Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 46

Übungsaufgaben

AUFGABE 46.1. Es sei $\varphi\colon V \to W$ eine total differenzierbare Abbildung mit $(D\varphi)_P = 0$ für alle $P \in V$. Zeige, dass φ konstant ist.

AUFGABE 46.2. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y) \longmapsto \left(xy - 2y^3 + 5,\, x^3 - xy^2 + y\right),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4,-3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

AUFGABE 46.3. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y,z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,-1,\pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2,0,5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

AUFGABE 46.4. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\, (x,y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1,-7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

AUFGABE 46.5. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det\colon\ \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\, M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2,3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 46.6.*

Wie betrachten die komplexe Invertierung

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^{-1}.$$

(1) Bestimme die Ableitung $f'(z)$ von f.
(2) Beschreibe die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den reellen Koordinaten x, y (bezüglich der reellen Basis 1 und i von $\mathbb{C}$).
(3) Bestimme das totale Differential zu f bezüglich der Basis 1 und i in einem beliebigen Punkt.
(4) Beschreibe die Multiplikation mit $f'(z)$ auf $\mathbb{C}$ durch eine reelle Matrix bezüglich der reellen Basis 1 und i.

Aufgabe 46.7.*

Bestätige die Kettenregel für $g \circ f$ für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy + x + y.$$

Aufgabe 46.8. Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u, v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 46.9. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \ldots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 46.10. Es seien $G \subseteq \mathbb{K}^m$ und $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{K}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{K}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g ℓ-fach stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ ℓ-fach stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 46.11. Es seien

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

und

$$\psi\colon W \longrightarrow U$$

in $P \in V$ bzw. in $\varphi(P) \in W$ total differenzierbare Abbildungen. Es sei $v \in V$ ein Vektor. Zeige mit der Kettenregel, dass

$$(D_v(\psi \circ \varphi))(P) = \left(D_{(D\varphi)_P(v)}(\psi)\right)(\varphi(P))$$

gilt.

Aufgabe 46.12. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f und g stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch $g \circ f$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 46.13. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ derart, dass $g \circ f$ nicht partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 46.14. Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ derart, dass auch $g \circ f$ partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\operatorname{Jak}(g \circ f)_P = \operatorname{Jak}(g)_{f(P)} \circ \operatorname{Jak}(f)_P$$

nicht gilt.

Aufgabe 46.15. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass die Funktion
$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xf(y),$$
genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 46.16. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei
$$\varphi\colon G \longrightarrow W$$
eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung
$$G \longrightarrow \operatorname{Hom}(V,W),\ P \longmapsto (D\varphi)_P\,,$$
stetig ist.

Aufgabe 46.17. Es sei
$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
differenzierbar im Nullpunkt und sei $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit
$$\lim_{m\to\infty} h_m = 0,\ \lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{\|h_m\|} = v \in \mathbb{R}^n, f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m,k \in \mathbb{N}\,.$$
Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

Aufgabe 46.18.*

Wir betrachten die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeige, dass f stetig ist.

b) Zeige, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt eine lineare Abbildung ist.

c) Zeige, dass zu f im Nullpunkt in jede Richtung die Richtungsableitung existiert.

d) Zeige, dass f im Nullpunkt nicht total differenzierbar ist.

Aufgabe 46.19. Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $P \in M$ ein Punkt und es sei

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es sei $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng wachsende Funktion. Zeige, dass f in P genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn $h \circ f$ ein lokales Maximum in P besitzt.

Aufgabe 46.20. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi \colon L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 46.21. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 46.22.*

Es sei f ein Polynom in zwei Variablen der Bauart

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2,\, r_1 + r_2 \geq 3} a_{(r_1, r_2)} x^{r_1} y^{r_2}.$$

Zeige ohne Differentialrechnung, dass f im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Bestimme in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_{(r_1, r_2)}$ ein $\epsilon > 0$ derart, dass die Einschränkung von f auf $U(0, \epsilon)$ außerhalb des Nullpunktes echt positiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.23. (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (u,v) \longmapsto (uv, u-v, v^2),$$

und

$$\psi\colon\ \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, y\exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das totale Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das totale Differential von $\psi \circ \varphi\colon\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 46.24. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u,v) = (u^2, uv, u - v^2)\,,$$

$$g(x,y,z) = (x + y^2 - z, x^2yz)\,,$$

und

$$h(r,s) = (r^2s, s^2)\,.$$

Berechne das totale Differential von $h \circ g \circ f$ in einem beliebigen Punkt $P = (u,v)$ auf vier verschiedene Arten.

Aufgabe 46.25. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 46.26. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, P \longmapsto \| f(P) \|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

Aufgabe 46.27. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und eine stetige Funktion,

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung

$$f \circ \varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht differenzierbar ist.

Abbildungsverzeichnis