

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 15

Das Leben ist schön. Von
einfach war nie die Rede.



Schon in jungen Jahren zeigte Vorli ihre soziale Ader, indem sie Kuschtiere um sich versammelte.

Höhere Ableitungen

Die Ableitung f' einer (in jedem Punkt) differenzierbaren Funktion nennt man häufig auch die *erste Ableitung* von f . Unter der nullten Ableitung versteht man die Funktion selbst. Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

DEFINITION 15.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Die Funktion f heißt n -mal *differenzierbar*, wenn sie $(n - 1)$ -mal differenzierbar ist und die $(n - 1)$ -te Ableitung, also $f^{(n-1)}$, differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$$

nennt man dann die n -te *Ableitung* von f .

Die zweite Ableitung schreibt man auch als f'' , die dritte Ableitung als f''' . Wenn eine Funktion n -mal differenzierbar ist, so sagt man auch, dass die Ableitungen bis zur n -ten *Ordnung* existieren. Eine Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie n -mal differenzierbar für jedes n ist.

Eine differenzierbare Funktion ist nach Korollar 14.6 stetig, allerdings muss die Ableitung keineswegs stetig sein. Daher ist der folgende Begriff nicht überflüssig.

DEFINITION 15.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

Eine Funktion heißt n -mal stetig differenzierbar, wenn sie n -mal differenzierbar ist und die n -te Ableitung stetig ist.

Extrema von Funktionen

Wir untersuchen jetzt mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine differenzierbare Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumsverhalten aussieht.

SATZ 15.3. *Es sei*

$$f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $c \in]a, b[$ ein lokales Extremum besitzt und dort differenzierbar sei. Dann ist $f'(c) = 0$.

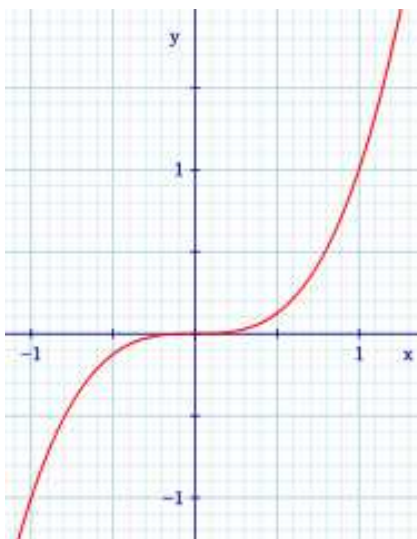
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in c besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in [c - \epsilon, c + \epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $c - \epsilon \leq s_n < c$, die gegen c („von unten“) konvergiere. Dann ist $s_n - c < 0$ und $f(s_n) - f(c) \leq 0$ und somit ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c} \geq 0,$$

was sich dann nach Lemma 7.11 auf den Limes, also den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(c) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c + \epsilon \geq t_n > c$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(c)}{t_n - c} \leq 0.$$

Daher ist auch $f'(c) \leq 0$ und somit ist insgesamt $f'(c) = 0$. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der folgende Satz heißt *Satz von Rolle*.

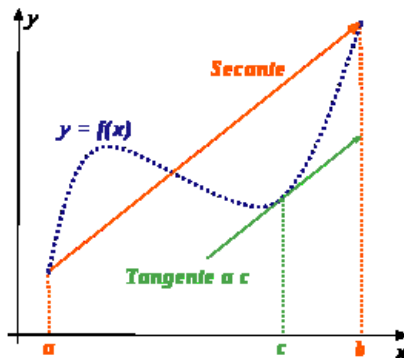
SATZ 15.4. Sei $a < b$ und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 11.13 gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 15.3. \square



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz, der direkt aus dem Satz von Rolle folgt, heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.

SATZ 15.5. Sei $a < b$ und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 15.4 und somit gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

KOROLLAR 15.6. Sei

$$f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 15.5 ein c , $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

SATZ 15.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.*
- (2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
- (3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0 . Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I mit $f(x) > f(x')$ gibt. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. \square

KOROLLAR 15.8. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 15.13. \square

Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

SATZ 15.9. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \neq 0$$

für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 15.4. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x).$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b) \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 15.4 liefert die Existenz eines $c \in]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0.$$

Umstellen ergibt die Behauptung. □



L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

KOROLLAR 15.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und sein Wert ist ebenfalls w .

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 15.9, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern¹ von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a , so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w , und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. \square

BEISPIEL 15.11. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

¹Unter dem *Innern* eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ versteht man das Intervall ohne die Intervallgrenzen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Waeller379.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	1
Quelle = X Cubed.svg , Autor = Benutzer Pieter Kuiper auf Commons, Lizenz = PD	3
Quelle = Mvt2 italian.svg , Autor = Benutzer 4C auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Guillaume de l'Hôpital.jpg , Autor = Benutzer Bemoeial auf Commons, Lizenz = PD	7
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9