東北行政委員會教育部規定

高中臨時教材
專科學校適用

立體幾何學

胡敦復
榮方舟 編著

東北書店印行

1949

目　　錄

立體幾何學

第八編　平面與直線

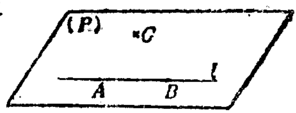
第三十四章　平行線及平行面

§525.　**幾何公理一四**　過空間任意不共線之三點有一平面，只有一平面。

本公理可簡稱謂"空間不共線三點決一平面"。決者，即過此有一無二之意。

§526.　**定理一六八**　(1) 一直線及線外一點，(2) 相交二直線，(3) 平行二直線，決一平面。

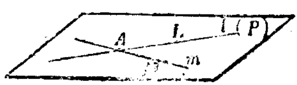
〔假設〕　(1) 直線 l 及線外一點 C.



(1)

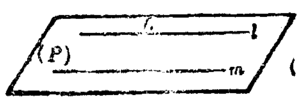
(2)　直線 l,m 交於一點 A

(3)　直線 $l \parallel m$.



(2)

〔終決〕　(1) l 及 C 決一平面. (2) l 及 m 決一平面. (3) l 及 m 決一平面.



(3)

〔證〕　(1) l 上任意取二點 A,B，則 A,B,C 爲

不共線之三點，故決一平面（P）．A,B 既在（P）內，則 l 全在（P）內．$\therefore l$ 及 C 決一平面．

（2）l,m 上各取點 L,M，則 A,L,M 爲不共線之三點，故決一平面（P）．又因 A,L 及 A,M 皆在（P）內，故過 A,L 之 l 及過 A,M 之 m 皆全在（P）內．$\therefore l,m$ 決一平面．

（3）依平行線定義 l,m 必在一平面之內．設此平面爲（P）．在 l 上任取一點 L，則因 L 及 m 決一平面．$\therefore l,m$ 決一平面．　　　　*Q. E. D.*

〔注意〕在平面幾何學中，二直線不相交，即平行；不平行即相交．此因二直線本已指定在一平面內故也．立體幾何學中則不然．空間任意二直線往往既不平行亦不相交．

§527.　**定義九〇　平行平面**　空間兩個不相交之平面曰平行平面（parallel planes）．

〔注意〕但稱平面，常指無限大者而言．如上節圖中之（P），並非眞如圖中所可見之面分，實係代表一無限大之完全平面．因欲使吾人藉以得見，故畫了四周邊界耳．

§528.　**定義九一　直線與平面平行**　空間一直線與一平面不相交者曰此直線與平面互相平行．

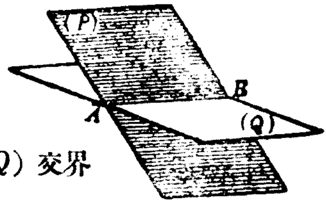
§529.　**幾何公理一五**　一直線與一平面相交，其交界爲一點．

§530.　**幾何公理一六**　二平面相交，其交界不止一點．

§531.　**定理一六九**　兩平面相交其交界爲一直線．

〔假設〕 (P),(Q) 爲相交兩平面.

〔終決〕 (P), (Q) 之交界爲一直線.



〔證〕 設 A,B 爲 (P), (Q) 交界上之二點. 作直線 AB.

因 A,B 二點皆在 (P) 內, 故直線 AB 全在 (P) 內. 同時 A,B 二點皆在 (Q) 內, 故直線 AB 全在 (Q) 內. 故直線 AB 爲 (P), (Q) 所共有.

設 C 爲直線 AB 外任意一點. 則 C 及 AB 決一平面, 即過 C 及 AB 只有一平面. 故 C 決不爲 (P), (Q) 所共有.

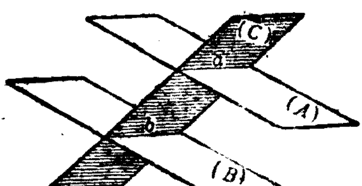
故直線 AB 爲 (P), (Q) 之交界.

即 (P), (Q) 之交界爲一直線. $Q.E.D.$

§532. **定理一七〇　二平行平面與第三平面相交, 則其交界爲二平行線.**

〔假設〕 $(A)\parallel(B)$, (A), (B) 各交 (C) 於 a, b.

〔終決〕 $a\parallel b$.

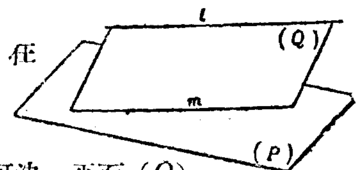


〔證〕 若 a, b 二直線交於一點 P, 則 P 將爲 (A), (B) 兩平面之共有點. 今 $(A)\parallel(B)$, 故 P 點不能存在. $\therefore a, b$ 不相交. 又 a, b 在同一平面 (C) 內. $\therefore a\parallel b$. $Q.E.D.$

〔注意〕 欲證二直線平行，不可但證其不相交，於不相交外，尙須證其在同一平面內．因若不在同一平面內，不相交並非平行也．

§533. 系 介乎兩平行平面間之二平行線分相等．

§534. **定理一七一** 二平行線之一在一平面內，則其二必與此平面平行．

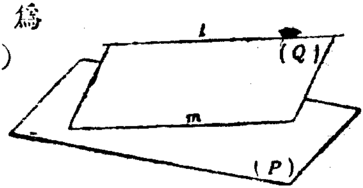


〔假設〕 直線 $l \parallel m, m$ 在 (P) 內．

〔終決〕 $l \parallel (P)$.

〔證〕 $\because l \parallel m, \therefore l, m$ 可決一平面 (Q). 若云 l 與 (P) 不平行而相交於一點 A, 則 A 爲 (P), (Q) 所共有，故必在其交界 m 上．即 l, m 交於 A. 與假設矛盾．故 l 與 (P) 無交點． $\therefore l \parallel (P)$. *Q.E.D.*

§535. **定理一七二** 一直線與一平面平行，則過此直線之任一其他平面與此平面之交線必與此直線平行．



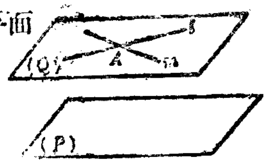
〔假設〕 $l \parallel (P)$, (Q) 爲過 l 之任意平面，(P), (Q) 交於 m.

〔終決〕 $l \parallel m$.

〔證〕 l, m 在同一平面 (Q) 內．設 l, m 交於 A, 則 A 在 m 內，即在 (P) 內，即 l 與 (P) 相交，與假設矛盾．故 $l \parallel m$.

Q.E.D.

§536. **定理一七三** 相交二直線各與一平面平行，則此二線所決之平面必與此平面平行．



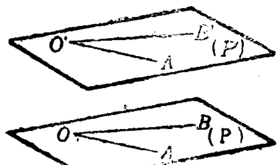
〔假設〕 l, m 交於 A，決一平面 (Q). $l \parallel (P)$, $m \parallel (P)$.

〔終決〕 $(Q) \parallel (P)$.

〔證〕 設若 (Q) 與 (P) 交於一直線 x. 則因 $l \parallel (P)$, $\therefore l \parallel x$. 又因 $m \parallel (P)$, $\therefore m \parallel x$. 然 l, m, x 皆在 (Q) 內，$\therefore l \parallel m$ 與假設矛盾.

$\therefore (Q) \parallel (P)$.

Q.E.D.



§537. **定理一七四** 兩個角之兩雙邊各平行，則此兩角所決之平面平行.

〔假設〕 空間二角 $\angle AOB, \angle A'O'B'$ 各決平面 (P), (p'). $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$.

〔終決〕 $(P) \parallel (P')$.

〔證〕 $\because OA \parallel O'A'$, $\therefore OA \parallel (P')$.

$\because OB \parallel O'B'$, $\therefore OB \parallel (P')$.

$\therefore (P) \parallel (P')$. Q.E.D.

§538. **公法三** 過不共線之三點作一平面.

〔註〕在平面幾何學中，公法一用直尺，公法二用圓規，爲一切作圖題之根據。立體幾何學中之作圖題，不若平面幾何學之有所依據。故公法三不用任何器具，僅理想中認爲可作而已。

§539. **系一** 過一直線及線外一點作一平面.

§540. **系二** 過相交二直線作一平面.

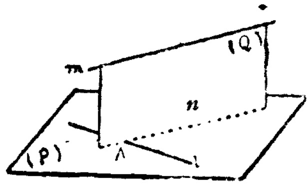
§541. **系三** 過平行二直線作一平面.

§542. **作圖題二四** 過一所設直線作一平面令與其

他一所設直線平行.

已設　空間任意二直線 l, m.

求作　一平面, 過 l, 平行於 m.



〔解法〕　過 m 及 l 上任意點 A 作平面 (Q).　〔公法三系一〕

在 (Q) 內過 A 作 $n \parallel m$.　〔作圖題四〕

過 l, n 作平面 (P).　〔公法三系二〕

則 (P) 即所求之平面.　$Q.E.F.$

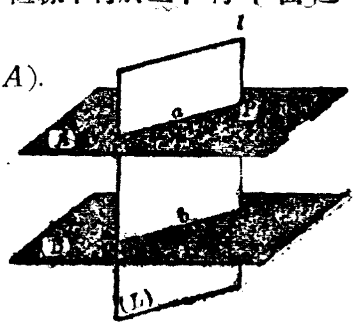
〔證〕　$\because n \parallel m$, $\therefore (P) \parallel m$. 又 (P) 過 l.

$\therefore (P)$ 為所求之平面.　$Q.E.D.$

〔討論〕　若 l, m 平行　則有無數解答. 若 l,m 相交則無解答. l, m 不平行, 不相交, 則有一個解答

§543.　系　過一所設點作一平面, 令與所設二直線各平行.

§544.　**定理一七五**　一直線平行於二平行平面之一, 則必平行於其二.



〔假設〕　$(A) \parallel (B), l \parallel (A)$.

〔終決〕　$l \parallel (B)$.

〔證〕　在 (A) 內任意取一點 P, P 與 l 決一平面 (L). $(L), (A)$ 之交界為 a

若 $(L), (B)$ 不相交, 則 l 與 (B) 不相交, 即 $l \parallel (B)$.

若 $(L), (B)$ 相交, 其交界為 b, 則 $\because (A) \parallel (B)$, $\therefore a \parallel$

b. 但 $l \parallel (A)$, $\therefore l \parallel a$. 又因 l, a, b 在同一平面 (L) 內. $\therefore l \parallel b$. $\therefore l \parallel (B)$. Q. E. D.

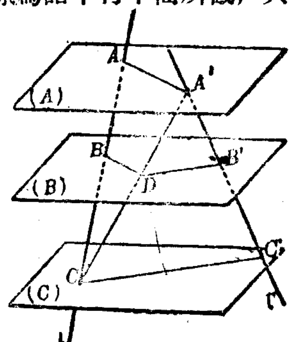
§545. **系一**　一直線與二平行平面之一相交，則必與其二亦相交.

§546. **系二**　一平面平行於其他二平行平面之一，則必平行於其二.

§547. **系三**　一平面與其他二平行平面之一相交，則必與其二亦相交.

§548. **系四**　過平面外一點之平行面，有一無二.

§549. **定理一七六**　二直線爲諸平行平面所截，其間對應線分成比例.



〔假設〕 $(A) \parallel (B) \parallel (C)$, l 交 $(A),(B),(C)$ 於 A, B, C, l' 交 $(A),(B),(C)$ 於 A', B', C'

〔終決〕 $AB : A'B' = BC : B'C'$.

〔證〕 A' 與 l 所決之平面交 (B) 於 BD, 則 $BD \parallel AA'$,

$$\therefore AB : BC = A'D : DC.$$

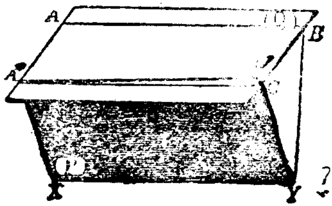
C 與 l' 所決之平面交 (B) 於 DB', 則 $DB' \parallel CC'$, $\therefore A'D : DC = A'B' : B'D'$. $\therefore AB : BC = A'B' : B'C'$.

$$\therefore AB : A'B' = BC : B'C'. \quad Q.E.D.$$

§550. **定理一七七**　二直線各平行於第三直線，則此二直線必互相平行

〔假設〕 $AB \parallel XY$, $A'B' \parallel XY$

〔終決〕　$AB \parallel A'B'$.



〔證〕　$\because AB \parallel XY$,

$\therefore AB, XY$ 可決一平面(P).

又 A 與 $A'B'$ 決一平面(Q).

設(P),(Q) 之交界爲AC.

則因 $XY \parallel A'B'$, $\therefore XY \parallel (Q)$ $\therefore XY \parallel AC$.

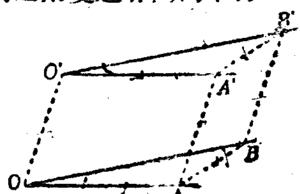
但 $XY \parallel AB$,而 AB, AC, XY 皆在同一平面（P）內,

故 AB 合於 AC. 又因 $A'B' \parallel XY$, $\therefore A'B' \parallel (P)$.

$\therefore A'B' \parallel AC$,即 $A'B' \parallel AB$.　　　　Q. E. D.

（注意）　本定理與幾何公理 10 a 不同. 因此處之三直線不在同一平面之內也.

§551.　**定理一七八**　兩個角之兩雙邊各同向平行,則此二角相等.



〔假設〕　$\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 之兩雙邊 $OA, O'A'$ 及 $OB, O'B'$ 各同向平行.

〔終決〕　$\angle AOB = \angle A'O'B'$.

〔證〕　在$OA, O'A'$ 上各取 A, A' 令 $OA = O'A'$.

在$OB, O'B'$ 上各取 B, B' 令 $OB = O'B'$.

聯 $OO', AA', BB', AB, A'B'$.

$\because OA \parallel O'A'$, $\therefore OA, O'A'$ 共面, 又 $OA = O'A'$, $\therefore OAA'O'$ 爲▱

$\therefore AA' \perp\!\!\!\!\!= OO'$. 同理 $BB' \perp\!\!\!\!\!= OO'$. $\therefore AA' \perp\!\!\!\!\!= BB'$.

$\therefore AA', BB'$ 共面, 而 $AA'B'B$ 爲▱　$\therefore AB = A'B'$.

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$. $\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$.　　Q. E. D.

習題二十七

1. $(P)\parallel(Q)$, A 為 (P), (Q) 外任意一點. 過 A 之二直線各交 (P) 於 P_1, P_2; 各交 (Q) 於 Q_1, Q_2. 則 $AP_1 : P_1Q_1 = AP_2 : P_2Q_2$.

2. 一平面若平行於二平行線之一, 則必平行於其二.

3. 空間四邊形 $ABCD$, 其各邊中點順次為 E, F, G, H. 則 $EF \parallel GH$, $EH \parallel FG$.

4. 兩個角之兩雙邊各反向平行, 則此兩角相等（所設二角不在同一平面內）.

5. 過所設二點求作一平面, 令與所設直線平行.

第三十五章　垂線及垂面

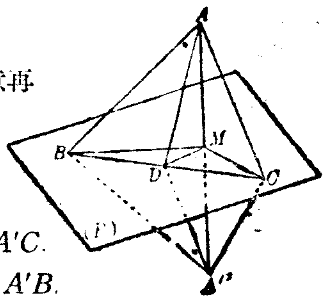
§552.　**定義九二　直線與平面垂直**　過一直線與一平面之交點在此平面內所作任何線若與此直線垂直，則曰**此直線與此平面互相垂直．此直線爲此平面之垂線．此平面爲此直線之垂面．其交點曰垂足．**

§553.　**定理一七九**　一直線與一平面中兩個直線垂直，則此直線與此平面垂直．

〔假設〕　$AM \perp MB, AM \perp MC, MB, MC$ 皆在（$\boldsymbol{P}$）內．

〔終決〕　$AM \perp (P)$．

〔證〕　過 M 在（P）內任意再作一直線 MD. 再在（P）內作一直線截 MB, MD, MC 於 B, D, C. 延長 AM 至 A' 令 $AM = MA'$. 聯 $AB, AD, AC, A'B, A'D, A'C$.



則 $\triangle AMB \cong \triangle A'MB$, ∴ $AB = A'B$.

$\triangle AMC \cong \triangle A'MC$, ∴ $AC = A'C$.

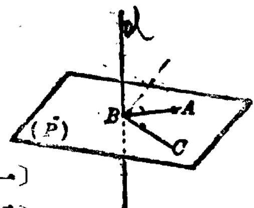
又 BC 爲 $\triangle ABC, \triangle A'BC$ 之公共邊，∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$. ∴ $\angle ABC = \angle A'BC$. 又 BD 爲 $\triangle ABD, \triangle A'BD$ 之公共邊，∴ $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$, ∴ $AD = A'D$. 又 MD 爲 $\triangle AMD$, $\triangle A'MD$ 之公共邊，∴ $\triangle AMD \cong \triangle A'MD$. ∴ $\angle AMD = \angle AMD = R\angle$. ∴ $AM \perp MD$. 故 AM 垂直於（P）內過 M 之任意線．

$\therefore AM \perp (P)$. $Q.E.D.$

§ 554. 系一 從一直線上一點所作此直線之諸垂線皆在此直線之垂面內.

§ 555. 系二 過一點所作一直線之垂面,有一無二.

§ 556. 作圖題二五 過所設直線外一所設點, 求作此直線之垂面.



已設 直線 l, 線外一點 A.

求作 一平面過 A 且垂直於 l.

〔解法〕 過 A 及 l 作平面 (A). 〔公法三系一〕

在(A)內從 A 作$AB \perp l$. 〔作圖題三〕

過 (A) 外任意點及 l 作平面 (C). 〔公法三系一〕

在 (C) 內從 B 作 $BC \perp l$. 〔作圖題二系〕

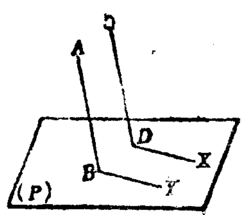
過 BA 及 BC 作平面 (P). 〔公法三系二〕

則 (P) 即所求之平面. $Q.E.F.$

〔證〕 $l \perp BA, l \perp BC, \therefore l \perp (P)$. 又 (P) 過 A 點, $\therefore$ (P) 爲所求之平面. $Q.E.D.$

§ 557. 系 過所設直線上一點,求作此直線之垂面.

§ 558. 定理一八〇 一平面垂直於二平行線之一, 則必垂直於其二.



〔假設〕 $AB \parallel CD$, $(P) \perp AB$.

〔終決〕 $(P) \perp CD$.

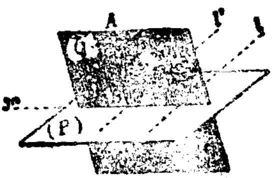
〔證〕 過 CD 與 (P) 之交點 D, 在 (P)內作任意直線 DX. 過 AB 與 (P) 之交點 B, 在 (P) 內作

$BY \parallel DX$ 則$\angle CDX = \angle ABY$. （定理一七八）

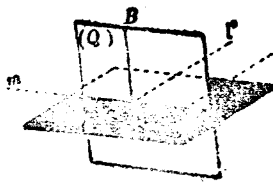
$\because (P) \perp AB$, $\therefore \angle ABY = R\angle$, $\therefore \angle CDX = R\angle$, $\therefore CD$垂直於（P）內過 D 之任意直線 DX. $\therefore (P) \perp CD$.

Q. E. D.

§ 559. **作圖題二六** 過一所設點，求作一所設平面之垂線.



(a)



(b)

已設 一平面（P）及一點 A.

求作 過 A 垂直於（P）之直線.

〔解法〕 在（P）內作任意直線 l.
過 A 作 l 之垂面（Q），與（P）交於m.
在（Q）內，從A做$AB \perp m$.

則 AB 即所求之直線. Q. E. F.

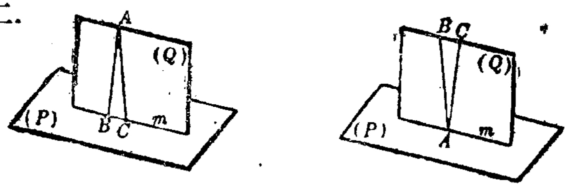
〔證〕 在（P）內；過 AB 之垂足（B 或 A）作 $l' \parallel l$.
則 $\because l \perp (Q)$, $\therefore l' \perp (Q)$, $\therefore l' \perp AB$, 又$m \perp AB$.
$\therefore (P)$ 內有二直線同垂直於 AB. $\therefore AB \perp (P)$.

$\therefore$ AB 爲所求之直線. Q. E. D.

〔注意〕 圖（a）示 A 在（P）外. 圖（b）示A在（P）內. 解法相同.

〔討論〕 本題解答，有一無二. 下節證之.

§560. **定理一八一** 過一點所作一平面之垂線，有一無二.



(a) (b)

〔假設〕 平面 (P) 及任意一點 A〔圖(a)示 A 在(P)外，圖 (b) 示 A 在 (P) 內〕.

〔終決〕 過 A，有一直線，僅有一直線垂直於 (P).

〔證〕 依上節解法可得一直線 $AB\perp(P)$. 設過 A 尚有其他一直線 $AC\perp(P)$，則 AB, AC 決一平面 (Q)，與 (P) 交於 m. $\because AB\perp(P)$，$\therefore AB\perp m$. $\because AB, AC, m$ 在同一平面(Q)內，$\therefore AC$ 不$\perp m$. $\therefore AC$不垂直於 (P).

Q. E. D.

§561. **系一** 垂直於同一平面之二直線互相平行.

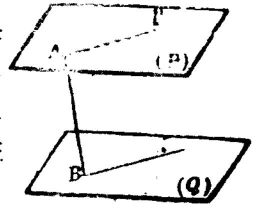
§562. **系二** 從平面外一點至平面所作諸線分中垂線為最小.

§563. **定義九三** **點與平面之距離** 從一點至一平面所作垂線之長曰此點與此平面之距離.

§564. **定理一八二** 一直線垂直於二平行平面之一，則必垂直於其二.

〔假設〕 $(P)\parallel(Q)$, $AB\perp(P)$.

〔終決〕 $AB\perp(Q)$.



〔證〕 在（Q）內，過 B 作任意直線 l. A 及 l 所決平面交（P）於 l'. 則因 $(P)\parallel(Q)$，$\therefore l'\parallel l$. $\because AB\perp(P)$，$\therefore AB\perp l'$. 但 AB, l, l' 皆在同一平面內，$\therefore AB\perp l$.

即 AB 垂直於（Q）內過 B 點之任意直線.

$\therefore AB\perp(Q)$. $Q.E.D.$

§565. **系一** 介乎二平行平面間之線分，垂線為最小.

§566. **系二** 介乎二平行平面間之各垂線皆相等.

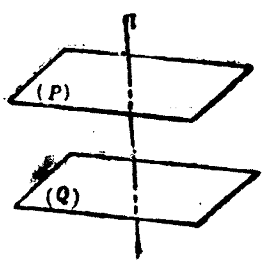
§567. **定義九四 公垂線** 介乎二平行平面間之垂線曰此二平面之公垂線.

§568. **定義九五 二平行平面之距離** 二平行平面之公垂線曰此二平面之距離.

§569. **定理一八三** 垂直於同一直線之二平面互相平行.

〔假設〕 $(P)\perp l, (Q)\perp l$.

〔終決〕 $(P)\parallel(Q)$.



〔證〕 設（P）與（Q）不平行，則將交於某點. 但過一點作一直線之垂面有一無二，故與假設矛盾. $\therefore (P)\parallel(Q)$. $Q.E.D.$

習題二十八

1. $(P),(Q)$ 為相交兩平面. $l\perp(P)$. 則 l 不垂直於

(Q).

2. $(P)\perp(Q)$ 若l不與(P)垂直，則亦不與(Q)垂直.

3. $ABCD$ 爲空間不共面之四邊形. E,F,G,H 爲其順次各邊之中點. 求證 EG,FH 互相等分.

4. 求作一直線令過一所設點且平行於相交二平面.

5. 與空間二定點等距之點之軌跡爲一平面.

6. 與一平面距離等於定長之點之軌跡爲何？

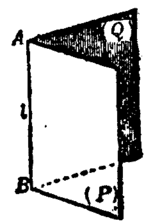
7. $AB\perp(P)$,B 爲垂足. C,D 爲 (P) 內二點. 若 C,D與B等距，則與A亦等距. 若$BC>BD$,則$AC>AD$.

8. $AB\perp(P)$,B爲垂足. CD爲 (P) 內一直線. 若 $BM\perp CD$,M 爲垂足，則$AM\perp CD$.

第三十六章　角

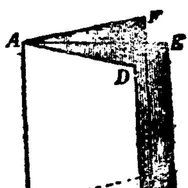
§570. **定義九六　半射面**　一平面爲一直線分爲兩份，其每份曰半射面(half plane). 此直線曰軸(axis).

§571. **定義九七　兩面角**　共一軸之兩個半射面分空間爲兩部分，其每一部分曰兩面角(dihedral angle).此所共之軸曰兩面角之稜(edge). 此兩個半射面曰兩面角之面(faces).



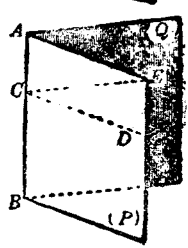
兩面角亦有優角，劣角之分，如平面幾何學之角相類. 但普通所稱兩面角均指劣角而說.

如圖(P), (Q)爲兩個半射面. l 爲其公共軸. 則此圖形即一個兩面角. 記之爲dih$\angle l$, 或 dih$\angle AB$. 有時數角共稜時如下圖，則當分別記之爲



dih$\angle D$-AB-E, dih$\angle E$-AB-F, dih$\angle D$-AB-F.

§572. **定義九八　平面角**　從兩面角之稜上任意點在兩面內各作垂線. 此兩垂線所夾之角爲此兩面角之平面角.

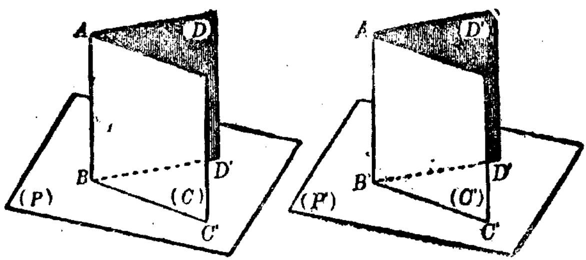


(the plane angle of a dihedral angle).

如圖 C, 爲dih$\angle AB$稜AB上一點. (P)內$CD\perp AB$, (Q)內$CE\perp AB$, 則

$\angle DCE$ 爲 dih$\angle AB$ 之平面角．若在 AB 上取其他一點 C'，同樣作$C'D'$，$C'E'$，則$\angle D'C'E'=\angle DCE$ 故並無分別．

§573.　**定理一八四　兩個兩面角之平面角相等，則此兩個兩面角相等．**



〔假設〕　$\angle CBD$，$\angle C'B'D'$ 各爲dih$\angle AB$，dih$\angle A'B'$ 之平面角．$\angle CBD=\angle C'B'D'$.

〔終決〕　dih$\angle AB$=dih$\angle A'B'$.

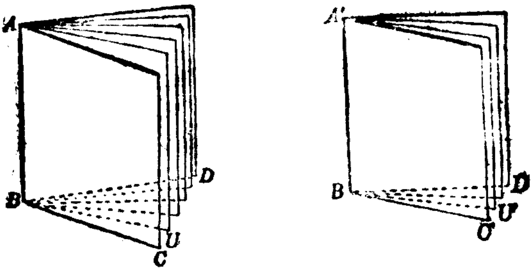
〔證〕　設 BC，BD 所決之面爲 (P)，$B'C'$，$B'D'$ 所決之面爲 (P')．$\because \angle CBD$ 爲 dih$\angle AB$ 之平面角，$\therefore AB\perp BC$，$AB\perp BD$．$\therefore AB\perp(P)$．同理 $A'B'\perp(P')$．移置 dih$\angle AB$ 於 dih$\angle A'B'$ 上令 $\angle CBD$ 合於 $\angle C'B'D'$，則 (P) 合於 (P')．$\therefore BA$ 合於 $B'A'$．$\therefore(C)$ 合於 (C')，(D) 合於 (D')　$\therefore$ dih$\angle AB$ 合於 dih$\angle A'B'$.

$\therefore$ dih$\angle AB$=dih$\angle A'B'$　　Q. E. D.

§574.　**定理一八五　兩個兩面角之比等於其平面角之比．**

〔假設〕　$\angle CBD$，$\angle C'B'D'$ 各爲 dih$\angle C\ AB\ D$，dih$\angle C'\ A'B'\ D'$ 之平面角．

〔終決〕 $\text{dih}\angle C\text{-}AB\text{-}D : \text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}D'$
$= \angle CBD : \angle C'B'D'$.



〔證〕(1) 若 $\angle CBD, \angle C'B'D'$ 爲可通約量，而其公約量爲 $\angle CBU$. $\angle CBD = m\angle CBU$, $\angle C'B'D' = n\angle CBU$. 則 $\angle CBD : \angle C'B'D' = m : n$ 將 $\angle CBD$ 分爲 m 等分，$\angle C'B'D'$ 分爲 n 等分. 各等分角線與棱決各面，則 $\text{dih}\angle C\text{-}AB\text{-}D$ 分成 m 個兩面角，$\text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}D'$ 分成 n 個兩面角. 其平面角皆等於 $\angle CBU$. $\therefore$ 此諸兩面角皆相等. $\therefore$ $\text{dih}\angle C\text{-}AB\text{-}D : \text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}D = m : n$.

$\therefore$ $\text{dih}\angle C\text{-}AB\text{-}D : \text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}D' = \angle CBD : \angle C'B'D'$.

(2) 若 $\angle CBD, \angle C'B'D'$ 爲不可通約量. 則可將 $\angle C'B'D'$ 分成 n 等分（令 n 爲極大之數），每份爲 $\angle C'B'U'$（$\angle C'B'U'$ 爲極小）. 以 $\angle C'B'U'$ 爲單位量 $\angle CBD$ 得 $m\angle C'B'U' < \angle CBD < (m+1)\angle C'B'U'$ $\therefore m : n < \angle CBD : C'B'D' < (m+1) : n$ 各等分線與棱決各面，則 $\text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}D' = n.\text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}U'$, $m\text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}U' < \text{dih}\angle C\text{-}AB\text{-}D < (m+1)\text{dih}\angle C'\text{-}A'B'\text{-}U'$. $\therefore m : n < \text{dih}\angle C$

$-AB-D : \text{dih}\angle C'-A'B'-D' < (m+1) : n$

$\therefore \text{dih}\angle C-AB-D : \text{dih}\angle C'-A'B'-D' = \angle CBD : \angle C'B'D'$.　　Q. E. D.

§575.　**系**　兩面角之大小，以其平面角度之.

§576.　**兩面角之名稱**　兩面角之種種名稱，即以其平面角之名稱稱之．例如兩面角之平面角爲直角者，則此兩面角曰直兩面角，大於直角者曰鈍兩面角，小於直角者曰銳兩面角．兩個兩面角之平面角互爲補角，互爲餘角，互爲鄰角或互爲對頂角，則此兩個兩面角亦曰互爲補角，互爲餘角，互爲鄰角或互爲對頂角.

§577.　**關於兩面角之簡單定理**　平面角之定理，同樣適合於兩面角者如下：

（1）　對頂角相等.

（2）　凡直兩面角皆相等.

（3）　相等兩面角之補角相等.

（4）　相等兩面角之餘角相等.

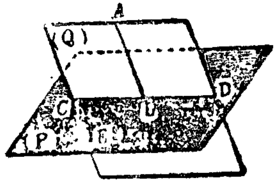
（5）　兩面角之等分面有一無二.

（6）　兩平面相交成四個兩面角，若一個爲直角，則其他三個皆爲直角.

〔註〕 兩面角之度數在實際上與平面角取同樣單位．即以一直兩面角分爲 90 份，每份曰一度 (degree). $\frac{1}{60}$ 度曰分. $\frac{1}{60}$ 分曰秒.

§578.　**定義九九**　**垂直平面**　兩平面相交所成兩面角爲直角時曰此平面互相垂直.

§579.　**定理一八六**　一直線與一平面垂直，則過此直線之平面亦與此平面垂直.



〔假設〕 $AB \perp (P)$, AB在(Q)內.

〔終決〕 $(Q) \perp (P)$.

〔證〕 設(Q), (P)之交界爲CD. 在(P)內作$BE \perp CD$, 則因$AB \perp (P)$, $\therefore AB \perp BE$. 又因BA, BE皆爲CD之垂線. $\therefore \angle ABE$爲 dih$\angle A$-CD-E之面角

$\therefore$ dih$\angle A$-CD-E 爲直角.

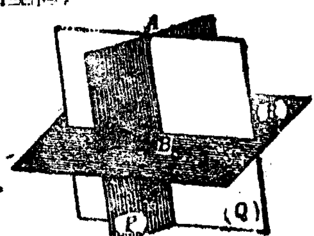
$\therefore (Q) \perp (P)$. Q. E. D.

§580. 系一 兩平面互相垂直，則在一面內所作交界之垂線必與他面垂直.

§581. 系二 兩平面互相垂直，則從交界上一點所作一面之垂線必在他面之內.

§582. 系三 兩平面互相垂直，則從一面內任意點所作他面之垂線必在此面之內.

§583. 定理一八七 相交兩平面各與第三平面垂直，則此兩平面之交線與第三面垂直.



〔假設〕 $(P) \perp (R)$, $(Q) \perp (R)$, (P), (Q)交於AB.

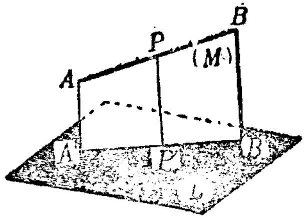
〔終決〕 $AB \perp (R)$.

〔證〕 從AB與(R)之交點B作$BA' \perp (R)$. 則因$(P) \perp (R)$, $\therefore BA'$在(P)內, 又$(Q) \perp (R)$, $\therefore BA'$在(Q)內. $\therefore BA'$爲(P), (Q)之交線而合於BA.

$\therefore AB \perp (R)$. Q. E. D.

§ 584. **定義一〇〇 正射影** 從一點至一平面上作垂線，此垂足曰此點在此平面上之正射影．一圖形中一切點在平面上之正射影所成之圖形曰此圖形在此平面上之正射影．

§ 585. **作圖題二七** 過一所設直線求作一平面令垂直於一所設平面．



已設 直線 AB,平面(L).

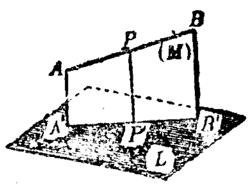
求作 一平面過 AB，且垂直於 (L).

〔解法〕 從 AB 上任意一點P作$PP' \perp (L)$. 過AB, PP' 作平面 (M). 則 (M) 即所求之平面. Q. E. F.

〔證〕 (M) 過 (L) 之垂線 PP'，$\therefore (M) \perp (L)$. 又 (M) 過 AB. $\therefore (M)$ 即所求之平面. Q. E. D.

〔討論〕 若 $AB \perp (L)$,則過 AB 之平面皆與 (L) 垂直，故有無數解答．若 AB 不$\perp (L)$,則其解答有一無二，下節證之．

§ 586. **定理一八八** 過不垂直於一平面之直線所作此平面之垂面有一無二．



〔假設〕 AB 不垂直於 (L).

〔終決〕 過 AB 有一平面，僅有一平面垂直於 (L).

〔證〕 依上節作法可得一平面 $(M) \perp (L)$. 設過 AB 而可作一平面 $(M') \perp (L)$,則因

(M),(M') 皆過 AB,故 AB 爲 (M),(M') 之交線，亦必垂直於 (L),與假設矛盾.

$\therefore (M')$ 不$\perp(L)$.

$\therefore$過 AB, 有一平面，僅有一平面，垂直於 (L).

Q.E.D.

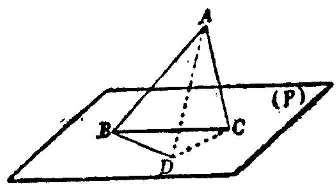
〔註〕 (M), (L) 之交線 $A'B'$ 爲 AB 在 (L) 上之正射影.

§587. **系一** **任何圖形在一平面上之正射影，有一無二.**

§588. **系二** **不垂直於一平面之直線，在此平面上之正射影爲一直線.**

§589. **系三** **垂直於一平面之直線在此平面上之正射影爲一點.**

§590. **定理一八九** **從一直線與一平面之交點在此平面內所引諸線中，以此直線之正射影與此直線所夾之角爲最小.**



〔假設〕 AB交(P)於B,BC 爲 BA 在 (P) 上之正射影. BD爲(P)內過 B 之任意其他一線.

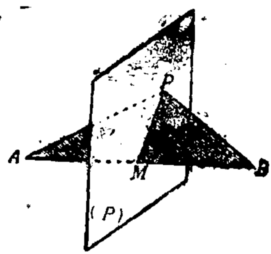
〔終決〕 $\angle ABC<\angle ABD$.

〔證〕 在 BA 上取任意一點 A. 在 BC 上取 A 之射影 C, 則$AC\perp(P)$. 在 BD 上取 D 令 $BD=BC$. 聯AD,DC. 則在 $\triangle ADC$ 中 $\angle ACD=R\angle$, $\therefore AD>AC$. 又在 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ 中, $AB=AB$,$BC=BD$,$AC<AD$. $\therefore \angle ABC<\angle ABD$.

Q.E.D.

§591. **定義一〇一 直線與平面所成之角** 一直線與其在一平面內正射影所夾之角曰此直線與此平面所成之角(angle made by a line and a plane) 亦曰此直線對於此平面之斜度 (the inclination of a line to a plane).

§592. **定理一九〇** 與兩定點等距之點之軌跡爲過其所聯線分中點所作此線分之垂面.



〔已設〕 二定點 A,B.

〔條件〕 空間動點 $P, PA=PB$.

〔軌跡〕 P 之軌跡爲過 AB 中點 M 所作 AB 之垂面 (P).

〔證〕 (1) 設 P 爲 (P) 內任意點. 聯 PA PB,PM 則因 $AB\perp(P)$, 而 PM 爲 (P) 內過 M 之線, $\therefore PM\perp AB$. 又 M 爲 AB 之中點. $\therefore PA=PB$

$\therefore$ (P) 內任何點適合於條件.

(2) 設 P 爲適合於條件之點. 聯 PA,PB,PM. 則因 $PA=PB, PM=PM, \therefore PM\perp AB. \therefore PM$ 在 (P) 內, 即 P 在 (P) 內.

$\therefore$ 適合於條件之點在 (P) 內.

$\therefore (P)$ 爲 P 之軌跡. *Q.E.D.*

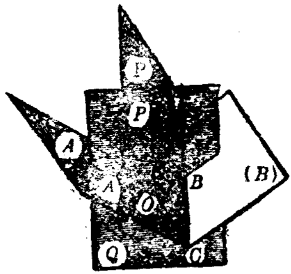
〔註〕 (P) 曰 AB 之垂直等分面.

§593. **定理一九一** 與兩面角之兩面等距之點之軌跡爲等分此兩面角之半射面.

〔已設〕 dih$\angle OC$, 其兩面爲 (A), (B).

〔條件〕 動點 P 與 (A),(B) 恆等距.

〔軌跡〕 P 之軌跡爲過 OC 所作等分 dih $\angle OC$ 之半射面 (P).



〔證〕 (1) 設 P 爲 (P) 內任意一點. 作 $PA\perp(A)$,$PB\perp(B)$. PA,PB 所決之平面爲 (Q). 則 $(A)\perp(Q)$,$(B)\perp(Q)$, $\therefore (A)$,(B) 之交線 $OC\perp(Q)$. $\therefore$ $OA\perp OC$,$OB\perp OC$, $OP\perp OC$. $\therefore$ $\angle AOP$, $\angle POB$, $\angle AOB$ 各爲dih$\angle A$-OC-P,dih$\angle P$-OC-B,dih$\angle A$-OC-B之平面角. 因 (P) 等分 dih$\angle OC$, $\therefore$ 在 (Q) 內, OP 等分 $\angle AOB$. $\therefore$ $PA=PB$. $\therefore$ (P) 內任何點適合於條件.

(2) 設 P 爲適合於條件之點. 作 $PA\perp(A)$, $PB\perp(B)$. PA,PB所決之平面爲 (Q),交 OC 於 O. 則同(1)可知$\angle AOP$,$\angle POB$,$\angle AOB$ 各爲 dih$\angle A$-OC-P,dih$\angle P$-OC-B,dih$\angle A$-OC-B 之平面角. $\because$ $PA=PB$, $\therefore$ P 在 $\angle AOB$ 之等分角線上. $\therefore$ OP,OC 所決之面等分dih$\angle A$-OC-B. 即 OP 在 (P) 上. 即 P 在 (P) 上.

$\therefore$ 適合於條件之點在 (P) 內.

$\therefore$ (P) 爲 P 之軌跡. *Q. E. D.*

§594. 系 與相交兩平面等距之點之軌跡爲此兩平面所成對頂角之一雙等分面.

習題二十九

1. 一平面與平行二平面相交所成之兩面角或相等或互為補角.

2. 一直線平行於一平面，則此直線之垂面亦為此平面之垂面.

3. 一線分對於一平面之斜度為15°,求此線分與其在此平面上正射影之比.

4. 平行二直線對於一平面之斜度相等.

5. 一直線對於平行二平面之斜度相等.

6. 求與不共線三點等距之點之軌跡.

7. 過一所設點求作一平面令與所設兩平面垂直.

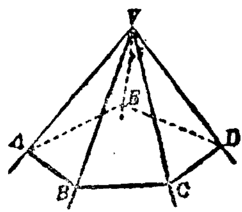
8. 過一所設點求作一平面令與一所設直線平行，且與一所設平面垂直.

9. 求作一直線令與所設不共面之二直線垂直.

10. $(A),(B)$ 交於 c,$(A),(C)$ 交於 b,$(B),(C)$ 交於 a. 若 $(A)\perp(B)\perp(C)$,則 $a\perp b\perp c$.

第三十七章　多　面　角

§595.　**定義一〇二　多面角**　一半射線，固定其原點，在空間轉動，但常與一定多角形之邊界相交．由此動半射線轉動所成之圖形曰多面角（polyhedral angle）



若定多角形爲 n 角形，則此多面角曰 n 面角．圖中爲五面角，記之爲 V-$ABCDE$．半射線之原點曰多面角之頂點（vertex）如圖 V．此動半射線曰原線（element）．原線過多角形頂點時之位置曰棱（edge），如圖 $VA, VB, \cdots\cdots$ 等．相鄰二棱所成之平面部分曰面（face），如圖 $AVB, BVC\cdots\cdots$ 等．相鄰二棱所夾之角曰多面角之面角（face angle of the polyhedral angle），如圖 $\angle AVB, \angle BVC, \cdots\cdots$ 等．相鄰二面所成之兩面角曰多面角之兩面角（dihedral angle of the polyhedral angle），如圖 $\text{dih}\angle VA, \text{dih}\angle VB, \cdots\cdots$ 等．

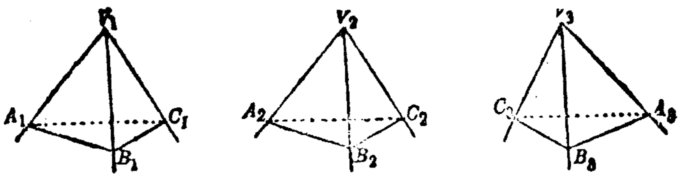
n 面角有 n 個棱，n 個面，n 個面角，n 個兩面角．如圖 V-$ABCDE$ 有五棱，五面，五面角，五兩面角．

多面角原線所交之多角形爲凸多角形者，則曰凸多面角（convex polyhedral angle）．凡但稱多面角，皆指凸多面角而言

多面角之最簡單者爲三面角（trihedral angle）．三面角中，有一個兩面角爲直角者，有兩個兩面角爲直角者，

有三個兩面角皆為直角者. 分別稱之曰一直角三面角 (rectangular trihedral angle), 二直角三面角 (birectangular trihedral angle), 三直角三面角 (trirectangular trihedral angle)

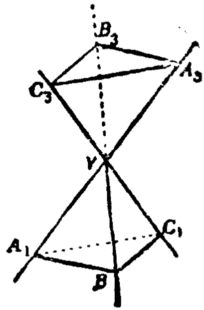
§596. **定義一〇三 合同形 對稱形** 兩個多面角中, 各雙面角及各雙兩面角順次雙雙互等, 則此兩多面角曰合同形 (congruent figure). 若逆次雙雙互等, 則曰對稱形 (symmetric figure).



如圖三個三面角 V_1-$A_1B_1C_1$, V_2-$A_2B_2C_2$, V_3-$A_3B_3C_3$ 中, $\angle A_1V_1B_1=\angle A_2V_2B_2=\angle A_3V_3B_3$, $\text{dih}\angle V_1B_1=\text{dih}\angle V_2B_2=\text{dih}\angle V_3B_3$, $\angle B_1V_1C_1=\angle B_2V_2C_2=\angle B_3V_3C_3$, $\text{dih}\angle V_1C_1=\text{dih}\angle V_2C_2=\text{dih}\angle V_3C_3$, $\angle C_1V_1A_1=\angle C_2V_2A_2=\angle C_3V_3A_3$, $\text{dih}\angle V_1A_1=\text{dih}\angle V_2A_2=\text{dih}\angle V_3A_3$ 而 V_1-$A_1B_1C_1$ 及 V_2-$A_2B_2C_2$ 為順次的, 故為合同形. V_1-$A_1B_1C_1$ 及 V_3-$A_3B_3C_3$ 為逆次的, 故為對稱形.

從定義可知: (1) 若二形各與第三形為合同形, 則此二形為合同形. (2) 若二形各與第三形為對稱形, 則此二形為合同形. (3) 若二形與第三形一為合同而一為對稱, 則此二形為對稱形.

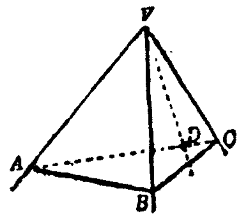
凡合同形可相重合, 對稱形不能重合. 但若將一雙對



稱多面角之頂點合一，而將兩形置於反對方向時，則各對應稜皆可成一直線，而各對應面皆在一平面中．如此之兩個多面角曰對頂多面角（vertical polyhedral angles）

§597. **定理一九二 三面角中，任意兩個面角之和大於其第三面角．**

〔假設〕 $V\ ABC$ 中，$\angle AVC$ 爲最大面角．



〔終決〕 $\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

〔證〕 在面（VAC）中，作 VD 令 $\angle AVD=\angle AVB$，作任意直線 AC 各交 VA, VD, VC 於 A, D, C. 在 VB 上取 B 令 $VB=VD$. 聯 AB, BC. 則 $\triangle VAB\cong\triangle VAD$, $\therefore AB=AD$. 在面（ABC）中 $AB+BC>AC$, $\therefore BC>DC$. 在 $\triangle VBC$, $\triangle VDC$ 中，$VB=VD, VC=VC, BC>DC$, $\therefore \angle BVC>\angle DVC$.

$\therefore \angle AVB+\angle BVC>\angle AVD+\angle DVC$.

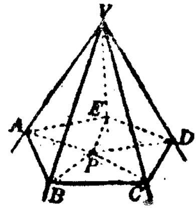
$\therefore \quad \angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$. Q.E.D.

§598. **定理一九三 多面角中，諸面角之和小於四直角．**

〔假設〕 $V\ ABC\cdots E$ 爲任意 n 面角．

〔終決〕 $\angle AVB+\angle BVC+\cdots+\angle EVA<4R\angle$.

〔證〕 $V\ ABC\cdots E$ 爲 n 面角，故其截面 $ABC\cdots E$



為 n 角形. 從 $ABC\cdots E$ 內任意一點 P, 聯 $PA, PB, \cdots PE$. 則此多角形分為 $\triangle PAB, \triangle PBC\cdots\triangle PEA$ 共 n 個三角形, 其各內角之和為 $2nR\angle$, 又 $\triangle VAB$, $\triangle VBC, \cdots\triangle VEA$ n 個三角形之各內角之和亦為 $2nR\angle$.

但從上節定理可知

$$\angle VBA+\angle VBC>\angle PBA+\angle PBC,$$
$$\angle VCB+\angle VCD>\angle PCB+\angle PCD,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\angle VAE+\angle VAB>\angle PAE+\angle PAB.$$

$\therefore$ V 為頂點之諸三角形各底角之和大於 P 為頂點之諸三角形各底角之和.

但 V 為頂點之諸三角形各內角之和等於 P 為頂點之諸三角形各內角之和.

$\therefore$ V 為頂點之諸三角形各頂角之和小於 P 為頂點之諸三角形各頂角之和.

即 $\angle AVB+\angle BVC+\cdots\cdots+\angle EVA<\angle APB+\angle BPC+\cdots\cdots+\angle EPA$, 而後者為一周角 $=4R\angle$.

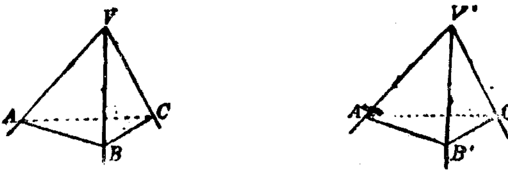
$\therefore$ $\angle AVB+\angle BVC+\cdots+\angle EVA<4R\angle$ Q. E. D.

§599. **定理一九四** 兩三面角中, 一三面角之兩個面角及其所夾之兩面角順次各等於他一三面角之兩個面角及其所夾之兩面角, 則此兩三面角為合同形.

(假設) $V\text{-}ABC$ $V'\text{-}A'B'C'$ 中, $\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle AVC=\angle A'V'C'$, $\text{dih}\angle VA=\text{dih}\angle V'A'$.

〔終決〕 $V-ABC$, $V'-A'B'C'$ 爲合同形.

〔證〕 移置 $V-ABC$ 至 $V'-A'B'C'$ 上令 V 合於 V', VA 與 $V'A'$ 相重, 面 (VAC) 與面 $(V'A'C')$ 相合.



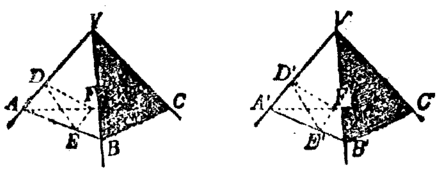
則因 $\text{dih}\angle VA=\text{dih}\angle V'A'$, $\therefore$ 面 (VAB) 與面 $(V'A'B')$ 相合. 又因 $\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle AVC=\angle A'V'C'$, $\therefore VB, VC$ 各與 $V'B', V'C'$ 相重. $\therefore$ 面 (VBC) 亦與面 $(V'B'C')$ 相合. $\therefore \text{dih}\angle VB=\text{dih}\angle V'B'$, $\text{dih}\angle VC=\text{dih}\angle V'C'$, $\angle BVC=\angle B'V'C'$.

$\therefore$ $V-ABC$, $V'-A'B'C'$ 爲合同形. *Q.E.D.*

§600. **定理一九五** 兩三面角中, 一三面角之兩個兩面角及其間之一個面角, 順次各等於他一三面角之兩個兩面角及其間之一個面角則此兩三面角爲合同形.

〔用疊置法證之如上節〕

§601. **定理一九六** 兩三面角中, 一三面角之三個面角, 順次各等於他一三面角之三個面角, 則此兩三面角爲合同形.



〔假設〕 $V-ABC$, $V'-A'B'C'$ 中, $\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\angle AVC=\angle A'V'C'$, $\angle BVC=\angle B'V'C'$.

〔終決〕 $V\text{-}ABC, V'\text{-}A'B'C'$ 爲合同形.

〔證〕 在兩形之各棱上取 $VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'$. 聯 $AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A'$. 則因 $\angle AVB=\angle A'V'B'$, $\therefore$ $\triangle VAB\cong\triangle V'A'B'$, $\therefore$ $AB=A'B'$. 同理 $AC=A'C', BC=B'C'$. $\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$, $\therefore$ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

在 $AV, A'V'$ 上各取 D, D' 令 $AD=A'D'$. 在面 (VAB), (VAC) 內各作 VA 之垂線 DE, DF 交 AB, AC 於 E, F. 在面 $(V'A'B')$, $(V'A'C')$ 內各作 $V'A'$ 之垂線 $D'E'$, $D'F'$ 交 $A'B', A'C'$ 於 $E'F'$ 聯 $EF, E'F'$. 則 $\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$, $\therefore$ $DE=D'E', AE=A'E'$.

又 $\triangle ADF\cong\triangle A'D'F'$, $\therefore DF=D'F', AF=A'F'$.

$\triangle AEF\cong\triangle A'E'F'$, $\therefore EF=E'F'$.

故 $\triangle DEF\cong\triangle D'E'F'$, $\therefore \angle EDF=\angle E'D'F'$.

但 $\angle EDF, \angle E'D'F'$ 各爲 $\text{dih}\angle VD, \text{dih}\angle V'D'$ 之平面角.

$\therefore$ $\text{dih}\angle VD=\text{dih}\angle V'D'$.

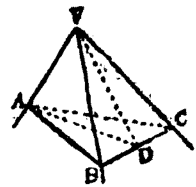
$\therefore$ $V\text{-}ABC, V'\text{-}A'B'C'$ 爲合同形. Q. E. D.

§602. 系. 兩三面角中,(1)一三面角之兩個面角及其所夾之兩面角，逆次各等於他一三面角之兩個面角及其所夾之兩面角；(2)一三面角之兩個兩面角及其間一個面角逆次各等於他一三面角之兩個兩面角及其間一個面角；(3) 一三面角之三個面角，逆次各等於他一三角形之三個面角；則此兩三面角爲對稱形.

〔注意〕 三面角中之定理一九四，一九五，一九六，

與三角形中之 s.a.s.=s.a.s.，a.s.a.=a.s.a.，s.s.s.=s.s.s 相類. 從可知多面角之面角適相當於多角形之邊，而多面角之兩面角適相當於多角形之角. 故凡多面角之定理，往往可仿照多角形定理之證法同樣證之. 舉例如下：

（例一） 三面角之兩個面角相等，則其所對兩個兩面角亦相等.



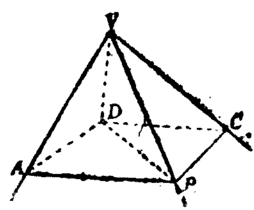
〔假設〕 三面角 $V\text{-}ABC$ 中，$\angle AVB=\angle AVC$.

〔終決〕 $\mathrm{dih}\angle VB=\mathrm{dih}\angle VC$.

〔證〕 從 VA 作 $\mathrm{dih}\angle B\text{-}VA\text{-}C$ 之等分面交面（VBC）於 VD.則在 $V\text{-}ABD$，$V\text{-}ACD$ 中，$\angle AVB=\angle AVC$，$\mathrm{dih}\angle B\text{-}VA\text{-}D=\mathrm{dih}\angle C\text{-}VA\text{-}D$，$\angle AVD$ 爲共有面角，∴ $V\text{-}ABD$，$V\text{-}ACD$ 爲對稱形.

$$\therefore\quad \mathrm{dih}\angle VB=\mathrm{dih}\angle VC. \qquad Q.E.D.$$

（例二） 四面角之兩雙相對面角相等，則其兩雙相對兩面角亦相等.



〔假設〕 $V\text{-}ABCD$ 中，$\angle AVB=\angle CVD$，$\angle AVD=\angle BVC$.

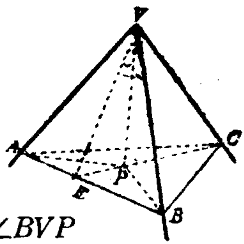
〔終決〕 $\mathrm{dih}\angle VA=\mathrm{dih}\angle VC$，
$\mathrm{dih}\angle VB=\mathrm{dih}\angle VD$.

〔證〕 VB.VD 所決之面，分 $V\text{-}ABCD$ 爲 $V\text{-}ABD$，$V\text{-}CBD$ 兩個三面角. $\angle BVD$ 爲兩形共有，$\angle AVB=\angle CVD$，$\angle AVD=\angle BVC$，∴ $V\text{-}ABD\cong V\text{-}CBD$，∴ dih∠

$VA=\text{dih}\angle VC$. 同理 $\text{dih}\angle VB=\text{dih}\angle VD$. Q E. D.

（例三） VP 爲 $V\text{-}ABC$ 內任意一直線.

求證 $\angle AVB+\angle AVC>\angle BVP+\angle CVP$.



〔證〕 VP,VC 所決之面交面(VAB)於VE. 在 $V\text{-}PEB$中，

$\angle BVE+\angle EVP>\angle BVP$.

$\therefore\quad \angle BVE+\angle EVP+\angle PVC>\angle BVP+\angle PVC$，即 $\angle BVE+\angle EVC>\angle BVP+\angle PVC$. 在 $V\text{-}AEC$ 中，$\angle AVE+\angle AVC>\angle EVC$，

$\therefore\quad \angle AVE+\angle EVB+\angle AVC>\angle EVB+\angle EVC$，

即 $\angle AVB+\angle AVC>\angle BVE+\angle EVC$

$\therefore\quad \angle AVB+\angle AVC>\angle BVP+\angle CVP$. Q.E.D.

習題三十

1. 三面角之兩個兩面角相等則其所對兩個面角相等

2. 三面角 $V\text{-}ABC$中，$\angle AVB=\angle AVC$，VD,VE 各爲$\angle AVB,\angle AVC$之等分角線. 則$\angle BVE=\angle CVD$.

3. 四面角 $V\text{-}ABCD$中，$\angle AVB=\angle BVC$，$\angle CVD=AVD$.則面 $(AVC)\perp$面 (BVD)

4. 三面角$V\text{-}ABC$中，VD爲$\angle BVC$之等分線，則$\angle AVD<\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle AVC)$.

5. 三面角三個兩面角之等分面共線. 此線爲與三面等距之點之軌跡.

6. 求與一角兩邊等距之點之軌跡。

第九編　多面體　圓柱　圓錐

第三十八章　角柱

§603.　**定義一〇四　多面體**　一立體其邊界皆爲平面者曰多面體 (polyhedron).

圍成此多面體之平面曰多面體之面 (faces). 面之交線曰多面體之稜 (edges). 稜之交點曰多面體之頂點 (vertices). 不共面兩頂點之聯線曰多面體之對角線(diagonal).

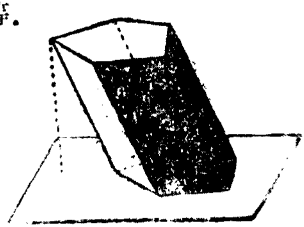
§604.　**定義一〇五　截面**　一平面與一多面體相交，其交界曰多面體之截面 (section).

多面體之截面爲多角形.

§605.　**定義一〇六　凸多面體**　一多面體之任意截面皆爲凸多角形者曰凸多面體 (convex polyhedron).

§606.　**定義一〇七　角柱**　多面體之二面在兩個平行平面中，其餘諸面均爲平行四邊形者曰角柱(prism).

角柱之二平行面曰角柱之底 (bases). 其餘諸平行四邊形曰角柱之側面 (lateral faces). 側面之交線曰側稜(lateral edges). 角柱之諸側稜皆相等.



§607.　**定義一〇八　角柱之高**　角柱二平行面間之垂直距離曰角柱之高 (altitude).

§608.　**定義一〇九　角柱依底分類**　角柱之底爲 n 角

形，則此角柱曰 n 角柱．圖中爲 5 角柱．

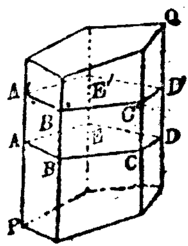
§ 609. **定義一一〇** 直角柱 斜角柱 角柱之棱與底垂直者曰直角柱(right prism)．否則曰斜角柱(oblique prism)．

直角柱之側面皆爲矩形．其棱即爲其高．

§ 610. **定義一一一** 直截面 角柱之截面與各棱垂直者曰直截面 (right section)．

§ 611. **定義一一二** 截頭角柱 不平行於底之截面所截角柱之一部分曰截頭角柱 (truncated prism)．

§ 612. 定理一九七 角柱之平行截面爲合同形．



〔假設〕 $ABCDE$，$A'B'C'D'E'$ 爲角柱 PQ 之二截面．$ABCDE \parallel A'B'C'D'E'$．

〔終決〕 $ABCDE$，$A'B'C'D'E'$ 爲合同形．

〔證〕 $AB \parallel A'B'$ (平行平面與第三面之交界爲平行線)．

$AA' \parallel BB'$ (角柱之側面爲平行四邊形)．

$\because$ $ABB'A'$ 爲平行四邊形，$\therefore AB=A'B'$．

同理 $BC=B'C'$，……，$EA=E'A'$．

又 $\because$ $AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$．

$\therefore$ $\angle ABC=\angle A'B'C'$ (兩雙邊同向平行之角相等)．

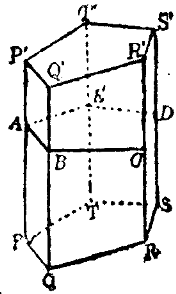
同理 $\angle BCD=\angle B'C'D'$，……，$\angle EAB=\angle E'A'B'$．

$\therefore$ $ABCDE$，$A'B'C'D'E'$ 爲合同形． Q. E. D.

§ 613. 系一 角柱之二底爲合同形．

§ 614.　**系二**　角柱之直截面皆爲合同形.

§ 615.　**定理一九八**　角柱側面積之度數等於其側稜與直截面周之度數之相乘積.



〔假設〕　$ABCDE$ 爲角柱 PS' 之直截面，其周之度數爲 p. 角柱側稜之度數爲 l.

〔終決〕　此角柱側面積之度數爲 lp.

〔證〕　$PP'=QQ'=\cdots=TT'$，其度數皆爲 l. 設 AB,BC,CD,DE,EA 之度數各爲 a,b,c,d,e. 則 $a+b+c+d+e=p$.

因 $ABCDE$ 爲直截面，與各稜垂直，故 $AB\perp PP'$

$\therefore \square PQQ'P'=AB\cdot PP'$，其度數爲 al

同理　$\square QRR'Q'$ 之度數爲 bl. ……

…………　　　…………

$\square TPP'T'$ 之度數爲 el.

今角柱側面積爲 $\square PQQ'P'+\square QRR'Q'+\cdots\cdots+\square TPP'T'$.

$\therefore$　側面積之度數爲　$al+bl+cl+dl+el$

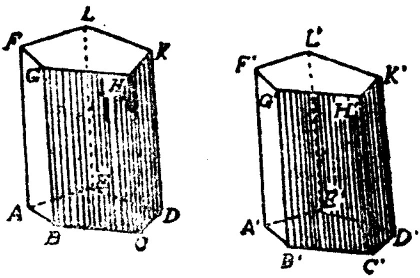
$$=l(a+b+c+d+e)=lp.\qquad Q.E.D.$$

§ 616.　**系**　直角柱側面積之度數等於其高與底周之度數之相乘積.

〔註〕　爲簡便起見，以下各定理中，凡一切圖形之度數，均省稱謂此圖形．故若有圖形與圖形相乘者，意謂其度數相乘也．即如本定理每簡稱爲"角柱側面積等於其側稜與直截面周之相乘積."此種說法，本屬不通，已於平面

幾何中論之．但立體幾何中，關於計算較多且繁，故將度數二字省去．學者不以辭害意可也．

§617. 定理一九九 二角柱中，若一角柱之共頂點三面與他一角柱之共頂點三面各爲對應之合同形，則此二角柱爲合同形．



〔假設〕 角柱 AK，$A'K'$ 中，面 $AD\cong A'D'$，面 $AG\cong A'G'$，面 $AL\cong A'L'$，

〔終決〕 角柱 $AK\cong A'K'$．

〔證〕 $\because$ $\angle BAE=\angle B'A'E'$，$\angle BAF=\angle B'A'F'$，$\angle EAF=\angle E'A'F'$，$\therefore$ 三面角 $A\text{-}BEF$，$A'\text{-}B'E'F'$ 爲合同形．

移置 $A\text{-}BEF$ 於 $A'\text{-}B'E'F'$ 上令各棱相合，則面 AD 與 $A'D'$ 相合．$\therefore C$ 合於 C'，D 合於 D'．又 $\square AG$，AL 亦各與 $\square A'G'$，$A'L'$ 相合．故棱 AF, BG, EL 各與棱 $A'F'$，$B'G', E'L'$ 相合．又角柱之各棱皆平行，故 CH, DK 各與 $C'H', D'K'$ 相重．又因上底面 FK 之三頂點 F, G, L 已與 F', G', L' 相合，故面 FK 必與 $F'K'$ 相合．$\therefore$ H 合於 H'，K 合於 K'．

$\therefore$ 角柱 $AK\cong$ 角柱 $A'K'$． Q.E.D.

§618. 系一 二截頭角柱若有本定理同樣條件時亦爲合同形．

§619. 系二 二直角柱若其底爲合同形而高相等，

則此二直角柱爲合同形.

§ 620.　**定義一一三　平行六面體**　角柱之底爲平行四邊形者曰平行六面體 (parallelopiped).

角柱之側面，皆爲平行四邊形．故平行六面體之一切面皆爲平行四邊形，共爲三雙平行面．故任意一雙平行面皆可視爲平行六面體之底.

§ 621.　**定義一一四　直六面體**　平行六面體之側棱垂直於底者曰直六面體 (right parallelopiped).

§ 622.　**定義一一五　長方體**　直六面體之底爲矩形者曰長方體 (rectangular parallelopiped).

直六面體之側棱垂直於底，故其側面皆爲矩形．故長方體之一切面皆爲矩形.

§ 623.　**定義一一六　立方體**　長面體之各棱皆相等者曰立方體 (cube).

長方體之各面皆爲矩形故立方體之各面皆爲正方形.

§ 624.　**立體之體積**　一立體所含立體單位之倍數曰此立體體積之度數簡稱曰此立體之體積(volume of solid).

立體單位，以線分單位爲棱所成之立方體表之．例如線分單位爲寸，則立體單位爲各棱皆爲一寸之立方體，曰立方寸.

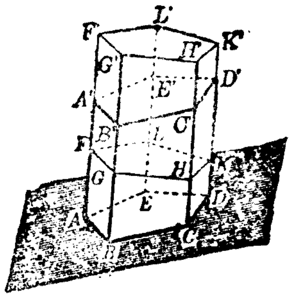
§ 625.　**相等立體**　二立體之體積相等者曰相等(equivalent or equal).

凡兩立體爲合同形，則必相等，但相等立體，未必爲合同形.

§ 626.　**定理二〇〇**　斜角柱等於以其直截面爲底,

側棱爲高所成之直角柱。

〔假設〕 FK 爲斜角柱 AD' 之直截面，FK' 爲直角柱，其棱與 AD' 之棱相等。



〔終決〕 斜角柱 AD' = 直角柱 FK.

〔證〕 $\because AA'=FF'$, $\therefore AF=A'F'$. 同理 $BG=B'G'$. 又 $AB \perp A'B'$, $FG \perp F'G'$, $\therefore$ 梯形 $ABGF \cong$ 梯形 $A'B'G'F'$ 同理梯形 $AELF \cong$ 梯形 $A'E'L'F'$.

又斜角柱之兩底 $AD \cong A'D'$.

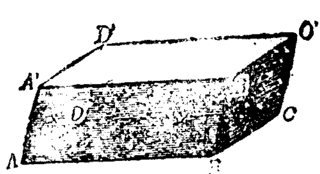
故截頭角柱 $AK \cong$ 截頭角柱 $A'K'$

$\therefore$ 截頭角柱 $AK+FD'$ = 截頭角柱 $A'K'+FD'$.

即 斜角柱 AD' = 直角柱 FK'. Q. E. D.

§ 627. **定理二〇一**

平行六面體之對面爲合同形且互相平行.



〔假設〕 AC' 爲平行六面體.

〔終決〕 $\square ABCD \cong \square A'B'C'D'$, $\square ABB'A' \cong \square DCC'D'$, $\square ADD'A' \cong BCC'B'$. 且各互相平行.

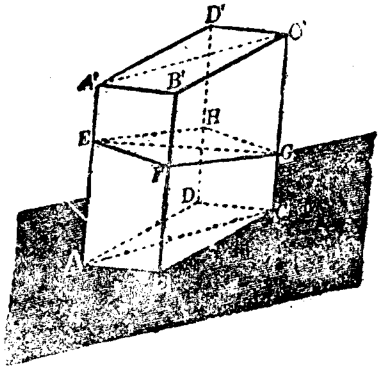
〔證〕 $\square AC$ 及 $\square A'C'$ 可視爲角柱 AC' 之兩底,

$\therefore \square AC \cong \square A'C'$, $\square AC \parallel \square A'C'$.

同理 $\square AB' \cong \square DC'$, $\square AB' \parallel \square DC'$,

$\square AD' \cong \square BC'$, $\square AD' \parallel \square BC'$. Q. E. D.

§628. **定理二〇二** 過平行六面體相對二棱之平面分原形爲兩個相等三角柱.



〔假設〕 $ACC'A'$爲過平行六面體 AC' 相對兩棱 AA', CC' 之平面.

〔終決〕 AC' 被分成兩個三角柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 及 $ADC\text{-}A'D'C'$ 相等.

〔證〕 作 AC' 之直截面 $EFGH$，交截面 $ACC'A'$ 於 EG.

則 $\triangle EFG$ 爲 $ABC\text{-}A'B'C'$ 之直截面,

$\triangle EHG$ 爲 $ADC\text{-}A'D'C'$ 之直截面.

$\because$ 面 $AB' \parallel DC'$, $\therefore EF \parallel HG$. 同理 $FG \parallel EH$.

$\therefore$ $EFGH$ 爲平行四邊形, $\therefore \triangle EFG \cong \triangle EHG$.

$\therefore$ $\triangle EFG$ 爲底 AA' 爲高之直三角柱等於 $\triangle EHG$ 爲底 AA' 爲高之直三角柱.

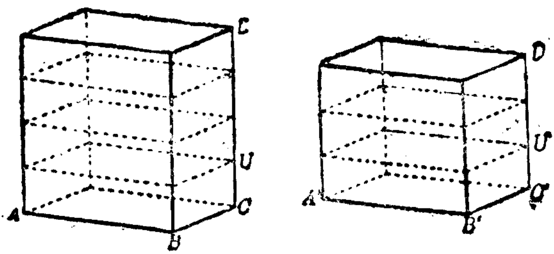
但三角柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 等於 $\triangle EFG$ 爲底 AA' 爲高之直三角柱，三角柱 $ADC\text{-}A'D'C'$ 等於 $\triangle EHG$ 爲底 AA' 爲高之直三角柱.

$\therefore$ 三角柱 $ABC\text{-}A'B'C' = ADC\text{-}A'D'C'$. Q.E.D.

〔注意〕 平行六面體相當於平面幾何中之平行四邊形，其過相對兩棱之平面相當於平行四邊形之對角線。分成之兩個三角柱相當於平行四邊形爲對角線所分成之兩個三角形. 但三角柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 與 $ADC\text{-}A'D'C'$ 並非合

同形. 因三面角 $B\text{-}ACB'$ 與 $D'\text{-}C'A'D$ 爲對稱形而非合同形也.

§ 629.　**定理二〇三**　等底長方體之比等於其高之比.



〔假設〕　長方體 AD, $A'D'$ 中, 底 $AC \cong A'C'$.

〔終決〕　長方體 $AD : A'D' =$ 高 $CD : C'D'$.

〔證〕（1）若 $CD, C'D'$ 爲可通約量, 而其公約量爲 CU, $CD = mCU$, $C'D' = nC'U'$ $(C'U' = CU)$, 則 $CD : C'D' = m : n$ 將 CD 分爲 m 等分, $C'D'$ 分爲 n 等分. 過各分點作底之平行面與各棱相交, 則 AD 分成 m 個長方體每個等於長方體 AU, $A'D'$ 分成 n 個長方體每個等於長方體 $A'U'$. ∵ 長方體 $AU = A'U'$,

$$\therefore \quad AD : A'D' = mAU : nA'U' = m : n.$$

$$\therefore \quad \text{長方體 } AD : A'D' = \text{高 } CD : C'D'.$$

(2) 若 $CD, C'D'$ 爲不可通約量. 可將 $C'D'$ 分成 n 等分（令 n 爲極大之數）. 每份之長爲 $C'U'$（$C'U'$極小）. 以 $C'U'$ 之長爲單位量 CD, 得

$$mCU < CD < (m+1)CU \quad (\text{式中} CU = C'U').$$

$$\therefore m : n < CD : C'D' < (m+1) : n, \quad CD : C'D' \doteqdot$$

$m:n$.

同前可得 $A'D'=nA'U'$, $mAU<AD<(m+1)AU$,

$\therefore m:n<AD:A'D'<(m+1):n$, $\therefore AD:A'D' \doteq m:n$.

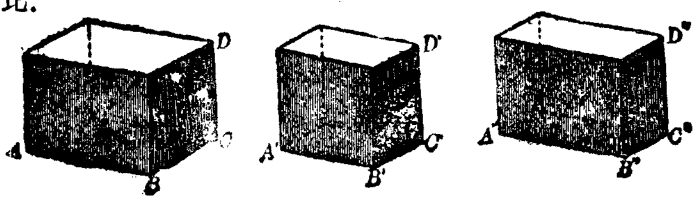
$\therefore$ 長方體 $AD:A'D'=$ 高 $CD:C'D'$. Q. E. D.

（注意） 本定理相當於平面幾何中 §370.

§630. **定義一一七 長方體之三向度** 長方體鄰接三稜之長曰長方體之三向度 (dimensions).

兩個向度相等之長方體之比等於其第三向度之比.

§631. **定理二〇四** 等高長方體之比等於其底之比.



〔假設〕 長方體 $AD, A'D'$ 中, 高 $CD=C'D'$.

〔終決〕 長方體 $AD:A'D'=\square AC:\square A'C'$.

〔證〕 作長方體 $A''D''$ 令 $A''B''=AB$, $B''C''=B'C'$, $C''D''=CD=C'D'$. 則長方體 $AD:A''D''=BC:B''C''$.

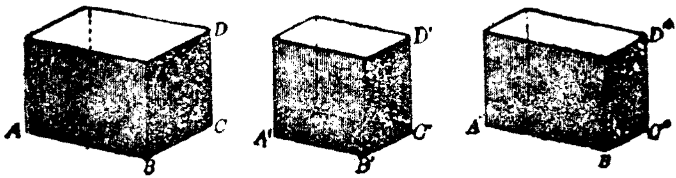
又長方體 $A''D'':A'D'=A''B'':A'B'$.

$\therefore (AD:A''D'')(A''D'':A'D')=(BC:B''C'')(A''B'':A'B')=(BC:B'C')(AB:A'B')$.

$\therefore AD:A'D'=AB\cdot BC:A'B'\cdot B'C'=\square AC:\square A'C'$. Q. E. D.

§ 632.　系　一個向度相等之長方體之比等於其他二向度比之複比.

§ 633.　**定理二〇五　任意二長方體之比等於其底之比與高之比之複比.**



〔假設〕　任意二長方體 $AD, A'D'$.

〔終決〕　長方體 $AD : A'D' = (\square AC : \square A'C')(CD : C'D')$

〔證〕　作長方體 $A''D''$ 令其高 $C''D'' = CD$, 底 $A''C'' \cong A'C'$. 則長方體 $AD : A''D'' = \square AC : \square A''C''$.

長方體 $A''D'' : A'D' = C''D'' : C'D'$

$\therefore (AD : A''D'')(A''D'' : A'D') = (\square AC : \square A''C'')(C''D'' : C'D') = (\square AC : \square A'C')(CD : C'D')$.

$\therefore$　長方體 $AD : A'D' = (\square AC : \square A'C')(CD : C'D')$.　　Q. E. D.

§ 634.　系　長方體之比等於三個向度相乘積之比.

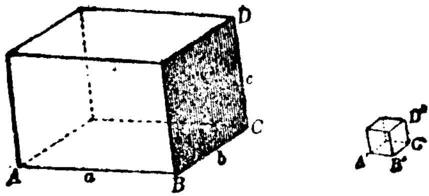
§ 635.　**定理二〇六　長方體體積等於其三向度之相乘積.**

〔假設〕　長方體 AD, 其三向度爲 a, b, c.

〔終決〕　長方體 AD 之體積 $= a \cdot b \cdot c$

〔證〕　作單位立方體 $A'D'$, 即其各棱之長皆爲 1.

則長方體 $AD : A'D' = (a:1)\cdot(b:1)\cdot(c:1) = abc:1.$



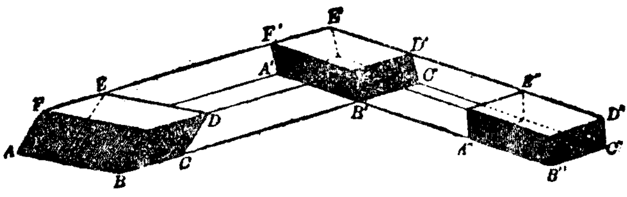
$\because$ $A'D'$ 之體積為 1,

$\therefore$ AD 之體積為 $a\,b\,c$. Q. E. D.

§636. 系一 長方體體積等於底及高之相乘積.

§637. 系二 立方體體積等於其棱之立方.

§638. **定理二〇七 平行六面體體積等於其底及高之相乘積.**



〔假設〕 AD 為任意平行六面體（各面皆非矩形）其體積為 v, 其底 $\square AC$ 之面積為 b, 其高為 h.

〔終決〕 $v=bh$.

〔證〕 以 $\square BF$, $\square CE$ 視為 AD 之底, BC 等視為其棱, 作直截面 $B'F'$, $C'E'$ 令 $B'C'=BC$ 則得

直六面體 $A'D'$ = 平行六面體 AD. 再以 ▱$A'E'$, ▱$B'D'$ 視爲 $A'D'$ 之底. $A'B'$ 等視爲其棱,作直截面 $A''E''$, $B''D''$ 令 $A''B''=A'B'$,則得

長方體 "$A''D'=$直六面體 $A'D'$.

∴ 長方體 $A''D''$ 之體積爲 v.

又以 BC 視爲 ▱AC 之底, 則其高等於 $A'B'$.

∴ ▱$AC=$▱$A'C'\cong$▱$A''C''$,

∴ 矩形 $A''C''$ 之面積爲 b.

又 $C''D''$ 爲長方體 $A''D''$ 之高,即爲▱AC,▱FD之距離.

∴ $A''D''$ 之長爲 h.

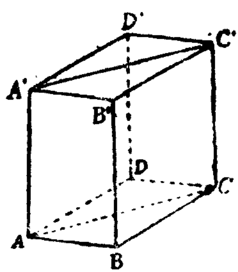
∵ 長方體 $A''D''=$▱$A''C''\cdot C''D''$.

∴ $v=bh$. Q.E.D.

§639. 系一 平行六面體體積等於等底等高的直六面體.

§640. 系二 等底等高之平行六面體相等.

§641. **定理二〇八** 三角柱之體積等於其底及高之相乘積.



〔假設〕 三角柱 ABC-$A'B'C'$ 之體積爲 v, 底△ABC 之面積爲 b, 高爲 h.

〔終決〕 $v=bh$.

〔證〕 作 ▱$ABCD$, ▱$A'B'C'D'$,聯 DD' 則成一平行六面體 BD'.

因三角柱 ACD-$A'C'D'=ABC$-$A'B'C'$,

∴ 平行六面體 $BD'=2(ABC$-$A'B'C')$,

∴ 平行六面體 BD' 之體積爲 $2v$.

又 $\triangle ABC=\triangle ACD$, ∴ $\square BD=2\triangle ABC$,

∴ $\square BD$ 之面積爲 $2b$.

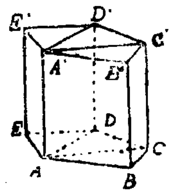
又 平行六面體 BD' 與三角柱同高,

∴ 平行六面體 BD' 之高爲 h.

∴ $2v=2bh$

∴ $v=bh$ Q E D

§642. 定理二〇九 任意角柱之體積等於其底及高之相乘積.



〔假設〕 任意角柱 EC' 之體積爲 v, 其底 EC 之面積爲 b, 其高爲 h.

〔終決〕 $v=bh$

〔證〕 聯 $AC, AD, A'C', A'D'$. 則 $ACC'A'$, $ADD'A'$, 皆爲平行四邊行. ∴ $ABC-A'B'C'$, $ACD-A'C'D'$, $ADE-A'D'E'$ 皆爲三角柱. 設其體積各爲 v_1, v_2, v_3, 則 $v_1+v_2+v_3=v$. 設$\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ 之面積各爲 b_1, b_2, b_3, 則 $b_1+b_2+b_3=b$.

又因此諸體之高皆爲 h,

∴ $v_1=b_1h$, $v_2=b_2h$, $v_3=b_3h$.

∴ $v_1+v_2+v_3=b_1h+b_2h+b_3h=(b_1+b_2+b_3)h$.

∴ $v=bh$ Q E D

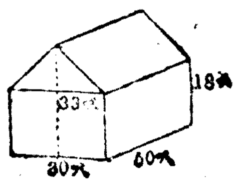
(注意) 本章以上諸定理皆爲本定理之預備定理, 而定理 207, 208, 皆包括在本定理之內. $v=bh$ 爲任意角柱體積之公式, 學者在初中實驗幾何學已知之. 此處方得證明, 且甚費事也.

習題三十一

1. 正六角柱之高為5，底之各邊為2．求其全面積及體積．

2. 直三角柱之高為9，底邊長各為6, 8, 10．求體積．

3. 一三角柱，其底邊之長各為6, 4, 4，其側棱長8，側棱對於底之斜度為30°．求此三角柱之體積．



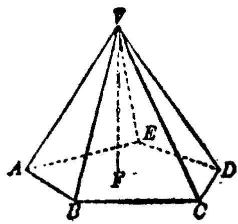
4. 已知正六角柱之體積為$60\sqrt{3}$，底之每邊長為4．求其側棱．

5. 依右圖所示，計算此室中容有空氣若干．

6. 平行六面體各對角線會於一點．

第三十九章　角　　錐

§643.　**定義一一八　角錐**　多面角與一截面所成之多面體曰角錐（pyramid）.



依定義可知角錐之各面，除一面爲多角形外，其餘皆爲三角形.

多面角之頂點即爲**角錐之頂點**（vertex of a pyramid）. 多面角之棱曰其側棱（lateral edges）. 截面所成多角形曰底（base）. 其餘諸三角形曰側面（lateral faces）. 各側面面積之和曰**其側面積**（lateral area）.

底爲 n 角形之角錐曰 n 角錐.

角錐中以三角錐爲最簡單，三角錐之底亦爲三角形，故三角錐共爲四個三角形之面合成. 故任意面可視爲底，其相對之點即爲頂點.

§644.　**定義一一九　角錐之高**　從角錐頂點至底之垂線曰角錐之高（altitude）.

如上圖 VF 爲角錐 V-$ABCDE$ 之高.

§645.　**定義一二〇　正角錐**　角錐之底爲正多角形而頂點在底上之正射影爲正多角形之中心，則此角錐曰正角錐（regular pyramid）.

正角錐亦曰直角錐（right pyramid）.

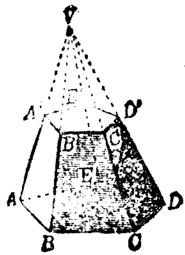
正角錐之各側棱皆相等，因底之各頂點與頂點之正射

影等距故也. 由是正角錐之各側面皆為合同二等邊三角形.

§646. **定義一二一 正角錐之斜高** 正角錐側面之高曰正角錐之斜高 (slant height of a regular pyramid).

正角錐之側面既皆為合同二等邊三角形, 故各側面之高皆相等. 故任何側面之高可為此正角錐之斜高.

§647. **定義一二二 角錐臺** 角錐之一部分介乎其底及平行於底之截面間者曰角錐臺 (frustum of a pyramid).



$A'D' \parallel AD$, 為角錐 $V\text{-}ABCDE$ 之截面. 則 $A'B'C'D'E'\text{-}ABCDE$ 為角錐臺. $A'D'$, AD 皆曰底 (bases). AB', BC' 等曰側面 (lateral faces).

若截面 $A'D'$ 不平行於底 AD 時, 則曰截頭角錐 (truncated pyramid). 角錐臺為截頭角錐特殊情形下之一種. 唯截頭角錐一名稱, 幾何中不常遇見耳.

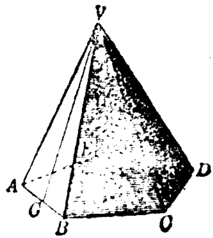
§648. **定義一二三 角錐臺之高** 兩底間距離曰角錐臺之高 (altitude of a frustum).

§649. **定義一二四 正角錐臺** 正角錐之角錐臺曰正角錐臺 (regular frustum).

正角錐臺之兩底皆為正多角形. 其側棱皆相等. 其側面皆為合同之二等邊梯形.

§650. 定義一二五 正角錐臺之斜高 正角錐臺側面之高曰正角錐臺之斜高(slant height of a regular frustum).

§651. **定理二一〇** 正角錐之側面積等於其底之周與斜高相乘積之半.



〔假設〕 $V\text{-}ABC\cdots E$ 爲正 n 角錐,其側面積爲 l,底 $ABC\cdots E$ 之周爲 p,斜高 VG 之長爲 s.

〔終決〕 $l=\frac{1}{2}sp.$

〔證〕 $\because$ $V\text{-}ABC\cdots E$ 爲正 n 角錐,

$\therefore$ $\triangle VAB=\triangle VBC=\cdots=\triangle VEA.$

$\therefore$ $\triangle VAB+\triangle VBC+\cdots+\triangle VEA=n\triangle VAB=l.$

又 $ABC\cdots E$ 爲正 n 角形, $\therefore$ $AB=BC=\cdots=EA.$

$\therefore$ $AB+BC+\cdots+EA=nAB=p.$

$\because$ $\triangle VAB=\frac{1}{2}VG\cdot AB=\frac{1}{2}s\cdot AB.$

$\therefore$ $n\triangle VAB=n\cdot\frac{1}{2}sAB=\frac{1}{2}s\cdot nAB.$

$\therefore$ $l=\frac{1}{2}sp.$ Q. E. D.

§652. **系** 正角錐臺之側面積等於其兩底周之和與斜高相乘積之半.

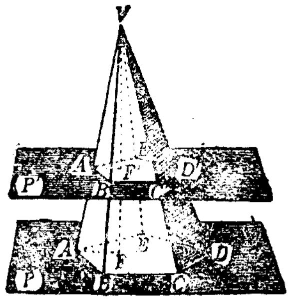
§653. **定理二一一** **一角錐爲平行於底之平面所截,則(1)各棱及高爲截面分成等比.**

(2)截面與底爲相似形.

〔假設〕 角錐 $V\text{-}ABCDE$ 爲底之平行平面所截,交各棱於 A',B',C',D',E' 交其高 VF 於 F'.

〔終決〕 (1) $\dfrac{VA'}{VA}=\dfrac{VB'}{VB}=\cdots=\dfrac{VE'}{VE}=\dfrac{VF'}{VF}$

(2) $A'B'C'D'E'\backsim ABCDE$.



〔證〕 (1) 設底面爲 (P), 截面爲 (P').

則因 $(P')\parallel(P)$, $\therefore$ $A'B'\parallel AB$, $B'C'\parallel BC$, $\cdots E'A'\parallel EA$, $A'F'\parallel AF$.

$$\therefore\quad \frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VB}=\cdots\cdots=\frac{VE'}{VE'}=\frac{VF'}{VF}.$$

(2) $\because$ $A'B'\parallel AB$, $B'C'\parallel BC$, $\therefore$ $\angle A'B'C'=\angle ABC$.

同理 $\angle B'C'D'=\angle BCD,\cdots\angle E'A'B'=\angle EAB$.

又 $\because$ $A'B'\parallel AB$, $\therefore$ $\triangle VA'B'\backsim\triangle VAB$,

$$\therefore\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{VB'}{VB}.$$

同理 $\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{VB'}{VB}$. $\therefore$ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$. 同理 $\dfrac{B'C'}{BC}=\cdots=\dfrac{E'A'}{EA}$.

$\therefore$ $A'B'C'D'E'\backsim ABCDE$. Q. E. D.

§654. 系一 平行於角錐之底之截面與底之比等於頂點與截面距離之平方與角錐高之平方之比.

因 $A'B'C'D'E'\backsim ABCDE$, $\therefore$ 其比等於 $A'B'^2 : AB$

如上圖，

但　　$VF':VF=VA':VA=A'B':AB.$

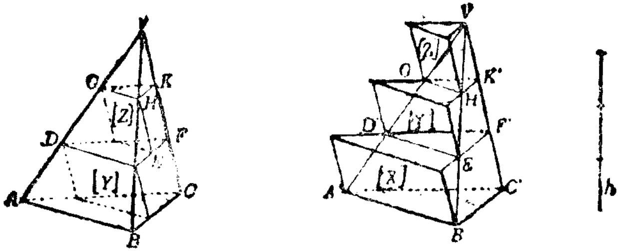
$$\therefore\quad \overline{VF'}^2:\overline{VF}^2=\overline{A'B'}^2:\overline{AB}^2$$

故　　$A'B'C'D'E':ABCDE=\overline{VF'}^2:\overline{VF}^2$

§655.　系二　二角錐之高相等，底面等積，則其與底平行且等距之截面亦等積.

設二角錐之底面積各爲 b_1，b_2，截面積各爲 b'_1，b'_2，高各爲 h_1、h_2. 頂點與截面之距離各爲 h'_1、h'_2. 則因 $b'_1:b_1=h'^2_1:h^2_1$，$b'_2:b_2=h'^2_2:h^2_2$. 又因 $h_1=h_2$，$h_1-h'_1=h_2-h'_2$，$h'_1=h'_2$，$b_1=b_2$，$\therefore b'_1=b'_2$.

§656.　定理二一二　二三角錐之高相等，底等積，則其體積相等.



〔假設〕　等高三角錐 $V-ABC$，$V'-A'B'C'$ 中，底$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$.

〔終決〕　$V-ABC$ 與 $V'-A'B'C'$ 體積相等.

〔證〕　若設二三角錐不相等，而

$$V'-A'B'C'>V-ABC.$$

置二三角錐令其底在同一平面上將此相等之高分爲

n 等分，每份之長爲 h 過各分點作底面之平行面．每一平行面截二三角錐之截面等積．

以 V'-$A'B'C'$ 之底 $A'B'C'$ 及各截面 $D'E'F'$ … 爲下底向上各作三角柱令其各棱與 $V'C'$ 平行，其高等於h，共得 n 個三角柱如圖〔X'〕〔Y'〕〔Z'〕……

以 V-ABC 之各截面 $D'E'F'$……爲上底向下各作三角柱令其各棱與 VC 平行，其高等於 h，共得 n-1 個三角柱，如圖〔Y〕，〔Z〕，……

因 $\triangle DEF=\triangle D'E'F'$，高皆爲 h，$\therefore$〔Y'〕=〔Y〕．

同理〔Z'〕=〔Z〕，……

設　〔X'〕+〔Y'〕+〔Z'〕+……　之體積爲S'，

　　〔Y〕+〔Z〕+……　之體積爲S．

則　$S'-S=$〔X'〕．　　又 V'-$A'B'C'<S'$，

　　　　　　　　　　V-$ABC>S$，

$\therefore$　V'-$A'B'C'-V$-$ABC<S'-S$．

$\therefore$　V'-$A'B'C'-V$-$ABC<$〔X'〕．

但當 n 之值無限增大時，h 無限減小，接近於零，故〔X'〕亦無限接近於零．

即 V'-$A'B'C'$ 不大於 V-ABC．

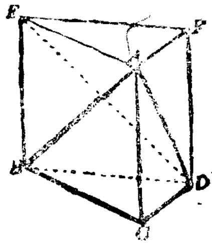
同理可證 V-ABC 不大於 V'-$A'B'C'$，

$\therefore$　V-$ABC=V'$-$A'B'C'$．　　　Q. E. D.

§657.　**定理二一三**　三角錐之體積等於其底及高相乘積三分之一．

〔假設〕　三角錐 A-BCD 之體積爲 v，底面積爲 b，高爲 h．

〔終決〕 $v=\frac{1}{3}bh.$



〔證〕 作 BE, DF 平行且相等於 CA. 聯 A, E. 與 A, F.

則$\triangle AEF \cong \triangle CBD$, 而 $BCD\text{-}EAF$ 爲三角柱, 其底面積爲 b, 高爲 h.

$\therefore BCD\text{-}EAF = bh$. 過 AD, AE 作平面交 $\square BF$ 於 ED。

則三角柱 $BCD\text{-}EAF$ 分成三個三角錐 $A\text{-}BCD$, $A\text{-}BED$, $A\text{-}EFD$

$\because \quad \triangle EFD = \triangle EBD, \quad \therefore A\text{-}EFD = A\text{-}BED$

又以 $A\text{-}BCD$, $A\text{-}BED$ 視爲 $D\text{-}ABC$, $D\text{-}ABE$, 則因 $\triangle ABC = \triangle ABE$, $\therefore D\text{-}ABC = D\text{-}ABE$

$$\therefore \quad A\text{-}BCD = A\text{-}BED = A\text{-}EFD = \frac{1}{3}(BCD\text{-}EAF).$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{3}bh. \qquad Q.E.D.$$

§658. 系 三角錐之體積等於與其等底等高三角柱體積之三分之一。

§659. 定理二一四 任意角錐之體積等於其底及高相乘積之三分之一。

〔假設〕 角錐 $V\text{-}ABC \cdots E$ 之體積爲 v, 底面積爲 b, 高爲 h.

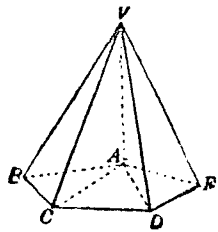
〔終決〕 $v=\frac{1}{3}bh.$

〔證〕 在底上過底之一頂點 A 作對角線 AC, AD, $\cdots$ 分底面爲 $\triangle ABC$,

$\triangle ACD,\cdots$.

作面 VAC, VAD, $\cdots$ 分角錐爲三角錐 $V\text{-}ABC$, $V\text{-}ACD,\cdots$.

此諸三角錐之高皆爲 h. 設 $V\text{-}ABC$ 之體積爲 v_1, 底面積爲 b_1, $V\text{-}ACD$ 之體積爲 v_2,底面積爲$b_2,\cdots$.



則 $v_1+v_2+\cdots=v,\ b_1+b_2+\cdots=b.$

因 $v_1=\frac{1}{3}b_1h,\quad v_2=\frac{1}{3}b_2h,\cdots.$

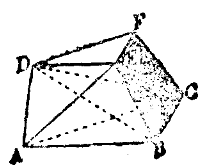
$$\therefore\quad v_1+v_2+\cdots=\frac{1}{3}b_1h+\frac{1}{3}b_2h+\cdots$$
$$=\frac{1}{3}h(b_1+b_2+\cdots).$$
$$\therefore\quad v=\frac{1}{3}bh.$$

Q. E. D.

§660. **系** 二三角錐體積之比等於其底之比與高之比之複比；等底二三角錐體積之比等於其高之比；等高二三角錐體積之比等於其底之比；等底等高之三角錐之體積相等.

(注意) $v=\frac{1}{3}bh$ 爲任意角錐體積之公式. §656 至 §658 皆爲此公式之預備定理. 學者於此又可見角錐與角柱體積之關係, 與平面幾何中三角形與平行四邊形面積之關係相類, 而又不相同處.

§661. **定理二一五** 三角錐臺之體積等於其上底, 下底及兩底比例中項三者之和與其高相乘積之三分之一.



(假設) 三角錐臺 $ABC\text{-}DEF$ 之體積爲 v, 其底 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 之

面積各爲 b, b' 高爲 h.

〔終決〕　$v=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$.

〔證〕　過 E, A, C 及 E, D, C 各作一平面，則原形分爲三個三角錐 $E\text{-}ABC$, $E\text{-}ACD$, $E\text{-}DCF$. 命其體積各爲 v_1, v_2, v_3 則因 E 與 $\triangle ABC$ 之距離爲 h, $\triangle ABC$ 之面積爲 b, $\therefore\quad v_1=\frac{1}{3}bh$.

又 C 與 $\triangle DEF$ 之距離爲 h, $\triangle DEF$ 之面積爲 b'.

$\therefore\quad v_3=\frac{1}{3}b'h$.

$\triangle ABE$, $\triangle ADE$ 共面，故 $E\text{-}ABC$, $E\text{-}ACD$ 視爲 $C\text{-}ABE$, $C\text{-}ADE$時，其高相等. $\therefore\ \frac{v_1}{v_2}=\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE}=\frac{AB}{DE}$.

又　$\triangle ACD$, $\triangle DCF$ 共面，故 $E\text{-}ACD$, $E\text{-}DCF$ 等高.

$\therefore\ \frac{v_2}{v_3}=\frac{\triangle ACD}{\triangle CDF}=\frac{AC}{DF}$. 因 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,

$\therefore\ \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$.

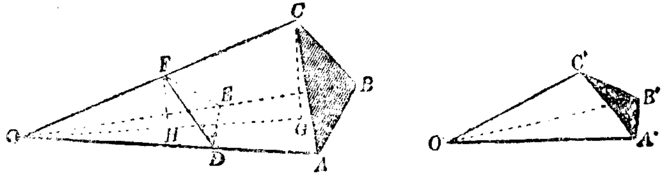
$\therefore\ v_1:v_2=v_2:v_3$. 設 $v_2=\frac{1}{3}\beta h$, 則 $\frac{1}{3}bh:\frac{1}{3}\beta h=\frac{1}{3}\beta h:\frac{1}{3}b'h$, $\therefore\ b:\beta=\beta:b'$, $\therefore\ \beta=\sqrt{bb'}$, $\therefore\ v_2=\frac{1}{3}\sqrt{bb'}h$.

$\therefore\ v=v_1+v_2+v_3=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$.　Q. E. D.

§ 662.　系　任意角錐臺之體積爲 v；兩底之面積各

爲 b, b'；高爲 h；則 $v=\frac{1}{3}h\,(b+b'+\sqrt{bb'})$.

§663. **定理二一六** 二三角錐有一雙三面角相等，則其體積之比等於一雙等三面角三稜相乘積之比。



〔假設〕 三角錐 $O\text{-}ABC$, $O'\text{-}A'B'C'$ 中，三面角 $O\text{-}ABC$＝三面角 $O'\text{-}A'B'C'$.

〔終決〕 $O\text{-}ABC : O'\text{-}A'B'C' = OA\cdot OB\cdot OC : O'A'\cdot O'B'\cdot O'C'$.

〔證〕 在 OA, OB, OC 上各取 D, E, F 令 $OD=O'A'$, $OE=O'B'$, $OF=O'C'$. 聯 DE, EF, DF. 則三角錐 $O\text{-}DEF \cong O'\text{-}A'B'C'$

從 C, F 各作面 OAB 之垂線 CG, FH. 其所決之面交面 OAB 於 OHG. 則 $\because FH \parallel CG$, $\therefore \frac{CG}{FH}=\frac{OC}{OF}$. 三角錐 $O\text{-}ABC$ 視爲 $C\text{-}OAB$, 其體積爲 $\frac{1}{3}CG\cdot\triangle OAB$. 三角錐 $O\text{-}DEF$ 視爲 $F\text{-}ODE$, 其體積爲 $\frac{1}{3}FH\cdot\triangle ODE$.

$$\therefore \frac{O\text{-}ABC}{O\text{-}DEF}=\frac{\frac{1}{3}CG\cdot\triangle OAB}{\frac{1}{3}FH\cdot\triangle ODE}=\frac{CG}{FH}\cdot\frac{\triangle OAB}{\triangle ODE}=\frac{OC}{OF}\cdot\frac{\triangle OAB}{\triangle ODE}.$$

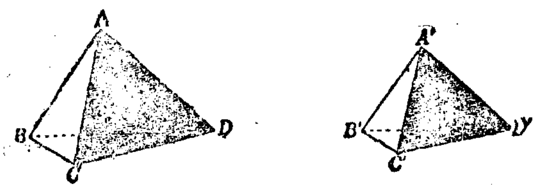
因 $\triangle OAB$, $\triangle ODE$ 中 $\angle O$ 爲共有, $\therefore \dfrac{\triangle OAB}{\triangle ODE}=\dfrac{OA\cdot OB}{OD\cdot OE}$.

$$\therefore \quad \frac{O\text{-}ABC}{O\text{-}DEF}=\frac{OA\cdot OB\cdot OC}{OD\cdot OE\cdot OF}.$$

$\therefore \quad O\text{-}ABC : O'\text{-}A'B'C' = OA\cdot OB\cdot OC : O'A'\cdot O'B'\cdot O'C'$. Q.E.D.

§664. **定義一二六 相似多面體** 二多面體之面數相等, 各雙對應面皆爲相似形, 各雙對應多面角皆相等, 則此二體曰相似多面體.

§665. **定理二一七 二相似三角錐之比等於其各雙對應棱之三乘比.**



〔假設〕 三角錐 $A\text{-}BCD$, $A'\text{-}B'C'D'$ 爲相似體.

〔終決〕 $A\text{-}BCD : A'\text{-}B'C'D' = \overline{AB}^3 : \overline{A'B'}^3$.

〔證〕 $\because$ $A\text{-}BCD$, $A'\text{-}B'C'D'$ 爲相似體,

$\therefore$ 三面角 $A=A'$ $\therefore \dfrac{A\text{-}BCD}{A'\text{-}B'C'D'}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot AD}{A'B'\cdot A'C'\cdot A'D'}$

又 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$,

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}.$$

$$\therefore A\text{-}BCD : A'\text{-}B'C'D' = \overline{AB}^3 : \overline{A'B'}^3. \quad Q.E.D.$$

習題三十二

1. 三角錐之高爲 8, 底邊各爲 13, 14, 15. 求其體積.

2. 一角錐之底爲正方形, 每邊長爲 6, 又知其體積爲 72. 求其高.

3. 求一正四角錐之體積. 已知其斜高爲 12, 側面斜度爲 30°.

4. 求一正四角錐臺之體積. 已知其上底每邊爲 6, 下底每邊爲 8, 高爲 9.

5. 求一正六角錐臺之體積. 已知其上底每邊爲 6, 下底每邊爲 10, 側棱爲 5.

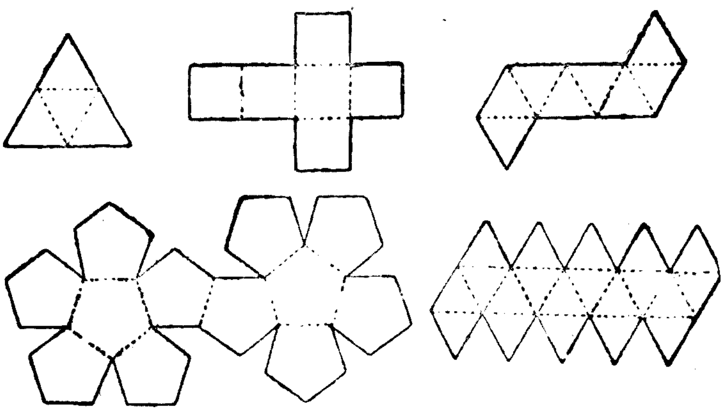
6. 據傳埃及大金字塔爲一正四角錐, 底每邊長 233 公尺, 高 $146\frac{1}{2}$公尺, 求其體積. 假定此塔質料每立方公尺重 3000 公斤. 試求其重量.

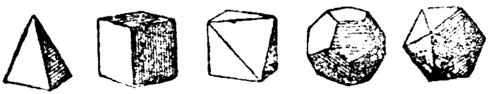
第四十章　正多面體

§666.　**定義一二七　正多面體**　多面體之各多面角皆相等，各面皆為合同正多角形者曰正多面體 (regular polyhedron).

正多面體之面數不能任意，僅有五種：曰正四面體 (regular tetrahedron)，正六面體 (regular hexahedron)即立方體 (cube)，正八面體 (regular octahedron)，正十二面體 (regular dodeca hedron)，正二十面體 (regular icos ahedron). 此五種之外不能更有其他正多面體成立.

以硬紙剪成以下各形．依虛線處折之．兩邊相遇以漿黏之即可得正多面體如下圖.





正四面體　正六面體　正八面體　正十二面體　正二十面體

§667.　定理二一八　正多面體，有五種，僅有五種.

〔證〕 凡多面角至少須有三個面，凡多面角諸面角之和必須小於 360°.

(1)　正三角形每一角為 60°.故以正三角形為正多面體之面，可得三種：

(a)　以三面角為其多面角. 如是則多面角面角之和為 $3\times60°=180°$.

(b)　以四面角為其多面角. 如是則多面角面角之和為 $4\times60°=240°$.

(c)　以五面角為其多面角. 如是則多面角面角之和為 $5\times60°=300°$.

若以六面角為其多面角，則 $6\times60°=360°$，已不復成多面角，故不能成多面體.

(2)　正方形每一角為 90°. 故以正方形為正多面體之面，僅可得一種：

(d)　以三面角為其多面角. 如是則多面角面角之和為 $3\times90°=270°$.

若以四面角為其多面角，則 $4\times90°=360°$，已不復成多面角，故不能成多面體.

(3)　正五角形每一角為 108°. 故以正五角形為正多面體之面，僅可得一種：

(e)　以三面角為其多面角. 如是則多面角面角之和為 $3\times108°=324°$.

若以四面角為其多面角，則 $4\times108°=432°$，更不能

成多面角，故不能成多面體。

(4) 正六角形每一角為 120°. $3\times120^\circ=360^\circ$. 故正六角形已不能為正多面體之面。

∴ 正多面體有五種，而僅有五種。 *Q. E. D.*

〔注意〕 以上五種正多面體，可分記如下：

(1) 正三角形為面，三面角為角，得正四面體。

(2) 正四角形為面，三面角為角，得正六面體。

(3) 正三角形為面，四面角為角，得正八面體。

(4) 正五角形為面，三面角為角，得正十二面體。

(5) 正三角形為面，五面角為角，得正二十面體。

學者苟依上節作法，做成模型觀之，必能明瞭矣。

習題三十三

1. 求正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體及二十面體之稜數及頂點數。

2. 以聯結正四面體每共稜兩面中心之線分為稜所成之體為何種體？

3. 以聯結正六面體每共稜兩面中心之線分為稜所成之體為正八面體。

4 以聯結正八面體每共稜兩面中心之線分為稜所成之體為正六面體。

5. 依上題條件試研究關於正十二面體及正二十面體之情形。

6. 若 AA', BB', CC' 互直垂直等分於 O. 則聯 AB,

AC, AC', AB', $A'B$, $A'C$, $A'C'$, $A'B'$ 諸線分成何種體？

7. 正六面體之四個對角線會於一點.

8. 正六面體之四個對角線將原形分成六個體爲何種體？

第四十一章　圓柱　圓錐

§668.　**定義一二八　曲線柱面**　一動直線常與一定直線平行，常與一定曲線相交，則此動直線所成之面曰曲線柱面（cylindrical surface）

此動直線曰母線（generatrix）．此定曲線曰準線（directrix）．母線移動中之各位置曰原線（element）．

§669.　**定義一二九　曲線柱**　一曲線柱面與平行二平面所圍成之體曰曲線柱（cylinder）．

平行二平面曰曲線柱之底（bases）曲面曰其側面（lateral surface）．

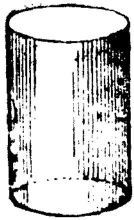
曲線柱側面中之各原線皆相等，因其爲介乎二平行面間之平行線也．

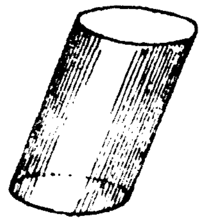
曲線柱兩底之距離曰此曲線柱之高．

§670.　**定義一三〇　圓柱**　曲線柱之底爲圓者曰圓柱（circular cylinder）．

§671.　**定義一三一　直圓柱**　圓柱之原線與底垂直者曰直圓柱（right circular cylinder）．

§672.　**定義一三二　斜圓柱**　圓柱之原線與底不垂直者曰斜圓柱（oblique cylinder）．


直圓柱


斜圓柱

§673.　**定義一三三　相似直圓柱**　二直圓柱之底半徑與高成比例者曰**相似直圓柱** (similar right circular cylinder).

§674.　**定義一三四　切線與切面**　與曲線柱側面會於一點之線曰此曲線柱之切線．含有曲線柱側面中一個原線之平面曰此曲線柱之切面．

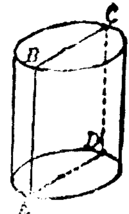
§675.　**定義一三五　圓柱之內接角柱及外切角柱**　角柱之各稜皆爲圓柱側面之原線，其底爲圓柱底之內接多角形，則此角柱曰圓柱之內接角柱．角柱之各面皆爲圓柱之切面，其底爲圓柱底之外切多角形，則此角柱曰圓柱之外切角柱．

§676.　**定義一三六　截面**　平面與曲線柱之交界曰截面．

§677.　**定義一三七　直截面**　截面之與原線垂直者曰直截面 (right section).

§678.　**定理二一九**　過曲線柱原線之截面爲平行四邊形．

〔假設〕　$ABCD$ 爲過曲線柱原線 AB 之截面．

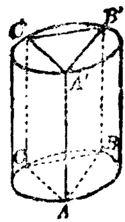


〔終決〕　$ABCD$ 爲 ▱.

〔證〕　過 D 作 $DC' \parallel AB$. 則 DC' 爲曲線柱內一原線，又 DC' 與 AB 共面，故在 AB 與 D 所決面內. $\therefore$ DC' 爲 $ABCD$ 與曲線柱之交界，故合於 AC，又 $AD \parallel BC$. $\therefore$ $ABCD$ $\because$ 爲▱.　　Q. E. D.

§ 679.　系　過直曲線柱，原線之截面爲矩形.

§ 680.　定理二二〇　曲線柱之兩底爲合同形.



〔假設〕　曲線柱 AB'，其兩底爲 ABC, $A'B'C'$.

〔終決〕　$ABC \cong A'B'C'$.

〔證〕　A, B, C 爲 ABC 底上任意三點. AA', BB', CC' 爲原線. 則 $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ 皆爲平行四邊形，$\therefore$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ $BC = B'C'$　$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

將底 ABC 合置於 $A'B'C'$ 令 $\triangle ABC$ 合於 $\triangle A'B'C'$. 則兩底上同原線之點皆合一.

$\therefore$　$ABC \cong A'B'C'$.　　Q. E. D.

§ 681.　系一　與曲線柱各原線相交之平行截面爲合同形.

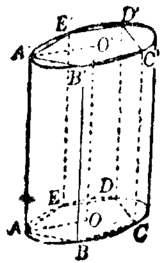
§ 682.　系二　平行於曲線柱底之截面與底爲合同形.

§ 683.　系三　圓柱二底中心之聯線必過平行於底之截面之中心.

§ 684.　定理二二一　角柱之底爲正多角形者可內接

於圓柱.

〔假設〕 角柱 AD' 之底 $AB\cdots E$, $A'B'\cdots E'$ 爲正多角形.



〔終決〕 角柱 AD' 可內接於圓柱.

〔證〕 作正多角形 $AB\cdots E$ 及 $A'B'\cdots E'$ 之外接圓 $\odot O$, $\odot O'$ 因 $AB\cdots E \cong A'B'\cdots E'$, §680

$\therefore\quad OA=O'A'$ 又 $OA \parallel O'A'$. $\therefore\quad OAA'O'$ 爲▱.

$\therefore\quad AA' \parallel OO'$.

同理 $BB' \parallel \cdots \parallel EE' \parallel OO'$. $\therefore\quad AA', BB', \cdots, EE'$ 皆爲圓柱 AD' 之原線. $\therefore$ 角柱 AD' 內接於圓柱 AD'.

Q. E. D.

§685. 系 角柱之底爲正多角形者可外切於圓柱.

§686. **定理二二二** 圓柱內接角柱之底爲正多角形, 若其邊數遞次倍增時, (1) 其側面積接近於圓柱之側面積, 而以圓柱之側面積爲極限. (2) 其體積接近於圓柱之體積, 而以圓柱之體積爲極限.

〔證〕 當圓柱內接角柱底之邊數遞次倍增時, 兩底之極限爲圓柱之兩底.

而此無限多之棱皆在圓柱之側面上, 故側面之極限爲圓柱之側面.

故此角柱之側面積及體積各接近於此圓柱之側面積及體積而以之爲極限.

Q. E. D.

§687. 系一 圓柱外接角柱之底爲正多角形, 若其邊數遞次倍增時, 其側面積及體積各接近於圓柱之側面積

及體積而以之爲極限.

§688. 系二 圓柱之側面積等於其直截面之周與原線之相乘積.

§689. 系三 直圓柱之側面積等於底周與高之相乘積.

§690. 系四 直圓柱之側面積爲 l, 底之半徑爲 r, 高爲 h, 則 $l=2\pi rh$ ($\because$ 底周$=2\pi r$).

§691. 系五 直圓柱之全面積爲 t, 底之半徑爲 r,高爲 h, 則 $t=2\pi r(h+r)$

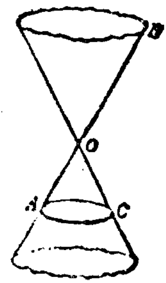
因兩底面積各爲 πr^2, $\therefore$ $t=l+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$.

§692. 系六 圓柱之體積等於底與高之相乘積 ($v=bh$).

§693. 系七 圓柱之體積爲 v, 底之半徑爲 r, 高爲 h, 則 $v=\pi r^2h$ ($\because$ 底面積$=\pi r^2$).

§694. 系八 相似直圓柱側面積及全面積之比等於其底半徑或高之平方比；其體積之比等於其底半徑或高之立方比.

§695. 定義一三八 曲線錐面 一動直線常過一定點，常與一定曲線相交，則此動直線所成之面曰曲線錐面(conical surface).



此動直線曰母線 (generatrix). 此定曲線曰準線 (directrix).

此定點曰頂點 (vertex). 母線移動中之各位置曰原線 (element).

如圖 O 爲曲線錐面 ABC 之頂點, 直

線 AB 爲母線，曲線 AC 爲準線．AB 爲無限長之直線，故曲線錐面 ABC 有兩分支向頂點兩側無限擴張．

§696.　**定義一三九　曲線錐**　一平面與曲線錐面之各原線相交所圍成之體曰曲線錐 (cone). 平面曰曲線錐之底 (base). 曲面曰曲線錐之側面 (lateral surface). 曲線錐面之頂點曰曲線錐之頂點 (vertex). 曲線錐面之原線曰曲線錐之原線 (element).

§697.　**定義一四〇　圓錐**　曲線錐之底爲圓者曰圓錐 (circular cone).

圓錐之頂點與底中心之聯線曰圓錐之軸 (axis). 從頂點至底之垂線曰其高 (altitude).

§698.　**定義一四一　直圓錐　斜圓錐**　圓錐之軸與底垂直者曰直圓錐 (right circular cone)，否則曰斜圓錐 (oblique circular cone).

(註)　本書以下但論圓錐，其他曲線錐略．

§699.　**定義一四二　相似直圓錐**　二圓錐之底半徑與高成比例者曰相似直圓錐．

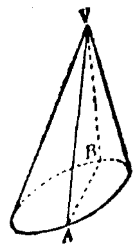
§700.　**定義一四三　切線與切面**　與圓錐側面會於一點之直線曰圓錐之切線．含有圓錐側面中一個原線之面曰圓錐之切面．

§701.　**定義一四四　圓錐之內接錐角及外切角錐**　角錐之各棱皆爲圓錐側面之原線，其底爲圓錐底之內接多角形，則此角錐曰圓錐之內接角錐．角錐之各面皆爲圓錐之切面，其底爲圓錐底之外切正多角形，則此角錐曰圓錐之外切角錐．

照定義可知圓錐之內接角錐及外切角錐，其頂點皆與圓錐頂點合一.

§ 702.　**定義一四五**　**圓錐臺**　圓錐之一部分介乎其底及平行於底之截面間者曰圓錐臺 (frustum of a cone).

§ 703.　**定理二二三**　過圓錐頂點之截面爲一三角形.



〔假設〕 VAB 爲過圓錐頂點 V 之截面.

〔終決〕 VAB 爲三角形.

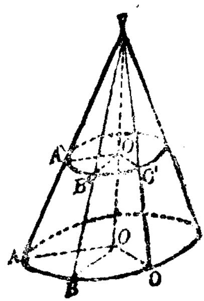
〔證〕 聯 VA, VB, 則皆爲圓錐之原線. 故皆在其側面內, 又 VA, VB 皆在截面 VAB 內. $\therefore VA, VB$ 爲截面與圓錐之交線，又 AB 爲直線. $\therefore \triangle VAB$ 即爲此截面，即截面 VAB 爲三角形.　　*Q. E. D.*

§ 704.　系　過直圓錐頂點之截面爲一二等邊三角形.

§ 605.　**定理二二四**　平行於圓錐底之截面爲圓.

〔假設〕 $A'B'C'$ 爲平行於圓錐底 ABC 之截面.

〔終決〕 $A'B'C'$ 爲圓.



〔證〕 聯圓錐頂點 V 及底中心 O. VO 交截面 $A'B'C'$ 於 O'. 在截面與圓錐交線 $A'B'C'$ 上任取 $A', B', C'\cdots$. 聯 $VA', VB', VC'\cdots$ 交圓錐底於 $A, B, C, \cdots$ 則因面 $A'B'C' \parallel$ 面 ABC, $\therefore O'A'$

$\parallel OA', O'B' \parallel OB, O'C' \parallel OC, \cdots$. $\therefore O'A' : OA = O'B' : OB, = O'C' : OC = \cdots = VO' : VO$. $\because OA = OB = OC = \cdots$. $\therefore \quad O'A' = O'B' = O'C' = \cdots$. 即曲線 $A'B'C'$ 上各點皆與 O'等距.

$\therefore \quad A'B'C'$ 爲圓. Q. E. D.

§ 706. **系一** 圓錐之軸過平行於底之各截面之中心

§ 707. **系二** 圓錐底之平行截面與底之比等於頂點與截面距離之平方與高之平方之比.

§ 708. **定理二二五** 角錐之底爲正多角形者可內接於圓錐，可外切於圓錐.

(證法與 § 684 同)

§ 709. **定理二二六** 圓錐內接角錐或外切角錐之底爲正多角形，若其邊數遞次倍增時，(1) 其側面積接近於圓錐之側面積而以圓錐之側面積爲極限. (2) 其體積接近於圓錐之體積而以圓錐之體積爲極限.

(證法與 § 686 同)

§ 710. **系一** 直圓錐之側面積等於其底圓周與其原線相乘積之半

§ 711. **系二** 直圓錐之側面積爲 l，底半徑爲 r，原線爲 s，則 $l = \pi rs$.

§ 712. **系三** 直圓錐之全面積爲 t，底半徑爲 r，原線爲 s，則 $t = \pi r(r+s)$.

§ 713. **系四** 圓錐之體積等於底與高相乘積之三分之一.

§ 714. **系五** 圓錐之體積為 v, 底之半徑為 r,高為h, 則 $v=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

§ 715. **系六** 相似直圓錐側面積及全面積之比等於其底半徑或高之平方比；其體積之比等於其底半徑或高之立方比.

§ 716. **系七** 直圓錐臺之側面積為 l; 其二底之周為 c, c'; 斜高為 s; 則 $l=\frac{1}{2}s(c+c')$.

§ 717. **系八** 直圓錐臺之側面積為 l; 其二底之半徑為 r, r'; 斜高為 s; 則 $l=\pi s(r+r')$.

§ 718. **系九** 直圓錐臺之體積為 v; 兩底之面積為 b, b'; 高為 h; 則 $v=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$

§ 719. **系一〇** 直圓錐臺之體積為 v; 兩底之半徑為 r, r'; 高為 h; 則 $v=\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2+rr')$.

習題三十四

1. 若直圓柱之側面積為 440, 高為 7, 求其底半徑 $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$.

2. 求一直圓柱之底半徑, 已知其側面積等於其他三個等高直圓柱側面積之和而此三個直圓柱之底半徑各為 3,4,5.

3. 求一斜圓柱之體積已知其原線為 4, 底半徑為 3, 原線斜度為 30°.

4.　求一直圓錐之側面積及體積，已知其斜高爲 13，底半徑爲 5.

5.　求一直圓錐之側面積，已知其體積爲330，高爲3.

6.　一斜圓錐之軸爲 17，此軸在底上之正射影爲 8. 若其體積爲 80π，求其底之半徑.

7.　一直圓錐之底半徑爲 2 寸，過軸截面之頂角爲 $60°$ 若在此體之正中作一底半徑爲一寸之直圓柱形之孔，求除孔外尚餘之體積.

8.　一直角三角形之直角二鄰邊爲 15 寸及 20 寸. 若以其斜邊爲軸旋轉成一體，則其體積若干.

9.　求一直圓錐臺之側面積，已知其兩底半徑爲 6 及 7，其高爲 12.

10.　求上題中直圓錐臺之體積.

11.　已知一立方體之全面積爲 336 平方寸. 求其體積.

12.　求一對角線長 30 寸之立方體之體積.

13.　四面體三雙對邊中點之聯線共點.

14.　一正六角錐之高爲28寸，其底之每邊爲 8 寸，若一平行於底之截面面積爲 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 平方寸. 求此截面與頂點之距離.

15　一角錐爲平行於底之截面分成一小角錐及一角錐臺體積相等. 求小角錐與原角錐高之比及底面積之比.

16.　一底半徑爲 8，高爲 12 之直圓錐爲一平行於底距頂點 3 之平面所截. 求所成圓錐臺之體積.

17.　將一底半徑爲 8，高爲 10 之正六角柱，改成一直

圓柱．求最大之體積（內切圓柱）．

18. 正四面體之棱為 4 寸．求其體積．

19. 正八面體之棱為 4 寸．求其體積．

20. 一直圓柱形鍋爐，高24公寸，底直徑 8 公寸．橫置地上，其軸與水平線平行．鍋中有水最深處為 2 公寸．求其中所有水量．

第十編　球

第四十二章　球之基本性質

§ 720.　**定義一四六　球**　一立體爲一曲面所圍成，此面上一切點與體內一定點之距離皆相等，此立體曰球（sphere）.

球之曲面曰球面（spherical surface）. 球內與球面各點等距之點曰球心（centre）. 球面各點與球心之聯線曰半徑（radius）. 球內過各球心之線分曰直徑（diameter）. 半個球曰半球（hemisphere）.

§ 721.　**從定義直接可得以下數事：**

(1)　球之半徑皆相等；球之直徑皆相等.

(2)　兩球之半徑相等，則此兩球相等. 相等兩球之半徑相等.

(3)　一半圓固定其直徑旋轉一周角，所成之體爲球.

(4)　一點與球心之距離大於半徑，則此點在球外；小於半徑，則在球內；等於半徑，則在球面上.

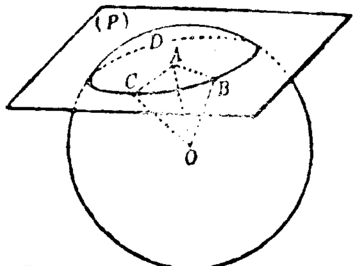
(5)　球外各點與球心距離大於半徑；球內各點與球心距離小於半徑；球面上各點與球心距離等於半徑.

§ 722.　**定理二二七**　一平面與一球相交，其截面爲圓.

〔**假設**〕　BCD爲平面（P）與球之交線.

〔**終決**〕　BCD 爲圓.

〔證〕 從球心 O 作 $OA \perp (P)$. 在 BCD 上任意取二點 BC. 聯 OB, OC, AB, AC. 則在 $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ 中, $OB=OC$(球半徑相等), OA 爲公共邊, $\angle OAB=\angle OAC$〔$\because OA \perp (P)$, $\therefore$ 直角相等〕. $\therefore \triangle OAB \cong \triangle OAC$, $\therefore AB=AC$.



故 BCD 上任意二點 B, C 與 A 等距, 即 BCD 上一切點與 A 等距. $\therefore$ BCD 爲一圓. *Q E D.*

§ 723. **系一** 球心與截面圓心之聯線垂直於截面; 從球心作到截面之垂線必過截面圓心; 從球截面圓心作截面之垂線必過球心.

§ 724. **系二** 球截面距球心愈遠, 則截面圓愈小; 愈近則愈大. 因 $\overline{AC}^2=\overline{OC}^2-\overline{OA}^2$, OC 一定, 故 OA 愈大, 則 AC 愈小.

§ 725. **系三** 過球心之截面圓爲各截圓中最大之圓.

§ 726. **定義一四七 球之大圓** 過球心之截圓曰球之大圓 (great circle of a sphere).

不過球心之截圓, 特稱之曰球之小圓.

§ 727. **定義一四八 軸 極** 垂直於球截面之直徑曰球截圓之軸(axis). 軸之兩端點曰球截圓之二極(poles).

§ 728. **系一** 球之大圓皆相等.

§ 729.　**系二**　球之任意二大圓互相等分.

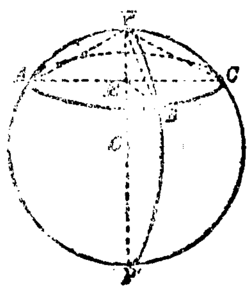
§ 730.　**系三**　球之大圓等分球爲兩半球.

§ 731.　**系四**　球面上任意三點決一球之小圓或大圓(因三點決一平面).

§ 732.　**系五**　球面上不與球心共線之任意二點決一大圓 (∵二點與球心共三點決一平面).

§ 733.　**定義一四九**　**球面上點與點之距離**　球面上二點所決大圓之劣弧爲二點在球面上之距離.

§ 734.　**定理二二八**　球面圓周上諸點與其極等距.



〔假設〕 P,P' 爲球面圓 ABC 之極 A,B,C 爲⊙ABC 上任意點.

〔終決〕 $\frown AP=\frown BP=\frown CP$, $\frown AP'=\frown BP'=\frown CP'$.

〔證〕 PP' 爲⊙ABC之軸, 必過其中心M 聯MA,MB,MC,PA,PB,PC, 則 $\triangle PAM\cong\triangle PBM\cong\triangle PCM$. ∴ $AP=BP=CP$. ∵ 各大圓皆相等, ∴ $\frown AP=\frown BP=\frown CP$.同理$\frown AP'=\frown BP'=\frown CP'$.

Q.E.D.

§ 735.　**定義一五〇**　**球面圓之極距離**　球面圓周上任意點與較近一極之距離爲此圓之極距離 (polar distance of a circle of a sphere).

§ 736.　**系**　大圓之極距離爲一象限.

【註】象限即圓周四分之一,即其度數爲90°之弧,與平面幾何內意義相同.

§737. **定義一五一 球切線** 與球面會於一點之直線曰球之切線 (a line tangent to a sphere).

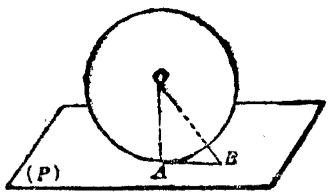
§738. **定義一五二 球切面** 與球面會於一點之平面曰球之切面 (a plane tangent to a sphere).

§739. **定義一五三 相切球** 兩球面會於一點者曰相切球 (two spheres tangent to each other).

§740. **定義一五四 球內接多面體** 多面體之角頂皆在球面上者曰球內接多面體.

§741. **定義一五五 球外切多面體** 多面體之面皆為球之切面者曰球外切多面體.

§742. **定理二二九** 過球面上一點所作半徑之垂面為球之切面.



〔假設〕 OA為球半徑,平面$(P)\perp OA$於A.

〔終決〕 (P)為球之切面.

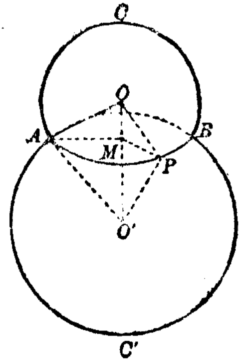
〔證〕 (P)上任意取一點B. 聯OB, AB. 則因$OA\perp(P)$, $\therefore$ $OB>OA$. $\therefore$ B在球外 $\therefore$ (P)內任意點除A外皆在球外 $\therefore$ (P)與球面會於一點. $\therefore$ (P)為球切面. Q.E.D

§743. **系一** 球切面之切點與球心聯線垂直於此球切面.

§744. **系二** 從球切面之切點作垂線必過球心.

§745. **系三** 在球切面內過切點之直線為球切線.

§746. **定理二三〇** 二球面之交界為圓周.



〔假設〕　APB為兩球面之交界.

〔終決〕　APB為圓周.

〔證〕　過球心聯線OO'作一平面，所截二球之大圓為ACB, $AC'B$交於A,B.聯$OA,O'A$.作$AM\perp OO'$.在APB上任意取一點P.聯$PO,PO'.PM$.

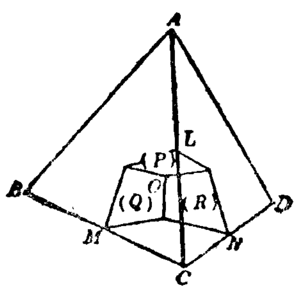
則因OO'為$\triangle AOO'$, $\triangle POO'$之公邊, $AO=PO, AO'=PO'$.

$\therefore\quad \triangle AOO'\cong\triangle POO'$. $\quad\therefore\quad \angle AOM=\angle POM$. $\quad\therefore\quad \triangle AOM\cong\triangle POM$, $\quad\therefore\quad AM=MP$, $\angle OMP=\angle OMA=R\angle$.

$\therefore$　P在過M所作OO'之垂面上而以M為中心MA為半徑所作之圓. 又P為APB上任意點.

$\therefore$　APB為一圓周.　　　　Q. E. D.

§747.　系　相交二球中心聯線過球面交圓之中心且垂直於此圓面



§748.　**定理二三一**　任意四面體可內接於一球.

〔假設〕　$ABCD$為任意四面體.

〔終決〕　$ABCD$可內接於一球.

〔證〕　過棱AC, BC, DC之中點L, M, N各作其垂面(P),(Q),(R)會於一點O.

則因O在(P)內， $\therefore$ $OA=OC$.
又因O在(Q)及R內， $OB=OC$, $OD=OC$.
$\therefore$ $OA=OB=OC=OD$.

$\therefore$ $ABCD$可內接於以O爲球心OA爲半徑之球.

$Q.E.D.$

§ 749. 系一 四面體六個稜之垂直等分面共點.

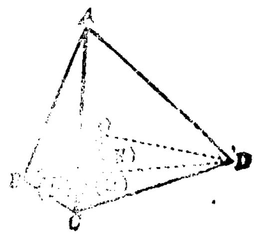
§ 750. 系二 不共面之四點決一球面.

§ 751. 定理二三二 任意四面體可外切於一球.

〔假設〕 $ABCD$爲任意四面體

〔終決〕 $ABCD$可外切於一球

〔證〕 過稜BC, CD, BD各作dih $\angle BC$, $\angle CD$, $\angle BD$之等分面(P),(Q),(R)會於一點O.



則因O在(P)上, $\therefore$ O與面ABC, BCD等距.
又因O在(Q)上, $\therefore$ O與面ACD, BCD等距.
又因O在(R)上, $\therefore$ O與面ABD, BCD等距.
$\therefore$ O與面ABC, ABD, ACD, BCD等距.
$\therefore$ $ABCD$可外切於以O爲球心，O至各面距離爲半徑之球.

$Q.E.D.$

§ 752. 系 四面體六個兩面角之等分面共點.

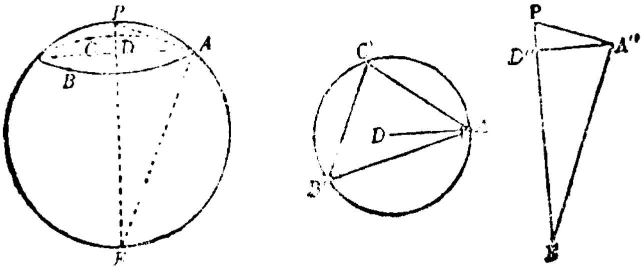
§ 753. 作圖題二八 求作實球體之直徑.

已設 實球體$ABCE$.

求作 $ABCE$之直徑.

〔解法〕 在$ABCE$面上任取一點P爲中心，以任意長

爲半徑在球面上作圓ABC.



在球面圓 ABC 上任意取三點 A, B, C.

在平面上作 A', B', C' 令 $A'B'=AB, A'C'=AC, B'C'=BC$.

作圓 $A'B'C'$ 求得其中心D'.

作 $A''D''=A'D'$. 過 D'' 作 $P''E''\perp A''B''$.

以 A'' 爲中心AP之長爲半徑作弧交$P''E''$於P''.作$A''E''$令$\angle P''A''E''=R\angle$. 交$P''E''$於 E''.

則 $P''E''$ 即所求之直徑　　　　Q.E.F.

〔證〕 設過P之直徑爲PE, 則因 P爲球面圓 ABC之極, $\therefore$ $PE\perp\odot ABC$, 且過其中心D. $\because$ $\odot ABC=\odot A'B'C'$, $\therefore$ $AD=A'D'=A''D''$.

又因 $AP=A''P''$, $\therefore$ $\triangle APD\cong\triangle A''P''D''$,

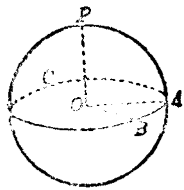
$\therefore$ $\angle APE=\angle A''P''E''$

又因PE爲大圓PAE之直徑, $\therefore$ $\angle PAE=R\angle=\angle P''A''E''$. $\therefore$ $\triangle PAE\cong\triangle P''A''E''$. $\therefore$ $P''E''=PE$ 爲直徑.　　　　Q.E.D.

§754. 作圖題二九 過球面上二點作一大圓.

已設 球面上二點A,B.

求作 過A,B之大圓.



〔解法〕 先求得球半徑之長 r（從上題求得直徑之半）以A,B各爲中心，$\sqrt{2}\,r$爲半徑在球面上作弧交於P.以P爲中心$\sqrt{2}\,r$爲半徑在球面上作大圓ABC即所求.

$Q.E.F.$

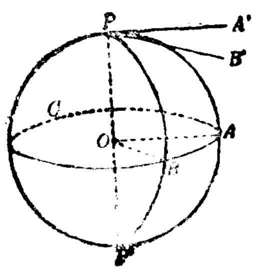
〔證〕 因 $PA=PB=\sqrt{2}\,r$, $\therefore$ $\frown PA=\frown PB$ 爲象限.

$\therefore$ ABC 爲大圓. $Q.E.D.$

§755. 定義一五六 圓弧角 過兩圓弧交點所作各圓弧切線所夾之角爲此相交兩圓弧之角. 圓弧交點曰角之頂點，圓弧曰角之邊.

§756. 定義一五七 球面角 球面上兩大圓弧所夾之角曰球面角.

§757. 定理二三三 球面角之度數等於以頂點爲極之大圓介於此角兩邊間之弧之度數.



〔假設〕 大圓 ABC 之極爲P. 球面角$\angle APB$之兩邊交ABC於A,B.

〔終決〕 $\angle APB$與$\frown AB$有同一度數.

〔證〕　作球半徑OA, OB.作⊙ PAP',⊙ PBP'之切線PA', PB'. 則$\angle APB$即$\angle A'PB'$.

$\because$　P爲⊙ ABC之極，　$\therefore$　$\angle POA=\angle POB=R\angle$.

$\because$　PA', PB'爲⊙PAP, ⊙ PBP'之切線，$\therefore \angle A'PO=\angle B'PO=R\angle$. $\therefore$　$PA' \parallel OA, PB' \parallel OB$. $\therefore$　$\angle A'PB'=\angle AOB$.

但　$\angle AOB$與$\frown AB$有同一度數，$\angle A'PB'$與$\frown AB$有同一度數.

即$\angle APB$與$\frown AB$有同一度數　　　　Q. E. D.

§ 758.　**系一**　兩大圓弧所夾之角等於此兩大圓面所成之兩面角（$\because$　$\angle AOB$爲 dih $\angle A\ \ PP'\ \ B$之平面角）.

§ 759.　**系二**　過一大圓之極所作諸大圓皆與此大圓垂直.

習題三十五

1.　球面圓之切線亦爲球之切線.

2.　一直線切球面圓於T,則此直線在過T之球切面內.

3.　球面圓之極距離爲$60°$,球半徑 13 寸．求此球面圓之半徑及與球心之距離，

4.　球截面與球心距離爲 9 寸，球半徑爲15寸．求此球截面之面積.

5.　二球之半徑各爲 10 寸，4 寸；二球心之距離爲7寸．求其交圓之圓周.

6. 若將地球視爲一球體，則地面上之經線、緯線、赤道各爲何種圓？何處是各緯線之極？

7. 四面體之體積等於全面積與內切球半徑相乘積之三分之一.

8. 從球外一定點可作球之幾個切線？切點之軌跡爲何？

9. 求作所設球體半徑之長.

10. 求作所設球體之象限弧.

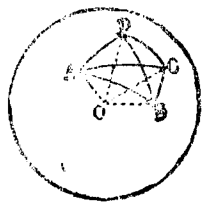
11. 從球面上一點求作一大圓弧令與一所設大圓直交.

12. 在球面上作一三直角三角形.

第四十三章　球面多角形

§ 760.　**定義一五八　球面多角形**　球面上諸大圓圓弧圍成之一部分球面曰球面多角形(spherical polygon).

各弧曰球面多角形之邊 (sides). 兩弧交點曰其頂點(vertices). 兩弧交角曰其角 (angles). 不相鄰兩頂點所聯大圓弧曰對角線 (diagonal) 如圖 $ABCD$ 爲球面四角形, $\frown AB$, $\frown BC$, $\frown CD$, $\frown DA$ 爲其邊, A,B,C,D 爲頂點, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 爲角, $\frown AC$, $\frown BD$ 爲對角線.

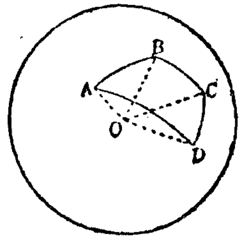


球面多角形與平面幾何中的多角形相類. 若球體爲無限大時, 則球面接近於一平面. 如此之球面多角形, 幾無異於平面多角形矣, 故吾人在地面上若畫一多角形, 雖似爲一平面多角形, 實際爲一球面多角形. 鐵路之路軌, 雖似爲一直線, 實際爲一地面上之大圓弧. 若在地面上畫一圓, 則爲小圓, 而畫圓時之中心實際非眞爲圓之中心而爲圓之極也.

球面多角形與平面多角形相類, 故凡平面多角形中之名稱, 同樣適用於球面多角形. 故球面多角形亦有三角形, 四角形 ………n 角形, 球面三角形亦有二等邊三角形, 等邊三角形等. 且平面三角形之定理往往亦適合於球面三角形. 詳見後文.

§ 761.　**定理二三四**　以球心爲頂點, 以從球心聯球

面多角形各頂點之直線爲棱所成之多面角，其各面角之度數等於球面多角形各邊之度數，其各兩面角之度數等於球面多角形各角之度數.



〔假設〕 O 爲球心，$ABCD$ 爲球面多角形，$O-ABCD$ 爲多面角.

〔終決〕 $\angle AOB, \angle BOC, \cdots\cdots$ 與 $\frown AB, \frown BC, \cdots\cdots$ 有同一度數，dih $\angle OA$, dih $\angle OB, \cdots\cdots$ 與 $\angle DAB, \angle ABC, \cdots\cdots$ 有同一度數.

〔證〕 $\frown AB$, $\frown BC, \cdots\cdots$ 均爲同球之大圓弧，$\angle AOB$, $\angle BOC, \cdots\cdots$ 均各爲其所對之中心角. 因球之大圓皆爲等圓，故 $\angle AOB$, $\angle BOC, \cdots\cdots$ 與 $\frown AB, \frown BC, \cdots\cdots$ 有同一度數.

$\angle DAB$, $\angle ABC, \cdots\cdots$ 均爲大圓弧所夾之角，dih $\angle OA$, dih $\angle OB, \cdots\cdots$ 均爲大圓面所成之角，故 dih $\angle OA$, dih $\angle OB, \cdots\cdots$ 與 $\angle DAB, \angle ABC, \cdots\cdots$ 有同一度數. Q. E. D.

〔註〕 球面多角形 ABCD 與多面角 O-ABCD 曰互相對應. 從多面角之定理可引導得球面三角形之相當定理. 二球面三角形爲合同形或對稱形，當其對應的多面角爲合同形或對稱形.

§ 762. 系一 球面三角形三邊中任意二邊之和大於其他一邊.

§ 763. 系二 球面多角形各邊之和小於大圓周.

§ 764. 系三 二球面三角形中（1）一三角形之二邊及其夾角順次各等於他三角形之二邊及其夾角；（2）一三角形之二角及其間之一邊順次各等於他三角形之二角及其

間之一邊；(3) 一三角形之三邊順次各等於他三角形之三邊；則此二球面三角形爲合同形.

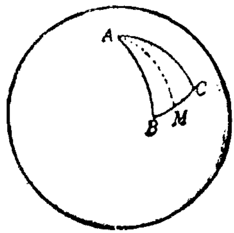
§765. **系四** 系三中順次改爲逆次時，則此二球面三角形爲對稱形.

§766. **定理二三五** 二等邊球面三角形底角相等.

〔假設〕 球面三角形 ABC 中，$\frown AB = \frown AC$.

〔終決〕 $\angle B = \angle C$.

〔證〕 作大圓弧 AM 等分 $\angle A$. 則球面 $\triangle ABM$. $\triangle ACM$ 爲對稱形.



$\therefore \quad \angle B = \angle C.$ *Q. E. D.*

§767. **系** 等邊球面三角形各角皆相等.

習題三十六

1. 球面四角形之二雙對邊各相等，則其二雙對角亦相等.

2. 球面四角形之二雙對邊各相等，則其二對角線互相等分.

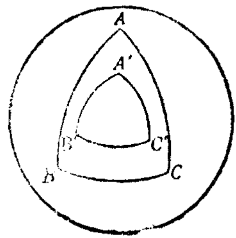
3. 球面 $\triangle ABC$ 中 $\frown AB = \frown AC$, $\angle B$, $\angle C$ 之等分大圓弧交於 P,則 $\frown PB = \frown PC$.

4. 球面上兩小圓 O,O' 交於 A,B, 大圓弧 OO' 等分大圓弧 AB

5. 球面上小圓內等弦與極等距.

第四十四章　極 三 角 形

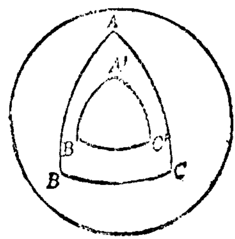
§ 768.　**定義一五九　極三角形**　以球面三角形各頂點爲極各作大圓弧又成一三角形曰原三角形之極三角形（polartriangle).



如圖 A, B, C 各爲大圓 $\frown B'C'$, $\frown A'C'$, $\frown A'B'$ 之極, 則 $\triangle A'B'C'$ 爲 $\triangle ABC$ 之極三角形.

A,B,C 爲極所作三大圓共可成八個三角形. 大圓弧 $\frown AA'$, $\frown BB'$, $\frown CC'$ 須小於象限弧時, $\triangle A'B'C'$ 方爲 $\triangle ABC$ 之極三角形.

§ 769.　**定理二三六**　球面三角形爲他三角形之極三角形, 則他三角形亦爲此三角形之極三角形.



〔假設〕　$\triangle A'B'C'$ 爲 $\triangle ABC$ 之極三角形.

〔終決〕　$\triangle ABC$ 爲 $\triangle A'B'C'$ 之極三角形.

〔證〕　∵　A 爲 $\frown B'C'$ 之極.

∴　$\frown AB'$ 爲一象限.

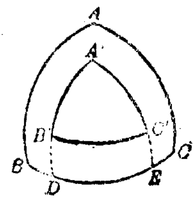
又　C 爲 $\frown A'B'$ 之極.　　∴ $\frown CB'$ 爲一象限

∴ B' 爲 $\frown AC$ 之極.

同理　A', C' 爲 $\frown BC$, $\frown AB$ 之極.

$\therefore$　$\triangle ABC$ 爲 $\triangle A'B'C'$ 之極三角形.　　　$Q.E.D.$

§ 770.　**定理二三七**　二三角形互爲極三角形，則一三角形之角與他三角形之對邊其度數爲互補.



〔假設〕　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 互爲極三角形.

〔終決〕　$\angle A'$ 與 $\frown BC$ 之度數爲互補.

〔證〕　$\frown A'B'$, $\frown BC$ 交於 D, $\frown A'C'$, $\frown BC$ 交於 E.

$\because$　C 爲 $\frown A'B'$ 之極，　$\therefore$　$\frown CD$ 爲一象限.

$\because$　B 爲 $\frown A'C'$ 之極，　$\therefore$　$\frown BE$ 爲一象限.

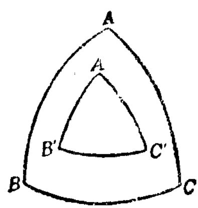
$\therefore$　$\frown BC+\frown DE=\frown BE+\frown CD=2$ 象限.

即 BC 與 $\frown DE$ 互補.

又　$\because$　A' 爲 $\frown BC$ 之極，　$\therefore$　$\angle A'$ 之度數等於 $\frown DE$ 之度數.　$\therefore$　$\angle A'$ 與 $\frown BC$ 互補.　　　$Q.E.D.$

§ 771.　**系**　二球面三角形之一雙角（或一雙邊）相等，則其極三角形之一雙對邊（或對角）相等.

§ 772.　**定理二三八**　球面三角形各角之和大於二直角，小於六直角.



〔假設〕　ABC 爲任意一球面三角形.

〔終決〕　$\angle A+\angle B+\angle C$ 大於 180°，小於 540°.

〔證〕　作 $\triangle ABC$ 之極 $\triangle A'B'C'$

設 $\angle A,\angle B,\angle C$ 之度數各爲 a, b, c, $\frown B'C'$, $\frown A'B'$, $\frown$

$A'B'$ 之度數各爲 a', b', c'.

則因 $a^\circ + a'^\circ = 180^\circ$, $\therefore$ $a^\circ = 180^\circ - a'^\circ$,

同理 $b^\circ = 180^\circ - b'^\circ$,

$c^\circ = 180^\circ - c'^\circ$,

$$\therefore \quad a^\circ + b^\circ + c^\circ = 540^\circ - (a'^\circ + b'^\circ + c'^\circ),$$

$$\therefore \quad a^\circ + b^\circ + c^\circ < 540^\circ.$$

即 $\angle A + \angle B + \angle C$ 之度數小於 540°

又因 $a'^\circ + b'^\circ + c'^\circ < 360^\circ$,

$$\therefore \quad a^\circ + b^\circ + c^\circ > 540^\circ - 360^\circ,$$

$$a^\circ + b^\circ + c^\circ > 180^\circ.$$

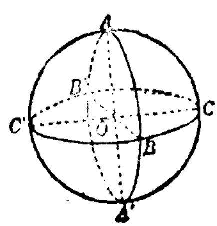
即 $\angle A + \angle B + \angle C$ 之度數大於 180°. **Q. E. D.**

§ 773. **系** 球面三角形可有一個直角，或兩個直角，或三個直角，亦可有一個，二個，或三個鈍角.

〔注意〕 本定理及系爲球面三角形與平面三角形特異之點. 下文 § 777 即根據本定理證明亦爲平面三角形所不能

§ 774. **定義一六〇 兩直角球面三角形** 有兩個直角之球面三角形曰兩直角球面三角形.

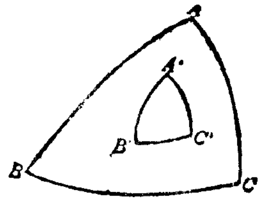
§ 775. **定義一六一 三直角球面三角形** 有三個直角之球面三角形曰三直角球面三角形.



如圖 ABC 爲三直角球面三角形，從球心 O 聯 OA, OB, OC 則 $O-ABC$ 爲三直角三面角，即 dih $\angle B-OA-C$, dih $\angle A-OB-C$, dih $\angle A-OC-B$ 皆爲直角，亦即 OA, OB, OC

皆互相垂直．延長 AO, BO, CO 爲直徑 AA', BB', CC'，延長 $\frown AB, \frown AC, \frown BC$ 爲大圓 $AB\,A'B', AC\,A'C', BC\,B'C'$，共得八個三直角球面三角形合成一全球面．故三直角球面三角形等於全球面之八分之一．

§776. **定理二三九** 球面三角形之二角相等，則爲二等邊球面三角形．



〔假設〕 球面三角形 ABC 中 $\angle B=\angle C$．

〔終決〕 $\frown AB=\frown AC$．

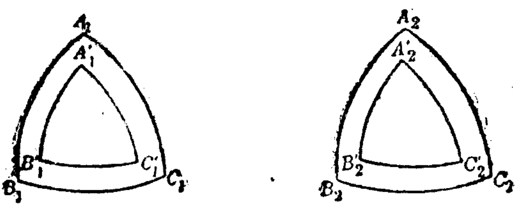
〔證〕 作 ABC 之極$\triangle A'B'C'$．

因 $\angle B=\angle C$， $\therefore \frown A'B'=\frown A'C'$

$\therefore \angle B'=\angle C'$．

$\therefore \frown AB=\frown AC$． Q. E. D.

§777. **定理二四〇** 二球面三角形中，一三角形之三角各等於他三角形之三角，則此二三角形爲合同形或對稱形．



〔假設〕 球面三角形 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 中，$\angle A_1=\angle A_2$，$\angle B_1=\angle B_2$，$\angle C_1=\angle C_2$．

〔終決〕 球面$\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 或爲合同形或爲對稱形．

〔證〕 作 $A_1B_1C_1$ 之極 $\triangle A_1'B_1'C_1'$ 及 $A_2B_2C_2$ 之極 $\triangle A_2'B_2'C_2'$.

因 $\angle A_1=\angle A_2$, $\therefore$ $\frown B_1'C_1'=\frown B_2'C_2'$.

$\therefore$ $\angle A_1'=\angle A_2'$.

$\therefore$ $\frown B_1C_1=\frown B_2C_2$.

同理 $\frown A_1C_1=\frown A_2C_2$, $\frown A_1B_1=\frown A_2B_2$.

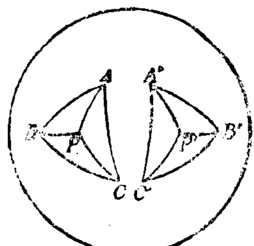
故 $A_1B_1C_1$與$A_2B_2C_2$或為合同形或為對稱形.

Q.E.D.

§778. **定理二四一** 同球面上之對稱球面三角形面積相等.

〔假設〕 同球面上$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$ 為對稱形.

〔終決〕 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$.



〔證〕 設 P,P' 各為過 A,B,C 及A',B',C' 之小圓之極.

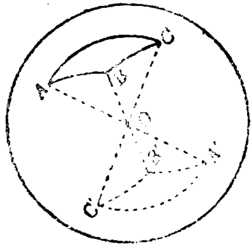
因$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$ 為對稱形, 即$\frown AB=\frown A'B'$, $\frown AC=\frown A'C'$, $\frown BC=\frown B'C'$, $\therefore$ 弦$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $\therefore$ $\odot ABC=\odot A'B'C'$. 聯$\frown PA$, $\frown PB$, $\frown PC$, $\frown P'A'$, $\frown P'B'$, $\frown P'C'$ 得$\frown PA=\frown PB=\frown PC=\frown P'A'=\frown P'B'=\frown P'C'$

$\therefore$ 球面 $\triangle PAB\simeq\triangle P'A'B'$,

球面 $\triangle PAC\simeq\triangle P'A'C'$,

球面 $\triangle PBC\simeq\triangle P'B'C'$.

$\therefore$ 球面 $\triangle PAB+\triangle PAC+\triangle PBC=\triangle P'A'B'+\triangle P'A'C'+\triangle P'B'C'$.



即球面 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

$Q\ E\ D.$

§779. **定義一六二　對頂球面三角形**　兩個球面三角形各雙頂點之聯線皆爲直徑，則此二三角形曰對頂三角形.

如圖 AA', BB', CC',皆爲直徑，則 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 爲對頂球面三角形.

780.　**系**　對頂球面三角形相等.

因對頂球面三角形爲對稱形.

習題三十七

1.　球面三角形三邊各爲 $60°, 70°, 100°$.求其極三角形之各角.

2.　球面 $\triangle ABC$, 若 $\angle A = 110°, \angle B = 80°$, 則 $\angle C > 10°$.

3.　球面三角形之外角小於其兩個內對角之和

4.　球面四角形四角之和大於四直角.

5.　三直角球面三角形之極三角形即爲其原形

6.　球面三角形 ABC 中 $\frown AB = \frown AC$, 則 $\angle B = \angle C$.

7.　球面三角形 ABC 中，　$\angle B = \angle C$,則 $\frown AB = \frown AC$.

8.　球面四角形兩雙對角各相等，　則其兩雙對邊亦

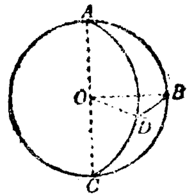
相等.

9. 球面四角形$ABCD$中，若$\angle A=\angle B, \angle C=\angle D$，則$BC=AD$.

10. 甲乙兩地緯度相同，若從甲地至乙地循緯線而行，是否最近之程？

第四十五章　關於球之度數

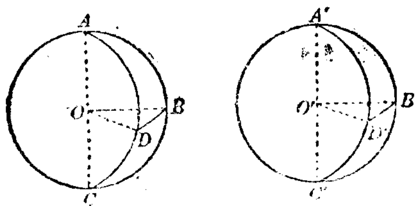
§781.　**定義一六三　月形**　球面上介乎兩個大圓半圓間之一部分曰月形 (lune).



如圖 $\frown ABC$, $\frown ADC$ 皆爲大圓半圓，則$ABCD$爲月形. $\angle BAD$, $\angle BCD$ 爲月形之角. 在$\frown ABC$, $\frown ADC$ 上各取中點B, D 則$\frown AB=\frown BC=\frown AD=\frown DC$ 皆爲象限弧，故 ABD, CBD 爲球面合同二等邊三角形. $\angle BAD=\angle BCD=\angle BOD=\text{dih}\angle AC$.

月形之角若爲 $180°$則此月形即半球面. 月形之角若爲 $90°$, 則此月形爲全球面之四分之一，等於球面三直角三角形之二倍.

§782.　**定理二四二**　同球面或等球面上，等角之月形相等.



〔假設〕　$ABCD$, $A'B'C'D'$ 爲等球面上之月形,

$$\angle BAD=\angle B'A'D'.$$

〔終決〕　$ABCD=A'B'C'D'$.

〔證〕 在$\frown ABC, \frown ADC, \frown A'B'C', \frown A'D'C'$上各取中點$B, D, B', D'$聯大圓弧$\frown BD, \frown B'D'$.

$\because \quad \frown ABC = \frown ADC = \frown A'B'C' = \frown A'D'C'$.

$\therefore \quad \frown AD = \frown AB = \frown A'B' = \frown A'D'$.

又 $\because \angle BAD = B'A'D', \quad \therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$.

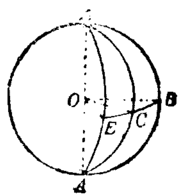
同理　　　$\triangle CBD \cong \triangle C'B'D'$.

$\therefore \quad \triangle ABD + \triangle CBD = \triangle A'B'C' + \triangle C'B'D'$

即　月形 $ABCD = A'B'C'D'$.　　　　Q. E. D.

§783.　**系**　月形之比等於其角之比。

§784.　**定理二四三**　若以直角爲角之單位以三直角球面三角形爲球面之單位，則月形之度數等於其角之度數之二倍.



〔假設〕 月形 $ABA'C$ 爲三直角三角形之 l 倍, $\angle BAC$ 爲直角之 a 倍.

〔終決〕 $l = 2a$.

〔證〕 作大圓圓弧 AEA' 令 $\angle EAB = R\angle$ 則月形 $ABA'E$: $ABA'C = \angle EAB : \angle CAB$.

$\because \quad ABA'E =$ 三直角三面角ABE之二倍.

$\therefore \quad 2 : l = 1 : a$

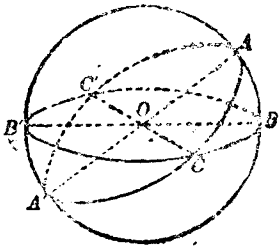
$\therefore \quad l = 2a$.　　　　Q. E. D.

〔註〕 以下數節常以直角爲角之單位，以三直角球面三角形爲球面之單位. 例如 $30° = \frac{1}{3}$，全球面$=8$.

§785.　**系**　月形之角爲直角則此月形之度數等於2.

§786.　**定義一六四**　**球面 n 角形之球面過賸**　從球面 n 角形 n 角之和減去平面 n 角形 n 角之和之差曰此球面 n 角形之球面過賸 (spherical excess of a polygon).

§787.　**定理二四四**　球面三角形之面積等於其球面過賸.



〔假設〕　球面△ ABC 中 $\angle A=a$, $\angle B=b$, $\angle C=c$（直角爲單位）；△ ABC 之面積爲 t（三直角三角形爲單位）.

〔終決〕　$t=a+b+c-2$.

〔證〕　延長$\frown AB$,$\frown AC$,$\frown BC$ 爲大圓再交於A',B',C'.則△ABC=△$A'B'C'$.

∴　$\triangle ABC+\triangle A'B'C=\triangle A'B'C'+\triangle A'B'C$=月形$CA'B'C'=2c$.

又　$\triangle ABC+\triangle A'BC$=月形$ABA'C=2a$.

又　$\triangle ABC+\triangle AB'C$=月形$BAB'C=2b$.

∴　$3\triangle ABC+\triangle A'B'C+\triangle A'BC+\triangle AB'C=2(a+b+c)$.

但　$\triangle ABC+\triangle A'B'C'+\triangle A'BC+\triangle AB'C$=半球面$=4$.

∴　$2\triangle ABC=2(a+b+c)-4$.

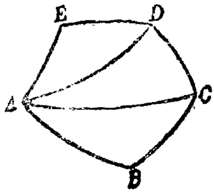
∴　$\triangle ABC=a+b+c-2$.　　　　Q E D.

§788.　**系**　若全球面積爲S,球面三角形之球面過賸爲E,則此三角形之面積爲 $E\times\dfrac{S}{8}$.

（例）　若全球面積爲40平方寸，球面三角形 ABC 中 $\angle A=40°$,$\angle B=60°$,$\angle C=100°$, 則此三角形之面積爲 $E\times\dfrac{S}{8}=(a+b+c-2)\times\dfrac{S}{8}=\left(\dfrac{40}{90}+\dfrac{60}{90}+\dfrac{100}{90}-2\right)\dfrac{40}{8}$ 平方寸＝

$\frac{200-180}{90}\times\frac{40}{8}=\frac{2}{9}\times 5=\frac{10}{9}$平方寸.

§789.　**定理二四五**　球面多角形之面積等於其球面過賸.



〔假設〕　$ABC\cdots E$為球面n角形，其面積為t，其各角之度數為a, b, c, $\cdots e$（直角為單位).

〔終決〕　$t=(a+b+c+\cdots\cdots+e)-2(n-2)$.

〔證〕　過A作諸對角線$\frown AC\frown AD,\cdots$分原形為$(n-2)$個球面三角形.

因每一三角形之面積為各內角之和減2.

故此n角形之面積為各內角之和減$2(n-2)$.

$\therefore\quad t=(a+b+c+\cdots\cdots+e)-2(n-2)$.　Q. E. D.

習題三十八

1.　球面$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$,$\angle B=100°$,$\angle C=110°$，則此三角形為全球面之幾分之幾？

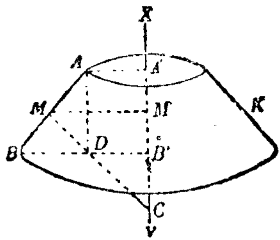
2.　球面$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle B=\angle C$.　其面積為全球面四分之一，則$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$各為幾度？

3.　球面三角形之各角為$80°$, $90°$, $100°$與一月形等積.　求月形角.

4.　球面六角形之各角為$120°$, $130°$, $130°$, $140°$,$150°$, $160°$.則其面積為全球面之幾分之幾？

§790.　**定理二四六**　一線分以一直線為軸回繞旋轉

所成之面積等於此線分在軸上之正射影與此線分之垂直等分線介乎此線分與軸間之一部分之相乘積.



〔假設〕 AB 以 XY 爲軸圍繞旋轉成一曲面 ABK. $A'B'$ 爲 AB 在 XY 上之射影. MC 爲 AB 之垂直等分線介乎 AB 與 XY 間之一部分.

〔終決〕 ABK 之面積等於 $A'B'\cdot 2\pi MC$.

〔證〕 作 $MM' \parallel AA'$, $AD \parallel A'B'$.

因 ABK 即直角錐臺之側面, 故其面積等於 $\pi AB(AA'+BB')=\pi AB\cdot 2MM'$.

$\because$ $\triangle ABD$ 與 $\triangle MCM'$ 各邊互相垂直,

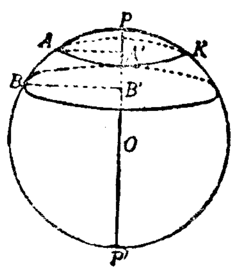
$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle MCM'$.

$\therefore$ $AB:MC=AD:MM'$ $\therefore$ $AB\cdot MM'=AD\cdot MC$.

$\therefore$ $ABK=AB\cdot 2\pi MM'=2\pi AB\cdot MM'=2\pi AD\cdot MC=2\pi A'B'\cdot MC$.

$\therefore$ $ABK=A'B'\cdot 2\pi MC$. Q. E. D.

§791. **定義一六五 帶形**



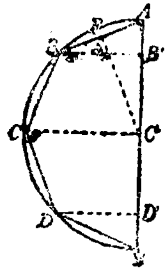
球面介乎二平行平面間之一部分[illegible]帶形 (zone).

如圖球面爲平行二面所截部分 ABK 爲帶形, 亦即 $\frown AB$ 以直徑 PP' 爲軸所旋轉而成之面. ⊙A', ⊙B' 爲帶形之底 (bases). 二底距離

$A'B'$ 爲其高 (altitude).

若平行二面之一爲球之切面時，則爲單面帶形．若二面皆爲球之切面時，則此帶形即全球面.

§ 792. **定理二四七** 球面積等於其大圓面積之四倍.



〔假設〕 設半圓周$AB\cdots E$以直徑AE爲軸圍繞旋轉所成之球面積爲 S，其半徑爲r.

〔終決〕 $S=4\pi r^2$.

〔證〕 在半圓內作圓內接正n角形之半 $AB\cdots E$ 從各頂點$B,C\cdots D$作AE之垂線$BB',CC',\cdots DD'$.

因弦 $AB,BC,\cdots,DE$皆相等，故中心C' 與此各弦等距．設此距離$C'F=d$. 當半圓周旋轉時,

$$AB\text{所成之面}=AB'\cdot 2\pi FC'=AB'\cdot 2\pi d,$$

同理 $\quad BC\text{所成之面}=B'C'\cdot 2\pi d,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$DE\text{所成之面}=D'E\cdot 2\pi d.$$

$\therefore$ 折線$AB\cdots\cdots E$所成之面$=(AB'+B'C'+\cdots\cdots+D'E)\cdot 2\pi d=AE\cdot 2\pi d$. 當$n$無限大時，此內接正多角形接近於圓，折線$AB\cdots E$接近於半圓周$AB\cdots\cdots E$，折線 $AB\cdots\cdots E$所成之面接近於S'，$d=C'F$接近於r.

$$\therefore\quad S=AE\cdot 2\pi r,\qquad \because\ AE=2r.$$

$$\therefore\quad S=4\pi r^2.\qquad Q\ E\ D.$$

§ 793. **系一** 二球球面面積之比等於其半徑平方之比.

§ 794. **系二** 帶形面積等於其高與大圓周之相乘積

（若高爲h,則帶形$=2\pi rh$）.

§ 795.　**系三**　同球或等球面上帶形之比等於其高之比.

習題三十九

1.　一月形之角爲$30°$，球半徑爲 3 公寸，求月形之面積.

2.　帶形之高爲 5 公寸，球半徑爲10公寸，求此帶形之面積

3.　若球半徑爲 10 公寸之球面上一 $\triangle ABC$，$\angle A=80°$，$\angle B=90°$，$\angle C=100°$，求 $\triangle ABC$ 之面積$\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$.

4.　假定地球爲半徑4000哩之球體，求其面積.

5.　北溫帶爲地球面上之帶形，若其高等於地球半徑之$\frac{13}{25}$，而地球之半徑爲4000哩．求北溫帶之面積.

6.　全球面積爲110平方寸，面上有帶形其面積爲11平方寸．求帶形之高.

7.　球面四角形 $ABCD$,其角各爲$70°$,$90°$,$100°$,$120°$.球半徑爲 4 公尺．求四角形面積.

8.　一球面正三角形其面積爲 π'球半徑爲 2.求此三角形之各角.

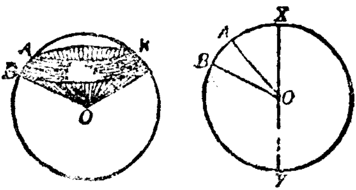
9.　球面正六角形各角等於$160°$,求其面積（已知球半徑爲10寸）.

10.　半圓之直徑爲26尺，中有一弦距半圓中心12尺，

弦之中點距半圓直徑 6 尺．若此弦以半圓直徑爲軸旋轉成一面．試求其面積

§ 796. **定義一六六 球扇形** 半圓內扇形以直徑爲軸圍繞旋轉所成之體曰球扇形 (spherical sector).

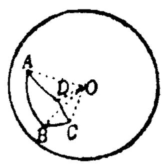
扇形OAB圍繞XY旋轉所成之體如圖 $OABK$ 曰球扇形.



⌒AB 所成之帶形曰此扇形之底．若XY 合於扇形OAB 之一邊時，此球扇形之底爲單底帶形，則此球扇形亦稱曰球圓錐 (spherical cone).

§ 797. **定義一六七 球角錐** 球面多角形與其對應多面角之各面所圍成之體曰球角錐.

如圖O $ABCD$爲球角錐. $ABCD$爲其底．球心O 爲頂點.



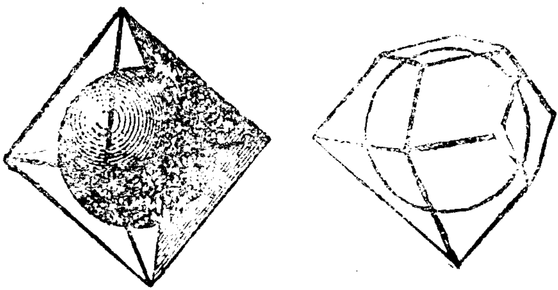
§ 798. **定義一六八 球分** 帶形與其二底所圍成之體曰球分 (spherical segment).

帶形之底亦爲球分之底，帶形之高亦爲球分之高．若帶形爲單底帶形時，則此球分爲單底球分.

§ 799. **定義一六九 球劈** 月形與其對應兩面角之二面所圍成之體曰球劈 (sphericalwedge).

§ 800. **定理二四八** 球體積等於其全面積與半徑相乘積之三分之一.

假設 設球體積爲 v，球面積爲 s，其半徑爲r.



〔終決〕　$v=\frac{1}{3}rs.$

〔證〕　設有一 n 面體外切於此球，將其各頂點與球心連結成 n 個角錐．此諸角錐之高皆爲 r.

設此 n 面體之體積爲 v'，其全面積爲 s'，其 n 個面之面積各爲 $a_1, a_2, \cdots a_n$，即 n 個角錐之底各爲 $a_1, a_2, \cdots a_n$，故其體積各爲 $\frac{1}{3}ra_1$, $\frac{1}{3}ra_2$, $\cdots$, $\frac{1}{3}ra_n$.

$\therefore$　此 n 面體之體積爲 $\frac{1}{3}r(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\frac{1}{3}rs'$.

$$\therefore \quad v'=\frac{1}{3}rs'.$$

若 n 爲無限大時，則此 n 面體接近於球體，其體積接近於球體積，其全面積接近於球面積，即 v'，接近於 v, s' 接近於 s.

$$\therefore \quad v=\frac{1}{3}rs. \qquad Q.E.D.$$

§801.　**系一**　若球半徑爲 r，直徑爲 d，體積爲 v，則 $v=\frac{4}{3}\pi r^3$;　$v=\frac{1}{6}\pi d^3$.

§802.　**系二**　二球體積之比等於其半徑或直徑之立

方之比.

§ 803. 系三 球角錐之體積等於其底面積與球半徑相乘積之三分之一.

§ 804. 系四 球扇形之體積等於其底面積與球半徑相乘積之三分之一.

§ 805. 系五 若球扇形之體積爲 v,高爲 h,球半徑爲 r,則$v=\frac{2}{3}\pi r^2h$.

$\because$ 球扇形底面積爲 $2\pi r\cdot h$, $\therefore$ $v=2\pi rh\cdot\frac{1}{3}r$

$=\frac{2}{3}\pi r^2 h$

§ 806. 系六 球體積與其外接圓柱體積之比爲2:3.

習 題 四 十

1. 球半徑 4 公寸，求其體積.

2. 球體積爲 100 立方公尺，求其半徑.

3. 球面積爲 10 平方公尺，求其體積.

4. 球體積爲 v 立方公寸,求其面積.

5. 求單底球分之體積，已知其底半徑爲 3,高爲 2(先求球半徑).

6. 求球分之體積，已知其兩底半徑爲 2 及 5,高爲 [illegible]

7. 三角形ABC，$AB=14$,$AC=13$,$BC=15$. 若此三角形以AB爲軸旋轉，則成一體，求其體積.

8. 梯形$ABCD$,$AB\parallel CD$,$AB=10$,$CD=4$,$AD=B$

$C=5$,此三角形以 AB 爲軸旋轉成一體，求此體之體積.

9.　求一中空鐵球之體積，已知其外半徑爲 13,內半徑爲 8

10. 若帶形之面積爲 80,高爲 4,求此球半徑.

11.　一圓柱形水桶，其底半徑爲 4 公寸，內儲有水．一鐵球投諸其中，水升高一公寸．求球半徑.

12.　求一單底球分之體積，已知其曲面面積爲 20π,其高爲 2 .

13.　一立方體之每邊爲 10. 求其外接球半徑.

14.　假定地球是一球體，其半徑爲 4000哩．則在離地面高1000哩處可見地面上幾平方哩？

15.　以一立方呎之鉛製直徑$\frac{1}{4}$吋之鉛彈，可製幾枚？(1呎=12吋).

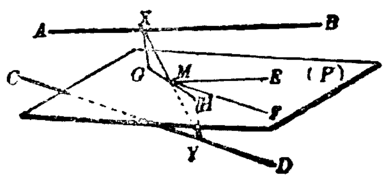
第十一編　立體幾何題之解法

第四十六章　立體幾何題之解法及雜例

§ 807.　**習題解法**　立體幾何題之證明，雖根據立體幾何中各定理，然仍不能脫離平面幾何．未有不諳平面幾何而能解立體幾何者．反之，學者苟於平面幾何各定理熟識無遺，於平面幾何中各例題之解作已能得心應手不感困難，則對於立體幾何中例題之解作，無難事矣．茲雜舉各例如下：

（例一）　AB, CD爲不共面二定直線．X, Y爲AB, CD上任意點．求XY中點之軌跡．

〔解法〕　過XY中點M作$ME \parallel AB$, $MF \parallel CD$. 則ME, MF所決定之平面(P)即M之軌跡．

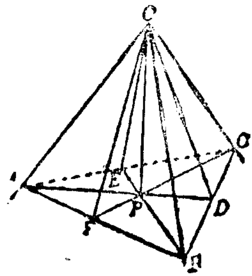


〔證〕　$\because\ AB \parallel ME$,　$\therefore\ AB \parallel (P)$,

$\because\ CD \parallel MF$,　$\therefore\ CD \parallel (P)$.

從X, Y至(P)作垂線XG, YH. 則因$XM = YM$，$\therefore\ XG = YH$．$\therefore$　(P)與AB, CD等距．$\therefore$　AB上任意點X, CD上任意點Y與(P)等距．$\therefore$　XY之中點必在(P)上，而(P)外之點決非XY之中點．$\therefore$　(P)爲XY中點之軌跡．　　$Q.E.D.$

（例二） 過三面角各棱所作各對面之垂面會於一直線.



〔證〕 三面角 $O\text{-}ABC$ 中，從 OA 作 OBC 之垂面 OAD，從 OB 作 OAC 之垂面 OBE，OAD，OBE 交於 OP. 作 OP 之垂面 ABC 截 $O\text{-}ABC$ 之各稜於 A, B, C.

則因 $OP\perp ABC$, $\therefore$ $OAD\perp ABC$ （爲何？）

又因 $OAD\perp OBC$, $\therefore$ $OAD\perp BC$. （爲何？）

$\therefore$ $AD\perp BC$. （爲何？）

同理 $BE\perp AC$.

故 P 爲 $\triangle ABC$ 之垂心. 延長 CP 交 AB 於 F, $CF\perp AB$.

但 $OP\perp ABC$, $\therefore$ $OF\perp AB$. （爲何？）

$\therefore$ $AB\perp OCF$. （爲何？） $\therefore$ $OAB\perp OCF$. （爲何？）

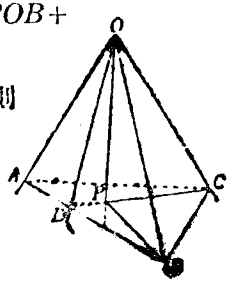
即從 OC 至 OAB 所作垂面 OCF 亦過 OP.

$\therefore$ 從 OA, OB, OC 至對面所作三垂面共線.

Q. E. D.

（例三） OP 爲三面角 $O\text{-}ABC$ 內任意一直線.

〔求證〕 $\angle AOB+\angle ACC>\angle POB+\angle POC$.



〔證〕 面 COP 交 AOB 於 OD. 則在三面角 $O\text{-}ADC$ 中,

$$\angle DOA+\angle AOC>\angle DOC.$$

$$\therefore\ \angle BOD+\angle DOA+\angle AOC$$

$$\angle BOD+>\angle DOC,$$

即 $\angle AOB+\angle AOC>\angle DOB+\angle DOC.$

又在三面角 $O\text{-}BDP$ 中，$\angle BOD+\angle DOP>\angle BOP.$

$\therefore\quad \angle BOD+\angle DOP+\angle POC>\angle BOP+\angle POC,$

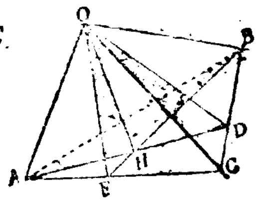
即 $\angle DOB+\angle DOC>\angle POB+\angle POC.$

$\therefore\quad \angle AOB+\angle AOC>\angle POB+\angle POC.$　　Q. E. D.

（例四）一截面截三直角三面角 $O\text{-}ABC$ 之各稜於 A,B,C. 求證 $\triangle ABC$ 之垂心 H 為 O 在平面 ABC 上之正射影.

〔證〕 $\because\quad OA\perp OB,\ OA\perp OC,$

$\therefore\quad OA\perp BOC.$



又 $\because\quad AD\perp BC,\quad \therefore\quad OD\perp BC.$

$\therefore\quad BC\perp OAD,$

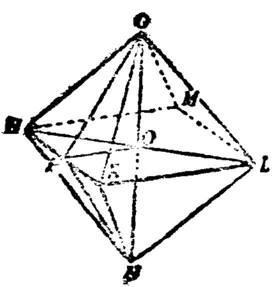
$\therefore\quad ABC\perp OAD.$

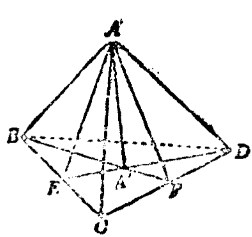
同理　$ABC\perp OBE.$

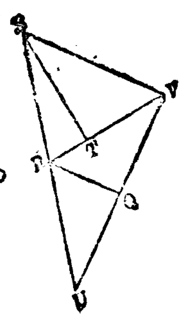
故 OAD,OBE 之交線 $OH\perp ABC.$

$\therefore\quad H$ 為 O 在 ABC 上之正射影.　　Q. E. D.

（例五）正四面體相鄰二面之兩面角與正八面體相鄰







二面之兩面角互爲補角.

〔假設〕 $ABCD$ 爲正四面體，$GHKLMN$ 爲正八面體.

〔求證〕 dih $\angle A\text{-}BC\text{-}D$, dih$\angle G\text{-}HK\text{-}N$ 互爲補角.

〔證〕 取 BC, CD 之中點 E, F.

因 $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ 爲正三角形，$\therefore$ $AE\perp BC$, $DE\perp BC$.

$\therefore$ 平面 $AED\perp BC$, $\therefore$ $AED\perp BCD$.

同理 $AFB\perp BCD$.

故 AFB, AED 之交界 $AA'\perp BCD$.

而 A' 爲 $\triangle BCD$ 之重心，$\therefore$ $EA'=\frac{1}{3}ED=\frac{1}{3}AE$.

在八面體中，GN 交 $HKLM$ 於 O. 取 HK 之中點 P. 聯 GP, OP, NP. 則因 $HKLM$, $HNLG$ 皆爲正方形，O 爲其中心，

$$\therefore \quad OG=OH,\quad OP=PH=HK.$$

$$\overline{GP}^2=\overline{OG}^2+\overline{OP}^2=\overline{OH}^2+\overline{OP}^2=\overline{OP}^2+\overline{PH}^2+\overline{OP}^2=3\overline{OP}^2.$$

作直角三角形 RST 令 $\angle RTS=R\angle$, 且 $RS=3RT$. 延長 RT 至 V, SR 至 U 令 $RV=RU=RS$. 聯 SV, UV. 則 $\angle SVU=R\angle$ 作 $RQ\parallel SV$, 則 $RQ\perp UV$, $RQ=\frac{1}{2}SV$.

$$\therefore \quad \overline{RQ}^2=\frac{1}{4}\overline{SV}^2=\frac{1}{4}(\overline{ST}^2+\overline{TV}^2)=\frac{1}{4}(\overline{SR}^2-\overline{RT}^2+\overline{TV}^2)=\frac{1}{4}\left[\overline{RV}^2-\left(\frac{RV}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}RV\right)^2\right]=\frac{1}{4}\times\frac{9-1+4}{9}\overline{RV}^2=\frac{1}{3}\overline{RV}^2.$$

$\because\ RT : RS = EA' : EA = 1 : 3$, 而 $\angle RTS = \angle EA'A$ $=$直角.

$\therefore\ \triangle SRT \sim \triangle AEA'$, $\therefore\ \angle SRT = \angle AEA'$.

又 $\overline{RQ}^2 : \overline{RV}^2 = \overline{OP}^2 : \overline{GP}^2 = 1 : 3$, $\therefore\ RQ : RV = OP : GP$, 而 $\angle RQV = \angle POG =$直角.

$\therefore\ \triangle RQV \sim \triangle POG$.

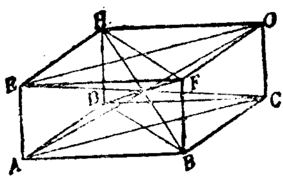
$\therefore\ \angle QRV = \angle OPG$. $\therefore\ \angle URV = \angle NPG$.

$\therefore\ \angle AEA' + \angle NPG = \angle SRT + \angle URV = 2$直角.

故 dih$\angle A\text{-}BC\text{-}D$, dih$\angle G\text{-}HK\text{-}N$ 互爲補角. Q.E.D

（例六） 平行六面體各對角線上正方形之和等於各棱上正方形之和.

〔假設〕 $ABCD\cdot EFGH$ 爲平形六面體.



〔求證〕 $\overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{DH}^2$

〔證〕 從平面幾何知平行四邊形兩對角線之和等於其四邊之和（證法見附註）.

$$\therefore\ \overline{AG}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GE}^2 + \overline{EA}^2,$$

$$\overline{BH}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{HD}^2.$$

$$\therefore\ \overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2$$

$$=\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CG}^2+\overline{DH}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+\overline{EG}^2+\overline{FH}^2.$$

又 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2$,

$\overline{EG}^2+\overline{FH}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2$.

$\therefore$ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+\overline{EG}^2+\overline{FH}^2$

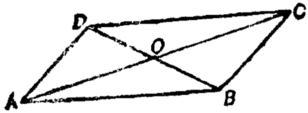
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2.$$

$\therefore$ $\overline{AG}^2+\overline{BH}^2+\overline{CE}^2+\overline{DF}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2$

$+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2+\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CG}^2$

$+\overline{DH}^2$. Q. E. D.

〔附註〕 ▱$ABCD$中，AC, BD 交於O.則



$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OB}^2)$,

$\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=2(\overline{CO}^2+\overline{OB}^2)$.

然$AO=CO=\frac{1}{2}AC, BO=\frac{1}{2}BD$.

故 $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$

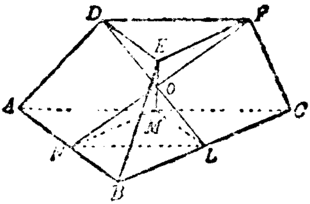
$$=2\left[\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2\right]+2\left[\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\left[2\left(\frac{AC}{2}\right)^2+2\left(\frac{BD}{2}\right)^2\right]$$

$$=4\left[\frac{\overline{AC}^2}{4}+\frac{\overline{BD}^2}{4}\right]=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2.$$

故平行四邊形兩對角線上正方形之和等於各邊上正方形之和.

（例七） 三角錐臺一底之各頂點與他底對邊中點之聯線爲共點線.



$ABC\text{-}DEF$ 爲三角錐臺. L, M, N 各爲 BC, AC, AB 之中點. 求證 DL, EM, FN 共點.

〔證〕 $\because$ L, M 各爲 BC, AC 之中點, $\therefore$ $LM \parallel AB$. 然 $DE \parallel AB$, $\therefore$ $LM \parallel DE$, 故 LM, DE 共面.

故 DL, EM 交於一點 O, 而 $\dfrac{DO}{OL}=\dfrac{DE}{LM}=\dfrac{DE}{\frac{1}{2}AB}=2\cdot\dfrac{DE}{AB}$

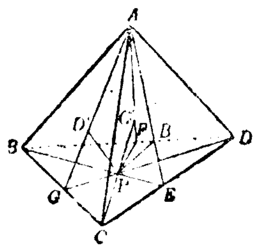
同樣 LN, DF 共面,

故 DL, FN 交於一點 O' 而 $\dfrac{DO'}{O'L}=\dfrac{DF}{LN}=\dfrac{DF}{\frac{1}{2}AC}=2\cdot\dfrac{DF}{AC}$.

但 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\therefore$ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DF}{AC}$, $\therefore$ $\dfrac{DO}{OL}=\dfrac{DO'}{O'L}$.

故 O, O' 合一. 故 DL, EM, FN 會於一點 O. Q.E.D.

（例八） 設 P 爲四面體 $ABCD$ 底 BCD 上任意一點. $PB' \parallel AB$ 交 ACD 於 B'. $PC' \parallel AC$ 交 ABD 於 C', $PD' \parallel AD$ 交 ABC 於 D'.

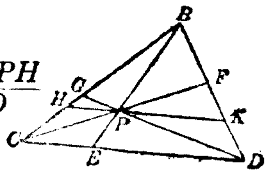


〔求證〕 $\dfrac{PB'}{AB}+\dfrac{PC'}{AC}+\dfrac{PD'}{AD}=1$.

〔證〕 聯 BP, CP, DP 各交對邊於 E, F, G. 則因 $PB' \parallel AB$, $\therefore$ $ABPB'$ 共面, $\therefore$ AB' 交 BP 於 E. $\therefore$ $PB' : AB = PE : BE$. 同理 $PC' : AC = PF : CF$, $PD' : AD = PG : DG$.

$$\therefore\quad \frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}+\frac{PD'}{AD}=\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}+\frac{PG}{DG}.$$

在平面 BCD 中，過 P 作 CD 之平行線交 BC, BD 於 H,K. 則　$PF:CF=PK:CD$,



$PG:DG=PH:CD$.

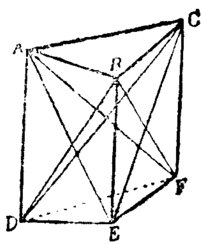
$$\therefore\quad \frac{PF}{CF}+\frac{PG}{DG}=\frac{PK}{CD}+\frac{PH}{CD}=\frac{PK+PH}{CD}$$

$$=\frac{KH}{CD}=\frac{PB}{BE}$$

$$\therefore\quad \frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}+\frac{PG}{DG}=\frac{PE}{BE}+\frac{PB}{BE}=\frac{BE}{BE}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{PB'}{AB}+\frac{PC'}{AC}+\frac{PD'}{AD}=1.\qquad Q.E.D$$

（例九）　斜截三角柱　ABC-DEF 中，$AD\parallel BE\parallel CF$，但 ABC 不平行於 DEF. A,B,C 與底 DEF 之距離各為 h_1,h_2,h_3. 求證　ABC-DEF　之體積等於 $\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3)\cdot\triangle DEF$.



（證）　作平面 AEF,則 $ABC-DEF=A-DEF+A-BEFC$. 作平面AEC,則 $A-BEFC=A-BEC+A-CFE$.

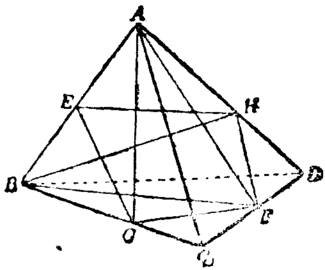
$\therefore\quad ABC-DEF=A-DEF+A-BEC+A-CFE$.

因　$CF\parallel BE$,　$\therefore$　$\triangle BEC=\triangle BEF$,　$\therefore$　$A-BEC=A-BEF$.　$\because$　$AD\parallel BE$,　$\therefore$　$AD\parallel BEF$,　$\therefore$　$A-BEF=D-BEF\equiv B-DEF$.　$\because$　$AD\parallel CF$,　$\therefore$　$AD\parallel CFE$,　$\therefore$　$A-CEF=D-CEF=C-DEF$.　$\therefore$　$ABC-DEF=A-DEF+B-DEF+C-DEF$.

$$=\frac{1}{3}h_1\cdot\triangle DEF+\frac{1}{3}h_2\cdot\triangle DEF+\frac{1}{3}h_3\cdot\triangle DEF$$

$$=\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3)\triangle DEF.\qquad Q.E.D.$$

（例一〇）　過四面體一雙對邊中點聯線所作之平面平分此四面體.



$ABCD$ 爲任意四面體. E,F 各爲 AB,CD 之中點. 過 E,F 之平面交 BC,AD 於 G,H. 求證 $ABCD$ 爲 $EGFH$ 所分成 $AEGCFH$ 及 $BEHDFG$ 兩份相等.

〔證〕　$AEGCFH=A-EGFH+A-GCF,$

$BEHDFG=B-EGFH+B-HDF.$

因 E 爲 AB 之中點，故 A,B 與面 $EGFH$ 等距.

$\therefore\ A-EGFH=B-EGFH$. 故今所尚待證明者，爲 $A-GCF$, $B-HDF$ 兩錐體之相等

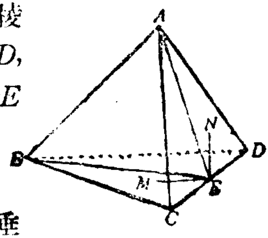
$$\because=\frac{A-GCF}{A-BCD}=\frac{\triangle GCF}{\triangle BCD}=\frac{CG\cdot CF}{CB\cdot CD}=\frac{CG\cdot CF}{CB\cdot 2CF}=\frac{CG}{2CB},$$

$$\frac{B-HDF}{B-ADC}=\frac{\triangle HDF}{\triangle ADC}=\frac{DH\cdot DF}{DA\cdot DC}=\frac{DH\cdot DF}{DA\cdot 2DF}=\frac{DH}{2DA}.$$

因 $A-BCD$ 即 $B-ADC$，故今所尚待證明者，爲 $CG:CB$ 與 $DH:DA$ 二比之相等。

設 A,B 與 $EGFH$ 之距離爲 p；C,D 與 $EGFH$ 之距離爲 q. 則　$CG:GB=q:p=DH:AH$.

$\therefore\ \ CG:CG+GB=DH:DH+AH$，即 $CG:CB=DH:AH$. $\therefore\ ABCD$ 爲 $EGFH$ 所平分　　　　$Q.E.D.$



(例一一)　從四面體 $ABCD$ 棱 AB 作 dih $\angle AB$ 之等分面交 ACD, BCD 於 AE, BE. 則 $\triangle ACE:\triangle ADE=\triangle BCE:\triangle BDE=\triangle ABC:\triangle ABD$.

〔證〕　從 E 向 ABC, ABD 作垂線 EM, EN. 則因 E 在 dih$\angle C-AB-D$ 之等分面上.

$\therefore\quad EM=EN.\quad\therefore\quad$ 錐體 $E-ABC:E-ABD=\triangle ABC:\triangle ABD$. 然錐體 $E-ABC$ 即 $B-ACE$, $E-ABD$ 即 $B-ADE$, B 爲其公共頂點, 故同高.

$\therefore\quad B-ACE:B-ADE=\triangle ACE:\triangle ADE.$

$$\therefore\quad \triangle ACE:\triangle ADE=\triangle ABC:\triangle ABD.$$

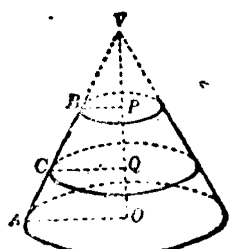
同理　$\triangle BCE:\triangle BDE=\triangle ABC:\triangle ABD.$　　Q. E. D.

(例一二)　求作圓錐臺底之平行面令平分其側面積.

〔證〕　設圓錐臺下底半徑 $OA=a$, 上底半徑 $PB=b$. 所求截面半徑 $QC=x$. 則所截上半側面積爲 $\pi BC(x+b)$, 下半側面積爲 $\pi AC(a+x)$.

$$\therefore\quad \pi BC(x+b)=\pi AC(a+x).\quad\therefore\quad \frac{BC}{AC}=\frac{a+x}{x+b}.$$

又因 $\triangle VPB\backsim\triangle VQC\backsim VOA$,



$$\therefore\quad \frac{b}{VB}=\frac{x}{VC}=\frac{a}{VA}=\frac{x-b}{VC-VB}$$

$$=\frac{a-x}{VA-VC}.$$

$$\therefore\quad \frac{x-b}{a-x}=\frac{VC-VB}{VA-VC}=\frac{BC}{AC},$$

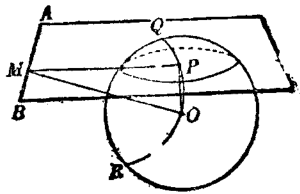
$$\therefore \quad \frac{x-b}{a-x}=\frac{a+x}{x+b}.$$

$$\therefore \quad x^2-b^2=a^2-x^2, \quad \therefore \quad 2x^2=a^2+b^2. \quad \therefore \quad x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

即已知截面半徑之長而得解答. Q. E. D.

（例一三） 求過定直線所作定球截面中心之軌跡.

〔解析〕 AB 為定直線, O 為定球體, P 為截圓之中心. 聯 OP 則 $OP\perp$ 面 ABP. 作 $OM\perp AB$, 則 $PM\perp AB$.

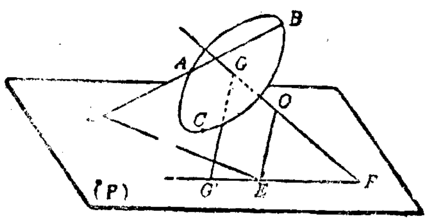


$\therefore$ POM 為 AB 之垂面，而 $\angle MPO=$直角. 故 P 之軌跡為在過 O 所作 AB 之垂面上以 MO 為直徑所作之弧 QOR.

Q. E. D.

（例一四） 求作一球令過三定點且切一平面.

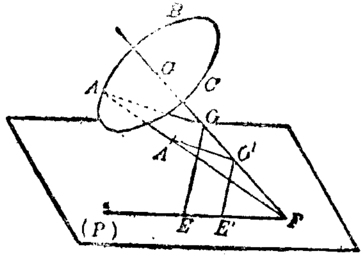
〔解法一〕 在所設三點 A, B, C 之面上作 $\triangle ABC$ 之外心 G. 過 G 作面 ABC 之垂線 GF 交 (P) 於 F. 在 (P) 內作 GF 之正射影 $G'F$. 延長 AB 交 (P) 於 D. 以 D 為中心，DA, DB 之比例中項為半徑在 (P) 內作弧交 FG' 於 E. 從 E 作 (P) 之垂線 EO 交 FG 於 O



O 即所求球之球心. Q. E. F.

〔解法二〕 從 $\triangle ABC$ 之外心 G 作 ABC 之垂線 GF

交 (P) 於 F 從 GF 上任意一點 O' 作 $O'E' \perp (P)$. 聯 AF. 以 O' 爲中心, $O'E'$ 爲半徑在平面 (GFA) 內作弧交 AF 於 A'. 聯 $O'A'$ 從 A 在 (GFA) 內作 $A'O'$ 之平行線交 GF 於 O.



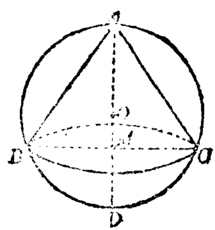
O 即所求球之中心. Q. E. F

〔證略〕

〔注意〕 本題與平面幾何中"過二定點切一定直線作圓"一題相類. 故以上二種解法, 亦係倣照該題之解法作之. 多數作球題之解法, 可倣平面幾何中作圓題如上例. 本題亦有二解答.

〔例一五〕 在球體內求作一內接圓錐體令其側面積等於其底所截小球分之曲面體.

〔解析〕 設 $A-BC$ 爲所求之錐體. M 爲底之中心. 則其側面積爲 $2\pi BM\cdot\frac{1}{2}AB$. 被截球分 DBC 之曲面積爲 $2\pi OD\cdot MD$.



$\therefore \quad 2\pi BM\cdot\frac{1}{2}AB = 2\pi OD\cdot MD$

$\therefore \quad BM\cdot AB = 2OD\cdot MD = AD\cdot MD$

$\therefore \quad AB : AD = MD : BM$

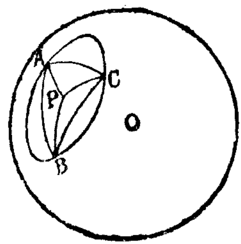
$\therefore \quad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{MD}^2}{\overline{BM}^2} \quad \because \quad \overline{AB}^2 = AM\cdot AD,\ \overline{BM}^2 = AM\cdot MD,$

$$\therefore \quad \frac{AM\cdot AD}{\overline{AD}^2}=\frac{\overline{MD}^2}{AM\cdot MD} \qquad \therefore \quad \frac{AM}{AD}=\frac{MD}{AM}.$$

即M分AD於中末比．但AD爲直徑，故可從直徑AD上求得M，過M作AD之垂面爲底，A爲頂點即所求之圓錐體．

Q. E. F.

（例一六）球面三角形 ABC 底$\frown BC$之位置一定，$\angle B+\angle C-\angle A$之大小一定，則$A$之軌跡爲球面上一圓周．



〔解析〕 作$\triangle ABC$之極P．聯$\frown PA, \frown PB, \frown PC$

則因$\frown PA=\frown PB$，$\therefore \quad \angle PAB=\angle PBA$．（證略）

同樣　　　$\angle PAC=\angle PCA$，$\angle PBC=\angle PBC$.

$$\therefore \quad \angle PBC=\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle PBC+\angle PCB)$$

$$=\frac{1}{2}[(\angle B-\angle PBA)+(\angle C-\angle PCA)]$$

$$=\frac{1}{2}[\angle B-\angle PAB+\angle C-\angle PAC]$$

$$=\frac{1}{2}[\angle B+\angle C-\angle A].$$

故$\angle PBC=\angle PCB$爲一定．今$\frown BC$亦爲一定，故P爲定點．

故A之軌跡爲以P爲極，過B,C之圓．　　　Q. E. D.

習題四十一

1. 過一所設點求作一直線令與所設不共面二直線相交.

2. A, B, C, D 爲空間任意四點. AB, AC 以同比分於 E, F; DB, DC 以同比分於 G, H. 則 E, F, G, H 共面.

3. A, B 爲平面 (P) 外二定點. 求 (P) 內與 A, B 等距之點之軌跡.

4. A, B 爲平面 (P) 外二定點. 求 (P) 內與 A, B 距離上正方形之和爲定長之點之軌跡.

5. A, B 爲平面 (P) 外二定點. 求 (P) 內與 A, B 距離上正方形之差爲定長之點之軌跡.

6. (P) 爲過平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 之一平面. 求證 B, D 與 (P) 等距.

7. $(P), (Q)$ 二平面交於 AB. 從 (P) 中任意一點 L 作 (P) 之垂線交 (Q) 於 M. 再從 M 作 (Q) 之垂線交 (P) 於 N. 求證 $LN \perp AB$.

8. 求作一直線令與一所設直線平行, 又與二所設不共面直線相交.

9. 一平面截空間四邊形 $ABCD$ 之各邊 AB, BC, CD, DA 於 E, F, G, H, 則

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CG}{DG} \cdot \frac{DH}{AH} = 1.$$

(可用Menelaus 定理證之.)

10. 在定直線 XY 上求一點 P 令與二定點 A,B 距離之和爲最小.

11. 三面角之三個面角相等，則其三個兩面角亦相等.

12. 三面角之三個兩面角相等，則其三個面角亦相等.

13. 三面角之兩個面角不等，則其所對之兩個兩面角亦不等；大面角所對之兩面角較大

14. 三面角之兩個兩面角不等，則其所對之兩個面角亦不等；大兩面角所對之面角較大.

15. P 爲三面角 $O-ABC$ 內一定點. 過 P 求作一平面截 $O-ABC$ 於 $\triangle ABC$ 令 P 爲 $\triangle ABC$ 之重心.

16. A 爲四面角 $O-ABCD$ 棱 OA 上一定點. 過 A 求作一平面截 $O-ABCD$ 於 $ABCD$ 令 $ABCD$ 爲平行四邊形

17. 從三直角三面角 $O-ABC$ 頂點 O 至任意截面 ABC 作垂線 OH，則垂足 H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心.

18. 三直角三面角之每一面爲任意截面及此面在截面上正射影之比例中項.

在上例中，即 $\triangle OBC$ 爲 $\triangle ABC$ 及 $\triangle HBC$ 之比例中項.

19. 三直角三面角爲任意平面所截，則三個側面面積平方之和等於截面面積之平方.

20. 直角三角形 ABC 中，A 爲直角. 若平面外一點 P 與 A,B,C 等距，則 $\text{dih}\angle AP=\text{dih}\angle BP+\text{dih}\angle CP$.

21. 過立方體中心及兩鄰邊中點所作平面與立方體之交界爲正六角形

22. 四面體三雙對邊中點之聯線爲共點線

〔註〕 此所共之點爲四面體之重心，

23. 四面體 $ABCD$ 之重心爲 O. AO 延線交 BCD 於 G, 則 G 爲 $\triangle BCD$ 之重心，而 $OG=\frac{1}{4}AG$.

24. 四面體各頂點與對面重心所聯直線共四直線爲共點線.

25. 四面體重心與某一平面之距離等於其各頂點與此平面距離之和之四分之一.

26. 四面體各棱上正方形之和等於其三雙對邊中點聯線上正方形之和之四倍.

27. 正四面體三雙對邊中點所聯線分互相垂直.

28. 從四面體 $ABCD$ 頂點 A 在各面中作 $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle DAB$ 之等分線 AE, AF, AG 各交 BC, CD, DB 於 E, F, G 求證 DE, BF, CG 共點(可用Ceva氏定理證之).

29. 從正四面體內任意一點向各面所作垂線之和等於此正四面體之高.

30. 在正四面體內求作一點令與各棱所成諸三角形分原體爲相等四部分.

31. 過一定點求作一平面平分一四面體.

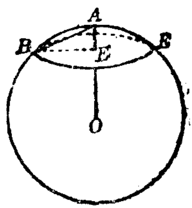
32. 四面體 $ABCD$ 中，從棱 AB, AC, AD 所作 dih$\angle AB$, dih$\angle AC$, dih$\angle AD$ 之等分面會於 AO 交底 BCD 於 O, 則

$$\triangle ABC:\triangle ACD:\triangle ADB=\triangle OBC:\triangle OCD:ODB.$$

33.　求作圓錐臺底之平行面令平分其體積（可倣照例一二求法求之）.

34.　以直角三角形各直角邊爲軸旋轉所成圓錐體體積之比等於其高之反比

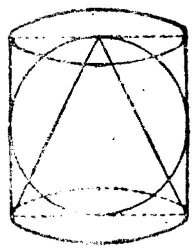
35.　P,Q 各爲 $\triangle ABC$ 兩邊 AB,AC 之中點　以BC爲軸旋轉之．則 $\triangle BAC$ 所成體之體積等於四邊形 $BPQC$ 所成體體積之二倍.



36.　正六角形每邊之長爲 a.以一邊爲軸旋轉之　求此旋轉體之體積.

37.　以球面上一點 A爲中心，在球面上畫小圓　則此球面上爲小圓所圍部分之面積爲

$$\pi\overline{AB}^2.$$



38.　球面積等於其外切圓柱之側面積.

39.　一圓柱外切於一球　一圓錐內接於此圓柱　則圓柱體積，球體積，圓錐體積之比爲3:2:1.

40.　正四面體一棱之長爲 a,則其

(a)　內切球半徑之長爲$\frac{\sqrt{6}}{9}a$.

(b)　外接球半徑之長爲$\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

41.　過定直線求作所設球體之切面（可用例一三軌跡法求之）.

42.　過定點求作所設兩球體之公切面

43. 作所設三球體之公切面

44. 求與所設二定點距離之比爲定比之點之軌跡.

45. 過定點求作一面截所設三球體令各球體上截面半徑與原球半徑成比例

46. 一動點至兩定球體所引切線恆相等，則此動點之軌跡爲兩球中心聯線之垂面.

〔註〕 此垂面曰兩球之根軸面.

47. 一動點至三定球體所引切線恆相等，則此動點之軌跡爲三球中心所決平面之垂線.

48. 以既知長爲半徑求作一球，令過所設三定點.

49. 以既知長爲半徑求作一球，令過所設二定點且切一所設平面.

50. 以既知長爲半徑求作一球，令過所設二定點且切一所設球.

51. 以既知長爲半徑求作一球，令過一定點及切二定平面.

52. 以既知長爲半徑求作一球，令過一定點及切二定球.

53. 以既知長爲半徑求作一球，令切三定球.

54. 以既知長爲半徑求作一球，令過一定點切一定平面及一定球

55. 以既知長爲半徑求作一球，令切二定平面及一定球.

56. 以既知長爲半徑求作一球，令切一定平面及二定球.