Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 24

Aufgabe 24.1. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R-Modul. Es sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, N)$$

exakt ist.

Aufgabe 24.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R-Modul. Es sei $M \to N$ ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Zeige, dass die induzierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, N)$$

nicht surjektiv sein muss.

Man denke an $A = N = \mathbb{Z}/(k)$.

Aufgabe 24.3. Es sei R ein kommutativer Ring, P ein projektiver R-Modul und M ein weiterer R-Modul. Zeige $\operatorname{Ext}^n(P, M) = 0$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 24.4. Zeige mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(k) \longrightarrow 0\,,$$

dass $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/(k), \mathbb{Z})$ zu $k \geq 2$ nicht der Nullmodul ist.

Aufgabe 24.5. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor und es bezeichne R^nF die rechtsabgeleiteten Funktoren. Zeige, dass zu einem Homomorphismus von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^nF(C) & \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} & R^{n+1}F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^nF(C') & \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} & R^{n+1}F(A') \end{array}$$

kommutiert.

Abbildungsverzeichnis