Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 56

Übungsaufgaben

Aufgabe 56.1. Es seien im $\mathbb{R}^2$ die Basen $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis $\mathfrak{e}$ und in $\mathbb{C}$ die reellen Basen $\mathfrak{x} = 8 - 2\mathrm{i}, 6 + 3\mathrm{i}$ und $\mathfrak{y} = 1, \mathrm{i}$ gegeben. Bestimme die Übergangsmatrix zu den zugehörigen Basen auf dem Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Aufgabe 56.2. Es sei K ein Körper und U, V, W seien K-Vektorräume. Zeige die folgenden Aussagen (im Sinne einer kanonischen Isomorphie).

(1) Es ist
$$U \otimes_K V \cong V \otimes_K U.$$
(2) Es ist
$$U \otimes_K (V \otimes_K W) \cong (U \otimes_K V) \otimes_K W.$$

Aufgabe 56.3. Die linearen Abbildungen
$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
und
$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
seien bezüglich der Standardbasen durch die beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimme die Matrix zur linearen Abbildung
$$\varphi \otimes \psi\colon \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 56.4. Es sei K ein Körper und sei Z ein Vektorraum über K. Wir betrachten die Zuordnung $V \mapsto V \otimes_K Z$, die einem Vektorraum V das Tensorprodukt $V \otimes_K Z$ und einer K-linearen Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
die Tensorierung $\varphi \otimes \mathrm{Id}_Z$ zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zur Identität
$$\mathrm{Id}_V \colon V \longrightarrow V$$
ist auch
$$\mathrm{Id}_V \otimes \mathrm{Id}_Z = \mathrm{Id}_{V \otimes Z}$$
die Identität.

(2) Zu linearen Abbildungen
$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$
ist
$$(\psi \circ \varphi) \otimes \mathrm{Id}_Z = (\varphi \otimes \mathrm{Id}_Z) \circ (\psi \otimes \mathrm{Id}_Z)\,.$$

(3) Zu einem Isomorphismus
$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$
ist auch $\varphi \otimes \mathrm{Id}_Z$ ein Isomorphismus, und für die Umkehrabbildung gilt
$$(\varphi \otimes \mathrm{Id}_Z)^{-1} = \varphi^{-1} \otimes \mathrm{Id}_Z\,.$$

Aufgabe 56.5. Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Zeige, dass eine kanonische Isomorphie
$$U \otimes_K (V \oplus W) \cong (U \otimes_K V) \oplus (U \otimes_K W)$$
vorliegt.

Aufgabe 56.6.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale K-Vektorräume und es seien
$$U_{1,1} \subset U_{1,2} \subset \ldots \subset U_{1,\dim(V_1)} \subset V_1, \ldots, U_{n,1} \subset U_{n,2} \subset \ldots \subset U_{n,\dim(V_n)} \subset V_n$$
Fahnen in den beteiligten Vektorräumen. Zeige, dass es keine Fahne in $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ geben muss, in der die einzelnen Unterräume die Gestalt
$$U_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes U_{n,j_n}$$
haben.

Aufgabe 56.7. Es seien $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2, \ldots, U_n \subseteq V_n$ Untervektorräume mit den Restklassenräumen $V_1/U_1, \ldots, V_n/U_n$. Gibt es eine kanonische Isomorphie
$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)/(U_1 \otimes \cdots \otimes U_n) \cong (V_1/U_1) \otimes \cdots \otimes (V_n/U_n)?$$

Aufgabe 56.8. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien diagonalisierbare K-lineare Abbildungen

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

gegeben. Zeige, dass auch das Tensorprodukt

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 56.9. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es seien trigonalisierbare K-lineare Abbildungen

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

gegeben. Zeige, dass auch das Tensorprodukt

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

trigonalisierbar ist.

Aufgabe 56.10. Die lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$ sei bezüglich der Basis v_1, v_2 durch die Jordan-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung $\psi \colon W \to W$ sei bezüglich der Basis w_1, w_2 durch die Jordan-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(1) Bestimme die Matrix von
$$\varphi \otimes \psi \colon V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$
bezüglich der Basis $v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2$.

(2) Bestimme die jordansche Normalform von $\varphi \otimes \psi$.

Aufgabe 56.11. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n$ Vektorräume über K. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V_1, W_1) \times \cdots \times \operatorname{Hom}_K(V_n, W_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n), (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n,$$

multilinear ist.

Aufgabe 56.12. Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n$ endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes \cdots \otimes \operatorname{Hom}_K(V_n, W_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W_1 \otimes \cdots \otimes W_n)$$

gibt.

Aufgabe 56.13. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $z \in L$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\, x \longmapsto zx,$$

K-linear ist.

Aufgabe 56.14. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $a \in L$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon\ K[X] \longrightarrow L,\, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$,
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$,
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 56.15. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren aus V. Zeige die folgende Aussagen.

(1) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein K-Erzeugendensystem von V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, ein L-Erzeugendensystem von $L \otimes V$ ist.
(2) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann K-linear unabhängig (über K) in V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, linear unabhängig (über L) in $L \otimes V$ ist.
(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann eine K-Basis von V, wenn $1 \otimes v_i$, $i \in I$, eine L-Basis von $L \otimes V$ ist.

Aufgabe 56.16. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Wir betrachten die Zuordnung $V \mapsto V_L = L \otimes_K V$, die einem K-Vektorraum V den L-Vektorraum $L \otimes_K V$ und einer K-linearen Abbildung

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

die Tensorierung φ_L zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zur Identität

$$\mathrm{Id}_V\colon\ V \longrightarrow V$$

ist

$$(\mathrm{Id}_V)_L \,=\, \mathrm{Id}_{L \otimes_K V}$$

die Identität.

(2) Zu linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$$

ist

$$(\psi \circ \varphi)_L \,=\, \psi_L \circ \varphi_L.$$

(3) Zu einem Isomorphismus

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

ist auch φ_L ein Isomorphismus, und für die Umkehrabbildung gilt

$$(\varphi_L)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)_L .$$

Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *endlich*, wenn L ein endlichdimensionaler Vektorraum über K ist.

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann nennt man die K-(Vektorraum-)Dimension von L den *Grad* der Körpererweiterung.

Aufgabe 56.17.*

Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 56.18. Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körpererweiterungen derart, dass M über K endlich ist. Zeige, dass dann auch M über L und L über K endlich sind.

Aufgabe 56.19. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L. Zeige, dass die Multiplikation auf L durch die Produkte

$$x_ix_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$

eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 56.20. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $v_1, \ldots, v_n \in L$ Elemente, die eine K-Basis von L bilden. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Zeige, dass auch $xv_1, \ldots, xv_n \in L$ eine K-Basis von L bilden.

Aufgabe 56.21. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $V_1, \ldots, V_n$ K-Vektorräume. Zeige, dass es eine kanonische Isomorphie der L-Vektorräume

$$L \otimes_K (V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n) = (L \otimes_K V_1) \otimes_L \cdots \otimes_L (L \otimes_K V_n) .$$

Aufgabe 56.22. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht endlich ist.

Es sei K ein Körper und sei A ein K-Vektorraum. Man nennt A eine kommutative K- *Algebra* , wenn es ein ausgezeichnetes Element 1 und eine Verknüpfung, genannt *Multiplikation*,

$$A \times A \longrightarrow A,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

gibt, die die Bedingungen

(1) Es ist
$$1 \cdot a = a$$
für alle $a \in A$.
(2) Die Verknüpfung ist assoziativ.
(3) Es ist
$$a \cdot b = b \cdot a$$
für alle $a \in A$.
(4) Für $c \in K$ und $a \in A$ ist
$$ca = (c1) \cdot a,$$
wobei ca und $c1$ die Skalarmultiplikation bezeichen.

erfüllen.

Wichtige Beispiele für K-Algebren werden durch Körpererweiterungen $K \subseteq L$ gegeben. Aber auch der Polynomring $K[X]$ ist eine K-Algebra.

Aufgabe 56.23. Es sei K ein Körper und seien A und B Algebren über K. Zeige, dass $A \otimes_K B$ ebenfalls eine K-Algebra ist, wobei die 1 durch $1 \otimes 1$ und die Multiplikation für zerlegbare Tensoren durch
$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) := (a \cdot c) \otimes (b \cdot d)$$
festgelegt ist.

In den folgenden Aufgaben bedeutet $\cong$, dass sich die Addition, die Multiplikation, die 0 und die 1 entsprechen.

Aufgabe 56.24. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass für den Polynomring die Gleichheit
$$L \otimes_K K[X] \cong L[X]$$
gilt.

Aufgabe 56.25. Es sei K ein Körper. Zeige, dass für Polynomringe die Gleichheit
$$K[X] \otimes_K K[Y] \cong K[X, Y]$$
gilt.

Aufgabe 56.26. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und A eine K-Algebra. Zeige, dass $L \otimes_K A$ eine L-Algebra ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.27. (4 Punkte)

Es seien im $\mathbb{R}^2$ die Basen $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis $\mathfrak{e}$ und im $\mathbb{R}^3$ die Basis $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Standardbasis gegeben. Bestimme die Übergangsmatrix zu den zugehörigen Basen auf dem Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 56.28. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n$ Vektorräume über K. Es seien

$$\psi_i \colon U_i \longrightarrow V_i$$

und

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow W_i$$

K-lineare Abbildungen. Zeige

$$(\varphi_1 \circ \psi_1) \otimes \cdots \otimes (\varphi_n \circ \psi_n) = (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) \circ (\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n).$$

Aufgabe 56.29. (2 Punkte)

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und

$$\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

die zugehörige Tensorproduktabbildung. Es sei a_i ein Eigenwert von φ_i. Zeige, dass $a_1 \cdots a_n$ ein Eigenwert von φ ist.

Aufgabe 56.30. (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{End}(V) \longrightarrow K,$$

die sich aus der Identifizierung

$$\operatorname{End}(V) = V^* \otimes_K V$$

gemäß Aufgabe 55.15 und der natürlichen Abbildung

$$V^* \otimes_K V \longrightarrow K,\ f \otimes v \longmapsto f(v),$$

im Sinne von Aufgabe 55.14 ergibt, gleich der Spur ist.

Aufgabe 56.31. (6 (2+4) Punkte)

Die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sei bezüglich der Basis v_1, v_2 durch die Jordan-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung $\psi\colon W \to W$ sei bezüglich der Basis w_1, w_2, w_3 durch die Jordan-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(1) Bestimme die Matrix von
$$\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$$
bezüglich der Basis $v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_1 \otimes w_3, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2, v_2 \otimes w_3$.

(2) Bestimme die jordansche Normalform von $\varphi \otimes \psi$.

Aufgabe 56.32. (4 Punkte)

Es seien $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2, \ldots, U_n \subseteq V_n$ Untervektorräume mit den Restklassenräumen $V_1/U_1, \ldots, V_n/U_n$. Zeige, dass der Kern der kanonischen Abbildung
$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow (V_1/U_1) \otimes \cdots \otimes (V_n/U_n)$$
gleich
$$\sum_j V_1 \otimes \cdots \otimes V_{j-1} \otimes U_j \otimes V_{j+1} \otimes \cdots \otimes V_n$$
ist.

Aufgabe 56.33. (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass $L \otimes_K L$ kein Körper sein muss.