Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 4

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 4.1. Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7 \text{ und } 5x + 4y = 3\,.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.2. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

a) $K = \mathbb{Q}$, b) $K = \mathbb{R}$, c) $K = \{0,1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 3.8, d) $K = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 3.9.

Der Körper der komplexen Zahlen wird in der Analysis eingeführt (siehe auch den Anhang). Eine komplexe Zahl hat die Form $a+b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a, b. Bei der Multiplikation rechnet man $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Die inverse komplexe Zahl zu $a + b\mathrm{i} \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$.

Aufgabe 4.3.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2 + 5\mathrm{i})z = (3 - 7\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 4.4. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} -4x + 6y & = & 0 \\ 5x + 8y & = & 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung $(0, 0)$ besitzt.

Aufgabe 4.5. Gibt es eine Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ für das lineare Gleichungssystem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 4.1?

Aufgabe 4.6.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 4.7.*

Bei der Onlinepartnervermittlung „e-Tarzan meets e-Jane“ verliebt sich alle elf Minuten ein Single. Wie lange (in gerundeten Jahren) dauert es, bis sich alle erwachsenen Menschen in Deutschland (ca. 65000000) verliebt haben, wenn ihnen allein dieser Weg zur Verfügung steht.

Aufgabe 4.8. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83. a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt. b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 4.9.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen 2,50 € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen 2,30 €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe 4.10. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, sodass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 4.11. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

Unter dem i-ten *Standardvektor* der Länge n versteht man den Vektor, der an der i-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen stehen hat.

Aufgabe 4.12. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 4.13. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 4.14.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -1-3\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4.15. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1-\frac{1}{2}\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ -5+7\mathrm{i} & \sqrt{2}+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} & e+\pi\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Aufgabe 4.16.*

Es seien 2×2-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ gegeben. Das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich mit der üblichen Multiplikationsregel „Zeile x Spalte“, bei der man insgesamt 8 Multiplikationen im Körper K ausführen muss. Wir beschreiben, wie man diese Matrixmultiplikation mit nur 7 Multiplikationen (aber mit mehr Additionen) durchführen kann. Wir setzen

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22}), \\ m_2 &= (a_{21} + a_{22}) \cdot b_{11}, \\ m_3 &= a_{11} \cdot (b_{12} - b_{22}), \\ m_4 &= a_{22} \cdot (b_{21} - b_{11}), \\ m_5 &= (a_{11} + a_{12}) \cdot b_{22}, \\ m_6 &= (a_{21} - a_{11}) \cdot (b_{11} + b_{12}), \\ m_7 &= (a_{12} - a_{22}) \cdot (b_{21} + b_{22}). \end{aligned}$$

Zeige, dass für die Koeffizienten der Produktmatrix

$$AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_1 + m_4 - m_5 + m_7, \\ c_{12} &= m_3 + m_5, \\ c_{21} &= m_2 + m_4, \\ c_{22} &= m_1 - m_2 + m_3 + m_6, \end{aligned}$$

gelten.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 4.17. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 4.18. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

Die Hauptschwierigkeit in der folgenden Aufgabe liegt im Nachweis der Assoziativität für die Multiplikation (siehe Aufgabe 4.24) und des Distributivgesetzes.

Aufgabe 4.19. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen über K mit der Addition von Matrizen und mit der Verknüpfung von Matrizen als Multiplikation ein Ring ist.

Aufgabe 4.20. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$.).

(1) $(A^{\text{tr}})^{\text{tr}} = A$.
(2) $(A+B)^{\text{tr}} = A^{\text{tr}} + B^{\text{tr}}$.
(3) $(sA)^{\text{tr}} = s \cdot A^{\text{tr}}$.
(4) $(A \circ C)^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \circ A^{\text{tr}}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.21. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 3.9.

Aufgabe 4.22. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-2\mathrm{i} & 1+5\mathrm{i} & 0 \\ 7\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 4-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 5-7\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 4.24. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 4.25. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

Abbildungsverzeichnis