

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 24

AUFGABE 24.1. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R -Modul. Es sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Zeige, dass

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, L) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, N)$$

exakt ist.

AUFGABE 24.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A ein R -Modul. Es sei $M \rightarrow N$ ein surjektiver R -Modulhomomorphismus. Zeige, dass die induzierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, N)$$

nicht surjektiv sein muss.

Man denke an $A = N = \mathbb{Z}/(k)$.

AUFGABE 24.3. Es sei R ein kommutativer Ring, P ein projektiver R -Modul und M ein weiterer R -Modul. Zeige $\operatorname{Ext}^n(P, M) = 0$ für $n \geq 1$.

AUFGABE 24.4. Zeige mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(k) \longrightarrow 0,$$

dass $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}/(k), \mathbb{Z})$ zu $k \geq 2$ nicht der Nullmodul ist.

AUFGABE 24.5. Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} abelsche Kategorien und \mathcal{A} habe genügend viele injektive Objekte. Es sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter additiver linksexakter Funktor und es bezeichne $R^n F$ die rechtsabgeleiteten Funktoren. Zeige, dass zu einem Homomorphismus von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^n F(C) & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1} F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^n F(C') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1} F(A') \end{array}$$

kommutiert.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3