社會哲學 新學說大系 (14)

新潮社出版

ポアンカレー著

科學と臆說

村上正己譯述

序

數學者、數理物理學者として、碩學の名を恣にするポアンカレーは、その豐かなる哲學的天分を通して科學的認識そのものゝ本質に哲學的考察の眼を向け、科學の立脚するところの基礎、方法、及び限界等を闡明した。『科學と臆說』は其の代表著作の一つであつて、第一編「數と量」、第二編「空間」、第三編「力」、第四編「自然」の諸項の下に、仔細に科學の分野を遍歷し、一々これを點檢し究明して、科學的認識の中に必然的なるものと假說的なるものとを截然分類し、明快に講說せる稀覯の名著である。

ポアンカレー逝いて十有餘年、科學は其の間に恐ろしい進步をした。彼の生前既に嘖々の聲を擧げた相對性原理は、今や舊物理學を書き換へてしまひ、エーテルの臆說は既に時代の遺物となつた。從つて本書が今ポアンカレーによつて書かれるなら、その後半部は多少改訂されるに違ひない。併しエーテルの雰圍氣に閉されながら、彼がかく迄の快筆を振ひ得た事は、吾人をして多大の尊敬を拂はしめずには措かない。かゝる見解をもつて譯者は不才を顧みず敢て本書の譯述を企てた。本書は原文に忠實な譯ではなくて、譯の譯であり譯の註である。譯者のよ

つた原文は、『ハルステッドの科學の基礎』と『リンデマンの獨譯』(林氏の邦譯)である。
尙本書を草するに當り、多大の鞭撻を與へられた北先生に對し厚く感謝する次第である。

大正十四年十一月

譯者

ポアンカレー小傳

佛國の東北隅、獨佛係爭の中心地たるロレーヌの一角にナンシーと云ふ一小邑がある。一八五四年四月アンリ・ポアンカレーは此の地に呱々の聲をあげた。その父は當時名聲隆々たる刀圭家であり、母はロレーヌ生粹の氣丈な婦人であつた。此の父母の庭訓によつてアンリ晩年の大業の礎は築かれたのである。

八歲、折ナンシーの初等學校に入つたが、その文學的及び數學的のすぐれた天分は、日ならずして認められる所となつた。十七歲の時、普佛の間に戰雲漂ひ、ロレーヌは一朝にしてプロシヤ軍の馬蹄に蹂躪される所となつた。かくてアンリ一族も虐けられた被制服者の生活を送らなければならなかつたが、此の機が彼に與へた恩惠は獨逸語の學習であつた。

十八にして砲工學校に入學したが、彼の天才は茲で十分に認められ、次いで工藝學校に入る事となつた。當時彼の從兄たるレーモン・ポアンカレーも亦、試驗準備の爲に同じく此の町に住つてゐた。二人は共に文藝を練り、哲學の論究をしたが、之が幸してアンリの哲學論究の動機となつたのである。レーモン・ポアンカレーこそは後年の佛國大統領、大戰亂當時の重任を負うて立つた其の人である。

工藝學校卒業後、アンリは鑛山の技師となり、可なりの名聲を博したが、幾ばくもなく職を止めカアン理科大學に教鞭を執ることとなつた。彼が理學博士の稱號を得たのは此の頃である。此の教職にある時、彼の數學上の大事業は漸く緒に就いたのである。その有名な函數論は彼が二十七歳の時の獲物である。

一八八一年轉じて彼は巴里大學に移り、爾來死に到る迄此の地に教鞭を執つたのである。其の間、數學上、力學上、天文學上に幾多の文献が公にされた。三十二歳の時、佛國科學學士院會員に選ばれ、一九〇九年一月には更に學士院會員に選定された。かくて一九一二年七月、アインスタインの一般相對性原理が公にされるに二ヶ年先だつて彼は此の世を辭したのである。

彼の著作は頗る廣汎であるが、時に科學の基礎を檢討したものには、『科學と臆説』『科學の價値』『科學と方法』『晩近の思想』の四冊があり、第三者を除く外は皆邦譯が出てゐる。四冊の中の前三者は英譯されて一冊の單行本となり『科學の基礎』と題されて世に行はれてゐる。『科學と臆説』の獨逸譯には丁寧な註があり、岡谷氏の『晩近の思想』にはポアンカレーの傳が比較的委しく、名文で書かれてゐる。共に譯者の畏敬推稱して措かない良譯である。

目次

第三編　力

第四編　自　然

科學と臆說

ポアンカレー
村上正己譯述

第一編 數と量

第一章　數學的推理の性質

第一節　三段論法による演繹

只見れば整然として一糸亂れぬ數學も、仔細に此を點檢すれば其處に解くべからざる謎の祕められてゐるやうに思はれる。いかにも其は演繹的ではあるが、その演繹的といふ事が只外觀に過ぎないものであるならば、完全無缺と誇る其の嚴密性は果して那邊より生れ來つたのであらう。此に反して斯學が形式論理の法則に則つて、本質的に次から次へと誘導されたものであるならば、數學は尨大なる同義語反復に歸着するものではあるまいか。三段論法によつて人類は何等新たなものを獲得する事はない。從つて總ての命題が「甲は甲なり」といふ自同律から出發したものであるならば總ては又逆に此の自同律に復歸し得るに違ひない。かく觀じ來れば、滿卷の書に連載された總ての定理は、皆迂遠な方法で「甲は甲なり」といふ命題を繰り返したものと認定しなければなるまい。

勿論吾人は此等總ての推理の根源たる公理に溯る事が出來るだらう。此等公理は窮極するところ矛盾律でもなければ又實驗によつて成立するものでもなく、只先驗的綜合判斷によつて生れたものであると主張した所で、此では何等問題の解決とはならない。假令、先驗的綜合判斷の本質が吾人にとつて神祕でないにした所で、斯樣な斷案によつては矛盾は少しも消滅する事なく只退却するばかりである。三段論法による推理は依然としてデーターに何物をも附加する事なく、データーは只二三の公理に歸着するばかりである。

如何なる定理も此を證明するに新らしい公理の參加するものがなかつたなら決して新定理となる筈はあるまい。推理は直觀による自明の眞理を、直觀から吾人迄中繼してくれるに過ぎない。玆に於てか、三段論法機關は自明なる眞理に强ひてベールをかけんとするのであるやと反問せざるを得なくなる。

數學の書物を繙く時、此の矛盾は一入に感ぜられる。此等書物の著者は、每頁、既知の命題を概括しようと努めてゐる。凡俗の見を以てすれば、これ卽ち特殊より一般に進むものであるが、果して數學が左樣なものであるなら、何故に此を演繹的と言ひ得ようか。

此に反して數の科學が純然、解析的卽ち少數の綜合判斷から解析的に出てゐるものとす

るなら、卓見家は一目にして總ての眞理を達觀し得るに違ひない。又他日便利な言語が發見され此によつて總ての眞理が一目の下に瞭然として分り、凡庸の指南車となるであらうと推測し得られる。

珍妙なる右の斷案に對し「ノー」の一語を放たうと志す者は、數學に本來創造力のある事、從つて此の推理が三段論法と異るを認めなければなるまい。

かゝる意味に於ける數學の論法と、三段論法との相違は頗る深遠でなければならない。同一の演算を相等しい二數に行へば同一の結果を得ると言ふ法則を幾度用ゐても此の神祕への門戸は開き得ないだらう。

譯者註。逐次法參照。

此等總ての推理の方法は、三段論法に歸すると否とに拘らず、皆解析的の特性をもつてゐる。而も此の解析的の特性あるが爲に、三段論法のみによるものよりか、論理的嚴密性に於て劣る所がある。

譯者註。逐次法的推理が、有限より無限に飛躍するからである。

第二節　證明と檢定

既に十八世紀の始め、ライプニッツは2と2の和が4となる理を證明しようと企てた。今茲に暫らく、其の證明法の跡を辿つて見よう。

まづ假定として、1及び1を或與へられた數xに加へる演算$x+1$の定義は知られたものとする。此等の定義は、其の形はどんなものであらうと、推論して行く上には少しの影響も及ぼさない。

次に2 3及び4等の數の定義は次の等式を以て與へよう。

(1)　$1+1=2$　(2)　$2+1=3$　(3)　$3+1=4$

同樣に$x+2$の演算は次式で定義しよう。

(4)　$x+2=(x+1)+1$

かくて次の式が得られる。

$2+1+1=3+1$（定義 2）

$3+1\quad=4$　（定義 3）

故に　$2+2 \quad =(2+1)+1$（定義 4）

$$2+2=4$$

此の推理が全く解析的である事は否定すべからざる事實である。數學者は口を揃へて此が證明でなくて檢定であると主張するに違ひない。卽ちライプニッツは定義の一つを他の一つと比較研究し、此を接近させて遂に合同を確かめたのである。檢定と眞正の證明との間には根柢的な相違があり、前者は解析的で何等新らしいものを生まないのに反し、後者には何等かの結實がある。卽ち前者は前提が同意義でありながら扮裝して斷案となつてゐるに反し、後者では斷案は前提より廣大な意味を含有してゐるのである。

等式 $2+2=4$ は特殊なものであるから檢定され得たのである。總て數學に於ては特殊なものは皆かく檢定し得るのであるが、數學がかゝる個々の檢定の羅列に止るものであるならば、斯學を以て科學となす事は出來ない。何となれば、一般妥當性なくして科學は成立しないからである。

正確科學の目的は吾人をして此の一つ一つの檢定から脫出せしめるにあるとも言ひ得よう。

第三節　算術の要素と代數的計算

今玆に數學者の研究方法を檢討して見よう。先づ最初は幾何學と微積分は除外し算術についての檢討をして見ようと思ふ。算術は前二者程複雜でない上に、純粹な數理論の上に成立してゐるからである。尤も玆では數理論の高等なものは取扱はない事にして置く。玆に取扱ふのは算術の發端に祕せられた問題なのである。一體に敎科書は、初步の定理の證明に嚴密性を缺くのを通則とする。此は讀者がまだ數學的嚴密に慣れてゐないからかうしたのであつて、止むを得ない所である。

然らば完全な嚴密に慣れる爲には何故に長い準備を必要とするか、此等のものは健全な頭腦には生れながらに具備されてゐるものではあるまいか。しばし足を止めて玆に吾人は此の心理學的、將又、論理的の問題を攻究すべき筈のものかも知れない。さりながら此の問題たるや當面の檢討事項にとつては些か道を外れた觀があるので、玆には此を除き、直ちに初步の定理證明の反復にとりかゝつて見よう。

加法の定義

假定として、$x+1$ 即ち或數 x に1を加へる演算の定義は與へられたものとする。此の定義は推論には何等の影響も與へない。

次に $x+a$ の演算の定義を下して見よう。此は與へられた數 x に a を加へると言ふ意味である。

先づ次の演算の定義を與へられたものとする。

$$x+(a-1)$$

さすれば $x+a$ の定義は次のやうになる。

$$(1)\quad x+a=[x+(a-1)]+1$$

斯様にして $x+(a-1)$ を知る時は $x+a$ を知り得る。假定によつて $x+1$ は既知のものであるので、逐次法によつて $x+2, x+3$ 等の定義も得られる。

方程式(1)は無數の特殊の定義を含んでゐるが、其各々の定義は共に先立つものを知る時には只一つの意味を持つてゐる丈である。

加法の性質

結合法則。 次の等式で表はされる。

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

此の等式は $c=1$ の時には(1)の等式によつて正しい事が知れる。その時等式(1)と違ふ所は x の代りに a、a の代りに $b+1$ を入れた所だけである。

此の法則が $c=\gamma$ について成立すると假定すれば $c=\gamma+1$ についても亦眞である。

證明

假定によつて

$$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$$

$$\therefore\quad [(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1$$

定義(1)により、此の右邊と左邊を各々變形し

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)$$

$$=a+[b+(\gamma+1)]$$

此は $(a+b)+1=a+(b+1)$ を繰り返す事、即ち解析的演繹によつて $\gamma+1$ について眞なる事を確かめたのである。

然るに此は $c=1$ につき眞なる故 $c=2$ 又は 3 等についても眞である事が分る。

交換法則。 次の二形式で表はされる。

第一。 $a+1=1+a$

此の定理は $a=1$ について眞である。若し此が $a+\gamma$ について眞であるなら、解析的方法で $a=\gamma+1$ についても眞理である事を檢定し得られる。然るに既に此は $a=1$ について眞であるから、逐次法によつて上述の方法の眞である事が分明となる。

第二。 $a+b=b+a$

此は既に $b=1$ について眞である事を檢定した。此の定理が $b=\beta$ について眞ならば、$b=\beta+1$ についても亦眞である事が證明出來るので、此も逐次法によつて檢定出來る。

乘法の定義

(1)　$a\times 1=a$

(2)　$a\times b=[a\times(b-1)]+a$

加法に於ける等式(1)のやうに(2)には無數の定義が包括されてゐる。 $a\times 1=a$ から逐次に $a\times 2$, $a\times 3$ が定義される。

乘法の性質

配分法則。 次の形で表はされる。

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$$

此の等式は $c=1$ について眞なる事を解析的に檢定し得られる。若し此が $c=\gamma$ について眞なる時は $c=\gamma+1$ についても眞である。斯樣に逐次法によつて檢定し得られる。

交換法則。 次の形で表はされる。

第一。 $a\times 1=1\times a$

此は $a=1$ の時に眞である。此の定理が $a=\nu$ について眞であれば $a=\nu+1$ についても亦眞なる事が解析的に檢定し得られる。

第二。 $a\times b=b\times a$

此は $b=1$ について眞である事が既に檢定せられた。若し此が $b=\beta$ について眞であるなら $b=\beta+1$ について眞である事を解析的に檢定し得る。

第四節　同上結論

此の邊りでかゝる單調な推理法則を述べるのを中止しよう。

此等のやり方は總て逐次法による證明である。此の證明法は、先づ $n=1$ について眞である一つの定理を設け、若し此が $n-1$ について眞であるならば n についても亦眞である事を檢定し、此によつて此の定理は總ての整數につき眞であると斷案を下す。

譯者註。 逐次法と逐次的推理法とは前者が解析的であり後者が然らざる點で異なる。

此の逐次にやつて行く方法は簡單な三段論法より更に廣く種々の命題の結合に用ゐられる變形の道具である。さりながら此も依然として解析的の道具であるから、此によつては何等新たなものゝ生れる道理がない。故に數學が何か他の方法を用ゐなければ、其の發展は中止されるかのやうに思はれる。が事實はさうでなく逐次法から生れた逐次的推理法によつて無限に發展するのである。

第五節　逐次的推理法

逐次的推理法の特長は、數限りもない三段論法を一つの公式によつて總括する點にある。此をよく理解し得るやうに、玆に此等の三段論法を連續的に述べて見よう。

勿論此は假說的三段論法である。

定理は數1について眞である。

定理が1について眞であるならば此は數2についても眞である。

故に定理は數2について眞である。

定理が數2について眞であるならば、其は3についても眞である。

故に定理は3について眞である。

……………

かく論じて見ると、各々の三段論法の斷案は次の三段論法の小前提となつてゐる。所が此等總ての三段論法の大前提は、一つの公式に概括する事が出來る。「若し定理が $n-1$ について眞であるならば、其は n についても亦眞である」と言ふのが此である。故に逐次的推理法では第一番目の三段論法の小前提卽ち「定理は數1について眞である」と言ふ命題と、最後に述べた大前提の總括「定理が $n-1$ について眞であるならば、n についても眞である」との二つを述べさへすれば好い。

かく論じて來ると、解析的手段で一定理が檢定され得る理は明かになつて來る。例へば

數10について定理を證明しようと思へば始めの9の三段論法をとりさへすれば好い。此の數がどんなに大きくても、此を繰返して行きさへすれば檢定出來ない事はない。

然し如何に此を繰返した所で、總ての數にとつて妥當な普遍的定理は得られない。所が科學はかゝる普遍妥當な定理を要求してゐるのである。此の定理は無限の三段論法を用ゐなければならないから、解析を事とする形式論理學者では到底到達する事は出來ない。

最初吾輩は、一見して數學上の眞理を達觀し得る卓見家の存在すべきであるのに、何故に共が不可能に終つてゐるかを反問したが、其の答は今や明かになつた。

假に玆に圍碁の名手があつたとしても到底何百回と言ふ先を豫想する事は出來まい。此の事は算術に於ても同樣であつて、如何なる達見家と雖も只直觀丈で一般定理に達する事は出來ない。ほんの一寸とした定理でも、定理として一般妥當性を持つてゐるからには逐次的推理法によらなければならない。さうでないと普遍的な妥性當が得られないからである。此の逐次的推理法といふ道具は、吾々が一般に定理を求める時には無くてはならぬ道具であり、此によつて始めて有限から無限に飛躍し得、且つ又、單調な檢定的三段論法の羅列から免れ得るのである。

算術は極限的な解析論などからは緣の遠いものと思はれてゐるが、前述のやうに、斯學には既に極限の觀念が包括されてゐるのであつて、此なくして算術は科學とはならない。

第六節　歸納法

逐次法による推理の基礎判斷は、他の形式で表はす事も出來る。例へば互に相異なる無限の數の集合で、集合中の如何なる數をとつても共より尙小さい一數があると言ひ得る等がそれである。

かく吾々は陳述の形式を更へる事は出來るが、此によつて逐次的推理法の證明が出來たなど考へるのは以ての外である。陳述の形式を更へて行けば何處かで行きづまり、公理に賴らなければならなくなる。其の公理こそは現在證明しようとしてゐる定理と同義異語のものに外ならない。

かく逐次法による推理の法則は、此以上溯る事の出來ないもので、從つて此は矛盾律に歸する事も出來ない。

此の法則は亦實驗によつて示す事も出來ない。實驗が適用されるのは有限なもの丈であ

る。

で若し問題が此の有限のものであるなら、三段論法を羅列すれば好いから、矛盾律が十分役に立つ事になるが、一度此が有限を超越すると矛盾律は役立たなくなり實驗は不可能となる。即ち逐次的推理法は、解析的證明でも、實驗でも近づく事は出來ないで先驗的綜合判斷で始めて得られるのである。勿論此は幾何學的公準とも異つてゐる。

然らば、何故此の推論は完全と言へるであらうか。此は一つの行爲が一度可能であるからには、同一行爲は無限に反復し得ると言ふ信念から來てゐるのである。吾々の精神は此の能力を直觀的に肯定してゐる。實驗は此の能力を使用し、此の能力のある事を確信させる機會となるに過ぎない。或は「若し實驗で逐次的推理法を確める事が出來ないなら、歸納法に立脚してゐる實驗も亦同じであらう」と言ふ人もあるだらう。吾々が、定理は數1、2、3について逐次に妥當であるから此は眞理であると言ふのも、物理學が數多い實驗から歸納して定律を立て、此が總ての現象について妥當であるとて此を支持するのと同樣である。

此の二つの推理法がよく似てゐる事は爭ふ事の出來ない事實であるが、其處には亦大きな相違も認めなければならない。即ち物理學の如く歸納法によるものは、吾人を離れて宇宙其物に普遍的法則があるものと信じてゐるのに反し、數學の逐次的推理法は精神其物の性質の肯定であるから吾人にとつては必然的であるからである。從つて前者は觀察が廣まるにつれて變動し從つて不確實である。

第七節　數學的構成

數學者は既知の命題を概括しようとする。吾人は既に

$$a+1=1+a$$

を檢定し次に一般等式

$$a+b=b+a$$

を得た。此の故に數學は特殊から一般に進むと言ひ得られる。最初は此の譯が分らないやうに思へたが、逐次的推理法と歸納法との相違を知つた上では何でもない問題である。

數學の逐次的推理法と物理的歸納法とは、相異つた基礎の上に建てられてゐる事は前述の通りであるが、兩者の進む方向は何れも特殊から一般に向つてゐるのであるから此の點

に變りはない。

　更に委細に此を吟味すれば

$$a+2=2+a$$

を證明する爲には

(1)　$a+1=1+a$

を二回用ゐて

(2)　$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a$

$$=2+a$$

と書けば好い。

　等式(2)は等式(1)から全く解析的演繹によつて得られたものであるが、此は1の特殊の場合でなく全然別物である。だから數學の解析的演繹的な方面では、一般から特殊に進むと言ふ事も出來ない。

　等式(2)の兩邊は(1)の其よりも複雜であると云ふ丈である。解析は此の結合に這入つてゐる要素をば分解し、其の關係をしらべるに過ぎない。例へば前の例では各々の要素となつてゐる1と2との關係をしらべたのである。故に數學者は構成によつて進む、換言すれば複雜な結合を構成し、逆に此等の結合や集合の解析によつて元の要素に立戻り、此等要素や集合其物の關係を求めるのである。

　かるが故に此のやり方は全然解析的であるが、集合は其の要素よりも以上に特殊なものと見得ないから、此によつて一般から特殊に移ると言ふ事は出來ない。

　吾々は正當にも此等構成過程に重きを置き、此によつて數學發展の必要且つ十分な條件を得ようとしてゐる。勿論其の必要と言ふ事丈は知れるが、此で十分とは言ひ得ない。

　構成によつて無駄な骨折を減じて利益あるやうにする爲、更に又高所への階段とする爲には、その要素を並べたもの以上に構成には何か其自身で單一性を持つてゐなければならぬ。換言すれば、構成を考へた方が利益でなければならない。

　かう言つたのでは分り難い。で、今一例を引いて見よう。例へば一つの多角形の性質は三角形の性質から得られるけれども、此を其の多角形其物の性質として考へる時は、多角形を一つ一つ三角形の性質から誘導すると言ふ勞力を省く事が出來て便利なのである。

　四邊形が二個の三角形を並べた以上のものとすれば、此が多角形の「類」の中に包括さ

れるからである。かく構成は其が同じ「類」の構成と並べられ、並べたものが一つの倘一般的な「類」の內に包括されて行くから面白いのである。

一類の構成の性質は、此に屬する各々について證明しないでも、直接證明する事が必要であるが、此の爲には漸次に階段をよぢ上つて特殊から一般に到らなければならぬ。

構成によつてなる解析的手續は何時も吾人を同一水準上におくから、吾々は數學的歸納法を用ゐなければ新智識は得られない。此の歸納法なくして構成は數字を開設する力はない。

最後に數學的歸納法は、同じ作用が何回でも繰り返されなければ不可能である事を注意しておく。同じ場合に遭つた手を行く圍碁が科學になり得ないのは此に基因する。

第二章　數學上の大きさ及び實驗

數學者の言ふ連續の觀念は、幾何學を見たのでは分らない。幾何學には多かれ少なかれ圖形を用ゐるが、圖形は只表現の手段に過ぎない。幾何學を構成するのに空間を使用するのは、黑板に白墨を用ゐるのと同じ事で、唯空間が偶々連續であり擴がりを持つてゐたからさうした丈である。だから斯樣なものを重大視してはいけない。

然らば數學者の言ふ連續とは如何なるものであらうか。純正な解析論者は數學上の不純なものは一切用ゐないで、純正なものをもつて此に答へる。タンヌリーの「一變數を持つた函數槪論」が此である。

整數列について見るに、其の任意の相つゞいてゐる二數の間に一つ或は二つ以上の中間數を入れ、此の新數の間に更に亦新しい數を入れると云ふ風にすれば數限りなく新しい數を入れて行く事が出來る。斯樣にすれば無限に多くの項を得るが、此等は皆有理數であつ

て、此丈では數の連續は出來上らない。吾々は其處に是非無理數の考を導入して來なければならないのである。

此處で一寸注意して置くのは、數學に言ふ連續と普通に言ふ連續とは違つてゐる事である。今迄述べ來つた連續と言ふのは、無限に多い個物を或る順序に並べたものに外ならない。けれども其は依然として個物の集りであつて一個のものは他のものと全然別物である。此が數學上の連續概念であるが、普通に言ふ連續はこんなものでなくて、其處では連續の元素の間に一種の聯帶があり、此の連帶によつて全體の元素がピタリと互に結びつけられてゐるのである。卽ち連續と言ふのは、元素が澤山相集つて一つのものとして連結されてゐるのであり、唯集つてゐるばかりではないのである。かう言ふ譯で二つの連續概念には著しい相違があるが、數學者はかう言ふ連續の定義を立てたについて二三の反駁をうけてゐる。其の反駁と言ふのは、

一、中間元素とは何物であるかを說き、

二、如何にして此を挿入するかを明かにし、

三、如何にして挿入が可能であるかを證明しなければならないと言ふにある。所が余輩の見解を以てすれば、此の反駁も間違つてゐるのである。連續概念の構成に於いては、反駁の第一のものについては一つの元素が他の元素の前と後にある事を知れば好いし、從つて第二の反駁は問題外となり、第三については、可能と言ふ意義が矛盾を脫すると言ふ意味である事を知れば好いのである。

此丈の注意を加へておいて又無理數に立返る事としよう。

無理數の定義。 整數の外一切他のものを使用しないで分數及び無理數の連續の列を作るべく腐心した者は、ベルリン學派特にクロネツカーであつた。彼の見解では數學的連續構成には實驗は少しも與る事なく、此は全然精神の創造物なのである。

此の學派の人々は有理數の概念は一切疑ひの無いものとして、專ら無理數の定義を下す事に努力したやうである。今余は此の定義を述べるに先立つて、一寸した注意を與へようと思ふ。

數學者の研究する所は、事物の間の關係であつて、事物其物でないから、其の關係さへ變らなければ事物は取換へても差支へない。此の考は無理數を理解するに極めて必要である。

無理數の定義は一般に次のやうにして知られる。

有理數を二つの組に分け、其の一組の中にある任意の一數が、二の組のどの數よりも大きいやうにする。例へば今一組の中には2及び2より大きい總ての數が包括され、二組には2より小さい總ての數があるとすれば、2は第一組の最小數であつて、此の組分けの區分法の記號となり得るのである。

此と反對に第二組の方に2及び2より小さい總ての數を含み、第一組に2より大きい總ての數を包括する時も亦2は區分法の記號となり得るのである。

所が、一組に他の總ての數よりも小さい數が無い場合がある。例へば第一組に平方が2より大きい總ての有理數を含み二組には此より小さなものを置く時などが此であつて、平方が2になるやうな有理數は無いのである。從つて、他の總ての數よりも小さい有理數は存在する事が出來ない。

かく觀察して來ると

$$\sqrt{2}$$

と言ふものは有理數區分法記號の特別なものに外ならない事になる。かく有理數を區分する記號として、有理數であるにせよないにせよ一つの數が役立つ事となる。

然し此丈で滿足するのは此の記號の根本を忘れたものと言はなければならない。吾等は茲に

一、どうしてかゝる數に具體的存在を認めるか。

二、分數でさへも具體的存在を認めるものは難かしいではないか。

三、物質が無限に分解し得る事、換言すれば連續的な事を豫期しないで、此の數の概念を持つ事が出來るか。

を說明しなければならない。

物理的連續。數學的連續の概念が實驗から來たものとすれば、吾々の通例感覺と言つて居る實驗の粗雜なデーターは、測定する事が出來なければならぬ。又實際に於てフエヒナーの法則として「感覺は刺戟の對數に比例する」と言ふ定律が設けられてある所を見ると、何だか測定が可能のやうにも思へる。

所が此の定律を設ける爲に行つた實驗を吟味すれば、吾々は上述のものと全然反對の結論を得る。十瓦の重さAと十一瓦の重さBとの區別、十一瓦の重さBと十二瓦の重さCとの違ひは、直接吾々の感覺をもつてしては感ずる事が出來ない。然るに十瓦と十二瓦とは

感覺で明かに區別し得るのである。で此の關係を式で示すと、

$$A=B,\ B=C,\ A<C$$

となつて來る。此が吾々の言ふ物理的連續である。然し此の連續觀は、吾々の矛盾律と相容れないから、玆に數學的連續が生れて來なければならない。斯樣にして數學的連續が生れたものとすれば、其の生れる機運を與へるものが實驗であつて、連續其物は精神の創造物であると言ふ結論となる。

數學的連續。第一階梯。 一量Bに等しい　量AとCとが互に等しい事は疑ふべくもない。從つて上述の場合ではAとB、BとCとは互に異つてゐる事を想像せざるを得ない。で今感覺を補ふ爲に色々な器械を用ゐるとして、上述の場合に天秤を用ゐるならば、AとBとは明かに區別されるだらう。けれどもAとBとの間には更に新項Dを挿入する事が出來、Dは鈍い天秤によつてはAやBと區別する事が出來ないに違ひない。其處で更に鋭敏な天秤を用ゐてDを區別した所で、AとDとの間には又更に兩つから區別出來ないEを挿入し得ると言ふ事になるから、いくら立派な器械を使用したつて、依然として

$$A=B\quad B=C\quad C>A$$

と言ふ形式の物理的連續が成立し、矛盾律と相容れないだらう。此等をどこ迄も區別し得る立派な器械の出來る事は到底豫想出來ない。

肉眼で見た長さLと、$\frac{L}{2}$を二倍擴大の顯微鏡で見た長さとは區別する事が出來ない。即ち全體は部分と等質であると云ふ斷案が得られる。所がLの中に含まれた元素の數が、有限とした時には此は又一つの矛盾である。勿論其が無限の時には矛盾は起らない。例へば整數の集合は、其の部分である偶數の集合と區別する事は出來ない。何となれば、どの整數をとつて見ても、其の二倍は偶數となるからである。

けれども精神が、無限の項で形成された連續を考へるのは、上述のやうな實驗上の矛盾を却ける爲ばかりではない。

整數の列を考へる際にも此と同じ事が起る。吾々は或る一單位が若干の單位集合に加へられ得ると言ふ考を持つてゐる。かく考へるのは吾々の天賦の能力であつて、此の能力のある事を知り、又此を練習する機會が得られるのは專ら實驗の賜である。吾々はかう云ふ練習からして、此の能力には際限がなく、無限に數へ得ると言ふ考に立到つてゐる。其の實人間は有限のものしか考へた事はない。

此と同じく、吾々は一系列中の二項の間卽ちAとBとの間には無限に多くの項を入れ得ると考へてゐる。

簡便の爲に、有理數列について適用し得る法則が適用出來る元素の集合を第一次數學的連續と言ふ事にし、無理數形成の法則に從つて新しい元素を挿入する時此を第二次連續と呼ぶ事としよう。

第二階梯。 從來說いて來た所は數の第一次連續である。玆には更に進んで、何故に其丈けで不十分であり、無理數を導入しなければならないかを說く事とする。

吾々が今一つの線を想像しようとすれば、どうしても物理的の性質、換言すれば或る幅を以て此を表はす外ないであらう。其の時二つの線は二つの狹い帶となり、其の交はる所には二線の共通部分が存在するに違ひない。

純正な幾何學者は、感覺の助けをかりてゐながら、幅のない線や大さのない點の槪念に到達しようとするのである。卽ち線は幅が漸次に狹くなつて行つた極限、點は大きさが次第に小くなつた極限と見るのである。從つて先に述べた二線の交はりである共通部分は、線の幅の狹まるにつれて小になり、遂に一點になるのである。相交はる二線が一點を共有すると言ふのは此であつて、此の眞理は直觀的のやうである。

けれども幾何學者の引く座標の上に有理數ばかりとつたのでは、矛盾に陷らざるを得ない。その理を解く爲に此處に一正方形に內接する圓を考へて見よう。今此の正方形に對角線を引く時は、對角線と內接圓の交點の座標は無理數となり、有理數としては表はされない。

譯者註。內接圓の中心の座標を($x=0$, $y=0$)とすれば圓の方程式及び對角線方程式はそれぞれ、

$$x^2+y^2=a^2,\quad x=y$$

aは半徑である。

從つて此等の交點を x', y' とすれば

$$x'=y'=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

と言ふ形で表はされる。

けれどもかうしたのでは、只若干の無理數があると言ふ事が分つた丈で、無理數を全部包括してゐない筈である。

今若し玆に二つの半直線に分れた一直線を考へて見よう。此の直線を考へるに當つては、此に幾何かの幅を許さなくてはならず、從つて二つの半直線の繼ぎ目は相重つてゐると想

像せざるを得まい。前に嘗て述べたやうに此の線の幅が漸次に狭くなるとすれば、重り合つた部分は次第に小さくなつて遂に一點となるやうに思へる。かくて一直線を二つの半直線に分ける時は其の分け目は一つの點であると言ふ直觀的眞理が生れる。かくて有理數の二組の共通の境目として無理數を導入するデデキンドの考案の仕方が承認出來るのである。

此が所謂數學的二次連續の起原である。

總括。 精神には記號を創造する能力があり此の能力に從つて記號の特殊な體系たる數學的連續を構成した。精神は只矛盾を却ける事を强要される外何を創造するのも自由であるが、實驗が此に刺戟を與へなければ、創造はなし得ない。

今の場合に於て刺戟となつたものは、物理的連續の概念であつた。此の概念に包括された矛盾を脫却する爲に、吾々は種々な記號を案出し段々と複雜に這入つて行つた。かくて遂に無理數の記號に到達し、常に吾々を苦しめた內的の(數其物の連續)矛盾から脫却したのみならず、物理的の共からも脫れ得たのである。

測定可能の大きさ。 吾々の硏究して來た大きさは測る事が出來なかつた。互の大小は知る事は出來ても何倍大きいかは不可知であつた。

今迄は項排列の順序を考究しただけであるが、玆では此を適用するのに不十分である。此を十分にする爲、換言すれば連續を測定可能の大きさとし、此に算術を適用させる爲には、任意の二項を分つてゐる間隔を硏究しなければならない。

此の爲には新しい特別の規約卽ち如何なる場合にＡＢ二項間の間隔がＣＤの共に等しいかの規約を設けなければならない。例へば整數論から出發して、相續いてゐる二元素の間に n 個の中間元素を入れる事を假定し、此の中間元素の距離は互に相等しいと言ふ規約を設ける。

此が二個の大さの加法を定義する方法である。何となれば定義により AB=CD の時は同じく定義により AD=AB+AE であると言ふ結論が得られるからである。

此の定義は廣い範圍に隨意に適用されるが、全然無制限と言ふ譯には參らない。何故かと云ふと、此は交換及び結合の法則に從つて出來てゐる定義だからである。けれども選擇した定義が、此の二法則を滿足する時は問題は起らない。

注意。

第一。精神の創造力は數學的連續の創造で終つてゐるだらうか。

チュ・ボア・レーモンは此を否定してゐる。數學者は無限小を一次二次等に區別するが、二次の無限小は絕對的にも無限小であり、亦一次の無限小に對しても無限小である。分數又は無理數を次數とする無限小も亦想像し得て玆に亦數學的連續が見出される。

所が更に、一次に關しては無限小で $1+\varepsilon$ 次に關して無限大となる無限小がある。此處で ε はどんなに小さくても好い。さうすると亦數列の中に新項が挿入され、言はば三次連續と言つた風のものが創造されるのである。

譯者註。 δ を一次の無限小とすれば次の方程式を滿足させる無限小 η がある。

$$\lim_{\delta=0}\left(\frac{\eta}{\delta}\right)=0 \qquad \lim_{\delta=0}\left(\frac{\eta}{\delta^{1+\varepsilon}}\right)=\infty$$

例へば此の式は $\eta=\delta^{1+\varepsilon^2}$ の時成立する。

かう言ふ風にして四次五次無限小に進行し得るが、此をやつたつて無駄である。三次無限小でさへ應用する事は殆どなく、敢て此を記す必要のない位である。

第二。數學的連續の概念は此で讀めたが、さりとて、此で本來の A=B B=C A<C と同樣な矛盾を脫却し得たのであらうか。

一例を示して此を說明しよう。

通例總ての曲線には切線があると思惟されてゐる。いかにも曲線と直線を互に帶體と考へる時は、二つの線をして、只一つの共通部分を持たせる事が出來る。前述のやうに此の帶體の幅を狹めて行く時は、共通部分は一つの點となるに違ひないから、二線は相接するだらう。

意識してかうするにせよ、意識しないでするにせよ、斯樣な考究方法を用ゐる幾何學者は相交はる二線が一點を共有すると言ふ場合と同樣に、曲線は總て接線を持つ事を動かすべからざる眞理と認めるだらう。

所が二次の解析的連續の曲線と定義された曲線では、切線を持たない事が證明出來たのである。

譯者註。 ワイヤストラスの曲線が此であつて、此の曲線では或點 x に於て曲線は無限に震動し、遂に一定の微係數を見出す事が出來ないのである。

勿論此の矛盾とても從來の方法で脫する事が出來る。脫すると言ふのは直觀と解析との和解を求める事であるが、此の場合は直觀の間違としなければなるまい。

物理的多次連續。 物理的連續は次の公式に要約された。

A=B　B=C　C>A

玆には此の觀念の總括と、此處に如何にして多次連續が生じるかを見よう。

感覺の任意の二集合を考へて見るのに、此の二つを辨別し得るか否かは、前述のフェヒネルの十瓦と十一瓦、十一瓦と十二瓦、十瓦と十二瓦の場合の關係と同樣である。多次連續とても此以上論じる必要はない。

今此の感覺の一集合を要素と命名するならば、要素は數學者の點に類似してゐる。けれども要素AはBと區別する事が出來ないから要素に擴がりがなければならない。丁度要素は星雲のやうなもので、中心の星の周圍が茫然としてゐるのと同樣である。

かく言へば、要素の一體系は、その要素の一つから次の一つに知らず識らずの中に移り得る連續を構成してゐるのである。此の一聯が數學者の線に當るものなのであるが、此も只類似してゐる丈である。

玆に一つ截取と言ふ概念を説明しておかう。今Cと言ふ一連續を觀察し、此の中からC連續の要素ではあるが暫らく此の連續に屬しない要素として或要素を取除かう。かう言ふ取り除いた要素の集合を截取と言ふのである。Cは截取によつて相異なる幾多の連續に細分されて、細分されたもの〻列は、一つの連續とは認められ得ないであらう。

斯樣にしてCの中に相異なる連續に屬する要素A、B、を認める事が出來るだらう。何となれば、ABの間には此等と區別する事の出來なかつた一つの要素Kがあつたのを、截取によつて取去つたから、自然とABは區別されて一連續とはならないのである。

此に反して截取がCを細分するのに不十分な場合もあり得る。例へば十瓦、十瓦半、十一瓦の連續は十瓦半をとつたとて細分する事は出來ない。其處で此の細分の截取とはどんなものかを考察する必要がある。

截取が有限數の要素に約されて、此の要素が互に識別し得る時、此の截取によつて細分し得られる連續Cは一次連續であると言ふ(十、十一、十二瓦の場合)。此に反して、截取が連續即ち截取の要素が互に識別し得ないものを以てして始めてCが細分される時は、Cを多次連續と言ひ、特に截取が一次の時はCを二次連續と言ふ。以下此に準ずる。

かくて物理的多次連續を定義したが、此は唯感覺の二集合が識別し得るや否やに懸る簡單な問題なのである。

數學的多次連續。 數學的多次連續の概念は既に本章の冒頭に說いたのと同樣の方法で生れて來る。此の連續の一點を定めるには n 個の相異なる座標を要する。

此の大さは測定出來ようが出來まいが一向差支ない。例へば位置解析といふ幾何學の部門では、一曲線 ABC に於て B が A C の間にある事を知れば好いので、其の大さの關係は知らなくても關はないのである。此によつて幾何學者は刺戟され、幾多の定理を造り出したが、此の定理は、全く質にばかり關係するもので、圖形が曲らうが比例を失はうが依然として定理として成立するものである。

吾々が定義した連續に測度の觀念を導入する時、此の連續は空間となるのであるが、此は第二編で說明する事にする。

譯者註。 位置解析と言ふのは一例を引けば次のやうなものである。(オイラー定理)

f 多面形の面の數
k 同 綫の數
e 同 稜の數 とすれば

$k=f+e-2$ の關係が成立する。此の關係は邊が曲らうと形がデフォームしようと常に眞である。

第二編 空間

第三章　非ユークリッド幾何學

一般に前提なくして結論の生れる事はない。前提には明瞭にして證明を不必要とするものもあり、又他の命題によつて導かれ存在するものもある。さりながら此の導き手である命題を奥へ奥へと追及して行く時は、遂に若干の證明すべからざる公理に到達せざるを得ないだらう。幾何學を始め總ての演繹的科學はかくして若干の不可證明の公理の上に立つ事を餘儀なくされる。宜なる哉、巷間の幾何學書は冒頭に何れも公理を掲げてゐるが、その所謂公理の中には「同一の量に等しい量は相等しい」と言ふ解析論的のものもある。自分はかゝる公理を以て先驗的綜合判斷と見做し、論究より除外し、次の幾何學の公理を推敲しようと思ふ。

通例幾何學には次の三命題を掲げてある。

一、二點を過ぎる直線は只一本に限る。

二、直線は二點間の最短距離である。

三、一點を過ぎ一直線に平行な直線は唯一本に限る。

一般に右の中の第二の公理の證明は除いてあるが、必要次第では此を一、三の公理又は隱れた公理から演繹し得ないものでもあるまい。此は後程又述べる事とする。

古來學者はユークリッド公準と呼ばれる右の第三の公理を證明すべく、研鑽怠る所がなかつた。終に十九世紀の初頭に到つて、二人の巨匠は同時に其の證明の不可能であるといふ證明に成功した。その一人はボリアイであり、今一人は露人ロバチエヴスキーである。此によつて無公準幾何學の發明夢遊病者は其の跡を絕つ事を得たのである。

されどもロバチエヴスキーの其丈では未だ十分の成果は得られなかつたが、幾ばくもなくして現れたリーマンの「幾何學の根本に横はれる臆說について」といふ小冊子は、明快なる論法を以て此の問題に一大進轉を與へたのであつた。吾輩が引用しようとするベルトラーミー及びヘルムホルツの著作は、此に敎へられる所極めて多大であるのである。

ロバチェヴスキーの幾何學。 若しユークリッドの幾何學に於ける公準が、他の公理から演繹し得るなら、此の公準を否定して他の此に反する公理を入れると、一體系としての幾何學中に矛盾が起る筈である。

譯者註。若し平行線の公準Aが他の公準群Bから證明され得るなら、換言すればAがBの中に包括されてゐるものであれば、此の公準Aの代りに此と相容れない公準A′をBの中に入れる時は、其の公準群内に矛盾が起る。故に此から推論する命題には互に矛盾するものがあるに違ひない。

ロバチェフスキーは此の立場から先づ次の命題を假定して、此をユークリッドの公理群の中に入れてユークリッド平行線の公理を否定しようとして見た。

一點を過ぎて一つの直線に出會はぬ線は無限に多い。

所が此の臆說に出發して定理を導いて見ても、定理の間に少しの矛盾も起らないのみか、毫もユークリッドの幾何學に劣らない幾何學が出來上つたのである。

此等の定理はユークリッドの其とは大いに異つてゐるから紛らはしいので、次に一二の例をあげて說明して見よう。

三角形の內角の和は常に二直角より小さく、其の和と二直角との差は三角形の面積に比例する。與へられた一圖形と大さに於て異なる相似形を造る事は出來ない。

圓周をn等分し其の分點に於て切線を引けば圓の半徑の小さい時、切線は多角形を構成するが圓の半徑の大きい時は切線は出會はない。

此等はホンの一例である。此等は皆ユークリッドの命題とは直接關係はないが、論理上では互に相關係してゐるのである。

リーマン幾何學。 今玆に厚さを持たない扁平な小動物の世界を考へて見よう。此の動物の厚さは全く無限小であり、此の無限小扁平物は一つの平面から飛出す事の無いものと假定する。此の扁平物の世界は他の世界より全然隔離され桃源の如く他界の影響は寸毫も受けないものとして見よう。かやうに假定された此の小動物に推理力を與へて、其處に幾何學が發生した場合を想像すれば、其の空間は二次元のものに違ひない。

此の小動物が厚さのないのにも係らず球形をなしてゐるとし、此が球面上にあつて此から脫出する術を知らないと假定する。さうする時此の小動物の思惟する幾何學は依然として二次元であり、此の動物にとつて直線の代用をするものは大圓の弧、換言すれば球面上の最短距離である。要するに其の幾何學は球面幾何學である。

其處では空間なるものは、彼等が脫出する事の出來ない、而も其の上に彼等の知り得る總ての現象が起る球でなければならぬ。此の空間は有限であり、而も何處迄行つても果しの無いものである。此がリーマン幾何學である。

かくリーマンの幾何學は三次元の球面幾何學で、此を構成するにリーマンはユークリッド平行線の公準及び第一公理「二點を過ぎる直線は只一つに限る」と云ふ命題も捨てゝしまつた。

球面上の與へられた二點の間には一般に一つの大圓しか畫く事が出來ないが、只一つの例外があつて、もし二點が此の球の直徑の兩端である時はかゝる線の數は無限大となる。リーマン幾何學も此と同樣であつて、一般に二點を通る直線は只一本であるが、特別の場合には無數引き得られるのである。

リーマンとロバチェヴスキーの兩つの幾何學の間には或る反對がある。例へば

三角形の內角の和は

ユークリッドでは二直角

ロバチェヴスキーでは二直角より小

リーマンでは二直角より大

である。尙與へられた一點から與へられた一直線に出會はない直線は、

ユークリッドの幾何學では一

リーマンでは零

ロバチェヴスキーでは無限

である。再言しておくのはリーマン空間は無終でありながら有限である事である。

定曲率の表面。 ロバチェヴスキー及リーマンの定理は、成程矛盾なく演繹されてはゐるが、其は只演繹した範圍內で正當であるに過ぎない。此の演繹を更に擴大して行く時矛盾の起らない事をどうして證明する事が出來よう。但しリーマンの幾何學は二次元ではかかる矛盾の起らない事が分る。何となれば其は吾々の球面幾何學であるからである。

ベルトラーミーはロバチェヴスキーの二次元の幾何學も亦普通幾何學の一分科であると主張してゐる。

以上に述べた所は次の事で知られる。今或る表面の上に任意の圖形を考へ、此の表面をば布のやうに屈曲自由ではあるが、延ばす事の出來ないものと假定し、布が移動し變形する時は、此の布上の圖形は長さを變じないで變形するものと假定する。一般に圖形は定形を保つて此の表面を移動する事が出來ないが、或る特別の平面卽ち定曲率の表面上では此の移動が可能なのである。

此等の定曲率に二種あつて、其の一つは曲率が正であるものであり、其の二は曲率の負のものである。前者はリーマン幾何學であり後者はロバチェヴスキー幾何學である。斯様にして上述の二つの幾何學は二次元のものはユークリッド幾何學と連結し得るのである。

非ユークリッド幾何學の解釋。 以上の說明で二次元の幾何學での異論は無くなつた。此の推理法を擴張して三次元の其に應用する事は至極易々たる問題であるが、四次元空間を構想する事の難しい人にとつては此は分り難いので、自分は玆に別の方法を用ゐる事としよう。

今玆に或る平面を考へて、此に基礎平面といふ名稱を與へる事としよう。此の基礎平面を根據として辭書のやうな風に、二つづゝ學術語を相對立させて見よう。

空間――基礎平面より上にある空間の部分。

平面――基礎平面と直角に交はる平面。

直線――基礎平面と直角に交はる圓周。

球　――球。

圓　――圓。

角　――角。

二點間の距離、――此等の二點と此の二點をパスし基礎平面と直角に交はる圓周が基礎平面と交はる點の對數。

（以下同様、斯様に並記する）

譯者註。此の基礎平面の事についてはリンデマンの註には委しく書いてあるが餘り專門的なので略し、かゝる變換に關しては米山氏の「數學の基礎上卷」をお薦めする。

此の辭書の助けをかりて、ロバチェヴスキーの定理からユークリッドの定理が誘導されるのである。

例へば今「三角形の內角の和は二直角より小である」といふロバチェヴスキーの定理を此の辭書でユークリッドの其に飜譯して見ると、「圓弧を邊として持つ曲線三角形が延長され、基礎平面と直角に交はらば、直角に交はつた三角形の內角の和は二直角より小である」となつて來る。斯様にしてロバチェヴスキーの幾何學に於ける臆說をいか程追及して行つても毛頭矛盾は起らない。もしロバチェヴスキーの定理に矛盾が起れば、從つて此に對應させたユークリッドの定理にも矛盾が起る筈であるが、周知のやうに共には何等の矛盾も起つ

てゐないのである。從つて逆にロバチェヴスキーに矛盾の無い事が分かる。かう言へばいかにも寸分の疑點もないやうであるが、一體其のユークリッドの確實性は何處から來たのであらうかと尋ねるなら、其處に又極めて面白い問題が浮んで來る。が然し玆では此問題には立入るまい。

尙上に述べた二種幾何學の對立の外二つの幾何學の關係はいろ〳〵に示し得るし、此等のロバチェヴスキー幾何學を實地に應用する事も出來るが、玆には此をも除いておく。

陰公理。 書物の中に明示された公理丈が幾何學の公理でなく、此の外三つの幾何學に共通な公理で隱されてゐるものもある。此等は述べられないで暗默の中に認められてゐるのであるが、此を證明法の中から引出して見るのは實に面白い。

スチューアート・ミルは、總ての定義には何れにも一つの公理の含んである事を主張してゐる。其の理由は、苟も定義を下すからには、陰に定義を下されるものゝ存在を豫期してゐなければならないと言ふにあるが、吾輩の見解では此は少し誇張してるやうに思へる。數學では定義すべき者が存在する事を證明した上で、此の定義を下すのが普通である。時折此の存在の證明を除いてゐる事もあるが、其は唯讀者が自身でよく其の存在を證し得る場合だけである。尤も玆でいふ存在と言ふ言葉は一寸注意を要するのであつて、此は數學的本體を論ずる際と、實在を論ずる際とでは同義でないのである。前者の場合では定義自身の中及び既知の命題と矛盾を起しさへしなければ、存在といふ事が言ひ得られるのである。

尤もスチュアート・ミルの言ふ所も場合によつては正しいのであり、次の定義等は明かにそのモデルである。

「平面は其の上の任意の二點を連結する直線が全く其の上にある面である」

此の中には一つの公理が含まれてゐるので、寧ろ此を公理に直した方が好い。

次の定義も一考を要する。

「重なり合はせる事の出來る圖形は相等しい」

といふのが此である。苟くも重ねようと思へば何れか一方を動かさなくてはならぬ。然らば如何にして此を動かすかと追及したら、不變形の固體のやうに、變形する事なく此を移動させ得ると言はなければなるまい。かういふ事が果していへるだらうか。

もし固體の無い世界へ行つたら、かういふ事のいへないのは明かである。吾々が皮相の見を以て上述の命題を許すのは、只平生剛體に慣れてゐるからであつて、こんな定義は定

義としての資格はないのである。

定義の資格はないが此には一つの公理を含んでゐる。卽ち不變圖形の運動し得るといふのが此であつて、此の判斷は本來明白なものでもなければ、先驗的分析判斷で招來出來るものでもなく、少くともユークリッド公準の中に列せられなければならぬものであらう。

さりながら、此の運動の可能な事は、幾何學の諸定義及び證明法を研究する時、是非承認しなければならず、而も其の運動の性質も可能性も證明する事は出來ないのである。

此は先づ直線の定義を見れば分かる所である。直線に關しては多くの缺點ある定義が與へられてゐるが、その定義の眞正なものは、直線を使用する證明法の中には自ら含まれてゐる筈である。

「一圖形が運動するとする。其の際其の圖形に屬する一線上の總ての點が、此の線外の總ての點に對して靜止してゐる場合があるとする。かゝる線を直線といふ」

から言へば公理と定義は分離されてゐる事になる。

此と同樣に、三角形の合同等の場合も其の證明に暗々裡に色々な命題を許してゐる。

第四幾何學。 以上に述べた陰公理の中で、一つ注意して置きたいものがある。其の陰公理を捨てると、玆に第四幾何學が新に生れる筈である。

直線 ABC の一點Aから此に垂線を立ち得る事を證明する爲に、始め AB と合致して居て而もAの周りに自由に回轉し得る直線 AC を想像し、此を AB の周りに回轉させて再び AB の延長と合致させるとする。

さうすると二つの命題が假定された事となる。

一、此の運動の可能な事、

二、AC が AB の延長に合するまで回轉運動を繼續させ得る事、

此であるが、もし此の中第一の方だけを許し第二の方を認めない時は、リーマンやロバチェヴスキーとは別種の而も矛盾の無い定理に到達し得るだらう。其の定理の中の最も不思議なものは、

一つの實直線は其自身に垂直になり得る

と云ふものである。

リーの定理。 古典的證明法中に陰に用ゐられた公理の數は非常に多く、其の中には亦不必要のものもあらう。此を最小限に制限するのは有益の仕事であらうが、かう言ふ事が

果して出來ようか。又、斯樣にして第四第五と幾何學の數が無限に增しはしないかを檢するのは至當な事であらう。

リーの定理と言ふのは此の點を言及してゐるのであつて、此を次のやうに言ひ表す事が出來る。

先づ次のやうな前提を許す事とする。

(一) 空間はn次元を有する。

(二) 一つの不變圖形の運動は可能である。

(三) 空間に於ける此の圖形を定めるのにP個丈けの條件を必要とする。

此の前提の下に立つ幾何學の數は有限である。

nが與へられるならばPにも亦制限が與へられ此の限界より大きくなる事は出來ない。故に運動が出來るとすれば三次元幾何學の數にも亦限りがあり無限大にはなり得ない。

リーマン幾何學。 此の結果はリーマンに反對されるに違ひない。何となれば、リーマンは相異る無數の幾何學を造り、普通にいふリーマン幾何學といふのはそのホンの特殊のものに過ぎないからである。

彼のいふ所によれば、總ての幾何學は皆曲線の長さを如何に定義するかによつて異るのであり、而も其の定義を下す方法は無限に多いから、幾何學の數も亦無限に多くなる」のである。

誠にリーマンのいふ所も道理ではあるが、此等の定義はリーの所謂假定「不變圖形の運動」を否定してゐるものである。リーマンの幾何學は純粹な解析の上に成立するものであるから、有益ではあつても、ユークリツドと同樣な證明法には從はない。

公理の本性について。 數學者は多く、ロバチェヴスキーの幾何學を論理的遊戲と看做して顧みない。もし數多の幾何學を可能とすれば、吾がユークリツドのものは眞なものであらうか。なる程實驗によれば、三角形の內角の和は二直角ではあるが、吾々が實驗し得たものは小さな三角形に過ぎないではないか。既にして、ロバチェヴスキーは「三角形の內角の和と二直角との差はその三角形の面積に比例す」と言明せるからには、ユークリツドのそれは極めて僅少な範圍にその妥當性を狹められたものではあるまいか。

此の論議決定の爲に幾何學的公理を檢討するのは却くべからざる急務である。

カントがいふ如く其が果して先驗的綜合判斷であるならば、吾人は其の反對の命題を考

へる事は出來ない故に、非ユークリッド幾何學は存立し得ないだらう。

此の所を判然たらしめる爲に第一章に論じた眞正の先驗的綜合判斷をば顧みよう。

一つの定理が、數1について眞であり、次にnについて眞であるならば、此が$n+1$につき眞である事を證明しさへすれば、此は總ての正の整數について眞である。

此の命題をユークリッド幾何學の其と看做し、非ユークリッド幾何學に相應するものを此の命題と相反して建てようとしても、それは不可能である。故に此の判斷を解析的と看做す事は止むを得ない。

又既に述べた厚さの無い動物を想起すれば、彼等はその經驗より全く隔絕したユークリッドの幾何學を認める事は出來ないに違ひない。

かく言へば幾何學の公理は實驗上の眞理であるかといふ疑問が生じるが、觀念上の直線や圓周の上には實驗を施す事が出來ない。然らば幾何學の基礎となる實驗は、果して何に立脚してゐるのであらう。

吾々は幾何學的圖形を固體と同じやうに取扱ひ得るものとして、此の上で推理したが、幾何學に實驗が携はる所は此處なのであり、換言すれば物體の性質だけなのである。

けれどもかく斷定する事によつて此處に打勝つべからざる困難が生れて來る。もし幾何學が實驗科學であるならば、それは時々刻々に變化されるから精密科學とはいひ得ないだらう。嚴密に不變な固體は無いから、何時かは幾何學は其の誤りのある事を發見されるに違ひない。

故に幾何學的の公理は先驗的綜合判斷でもなければ又實驗的事實でも無い。それは一つの規約である。總ての可能的規約の中から、吾々は實驗的事實に導かれて或る選擇をするのである。けれども其の選擇たるや自由であつて、只それ自身中の矛盾を却けさへすれば好い。卽ち實驗は選擇の機運を與へるだけであるから、此の實驗が近似的のものであつたとて、公理には何等影響はない。

換言すれば幾何學的公理（算術のそれは別）は假想せる定義であるに過ぎない。

かく斷定すれば、「ユークリッド幾何學は眞であるか」といふ疑問は無意義でなければならぬ。

何となれば、此の幾何學が規約であること宛もメートル法が一つの規約であるのと變りないからであり、從つてかう云ふ質問をするのはメートル法が誤りであるかと云ふのと同

じ事である。

で茲で問題となるのは、どの幾何學が一番便利であるかと云ふ一件に過ぎない。

自分はユークリッドを以て最も便利とするに少しの躊躇もしないものである。その理由は、

(一) 此の幾何學が最も簡單である事である。此は精神作用の習慣とか、ユークリッド以外に直觀の作用を待つものが無いとか云ふ事に歸するのでなく、幾何學其物が簡單である事に基く。宛も一次の多項式が二次のそれよりも簡單であると言ふのと同樣である。

(二) 此の幾何學は一番よく自然の固體の性質に合致し得るからである。此等の物體は、吾々の五官によつて比較又は測定され得るのである。

第四章　空間と幾何學

幾何學的空間と表象的空間。 吾々が外界の事物を感覺し此を表象する爲めには、空間は天賦の枠として用立つものと云はれてゐるが、此の枠たる空間と、幾何學者の空間とは果して同じ物であらうか。或人はそれが全然同じであつて、後者が持つてゐる空間の性質は全部前者もこれを持つてゐると考へてゐるし、或人は又外物が此の枠の中に限定されなければ外物の像は造る事が出來ないと主張する。なる程此の考も一應は尤もであるが、委細にこれを考察するとき、其處に何等かの迷想を含んではゐないだらうか。解析的研究を押し進めて行くとき、此の迷想はやがては解き得るものではあるまいか。

先づ第一に本來の空間と呼ばれるもの、卽ち幾何學的空間の性質を考へて見よう。其の性質中最も重要なものは、

一、連續。

二、無限。

三、三次元。

四、點等勢である事。

五、線等勢である事。

譯者註。點等勢はオモゲンに附した譯者の獨特の譯語であるが、其の意味する所は、一つの點が、他のどの點へでも運動させさへすれば合致し得て此に交代し得る事である。線等勢とはイソトロツプの事で、一點を通過する線が、これを其の點の周りに回轉させさへすれば他の線と合致し得て此に交代し得る事である。

此の空間を、所謂吾人の枠となつてゐる空間と比較して見よう。

視覺的空間。 先づ網膜に投映される像、即ち視覺の印象について考へて見よう。その像は簡單な解析で分る事であるが、連續であり且つ二次元である。此の點で先づ視覺的空間は幾何學的空間とは違ふのである。

更に此の像は有限な範圍に包括されてゐるから、此の點で又二者の間に相違が起る。

更に此の二者の間の最も大きな相違は、視覺的空間が點等勢で無い事である。網膜の總ての點は、此の上に像を結ぶといふ特質には變りはないが、その働き方は同一でない。其の

黄斑は網膜の像の上の一點とは點等勢でなく、此處には他よりも一層鮮明な像を生じる筈である。

更に深く解析を押し進めて行くならば、勿論視覺的空間の連續や二次元性も亦一つの迷想に過ぎない事が分るだらう。

視覺によつて吾人は距離を知り、これによつて第三の擴がり即ち第三次元を知り得るのである。然るに此の第三の擴がりは、眼の調節作用と、兩眼の聯合運動即ち兩眼の收斂作用で知られるのであるから、第一次元及び第二次元の感覺を起したものとは全然別種のものでなければならぬ。だから視覺的空間は線等勢ではない。さりとて空間が三次元である事は依然として疑ひの無い眞理である。何となれば、吾人が嘗て述べた聯合作用によつて擴がりの觀念を形造る視覺の要素は、其の中の三個を知つた時は完全に定められるからである。これを數學では三個の獨立變數の函數であるといふ。

更に深く吟味を進めて行けば、此の第三の擴がりも亦二つの作用、即ち調節作用と兩眼の收斂作用とで表はされる事が分るだらう。

此の二作川は常に相一致するものであつて、各々獨立して居るものとは思へないから二

つの間には一定の關係がある。語を換へて言へば收斂の二感覺AとBとが區別する事が出來ないならば、此に隨ふA'B'も亦區別する事が出來ない。

けれども右の事は經驗的事實に過ぎないのであつて、その反對即ち二つの筋覺が互に獨立に變化すると見ても差支はない。さうすれば今一つの獨立變數が出來るから、視覺的空間は四次元となるに違ひない。

空間の三次元性が經驗的である事については、今一つの事實がある。吾輩と同じやうな精神や感覺機關を持つた者が穴の底のやうな所に居ると假定して、光が複雜な屈折をして此の所に達するとすれば、右の二つの筋覺作用は一定の關係の下には置かれないだらう。從つて此の人にとつては空間は四次元性を帶びるに違ひない。

觸覺的空間と動作的空間。 觸覺的空間は視覺的空間より複雜で、幾何學的空間とは又一段と相違する所があるが、これを述べるのは、視覺の場合と重複するので、玆にはこれを除く事とする。

視、觸、兩空間の外に、今一つの重要なものがある。これは前二者にも優つて空間觀念の構成に役立つものであり、動作的空間と名づけられる。

筋肉は增減する事によつて特殊な感覺を起すものであるから、此の筋肉の數に應じて其處に一つの空間が構成され、此の空間は筋肉の數だけの次元數を持つ筈である。

此の筋覺によつて空間が形成されるとすれば、其の爲めの假定條件として筋肉が運動の方向感を持つてゐる事、そして此の筋覺の一つ一つが成分となつて、一つの統合的なものが出來上る事を許さなくてはならぬ。若しかくの如く筋覺が、幾何學的方向の感に伴はれなかつたら生ずる事が出來ないとすれば、幾何學的空間は、吾々の感性の形式となつて居る筈である。然るに自分自身の感覺を分析して見ると、どうもこんな事は起つてゐないやうである。

同一方向の運動に適應する感覺は、觀念の聯合によつて結びつけられ、方向の感覺と名づけたものも此の聯合に歸納出來る。故に唯一つの筋覺だけでは方向の感覺等は生れない。

觀念聯合と言つても、四肢上の場所に從つて筋肉の伸縮が甚だ異つてゐる爲めに、其の關係は極めて複雜である。

筋覺聯合も觀念聯合のやうに一つの習慣である。此の習慣も亦經驗から生れる爲めに、吾人が別の世界に住んだなら、此の筋覺も亦他の定律の下に結合されたに違ひない。

表現空間の特性。 表現空間は前述のやうに視、觸、動の三つに區別され、幾何學的の共とは全然別物である。それは點等勢でも無く線等勢でも無く、亦三次元でもない。

吾々は幾何學的空間の中に、外感の對象を「射影する」とか「限定する」とかいふが、これは如何なる意味を持つものであらうか。或は吾々が先に言つたやうに幾何學的空間の中に外物を表現するといふ意味であらうか。

既述のやうに吾々の表現は、吾々の感覺を再生させたものに過ぎないから、これを表現的空間以外のものゝ中に再生させる事は出來ない。故に幾何學的空間中に外物を表現する事は全然不可能である。

表現的空間は幾何學的空間の像、即ち後者から透視畫法で形成された空間に等しいから、此の透視畫法によらなかつたら外物の表現は不可能である。

かく物體は幾何學的空間中には表現出來ないものではあるが、通例吾々が推理する時は宛も其が表現出來てゐるものゝやうに看做すのである。

次に一物體が空間中に限定されるといふ意味を考へて見よう。

其の意味は唯、吾人が此の物體に到達する爲めに、爲すべき運動を表象するにあつて、運動を表象するに運動其物を空間に表現する必要があるとか、換言すれば此を空間に射影するの要があるとかいふ意味ではない。唯何等の幾何學的特性も持たぬ、從つて空間概念の存在も含まぬ意味での運動に伴へる筋覺を表現するといふ意味だけである。

狀態の變化と位置の變化。 前述のやうに幾何學的空間の觀念が右の意味で與へられるものでないとすれば、それは果して何處から生れ出たものであらうか。

此を一語にしていへば、

「吾々の感覺は何れも孤立しては吾々を空間の觀念に導くものではない。空間觀念は此等感覺の相次いで起る定律を研究して得られたものである」と要約出來る。が次に此の語の意味を研究して見よう。

吾々は印象が變化する事を見てゐるが、此の變化に互に種類の異つたものゝある事を認めるのはさまで難事ではあるまい。即ち物體の位置の變化と狀態の變化とがこれである。

一物體の狀態のみの變化、或は位置のみの變化は、吾々はこれを何れも印象の集合の變化に歸著せしめるが、然らばどうしてかく二種の變化を區別するに到つたであらう。

此の問題は極めて易々たる問題である。先づ玆に位置だけが變化する場合を考へるに、

其の最初の時の印象の集合を得る爲めには、物體の運動に相應するだけの運動を自分ですれば好い。カ.

例へば視覺の場合では、物體が目前を移動するにつれて、自分の眼も亦これを目送し、常に其の像を網膜上の一點に支へるやうにすれば好い。勿論これには吾々の筋覺を伴ふ筈であるが、これは幾何學的空間に表現するといふ意味は持つてゐない。

斯樣に位置の變化は吾々の運動によつて矯正し得られ、此の點が位置變化の特質をなすものである。

依つて印象の集合AからBに移るには相異なる二つの方法(一)器械的で筋覺のない場合、即ち物體が轉位する時と、(二)意識を持つて行ひ、從つて筋覺のある場合、即ち我等自身が物體に對して運動するものとを經過する。

此の場合は集合AからBへの經過は位置の變化に外ならない。かく視角は筋覺なくして空間觀念を形成しない。

此の觀念は一つの感覺からは生じないで、感覺の相連續したもので起り、理の當然として運動し得ないものはこれを認める事が不可能である。即ち彼には位置の變化と、狀態の變化とを區別する事が出來ない。

相償の條件。 物體の運動は前述のやうに吾々自身の運動によつて相償されるが、此の相償は如何にして可能であるか。幾何學に慣れた人には、相償が出來るのは物體の各部分と吾々の感覺機關が各々變化して、最初と同樣な相對位置に達する時である。此の可能の爲の條件には、物體の各部分の相對位置や人間感覺のそれが、前後少しも變りないといふ事が必要である。換言すれば外物が不變固體の如く變化し、人間の感覺も終始變りない事を必要とする。

然し此の解釋は既に幾何學の存在を前提として得たものであつて、斯樣な推理はなし得ない筈である。又此等相償は先天的に豫見し得るものでもない。然し經驗によれば何だか相償が可能であるやうに思へる場合もある。而も此の經驗的事實に基いて位置と狀態との變化を區別しようとするのである。

固體と幾何學。 固體の轉位は吾人の相對運動によつて相償し得られる。其他の物の轉位には多かれ少なかれ狀態の變化を伴ふのを常とする。狀態の變化例へば變形などする場合には、最早最初の印象の集合を再び得る事は出來ない。

勿論此等の可變物體も、これを小さな不變形の固體の集合として考察すれば相償出來る筈だが、これは數多の實驗を得て到達し得る所なので、根本的基礎を考究する上については用ゐる事が出來ない。勿論要素としては相償し得られ、全體としてはこれが不可能の場合はあるが、苟も全體として不可能なるからには、依然として相對運動で矯正はし得ない。

此の所の觀念は甚だ込み入つてゐて、餘程研究が進んだ後始めて發見され論ぜられるものであつて、此は逆の行程で見つけられるもの、換言すれば固體あつてこれが位置の變化と變形とを判然と區別し得る事を前提として、こんな複雜な考が起るのである。

故に自然界に固體がなかつたら、幾何學は存在し得ない。

最初αなる位置を占めAといふ印象を與へたものが、βなる位置に移つてBといふ印象を與へたとする。更に又別な物體が同じくαからβ迄移り、αでA'なる印象を起しβでB'なる印象を起したとすれば、通例AとA'、BとB'との間には何等の關係もない。即ち集合AからBへの經過とA'からB'への經過との間には、それ自身では少しの共通部分もない。

さりながら、吾人にとつては此の二つの變化は何れもαからβへの轉位であり、從つて同一轉位と見なされるものである。

此の觀念は此の二つの變化が、何れも同一の相對運動によつて相償されるから起つたのであつて、これがなかつたら二つの間には少しの連絡もない。

吾々の身體は、關節や筋肉の配置によつて千差萬別の運動をするけれども、此の運動の總てが何れでも相償に携はるものではない。相償に携はるのは只感覺機關の相互位置の變化しない場合、即ち全部が一體として作用する時だけである。

これを要言すれば、

(一) 現象に二種の範疇を區別する事が出來る。

一は筋覺を伴ふ事なく外物に化せられる變化、即ち外的變化である。

二は吾々の身體に化せられるもので、内的變化である。

(二) 右に述べた二つの中、一つの範疇に屬する變化が、他のものと相償によつて矯正され得るものである。

(三) かく相償運動で矯正されるものを、今一つの變化(即ち狀態變化)から區別して、これを轉位と呼ぶ。それには外的のものが内的のものによつて相償される場合と其の反對の場合とがある。

かく相償によつて轉位を定義したが、此の轉位現象に關する定律が幾何學の對象となるのである。

點等勢の定律。 その定律の第一は點等勢の定律である。一つの外的の變化αによつて吾々は印象の集合AからBに移り、更にこれが相償運動βによつて矯正せられ、集合Aに歸るものと假定しよう。

今又別のα'によつて集合Aから集合Bに移るものと假定すれば、α'は亦相償運動β'によつて矯正せられること宛もαの場合と同樣であり、β'はβと同じ筋覺に對應する。

これを空間が點等勢であり線等勢であると述べても好い。

又一度生じた運動は其の性質に變動なくして、二回三回と反復されるといふ事も出來る。第一章で既に同一作用の反復が可能である事が數學的推理に重大な役目を演じるのを見た。正しく此の反復は幾何學的事實にも適應するのである。

點等勢の定律外に數多の定律もあるが、其の細目には餘り立ち入るまい。數學者は此を一括して此等の轉位が一群を造ると稱する。

非ユークリツド世界。 若し幾何學的空間が、吾々總てのもの丶表現の唯一の枠であるなら此なくして像を表現する事は出來まい。吾が幾何學は絶對不可變のものたるであらう。

然るにこれは事實でなく、幾何學は此等の像が相續いて起る時に從ふべき定律を約述したものである。で、通例の表現法に類似はしても、吾人の使ひ慣れた定律より別のものに從つて繼起する表現法を想像しても好い筈である。

で吾等のと異なる定律の行はれる環境の中で教育せられた者にとつては、吾々のものより餘程異なつた幾何學が生れ得る譯である。

例へば大きな球の中に包まれ、中心が最高溫度で外周に到るに從つて溫度を減じ、表面に到つて絶對溫度零であるといふ一世界を考へて見よう。此を嚴密に數學的に言へば、球の半徑をRとし、任意の一點から中心迄の距離をrとすれば、其の點の絶對溫度は、R^2-r^2に比例するといふ意味となる。

更に又此の世界では總ての物體の膨脹率は一定で、定規の長さが絶對溫度に比例するものであり、互に溫度の異なる點の間の轉位に於て物體は一瞬にして熱の釣合ひを保つに到るものと假定する。

然らば一物體は球の表面に近づくに從つて益々小さくなるに違ひない。

此の世界は吾々から見れば有限であるが、其の世界内に住む者にとつては無限と見えるだらう。何となれば外周に近づくにつれて物體は縮少するから從つて其の物尺の長さも短かくなりこれを測つて表面に達するを得ないからである。

若し幾何學が不變固體の運動を司る定律の硏究であるならば、右の想像世界では幾何學は溫度によつて變化する固體の運動に關する定律の硏究となるであらう。

吾々の世界でも勿論物體は溫度によつて體積や形狀を變化するが、幾何學の基礎を形成する場合は此の變化を無視する。此は變化が不規則であるから無視したのであるが、上に述べた想像世界では此の變化は、不規則でないのみでなく簡單な定律に從ふのである。此處に住む人間とても亦同樣の變化を受ける。

更に、光線が種々屈折する世界、而も其の屈折率が R^2-r^2 に反比例する媒質を通過すると假定しよう。さうすれば光の進路は圓形となる。

以上の說を是認するには外物の位置によつての變形が、此の世界の人々の相償運動で正され、最初の印象の集合が再生する事を證明すれば好い。

例へば物體が上に述べたやうな、溫度による定律に從つて變形しながら轉位すると假定しよう。そして此の運動に非ユークリツド轉位といふ名稱を附しよう。

此の運動を此の世界の人が物體に對し靜止して觀察するなら、その印象は物體の轉位によつて變じるに違ひないが、此の觀測者が又物體同樣に運動すれば原印象を再現し得られる。その人の運動は、物體と人とが一體となつて運動したと見なされる位置まで來れば好いので、これは人の五體が物體同樣に變形を受けさへすれば出來る譯である。

人が固體同樣の變形をすれば、第三者から見て明かに變形と見える現象が何故變形と感ぜられないのだらう。

接觸の場合は簡單である。何故なれば觸れるものも觸れられるものも同一の變形をするからである。

視覺の場合も、屈折や屈折率について述べた臆說からして、原印象を回復するのは明白な事である。

で、此の世界の人々は吾々がなしたと同じやうに「位置の變化」といふ相償によつて、原印象の回復出來る變化を他のものから區別するであらう。

斯樣にして二次元の寫影からして三次元の觀念が生れる所以が明かになつた。卽ちそれ

は寫影が亂雜な變化をしないで、一定の定律の下に起つて來るからである。

此等の人々によつて建設される幾何學は、非ユークリッド轉位の研究であるから、非ユークリッド幾何學である。

四次元の世界。 非ユークリッド世界と同樣に四次元の世界も表現出來る。視覺は獨眼でも眼筋の運動で三次元の空間を認め、外物の像は網膜の上に結ばれて二次元の畫像となる。一般に此の像を寫影と呼ばう。

同一物體の寫影は、その運動によつて膜上の種々の位置に結ばれる。此の一つの寫影が一つから次へ移る際、その經過は往々筋覺を伴ふものである事も分る。

若し寫影AからBへの推移とA′からB′への推移が同樣の筋覺を生じるものである時は、吾々は二つを同じ性質の作用だとして結びつけてしまふ。

此の作用が結ばれる定律を研究して、其の作用が剛體の運動と同じ構造を持つ一群を造る事を知る。

此の群の性質から、幾何學的空間の觀念や三次元性が起つた事は、かくて明瞭になつたのである。

此から類推して四次元のものは三次元の枠の中に造る事が出來るだらうが、幾何學にとつては兒戲に過ぎまい。

吾々は一つの有形をば種々な立場から色々な寫影にする事が出來るし、又有形が三次元だから此を容易に表現する事も可能である。

一物體の寫影が次第に變化し、此の變化に應じて筋覺が起ると假定する。その或る瞬間の寫影から次への推移が、他の其と等しい筋覺を起すものであつたら、その推移は同じ性質の作用と見なされる。

此の二つの作用は、どんな定律でも吾が欲する定律に從つて、結ばれるものになし得られる筈である。例へば四次元性剛體の運動の群と同じ構造を持つ筋覺の一群を造るものと思つたとて差支へはない。かくて吾々に表現出來ないものは少しもない事になるが、此の感覺は四次元空間に動き得る二次元網膜の所有者の專有物である。四次元は此の意味に於てのみ表現出來るのである。

結論。 幾何學の發生には、かくの如く實驗が其の缺くべからざる要素となつてはゐるが、此を以て斯學が實驗的科學であると稱へるのは思はざるも甚だしいものである。もし

果して幾何學が左樣なものであるなら、其は近似的な粗雜なものに過ぎまい。

勿論幾何學は固體の運動の研究に過ぎないものではあるが、玆に言ふ固體とは天然の固體ではなくして絕對不變の理想的固體であつて、天然のものを著しく單純化した實物に遠い像である。此の像の觀念は精神の各部から造り上げられたもので、實驗は此の觀念を得べき機運を與へるに過ぎない。

幾何學の對象は特殊の群の研究である。群の觀念は吾々の精神に豫め存在してゐるものである。感覺と言ふ形でなくて、悟性の形で存在するのである。

可能な群の中から一つを選定して、此を基本としなければならないが、此の選定にまで吾々を誘導するものこそは實驗なのである。實驗は幾何學の何れが眞であるかといふ問題には與らないが、最も便利な幾何學を敎へるものである。

此の意味からして余輩は普通幾何學で用ゐる語を其の儘右の想像の世界に適用した。そんな世界に赴いたとて吾人は吾人の用語を變更する必要はない。

其の世界で敎育された人類は、その印象に一層よく合致する幾何學を創造するであらうが、吾人は如何なる世界に行つたとて同一印象に對する語は變更しない方が便利である。

第五章　實驗と幾何學

第一、幾何學の原理が實驗的事實でなく、ユークリッド公準が實驗で證明し得られない事は、既に前章で繰返し說いた所であり、自分の此の見解は迷想を抱く者の多いだけ特に强調しておく。

第二、物質的の圓を造り此の半徑と周とを測つて二者の長さの比が 2π である事を確かめる爲には、先づ圓を造る物質、及び測定に使用するメートル尺の物質の性質について實驗して見なければならぬ。

第三、幾何學と星學。 前章で述べたと同樣の問題は他の方法でも提出出來る。若しロバチェヴスキーの幾何學が眞であるなら非常に遠い星の視差は有限であり、リーマンが眞であるなら其の視差は負となるであらう。此はいかにも實驗出來得るやうであるから人々は此によつて三種の幾何學の中何れが眞なるやを決定しようと目論んだ。

譯者註。 ロバチェヴスキーの幾何學では三角形の面積は内角の和と二直角との差に比例するし、

リーマンでは球面過剩(內角の和から二直角を減じたもの)に比例する。

今恒星Sが地球軌道面に垂直で軌道の中心を通過する線上にあり、軌道直徑の兩端を夫々A及びBとしSABの三角形を造り角Aをα、角Bをβ、角Sをγとすればユークリッド軌道面からS迄の距離は、

$$R \operatorname{tang} \frac{\alpha+\beta}{2}$$ で與へられる。

此の中Rは軌道半徑である。

非ユークリッド體系で其の三角形の面積をFとすればロバチェヴスキーでは、

$$F=4k^2\{\pi-(\alpha+\beta+\gamma)\}$$

$$\therefore \quad \pi-(\alpha+\beta)=\frac{F}{4k^2}+\gamma>0$$

リーマンでは

$$F=4k^2\{(\alpha+\beta+\gamma)-\pi\}$$

$$\therefore \quad \pi-(\alpha+\beta)=\gamma-\frac{F}{4k^2}<0$$

即ち視差 $\pi-(\alpha+\beta)$ は零より小となり或は大となる。

然るに星學上直線と言ふのは只光線の經路の事である。故に負の視差を見出すか又は總て視差が或る限度の値より小さくならないと言ふ事が分れば、ユークリッドの幾何學を否認するか、又は光學定律を變更して、光の直線的に進行する事を否認しなければならない。

所が幾何學を變更する等は誰も考へまいから、勢ひ訂正されるのは後者となる。從つてユークリッド幾何學は何等實驗を恐れる事はない。

第四、ユークリッド空間で可能な現象が、非ユークリッド空間では不可能となり、從つて此の現象を成立せしめるからには、實驗は非ユークリッドの臆說と矛盾すると言ひ得るであらうか。余を以て見れば此の疑問は頗る珍妙なものであつて、事、恰も米で測り得ても尋呎吋では測り得ない長さがあつて、此の長さの存在を確めるための實驗は一尋が六呎に分たれるといふ臆說に矛盾するかと言ふに等しい。

此の問題をも少し立入つて研究して見よう。今直線がユークリッド空間でAとBとの二つの性質を持ち非ユークリッド空間ではA丈けしか持たないものと假定し、而も兩空間で共通にAといふ性質を持ち得るものは直線丈けであるとの假說を設けよう。

若し事實が此の通りであつたらユークリッドか非ユークリッドか何れの臆說が正しいかと言ふことが實驗的に證明出來るだらう。實驗を施し得る具體的の存在、例へば光線の束

のやうなものが、Aと言ふ性質を持つてゐる事は確められるだらう。若し此が直線であると論決し得たなら、此に他のBなる性質があるや否やも検討し得るに違ひない。

けれども事實は其の通りでないのであつて、此の性質Aのやうに、よつて以て直線を認知し此を他の物と判然區別するやうなそんな絶對的基準となる性質は存在しない。

例へば此の性質を次のやうに言つて見よう。

「直線とは此の線を一部分として持つ圖形がその圖形内の各點の相互距離を一切變更しないで運動する時、その線内の各點が少しも動かずに居り得るやうな線である」と。

此はユークリッド非ユークリッド兩空間に於て直線のみに屬する一性質であるが、どうして實驗的に此の性質が、或る具體物に屬する事を確め得ようか。何れ距離は物質的物尺で測らなければなるまいが、此の具體的な量が抽象的な量と合致する事が分からうか。

吾々は只困難を遠ざけたに止まる。

實は右にのべた所謂線の特性は、只に直線の性質のみでなく亦距離の性質でもある。で此が直線獨特の性質であり此によつて直線を判別するには、是非此の性質が直線以外のものや距離の獨特の性質でないといふ事と共に、直線、距離以外のものには一切屬せない性質である事を言はなければならぬが、此は事實に反する。

若し人あつて、ユークリッド體系で解せられても非ユークリッドで不可能の實驗を示してくれるなら余輩は前言を飜しもしようが、斯樣な事が不可能なのは火を見るよりも明かな問題だから、次のやうに結論しよう。

どんな實驗もユークリッドと矛盾しないと共に非ユークリッドとも矛盾しない。

第五、此等の幾何學が實驗と相容れないといふ命題を否定したのではまだ不十分であつて、此等の實驗が充足理由の法則や空間の相對性律と矛盾する所なく、而も二つの幾何學に反逆しないといふ事を說明する必要があるのである。

今任意の一物質體系を考ふるに當つて、先づ見なければならないのは此の狀態と(例へば溫度電位差等)空間に於ける此の體系中の諸物體の位置である。此の位置を定める條件の內に二種のものがあるが、其の一つは其等諸物體の位置を定める物體間の相互距離であり、他は此の體系其物の空間に於ける絶對的位置と絶對的方向を定める條件である。此の體系中に起る現象の定律はそれ等物體の狀態とその交互の距離によるものであつて、空間の相對性と受働性よりして體系の絶對的位置や方向には關しない。

換言すれば或る瞬間に於ける物體の狀態及交び互距離は、只最初の瞬間の此の物體の狀態や交互距離に關する丈であり、此の體系の最初の絕對的位置や絕對的方位には無關係である。此を簡單に相對性律と呼ぶ事にしよう。

今迄自分はユークリッド幾何學者として語り續けて來た。嘗て自分は如何なる實驗もユークリッドで解釋されるなら同樣に非ユークリッドでも解釋されると言つた。即ち實驗を先づユークリッドの臆說に從つて解釋し、此の實驗が相對性律と相容れないといふ事のないのを明かにし、最後に此を非ユークリッドの臆說によつて解釋する。此の解釋は常に可能であつて、只異る所は最後の場合は最初の場合より距離に關する解釋を異にする丈である。

所で斯樣に非ユークリッド的解釋を下した際、實驗は相對律と一致するものであらうか。もしさうでなかつたら、或は實驗は非ユークリッド幾何學を否定し去るものではあるまいか。

こんな疑問は頗る淺薄なものである。若し宇宙の一部分の絕對的位置が變る時は、此の部分と他の部分との交互距離が變動し、宇宙が他の部分に及ぼす影響は變はる筈であるから、相對性律を嚴密に適用する爲には此を宇宙全體に擴げなくてはならない。

所が全宇宙を一體系として考究する段になると絕對的位置とか絕對的方位とか言ふものは、如何なる實驗をもつても知る事が出來ない。實驗は、如何に精密な器械を用ゐた所で唯宇宙の種々な部分の狀態と其の交互距離を敎へてくれる丈けである。

で今度は相對性律を次のやうに述べる事にしよう。

或る瞬間、吾々が器械によつて測る長さは、その器械で最初の瞬間に測定し得たであらう長さ丈けに依存する。

けれども斯樣な命題は實驗の解釋とは無關係である。此の定律も亦ユークリッドの解釋で眞であるなら、非ユークリッドでも妥當性を持つてゐる筈である。

少し脇道に這入るが、自分は嘗て一體系を造つてゐる諸物體の位置を定義するデーターについて論じた。その際更に其の速度を定義するデーターについても論ずべきであつた。で先づ諸物體間の交互距離を變化させる諸物體の速度と此の體系全體としての轉位及び回轉速度（換言すれば此の體系の絕對的位置方位を變へる速度）とを區別する必要がある。

此の爲には相對性律は次のやうに述べられるべきであらう。

或る瞬間に於ける物體の狀態、交互距離及び此の距離が其の瞬間、よつて以て變らんと

する速度は、最初の瞬間の此の物體の狀態や交互距離及び最初の瞬間、依つて以て此の距離を變へようとする速度に關するのみである。其は此の體系の最初の絕對的位置にも絕對的方位にも、又此の二者を變更させる速度にも關しない。

所が通例の解釋で以てしては、右のやうに述べると此の定律は實驗と一致しない。

假りに今地球が密雲に蔽はれて何等の天體も眺望し得ないとすれば、地上の人類は恐らく此の地球を孤立の存在と認めるに違ひない。又一方此の地球人はフーコーの實驗か、或は嚴密な測量で楕率を見出す事によつて地球の回轉を知るであらう。かくの如く絕對的回轉が生じる事は明かであり、前述の相對律は誤りとなるではないか。

ニュートンが絕對的空間を認めたのは哲學者の思想には反するが科學者は餘儀ないものとして此を認めてゐる。此は自分の承諾し難い所で(第三編で解く事にする)ある。

かく論じ來れば、相對性の定律を述べる際、物體の狀態を定めるデーターの中に、速度といふものは一切混合する事を却けなければならぬ。

此等の困難はユークリツド非ユークリツド共に同じであるから、實驗によつて二者に矛盾の起るやを見ようとする目下は問題にならない。のみならず此の事からして實驗では二者を區別する事が出來ないといふ斷案が得られたのである。

第六、實驗が吾々に與へる所のものは物體の相互關係ばかりであり、物體と空間との關係或は空間部分の相互關係等は一切分らない。實驗を無數に繰り返へせば、總ての未知數を決定し得る無數の方程式の群が見つかり、空間と物體との關係も知れると思ふ人があるかも知らんが、其と此とは全然別問題である。船體の木片を測定したとて船長の年齡が出て來る筈はない。

第七、實驗が物體の上に施されるべきものであるなら、少くとも其は物體の幾何學的性質に關係してゐるだらうと問ふ人がある。

此に對して自分は先づ、一體幾何學的性質とは何ぞやと反問したいのである。かゝる質問は物體と空間との關係に關する質問と推測するが、かゝる幾何學的性質は、物體の交互關係だけを規定する實驗では近づき得ないものである。從つて其を示しさへすればかゝる性質に關する質問は消失するであらう。

先づ物體の幾何學的性質について自分の見解を述べて見よう。先づ一物體が數多の部分から構成せられると言ふ時は、自分は何も此によつてその幾何學的性質を述べるものでな

いと假定しよう。此は物體の最小部分に點といふ名稱を附する場合でも同樣である。

又或物體の一部分が他の物體の一部分と接觸すると言ふ時も、此の二物體の交互關係のみを言ひ・空間との關係には關しないものとする。

かく此等が其の幾何學的性質でないと主張する吾輩の論には諸君も恐らく賛成して呉れる事であらう。少くとも此等が數量的幾何學に無關係である事については異論はあるまい。

そこで今一點Oに會する八本の細い金棒 OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, で構成された一個の固體を考へ、他に今一つ木片の樣な固體があり此の面の上にインクでα, β, γの印をつけるとする。かくてAをαにGをβにγをOに接觸させ、斯樣にして$\alpha\beta\gamma$を順次BGO, CGO, DGO, EGO, FGO,に接觸させ、次にAHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHOと接觸させ,最後に$\alpha\gamma$を AB, IC, CD, DE, EF, FA と接觸させ得るものと假定しよう。

此等は空間の形やその數量的性質に關しては、何等の知識がなくても定められる所である。此等は又物體の幾何學的性質にも無關係に定められる。然し若し實驗をする物體がロバチェヴスキーの幾何學に於ける固體と同じ定律の下に運動するなら、かゝる事は確め得ないに違ひない。故に此を確める事は、物體がユークリッド群に從つて動く事、少くともロバチェヴスキーに從つて運動しない事を證明するに足るものである。

然るに、此がユークリッド群に從つてゐるのは明白な事實であつて、普通幾何學で若し$\alpha\beta\gamma$が正三角形でありABCDEFGH,がABCDEFを底としHとGとを頂點とする二つの正六角錐體である場合を考へれば、讀者は蓋し思ひ半ばに過ぎるものがあらう。

第二の場合として$\alpha\beta\gamma$を逐次にAGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO,の上に重ねて$\alpha\gamma$の代りに今度は$\alpha\beta$をAB, BC, CD, DE, EF, FAの上に重ね得たとしよう。

此は兩者が何れも剛體であつて$\alpha\beta\gamma$は直角三角形でありOABCDEFGHは二重の正六角錐であるとする時、非ユークリッド幾何學でなし得る所である。

さうすれば今度は物體がユークリッド群に從つて運動する時此を確め得ない事となり、非ユークリッドの時確め得る事となる。で此を確めさへすれば、物體はユークリッド群に從つて動かない事の證明となる。

かく論じ來れば、空間の形とか性質とか或は物體と空間との關係の上に少しの臆說も立てる事なく、將又物體に何等の幾何學的性質を賦與する事もなくて、物體がユークリッド

群に從つて動く事と同樣、非ユークリッド群に從つて動く事を觀察し得る事となる。

此を以て第一の場合は空間がユークリッド的であり、第二の場合は非ユークリッド的であると言つてはならない。如何にも想像するだけならば第二の場合も想像出來る。機械師もかゝる非ユークリッド空間を造り得るが、此を以て空間が非ユークリッド的であると斷言するのは早計であり、此は非ユークリッド的であると共にユークリッド的であるとも言はなければなるまい。

例へば茲に半徑Rの球があり此の溫度が先に述べた時のやうに R^2-r^2 に比例し表面に近づくにつれて減じるものとする。

今剛體で膨脹の無視し得られるものと、非ユークリッド固體即ち極めて膨脹し易いものとの二つを考へよう。そして此の世界に二重六角錐 OABCDEFGH と O'A'B'C'D'E'E'G'H' 及び三角形 $\alpha\beta\gamma$ と $\alpha'\beta'\gamma'$ を得たものとし、O六角錐は直線形で他は曲線形、α三角形は非膨脹、α'三角形は膨脹し易いものとする。

此の時も前と同じく OAH と三角形 $\alpha\beta\gamma$ とで接觸を造つて行き、次に O'A'H' と三角形 $\alpha'\beta'\gamma'$ で此を造るとすれば、實驗が敎へる所はユークリッド幾何學が妥當である事と、妥當でない事との二つである。

故に實驗は空間の上に施し得るものでなく、只物體の上に及ぶ丈けである。

LR

追　加

第八、完全を期する爲には尙まだ論じつくさない點が數多あるが、茲には只一二此等を要言して置くに止めよう。

空間三次元性の意味。 吾々は筋覺として表はれる內的變化が重大な意義を持つてゐる事を見た。此の變化によつて吾々の五體の狀態の一つ一つに各々特性が附せられる事になる。今此の狀態の任意の一つをA、他の一つをBとし、AからBへの變化が感覺Sを起こすものとすれば、Aが分ればSはBを與へる事となる。所がAとBとは一定にしておいても中途のものは色々變化し得られるから、SがBを與へると共にS'も亦Bを與へる事がある。卽ちSとS'とは同じ外的の變化を相償する用に供せられるものであるから、SとS'との二つの感覺列は相等しいものと認め得られるのである。換言すれば同じ外的變化に對して此を相償し得るものが、一つのSに限らないでS'はSに交代し得るから二つの列SとS'は等しいのである。此の感覺の內で特に其自身の力丈けで外的變化を相償し得るものを轉

位と言つた。二つの非常に相接近した轉位は吾々に識別出來ないから、此の轉位の集合したものは物理連續の特性である。實驗は此が物理的六次連續だと敎へるが、吾々にはまだ空間の何次元であるかは分らないで、今一つの問題を解釋する必要があるのである。

譯者註。六次元と言ふのは、一つの剛體の位置を確定しようと思ふなら、一點（三つの定數）と、此の點を過る直線（點の定數の外に尙二つの常數を要す）及び此の直線を含む平面（更に今一つの定數を要す）との三つを規定すれば好い。卽ちパラメーターは六つとなるからである。

空間の一點は、吾々此を白紙の上か又は黑板上に表はすだけであるから、その何者なるかは分らない。

然らば、物體Aがそのすぐ前に物體Bの占めてゐた點にあると言ふのはどう言ふ意味だらうか。又どうして此を知るのだらう。

自分が動かないで坐つてゐて、（筋覺によつて知る）一本の指が一切動く事なく始めは物體Bにふれ今は物體Aに觸れてゐるからだと言ふのが、此に對する私の回答である。卽ち自分の身體の狀態に對して指は一點を指示したのであり、此は視覺の場合でも同樣に論ぜられる。卽ち空間の一點を定めるのはかゝる方法が一つあるばかりである。所が此は身體の一つの狀態に一點が對應する場合であるが、此の外に亦身體の數多の狀態に一つの點が對應する場合もある。卽ち指が動かないで體の殘部が動く場合が此である。かゝる變化はどうして此を知る事が出來るかといふに吾々の狀態が變つても物體が動かず、指との接觸も亦變らないからである。

かゝる身體の狀態は指が一點を指すと言ふ點で共通であるから、此の意味でこんな態度を一つの部類として概括しよう。さうすればかゝる部類の一つ一つには此に對應する一點があり、一點には此に對應する一つの部類がある事となる。實驗によつて分かるのは此の部類の方、換言すれば筋覺であり、點ではない。

かくて空間が三次元であると言ふ時は、唯此の部類の集合したものが物理的の三次元連續として吾々に見えると言ふ意味に過ぎない。

此の用の指として何れの指を用ゐても好いと言ふのは實驗で證明出來る所である。

空間が數多の次元を持つてゐることは實驗が敎へる所であると言ひたいが、實は實驗が携はるのは空間其物ではなくして吾々の身體や、身體と外物との關係である。而も此の關係たるや實に粗雜極まるものである。

吾々には若干の群の潛在意識がある。リーの理論は此に立脚して展開されてゐる。どの群を選ぶべきか、更に此の群の中に如何なる部分群をとつて此によつて點を表はすべきか。實驗は此の選擇に關して嚮導の任務を司るものであり此以上の何者でもない。

先哲の實驗

個人の實驗が幾何學を獨創しないにしても、先哲の其は別であると言はれてゐるが、一體此は何を意味するのだらう。ユークリツド公準が吾々に實驗的に證されないが古人は此をやつたと言ふ意味だらうか。決してさうでない。その歌ふ所は吾々の精神が最も自然的傾向として選擇する所は、外界の狀態に最もよく適合するもの、即ち最も便利なものであるとの意味である。此吾が結論と正しく一致する所であり、幾何學は眞理でなく便利である丈けである。

譯者註。此の篇は岡谷氏譯「輓近の思想」に何立入つて論じてあつて、精しく知らうと思ふ人は是非一讀あるべきである。

第三編　力

第六章　古典的力學

英人は力學を實驗科學として取扱つてゐるが、大陸の學者は幾分か此を演繹的な、先驗的科學とするやうな傾向がある。此の點は英人の方が正しいのであるが、それにしても何故に大陸の學者は舊套を脱し得ないのだらうか。

力學が實驗科學であるからには其の原理は一時的な、しかも近似的なものに過ぎまいから、何時かは改變せられなければなるまい。

此の問題を解くのは頗る困難であるが、此の困難な理由は主として力學の著書で、實驗や數學的推理や、臆說、規約等の如何なるものであるかを明確にしないのに基因する。倘此のみに止まらず著書の第二の缺點は次の事に氣づかぬ事である。

一、絕對的空間といふものは存在せず人類は只相對的運動を理解するだけであるのに拘はらず、恰も絕對的空間があるかのやうに見做し、此の空間に力學的現象を依存せしめてゐる事。

二、絕對的時間なるものは存在せず、二つの時間が等しいと言ふ命題はたわいもない囈言である。凡碌が此に意味のあるものと思ふのは規約によつて意味づけられてゐるからである。

三、二つの時間が等しいなど言ふのが吾が直觀でないのは勿論、相異なる二つの場所に起きた二つの現象が同時に發生したと言ふのも直觀でない。

四、ユークリツド幾何學は言語上の規約の一種であるから、力學現象は非ユークリツド空間でも正當に述べ得られる筈である。

かく絕對的時間やユークリツド幾何學は力學構成上必要缺くべからざるものでもなく、又此等が力學より先に存在するものでもない。

故に此等の規約を用ゐないで力學の基本的定律を述べる事も出來、又かくすれば定律の性質もそれだけよく理解出來る。尤もその說明は甚だ複雜になるのは免れ得ない。此の複雜からのがれる爲に先の規約は設けられたのであるがその內、絕對的空間については既に一、二、兩編に於て吟味したから、茲では暫らく、ユークリツド幾何學及び絕對的時間を採用して論を進めて見よう。

惰性律。「何等の外力の作用をも受けない物體は、唯一樣な直線運動をなす。」

此の惰性律は先驗的の眞理であらうか。若し先驗的のものであるなら、何故に古代ギリシア人は此を知らなかつたのであらう。

若し一物體の速度は、此を變化する原因が無かつたら變化しないと言ひ得るなら、此と同樣に外的原因が働かないなら、物體の位置も變化し得ず、又其の經路の曲率も變化し得ないと言ひ得る道理である。

先驗的眞理でないからには此の惰性律は實驗的事實と認むべきであらう。然し力の作用のない物體の上に嘗て實驗の行はれた試しがあるだらうか。若しあると主張する人があるなら、どうして外力の働いてゐないと言ふ事を確めたのだらう。なる程大理石の卓上に長時間轉がつて止まらない球を以て此の實驗と言ふかも知れないが、其の球は明かに地球の重力の影響を受けてゐるではないか。

力學の敎師はこんな球の例を何の苦もなく通過してしまひ、惰性律が間接に證明されたものと一人ぎめしてしまふ。彼等のかゝる獨斷は拙劣極まるものであつて、其の心で表象しようともがいてゐる事項は「一般原理から生れる種々の結果は實驗的に確め得るものであり、惰性律は其の一般原理の一特殊なものである」と言ふにある。

自分は此の一般原理として次の命題を揭げよう。

「一物體の加速度は此の物體及び此に隣接する諸物體の位置と速度とに依存する」

數學者は此を分子の運動は二階の微分方程式に依存すると言ふであらう。

譯者註。 直角座標で x, y, z を以て一點を表せば、n 個の點に對して $3n$ の量が必要となる。で此等をそれぐ

$$x_1\ y_1\ z_1;\ x_2\ y_2\ z_2;\ \cdots\cdots\ x_n\ y_n\ z_n$$

で表はし此等を時間 t の函數として觀察する。其の時點 $p_i\ (x_i,\ y_i,\ z_i)$ の速度 v_i は

$$(1)\cdots\cdots v_i^2=\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$$

接線方向の加速度は $\frac{d^2s}{dt^2}$ であるから（1）を微分して

$$\frac{ds_i}{dt}\cdot\frac{d^2s_i}{dt^2}=\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d^2z_i}{dt^2}$$

解析力學の方で

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=f_{i1}\ (x_1,\ y_1,\ z_1\ \cdots\cdots\ x_n\ y_n\ z_n)$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = f_{i2}(\quad 〃 \quad)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = f_{i3}(\qquad)$$

m_i は點の質量である。

$i=1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n,$

f_{ik} は運動せる n 個の點の座標の函數を示す。此の等式は實驗によつて確められた事實である。更に摩擦抵抗等の場合は右邊が變つて（實驗的事實）

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{i1}\left(x_k, y_k, z_k; \frac{dx_k}{dt}, \frac{dy_k}{dt}, \frac{dz_k}{dt}\right)$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{i2}(\quad 〃 \quad)$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{i3}(\quad 〃 \quad)$$

となる。玆で k を用ゐたのは $3n$ 個の位置決定要素と $3n$ 個の軸方向の分速度とが、同時に此の函數に表れる事を示したのである。

此の最後の式がポアンカレーの言ふ「加速度が其の物體及び隣接せる物體の位置及び其の速度に關する」と言ふ事の數學的表現なのである。

此の言ひ表し方が惰性律の自然的概括である所以を了解する爲に、次のやうな事を考へて見よう。既述のやうに惰性律は先驗的なものでないから、他に別な定律を立てたとても先足理故の定律に適ふ筈である。其處で今、一物體が何等の力の作用をも受けてゐないと假定する時、物體の速度が變らぬと言ふ代りに、

（一）位　置

（二）加速度

の中何れかが變らないと假定しても好い譯である。此の假定の一つが眞であり且つ自然律であつて、惰性律と置き換へされたとすれば、（一）の方では一物體の速度がたゞ其の位置及び隣接物體の位置によつて定められることになるし、（二）の場合では一物體の加速度の變化は、此の物體及び隣接物體の位置、及び其の速度と加速度とによつて定められることとなる。

此を數學的に言へば、

運動の微分方程式は（一）の方では一階、（二）の場合では三階となる。

今少し前述の假定を變更して、玆に吾が太陽系統のやうな世界を考へ、其處では遊星の

軌道は偏心率無く且つその軌道面は互に少しも傾斜してゐないものと假定する。そして假りに此の遊星の質量が極めて小さく、其の相互の力の影響は少しも無いものとすれば、此の遊星上の天文學者は、遊星の軌道が圓形であつて、一平面に平行であり得るのみであると論結するに違ひない。其の時には或一定時の星の位置さへ分れば、其の軌道と速度は知られるのであるから、此の星學者が採用する惰性律は、余輩ののべた(一)のものになるに違ひない。

譯者註。直角座標と極座表との關係は

$$x=\gamma\cos\psi \qquad y=\gamma\sin\psi$$

此からして

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{d\gamma}{dt}\cos\psi-\gamma\sin\psi\frac{d\psi}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{d\gamma}{dt}\sin\psi+\gamma\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\end{aligned}\right.$$

圓運動、且つ等速運動であるから $\frac{d\gamma}{dt}=0$; $\frac{d\psi}{dt}=$定數$=K$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-y\cdot\kappa$$

故に其の速度や軌道は位置からして求められる。

$$\frac{dy}{dt}=\ x\cdot\kappa$$

斯樣にして穩かに圓運動を續けて行く太陽系の中に、忽然として一大天體が侵入して此を橫切つたとすれば、此の太陽系の遊星の軌道は大亂脈の中に投入されるに違ひない。此を觀て天文學者は、侵入者があつたればこそ軌道は亂されたのであり、此が去りさへすれば太陽からの距離は前と異なり遊星の軌道は再び舊狀に復し、圓形に復るだらうと思惟するに違ひない。然し若し事實軌道が圓形に復らないで橢圓となるならば、此の天文學者は倉皇として力學の改造に着手しなければなるまい。卽ちその軌道が圓形であつたのは偶然であつたと言ふ事が明白となり、自分の述べた惰性律の方がより概括されたものなる所以が分かるのである。

然らば所謂概括された惰性律は旣に實驗によつて確められたものであらうか。將又、確められ得るものであらうか。ニユートンは物理學原理(プリンチピア)を書いた當時、惰性律は實驗的の獲物であり且つ證明されたものと信じた。此は啻に彼が神人同形論的の見解

(後で述べる)によつた爲ばかりでなく、ガリレイに從つたからでもある。又ケツプラーの定律も此を確めてゐるものであるが、此の定律と言ふのは一遊星の軌道は其の原位置と初速さへ分れば定まると言ふのである。此ぞ吾が概括された惰性律の求めて已まない命題なのである。

此の原理がただ外觀的に眞理である爲、又自分が此に對立させたやうな種類の原理で置換へされない爲には、吾人は現象界の現狀を恒久のものと斷定しなければならぬ。その斷定は或は偶發的事項に促された斷定かも知れない。

然し此を偶發と見る臆說は吾人の留意に値しないのである。無論觀測の誤差の影響はないものと見て、二つの偏心率が相共に零である確率は、その一つが 0.1 で、他が0.2 である確率より小であるべきでなく、前者が生じたとて此を偶發と見るべきではあるまい。自然は故意に吾々を迷想に陷らすものでもあるまい。で、前に述べたやうな臆說(偶發と見たもの)は拒否さるべきものであらう。從つて星學の範圍では吾が惰性律は實驗を以て證明されたものと見るべきである。

されども星學は物理學の一部分に過ぎないから、或は他の物理部門で、此の定律が打破される日が來ないとは言へまい。實驗上の定律は訂正されるのが必然であるから、他の正確な定律が何時出現するか豫測を許さない。

けれども惰性律は此等の定律とは選を異にし、此を決定的の實驗にかける事が出來ないから、此には打破又は修正の心配はない。

決定的の實驗をするには、宇宙の總ての物體が若干の歲月經過の後、其の初速を以て原位置に歸る事、更に再び元の軌道を通つて運動する事を認めなければならぬ。かゝる試みの不可能なのは明かであり、或は部分的には此を試し得ても、數多い物體中には原位置に歸らないものがあるに違ひない。

尙一つ注意する事は、星學では一天體を見て、此が何か他の眼に見えぬ天體に作用されてゐないと假定するが、其の際、定律が證明出來るか出來ないかの二つの場合があることになる。

然るに物理學に於てはさうでない。例へば若し物理現象が運動によつて起つたとすれば、其は分子運動によつて起つてゐるのであるから、吾人は此を見る事が出來ない。で或物の加速度が、見えざる手で影響されると考へられゝば、吾人は新たに假定として他分子の位

置や速度を導入すれば好いから、定律を打破する必要はない。換言すれば、星學の時のやうに定律が證明出來ないと言ふ事は起らない。從つて星學が成立する惰性律の根據はそれだけ確かなものとなつて來る。

上に述べた所を要すれば、「特別な二三の場合に於て惰性律は實驗的に確められ、而も一般的に此が成立しないと言ふ事が證明出來ないから、此の定律は一般的なものとして擴張し得るのである。

加速度の定律。 一物體の加速度は、此に作用する力を其の質量で割つたものに等しい。

此の定律を實驗的に確める爲には、其處に表はされた三つの量、即ち加速度、力、質量を測定しなければならない。此の中加速度は此を測る事が出來ようが、力や質量は測り得まい。大體吾々には其等が何物であるかと言ふ事さへ分らないのである。

質量及び力とは何であらう。今玆にその諸定義をあげれば、

ニユートン。質量とは體積と密度との相乘積である。

トムソン及テート。密度は質量を體積で割つたものである。

ラグランジユ。力とは一物體に運動を起し又は起させようとする原因である。

キルヒホツフ。力とは質量と加速度との乘積である。

ラグランジユのやうに力が運動の原因だと言へば形而上學となる。此の定義を適用する爲には、此によつて力を測定する事が知られなくてはならぬ。其さへ分れば十分なので、何も其が運動の原因であるか結果であるかは不必要であり、從つて此の定義は無益である。

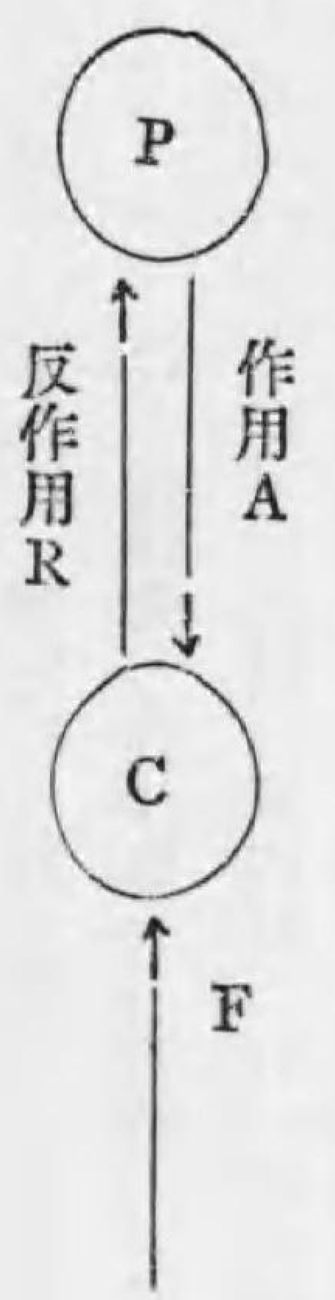
で玆には先づ二力が相等しいと言ふ觀念から吟味して見よう。一般に力が同一の質量に加へられた時、その加速度が互に等しかつた時又は二力が相反對の方向に作用し合つて釣合ふ時、二力は等しいと言はれてゐるのであるが、此は一つの迷想に過ぎない。何となれば一物體に加はつて知る事の出來た力Aを其の儘の大さで他の物體に働かすことは不可能であるからである(換言すればAはAであつて再現し得ない)。從つて正反對に向けた時、其が前と同じ大さを保持するや否やも亦分らない。

次に力が等しいと言ふ定義を、測力器や天秤を用ゐて實質的に下して見よう。先づ二力F及F'が夫々C及びC'に鉛直に上向きに働くとする。此の時此のCにPの重さを加へて釣合はせ、次にC'が同樣にPで釣合はされたとすれば、普通二力F及F'は等しいと言はれる。

一見すれば此は如何にも正しいやうであるが、PがCからC'に移る時、その重さが變らぬと言ひ得るであらうか。吾人は重力の大さが所によつて變動する事を知つてゐる。勿論その差は極く僅少ではあるが、嚴密に力の大さの等しい事を定めるには、依然として影響せざるを得ないではないか。測力器を用ゐたとて、其に用ゐてある撥條は溫度や諸種の外界の狀態の影響を蒙る事は明かである。

今一つ問題になるのは物體Pの重さが物體Cに加はつて直接にFなる力と釣合ふと言ふ事が出來ない點である。此際重さPがCに加はると言ふのはPの作用Aが加はる事である。物體Pは一方には重力の影響を受け、一方には物體CのPに對する反作用Rを受けてゐる。

從つて力Fと力Aとが釣合ふ事になるからFとAとは互に相等しい。又作用と反作用は相等しいから力Aはその反作用のRと必ず相等しくなければならず、一方Pと力Rも釣合つてゐるのだから相等しい。從つてPはFと等しくなる。此を圖示すれば次のやうになる。



圖示の狀態で釣合ふのだから

$$\left.\begin{array}{l}F=A\\A=R\\R=P\end{array}\right\}\quad\therefore\quad F=P$$

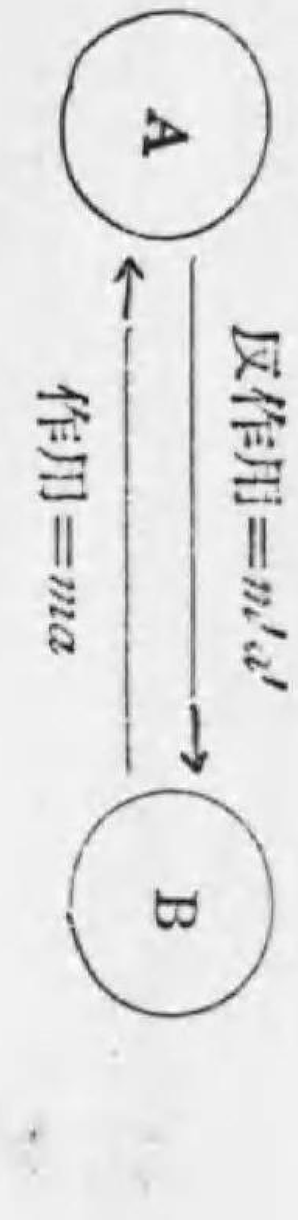
かく二力が等しいと言ふ事を定義するに當つて、作用及び反作用の等しいと云ふ原理を導入しなければならない。從つて、此の原理は實驗上の定律ではなくて、定義とも言ふべきものとなる。

要言すれば二力の等しい事を知る爲には、釣合をする二力の等しい事卽ち前述の $F=A$, $R=P$ と反作用の定律 $A=R$ とを知つてゐなければならない。否此だけではまだ不十分であつて、或る力の大さは方向を換へても變らないと言ふ事を假定しなければならない。所が此は實驗上の定義であつて近似的に眞であるばかりであるから、餘り芳しからぬ定義である。

そこで今度はキルヒホッフの定義に移らなければならなくなつた。彼は「力は質量に加速度を乘じたるものに等しい」と言ふ。ニュートンは此をば定律として揭げたが、キルヒ

ホツフは此を實驗的定律と見做すべきでないと言ふ意見で、かく定義に變更したのであつた。けれども定義としても此は甚だ不完全なものであつて、吾々には第一質量の如何なるものかが分らない。勿論此の定義で同一物體に時を異にして加へられる二力の比は分るが、二つの異なる物體に加へられる二力の比については何事も分らない。

共處で又茲に「反作用の定律」を借りて來て此を説明して見よう。自分は反作用の定律と言つたが、實は此も一つの定義として取扱つて見る事とする。茲に二物體A及びBがあつて各々共の質量及び加速度をば $m, m'; a, a'$ とし、圖示するやうな大さの作用が働くものと假定する。



作用は反作用に等しいから

$$ma=m'a'$$

$$\therefore \frac{m}{m'}=\frac{a'}{a}$$

斯樣にして二つの質量の比が定義され、その比の一定である事が、實驗によつて確められる。

所が實際に於ては、A及びBなる物體外に數多の物體があつて、皆此等がAやBに作用してゐるのであるから、上述の方法を用ゐるなら數多の力の中からBの作用に基くものを選び出さなくてはならない。

若し他物體Cの作用が唯Aに對するBの作用に加へられ、物體CのAに對する作用が、BがAに働く時でも變る事なく、又BのAに對する作用がCの作用によつて變る事がないとすれば、上に述べた選び出す事は可能であらう。又二物體が互に引き合ふ時は、唯此の二つを結ぶ直線の方向に力が働き、それが距離にだけ依存するならば、換言すれば中心力の臆説を假定する時は、上述の事は可能であらう。

天體の質量を定めるのには此とは全く別の一原理を用ゐ二つの天體間の引力をば、

$$\frac{\kappa mm'}{r^2}$$ で表はす。

此の中 r は二物體間の距離、m 及 m' は其の質量、κ は定數である。

前の場合とは違つて、茲に求めるのは力を加速度で割つた質量ではなく、互に引き合ふ

質量である。

此の測定法は質量の間接測定法となるが、分子が質量の相乘積となるのは理論上必然的なものではない。引力を唯距離の平方に反比例させて $\frac{f}{r^2}$ としても好い筈である。何も $f=\kappa.\ m.\ m'$ は必然的なものではあるまい。

かく假定しても亦天體相對運動の觀測によつて此の物體の質量を測定する事が出來る筈である。

譯者註。座標の極に太陽があるものとして此の周りに回轉する天體の運動の微分方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{r^3}\cdot f;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{y}{r^3}\cdot f$$

m を天體の質量とし m' をば太陽の其とすればニユートン法則では $f=\kappa mm'$ となり一つの定數である。從つて積分には何等關係ない。Tを此の天體の週期とすれば、上より

$$T^2=\frac{4\pi^2a^3.m}{f}$$

a はエリプスの長徑の半分である。

諸種の天體を比較觀察すればT及び a は此を測る事が出來るから、諸種の天體の質量の比を f から求める事が出來る。

けれども今飜つて見るに、吾々は此の中に中心力の臆說を許容してゐるのであるから、此が許さるべきか否かと言ふ事が玆に又問題となる筈である。

Aが今假りに或加速度を持つてゐるとしても、此の中幾部分がCの影響で、幾部分がBの影響であるかは全く分らない。從つて上述の方法は質量の測定には用ゐられなくなる。力の作用、反作用の問題について殘る疑問は、中心力の臆說が棄てられた場合如何と言ふ事になる。その時は次のやうに原理を言ひ更へよう。「一體系をなせる物體の集合があつて此に他の世界からの作用が無いものとすれば、此等諸物體に加へられる總ての力の幾何學的和は零である。換言すれば、此の體系の重心の運動は直線的であつて一樣である」から言へば此は質量に定義を下す一方法であるやうである。即ち重心の位置は明かに各質量によつて定まるから、重心の運動が直線的で一樣になるやうに諸種物體の質量を決定しさへすれば好い。此はニユートンの運動の第三法則(作用反作用)が眞であるならば何時も可能である。

されど、總ての外力の影響の無い體系は存在しない。宇宙の總ての部分は皆何れも他の部分の影響を受けてゐる。即ち重心運動云々の定律は宇宙全體に適用しなければ眞となら

ないと言ふ結論となる。其處で宇宙全體の重心の運動を求めなければ質量は分らないと言ふ事になつて、此の解は再び迷宮に入らなければならない。

遂に又吾人は質量の何たるかを確め得ない憐れな狀態に置かれる身となつた。數頁に涉る論究はかくて水泡に歸し、無能なる吾人は三度定義を新にする事を餘儀なくされたのである。で「質量は計算の中に導くに便利な係數である」と最後の血路を求めて悲鳴をあげよう。さすれば吾人は質量に種々な値を入れて、茲に力學の再造をし得るだらう。かくて獲得した新力學は實驗とも、又一般原理「惰性律質量と加速度との積が力となる事、作用反作用の相等しい事、重心運動のそれ、面積速度の原理」等とも矛盾する事はあるまい。

此の新力學の方程式は簡單ではあるまい。簡單でないと言ふのは、初めの部分で、實驗で分る部分丈けである。完全方程式は簡單にもならなければ複雜にも赴かず、唯質量だけは少し變更されるだらう。

ヘルツは力學の原理が嚴密に正しいか否かを攻究して曰ふに「多數物理學者の意見を辿れば、力學の動かすべからざる眞理が實驗によつて變へられる事はないが、實驗によつて導いた眞理は何時も實驗によつて訂正される事が出來る」と。ヘルツの心配したのは上述の諸種の原理を以て實驗的のものであると見なしたからであるが、吾輩の說をもつて見れば、此等は何れも實驗的のものでなく、定義となるのであるから、諸君には最早ヘルツの心配は無用となる。

然らば上述の諸原理はたわいもない世迷ひ言であつて、何等の益なく、從つて力學は無用の長物であらうか。

勿論吾人が先に述べた所を以てすれば、完全に孤立し、他の世界の作用から獨立した體系はないが、然し稍々獨立に近い體系なら數多あるのである。

で斯樣な體系を觀察すれば、その一つの物の他に對する關係やら、又此の體系の重心の宇宙に對する運動も硏究する事が出來、此がニュートン運動第三法則に適合して、直線的に進み且つ一樣である事も分る。

此は實驗的の眞理であるが、此の眞理は實驗によつて取消す事は出來ない。實驗を正確にやる程此が益々眞に近い事が分る。かくて吾人は、實驗が如何にして力學原理の根柢として役立つか、又實驗が決して此等原理に矛盾する事の無いのを知つたのである。

神人同形論的力學。 キルヒホツフは數學者の一般的傾向たる名目論に追從したもの

と言つてよからう。物理學者として彼は、此の傾向から脱出する事が出來なかつた。力の定義を得ようと望んだ彼は、先づ其について述べられてある命題の中で、手つとり早いものを選んでしまつた。さりながら吾人をして言はしめれば、力は其自身既に明かなものであつて、人類は此をば直觀によつて知り得るのである。此の直觀は幼年時代から慣れ來つた努力の概念に其の發生を見るのである。

かく直觀によつて力共物の眞性を知る事は出來るが、それだけでは力學には何等の益も無いのであつて、斯學の建設の爲には是非共其の大さの測定法を知らなければならない。

力の測定法を敎へないものは力學者にとつては全然不用である事、恰も熱力學を研究する者に溫冷の主觀が役立たないのと同樣である。溫冷の主觀は此を數値に表して其の度數を測る事が出來ないから熱力學の理論構成に少しも用立たない。

自分は努力の概念から力の直觀が生れたと言つたが、此の直觀で得た力も亦此を測定する事は出來ない。重い物を曳くに慣れた者には普通の荷物は非常に輕いに違ひない。

更に今一つ此の努力の觀念は、筋覺があつて始めて生じるものであるから、太陽が地球を引くと言ふ風の力については何等知る所がない。

此の努力の概念から吾々が得る所のものは總て不正確な記號であつて、幾何學者の用ゐる方向を示す矢よりも正確や便利と言ふ點で劣つてゐるし、實在にも遠ざかる事甚しいのである。

神人同形論は力學の發生に於て歷史的任務を遂行し、時には人にとつて便利な記號を提供する事もあらうが、科學的、哲學的持性に關しては何等根柢的のものを與へないのである。

糸學派。 アンドラードはその「力學敎科書」で、神人同形論を再生させた。彼はキルヒホツフ一派の學派に對して彼獨特の學派を對立させ、此に糸學派なる名稱を附した。その學派は「細かい殆ど質量のない物質的體系を考へ、此が緊張した狀態にあつて力を遠方に傳達する事が出來る」と言ふ風に考をめぐらせたのである。其の理想的のものは糸であるから此の珍名が起つたのである。

力を傳達する糸は此の力の作用で延長し、此の延長の大さで力の大さが測られると同時に、糸の方向は力の方向を指示すると言ふ結論となる。

其の時は次のやうな實驗が出來るだらう。第一には糸の一端に物體Aを繋ぎ、他の一端

に力を作用させて糸の伸長がaになつた時の物體Aの加速度を測る。第二にはAを取外して其の代りに物體Bを繫ぎ、再び他端に力を作用させ糸にa丈けの伸長が起つた時、Bの加速度を測る。今度はＡＢ各々にb丈けの伸長を起させて、其の時の各々の加速度を測る。かくて得た四つの加速度は比例するから、加速度の定律は實驗的に確められるだらう。

又一物體に等しい張力の糸を數多く作用させ、此が釣合つて物體が靜止する爲の糸の方向を求めれば、力の合成法則は實驗的に確められる事になる。

此等の檢定法では、糸に作用する力の大さは糸の受ける變形で定義されてゐる。此は誠に合理的であるが其の時に糸に傳へられる力は、物體が糸に及ぼす作用に等しい事、卽ち反作用の原理を此の考の中に含めてゐる。卽ち此の原理は實驗上の眞理として且つ力の定義として用ゐられてあるのである。糸學派の此の定義はキルヒホッフのそれのやうに規約的ではあるが、後者のやうに一般的のものでない。

何となれば、力必ずしも糸によつて傳達されないからである。假に今地球が糸で太陽に引かれて居ると假定した所で、其の糸の伸長を測る事は出來ない。

かく觀察して來ると、此の糸學派の定義は殆ど總ての場合に不完全なものである事が分つた。已むなく吾人は再びキルヒホッフに舞ひ戻らなければならぬ。

其ならば何故かく迂遠な定義を立てたのであらう。吾々は或特殊な場合にだけ意味を持つてゐる定義を立て、此によつて定義を加速度の定律に導き得る事を實驗的に確めた。此の實驗によつて、加速度の定律を他の總ての場合の力の定義と見る事が出來る。

然し加速度の定律は如何なる場合でも定義であると考へ、實驗を此の定律の檢定としないで、反作用原理の檢定とするならばより簡單ではあるまいか。換言すれば、彈性體の變形が、此の物體に加へられる力にのみよる事を檢定すると見るのが簡單ではあるまいか。

然し此の場合も、糸に質量のある事や、此に加はる力が兩端の物體の力だけでない事を考慮に入れてないのである。

かく斷定すれば其は論理的に缺點がある事となるが、此の觀念が非常に面白いと思へるのは、其に力學の發生的な面影が映つてゐるからである。

卽ち其によつて、出發點では特殊の大ざつぱな實驗が用ゐられ、遂には一般的な精密な確固たる定律が生れてゐるのが見られる。さりながら少しく頭を廻らせば、その確實性と言ふものは、定律を規約と見て勝手に附した性質である事が分る。

さりながら、加速度の定律や力合成の定律は、隨意に出來た規約ではない。此の定律の設立者は、此が實驗的に確定されたものと思つて定律と名付けたのであるが、吾々は其の實驗が不十分である事を認めて、此が定律でなくて規約であると言つた丈けの話であり、從つて隨意に出來た規約ではない。

第七章　相對運動と絶對運動

相對運動の原理。 幾度か吾人は一般的の或原理を立てゝ、加速度の定律を其の原理の一派生物としようと試みた。任意の一體系の運動は、固定してゐる座標系に對しても、一定の方向に一樣の速度で運動してゐる座標系に對しても、同一の法則で言ひ表されなければならない。此を相對運動の原理と言ふのであるが、此の法則は次の二つの理由で此を信ずる事を餘儀なくされる。その一は、普通ありふれた實驗で容易に知られる事、その二は此に反對する臆說を立てる事は、吾々の悟性に反するからである。

で此の原理を許した上で、一物體に力が作用してゐる場合を考察して見よう。觀測者は運動してゐる物體の初速度に等しい速度で、等速運動をするものとする。此の時、此の物體が靜止の狀態から運動を起したものとすれば、此の物體の觀測者に對する相對運動は、絶對運動と變りない事にならう。此を以て吾々は、加速度は絶對速度によつて定め得ないと論斷し、剩つさへ此からして加速度の定律の證明を導き出さうとさへしたのである。

さりながら此の試みたるや勞して效ないものであつて、力に對する定義が下されない以上加速度の定律は證明出來ない。

相對運動の定律は頗る興味の深いものであるから、其自身の爲にも此を研究する價値がある。

茲に幾多の物體から構成されてゐる一體系があるとすれば、此の一物體の加速度は諸物體の速度の差と座標の差に依存し、速度や座標の絕對的の大きさには無關係である事は既に自分の說いた所である。

で此の原理が若し相對加速度、卽ち加速度の差に對して眞であるなら前章の速度の場合と同樣に、此を反作用の定律と組合はせば、此が又絕對加速度に對しても妥當である事が分る。

卽ち問題は、加速度が速度座標各々の差による事、數學的に言へば、座標の差が二階の微分方程式を滿足させるのを證明する事に存在する。

これ果して實驗や先驗的判斷で證明し得ようか。

此は既に自分の述べ來つた所を思ひ合はせば讀者自身で明かになる事だらう。

自分は嘗て「概括された惰性の原理」を述べたが、恰も目下の問題は此に類似してゐるのである。たゞ前者は座標其物に依存し後者は座標の差によつてゐる點に於て二つの間には幾分相違があるのであるが、此等を吟味するのは同じ事を繰返す譯だから止めておく。

ニュートンの檢討。 嘗て自分は、相對運動の原理は實驗で確められたのみならず、先驗的に、その反對の臆說を述べる事が出來ないと言つた。

なるほど不動座標が直線等速運動をする時は此は眞であるが、何故等速運動でない時や等速圓運動の際には妥當でないのであらう。

此の二つの場合のうち非等速運動の方は餘り考究の要はない。電車が急停車する時身體が倒れかゝるのは相對運動が急に亂される爲に起る現象である事は周知の事實である。で相對運動の定律は茲には勿論成立しない。

第二の方、等速圓運動の場合を論じる事としよう。吾が地球が回轉するのは、他の天體が見えなくともフーコーの實驗や、地球の楕圓體である事から認められる。

然し此の場合に「回轉する」と言ふ事はその意味甚だ不明である。絕對空間がなかつたら何に對し回轉するのであらう。絕對空間を認めると言ふなら、どうして認めるかと反問

したいのである。

如何なる解決を下して見ても何だか神祕に閉されてゐるやうであるが、一體何故に神祕の扉が開き得ないのだらうか。今少し頭を回らせて此の神祕の解析を試みて見ようと思ふ。

今吾が地球が幾層となく密雲に蔽はれてゐて、人は永へに日星の影を見る事が出來ないと假定して見る。斯樣にすれば人類には地球回轉の觀念は容易に湧いて來ないに違ひない、コペルニクスの生れ出る理由が果して此の世界に存在するだらうか。

力學者は最初の程は何等絕對的矛盾に陷る事はないだらう。人は實在の力の外に二つの想像的力たる普通遠心力及び複遠心力を見るであらう。此の二力は實在と見做されて總ての說明に流用され、概括された惰性律との間には何等矛盾が起らないに違ひない。何となれば、此等の力は、重力のやうに一體系の種々の部分の相對的位置に關し、摩擦のやうに相對的速度にのみ依存するからである。

けれども、此世界上の學者にも次のやうな困難が氣付かれるだらう。もし孤立した一體系が實現されたなら、此の體系の重心は恐らく直線運動はなすまいと。で此を明かにする爲に、遠心力を導入して來るだらうが、此は彼等にとつては實在と見做され物體の交互作用とされるだらう。所が此等の力は孤立の度が大きくなる程、換言すれば距離が大なる程小さくなる筈であるが、遠心力を以ては此の說明がつかない。遠心力は距離と共に大きくなるべきである。

此の困難を除く爲に、彼等はエーテルのやうな媒質を假定して、此の中で此等の物體に排斥作用のある事を想像するであらう。

けれどもこれだけでは困難はまだ十分に脫し切れない。空間は對稱的であるのに運動の法則は對稱的でない。右と左を區分しなければならぬ。例へば旋風は何時でも一定の方向に回轉してゐるが、對稱からすれば、總ての方向に同じやうに廻らなければならない。學者が孜々として宇宙を硏究し、遂に何物でも完全に對稱的であると理由づけた所で、何故に旋風が一つの方向にだけ回轉するかの理由を見出すに少なからず苦しめられるだらう。

譯者註。旋風は北半球では時計の針の反對の方向、南半球では時計の針の方向に廻る。此は地球回轉の爲に起る現象である。

斯樣な苦しい立場に陷落した彼等は焦慮の末、遂に複雜な手段をめぐらして此を說明するに到るだらう。かくて夢遊國コペルニクスは

「地球の回轉を假定するのは便利である。力學の法則は此によつて一層簡單に表はされるから」とうそぶくに違ひない。

彼等は絕對的空間なるものを妄想し、此に對して地球が回轉するものと歌ふが、かゝる絕對空間なるものは露許りも客觀的實在として表はれないのだから、地球が回轉するなど稱へるのは根本的に無意義である。又地球其物が全宇宙だから、人類はかゝる問題を實驗にかけよう等とは思ひもそめない。卽ち地球が回轉するや否やは全然不可知の問題だから、回轉すると言つたとてしないと言つたとて關はない。だから回轉すると考へたが便利と言ふ命題は、回轉しないといふ事が、先驗的事實として與へられない此世界には無意義である。

嘗て我が史上のコペルニクスは地球の回轉すると考へた方が星學の定律をのべるに便利であると叫んだ。吾々は正しく此を許容したのであるが、然らば何故に此の場合、卽ち夢遊國コペルニクスの「力學の定律が簡單になるから回轉すると考へたが便」と言ふ際、此を否定するのだらう。

吾々は物體の座標や又其の差が二階微分方程式で定められる事を說いた。これ吾々が概括された情性の原理及び相對的運動の原理と稱したものである。若し此等物體の距離も亦二階微分方程式で定められるなら、吾々は滿足するだらうか、どの程度迄滿足するか、そして何故十分に滿足しないかが玆に問題となつて來る。

今例をとつて此を說明して見よう。吾が太陽系のやうな一體系を假定し、此の體系からは他の恒星を窺知する事が出來ないとする。從つて星學者は、唯遊星や太陽間の距離だけを觀測し得て、遊星の絕對經度などは測定し得ないだらう。此の時ニユートンの定律から直接に此の距離の變化を求める微分方程式を導き出す時、其の方程式は二階にはなるまい。ニユートン法則の外に此の距離の初めの値及び此の時間に關する微係數を知つても、此だけでは其の次の瞬間の距離を定める事は出來まい。其には天文學者が面積定數と呼ぶ實驗的なデーターを缺いてゐるだらう。

譯者註。遊星 (x, y) の太陽を原點とする運動方程式は

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{m'x}{r^3}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{m'y}{r^3}\end{aligned}\right.$$

これを一回積分し $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=\frac{m'}{r}+h$

k は定數 m' は太陽の質量である。更に積分して

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c\text{……}(c\text{ を面積定數と言ふ})$$

となる。此に $x=\gamma\cos\psi$; $y=\gamma\sin\psi$ を入れ、ψ や c を消去すれば

$$\gamma^3\frac{d^3\gamma}{dt^3}+3\gamma^2\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d^2\gamma}{dt^2}+m'\frac{d\gamma}{dt}=0$$

となる。此よりして遊星太陽間の距離は三階微分方程式による事となり、此を解くには γ 及 $\frac{d\gamma}{dt}$ の外に $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ の値を知らなければならぬ。

物理學者にとつては現象は二樣に大別され、一つは最初の現象にのみ依存するもの、今一つは結果を原因に結ぶ法則に從ふもの、此である。其處で觀測の結果或量が定數であると判明した時に、二樣の解釋が立つのである。

第一、此の定數は、今こそ變へる事の出來ないものであるが以前その創造の當時には、偶然に此を採用したものであり、且つ現在と雖も此を保存しなければならないやうな法則があるとする。其の時に此は偶然的の定數となるのである。

第二、所が此に反して、此の量に唯一つの値だけを與へ他のものを與へない自然法則があると推測しても好いが、此の時此の定數は本質的定數となる。

例へばニユートン法則によれば地球の公轉時間は定數となる。此の定數が三百六十五日云々の値をとつた理由は吾々に分らず、唯偶然から言ふ値となつただけである。だから此は偶然的定數である。此に反して引力公式中に表はれる定數は、ニユートン定律が與へる本質的定數である。

斯樣なものを偶然と呼ぶのが合理的であるか將又か丶る區別が人工的ではないかと言ふやうな問題については、自分は何等知る所はない。唯自然が神祕であるからにはか丶る區別をするのも隨意である。尤も實際には不確實であるのは免れない。

面積速度が定數となるのは偶然的なものとされてゐるが、二個の相異なる太陽系統を比較するならば、此の定數も亦種々な値をとるものである事が分るだらう。然し先に自分の假定した世界即ち孤立した一太陽系統內では定數は唯一つであり、此をば其の世界の人は本質的定數とするに違ひない。

一言して置くのは、その孤立した世界には絕對經度がないから、面積定數を觀測したり決定したりなどし得ない事である。けれども此事は彼等が定數を見出さないと言ふ結論

は導かないで、事實彼等は其の方程式中に定數を導入し、吾等の所謂面積定數に等しいものを得るに違ひない。

もし面積定數が本質的卽ち自然律に依存するものなら、任意の瞬間に於ける遊星の距離は此の距離の原値と、其の第一微係數の原値とを知りさへすれば求められる。卽ち此の距離は二階微分方程式で與へられる事となる。

所が、此の世界の星學者は此で滿足しないで、更に方程式を微分して行つて其の階級を高め、此の方程式が一層簡單となる事を認めるだらう。所がさうなると對稱から困難が生じて來て、遊星の集合が多面體の形となるか、對稱多面體の形となるかに從つて、定律を異にしなければなるまい。もしこれを統一しようと思へば面積定數を偶然と見做す外あるまい。

自分のとつた例は、地球の力學も知らず視覺も亦太陽系中に限られたものであつて、甚だ特殊なものであつたが、此の結論は一般の妥當性をもつてゐる。何となれば自分等が言ふ宇宙は、上述の星學者の其より廣いと言つても依然として吾等の知り得る宇宙であり、從つて一定の限度があるからであり、恰も前述の孤立した太陽系を以て全體とするのと五十步百步であるからである。

かく觀じ來れば、距離を定める方程式は二階以上のものと論斷出來るやうであるが、一體何故に吾々は此に反對するのであらう。現象の種々なものから歸納して、此が距離の第一微係數の最初の値に依存すると認めながら何故に其の二階微係數の其に依存すると假定しないのだらう。思ひこゝに到れば、どうしても其が概括された惰性律及び其の結果から得た吾人の精神上の習慣より來ると言ふほか道無い事を認めざるを得ないのである。

吾人は嘗て、任意の瞬間に於ける距離が其の原値、第一微係數の原値、其の他に依存すると言つたが、一體其の他と言ふのは何であらう。此が第二微係數の一つでないと言ひたいなら、是非玆に臆說を立てなければなるまい。今假に此を空間の絕對方位、又は方位を變ずる時の速さと假定するなら、幾何學者は滿足するかも知れぬが、哲學者は必ず方位とは何ぞと反問するに違ひない。

又此の臆說を「視るべからざる未知的物體の位置及び速度に依存す」と立てれば、恰も自分が嘗て惰性律の最後の所で述べた所のものとなる。

けれども此の困難は技工的である。器械によつて將來更に諸種の天體やらその運動等が

分つて來るだらうか、其が何れも吾々の導いた所によつて說明されるなら、此以上論ずる必要はないのであり、此の關係で滿足して好いのである。

第八章　エネルギーと熱力學

エネルギー學。 古典的力學で起る難問を解決する爲に、エネルギー學といふ一派の學が創造された。此はエネルギー不滅の原理の發見と共に起つたもので、その濫觴をヘルムホルツに見るのである。

此の理論は二種のエネルギー即ち運動のエネルギーと位置のエネルギーを以て組み立てられ、自然現象を皆次の二つの實驗的な法則で說明するのである。

一、運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和は常に一定である(エネルギー不滅律)

二、物體の一體系が時間t_0 t_1に於て夫々位置A、Bにあるとすれば、其の物體は常に二つの時t_0 t_1に於ける二つのエネルギーの差の平均値が最小になるやうな道を選んで轉位する。

二はハミルトンの法則であつて、最小作用の原理の一形式である。

譯者註。 ハミルトンの法則は此を次の樣に言つてもよい。「一物質體系の狀態が時間t_0 t_1に於て與

へられる時は、此の體系がゐからゐ迄轉位する時盡く實際の徑路は、如何なる假想徑路よりも、
二つのエネルギーの和の「時積分」の値が大きいか小さいかである。」

即ち此の法則では徑路を色々と假想して見て、此を實際の徑路と比較したのであつて、此の假想的な徑路を實際に執らせる爲には外力の仕事が入用になる。でその各質點の盡く假想徑路は必ずしも實際の徑路と幾何學的に一致する必要はないのである。

此の質點系が保存系である場合にはハミルトンの法則は最小作用の法則となるが、此の際は假想徑路は自由に選擇し得ないで、エネルギー不滅律に從ふのである。卽ち此の法則は、ゐゐに於ける質點系の狀態が與へられ且つ此の體系のエネルギーの全量が與へられる時は、質點系はその作用が最小な道を通つて轉位すると言ふのである。で讀者の見られる如くハミルトンの法則の方が後者より一般的である。

ハミルトンの法則はエネルギー不滅律よりも廣い意味を持つてゐるのであつて、後で本文にのべるUの中に座標と共に時間を含んでも好いのである。此は非保存體系に對しても(卽ち力函數Uがなくとも又Uの中に時間を含めてゐても)妥當である。

エネルギー學の便利とする所は、

一、上述の二原理は在來の基本原理よりもより廣汎であり、在來の、理論では成立しても自然に實現しない物を除去した。

二、在來の理論で免かれる事の出來なかつた原子の臆說から此は脫出する事が出來る。

かゝる二つの便利はあるが、然し共處には又新しい困難が、此の二種のエネルギーの定義を下す上に起つて來る。尤も此の困難は、簡單な場合には容易に脫れ得られる。

今玆に數個の質點からなる或る一體系を假定し、此等の點が共の相對位置と相互距離に依存する力の作用(速度には無關係)を受けるとする。共處にはエネルギー不滅の原理に從つて力の一函數が存在する必要がある。

此の時實驗で決定されるのは、質點の位置に關する項と、その速度の自乘に關する項との和である。前者は位置のエネルギーであり後者は運動のエネルギーである。此等を夫々U及びTで表はせば、TUの和が定數であるなら $T+U$ の任意の函數 $\varphi(T+U)$ も亦定數である。

然し此の函數 $\varphi(T+U)$ は、一項が速度に獨立、他項が速度の自乘に比例する二項の和ではない。定數をその値とする二數で、此の性質卽ち定値を保つてゐるのは唯一つ、此の

場合には $T+U$ があるだけである。此がエネルギーと稱せられるものであつて、第一項は位置のエネルギーと言ひ、第二項は運動のエネルギーと名付けられる。斯樣にして二種のエネルギーの定義が曖昧でなく如何なる場合にも下し得るのである。

運動のエネルギーは質量と、一つの質點が他のものに對する相對速度とによつて表はされ、相對速度は觀測され得るから、此からして質量が分る事となる。

けれども複雜な場合、例へば力が速度によつて影響される場合等になると、再び困難が起つて來る。ウエーバーは二個の電氣分子の相互作用は、距離、速度、加速度に依存する事を假定した。もし起點間に働く力が此と同樣であるなら、Uも亦位置のみならず、速度に關する事にたるからUの中に速度の平方に比例する項が出て來るに違ひない。斯樣な場合になると、エネルギー共物の定義も複雜となり相異なる性質の二項の $T+U$ の二部分に判然と區別する事が出來なくなる。從つて $T+U$ と言ふ二つの形の和に形式づけるのが無意義となる。

エネルギーとは力學に特有のものでなく、熱、化學、電氣等のエネルギーもあるから、エネルギー不滅律は $T+U+Q=$定數 と前者にQを加へたものにならなくてはならない。

此の式中Tは感覺で知り得る運動のエネルギー、Uは位置のみの函數としての位置エネルギー、Qは其他の熱等の內的エネルギーである。

此の三種のエネルギーが判然と區別され、Tは速度の自乘に比例し、Uは速度や物體の狀態には無關係、Qは速度や位置に全く關係なく唯物體の內的狀態に依存するものであるなら、最早問題は起らず、エネルギーは唯三種のものに區分し得られるのみであらう。

所が事實は中々さうはいかない。帶電してゐる物體の交互作用による靜電氣的エネルギーは言ふ迄もなく其の帶電量即ち狀態に依存するが、一方又その位置にも依存するだらう。もし此の物體が運動すれば、此等物體は互に動電氣的にも作用し合ふやうになり、動電氣的エネルギーはその狀態、位置及び速度に依存する譯になる。かくてTUQの區分法は全く迷宮に彷徨せざるを得なくなつた。

今若し $T+U+Q$ が一定數であるとすれば、其の任意の函數 $\varphi(T+U+Q)$ も亦一定數である。此の函數中の三項が互に判然と區別され得る時は、定値を保つものは此の三項の和のみであるから、此をエネルギーと名づければ好い。

然るに電氣の場合のやうに、定値を持つ函數の中嚴密に $T+U+Q$ と置く事の出來ない

ものがある場合には、一體何を以てエネルギーとなすべきか、吾人は少なからず惑はざるを得ないのである。

そこで次のやうに言はなければならなくなつた。

「常に定數となる何者かゞある」と。所がかう言つたのでは此の原理は實驗にかけ得ないものとなり、且つ世界が定律で總括出來るものである以上、其處に定値を持つものゝ存在するのは明かな事であるから、右の定律は無用のものとなる。

かく吟味して來れば、エネルギー學は力學に一道の光明を與へ、一段の進歩をなさしめたものであると共に、その進歩の不十分なものであつた。

今一つの異論は、最小作用の原理は可逆現象には適用出來たが、非可逆現象にとつては不十分である事である。ヘルムホルツは此を後者にも擴張しようとしたが成功し得なかつた。

最小作用の原理は考へて見るとどうも少し言ひ廻しが變である。と言ふのは、恰も質點が、最短距離を通つて轉位するのを、質點に意志でもあつて其の道を選擇するかのやうに言ひ表はすからである。かゝる目的論的な言ひ表しよりは他の陳述を以て作用が原因してゐるやうに言つた方が好い。

熱力學。熱力學上の二個の基本原理は、科學上頗る重要なものである。數理物理學の殿堂は將に斯學の上に頑强に建設されんとしてゐる。玆に自分は熱力學の基本となつてゐるマイヤー及びクラウジユースの二原理が果して此の殿堂の盤石たる礎になり得るや否やを檢討して見ようと思ふ。

或物理學者が嘗て「世人が誤差の法則を固く信じてゐるのは、數學者側では此が觀察上の事實であると思ひ、觀察者側では數學上の眞理であると思つてゐるからである」と言つた事がある。エネルギー不滅律も丁度此の友人の言の通りであつたが、今はもう實驗上の事實として萬人が認める所となつた。

然らば、何故に吾々は、原理其物に實驗範圍以上の一般性と正確とを與へたのだらう。換言すれば、實驗のデーターを一般的なものに押し進めるのは、正當であるや否やと言ふのが問題となつた譯であるが、此は既に哲學者の苦しんで解決し得なかつた所である。自分は此等愚鈍な前者の轍を踏む者ではないが、只一言するのは、此の能力がなかつたら、科學は成立出來ないと言ふ一件である。現象界を秩序と調和とを以て解釋し、將來を豫見

するのが科學の目的の主なものであるから、一般的な法則がなかつたら、科學が成立出來ないのは明かである。即ち(A, B, C,……)の狀態の本に κ と記ふ現象が起つたとすれば、次に(A B C……)の中の何れかに變化があつた時、どうなるかを知る爲に此等の場合を概括する必要があるのである。

所が此の總括する方法は澤山あるから、どれか其の中の一つを選ばなくてはならない。その選に當るものは常に一番簡單なものであり、かくて一番簡單なものをば同一意味の複雜なるものよりも眞に正しいものと見做すやうになる。

譯者註。キルヒホッフ「力學講義」に於て曰く「力學の任務は、自然現象をば完全に而も簡單に記載するに在り」と。

嘗て半世紀の昔、誰か「自然は簡單を愛す」と叫んだが、其は痴人の夢に過ぎなかつた。簡單を要求するのは人心共物であり、此によつて、人は實驗的データーをば一般的のものに押し進めるのである。

ケツプラー定律によつて生れたニユートンの定律は前者を生かせて前者以上の總括を行つたと同樣に、マイヤーの原理も、特殊原理から生ひ立つて、特殊なものを總括してゐる。

何故にマイヤーの原理はかゝる特權を持つてゐるのだらう。此には色々な理由がある。此の原理は、永久運動の可能を認めなければ、否定する事も嚴密性をしらべる事も出來ない。然しそんな事は吾々の夢想だにし得ない所であるから、此の原理は肯定した方が否定するよりも無謀の程度が少い筈である。

譯者註。マイヤーは一八四二年、初めて熱の仕事當量なるものを言ひ出した。此は後になつてジユールにより實驗的に確定された。

マリオツトの定律とは通例ボイルの定律と言はれ、溫度が一定の時の完全瓦斯の壓力はその容積に逆比例すると言ふものである。

クラウジウスの定律は熱力學の第一第二兩法則を擴大したものであつて、此が不等式におかれると言ふのは「完全瓦斯が一つの狀態から次の狀態に變化し、その周圍に何等の變化も起らなかつたら、エントロピー變化の總量は零か零より大きい」といふ意味を表はすからである。尙クラウジウスは熱力學の第一法則を概括して「宇宙のエネルギーは一定不變也」と言ひ第二法則を「宇宙のエントロピーは增加しようとする」と唱へたが、此の語はノンセンスとの反駁をうける。

尤も一般的にかゝる斷定も出來ない。何となれば永久運動の否定が、エネルギー不滅の

原理を生むのは只可逆現象の場合だけであるからである。

マイヤーの定律は簡單であるから、其の點で一層吾等は此を信じる事になる。然し同じく簡單であつても、實驗から直接得られたマリオツトの定律のやうなものは簡單である爲に、何だか疑はしくなるが、マイヤーのは其とは場合が違つてゐるのである。マイヤーでは、如何にも整然として、個々別々な成分のものが並べられ、此等が意外にも美事な一體を形成してゐて、とても此を偶然と思ふ事が出來ないのである。臥薪するだけ獲物は貴重であり、祕密の深いだけそれを知る時に心安さを與へるものである。

以上縷說した所は吾人が此を信ずるについての極く些々たる理由であるから、吾人は更に一歩を踏込んでマイヤーの定律を吟味しなければならない。

吾人は嘗て、エネルギーの何者たるかを檢討した時、其が特殊の場合には容易に定義せられ、複雜な場合には「定値を有つ或物がある」と言ふ漠然たる斷案に陷つた。吾人は玆に再び此の斷案の檢討に移らうと思ふ。

宿命論的な臆說では、宇宙の狀態は n 個の變數 $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ で定められ、n は極めて大きな數に到る。任意の瞬間に於ける此等 n 個の變數の値が分かれば、その第一微係數も亦判明し、n 個の變數の其の前後の一瞬時に於ける値も分る。換言すれば n 個の變數は n 個の一階微分方程式を滿足させる。

故に此の方程式には $n-1$ 個の積分が可能であり、從つて $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$ の $n-1$ 個の函數があり、此が定數となることとなる。で「定値を持つ或物がある」と言ふ命題は一種の同義語反復となり、此の積分中エネルギーなる名稱を附すべきものを見出し得ないであらう。

マイヤーの原理が有限な體系に適用された時は、此と解釋を異にしなければならない。此の際には、n 個の變數の中 p 個だけが互に獨立に變化し、n 個の變數と其の微係數の間に $n-p$ 個の一次關係を得る事となる。

今簡單の爲に外力による仕事の代數和と、熱量の外方へ放出されたものが、共に零であると假定する。さうすれば前述の $n-p$ の關係から新しい方程式が得られ、左邊は正確微分となり右邊は $n-p$ 個の關係から零となる。故に此を積分すれば一定數となるから、エネルギーと名付ける事が出來る。

さりながら、獨立に變化し得る變數は如何にして存在し得るのだらう。それは外力の働

く場合だけに成立し得るのである。外力の作用がなかつたら任意の瞬間に於ける n 個の變數の値で次の瞬間に於ける此の體系の狀態を定める事が出來る。然し此の結論を得るには依然として宿命的臆說を前提としなければならない。で玆に再び困難が湧いて來る。

一體系の將來の狀態が、現在の狀態から推定する事が出來ないのは、此が此の體系外の狀態に依存するからである。然らば變數 x の間には、此の外物の狀態に獨立な方程式の一組があるのだらうか。もしその方程式が見出されるなら、更に其が吾人の無智と實驗の不精密によるのでないかと反問しなければならない。

一體系の孤立が不十分であるならば、內部エネルギーを表はす式に外物の狀態が這入つて來る筈である。自分が此の外力の總和を零と假定したのは不自然ではあるが、かくしないと問題は非常に困難となる。其處で又、マイヤーの原理に絕對的の意味を附するには、此を全宇宙に擴げる必要に迫られる事になる。

要するに、エネルギー不滅律は「總ての可能性に共通な一性質がある」といふ意味に過ぎない。所が宿命論では唯一つの可能性しかないのだから、此の定律は無意味である。非宿命論的には此の定律には絕對的にも一つの意味があり、自由に課せられる一つの制限となる。

此の語を押し進めて行けば又しても論が數物科學の範圍外に出るから、此は玆で中止し、只一言したいのはマイヤーの定律が、その形が延轉自在であり人の欲するものは何でも此に包括せしめ得る一件である。此の自在性の爲に此の法則は永遠性を持つてゐるやうに信ぜられる次第である。且又此は一層高い調和を得た時に消滅するのみであるから、吾等は此によつて仕事を進めて差支なく、その仕事が徒勞に歸する事もないのである。

以上述べた所は又クラウジウス法則にも適用出來る。其の特徵は原理が不等式で表示される點であるが、此は物理學の定律も皆同樣であると言つて好い。其の理由はその定律の確實性が誤差の法則で制限されるからである。尤も物理學は法則を漸次に確實な法則で置換へる事を希ひ、求めたものは少くとも第一近似値とするのであるが、クラウジウスの其が不等式になるのはかゝる觀測の不完全に立脚してゐるのでなくて、問題の本性によつてゐるのである。

第三編の一般的論結

前述の事を顧つて考へれば、重學の諸原理は相異なる二樣の形で與へられる事が分つた。その第一は實驗を基礎とし一孤立に近い體系で檢定された眞理である。第二には宇宙全體に適用される公準で、嚴密な眞理である。

公準を生む實驗的事實に一般性と確實性とを缺く時、公準は化して規約となる。此の規約には如何なる實驗も矛盾しないものと吾等は一人決めしてゐるから吾人はかくするのであるが、されぱと言つて此の規約としてどんなものを持つて來ても好いと言ふ譯にはゆかない。確實な實驗で、其の規約の便利な事が知れるから此を採用するのである。で實驗で力學の原理が構成されながら、此が實驗で破れない理由も分明となる。卽ち、其が一つの規約となつてゐるのだから、メートル法も同じ事なのであつて、此が間違つてゐると言ふのは意味のない事であるからである。此は幾何學に於ても同樣であり、規約は便利である所以を實驗で確認し得られるのである。一見すれば幾何學と力學とは誠によく似てゐて實驗が何れに對しても同じ役目を演じるから「力學は實驗科學であるから幾何學もさうであらうし、又幾何學は演繹科學だから力學もさうでなければならぬ」と言へるかのやうである。さりながら此の考へたるや誤れるも最も甚だしいものであつて、幾何學の規約を最も便利であると認めさせるに到つた實驗の對稱は、幾何學其物の研究する對稱とは根本的に相違するのである。此が便利であるのは固體の性質や光の直進によつて然らしめられたのである。此等は寸毫も幾何學の實驗ではない。然らば何故ユークリツド幾何學が便利であるといふ觀念が生じたかと言ふと、吾が身體の生理的組織が固體の性質を持つてゐるからである。卽ち此の場合の實驗は幾何學者の對稱たる空間に及んだものではなくして、彼自身の體によつて行つた全く生理的のものである。

此に反して力學の基本的規約と此の規約が便利である所以を歌ふ實驗とは、全然同一の對稱の上に立脚してゐるのである。此の規約的な一般的な原理は、斯樣な實驗や特殊原理其物から直接に得られた最も自然的の概括なのであり、此の點は幾何學の場合と餘程趣を異にするのである。

自分は斯樣にして二科學を截然と區別したが、同樣の區別は實驗力學と規約力學との間にも出來る。

吾人はかくて力學が依然として實驗的たるべき事を了解し、此によつてその發生をも知り得た。のみならず力學は此を應用する爲であるから、客觀的なものとしなければならぬ。

所が一般性と確實性とを増さうとすれば、客觀性を失つて來て適用に不便となる。

原理は規約や定義の假裝してゐるものではあるが、一方又實驗的な定律から出て來るものであるから、定律から見れば其が絕對的原理に變更されたと見るべきである。

所が一つの定律は如何にして原理となるのであらうか。定律は二項AとBとの關係を表示するが、嚴密には眞理でなくて只略近的の眞理である。そこでAとBの間に假想的の項Cを挿入し、定義によつてCはAと嚴密に定律に從ふ關係を保持する事になる。

かくて定律はAB間の略近的定律と、AC間の嚴密な原理との二つに區分される。斯樣にして如何程進んで行つても定律の消滅してしまふ事はない。で玆に愈々定律の檢討に移らうと思ふ。

第四編　自　然

第九章　物理學の臆說

實驗と概括の役割。　實驗は眞理の唯一つの源であり、此によつて吾人は確實性と新事實とを發見する。

さりながら實驗が總てゞあるならば、數理物理學は無意義となる筈であるから、數理物理學の存在理由を問ふ必要が生れてくる。所が此の理由たるや極めて明白であつて、一語で言へば觀測しただけでは不十分であると言へば好い。卽ち實驗は概括して他に適用しなくては用をなさない。所が古來先哲は幾度か概括の道を間違つてゐた爲に、現代の人は前者の轍を踏むまいものと、觀測を押し進めて中々概括を施さない。

げにやデカルトはイオニア人を罵倒したが其のデカルトも亦吾人の嘲を受け、恐らくかく言ふ吾人も、概括の輕率については將來後世子孫に嘲笑される事だらう。

嘲笑されない事を希望し、一擧に永遠の眞理を見出さうと志しても其は不可能である。順序を追うて石を積まなくては科學の殿堂は築き上げる事が出來ない。

科學者にとつては先見が第一である。嘗てカーライルは言つた、「ジョン・ラクランドは此處を通過したと言ふ一命題には驚くべきものが宿つてゐる。かゝる一つの實在に對して、總ての理論は構成せられるのである」と。なる程歷史家の言として此は尤もであるが、物理學者であつたならば此を次のやうに表現するであらう、「ジョン・ラクランドは此處を通過した。が、其だけでは何も問題は起らない。彼は再度此處を通らないから」と。その言ふ所はジョン・ラクランド王の通過は孤立した唯一つの偶然の出來事であり、科學を構成しない事を意味するのである。

或現象の起つた狀態は再現し得ないし、同一現象の繰り返される事も出來ない。從つて先見をする爲には類似の狀態で類似の事實の起る事、卽ち概括する事が必要である。

實驗では孤立した點が數多得られるだけであるから、吾々は此を連結しなければならない。所が事實は只連結するだけでなくて、此を修正して連結するのである。卽ちなるべく點を通過するやうに心がけて此の中の或點を通過しない線を引くのである。只觀察した點だけ、卽ち聯絡のない孤立した事實で滿足する事が出來ないから、組織された科學が必要となるのである。

豫想觀念なくて實驗しなければならぬと言ふ人もあるが、其は問題であつて、かゝる事は不可能である。假令當人にはその豫想が意識されてゐないとて、矢張り無意識の中に豫想はあるのである。

又實驗する時、十分意識した豫想觀念がある時は無意識の時より惡いと言へるだらうか。余輩の見る所を以てすれば、此の意識したものが豫想の無意識なものとの釣合をとり、多方面から一實驗が論究せられる事となるのであるから、此は大いに必要があるのである。

概括によつて、旣に觀察された事實から、數多の事實が先見されるが、其の中第一のものが確實で他のものは皆可能性があるだけである。勿論確實と言つて　絕對的のものではないが實際場裡では、此で滿足し得る場合が多い。從つて先見しないよりは勝つてゐる。

尤も機會ある度に此の確實性は檢討して見なくてはならない。然し此の檢討は困難で此をやる人は少いに反し、先見を要する事實は極めて多いのであり、此の多いのに對して直接檢定のなし得る數は比較にならない程少ない。

此の小さい數の中から、出來るだけ多く利用を見出さなければならない。圖書館を以て此を喩へれば、館主は不十分な豫算で圖書を購入しようとし、實驗物理は購入係となることになる。故に圖書館の貯藏を增すものは實驗物理である。數理物理學は、目錄を整理して閱覽人に便利を與へるのである。更に又目錄によつて、費用の振り分けを考へさせる所に數理物理の任務がある。卽ち科學の製作品の增加に從つて、數理物理學は概括の指導となるが、いかにして指導となるかは吟味を要する點である。

自然の一體。 總て吾人が概括を行ふ際には自然が一つの統一體をなしてゐる事と、此が簡單である事とを先入的に假定してゐるのである。自分が若し統一體をなしてゐなかつたら、吾々は其の各部分間の關係を求め得ないから、各部分々々についての知識を各獨立に得るだけであらう。で自然が何故に一體をなすかは問ふべからざる問題であつて、說明すべき點は專ら如何にして此が一體をなすかと言ふ上にある。

第二の自然が簡單であるといふ假定は、此を解くべく頗る難解な問題であつて、或はかかる斷定が頗る危險なものかも分らない。

嘗てはマリオツトの定律を以て此を確めようとした人もあつたが、現代ではかゝる事を夢みる盲目も居ない。さりながら此の簡單性を信用しなかつたなら、概括は不可能になり科學は成立しない筈である。宜なる哉、人類は常に無意識に此を信じてゐたし又ゐるので

ある。

任意の一事實を概括する道は極めて多いため其處には既述の如く選擇を要するが、選擇は簡單の觀念がなかつたら出來ない事柄である。例へば數多の點を求めて此を一連續線中に包括させる場合について此を說明すれば、其の畫く線が不規則な折線にならないやうにするのは、初めから此の定律が複雜でない事を信じ又は知つてゐるからである。

木星の質量は三樣の方法即ち衞星の運動、大遊星か小遊星かの運動の狂ひから計算出來る。かく三樣の道から得た値には互に多少の違がある。此の事實は萬有引力の係數が三つの場合に同じでない事を假定すれば苦もなく解き得るが、吾々が其をしないのは、其が背理であるからでなく複雜なからである。

要言すれば、總ての定律は、反對の證明が出ない間は、簡單な形で維持されるものである。此は物理學者の從ふ所であるが、新たな現象が日々發見される時には、此の習慣の存續に對して又困難な疑問が湧いて來る。

科學史上、互に逆と言ふべき現象が起る事もあつたし、複雜と見えて簡單なもの、簡單に見えて複雜なものゝある事がある。

フレネルの言つたやうに、自然は解析的の困難を考へないで、只管に簡單な手段を用ゐる爲、其の手段の集積したものは甚だ複雜である。此の中に祕められた簡單は吾人によつて是非見出されなければならぬ。

其の反對に氣動論では、衝突の爲に變曲常ない分子運動を、その平均を取つて簡單な直線運動のやうに取扱ふ。此は唯外觀が簡單なだけであつて、其の中には複雜が祕められてゐるのである。

多くの現象は比例の定律に從ふ。其の理由は、現象中に小さい或るものがある爲であつて、此の物に立脚して實驗的定律は構成されるのである。けれども深く考察すれば、小さな或る物と言つても增分は無限小でなくて小であると言ふに過ぎないから、定律は類似的なものに過ぎまい。で矢張り簡單は表面だけである。此の小なるものゝあるといふ考は微小運動の重複したものにも用ゐられ、光學の基礎ともなる。

ニュートン法則は簡單であるが、其は唯外觀だけの事であらう。重力法則が微分子の複雜な運動によつて起されたものとして說明出來ない事もないかも知れぬ。如何なる場合にも定律の中には、小さい距離では零とする事の出來ない補項を含んでゐる。天體の場合は

距離が大きい爲に此の補項が省略され、ニュートンの式で見る項だけになるのである。

譯者註。分母は實際は距離の $2+\alpha$ 乘となるも α は小にして省略される。

斯樣にして吾々は簡單の下に複雜、複雜の下に簡單を見出すが、科學が可能である爲には簡單なものを以て中止しなければならない。然し此の簡單が只外觀だけのものとすれば、その上に建設された科學の殿堂は果して大盤石たり得るであらうか。

此の檢討の爲には、吾々が信仰する簡單性の概括が上に如何なる役目を演じてゐるかをしらべなければならない。定律は特殊な簡單な場合に檢討された。そして度々此等の場合が起り、而も定律が妥當であるのを見て、最早此の妥當性が偶然なものであるとしない事になる。

一例をとれば、チコーの觀測した一遊星の位置が常に同一の橢圓の上にある事を知つた。ケプラーは其の觀測が偶々橢圓の上に遊星が來た時のみに行はれた事に氣付かなかつた。

かく見れば簡單が實在であるか、又簡單によつて複雜な眞理が蔽はれてゐるかは何等問題とはなるまい。分子が直線運動をして壁に衝突り壓力を出すとしても、ニュートンが、α を省略しても、其は只偶然に此を簡單にしたのでなくて、原因あつて簡單にしたのである。

吾々は常に此の推理法に從ひ、簡單な場合に定律が確められたならば、此に類似した場合に此の定律が妥當である事を假定して好いのである。

もし簡單が事實であつて、而もその簡單性が大であれば、吾人の觀測が如何程正確になつても、其の定律は可能であらう。もし自然其物が簡單であると斷定するなら、吾人の定律は嚴密な簡單に近い簡單と言ふべきであるが、此の假定は現代の學者の採らない所である。

臆說の役割。 總て概括は一つの臆說であるから、臆說の必要な事は、誰も此を否む事は出來ない。臆說の必須條件は常に速かに簡單に檢定されなければならない事である。其が出來なかつたら臆說は放棄しなければならず、又事實棄てゝはゐるが、時に放棄するのが厭な場合もある。

尤も物理學の場合は、臆說を棄てる時は、必ずその臆說の下で說明出來ない事があるが爲であるから、學者は喜んで此をすて、かくて未知の新しいものが發見されるのである。

然し從來の臆說が捨てられたからとて、決して其の臆說が無用であつたのではない。此の臆說があつた爲に決定的實驗が出來上つたのであり、此がなかつたら、實驗は偶然によ

つて爲され、此からは何事も得る事はないであらう。即ち臆說がなかつたとすれば、此の實驗は漫然と現象の羅列の中に列せられて、事實の一記載となるのみであらう。

譯者註。近年行はれたモーレー・マイケルソンの實驗は、エーテル假說檢討の爲に行はれ、遂に相對律を導いた。もしエーテル假說がなかつたら、その光速度が變らなかつたと言ふ偶然の一事實が記載さるゝに止まつただらう。

然らば、如何なる場合に臆說を用ゐても危險が無いのだらう。

實驗で十分に檢討すると言ふ考だけでは、まだ其處に危險性がある。吾々は無意識の中に臆說を造り、此の臆說に從ふ場合が多い。此の時數理物理學が役に立つのであつて、此の下では總ての臆說が明るみに出されて公けにされるから、臆說が無意識の中に認許される事がない。

今一つ注意するのは臆說は餘り數多く造らない事と、順序を追うて造る事とである。餘り多く造ると此の臆說に基いて立つた理論が實驗に合はない時、何れを捨てゝ好いかゞ分らない。又順序がないと實驗が出來た時、此等の臆說が同時に檢定されたのか同一の方程式で多くの未知數が定められたのか分別する事が出來ない。

臆說には種々な種類があるのを區別するの要がある。例へば、至遠の物體の影響が省略し得る事や、小運動が直線の定律に從ふ事も、結果が原因の連續函數である事を假定するのも否む事の出來ない所である。對稱によつて定められた條件も亦同樣である。此等は皆數理物理の基礎となり、最後に放棄せらるべきである。

所が玆に區別すべからざる臆說がある。解析を行ふ人は物質が連續的であると假定する時と原子からなると假定する場合とある。此の二つは一見すると異つてゐるやうであるが、其の結果には何等相違もなく、ただ後の場合の方が勞力を多く要するだけの違ひである。

光學の中に二つのベクトルがあるが、その一は速度であり他の一つは渦動である。此も亦區別の出來ない臆說である。何となれば此と正反對の臆說を用ゐても、結果は同じであり、渦動を速度と見なして理に合はないと言ふ事はないからである。

譯者註。光學でも、水力學でも、直角座標に於ける渦動は分速度の偏微分の差の半分として表され、此を用ゐて些の不都合も起らない。

かく區別出來ない臆說は、その性質を知つてゐれば、用ゐて一向差支ないばかりでなく、その觀念を確實にする爲に大いに益があるのである。

第三番目は眞の概括としての臆說である。此は實驗によつて立てられたもので、效果は多いが先に述べた理由によつて餘り數の多いのは宜しくない。

數理物理學の起原。 數理物理學の發展が可能なるべき條件を研究して見よう。多くの場合現象の複雜なものは常に部分現象に分解して研究されてゐる。

その分解は三樣に行はれるが、其の第一は時間によつて配列される分解である。即ち遠い過去の事は考へず、一瞬間と其の直ぐ前の一瞬間との狀態を結合するのである。換言すれば現象の全繼續を研究する代りに、微分方程式を書く。

次には現象の空間分解を行ふ。實驗によつて與へられるのは、或る廣さの中に起る複雜なものであるが、吾々は此を微小な部分に限定して、部分現象を考察するのである。

今一二の例をとつて見よう。ある固體が冷える時の狀態を考へるのに、その全狀態を考へないで、その固體の一點から直接に遠距離に熱を傳へ得ない事を假定し、最も近い所だけに熱が傳はるものとして計算するのが此である。

即ち此の際は大距離には熱は作用しない事を假定したのであつて、此は一つの臆說である。從つて引力の場合と同じく必ずしも眞と言へないから此を檢定して見なければならぬ。此の檢定で近似的にでも確證出來たら成功であつて、逐次に近似的なものを積んで始めて數理物理學は構成出來るのである。

又臆說を檢定する事が出來なければ、部分現象は幾通りにも考へられるので、別な臆說を求めれば好い。換言すれば部分現象の方向を種々に求めるのである。

部分現象の方向を如何に考へたら好いかゞ分つた曉には、次には何んな方法によつて此の部分現象を見出すべきかゞ問題となる。

結果だけ、換言すれば吾々に必要なものだけを知るには、何もその機構の內部に一々立入る必要の無い場合が多い。即ち大數の法則だけあればそれで十分な場合が多く、例へば熱の輻射論で、分子が隣接分子に向つてなす作用は知られないがどんな臆說を立てゝも、結果は常に等しくなる。即ち媒質の對稱と作用の平均、換言すれば大數の法則によつて等しい結果が得られる次第である。

以上は部分現象を知らなくても好い場合だが、此に反して此を知るの要がある場合には、實驗によつて此に達するのが最良の方法である。例へば白色光をプリズムで單色にすると言ふ風に、實驗により複雜なものを簡單な部分に分けて、此を研究するのである。

所が不幸にして、かく分ける事は何時も可能であると言ふ譯にもいかず、且つ其だけで十分とも言へない。精神の方が實驗に先んずる必要がある場合がある。

例へば太陽の光線を分解すれば、スペクトル卽ち單色光に近いものを得、此のスペクトル線の幅を段々と小さくすると單色光は遂に嚴密に單色となる筈である。

所が實驗では此は不可能である。例へば、今同一光源から出る二つの光を互に直角な二面で偏光させ、次に此を同一の偏光面に歸らせて二つの光を干渉させるとしよう。もし、二光線が嚴密に單色であれば干渉は苦も無く起きるが、吾人憐れな人類は、いかに光線を搾つてもかゝる單色光に到達する事が出來ない。つまり此の際は極限に近づいて行く經過によつて吾々は欺かれ、精神は實驗に先んじたのである。

部分現象の知識によつて問題は方程式の形に置かれ、此を更に結合して複雜な事實を演繹する、此が周知の積分法である。何故にかく物理が數學の圏内に這入つて來るかと言へば、其は一つは數量的定律を述べなければならぬのに基因し、他の一つは觀測される現象が皆互に類似してゐる部分現象の重複したものに基因する爲である。斯樣にして微分方程式が極めて自然に導き入れられる事となる。

此が可能の爲には各部分現象が簡單な而も同一の定律に從ふ必要があり。かくてこそ數學が始めて有用となり、類似現象の反復を見て其の結果を前編にのべた逐次法の法則で知らせるのである。

然し此が出來る爲には次から次へと行ふ操作が同一でなければならず、それが同一である爲には、物理學の對稱たる物體が等質でなければならぬ事となる。

第十章　近世物理學の理論

譯者註。近世と言ふのはポアンカレー執筆當時卽ち十九世紀末より二十世紀初頭にかけての事である。

物理學理論の意味。 某々氏理論として一世を風靡した科學上の理論は、次から次へと棄たれて行き、新しいものが引續いて現れて來る。かく槿花一朝の榮に露生を貪るものであるからには、科學の理論は、理論としての價値のないものであるとも思はれる。

一見する所如何にも其の通りであるが、深く考究すれば其は頗る皮相の見であり、科學の任務と目的とを理解すれば、その露生にも深い意義の潜んでゐる事が分明となる。

流石に安固であつたフレーネルのエーテル光波說もマクスウエルの電磁波說によつて置き換へられたが、其はフレーネル說が無效であつた爲ではない。フレーネルの目的は原子を知らずエーテルの有無は別問題として、唯光學的現象を豫見しようとするにあつたのである。否現今でも依然として其の微分方程式によつて光學的現象を豫見し得るのである。

然らば物理學の理論は、その眞僞は問題でなく、只實用的の處方箋に過ぎないものだらうか。方程式は或る關係を表はし、其の關係が實在に適合する間は、方程式は依然として眞である。其は或る物と物との間の關係を表はすが、其の或る物とは嘗て吾輩が運動と言つたものであり、此の處では電流である。此等の名稱は人類にとつて永久不可知の實在の代理物の名前である。此の不可知の實在間の關係こそが唯一の眞理であり、電流や運動等に於ける關係が不可知の實在の其に等しい時、此の眞理は求められるのである。此が求められゝばその實在が運動にならうが電流に代らうが一向差支ない。

電氣振動等週期的現象が振子のやうに動く原子の振動に基くと言ふ事は正確な事實ではないけれども此等總ての週期的現象の間には共通の關係があつて、此の關係が或る不可知の眞理を指し示すものである事、此の關係の類似が驚くべく微細な點にまで及んでゐる事、更に又此等が一般原理たるエネルギー不滅、最小作用の原理で說明出來る事、此等が眞である事だけは分る。此だけはいつも眞で、此を以て色々粉裝した事實は巧みに說明がつく。

光の分散については幾多の理論があるが、その最初に現れたものは只部分的にのみ妥當であり不完全であつた。それに次いで現れたのはヘルムホルツの理論であつたが、此も幾

人かによつて改變を受け、發見者自身もマクスウエルの理論によつて此を改訂した。けれども玆に注意すべき事は、ヘルムホルツ以後の學者が外觀上非常に異つた立場から出發しながら、皆同一の方程式を得た一件である。此等のものは皆同じ現象を豫見させるのみならず、吸收と變則分散との眞の關係を知らせるから、何れも皆間違ないものと言ひ得られる。此等理論の前提には何れにも共通な若干事項間の關係が肯定されてゐる。

氣動論には異論が多かつたが、此の異論に對して絕對眞理を基準としての答は出來まい。けれども、反對論者と雖も、此の理論に妥當性があつて、此なかりせば氣體の壓力と滲透壓との關係も知り得ないと言ふ事は認めるだらう。此の意味で此の理論は眞なのである。

物理學上重要な二つの理論の間に矛盾が起る事があるが、此を物理學者は「中間の連續が隱されてゐたとて、その兩端を握るのに差支はない」と說明するに違ひない。此の說明は世人が聞くと實に奇妙である。世人の考では二つが矛盾する時は、其の中何れかゞ間違であり、他を捨てなければならぬやうに思はれる。所が物理學では求めるものが唯目的物だけであるから、中途の道條間に矛盾の起きる事があつても其は已むを得ない所である。かう言へば餘りに科學の近づき得る範圍を限定してゐるやうであるが、世人の求める嚴密性を得ようと思へば科學は成立すること能はぬ破目に陷らざるを得ない。人力では到底其に及び能はないのである。

多くの哲學者は物理學は原子の衝突で說明出來ると言ふが、其の意味は物理的現象間に球の衝突の場合と同樣の關係があると言ふ風に解した時だけに眞である。然し哲學者の意味する所は其以上であつて、衝突の如何なるものであるかは彼等に分つてゐるものと初めから無意識に信じてゐるのである。此は撞球等を目擊した經驗から得た信念であるが、此の信念が眞の關係に適合するや否やは全然不可知でなければなるまい。かゝる信念に賴るからには科學の近づく範圍が限定されるのも當然である。かゝる臆說は、亦物理學者が詩人的直喩を用ゐたと解しても好い。只問題となるのは直喩の價値如何であつて、少くとも直喩が精神に滿足を與へる限りは有用なのである。

此の理由で、物理學的臆說が一度捨てられても甦へる事のある所以が分明となる。卽ち他の直喩に價値多いと見えた場合に廢棄を試みたので、再び此が有效に歸る事のあるのは極めて自然である。

例へばクーロンの流體說はたわいもないものと思はれたものを、近時再び電子と言ふ名

前を以て甦つた等が此である。勿論電子には質量があつて、表面上クーロンの電氣分子とは違つてゐるやうであるが、クーロンとて電氣に質量があると言ふ事に對しては反對しなかつた。勿論かく辯護したとて電子論がなくならないとも限らないし、事實なくなる事も大いにあり得る筈である。

今一つ著しい例はカーノーの原理であるが、其は實現不可能の臆說の上に立つてゐて一時は廢棄されたのである。然るにクラウジウスは再度カーノーに立ち歸り、其の不用の部分を捨てゝ熱力學の第二原理を立てたのであつた。外觀上二つは同じものゝ間に成立しなかつたけれども、其の關係を示す點は同じである。從つてカーノーの原理は死んでゐたのでなく、正しかつたのであり暫らく隱れてゐたと言ふ結論となる。

此等の考察は亦最小作用の原理、エネルギー不滅の原理の樣な一般原理の任務にも適用出來る。此の原理は數多い觀測から得た物理學定律の共通なものから得た貴い獲物である。

此等の原理は一般的に押し進めると檢定出來ず「何物か絕えず定値を持つてゐるものがある」と言ふ漠然たる結論に陷つた。此は既述の通りである。では此の原理は少しの意味も持たず同義語反復に過ぎないものであるかといふにさうでもない。此の原理は依然として、エネルギーといふ名稱を附せられたものが眞の關係を以て結びつけられる事を示し、其の間の眞の關係を確めるものである。所で此の原理が何か一つの意味、例へば二種のエネルギーの和は一定であるといふやうなものを表すとすれば、其は一般には間違であり、從つて斯う言ふ意味を附するならその適用範圍を限定しなければならぬ。その限界は此の原理が役立たなくなる時卽ち現象を豫見させなくなる所に存するのであるが、兎も角其の所までは有用なのである。

物理學と機構。 理論家は槪ね、力學から說明を借りて來ることを好んで一定の法則の本に引き合ひ又は排斥し合ふ分子運動によつて總ての現象を說明しようとする。尤も中には此の現象中から或る距離をおいて作用する引力の場合を除く者もあり、ヘルツのやうに分子運動が自由には行はれず幾何學的の連結を保つものと假定する者もある。要するに此等の理論家は皆自然を或る形式に閉ぢこめようとするのであるが、果して自然は斯樣な形式內に閉ぢこめ得べきものであらうか。

第十二章には此等の問題を吟味するであらう、エネルギー及び最小作用の原理が滿足せられる每に、吾々は力學的說明が可能であると共に說明の數も亦無數にあるのを知る。連

鎖系に關するケーニヒスの定理により、ヘルツの法則、又は中心力を以て萬事が幾通りにも說明される事が分る。勿論簡單な衝突で萬事の證明されるのも明かである。

此の爲には、吾々の五感で知られる物質では不十分であり、或は原子運動とか、エーテルのやうな流體の假想物の導入が必要となるのである。

學者の中にはエーテルを總ての物質の根源と考へ一元論を立てる者もあるし、又物質はエーテルの凝固してゐるものと見る人もある。又ケルヴインのやうに物質をエーテルの渦動によつて生まれる點の軌跡と見る人もあれば、ウイーヘルトやラルモアーの如く物質をエーテルの捩れによる點の軌跡と認める者もある。かく說明すれば通例の物質は特殊體系の物質に過ぎまいからそれ等實在即ち僞の物質から得た物質の性質を如何にしてエーテルに强ひられようか。

從來行はれてゐた熱素や電氣等の流體が廢棄せられたのは、一つは此の熱素等が消滅し得ない爲であり、今一つは此等を物質と見るなら二つは全然別物となり各々共の個性を持つ事になるからである。此等の個性を許容するのは自然が一體をなし緊密に結びつけられてゐるといふ觀念に甚だしい反逆となる。

かく見れば、一つの理論は誤れる關係を示してならないのみならず、眞の關係を隱してはならない事が分る。

然らばエーテルは實在するものであらうか。

若し光が遠い星から地球目がけて來る時、旣に星を離れて而も未だ地球に達してゐない間は、共は何かによつて支持されてゐなければならない。此を數學的に言ひ表はして見よう。吾々が光として認めるものは物質的分子による變化である。例へば數年前の星世界での出來事を乾板が感じたものとする。所が如何なる體系でも、力學では僅かに瞬間だけ前の狀態によつて現狀を誘導し微分方程式を立てるのだから、若しエーテルがなかつたら、此は瞬間前のみならず、數年の過去にも關係しなければならぬ。從つて此は極根たる微分方程式と共に有限差の方程式を滿足させる事となり、一般力學と合致しない。かくてエーテル導入の必要が生れるのである。

エーテルは星と星との間にも、物質の中にも充滿してゐなければならない。フイゾーは運動する水中に光を通過させて光の速度の蒙る影響を檢べたが、此によれば二つの媒質水とエーテルが互に滲透して、而も相對運動をしてゐなければならない結論となる。

然し此よりも尙一層エーテルの存在を肯定させる實驗を考へ得るのである。其は反作用の法則であるが、此の法則が物質のみについて考へた場合には妥當性を失ふのは證し得られた所であつた。即ち其の際は、此の物質分子に加はる力の幾何學的總和は零とならない爲、力學を變更すまいと思へば止むなくエーテルの概念を導いて來なければならぬ。かくて始めて實驗的の反作用の定律が成立する。

もし光や電氣の現象が地球運動の影響を受けてゐる事が分つたと假定すれば、此の現象は物體の相對運動と共に絕對運動とでも言ふべきものを表はす事になる。絕對運動が單に空想的なものでなく、絕對的の具體物に對する運動と解されるなら、是非エーテルが入用となるう。

人類は果してかゝる絕對運動を認めるの期を迎へ得るであらうか。不幸にして自分はかゝる期待を持ち得ないが、反作用の定律は物質のみに適用出來ない事を思へば、此を期待する事も背理ではあるまい。

宜なる哉、吾々の同僚は光に對する地球運動の影響を百方搜索したのであつた。されど其の結果は何時も反對の結論を生んだのである。勿論此等の實驗は、豫め結果として出るものが豫想出來ないから行つたのであり、（第九章參照）加ふるに現代の理論では、釣合ひを保つて零となつてゐるのは只近似的のものとされてゐるのであるから、精密に實驗すれば地球運動の影響も出るかも分からないが、吾輩には此は何だか妄想のやうに思へる。尤もかゝる事が發見されて新世界が樹立出來れが面白いものではある。

少しく詳細に涉つた說明をするが、ローレンツの理論を得ながら、自分がエーテルと物體との相互運動即ち絕對運動を將來見出し得まいと斷定するにも大いに理由がある。實驗によつては一次項に地球運動の影響のない事が分つた。世人は此をいぶかしがつたがローレンツの理論は此に說明を與へた。然し第二次項には影響あるに違ひないと思へたが、正確な實驗は其をも否定した。

譯者註。 フイゾーは硝子板を斜に通る偏光の、偏りの面の囘轉が地球によつて受ける影響を實驗し、マスカルトやレイレイ等も此に類似した實驗を行つた。此等の實驗の結果は光學的現象に地球囘轉の影響が少しもないと言ふ事を確かめた。ローレンツの理論ではエーテルは絕對靜止をしてゐるのだから、これらの實驗はローレンツの理論と一致しないやうであるが、實は光の速度には大差がある爲に、ローレンツの理論を以てしても其の影響は出ないのである。然し影

響がないと云ふのは一次の桁に表はれて來ないのであつて、更に精密な實驗をして、二次の桁を檢討したら影響は出るに違ひないと思へたが、モーレー・マイケルソンの實驗は其をも否定してしまつた。其處でローレンツは其の理論に變更を加へ所謂ローレンツ收縮を稱へたが、其は舊來の力學的觀念には著しい反逆であつた。

其處で此の場合にも何か說明を要するが、此の說明は二次の項は勿論一次項や高次の項のものにも共通でなければならぬ。此の理由で吾輩は此を妄想と言つたのである。

物理學の現狀。　物理學發達史に於て二樣の反對な傾向がある。一つは混沌たる分離狀態の中に統一を見出し、各瞬間毎に新しい連絡を造り一體系の科學を構成する事である。今一つは日々新現象を發見するにつれて、此を如何なる位置に配分すべきかを考へる事である。或は舊來の科學の殿堂の中には新參者を容れ得ないで、殿堂の一部が破壞されなければならぬ場合もある。又從來簡單を裝つたものに案外複雜な事象が包まれてゐて、此等の爲に從來の簡單が複雜化して行くやうに見える事もある。

即ち前者に於ては簡單化し後者に於ては複雜化するが、果して何れが最後の勝利を得るものであらう。日々に積まれて行く新しい現象は、溢れ出でゝは吾が科學を事實の雜然たる記錄となすものかも分らない。

此が果して如何になるかは只分らぬと言ふ外はないが、強ひて說明を求めれば、過去と現在とを比較して、將來に對して二三の推論を下すだけである。

半世紀前、エネルギーの不滅及び其の變形を發見する事によつて、力は總て同一體である事が分つた。當時人々は運動の本性を知らなかつたが、それでもやがては其をも知り得るものであると思つてゐた。宜なる哉、其の確信は光の場合には見事成功した。さりながら電氣の方面はさう容易ではなかつた。勿論磁氣の觀念を導入する事によつて、概括に對する進步は一段と見るべきものがあつたが、如何にして此を光と一體にすべきかは、容易に解くべくもなかつたのである。物體の分子的性質の方面は概括が容易であつたが、其でも細目に到つては分らなかつた。要言すれば概括して一體にしようといふ望みこそは大きかつたが、その望みたるや雲を掴むやうな漠然たるものであつたのである。

此は現今に到つて餘程進步した。

光、電氣、磁氣の關係は今はよく知られ、以前は分立してゐたものが、今は一體となつた。此の一體は將來もはや破れる事はあるまい。

さりながら、此の一體に進んだ爲に以前のやうに光なら光だけを特殊のものとして研究する事が出來ず、此を一般的なものとして說明し、說明は電氣學全般にも適用せられなければならないから、進行が甚だ困難である。

ローレンツの理論は余輩を最も滿足させるものであり、電流をば、小荷電體の運動によつて說明する。既知の事實は此によつて最もよく理解され、眞の關係は此によつて分明となるが、此の理論にも亦大きな缺陷がある。前述のやうに彼によれば、反作用定律は物質だけでは說明出來ないから、此を成立させるにはエーテルの物質に及ぼす作用と、物體のエーテルに及ぼす反作用とを考へなければなるまい。

所が現代に分つてゐる所では、かゝる事はないと斷定する方が妥當のやうである。

さりながらローレンツの理論は、フイゾー實驗の結果と、光の分散吸收との關係及び此等とエーテルとの關係を切斷される憂のないまでに明かにし、且つ連結した。ゼーマン效果も容易に此で說明され、マクスウエルに反するファラデー磁氣回轉にも說明を與へた。此等によつて、ローレンツの論は人工的なモザイクでない事が分る。將來此は改正されるとも、破壞される必要はあるまい。

けれどもローレンツの企圖は唯、光學と電力學とを同體系中に包括させるに止り、此に力學的の說明を附けようとはしなかつた。ラーモアはローレンツの理論の骨子を生かせて此にマツカラーの考を加味し、エーテルの速度は磁力と同方向及び同じ大さを有すとした。此の試みたるや誠に優秀なものではあるが、此では依然としてローレンツ理論の缺點が殘るのみならず、寧ろ增大するのである。ローレンツの理論によつて、吾々はエーテル運動の如何を知らず、其の運動を物質の運動と相殺して、作用反作用の相等を確定し得るものと假定した。然るにラーモアではエーテルの運動が分かり、此によつては最早相殺は起らなくなるのである。ラーモアが失敗したと言ふのは其の力學的說明がつかない爲でない。力學的說明は、一現象がエネルギー及び最小作用の法則に從ひさへすればつく筈である。

然し力學的說明がついたばかりではいけないので、此が簡單であるのも一要件である。其處で選擇が必要となるが、選ぶ時には選擇の必要といふ事以外に何かの理由がなければならない。此の條件を滿足させる理論は人類不幸にして未だ此を得ないが、得ないとて此を歎くのは本末顚倒である。吾人の求めるものは統一ある一體であつて、機構ではない。

かるが故に吾人は科學に對する大望を制限しなければならない。力學的說明も常に一つ

さへ得れば滿足すべきである。エネルギー不滅の原理を見出す事によつて吾々は此に成功し、此の原理は何時でも確證を受けたのである。第二の原理たる最小作用の原理も此と同樣にして生れ、此も亦檢證されたのである。否少くともラグランジュの方程式に從ふものについては檢證されたのである。

非可逆的現象は、容易に他のものと概括され得ないものだが、此も整頓されゝば一體になり得るのであり、カーノーの原理はその最初のものである。最近熱力學は物體の膨脹や狀態變化から脫して、その領域を廣め、今や電池や電熱も此に說明を求め、化學も此に賴り、かくてカーノーの原理は物理の全領域に渡つて行つた。更にエントロピーの概念はエネルギーと同樣に普遍的なものとなつた。

かくて總ての類似性は發見され、電氣抵抗は液體の粘性に似、ヒステリシスは固體の摩擦と同樣なものと想像出來る。總ての場合摩擦は雜多な非可逆的現象の典型となつてゐるやうであり、此の類似には眞理と深い意義とが宿つてゐる。

世人は非可逆的現象について嚴密な力學的說明を要求した。此に答へるには所謂非可逆的現象も、其の小さな部分々々をとつて考へれば可逆的であり力學の法則に從ふ事を假定しなければならなかつた。然し此の小部分と言ふのは極めて微細で外觀した時には此を知る事が出來ない。此の故に此の小部分の集つた大數が非可逆的なやうに見えるのであり、マクスウエルの所謂惡魔によつては恐らく此の大數も可逆的に認められるだらう。

氣動論に結びつけられた此の概念は非常に努力して得られたものであるが、結局此によつて得る所は少なかつた。此は極めて自然の數であつて、吾々は、此が事實に合するや否やは玆に問ふべき問題でない。

尤もグーイのブラウン運動に關して懷いた觀念では、此の運動だけはカーノーの原理から脫し、世界を逆行させるものと認めたのであつた。

とも角、古來の諸現象は次第にうまく類別されたが、新しい現象も亦現はれてその占めるべき位置を求めるのである。此等の大半は矢張り巧みに類別された。

されど又陰極線レンツエン線ウラニアム線ラデウム線等、陸續として發見されたが爲に、吾々は此の新來の客に對して夫々舊來の殿堂の中に安息の地を見出さなければならない。

目下此等が占めるべき位置は見つからないが、此の位置の發見の爲に舊來の殿堂が破壞されるやうな事は恐らくあるまい。事實此の新輻射線は螢光の現象と關係があるやうであ

り、且つ時として自ら此を發する場合もある。又此等は紫外線の作用で發する電氣火花とも關係があるやうである。

尙此等の現象では、電解物の場合と同樣で、而も此の場合より速度の早いイオンがあるやうに思はれる。此は目下は甚だ不明であるがいづれ明かにされるだらう。

譯者註。 ラジウムはαβγの三線を發し此等が夫々陰極線であり陽極線である事はトムソンの研究を待つて十分明かにされた。即ち此等の何れも從來の臆說の中にその位置を見出したのである。即ち「此等の中に速度の速いイオンがある……」と言つた著者の言葉は眞であつた。此より電子の質量や、原子の構造が分かり、物質の電磁氣的解釋が成立したのである。

燐光や電氣火花等に於いての光の作用は一般物理學とは別天地に彷徨し、學者に閑却されてゐたが、近時此の現象間の統一が漸く著目せらるゝに到つた。

斯樣に新現象の位置を見つける一方、從來の現象に意外なものが發見されることがある。自由エーテルの中では、法則は非常に簡單性を持つてゐるが、物體は此に反して複雜化し吾々が簡略に言つてゐる文句が甚だ嚴密性を缺く事になつて來る。

然し此によつて吾々が簡單に表現してゐる物體間の關係には變りは起らない。否大切なのは此の關係である。吾々の方程式が複雜となるのは、複雜な自然に可及的に近づかうとし、此の妥當範圍を擴張して行くからである。此の方程式の簡單な一つから次の物へ移る關係には些かの變動もない。換言すれば方程式は妥當性を永久的に握つてゐるのである。

フレーネルは反射の實驗によつて、確められた結果から面白い理論を構成したが、後になつて此が近似的なものに過ぎない事が分つた。然し此が分つたのは此のフレーネルの近似的定律で分つたのだから、フレーネルの本質は依然として殘つてゐるのである。

此等を反省する際思ひ起すことは、一時に複雜が投げつけられたなら、吾人は只暗に迷ふばかりであらうといふ一事である。即ちチコーがもつと完全な機械を使用してゐたら、恐らくケツプラー、ニユートンの星學は生れなかつたゞらう。實驗が精密になる爲に科學の成立が後らされ、概括に手間どるのは科學の不幸である。

物性を深く知れば知る程、連續が其處に支配權を握つてゐるのが益々明かに見られる。アンドリユウス・フアンデルヴアールの研究から、液體から氣體への變化が斷續的でなく、其處に或る連續がある所以が分かつた。液體と固體との間も同樣であつて、液體の剛性の

研究中にも固體の流動といふ記事が見られるに到つた。
　勿論此の場合は簡單性がなくなり、直線で表現出來ない現象になるが、兎も角此で連續が構成されたのであるから、吾々の精神は此で滿足し得るのである。
　物理の天地が開拓されるにつれて、次第に此が化學の領域に侵入して來た。物理化學が此であり、まだ幼稚ではあるが電解、イオン等の領域が此によつて次第に開かれて行く。
　以上の所論よりして物理學は兎も角、自然を一體となす上には可なりの成功をした事が分つたのである。勿論吾々の希望したやうに速かではなかつたのであるが。

第十一章　確からしさの理論

斯樣な場所で確からしさの理論を持ち出すのは少々變であるが、自分が今迄研究した所を見ると、どうしても此の邊りで、此の理論に說明を下しておかないと具合が惡いやうである。
　嘗て第九章で吾輩は「先驗される事實の中第一のものが確實で、他は皆可能性があるばかりである。勿論確實と言つても絕對的なものではないが、實際場裡では此で滿足し得る場合が多い。」「……簡單性は概括の上に如何なる役目を演じてゐるかを檢べなければならぬ。定律は特殊な場合に檢討された。そして度々此等の現象が起り、而も定律が妥當であるのを見て、最早此の妥當性が偶然であるとしない事になる」と說いた。
　此の點に於て物理學者は、遊戲する者がその勝負を推測するのと同じ立場にあるのであり、歸納法による推理每に、多かれ少なかれ確率を使つてゐるのである。
　此の理由で玆に確率論を述べる次第である。

確率論と言ふ言葉は少し妙である。此の取扱ふものは確實の反對卽ち吾々の知らない事の確實性であるが、知らない事は分らない筈である。然るに計算出來ない筈の未知が、實際には多くの大家によつて取扱はれ、科學が此によつて稗益されてゐるのは何故であらう。

確からしさと言ふ言葉には一體定義が下され得るだらうか。下されないとしたら如何に推理したら好いのであらう。世人は通例「一事件生起の確からしさは、此の事件の生起に好都合な場合の數の生起總數の比に等しい」と言ふが、此では甚だ不十分である。

例へば今二つの骰子を投げて、少くとも其の中一つが六である確率を考へて見るのに、先づ幾通りの場合が起り得るかといふ方面から考へると、此の確率は $\frac{11}{36}$ となる。然るに第二の場合として、甲乙といふ骰子の種別を考へないで二つの者の組合せを考へる時は、生起全數は二十一回となり、確率は $\frac{6}{21}$ となる。此の二つの内何れが正しいかは吾々の知る能はざる所である。

×次ノ定義ニヨレバ

其處で定義に次の訂正をしよう。「…可能總數…最も可能な場合の一つ一つが等しい可能性を持つてゐる事を要す」と。此正しい確率を以て確率を定義するものである。

二つの可能の場合の生起が、等しい可能性を持つてゐるといふ事をどう解して好いだらう。問題の初めに先づ規約を設けて置けば、何も困難は起らず、算術や代數の法則を適用して此を求めさへすれば好い。然し一度此を應用する段になると、此の規約の正當であるか否かを證明しなければならなくなり、一度逃れ得たと思つた困難に再會する事となる。

21

規約こそ常識を以て判斷すれば十分であると云ふ人があるかも知れんが、ベルトランの問題をどう解いて好いだらうかと反問された時は困却するに違ひない。ベルトランの問題とは「一定圓の弦が、其の內接正三角形の一邊より長い場合の確率如何」と云ふのである。ベルトランは此に對して圓周等分の方面より $\frac{1}{3}$ 、直徑等分の方より $\frac{1}{2}$ と算計し、常識が答へる二つの確率の異なる事を示した。

かく觀じ來れば、確率論は無意義極まるやうであり、常識と呼ばれる本能も信賴するに足らぬもの丶如くに思はれる。

されぱとて、此等を否定し去るならば科學は成立する事は出來ない。定律も出來なければ又出來ても應用する事は出來ない。吾人がニユートンの定律を信ずるのは、數多の觀測が此の定律と一致した爲であるが、此が果して將來に對し、妥當性を持つてゐるやについては何等知る所がない。唯答へ得る所は、其の定律が將來妥當性を持たない場合が起る確

率は極めて少ないと言ふより外はない。將又、ニユートンの法則によつて木星の位置は計算し得るが、此も一大遊星の偶然な出現によつて狂ひを生じる事があるかも知れぬ。此の場合も亦、吾等はさういふ機會の生じる可能性は極めて少ないと言ふ外ない。かく論ずれば、確率論は無意識の中に科學構成上重大な役目を演じてゐる事が分かる。今二三其の例をとつて論じて見よう。

挿入法は第一これである。此は一函數の値を若干個知りて、此によつて他の中間數を想定するものである。

觀測の誤差の理論も此である。又氣動論で、複雜な分子の運動も平均されて、大數の上ではゲーリユサツクのやうな簡單なものとなる。此等は皆確率論によつて初めて成立し得るのであつて、挿入法を除いた他のものは確率論と興亡を共にするものであらう。で此の問題だけなら此を捨てゝも好いが、然しほんの一部と思つて此を捨てると、前述のやうに科學全體が疑はしくなつて來る。

かく論じ來れば「吾々は知らないでも、此を悉く知る爲には長年月を要するものから、どうか處決しなければならない。で勿論過度の信用を措いてはならないが、便利な時は法則に從ふ必要があるのである。即ち眞であるや否やは分らないが、眞であるやうに行ふのが最も好い」と言ひ得るのである。從つて確率的、換言すれば科學は唯實際的の價値を有するに過ぎない。

けれども、かく言つたとて困難はまだ消え去る事はない。例へば競技に出る者が自分にその勝敗を尋ねたとする。其の時自分が豫想を答へるのは主觀的確率である。又他に一人の觀測者があつて、長年月に涉つてその競技者の成績を記錄し置き、此によつて答へるなら、其の人の答は確率論による筈で、此自分が客觀的確率と名付けるものである。說明を要するのは後者の方である。

保險會社は多く確率論に立脚してゐるものであるが、其の配當額を明かにするのに事件發生の不明である事と支拂ひの必要とを述べただけでは不十分である。

即ち疑ふ事は必要であるが、絕對的懷疑は宜しくない。自棄をやめて吟味を行つて見よう。

第一、確率の分類。 確率は種々の見地から分類する事が出來るが、その先づ第一は、可能な場合と好都合の場合との比である。此の可能な場合の總數が、有限の場合もある。即

ち骰子の場合は此が三十六であつた。かく總體が有限な場合を第一次と名付けよう。

此に反してベルトランの例のやうに無數に可能の存する場合がある。此を總體の第二次と呼ばう。更に又骰子の例のやうに確率が相異なる二つ以上の函數によつて出る場合がある。有限數の觀測から最も確からしい定律を定めるのが此で、自分は此を總體の第三次と稱へる事としよう。

確率の分類は尙他の方法に從ふ事が出來る。元來確率が出來たのは、不知のものがあり、しかも此の不知が絕對的なものでないからである。で此の不知の深淺に從つて確率を分類する事が出來るのである。

對數表で、任意にとつた對數の小數第五位が9である爲の確率は十分の一だと言ふだらう。吾々は表によらず對數を計算する事が出來るが、そんな事は甚だ煩雜であるから此を厭がる爲に、玆に不知の第一次を構成する。

物理では不知は少しく大きくなる。或瞬間に於ける一體系の狀態は二つの事項卽ち共の初めの狀態と、此の狀態の變化を支配する定律とに從ふ。吾々が此の二つを知る時は、問題は唯數學的のものとなり、從つて不知は第一次に歸する。然し吾々は往々定律は知つてゐても最初の狀態を知らぬ場合がある。例へば小遊星の分布がケツプレル定律に從ふ事は知つてゐるが、その最初の狀態は分らない等が此である。

又氣動論では氣體分子が直線經路を畫き、彈性體の衝突の定律に從ふ事を假定してゐるが、共の初速を知らないから現在の速度について何事も知らないのである。

確率論では此等の速度を組合せ平均運動として見るのであつて、此が不知の第二次なのである。

最後に最初の狀態も定律も共に不明な場合を不知の第三次と呼ばう。此の場合には一現象の確率は分らない。

又定律(不完全なもの)から事件を豫想する代りに、一事件の生起から定律を求める場合があるが、此は原因の確率であつて、科學的應用の點から見れば、此が一番有益な事である。

余輩が今極めて誠實な人とエカルテーの遊戲をするとして見るに、共の王を返す確率は$\frac{1}{8}$である。此は結果の公算である。所が此に反して全く見知らぬ人とエカルテーをして十回の勝負の中六回王が返されたとした時、共の相手が詐欺者であるべき確率を求める

のは原因の確率である。

此は實驗的方法の根本問題である。x の値を n 個測定し、此に對する y の値を觀測した時、二つの比が殆ど一定であると確めた場合、此の事實の原因は何であるか。

此の際 y が x に比例すべき一般定律の存在する事や、觀測上の誤差に甚く多少の誤りがあるのは確からしい事だらうか。此は世人によつていつも無意識の中に解決される問題である。

玆に自分は、主、客觀的確率と稱したものに逐次觀察を押し進めて行かう。

第二、數學に於ける確率。

圓積問題の不可能な事が一八八五年に證明される迄、此の問題の解について數多の論文が提出されたが、佛國學士院は此の不可能であるべきを確信して、かゝる論文には目もくれなかつた。

學士院のかゝる處置は勿論間違ではなかつた。なる程彼等は其の處置に道理があるとは證言し得なかつたゞらうが、提出された解なるものが誤りである事は知つてゐた。何故知つてゐたのであらう。答は明かである。「學者が既に深く研究して求め得なかつた事項を素人が見付け出したとする確率は、此の素人が前轍を踏んで誤つた勘定をしてゐる確率より、遙かに小である」と。然し此の理論は數學的でなく心理學的である。

更に突込んだ說明を求めれば「何故に世人は超函數の一つの特殊な値が代數的の數である事を望むのか。若し π が有理係數を持つ代數方程式の根であるなら、何故に世人は此の根が函數 $\sin 2x$ の週期である事や又此が他根と異なる事を望むか。」とアカデミアンは答へるに違ひない。即ちアカデミアンは、充足理由の原理を漠然たる形で持つて來たのである。

けれどもアカデミアンの歌つた文句は、唯、難解の書を繙いて不可知の內に時間を浪費するよりも、容易なる書に精通せよと言ふ意味に過ぎない。然し此等は自分が嘗て述べた客觀的確率の關しない所であるから、次の第二の問題のみを追及して見よう。

對數表の首にある一萬個の對數をとつて考へて見よう。吾々が今目をつむつて此の第三位の數を抑へたとする。此の時、抑へた數が偶數である確率は $\frac{1}{2}$ であらう。

次に此の對數値に對應して、一萬個の數を書き、對數の第三位が偶數である時此に對應する數を十一で表はし、奇數の場合は -1 で表はすとする。さうすれば蓋然的に此の一萬個の數の平均値は零であるであらう。けれども若し吾々が此を計算して見れば、必ず其は