Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 51

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 51.1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Negiere (durch Umwandlung der Quantoren) die Eigenschaft, dass f im Punkt x stetig ist.
(2) Negiere die Eigenschaft, dass f stetig ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 51.2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass aus
$$|x-a| \leq \frac{1}{m}$$
die Abschätzung
$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{n}$$
folgt.
(3) Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ derart, dass aus
$$|x-a| \leq \frac{1}{10^r}$$
die Abschätzung
$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{10^s}$$
folgt.

Aufgabe 51.3. Zeige, dass die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$
stetig ist.

Aufgabe 51.4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 51.5. Bauer Ernst möchte ein quadratisches Melonenfeld anlegen. Das Feld sollte 100 Quadratmeter groß sein, er findet aber jede Größe zwischen 99 und 101 Quadratmetern noch akzeptabel. Welcher Fehler ist ungefähr für die Seitenlänge erlaubt, damit das entstehende Quadrat innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt?

Aufgabe 51.6.*

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x-3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 51.7. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

im Punkt $a = 1$ für $\epsilon = \frac{1}{10}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x,a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 51.8. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y \in T$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x-\delta, x+\delta[$ gilt.

Aufgabe 51.9. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 51.10. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass f auf jedem Intervall der Form $[0,\delta]$ mit $\delta > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Ist eine solche Funktion „zeichenbar“? Siehe auch Aufgabe 54.25.

Aufgabe 51.11. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 51.12.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 51.13. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 51.14. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 51.15. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 47.41 hilfreich.

Aufgabe 51.16. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge. Zeige, dass eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Werte auf T eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 51.17. Beweise direkt die Rechenregeln aus Satz 51.8 (ohne Bezug auf das Folgenkriterium).

Aufgabe 51.18. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{2x^7 - 3x\,|6x^3 - 11|}{|3x-5| + |4x^3 - 5x + 1|},$$

stetig ist.

Aufgabe 51.19.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a-\delta, a+\delta]$ gilt.

Aufgabe 51.20.*

Wir betrachten auf der Menge C aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die folgende Relation: Es ist $f \sim g$, falls es eine nullstellenfreie stetige Funktion $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f = g \cdot \alpha$$

gibt.

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Zeige, dass aus $f \sim g$ folgt, dass die Nullstellenmenge von f und von g übereinstimmen.
(3) Zeige, dass die beiden Funktionen

$$f(x) = x$$

und

$$g(x) = x^2$$

nicht zueinander äquivalent sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.21. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

im Punkt $a = 3$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x,a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 51.22. (2 Punkte)

Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1\,, \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2\,, \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2\,, \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 51.23. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 51.24. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Melons - Fethiye Market.jpg , Autor = Benutzer Palosirkka auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7