$
(6)
$$p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)\,,$$
(7)
$$\neg q\,.$$

Aufgabe 4.8. Es sei $\Gamma_1 = \{p \wedge q \rightarrow r\}$ und $\Gamma_2 = \{p \rightarrow (q \rightarrow r)\}$. Zeige
$$\Gamma_1^{\vdash} = \Gamma_2^{\vdash}.$$

Aufgabe 4.9.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik über einer Aussagenvariablenmenge V und es seien $\alpha, \beta \in L^V$. Zeige, dass
$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$$
zu
$$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$
äquivalent ist.

AUFGABE 4.10.*

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik über einer Aussagenvariablenmenge V und es sei $\alpha \in L^V$. Es gelte

$$\Gamma \nvdash \alpha .$$

Zeige, dass dann

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$$

widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.11. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq L^V$ Ausdrucksmengen in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und seien $\alpha, \beta \in L^V$.

(1) Es gelte $\Gamma_1 \vdash \alpha$ und $\Gamma_2 \vdash \beta$. Zeige $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha \wedge \beta$.
(2) Es gelte $\Gamma_1 \vdash \alpha$ und $\Gamma_2 \vdash \alpha$. Folgt daraus $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \vdash \alpha$?

AUFGABE 4.12.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Man gebe ein Beispiel für eine aussagenlogische widersprüchliche Ausdrucksmenge

$$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

derart, dass jede echte Teilmenge davon widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.13. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V. Zeige, dass die Ableitungsbeziehung $\Gamma \vdash \alpha$ die Folgerungsbeziehung $\Gamma \vDash \alpha$ impliziert.

AUFGABE 4.14. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und es sei $\alpha \in L^V$. Es gebe eine Interpretation I mit $I \vDash \Gamma$ und $I \vDash \neg\alpha$. Zeige $\Gamma \nvdash \alpha$.

AUFGABE 4.15.*

Es sei L^V die Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V und es sei λ eine Wahrheitsbelegung der Variablen mit zugehöriger Interpretation I. Zeige, dass $I^{\vDash}$ maximal widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.16. Führe die Einzelheiten im Beweis zu Lemma 4.7 für die Implikation durch.

AUFGABE 4.17. Es sei $\Delta \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V, die zu jeder Aussagenvariablen $p \in V$ entweder p oder $\neg p$ enthalte. Zeige, dass $\Delta^{\vdash}$ maximal widerspruchsfrei ist.

AUFGABE 4.18. Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine widerspruchsfreie, aber nicht maximal widerspruchsfreie Aussagenmenge, die unter Ableitungen abgeschlossen sei. Zeige, dass Γ nicht durch die Hinzunahme von endlich vielen Aussagen zu einer maximal widerspruchsfreien Aussagenmenge aufgefüllt werden kann.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 4.19. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma = \{p, \neg q \to r\} \subseteq L^V$ (p, q, r seien Aussagenvariablen). Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus Γ ableiten?

$$p \to q,\ \neg q \to p,\ \neg p \to r,\ \neg q \to r \wedge p,\ \neg r \to q,\ r \to (q \to \neg p)\ .$$

AUFGABE 4.20. (3 Punkte)

Es sei $\Gamma \subseteq L^V$ eine Ausdrucksmenge in der Sprache der Aussagenlogik zu einer Aussagenvariablenmenge V. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Γ ist widersprüchlich.
(2) Für jedes $\beta \in L^V$ ist $\Gamma \vdash \beta$ und $\Gamma \vdash \neg\beta$.
(3) Es ist $\Gamma^{\vdash} = L^V$.

AUFGABE 4.21. (4 Punkte)

Es sei p eine Aussagenvariable und $\alpha \in L^V$ eine Aussage, in der die Variable p nicht vorkommt. Es gelte

$$\{p\} \vdash \alpha\,.$$

Zeige, dass bereits

$$\vdash \alpha$$

gilt.

AUFGABE 4.22. (3 Punkte)

Es sei V eine Aussagenvariablenmenge. Konstruiere eine Ausdrucksmenge $\Gamma \subseteq L^V$, die abgeschlossen unter Ableitungen und nicht maximal widerspruchsfrei ist, die aber die Eigenschaft besitzt, dass für jede Aussagenvariable p sowohl $(\Gamma \cup \{p\})^{\vdash}$ als auch $(\Gamma \cup \{\neg p\})^{\vdash}$ maximal widerspruchsfrei ist.