Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 35

Übungsaufgaben

Aufgabe 35.1. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $\varphi\colon V \to V$ eine Streckung mit einem Streckungsfaktor $s \neq 0$. Zeige, dass φ winkeltreu ist.

Aufgabe 35.2. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei $\varphi\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann winkeltreu ist, wenn für alle $u, v \in V$, $u, v \neq 0$, die Gleichung

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \frac{|| \varphi(u) ||}{|| u ||} \cdot \frac{|| \varphi(v) ||}{|| v ||} \cdot \langle u, v \rangle$$

gilt.

Aufgabe 35.3. Es seien U, V und W euklidische Vektorräume. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Identität $\mathrm{Id}_V\colon V \to V$ ist winkeltreu.
(2) Die Verknüpfung von winkeltreuen Abbildungen $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ ist wieder winkeltreu.
(3) Zu einer bijektiven winkeltreuen Abbildung $\varphi\colon U \to V$ ist auch die Umkehrabbildung winkeltreu.

Aufgabe 35.4. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge aller winkeltreuen Abbildungen $\varphi\colon V \to V$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ ist.

Aufgabe 35.5.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix derart, dass die zugehörige lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ winkeltreu ist. Zeige

$$M = E_n.$$

AUFGABE 35.6. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix. Zeige, dass die zugehörige lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genau dann winkeltreu ist, wenn $|d_{ii}|$ konstant und von 0 verschieden ist.

AUFGABE 35.7. Man gebe zu jedem r, $0 \leq r < n$, eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vom Rang r an, die orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abbildet, aber keine winkeltreue Abbildung ist.

AUFGABE 35.8. Es seien V und W euklidische Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass orthogonale Vektoren auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass φ winkeltreu ist.

AUFGABE 35.9. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorräumen V. Zeige, dass es eine Isometrie $\psi\colon V \to V$ und eine Streckung $\sigma\colon V \to V$ mit

$$\varphi = \psi \circ \sigma$$

gibt.

AUFGABE 35.10. Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und sämtlichen Untervektorräumen $U_I = \langle e_i, i \in I \rangle$ zu $I \subseteq \{1, 2, 3\}$.

AUFGABE 35.11.*

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ und der durch

$$3x - 7y = 8$$

gegebenen Geraden und den Lotfußpunkt des Punktes auf der Geraden.

AUFGABE 35.12. Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und der durch

$$4x - 7y + 6z = 3$$

gegebenen Ebene im $\mathbb{R}^3$.

AUFGABE 35.13. Bestimme den minimalen Abstand von $(4, 1, -5)$ zu einem Punkt der Ebene E, die durch die Gleichung $2x - 7y + 3z = 0$ gegeben ist.

Aufgabe 35.14. Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotfußpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 35.15. Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Die folgenden Aufgaben besprechen Abstände zwischen nichtlinearen Objekten.

Aufgabe 35.16. Es sei A der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit dem Mittelpunkt $(3, -4)$ und dem Radius 2 und B der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit dem Mittelpunkt $(7, 2)$ und dem Radius 3. Bestimme den Abstand zwischen den beiden Kreisen und an welchen Kreispunkten dieser angenommen wird.

Aufgabe 35.17. Es sei A der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit dem Mittelpunkt $(1, -3)$ und dem Radius 2 und B die durch

$$6x + 5y = 30$$

gegebene Gerade. Bestimme den Abstand zwischen dem Kreis und der Geraden und an welchen Punkten dieser angenommen wird.

Aufgabe 35.18. Bestimme den Abstand zwischen der Hyperbel

$$\{(x, y) \mid xy = 1\}$$

und dem Achsenkreuz

$$\{(x, y) \mid xy = 0\} .$$

Aufgabe 35.19. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum M, wobei alle Folgenglieder verschieden seien. Es sei $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und P ein von allen Folgengliedern verschiedener Punkt aus M. Zeige, dass P genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn

$$d(A, P) = 0$$

ist.

Die folgende Aufgabe benötigt Analysis 1 (Extremabestimmung durch Ableiten).

Aufgabe 35.20. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.21. (3 Punkte)

Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine winkeltreue lineare Abbildung auf dem euklidischen Vektorraum V. Zeige, dass es eine reelle Zahl s derart gibt, dass allenfalls s oder $-s$ als Eigenwerte von φ auftreten.

Aufgabe 35.22. (2 Punkte)

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Isometrie ist, wenn für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq V$ die Gleichung

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$$

gilt.

Aufgabe 35.23. (4 Punkte)

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der durch

$$-6x + 3y = 11$$

gegebenen Geraden und den Lotfußpunkt des Punktes auf der Geraden.

Aufgabe 35.24. (5 Punkte)

Erstelle für die beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein lineares Gleichungssystem und berechne daraus die Lotfußpunkte, den Verbindungsvektor und den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 35.25. (3 Punkte)

Berechne den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } H = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 35.26. (4 Punkte)

Es seien zwei disjunkte Kreise K_1 und K_2 in der euklidischen Ebene mit den Mittelpunkten $M_1 \neq M_2$ und den Radien r_1 und r_2 gegeben. Zeige, dass der Abstand zwischen den beiden Kreisen in Punkten angenommen wird, die auf der Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte liegen.