MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo LIV

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1904

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO LIV

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1904

05. 360. Feb 6.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi
e della Reale Accademia delle Scienze.

SCIENZE

FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

INDICE

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

SULLE CORRISPONDENZE

FRA I

PUNTI DI UNA CURVA ALGEBRICA

E SOPRA

CERTE CLASSI DI SUPERFICIE

MEMORIA

DI

FRANCESCO SEVERI

A BOLOGNA

Approvata nell'adunanza del 24 Maggio 1903.

Questo lavoro si divide in due parti: nella prima ricostruisco geometricamente la teoria delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, nella seconda ne faccio applicazione allo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve o di una sola curva.

Avanti di presentare le linee generali della prima parte di questa Memoria, credo utile esporre alcuni cenni storici e bibliografici intorno allo sviluppo della teoria delle corrispondenze sopra una curva.

Questa teoria nacque col principio di corrispondenza sopra una retta formulato esplicitamente da Chasles nel 1864 (*). Due anni dopo lo Chasles medesimo faceva applicazioni del principio alle curve razionali (**) e il Cayley enunciava un principio di corrispondenza sopra una curva di genere qualsiasi, dimostrandolo soltanto in un caso particolare (***). Successivamente egli applicava questo principio alla risoluzione di alcune questioni numerative, ed anzi profittando di una formola più generale, calcolava il numero dei punti uniti di corrispondenze alle quali non si poteva applicare il principio nella sua forma originaria (+).

La prima dimostrazione completa del principio di Cayley fu data da Brill (++),

---

(*) " Comptes rendus ", t. 58 (1864), p. 1175. A proposito di questo principio ved. la Nota storica di Segre nella " Bibliotheca mathematica ", t. 6 (1892), p. 33.

(**) " Comptes rendus ", t. 62, p. 584 (1866).

(***) " Comptes rendus ", t. 62, p. 586 (1866) e " Proceedings of the London Math. Soc. ", t. I (1866).

(+) " Phil. Trans. ", t. 158 (1868), p. 149. Per questa formola ved. il n° 10 della presente Memoria.

(++) " Math. Annalen ", Bd. 6, p. 33 (1873). Ved. anche gli altri lavori del Brill sullo stesso argomento, nei " Math. Annalen ", Bd. 7, p. 607 (1874); " Math. Annalen ", Bd. 31, p. 374 (1888).

il quale pervenne algebricamente al numero delle coincidenze di una corrispondenza rappresentata da una sola equazione (*).

Per questa classe di corrispondenze il Brill introdusse la *valenza* (positiva), che insieme agli *indici* figura nella espressione del numero dei punti uniti, e ne precisò il significato algebrico.

Altre dimostrazioni algebrico-geometriche furono date da Junker (**) e da Bobek (***), una dimostrazione col metodo iperspaziale da Segre (+), una dimostrazione numerativa da Schubert (++) e un'altra dimostrazione numerativa da Zeuthen (+++), che si occupò più specialmente dei modi di valutare le molteplicità delle coincidenze, di uno dei quali aveva già trattato in un lavoro anteriore (++++).

Noterò infine la dimostrazione data da Lindemann con l'aiuto degl' integrali abeliani (+++++) e quella che si legge sulle *Leçons sur la Géometrie* di Clebsch-Lindemann (++++++).

Ma una Memoria, cronologicamente anteriore a qualcuna di quelle già citate, e che portò un nuovo contributo essenziale allo svolgimento della teoria in discorso, è quella, ormai classica, di Hurwitz (+++++++).

In questo lavoro l'Autore, assurgendo dal problema di calcolare il numero dei punti uniti di una corrispondenza, ad un problema assai più elevato, si propone di determinare tutte le corrispondenze esistenti sopra una curva, e di studiare le loro proprietà intrinseche.

Dopo aver dato la rappresentazione di una corrispondenza algebrica col mezzo degli integrali abeliani, dimostra che sulle curve a moduli generali si presentano soltanto corrispondenze a *valenza positiva o negativa*, ciascuna delle quali si può definire mediante gli zeri e i poli di una determinata funzione razionale di due punti della curva; e dà la formola di corrispondenza ad esse relativa.

Passando alle corrispondenze sopra una curva a moduli qualunque, stabilisce anzitutto che quando i moduli soddisfano a particolari relazioni, esistono sulla curva corrispondenze prive di valenza (*singolari*); e mostra come ogni corrispondenza si possa rappresentare uguagliando a zero una funzione di due punti della curva, formata mediante le trascendenti Θ. Infine prova che l'equazione di una corrispondenza fra i punti di una curva qualunque, si può comporre (per moltiplicazione) da quelle

---

(*) Ricordiamo qui che una corrispondenza qualunque fra i punti di una curva si può sempre rappresentare con due equazioni.

(**) *Inaugural-Dissertation*, Tübingen (1889).

(***) " Sitzungsberichte der Wiener Akademie ", t. 93, p. 899.

(+) *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, " Annali di Mat. ", (2), t. 22, § 12 (1894).

(++) *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 18. Leipzig (1879).

(+++) *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill*, ecc. " Math. Annalen ", Bd. 40, p. 99 (1892). In questa Memoria si trovano molte delle indicazioni storiche che vado esponendo.

(++++) " Bulletin de Darboux ", t. 5, p. 186 (1873).

(+++++) " Crelle ", t. 84, p. 301 (1878) (Lettre adressée à M. Hermite).

(++++++) Trad. par Benoist, t. II, p. 146; Paris, Gauthier-Villars (1880). Il punto essenziale della dimostrazione è ivi sostituito da considerazioni intuitive di limite.

(+++++++) *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip.* " Math. Annalen ", Bd. 28, p. 561 (1886). Ved. anche l'altra Memoria *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.* " Math. Annalen ", Bd. 31, p. 290 (1888).

di un numero finito di altre corrispondenze convenientemente scelte; e da ciò trae il principio generale di corrispondenza (*).

Allorquando mi proposi lo studio delle corrispondenze sopra una curva, più che della determinazione del numero delle coincidenze, mi preoccupavo di cercare il contenuto geometrico del principio di corrispondenza, caratterizzando la funzione razionale (serie lineare) individuata dal gruppo dei punti uniti.

Pensavo invero che ciò sarebbe stato assai utile nelle questioni in cui l'algebricità entra non solo per ciò che concerne il numero delle soluzioni comuni a più equazioni, ma anche per le loro proprietà intrinseche.

Poichè la rappresentazione delle corrispondenze mediante le serie Θ, permette di stabilire tutte le loro proprietà funzionali, io avrei potuto limitarmi ad una interpretazione geometrica di queste proprietà. Tuttavia mi è parso utile di ricostruire dagli inizii la teoria, prendendo le mosse dalle corrispondenze a valenza.

Darò qui un cenno della via seguita in questo studio. Dopo aver definito una corrispondenza a valenza positiva γ, come quella che gode della proprietà che i punti y omologhi di un punto variabile x, insieme a questo contato γ volte, formano un gruppo variabile in una serie lineare; e dopo aver caratterizzato geometricamente il gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza zero (n° 6), operando per *somma* e *prodotto* (n° 2) sulle corrispondenze a valenza zero e sulle involuzioni lineari. per le quali è nota la maniera di comporre il gruppo dei punti uniti (**), pervengo in un modo semplicissimo al teorema:

Il gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza γ, *appartiene alla serie lineare somma di* γ *gruppi canonici, e delle serie che contengono il punto* x *contato* γ *volte ed i suoi omologhi, nella corrispondenza diretta e nell'inversa* (n° 8).

Qui mi son limitato alle corrispondenze a valenza positiva; ma avverto subito che le medesime cose si posson ripetere con le stesse parole per quelle a valenza negativa, dopo aver precisato in ogni caso con opportune convenzioni (n° 3), in che consista l'operazione di *sottrarre un punto.*

Se una corrispondenza è a valenza, questa sua proprietà si può interpretare come una speciale relazione di *dipendenza* fra essa e la corrispondenza identica. Partendomi da questo concetto, al n° 9 estendo la nozione di valenza, introducendo quella di *corrispondenze fra loro dipendenti*, e trovo quindi per via geometrica la relazione funzionale fra i gruppi dei loro punti uniti (n° 10). La traduzione aritmetica di questa relazione dà luogo al *principio generale di corrispondenza.*

Ciò dipende dal fatto che sopra ogni curva vi è un numero finito di corrispon-

(*) Per un'esposizione dei principali resultati contenuti nella Memoria di Hurwitz, ved. Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen*, Bd. 2, p. 518; Leipzig (1892), ove trovasi anche uno studio delle corrispondenze modulari; e Baker, *Abel's theorem and the allied theory*, ecc., pag. 639; Cambridge (1897).

Le corrispondenze a valenza negativa son pure considerate nella Memoria citata di Zeuthen, il quale definisce la valenza mediante la formola che dà il numero dei punti uniti. Questa definizione è legittima solo per le corrispondenze sopra le curve a moduli generali, allo studio delle quali si limita l'Autore.

(**) Il gruppo dei punti doppî di una g_n^1 è notoriamente equivalente ad un gruppo canonico aumentato di un gruppo della serie $2g_n$.

denze indipendenti, cosicchè fissatene alcune, tutte le altre risultano dipendenti da quelle. In particolare sopra le curve a moduli generali, tutte le corrispondenze sono dipendenti dall'identità.

Giacchè l'esistenza di un numero finito di corrispondenze indipendenti è una proprietà di natura così profonda, che sembra assai arduo dimostrarla senza far uso di strumenti trascendenti, al n° 11 riallaccio il concetto di dipendenza fra corrispondenze, con le considerazioni svolte da Hurwitz al § 13 della sua Memoria, e così ottengo la dimostrazione della proprietà stessa.

Nella seconda parte del lavoro mi occupo delle curve tracciate sopra una superficie F con due fasci unisecantisi (superficie delle coppie di punti di due curve C, C'), e sopra una superficie Φ con un sistema algebrico ∞^1 Σ, d'indice 2 e grado 1 (superficie delle coppie — non ordinate — dei punti di una curva C).

Si presenta spontaneo il legame fra la teoria delle curve appartenenti a queste superficie e la teoria delle corrispondenze, perchè ogni curva di F rappresenta le coppie dei punti omologhi in una determinata corrispondenza fra C, C'; ed ogni curva di Φ rappresenta le coppie dei punti omologhi in una corrispondenza simmetrica sopra la curva C.

Profittando del fatto che sopra una curva c'è un numero finito di corrispondenze indipendenti, si perviene a dimostrare che *sulla superficie* F *ogni curva si ottiene con le operazioni di somma e sottrazione, a partire da un numero finito di curve* (*base*) *e da quelle dei due fasci unisecantisi.*

Analogamente sulla Φ *una curva qualunque si ottiene da un numero finito di curve* (*base*) *e da quelle del sistema* Σ (*).

Queste proposizioni offrono il mezzo di dimostrare il *teorema di Bézout* sulle superficie F e Φ, ossia di calcolare il numero dei punti comuni a due curve, mediante i caratteri di ciascuna di esse.

In particolare se i due fasci di F sono razionalmente identici ed a moduli generali, ogni curva si compone a partire dalle curve dei due fasci e da una curva unisecante le precedenti; e similmente ogni curva di Φ, se il sistema Σ è a moduli generali, si ottiene dalle curve di questo e dal loro inviluppo.

Quando i moduli dei due fasci di F, o del sistema Σ di Φ, soddisfano a particolari relazioni, per determinare effettivamente la base di tutte le curve appartenenti ad F o Φ, occorre un esame appropriato ad ognuno dei casi possibili.

Per dare un esempio di questi casi singolari, nell'ultimo § di questa Memoria, mi occupo delle superficie che nascono dalle coppie (ordinate o non) dei punti di una curva ellittica a modulo arbitrario. La determinazione effettiva della base su queste superficie, nei casi singolari, si fa ricorrendo alla teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa.

Nella trattazione di esempi più elevati, si dovrebbe ricorrere alla teoria delle funzioni abeliane a moltiplicazione complessa (**).

(*) Un teorema analogo si conosce sulle superficie razionali, sulle superficie generali nel loro ordine e sulla superficie di Kummer, come più tardi avremo occasione di notare.

(**) Questa teoria che ha così intimi legami con quella delle corrispondenze singolari sopra una curva algebrica, non ha ancora raggiunto un maturo sviluppo. Essa è sorta dopo la teoria delle

Terminerò con alcune indicazioni bibliografiche sulla teoria delle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o due curve.

Le superficie che nascono dalle coppie (non ordinate) dei punti di una curva ellittica (rigate ellittiche) furono considerate da Segre (*), quelle che rappresentano le coppie dei punti di una curva del genere 2 (superficie iperellittiche) da Picard (**), che le incontrò nella ricerca delle superficie che ammettono un gruppo permutabile di trasformazioni birazionali, e successivamente da Humbert, che ne fece uno studio esauriente (***).

Lo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve distinte o le coppie di punti di una curva di genere maggiore di due, è stato iniziato recentemente (+).

PARTE PRIMA

Le corrispondenze sopra una curva algebrica.

§ 1. — Generalità.

1. *Concetto di corrispondenza.* — Consideriamo due curve algebriche C, C' e indichiamo con x un punto qualunque di C, e con y un punto qualunque di C'. Se il punto y di C' è funzione algebrica a β valori del punto x di C, sarà x funzione algebrica a un certo numero α di valori, del punto y variabile su C', e si dirà che fra C, C' passa una *corrispondenza algebrica di indici* (α, β).

Ogni corrispondenza algebrica fra due curve, in quanto può riguardarsi come un ente ∞^1 entro alla varietà ∞^2 delle coppie di punti delle due curve, si può definire considerando le coppie di quei punti le cui coordinate soddisfano contemporaneamente a due equazioni (all'infuori, eventualmente, di un numero finito di coppie estranee) (++).

Allorquando le due curve C, C' coincidono, ogni corrispondenza T di indici (α, β) fra C, C', dà luogo ad una corrispondenza T^{-1} di indici (β, α), detta l'*inversa* della T,

---

funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa (la cui origine risale ad Abel), per opera specialmente di Kronecker (" Berlin., Monatsber. ", 1866), Weber (" Annali di Mat. " (2), t. 9, 1878) e Frobenius (" Crelle ", Bd. 95, 1883). Le funzioni abeliane del genere 2 a moltiplicazione complessa, furono studiate da Wiltheiss (" Math. Annalen ", Bd. 26, 1886) e recentemente da Humbert (" Comptes-rendus ", t. 134, 1902; e " Journal de Math. ", (5), t. 9, 1903).

(*) " Atti della R. Acc. di Torino ", t. 21 (1886).

(**) " Journal de Math. ", (4), t. I (1885) e t. 5 (1889).

(***) " Journal de Math. ", (4), t. 9 (1893).

(+) Cfr. Maroni, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi.* " Atti della R. Accad. di Torino ", t. 38 (1903); De-Franchis, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica.* " Rendiconti di Palermo ", t. 17 (1903); e la mia Nota, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* " Atti della R. Accad. di Torino ", t. 38 (1903).

(++) Ved. ad esempio la citata *Introduzione* di Segre (n° 6).

la quale si ottiene applicando le operazioni della T, dopo di avere scambiato l'ufficio delle due curve. Così se la T è definita dalle relazioni:

$$y = \varphi(x), \qquad x = \varphi^{-1}(y),$$

ove φ è il simbolo d'una certa funzione algebrica a β valori, e φ^{-1} il simbolo della funzione algebrica ad α valori inversa di φ, la T^{-1} sarà definita dalle relazioni:

$$x = \varphi(y), \qquad y = \varphi^{-1}(x).$$

Nel caso che stiamo considerando, invece di parlare di due curve coincidenti, si parla spesso di una sola curva e di corrispondenze algebriche su questa; e la corrispondenza diretta e la sua inversa si riguardano come due operazioni, l'una inversa dell'altra, applicate ad una medesima classe di punti. Per esser conseguenti a questo modo di considerare la cosa, indicheremo con a un punto generico della classe, e rispettivamente con y, x i punti omologhi di a nella corrispondenza diretta e nell'inversa; ossia porremo:

$$y = \varphi(a), \qquad x = \varphi^{-1}(a).$$

Una corrispondenza fra i punti di una curva si dirà *simmetrica*, quando gli omologhi di un punto qualsiasi a nella corrispondenza diretta coincidono cogli omologhi dello stesso punto nell'inversa, ossia, in simboli, quando:

$$\varphi(a) = \varphi^{-1}(a).$$

Le *involuzioni* sono particolari corrispondenze simmetriche.

La *corrispondenza identica* o *identità* è quella che si ottiene chiamando omologo di ogni punto, il punto stesso.

Una corrispondenza data sopra una curva dicesi *degenere*, se esiste qualche punto (singolare) al quale corrispondano tutti i punti della curva.

Noi di solito considereremo corrispondenze (non degeneri) tali che fra i punti y omologhi del punto a, non ve ne sia generalmente nessuno coincidente con a, e che al variare di a mutino tutti gli y. In queste corrispondenze, per la natura stessa della loro definizione, non potrà aversi che un numero finito di *punti uniti*, cioè di punti coincidenti coi loro omologhi.

Oltre agli indici, vi sono anche altri caratteri spettanti ad una corrispondenza, ma di questi altri ci occuperemo in seguito.

2. *Operazioni sulle corrispondenze.* — Diremo *somma* di due corrispondenze T_1, T_2, la corrispondenza $T_1 + T_2$ che si ottiene chiamando omologhi di ogni punto a i corrispondenti nella T_1 e i corrispondenti nella T_2.

La somma gode delle proprietà commutativa e associativa.

Diremo *prodotto* di T_1, T_2, la corrispondenza che si ottiene applicando a ciascuno degli omologhi di a nella T_1, le operazioni di T_2, e facendo corrispondere ad a i punti così ottenuti. Questa corrispondenza prodotto s'indicherà col simbolo $T_2\,T_1$, mettendo a destra il simbolo della prima operazione applicata ad a.

Il prodotto non gode generalmente della proprietà commutativa, ma gode dell'associativa o della proprietà distributiva rispetto alla somma.

Sono evidenti le relazioni:

$$(1) \qquad (T_1 + T_2)^{-1} = T_1^{-1} + T_2^{-1}, \qquad (T_2\, T_1)^{-1} = T_1^{-1}\, T_2^{-1}.$$

In particolare l'inversa della corrispondenza $2\,T_1$, che si ottiene chiamando omologhi del punto a i punti che gli corrispondono in T_1, ciascuno contato due volte, è uguale al doppio della inversa, ecc.

3. *Notazioni.* — Passiamo ora a spiegare alcune notazioni, delle quali avremo occasione di servirci.

La scrittura

$$A \equiv B,$$

ove A, B son gruppi di n punti sulla curva C, denoterà, secondo l'uso, che i due gruppi sono *equivalenti,* cioè che appartengono ad una stessa serie lineare di ordine n; la scrittura λA, ove λ è un intero positivo, rappresenterà il gruppo dei punti che si ottiene contando λ volte ciascun punto di A.

Se $A_1\, A_2 \ldots;\ B_1\, B_2 \ldots$ son gruppi di punti, il significato della relazione

$$(2) \qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots \equiv \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots,$$

ove λ, μ son interi positivi o negativi, risulta senz'altro se son possibili le eventuali sottrazioni indicate in ciascuno de' suoi membri; ma possiamo in ogni caso dare un senso alla (2), intendendo ch'essa equivalga alla relazione che da essa si ottiene trasportando da un membro all'altro i termini negativi e cambiandoli di segno.

Si può presentare questa convenzione sotto un altro aspetto, che giova spesso aver presente. Denotiamo con L il gruppo di punti rappresentato dall'insieme dei termini positivi nel 1° membro della (2), e con L' il gruppo che vien rappresentato dall'insieme dei termini negativi, presi col segno cambiato; M, M' abbiano significati analoghi rispetto al 2° membro. Sieno infine $L_1\, M_1$ due gruppi equivalenti che contengano rispettivamente i gruppi $L'\, M'$; allora diremo che sussiste la (2), se:

$$(3) \qquad L + (L_1 - L') \equiv M + (M_1 - M').$$

Questa definizione è legittima perchè la (3) resta soddisfatta allorchè al posto di $L_1\, M_1$ si pongano due altri gruppi soddisfacenti alle stesse condizioni. L'identità della definizione medesima con quella data prima è evidente.

Talora per esprimere la (2) diremo che i gruppi (virtuali)

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots, \qquad \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \ldots,$$

sono *equivalenti* od anche che *appartengono ad una stessa serie lineare*, per quanto, se le λ, μ non son tutte positive, non sempre esistano gruppi effettivi corrispondenti a quei simboli. Questo modo di dire, mentre servirà ad abbreviare il linguaggio in un modo espressivo, non potrà dar luogo ad ambiguità.

Dalla definizione si trae subito come sia lecito moltiplicare i due membri della (2) per un intero qualsiasi (positivo o negativo), e come avendosi due relazioni del tipo (2), si possano sommare o sottrarre membro a membro.

§ 2. — Corrispondenze a valenza.

4. *Concetto di valenza.* — Sia T una corrispondenza fra i punti di una curva C, e sia Y il gruppo dei β punti y omologhi di a nella T. In generale al variare di a il gruppo Y non varia in una serie lineare d'ordine β; tuttavia può avvenire che il gruppo $Y + \gamma a$, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, varii in una serie lineare d'ordine $\beta + \gamma$. Si dirà allora che la corrispondenza ha la *valenza* γ.

Nel caso in cui γ sia negativo può darsi che il simbolo $Y + \gamma a$ non rappresenti un effettivo gruppo di punti; ma ad ogni modo anche in tal caso noi sappiamo quale senso deve attribuirsi alla definizione precedente (n° 3).

Sotto forma diversa si può dire che T ha la valenza γ, ove γ è un intero positivo o negativo o nullo, se denotando con Y, Y' i gruppi di punti omologhi nella T di due punti qualsiansi a, a' di C, sempre si ha:

$$Y + \gamma a \equiv Y' + \gamma a' \quad (*).$$

Se la curva C non è razionale, la corrispondenza T non potrà ammettere una seconda valenza (diversa da γ). Supponiamo infatti che la T possegga un'altra valenza γ'. Allora avremo:

$$Y + \gamma' a \equiv Y' + \gamma' a',$$

che sottratta dalla precedente, dà:

$$(\gamma - \gamma')a \equiv (\gamma - \gamma')a',$$

ossia:

$$ka \equiv ka',$$

ove k è un intero positivo (non nullo).

La serie lineare g_k^r, che contiene tutti i gruppi ka non sarà certo composta con un'involuzione, sicchè potrà immaginarsi segata sopra una curva Γ di ordine k, dagli iperpiani del suo spazio S_r. — Poichè un iperpiano osculatore alla Γ in un punto generico, ha con essa contatto r-punto, risulterà $k = r$, e la Γ sarà una curva razionale (normale).

Dunque è vero che *sopra una curva di genere* > 0 *una corrispondenza non può avere due diverse valenze.*

(*) L'identità di questa definizione con quella trascendente di Hurwitz, risulta subito dal teorema di Abel. Ved. ad es. Scorza, *Sopra le corrispondenze* (p, p) *esistenti sulle curve di genere* p *a moduli generali* (Atti della R. Acc. di Torino „, t. 35, 1900); n° 1.

5. *Operazioni sulle corrispondenze a valenza.* — Dimostriamo che:

La somma di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2, *ha la valenza* $\gamma_1 + \gamma_2$.

Sieno $T_1\ T_2$ le due corrispondenze, Y_1, Y_1' i gruppi di punti omologhi di a, a' nella T_1, Y_2, Y_2' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_2. In base alla definizione, avremo:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a'$$
$$Y_2 + \gamma_2 a \equiv Y_2' + \gamma_2 a',$$

donde sommando si trae:

$$(Y_1 + Y_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) a \equiv (Y_1' + Y_2') + (\gamma_1 + \gamma_2) a' \qquad \text{c. d. d.}$$

Il prodotto di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2, *ha la valenza* $-\gamma_1 \gamma_2$.

Continuando ad usare le notazioni di prima diciamo $y_1 \dots y_\beta$ i punti del gruppo Y_1, $y'_1 \dots y_\beta'$ quelli di Y_1', e Y_{2i}, Y'_{2i} i gruppi degli omologhi di y_i, y_i' nella T_2. Verrà allora:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a'$$
$$Y_{2i} + \gamma_2 y_i \equiv Y'_{2i} + \gamma_2 y_i' \qquad (i = 1, \dots, \beta).$$

Da queste si traggono le relazioni:

$$\gamma_2 Y_1 + \gamma_1 \gamma_2 a \equiv \gamma_2 Y_1' + \gamma_1 \gamma_2 a'$$
$$\sum_{i=1}^{\beta} Y_{2i} + \gamma_2 Y_1 \equiv \sum_{i=1}^{\beta} Y'_{2i} + \gamma_2 Y_1'.$$

Sottraendo la 1ª dalla 2ª, avremo, come si voleva:

$$\Sigma\, Y_{2i} - \gamma_1 \gamma_2 a \equiv \Sigma\, Y'_{2i} - \gamma_1 \gamma_2 a'.$$

6. *Determinazione del gruppo dei punti uniti nelle corrispondenze a valenza zero.* — Sia T una corrispondenza a valenza zero: variando a su C il gruppo Y dei β punti y omologhi di a, varia in tal caso in una serie lineare d'ordine β.

Supponiamo che la curva C, dotata soltanto di nodi, sia piana e che la serie lineare completa g^r_β che contiene i gruppi Y, sia segata da un sistema lineare Σ di curve $\varphi(y_1\, y_2\, y_3) = 0$ di un certo ordine m', passanti eventualmente per un gruppo Q di punti fissi (dei quali alcuni o tutti posson cadere su C). Senza introdurre restrizioni si può supporre che Σ sia r volte esteso, ossia che per un gruppo della g^r_β passi una sola φ.

I gruppi Y saranno segati da un sistema algebrico ∞^1 di curve φ, e poichè ad ogni punto di C risponde una sola φ di quel sistema ∞^1, i coefficienti di questa saranno funzioni razionali del punto scorrente su C. Sicchè l'equazione di una φ del sistema ∞^1 si potrà scrivere sotto la forma:

$$\Phi\,(x_1\, x_2\, x_3 \,|\, y_1\, y_2\, y_3) = 0,$$

ove Φ è il simbolo di un polinomio omogeneo di grado m nelle x, e omogeneo di grado m' nelle y.

Ne viene che gli omologhi nella T^{-1} di un dato punto y^0, saranno segati su C dalla curva:

$$\psi^0 \equiv \Phi\,(x_1\,x_2\,x_3\,|\,y_1^0\,y_2^0\,y_3^0) = 0,$$

non passante per y^0, fuori eventualmente di certi punti appartenenti ad un gruppo R comune a tutte le Ψ di ordine m analoghe ad essa. Da ciò *intanto si trae che la inversa della* T *ha pure la valenza zero.*

La curva $\Phi\,(x_1\,x_2\,x_3\,|\,x_1\,x_2\,x_3) = 0$, di ordine $m + m'$, passa evidentemente pei punti dei due gruppi Q ed R, e quindi appartiene al sistema lineare somma dei due sistemi contenenti rispettivamente le φ e le ψ. Ne segue che essa, fuori dei punti fissi eventuali comuni alle φ o alle ψ, sega su C un gruppo appartenente alla somma delle due serie che contengono rispettivamente i gruppi omologhi dei punti di C nella corrispondenza T e nella T^{-1}.

Ma i punti comuni alla $\Phi\,(x_1\,x_2\,x_3\,|\,x_1\,x_2\,x_3) = 0$, e alla C, fuori dei punti fissi suddetti, sono punti uniti per la T, dunque il gruppo U di questi punti è equivalente alla somma dei gruppi X e Y che contengono gli omologhi del punto a nella T^{-1} e nella T; ossia in simboli:

$$U \equiv X + Y.$$

7. *Esistenza sopra ogni curva di corrispondenze aventi una valenza data. — Inversa di una corrispondenza a valenza.* — Se sulla curva C si considera una g_n^1 e di un punto a variabile su C si chiamano omologhi i punti che insieme ad esso dànno un gruppo della g_n^1, si ha, secondo le definizioni poste, una corrispondenza involutoria a valenza 1, che per brevità chiameremo una *corrispondenza elementare* (a valenza).

Facendo la somma di $\gamma\,(> 0)$ corrispondenze elementari, si ottiene una corrispondenza a valenza γ, e facendo il prodotto di una tal corrispondenza con una corrispondenza elementare, si ha una corrispondenza a valenza $-\gamma$ (n° 5). Infine se si fa la somma di una corrispondenza a valenza γ con una a valenza $-\gamma$, si ottiene una corrispondenza a valenza zero. Dunque:

Sopra ogni curva esistono corrispondenze a valenza arbitraria (positiva, negativa o nulla).

Dimostriamo inoltre che:

Se una corrispondenza ha valenza, la sua inversa ha la stessa valenza.

È evidente anzitutto che l'inversa della corrispondenza S, somma di $k\,(> 0)$ corrispondenze elementari, ha la valenza k, e che la inversa del prodotto di S per una corrispondenza elementare ha la valenza $-k$ (ved. le (1)). Ciò posto sia T una qualunque corrispondenza a valenza γ (positiva o negativa) e sieno X, X' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T^{-1}.

Componiamo per mezzo di corrispondenze elementari, una corrispondenza T_1 a valenza $-\gamma$, e diciamo X_1, X_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1^{-1}. Poichè la somma $T + T_1$ ha la valenza zero, anche la corrispondenza $(T + T_1)^{-1} = T_1^{-1} + T^{-1}$ avrà la valenza nulla (n° 6), e quindi accanto alla:

$$X_1 - \gamma a \equiv X_1' - \gamma a',$$

sussisterà la relazione:

$$X + X_1 \equiv X' + X_1'.$$

Sottraendo dalla 2ª la 1ª, viene:

$$X + \gamma a \equiv X' + \gamma a' \qquad \text{c. d. d.}$$

8. *Determinazione del gruppo dei punti uniti in una corrispondenza a valenza qualsiasi. — Numero delle coincidenze.* — Torniamo per un momento ad una corrispondenza elementare T, che si sia ottenuta partendo da una g_n^1, e diciamo Y il gruppo degli $n-1$ punti omologhi di a nella T, e X il gruppo degli omologhi di a nella T^{-1}. Siccome $T = T^{-1}$ il gruppo X coinciderà con Y.

Il gruppo U dei punti uniti di T non è che il gruppo jacobiano della g_n^1, e come si sa questo gruppo è equivalente ad un gruppo canonico aumentato di un gruppo della serie $2g_n$. Perciò dicendo K un gruppo canonico di C, avremo la relazione:

$$U \equiv X + Y + 2a + K.$$

Servendoci di questa, dimostriamo più in generale che:

Avendosi fra i punti di una curva una corrispondenza T *a valenza* γ *(positiva, negativa o nulla), il gruppo* U *dei punti uniti è equivalente alla somma dei gruppi* Y, X, *che contengono gli omologhi di* a *nella* T *e nella* T^{-1}, *di* γ *gruppi canonici e di* 2γ *volte il punto* a; *ossia in simboli:*

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a, \tag{4}$$

ove K *rappresenta un gruppo canonico.*

Interpretando numericamente la relazione geometrica data da questo teorema si ha:

$$u = \alpha + \beta + \gamma(2p - 2) + 2\gamma,$$

ove u è il numero dei punti uniti, α, β son gli indici di T, e p è il genere della curva. Si può dunque dire:

Il numero dei punti uniti nella corrispondenza T *d'indici* α, β, *di valenza* γ, *data fra i punti di una curva di genere* p, *è espresso dalla formola:*

$$\alpha + \beta + 2\gamma p. \tag{5}$$

Dimostriamo prima la (4) per una corrispondenza S somma di $h (> 0)$ corrispondenze elementari $T_1 \dots T_h$.

Indicando con $Y_1\, Y_2 \dots Y_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle corrispondenze $T_1 \dots T_h$, e con $X_1\, X_2 \dots X_h$ i gruppi degli omologhi di a nelle inverse, si vede che la S fa corrispondere al punto a il gruppo $Y_0 = Y_1 + \dots + Y_h$, e la S^{-1} fa corrispondere ad a il gruppo $X_0 = X_1 + \dots + X_h$. Inoltre il gruppo U dei punti uniti di S sarà la somma dei gruppi $U_1 \dots U_h$ dei punti uniti di $T_1 \dots T_h$.

Dalle relazioni:

$$U_1 \equiv X_1 + Y_1 + K + 2a$$
$$U_2 \equiv X_2 + Y_2 + K + 2a$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_h \equiv X_h + Y_h + K + 2a,$$

sommando si trae:

$$V \equiv X_0 + Y_0 + hK + 2ha,$$

la quale dimostra il teorema per la corrispondenza S.

Sia ora T una qualunque corrispondenza a valenza negativa γ, riferendoci alla quale conserviamo le notazioni dell'enunciato. Indicando con h il valore assoluto di γ, si costruisca come sopra una corrispondenza S somma di h corrispondenze elementari.

La somma delle due corrispondenze S, T, che è a valenza nulla, fa corrispondere ad a il gruppo $Y + Y_0$, mentre la sua inversa fa corrispondere ad a il gruppo $X + X_0$; e inoltre la $S + T$ ha per gruppo dei punti uniti il gruppo $U + V$. Dunque avremo (n° 6):

$$U + V \equiv (X + X_0) + (Y + Y_0).$$

Sottraendo da questa la relazione precedentemente ottenuta, viene:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a.$$

Così è dimostrata la proposizione per tutte le corrispondenze a valenza negativa.

Avendosi ora una corrispondenza T a valenza positiva γ, si costruisca una corrispondenza T' a valenza negativa $-\gamma$ (il che è sempre possibile) e si dicano Y', X' i gruppi degli omologhi di a nella T' e nella T'^{-1} rispettivamente, e U' il gruppo dei punti uniti di T'. Conservando ancora per la T le notazioni dell'enunciato, poichè la somma $T + T'$ è a valenza nulla, avremo:

$$U + U' \equiv (X + X') + (Y + Y'),$$

ed essendo T' a valenza negativa, per quanto abbiamo prima dimostrato, sarà:

$$U' \equiv X' + Y' - \gamma K - 2\gamma a.$$

Da questa e dalla precedente per sottrazione si trae:

$$U \equiv X + Y + \gamma K + 2\gamma a,$$

la quale dimostra il teorema per tutte le corrispondenze a valenza positiva.

Osservazione. — Dal principio di corrispondenza già enunciato, tenendo conto della 2ª proposizione del n° 5, segue facilmente che:

Il numero dei punti uniti della corrispondenza prodotto delle corrispondenze $(\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1) \ldots (\alpha_k\, \beta_k\, \gamma_k)$, *ove* α, β, γ *denotano rispettivamente gli indici e le valenze, positive o negative, delle corrispondenze considerate, è dato da:*

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k + \beta_1 \ldots \beta_k + (-1)^{k+1} \,.\, 2\gamma_1 \ldots \gamma_k p.$$

§ 3. — Sulla determinazione di tutte le corrispondenze esistenti sopra una curva qualsiasi.

9. *Estensione del concetto di valenza.* — Sia T_1 una corrispondenza a valenza γ_1 sulla curva C, e sieno Y_1, Y_1' i gruppi degli omologhi di a, a' nella T_1. Allora si ha:

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y_1' + \gamma_1 a',$$

la quale ci mostra che al variare di a, il gruppo de' suoi omologhi nella corrispondenza T_1, aumentato di γ_1 volte l'omologo di a nella corrispondenza identica I, varia in una serie lineare (*). Ciò si esprimerà dicendo che le corrispondenze T_1 ed I sono *dipendenti* secondo i numeri $(1, \gamma_1)$.

Sia T_2 un'altra corrispondenza a valenza γ_2. Avremo similmente:

$$Y_2 + \gamma_2 a \equiv Y_2' + \gamma_2 a',$$

la quale combinata colla precedente dà:

$$\gamma_2 Y_1 - \gamma_1 Y_2 \equiv \gamma_2 Y_1' - \gamma_1 Y_2'.$$

Dunque al variare di a il gruppo de' suoi omologhi nella T_1, contato γ_2 volte, aumentato di $-\gamma_1$ volte il gruppo de' suoi omologhi nella T_2, varia in una serie lineare. Perciò diremo che le corrispondenze T_1, T_2 son dipendenti secondo i numeri $(\gamma_2, -\gamma_1)$.

Si presenta ora spontaneamente l'idea che il concetto di dipendenza si possa stabilire anche fra più di due corrispondenze, prescindendo dall'ipotesi che le corrispondenze stesse siano dotate di valenza.

E noi infatti *diremo che le corrispondenze* $T_1, \ldots, T_k$ *date sopra una curva* C *sono* DIPENDENTI, *quando esistono* k *interi* $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ (*positivi o negativi*) *non tutti nulli, tali che indicando con* Y_i *il gruppo degli omologhi di un punto qualunque* a *nella* T_i, *al variare di* a *il gruppo* (*virtuale*) $\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k$ *varii in una serie lineare.*

In altri termini se Y_i' è il gruppo degli omologhi del punto a' nella T_i, la condizione di dipendenza è espressa dalla relazione:

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y_1' + \ldots + \lambda_k Y_k'. \tag{6}$$

Nel caso che una tal relazione non sia possibile se non quando le λ son tutte nulle, le k corrispondenze si diranno *indipendenti.*

Quando più corrispondenze sono fra loro dipendenti, talora diremo che una qualunque di esse è *dipendente dalle rimanenti.* Allorchè poi occorra tener presenti gli interi pei quali la (6) è soddisfatta, diremo pure che le corrispondenze $T_1 \ldots T_k$ son dipendenti secondo $(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$.

(*) A proposito di questa locuzione cfr. il n° 3.

È evidente che se $T_1 \ldots T_k$ son dipendenti secondo $(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$ lo sono anche secondo $(\mu\lambda_1 \ldots \mu\lambda_k)$, ove μ è un intero positivo o negativo, arbitrario.

Le due osservazioni fatte al principio di questo numero si possono ora enunciare nel modo seguente:

Ogni corrispondenza a valenza dipende dall'identità.

Due corrispondenze a valenza son sempre dipendenti.

Estendendo una proposizione del n° 7 dimostriamo che:

Se le corrispondenze $T_1 \ldots T_k$ *son dipendenti secondo* $(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$, *anche le loro inverse son dipendenti secondo gli stessi numeri.*

Limitiamoci per brevità al caso $k = 2$, e supponiamo che λ_2, ad esempio, sia negativo $(= -\lambda_2')$ e λ_1 positivo. Fissiamo una serie g_n^r, convenientemente ampia, in modo che vi sia un solo suo gruppo passante per ogni gruppo Y_2 costituito dagli omologhi di a nella T_2 (si fissino, p. es., p punti generici della curva di genere p, e si consideri la serie, non speciale, individuata da quei p punti insieme ad un particolare gruppo Y_2). Chiamando Y_3 quel gruppo che insieme ad un dato Y_2 costituisce un gruppo della g_n^r fissata, e conservando pel resto le solite notazioni, avremo che la relazione:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \equiv \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2'$$

equivale alla:

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2' Y_3 \equiv \lambda_1 Y_1' + \lambda_2' Y_3'. \tag{7}$$

Se si chiamano omologhi del punto variabile a i punti del gruppo Y_3 ad esso relativo, otterremo una corrispondenza algebrica S, tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y_2' + Y_3'.$$

Da ciò deriva che se la inversa di S fa corrispondere ad a il gruppo X_3, e ad a' il gruppo X_3', sarà similmente (n° 6):

$$X_2 + X_3 = X_2' + X_3', \tag{8}$$

ove X_2 (o X_2') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_2^{-1}.

La corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, che si ottiene chiamando omologhi di a i punti del gruppo Y_1 contati ciascuno λ_1 volte, e quelli di Y_3 contati λ_2' volte, in virtù della (7) risulta a valenza zero, sicchè anche la sua inversa, che fa corrispondere ad a il gruppo $\lambda_1 X_1 + \lambda_2' X_3$, sarà a valenza zero. Quindi avremo:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2' X_3 \equiv \lambda_1 X_1' + \lambda_2' X_3',$$

ove X_1 (o X_1') è il gruppo degli omologhi di a (o a') nella T_1^{-1}.

Moltiplicando per λ_2' i due membri della (8), e sottraendola poi dall'ultima relazione, verrà:

$$\lambda_1 X_1 - \lambda_2' X_2 \equiv \lambda_1 X_1' - \lambda_2' X_2',$$

ossia:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \equiv \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' \qquad \text{c. d. d.}$$

Osservazione. — Questo ragionamento non servirebbe più nel caso che una delle corrispondenze fosse l'identità, come accadeva al n° 7. Si può però osservare che anche in tal caso la proposizione rimane valida, come si vede appunto profittando del n° 7.

10. *Relazione geometrica fra i gruppi dei punti uniti di più corrispondenze dipendenti. — Formola di corrispondenza relativa.*

Dimostriamo che:

Se nelle corrispondenze $T_1 \dots T_k$ *dipendenti secondo* $(\lambda_1 \dots \lambda_k)$, *al punto* a *rispondono i gruppi di punti* $Y_1 \dots Y_k$, *mentre nelle corrispondenze inverse al punto stesso rispondono i gruppi* $X_1 \dots X_k$, *indicando con* $U_1 \dots U_k$ *i gruppi dei punti uniti nelle* $T_1 \dots T_k$, *si ha:*

$$(9) \qquad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_k U_k \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \dots + \lambda_k (X_k + Y_k).$$

Per semplicità svilupperemo la dimostrazione nel caso $k = 2$; si vedrà subito come si estenda al caso generale.

Supponiamo, come dianzi, che λ_1 sia positivo e λ_2 negativo $(= -\lambda_2')$, e usiamo le stesse notazioni del numero precedente. Costruiscasi, come allora, la corrispondenza S tale che:

$$Y_2 + Y_3 \equiv Y_2' + Y_3',$$

e ricordiamo che la corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, che nasce dal chiamare omologhi di a i punti del gruppo $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2' Y_3$, è a valenza zero. I punti uniti di questa corrispondenza cadono nei punti del gruppo U_1, che sono uniti nella T_1, e nei punti del gruppo V costituito dai punti uniti di S. Giacchè in ogni punto del gruppo Y_1 omologo di a nella T_1, cadono λ_1 punti omologhi di a nella corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$, un punto unito di T_1 equivarrà a λ_1 coincidenze della corrispondenza $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$. Similmente ogni punto del gruppo V conterà λ_2' volte fra i punti uniti di $\lambda_1 T_1 + \lambda_2' S$. Dunque le coincidenze di quest'ultima costituiscono il gruppo $\lambda_1 U_1 + \lambda_2' V$, e perciò se chiamiamo X_3 il gruppo degli omologhi di a nella S^{-1}, in virtù del risultato del n° 6, avremo:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2' V \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \lambda_2' (X_3 + Y_3).$$

Dalla considerazione della corrispondenza $T_2 + S$, pure a valenza zero, similmente si trae:

$$U_2 + V \equiv (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3).$$

Moltiplicando questa per λ_2' e sottraendola dopo ciò dalla precedente, viene:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \equiv \lambda_1 (X_1 + Y_1) + \lambda_2 (X_2 + Y_2) \qquad \text{c. d. d.}$$

Interpretando numericamente la relazione geometrica ottenuta, si ha una formola di corrispondenza molto importante.

Se diciamo u_i il numero dei punti di U_i, α_i il numero dei punti di X_i, β_i il numero dei punti di Y_i, avremo:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \lambda_k (\alpha_k + \beta_k).$$

Dunque:

Se sopra una curva si hanno k *corrispondenze di indici* $\alpha_1\,\beta_1, \ldots, \alpha_k\,\beta_k$ *dipendenti secondo i numeri* $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, *positivi o negativi, le quali sieno dotate di* $u_1 \ldots u_k$ *punti uniti, ha luogo la relazione:*

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + \lambda_k (\alpha_k + \beta_k). \tag{10}$$

La nota formola di Cayley (*), che è così utile nella risoluzione del problema dei contatti, si ottiene come caso particolare di questa relazione supponendo tutte le λ positive.

11. *Esistenza di un massimo pel numero delle corrispondenze indipendenti sopra una curva. — Base del sistema di tutte le corrispondenze.* — Data una curva C, è possibile scegliere su essa un numero finito di corrispondenze indipendenti, in guisa che ogni altra corrispondenza risulti dipendente da quelle?

Per rispondere a questa domanda dovremo far uso dello strumento trascendente, di cui finora non profittammo.

Cominceremo perciò dal richiamare la rappresentazione delle corrispondenze algebriche con integrali abeliani, dovuta al sig. Hurwitz.

Se dato il punto a si chiamano $y_1\, y_2 \ldots y_\beta$ i punti omologhi ad esso in una corrispondenza algebrica T, data sopra la curva C, variando a si vede che la somma dei valori di un integrale di 1ª specie ai punti $y_1 \ldots y_\beta$. gode delle proprietà caratteristiche di un integrale di 1ª specie al punto a. Sicchè dicendo $u_1 \ldots u_p$ i p integrali normali di 1ª specie annessi a C, hanno luogo le relazioni:

$$\sum_{r=1}^{r=\beta} u_k(y_r) \equiv \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\, u_i(a) + \pi_k \qquad (k = 1, \ldots, p) \tag{11}$$

ove le π sono indipendenti dalla posizione di a.

La tabella dei periodi degli integrali $u_1 \ldots u_p$ sia:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \ldots & \ldots & \tau_{pp} \end{matrix} \qquad (\tau_{ik} = \tau_{ki})$$

Facendo descrivere ad a cammini chiusi convenienti a partire da una posizione iniziale e uguagliando le variazioni dei due membri delle (11), si ottengono le relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g_{il}\,\tau_{ki} \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{ki}\,\tau_{il} &= H_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G_{il}\,\tau_{ki} \end{aligned} \right. \qquad (k, l = 1, \ldots, p), \tag{12}$$

(*) " Transactions of the Royal Society ", t. 158, p. 149 (1868). Vedasi anche Segre, *Introduzione*, n° 49.

ove le h, g, H, G son numeri interi (*). Si prova che per ogni soluzione del sistema (12) si ha una corrispondenza algebrica sulla C (HURWITZ, § 11).

Ciò posto sieno:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\pi^{\varepsilon}_{kl} = h^{\varepsilon}_{kl} + \sum_{i=1}^{p} g^{\varepsilon}_{il}\tau_{ki} \\ &\sum_{i=1}^{p}\pi^{\varepsilon}_{ki}\tau_{il} = H^{\varepsilon}_{kl} + \sum_{i=1}^{p} G^{\varepsilon}_{il}\tau_{ki} \end{aligned}\right. \qquad (\epsilon = 1, \ldots, \mu)$$

μ soluzioni diverse del sistema (12). Si dice che queste μ soluzioni son dipendenti quando le equazioni:

$$(14)\qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_{\varepsilon}\pi^{\varepsilon}_{kl} = 0 \qquad (k, l = 1, \ldots, p)$$

son possibili per valori non tutti nulli degli interi $\lambda_1 \ldots \lambda_{\mu}$; nel caso contrario si dice che le μ soluzioni sono indipendenti (HURWITZ, § 13).

Vediamo come a questo concetto analitico faccia riscontro il concetto geometrico da noi introdotto della dipendenza fra corrispondenze. Dalle (13) si otterranno certe μ corrispondenze $T_1 \ldots T_{\mu}$ e se al punto a corrisponde nella T_{ε} il gruppo Y_{ε} costituito dai punti $y^{\varepsilon}_1 \ldots y^{\varepsilon}_{\beta}$, avremo:

$$u_k(y^{\varepsilon}_1) + u_k(y^{\varepsilon}_2) + \ldots + u_k(y^{\varepsilon}_{\beta}) \equiv \Sigma\pi^{\varepsilon}_{ki}u_i(a) + \pi^{\varepsilon}_k \qquad (\epsilon = 1, \ldots, \mu).$$

Moltiplicando per λ_{ε} e facendo la somma da 1 a μ, verrà:

$$\lambda_1[u_k(y_1') + \ldots] + \ldots + \lambda_{\mu}[u_k(y^{\mu}_1) + \ldots] \equiv \sum_i u_i(a)\sum_{\varepsilon}\lambda_{\varepsilon}\pi^{\varepsilon}_{ki} + \rho_k,$$

ove ρ_k denota una costante.

Se i sistemi (13) son dipendenti, ossia se le (14) son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, sarà:

$$\lambda_1[u_k(y_1') + \ldots] + \ldots + \lambda_{\mu}[u_k(y^{\mu}_1) + \ldots] \equiv \rho_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Se al punto a' corrisponde nella T_{ε} il gruppo Y'_{ε} costituito dai punti $z^{\varepsilon}_1 \ldots z^{\varepsilon}_{\beta}$, avremo dunque:

$$\lambda_1[u_k(y_1') + \ldots] + \ldots + \lambda_{\mu}(u_k(y^{\mu}_1) + \ldots] \equiv \lambda_1[u_k(z_1') + \ldots] + \ldots + \lambda_{\mu}[u_k(z^{\mu}_1) + \ldots].$$

Questa relazione in virtù del teorema di ABEL, equivale alla:

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_{\mu} Y_{\mu} \equiv \lambda_1 Y_1' + \ldots + \lambda_{\mu} Y'_{\mu},$$

la quale esprime appunto la dipendenza delle corrispondenze $T_1 \ldots T_{\mu}$ nel senso definito al n° 9.

Viceversa dalla dipendenza delle $T_1 \ldots T_{\mu}$ risalendo si deduce la dipendenza dei sistemi (13).

(*) HURWITZ, loc. cit., § 1.

Siccome non vi possono essere più di $2p^2$ sistemi indipendenti del tipo (12) (Hurwitz, p. 582), il numero delle corrispondenze indipendenti ammetterà un massimo non superiore a $2p^2$.

Supponiamo che i μ sistemi (13) sieno indipendenti e che non se ne possano trovare più di μ indipendenti. Allora, dato un altro sistema di soluzioni delle (12), si potranno trovare dei numeri interi $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ non tutti nulli, in guisa che:

$$\lambda \pi_{kl} = \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} \qquad (k, l = 1, \ldots, p),$$

ed anzi λ non potrà mai esser nullo.

In tal caso si dirà che le μ corrispondenze $T_1 \ldots T_\mu$ che si ottengono dalle (13), formano una *base*.

Che se poi si scelgono i μ sistemi in modo che il numero λ risulti uguale ad 1 per ogni sistema di soluzioni delle (12), in modo cioè che si abbia:

$$\pi_{kl} = \Sigma \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \mu),$$

ove le λ son numeri interi, si dice che le μ corrispondenze $T_1 \ldots T_\mu$ formano una *base minima*.

La possibilità di ridursi alla base minima accennata in Hurwitz (p. 582), trovasi ad es. dimostrata nelle lezioni citate di Klein sulla teoria delle funzioni modulari ellittiche (p. 543).

Riassumendo possiamo enunciare:

Data una curva di genere p *è possibile scegliere su essa un numero finito* μ, *non superiore a* 2 p², *di corrispondenze indipendenti* $T_1 \ldots T_\mu$ *tali che se* T *è un'altra corrispondenza qualsiasi esistente sulla curva, le* T $T_1 \ldots T_\mu$ *sien dipendenti secondo i numeri* $(1\ \lambda_1 \ldots \lambda_\mu)$.

I numeri $\lambda_1 \ldots \lambda_\mu$ sono individuati una volta assegnata la T, perchè altrimenti le $T_1 \ldots T_\mu$ risulterebbero dipendenti. Quei numeri si chiamano perciò i *caratteri della corrispondenza* T.

Per le curve generali del genere p, il massimo μ è uguale ad 1, e come base minima si può assumere l'identità o una qualsiasi corrispondenza elementare.

Dicendo $u\ u_1 \ldots u_\mu$ i numeri dei punti uniti nelle corrispondenze $T\ T_1 \ldots T_\mu$ di indici rispettivi $(\alpha\ \beta)$, $(\alpha_1\ \beta_1), \ldots, (\alpha_\mu \beta_\mu)$, avremo per la (10):

$$u = \alpha + \beta + \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1 - u_1) + \ldots + \lambda_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu - u_\mu).$$

I numeri interi:

$$c_i = \alpha_i + \beta_i - u_i \qquad (i = 2, \ldots, \mu)$$

non dipendono dalla corrispondenza considerata, ma sibbene dalla natura della curva, e *la formola*

$$u = \alpha + \beta + c_1 \lambda_1 + \ldots + c_\mu \lambda_\mu$$

esprime il principio generale di corrispondenza sopra una curva algebrica qualsiasi.

Osservazione. — Noteremo, perchè ci servirà in seguito, che se sopra una curva le μ corrispondenze $T_1 \dots T_\mu$ sono dipendenti secondo i numeri $\nu\lambda_1, \dots, \nu\lambda_\mu$ ove ν e le λ sono interi, lo sono anche secondo i numeri $\lambda_1 \dots \lambda_\mu$. Difatti dall'essere:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \nu\lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} = 0,$$

si trae:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\mu} \lambda_\varepsilon \pi_{kl}^{\varepsilon} = 0.$$

PARTE SECONDA

Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o due curve.

§ 1. — Le superficie con due fasci unisecantisi.

12. *Generalità.* — *Genere e grado di una corrispondenza fra due curve.* — Sia F una superficie che rappresenti *senza eccezione* le coppie di punti di due curve C, C' di generi p_1, p_2.

Ogni punto x di C fa parte di ∞^1 coppie le quali son rappresentate su F da una curva K_x; variando il punto x su C si hanno ∞^1 curve K_x che costituiscono un fascio $|K_x|$ di genere p_1. Similmente ai punti y di C' rispondono su F le curve di un fascio $|K_y|$ di genere p_2. e le K_y segano in un punto ogni K_x.

Viceversa ogni superficie con due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ unisecantisi, rappresenta le coppie di punti di due curve C, C', ciascuna delle quali è riferita biunivocamente agli elementi (curve) di uno dei due fasci.

Le coppie x, y dei punti che sono omologhi in una data corrispondenza algebrica T fra C, C', son rappresentate su F da una curva algebrica, che denoteremo colla lettera stessa T con cui si denota la corrispondenza. Se ad un punto x rispondono β punti y e ad un punto y rispondono α punti x, la curva T sarà segata in β punti da ogni curva K_x e in α punti da ogni K_y. I due indici α, β della corrispondenza si chiameranno anche gli *indici della curva T*.

Viceversa ogni curva algebrica T tracciata su F pone fra le curve dei due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ una corrispondenza algebrica, ove si chiamino omologhe due curve dei fasci stessi quando si tagliano in T; e quindi essa rappresenta una corrispondenza algebrica tra C, C'. Le curve dei due fasci unisecantisi sono immagini di corrispondenze *degeneri*.

Qui si presenta spontanea l'introduzione di due nuovi caratteri di una corrispondenza T fra C, C': il *genere* e il *grado* (virtuali) della curva T tracciata su F (*), i quali si indicheranno rispettivamente con ρ, ν.

(*) Per la definizione di questi caratteri cfr. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* " Annali di Matematica „ (3), t. 6 (1901), n° 1.

Poichè il sistema canonico di F si ottiene aggiungendo alla serie canonica di $|K_x|$ la serie canonica di $|K_y|$ (*), dicendo α, β gl'indici di T, ossia chiamando β il numero dei punti in cui una K_x sega T ed α il numero dei punti in cui una K_y sega T, avremo:

(15) $$2\beta(p_1 - 1) + 2\alpha(p_2 - 1) + \nu = 2\rho - 2 \text{ (**)}.$$

13. *Notazioni.* — Se due curve $\Gamma' \Gamma''$ tracciate sopra una superficie qualsiasi appartengono totalmente ad uno stesso sistema lineare, si dirà che esse sono equivalenti e si scriverà

$$\Gamma' \equiv \Gamma''.$$

Date sopra una superficie più curve $\Gamma' \Gamma'' \ldots; \Delta' \Delta'' \ldots$, il significato della relazione

(16) $$\lambda_1 \Gamma' + \lambda_2 \Gamma'' + \ldots \equiv \mu_1 \Delta' + \mu_2 \Delta'' + \ldots,$$

ove le λ, μ sono interi positivi o negativi, risulta senz'altro se son possibili le eventuali sottrazioni indicate nei due membri della relazione medesima. In ogni caso le possiamo dare un senso preciso, dicendo che equivale alla relazione che da essa si ottiene trasportando da un membro all'altro i termini negativi e cambiandoli di segno.

Anche questa definizione, come l'analoga del n° 3, si può presentare sotto altra forma, ma ci dispensiamo dal farlo.

Per esprimere la (16) concisamente e in modo suggestivo, diremo spesso che *le due curve (virtuali)*

$$\lambda_1 \Gamma' + \lambda_2 \Gamma'' + \ldots \quad \text{e} \quad \mu_1 \Delta' + \mu_2 \Delta'' + \ldots$$

sono equivalenti, od anche che esse *appartengono ad uno stesso sistema lineare*, per quanto se le λ, μ non son tutte positive, non sempre esistano curve effettive corrispondenti ai simboli suddetti.

Ritornando alla nostra superficie F con due fasci unisecantisi, diciamo T una sua curva. Per i β punti ove T è tagliata da una K_x passano altrettante K_y, e al variare delle K_x considerate si ha nel fascio $|K_y|$ una ∞^1 algebrica di gruppi di β curve: uno generico fra questi gruppi s'indicherà con T_y, ponendo l'indice y a piè della lettera con la quale si indica la curva data. Similmente T_x denoterà il gruppo delle K_x che passano per gli α punti ove T è segata da una K_y generica.

14. *Curve a valenza zero. — Loro composizione per somma dalle curve dei due fasci unisecantisi. — Caso delle rigate.* — Suppongasi di avere fra i punti delle due curve C, C' da cui prende origine la superficie F, di cui ai numeri precedenti, una corrispondenza T tale che mentre un punto x si muove su C, il gruppo dei β punti y che ad esso corrispondono su C', varii in una serie lineare d'ordine β. Si dimostra

(*) Cfr. Maroni e De-Franchis, loc. cit.

(**) Cfr. De-Franchis, loc. cit., n° 8.

allora, come si fece al n° 6 pel caso di due curve C, C' coincidenti, che gli α punti x di C omologhi di un punto y variabile su C', variano in una serie lineare d'ordine α. Estendendo la denominazione già usata per le corrispondenze sopra una curva, diremo in tal caso che la T è una *corrispondenza a valenza zero.*

Chiameremo poi CURVE A VALENZA ZERO *quelle curve di* F *che sono immagini di corrispondenze a valenza* 0. Una curva T a valenza zero è caratterizzata dal fatto che il gruppo delle β curve K_y passanti pei punti comuni ad essa e ad una K_x, mutando questa, varia in una serie lineare d'ordine β, entro al fascio $|K_y|$; e quindi che il gruppo delle α curve K_x che passano pei punti in cui T è segata da una K_y, al variare di questa, varia in una serie lineare d'ordine α, entro al fascio $|K_x|$.

Più brevemente si può dire che una curva a valenza zero è caratterizzata dal fatto di segare sopra *ogni* curva del fascio $|K_x|$ (o $|K_y|$), un gruppo che equivale a quello segato da un conveniente insieme di curve K_y (o K_x).

Questa proprietà si potrebbe dunque assumere come definizione delle curve a valenza zero, ove si volessero definire direttamente sulla superficie F.

Le curve che appartengono ad un sistema lineare somma di una serie lineare del fascio $|K_x|$ con una serie lineare di $|K_y|$, godono appunto di questa proprietà.

Ma è importante dimostrare che, viceversa, ogni curva a valenza zero è contenuta totalmente in un sistema lineare somma di curve dei due fasci.

A tal uopo supponiamo che la superficie F appartenga allo spazio ordinario, ipotesi che, nella questione attuale, non è restrittiva. — Il sistema lineare individuato dalla curva T_y, composta mediante le K_y che passano pei punti comuni ad una K_x e ad una curva T a valenza zero, sarà segato su F, fuori di certe curve fisse Q, da un sistema lineare di superficie $\varphi(y_1\, y_2\, y_3\, y_4) = 0$, ove $y_1 \dots y_4$ son coordinate omogenee di punto; e in particolare le ∞^1 curve T_y, che si ottengono facendo variare la K_x scelta, saranno segate da un sistema algebrico ∞^1 di superficie φ. Poichè per ogni punto di F passa una K_x e questa individua una curva composta T_y, i coefficienti delle y nell'equazione $\varphi(y_1 \dots y_4) = 0$, saranno funzioni razionali del punto variabile su F, sicchè l'equazione di una φ del sistema ∞^1 si potrà scrivere sotto la forma:

$$\Phi\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \,|\, y_1\, y_2\, y_3\, y_4) = 0,$$

ove Φ è il simbolo di un polinomio omogeneo di grado m nelle x, omogeneo di grado m' nelle y.

Dato un punto $(y_1^0 \dots y_4^0)$ della F per esso passa una K_y la quale sega T in α punti, e il gruppo T_x delle K_x passanti per questi α punti, sarà segato su F, fuori di certe curve R, dalla superficie:

$$\psi^0 \equiv \Phi\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \,|\, y_1^0\, y_2^0\, y_3^0\, y_4^0) = 0.$$

La superficie:

$$\Phi\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \,|\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0,$$

di ordine $m + m'$, passa per le curve Q ed R, e quindi appartiene al sistema lineare somma di quelli a cui appartengono le φ e le ψ. Ne segue che essa, fuori delle eventuali curve fisse, sega su F una curva L appartenente al sistema lineare somma di quelli segati (fuori delle curve fisse) dalle φ e dalle ψ, ossia una curva del sistema $|T_x + T_y|$. Poichè per un punto di T passano due curve omologhe nella corrispondenza che l'equazione $\Phi(x|y) = 0$ pone fra i due fasci $|K_x|$, $|K_y|$, ne viene che T fa parte della curva L.

Se per un punto fuori di T passassero una K_x e una K_y omologhe nella corrispondenza stessa, siccome esse già s'incontrerebbero in T, esisterebbe una curva che farebbe parte di K_x e di K_y.

Ma se, come abbiamo supposto, la superficie F rappresenta *senza eccezione* le coppie dei punti di due curve C, C', non esistono curve dei due fasci unisecantisi aventi parti comuni e perciò in tal caso $L = T$.

Dunque:

Sulla superficie F *coi due fasci unisecantisi* $|K_x|$, $|K_y|$, *ogni curva* T *a valenza zero appartiene al sistema lineare individuato dalle curve* K_y *che passano pei punti comuni a* T *e ad una* K_x, *aumentate delle* K_x *che passano pei punti ove una* K_y *incontra* T.

Se uno dei due fasci, p. es. $|K_y|$, è razionale, la superficie F è riferibile birazionalmente ad una rigata, di genere uguale al genere p_1 dell'altro fascio $|K_x|$. Le curve di quest'ultimo fascio si chiameranno *generatrici*, e la F si dirà *rigata*, anche se non lo è nel senso projettivo della parola.

In questo caso è utile vedere quali modificazioni subisca il teorema precedente se la F non rappresenta senza eccezione le coppie di punti delle due curve C, C' (delle quali la seconda è razionale), perchè quando si dà una rigata e si cerca di costruire su essa un fascio di unisecanti le generatrici, questo (essendo razionale) viene generalmente ad avere dei punti base.

Supponiamo dunque che il fascio $|K_y|$ abbia n punti base: allora le generatrici passanti per questi si staccheranno da certe n curve del fascio $|K_y|$, e quindi la curva L, di cui prima parlavamo, non conterrà soltanto la T, ma anche ciascuna delle suddette generatrici. Ognuna di queste si dovrà inoltre contare β volte come parte della L, perchè taglia in β punti la curva T.

È facile vedere che nel caso che stiamo trattando, il teorema dimostrato ci dà il modo di ottenere tutte le curve della superficie F. Basterà perciò provare che le curve tracciate sopra una rigata sono a valenza zero. Difatti le K_y che passano pei β punti comuni alla curva T e ad una generatrice, mutando questa variano in una serie lineare, perchè in un ente razionale ∞^1 tutti i possibili gruppi di β elementi formano una serie lineare.

Potremo dunque enunciare la proposizione seguente:

Sopra una rigata F *tutte le curve si ottengono colle operazioni di somma e sottrazione a partire dalle generatrici e da un fascio di unisecanti.*

Precisamente: Dato su F un fascio $|K_y|$ di unisecanti le generatrici, e una curva T, se dal sistema lineare individuato dalle unisecanti che escono dai β punti ove T è tagliata da una generatrice, aumentate delle generatrici che escono dagli α punti ove T è tagliata da una K_y, si tolgono le generatrici che passano per gli eventuali punti base di $|K_y|$, ciascuna contata β volte, si ha un sistema lineare che contiene (totalmente) T.

Dal teorema dimostrato discendono subito la formola che dà il numero dei punti comuni a due curve T, T' sopra la rigata, e la formola (di Segre) che dà il genere di una curva tracciata sulla rigata stessa.

Ci tratterremo un momento sulla deduzione di queste formole, affine di avere un primo esempio semplice, delle considerazioni analoghe, che saranno svolte in seguito, per la superficie F con due fasci irrazionali.

Sieno $\alpha\,\beta$, $\alpha'\,\beta'$ gli indici di T, T'. Indicando con N il gruppo delle generatrici passanti per gli n punti base di $|K_y|$, avremo:

$$T + \beta N \equiv T_x + T_y. \tag{17}$$

Segando con T' le curve che figurano nei due membri della (17) e indicando con i il numero dei punti comuni a T e T' verrà:

$$i + n\beta\beta' = \alpha\beta' + \beta\alpha',$$

ossia:

$$i = \alpha\beta' + \beta\alpha' - n\beta\beta',$$

che è la formola nota pel numero dei punti comuni a due curve tracciate sopra una rigata d'ordine n.

Il genere ρ della T si desume subito dalla (17) uguagliando i generi delle due curve composte che compaiono nei due membri; si ottiene così:

$$\rho + (1 - n\beta) + n\beta^2 - 1 = (1 - \alpha) + [\beta p_1 + \tbinom{\beta}{2} n - \beta + 1] + \alpha\beta - 1,$$

donde si trae:

$$\rho = \beta(p_1 - 1) + \alpha(\beta - 1) - n\tbinom{\beta}{2} + 1,$$

che è la formola di Segre.

Applicando la formola che dà il grado di una curva spezzata, ovvero segando con T i due membri della (17), si ottiene l'espressione del grado ν di T:

$$\nu = 2\alpha\beta - n\beta^2.$$

15. *Concetto di dipendenza fra due o più curve tracciate sulla superficie* F *con due fasci unisecantisi.* — Sieno $\Gamma'\,\Gamma'' \ldots \Gamma^k$ k curve tracciate sulla superficie F coi due fasci unisecantisi $|K_x|$ e $|K_y|$. Si dirà che esse sono *dipendenti* o che una di esse *dipende* dalle rimanenti, quando esistono dei numeri interi non tutti nulli $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, tali che:

$$\lambda_1\Gamma' + \ldots + \lambda_k\Gamma^k \equiv \lambda_1(\Gamma_x' + \Gamma_y') + \ldots + \lambda_k(\Gamma_x^k + \Gamma_y^k). \tag{18}$$

Le curve stesse si diranno *indipendenti* nel caso contrario.

Ricordiamo che Γ_x^i denota il gruppo delle K_x che passano pei punti ove Γ^i è segata da una K_y, e che Γ_y^i denota il gruppo delle K_y passanti pei punti ove Γ^i è segata da una K_x.

Si può brevemente dire *che le curve $\Gamma' \ldots \Gamma^k$ sono dipendenti, se esistono degli interi non tutti nulli $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, tali che la curva (virtuale) $\lambda_1\Gamma' + \ldots + \lambda_k\Gamma^k$ sia a valenza zero.* Questa locuzione ha un senso puramente convenzionale, quando non esiste una curva corrispondente al simbolo $\lambda_1 \Gamma' + ... + \lambda_k \Gamma^k$. In tal caso però si potrà scegliere una curva L a valenza zero (appartenente ad un sistema lineare abbastanza ampio) in guisa che esista una curva corrispondente al simbolo $L + \lambda_1 \Gamma' + ... + \lambda_k \Gamma^k$: la (18) dice allora che anche questa curva è a valenza zero.

Dalla (18) si trae:

$$\lambda_1 \Gamma' + ... + \lambda_k \Gamma^k - \lambda_1 \Gamma_x' - ... - \lambda_k \Gamma_x^k \equiv \lambda_1 \Gamma_y' + ... + \lambda_k \Gamma_y^k,$$

sicchè dicendo $\overline{\Gamma}_y^i$ il gruppo delle K_y che passano pei punti ove la curva $\overline{K}_x$ sega Γ^i, avremo:

$$\lambda_1 \Gamma_y' + ... + \lambda_k \Gamma_y^k \equiv \lambda_1 \overline{\Gamma}_y' + ... + \lambda_k \overline{\Gamma}_y^k. \tag{19}$$

Viceversa se questa relazione è soddisfatta qualunque sieno le due curve K_x e $\overline{K}_x$ con cui si son segate le Γ^i, sarà vera anche la (18). Difatti quando le λ son tutte positive, la (19) ci dice che la curva $\lambda_1 \Gamma' + ... + \lambda_k \Gamma^k$ è a valenza zero, e quindi pel teorema dimostrato al n° precedente, sussisterà la (18).

Ma supponiamo, ad es., che λ_1 sia negativa $(= - \lambda_1')$ e le altre λ positive. Allora si potrà determinare un sistema lineare di curve a valenza zero così ampio, che vi siano in esso curve spezzate nella $\lambda_1' \Gamma'$ e in una parte residua Γ. Poichè la curva $\Gamma + \lambda_1' \Gamma'$ è a valenza zero, avremo:

$$\Gamma_y + \lambda_1' \Gamma_y' \equiv \overline{\Gamma}_y + \lambda_1' \overline{\Gamma}_y',$$

la quale addizionata alle (19) dà:

$$\Gamma_y + \lambda_2 \Gamma_y'' + ... \equiv \overline{\Gamma}_y + \lambda_2 \overline{\Gamma}_y'' + ...,$$

e da questa, essendo tutte le λ positive, si trae:

$$\Gamma + \lambda_2 \Gamma'' + ... \equiv (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_2 (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + ...,$$

che combinata colla relazione:

$$\Gamma + \lambda_1' \Gamma' \equiv (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1' (\Gamma_x' + \Gamma_y'),$$

la quale esprime appunto che $\Gamma + \lambda_1' \Gamma'$ è a valenza zero, porge:

$$\lambda_1 \Gamma' + \lambda_2 \Gamma'' + ... \equiv \lambda_1 (\Gamma_x' + \Gamma_y') + \lambda_2 (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + ...$$

16. *Esistenza di un massimo pel numero delle curve indipendenti sopra la superficie con due fasci unisecantisi. — Base del sistema di tutte le curve su essa tracciate.* — Il teorema dimostrato al n° 14 per le rigate, ci dava il modo di ottenere per somma e sottrazione tutte le curve tracciate sopra una rigata, a partire dai fasci $|K_x|$ e $|K_y|$.

In questo n° ci occuperemo del teorema analogo per le superficie F con due fasci irrazionali. Usando delle locuzioni introdotte al n° precedente, questo teorema si può enunciare brevemente così:

Sopra la superficie F *con due fasci unisecantisi* $|K_x|$ *e* $|K_y|$, *di generi* p_1, p_2, *è possibile trovare un numero, non superiore a* $2p_1 p_2$, *di curve indipendenti, tali che ogni altra curva di* F *sia dipendente da quelle.*

Fissiamo infatti sulla F una curva K di indici $\mu\,\nu$, diversa dalle curve dei due fasci, ed indichiamo con I, J le due involuzioni di generi $p_1\,p_2$, che i due fasci segano su K. Diremo che una corrispondenza S fra i punti di K è *composta* con una di queste involuzioni, p. es. con J, quando i punti y omologhi del punto a nella S, si distribuiscono in tanti gruppi dell'involuzione J.

Data su F una curva T di indici $\alpha\,\beta$, essa determina una corrispondenza fra le curve dei due fasci, allorchè si riguardino come omologhe due curve $K_x\,K_y$ che s'incontrano in un punto di T.

Mediante questa corrispondenza ne possiamo porre una, S, fra i punti di K, nel modo seguente:

Dato un punto a di K, si chiamino suoi omologhi i $\beta\,\mu$ punti y segnati su K dalle K_y che passano per le intersezioni di T con la K_x uscente da a. La corrispondenza S è composta con J e la sua inversa S^{-1} è composta con I.

Indicheremo con G l'insieme di tutte quelle corrispondenze esistenti su K, che son composte con J ed hanno le inverse composte con I.

Ogni curva di F dà luogo su K, nel modo visto, ad una corrispondenza dell'insieme G, e viceversa una tal corrispondenza dà origine ad uno fra i gruppi delle involuzioni I, J, ossia fra le curve dei due fasci irrazionali. Le $K_x\,K_y$ omologhe in quest'ultima corrispondenza, s'intersecano nei punti di una curva T di F.

Dal momento che (come fu dimostrato al n° 11) il numero delle corrispondenze indipendenti sopra una curva ammette un massimo, nell'insieme G non ne esisterà più di un certo numero di indipendenti, sicchè si potranno fissare in esso t corrispondenze $S_1 \dots S_t$ indipendenti, tali che ogni altra corrispondenza di G sia dipendente da quelle. Notiamo però, a scanso d'equivoci, che viceversa non è detto che ogni corrispondenza dipendente da $S_1 \dots S_t$ appartenga a G; così la somma di una corrispondenza di G con una corrispondenza a valenza zero non appartenente a G, dipende da $S_1 \dots S_t$ e non appartiene a G.

Proviamo ora che corrispondenze dell'insieme G, fra loro dipendenti, dànno luogo su F a curve dipendenti.

Sieno, p. es., $R_1\,R_2$ due corrispondenze di G dipendenti secondo $(\lambda_1\,\lambda_2)$. Ciò significa che dicendo $Y_1\,Y_2$ i gruppi degli omologhi del punto a nelle $R_1\,R_2$ e $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ i gruppi degli omologhi di un altro punto $\bar{a}$, si ha:

$$\lambda_1\,Y_1 + \lambda_2\,Y_2 \equiv \lambda_1\,\overline{Y}_1 + \lambda_2\,\overline{Y}_2.$$

Indichiamo con $T'\,T''$ le curve di F che si costruiscono mediante le due corrispondenze $R_1\,R_2$. Poichè ai gruppi di una serie lineare composta con J, rispondono nel fascio $|K_y|$ gruppi di curve appartenenti ad una medesima serie lineare, avremo:

$$\lambda_1\,T_y' + \lambda_2\,T_y'' \equiv \lambda_1\,\overline{T}_y' + \lambda_2\,\overline{T}_y'' ,$$

ove T_y' rappresenta il gruppo delle K_y che passano pei punti comuni a T' ed alla K_x uscente da a, $\overline{T}_y'$ il gruppo delle K_y che passano pei punti ove T' taglia la $K_{\bar{x}}$

uscente da $\bar{a}$, e $T_y''\ \overline{T}_y''$ hanno significati analoghi rispetto a T''. Dalla relazione precedente, in virtù di quanto stabilimmo al n° 15, si trae:

$$\lambda_1 T' + \lambda_2 T'' \equiv \lambda_1 (T_x' + T_y') + \lambda_2 (T_x'' + T_y''),$$

la quale prova la dipendenza di $T'\ T''$ secondo $(\lambda_1\ \lambda_2)$.

Viceversa è facile vedere che due curve $T'\ T''$ dipendenti secondo $(\lambda_1\ \lambda_2)$, dànno luogo a due corrispondenze $R_1\ R_2$ dell'insieme G, dipendenti secondo gli stessi numeri.

Ciò posto, diciamo $\Gamma'\ \Gamma'' \dots \Gamma^t$ le curve di F che si costruiscono col sussidio delle corrispondenze $S_1 \dots S_t$ dell'insieme G. Siccome ogni curva Γ di F dà luogo su K ad una corrispondenza S che appartiene all'insieme G e che dipende quindi da $S_1 \dots S_t$, la curva Γ sarà dipendente da $\Gamma' \dots \Gamma^t$. Dunque tutte le curve di F sono dipendenti dalle $\Gamma' \dots \Gamma^t$, e perciò l'insieme $(\Gamma' \dots \Gamma^t)$ si dice una *base* del sistema delle curve tracciate su F. Se le corrispondenze $S_1 \dots S_t$ furono scelte in guisa che dicendo S una corrispondenza qualsiasi dell'insieme G, le $S\ S_1 \dots S_t$ siano dipendenti secondo i numeri $(1\ \lambda_1 \dots \lambda_t)$, ove le λ siano interi convenienti, la *base* $(\Gamma' \dots \Gamma^t)$ si dirà *minima*. Notiamo adesso che il teorema enunciato al principio di questo numero, concernente la totalità delle curve appartenenti ad F, dice in sostanza che *ogni curva di* F *si può ottenere con operazioni di somma e sottrazione dalle curve dei due fasci unisecantisi e da quelle di una base minima.*

Ritornando alle due curve C, C' dalle quali è nata la superficie F, il risultato ottenuto ci dice che nella totalità delle corrispondenze fra C, C', se ne può trovare un numero finito $\Gamma' \dots \Gamma^t$, per modo che indicando con $Y_i\ Y_i'$ i gruppi dei punti di C' omologhi dei punti $x\ x'$, di C, nella corrispondenza Γ^i, e con $Y\ Y'$ i gruppi dei punti di C' omologhi di $x\ x'$ in un'altra corrispondenza qualsiasi Γ fra C, C', abbia luogo la relazione:

$$\lambda\, Y + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_t Y_t \equiv \lambda\, Y' + \lambda_1 Y_1' + \dots + \lambda_t Y_t'.$$

La proposizione stabilita al n° 11 nel caso di due curve coincidenti, resta così estesa al caso di due curve distinte. Questa estensione si sarebbe potuta ottenere anche mediante la rappresentazione delle corrispondenze fra due curve cogli integrali abeliani ad esse relativi. Le formole analoghe a quelle date da Hurwitz per rappresentare le corrispondenze sopra una curva, si otterrebbero anche nel caso di due curve distinte C, C', partendosi dal fatto che quando fra C, C' si ha una corrispondenza algebrica, la somma dei valori d'un integrale abeliano (di 1ª specie) annesso a C' nei punti y corrispondenti ad un punto x di C, riguardata come funzione di x, è un integrale abeliano di 1ª specie annesso a C.

Anzi mediante la rappresentazione trascendente si sarebbe di più ottenuto che il numero delle corrispondenze indipendenti fra due curve distinte di generi $p_1\ p_2$, non può superare $2 p_1\ p_2$. Ma su ciò crediamo inutile d'insistere, trattandosi di cosa che si stabilisce con una leggera modificazione del procedimento usato da Hurwitz, per stabilire il fatto analogo sopra una sola curva.

17. *Discriminante di una base. — Discriminante di una base minima.* — Consideriamo le curve $\Gamma' \dots \Gamma^t$ di indici $\alpha_1\ \beta_1, \dots, \alpha_t\ \beta_t$, e rappresentiamo con γ_{ih} il numero dei punti comuni alle due curve $\Gamma^i\ \Gamma^h$, dimodochè γ_{ii} rappresenterà il grado virtuale della Γ^i.

Il determinante simmetrico:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{t1} & c_{t2} & \dots & c_{tt} \end{vmatrix},$$

ove si è posto:

$$c_{ih} = \alpha_i \beta_h + \alpha_h \beta_i - \gamma_{ih} \qquad (i, h = 1 \dots t),$$

si chiamerà il *discriminante dell'aggruppamento* $(\Gamma' \dots \Gamma^t)$.

È facile provare che *se le curve* $\Gamma' \dots \Gamma^t$ *sono dipendenti, il discriminante* Δ *si annulla.*

Difatti dalla relazione di dipendenza delle $\Gamma' \Gamma'' \dots$:

$$\lambda_1 \Gamma' + \dots + \lambda_t \Gamma^t \equiv \lambda (\Gamma_x' + \Gamma_y') + \dots,$$

segando colla Γ^i tutte le curve che figurano nei due membri della relazione stessa, si ricava:

$$\lambda_1 \gamma_{1i} + \lambda_2 \gamma_{2i} + \dots + \lambda_t \gamma_{ti} = \lambda_1 (\alpha_1 \beta_i + \alpha_i \beta_1) + \dots$$

ossia:

$$\lambda_1 c_{1i} + \lambda_2 c_{2i} + \dots + \lambda_t c_{ti} = 0 \qquad (i = 1 \dots t).$$

Giacchè queste equazioni lineari son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, sarà zero il determinante dei coefficienti, che è precisamente Δ.

La proposizione dimostrata ci dice che se t è il massimo numero di curve indipendenti che si posson tracciare su F, ogni aggruppamento di t curve che abbia il discriminante diverso da zero, potrà assumersi come base della totalità delle curve appartenenti ad F.

Nell'ipotesi che l'aggruppamento $(\Gamma' \dots \Gamma^t)$ sia una base, vediamo come si passa dal suo discriminante al discriminante Δ' di un'altra base, le cui curve $\Pi' \dots \Pi^t$ abbiano gli indici $\alpha_1' \beta_1', \dots \alpha_t' \beta_t'$. Le $\Pi' \dots \Pi^t$ saranno dipendenti dalle curve $\Gamma' \dots \Gamma^t$, e quindi avremo:

$$\lambda_i \Pi^i = \lambda_i (\Pi_x^i + \Pi_y^i) + \lambda_{1i} (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \lambda_{2i} (\Gamma'' - \Gamma_x'' - \Gamma_y'') + \dots \tag{20}$$
$$(i = 1 \dots t)$$

ove le $\lambda_i\ \lambda_{1i}\ \lambda_{2i} \dots$ sono interi convenienti e nessuna delle λ_i è nulla, perchè altrimenti le $\Gamma' \dots \Gamma^t$ sarebbero dipendenti. Segando con Γ^l le curve che compariscono nei due membri della (20), otterremo:

$$\lambda_i \gamma_{il}' = \lambda_i (\alpha_i' \beta_l + \beta_i' \alpha_l) + \lambda_{1i} (\gamma_{1l} - \alpha_1 \beta_l - \beta_1 \alpha_l) + \dots$$

ove γ_{il}' rappresenta il numero dei punti comuni a Π^i e Γ^l. Se si pone:

$$\alpha_i' \beta_l + \beta_i' \alpha_l - \gamma_{il}' = c_{il}',$$

verrà:

$$\lambda_i c_{il}' = \lambda_{1i} c_{1l} + \lambda_{2i} c_{2l} + \dots + \lambda_{ti} c_{tl} \qquad (i, l = 1 \dots t). \tag{21}$$

Segando con Π^l i due membri della (20), avremo:

$$\lambda_i \bar{\gamma}_{il}' = \lambda_i (\alpha_i' \beta_l' + \beta_i' \alpha_l') + \lambda_{1i} (\gamma_{1l}' - \alpha_1 \beta_l' - \beta_1 \alpha_l') + \ldots \qquad (i, l = 1 \ldots t),$$

ove $\bar{\gamma}_{il}'$ rappresenta il numero dei punti comuni a Π^i e Π^l.

Se poniamo:

$$\alpha_i' \beta_l' + \beta_i' \alpha_l' - \bar{\gamma}_{il}' = \bar{c}_{il}',$$

otterremo:

$$\lambda_i \bar{c}_{il}' = \lambda_{1i} c_{1l}' + \lambda_{2i} c_{2l}' + \ldots + \lambda_{ti} c_{tl}', \tag{22}$$

ed il discriminante della nuova base sarà espresso da:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \bar{c}'_{11} & \bar{c}'_{12} & \ldots & \bar{c}'_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}'_{t1} & \bar{c}'_{t2} & \ldots & \bar{c}'_{tt} \end{vmatrix}.$$

Profittando delle (21), (22), e della regola di moltiplicazione dei determinanti, si trova fra Δ e Δ' la relazione seguente:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t)^2 \Delta' = \Lambda^2 \Delta, \tag{23}$$

nella quale si è posto:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \ldots & \lambda_{tt} \end{vmatrix}.$$

Poichè le $\lambda_1 \ldots \lambda_t$ non son nulle, la relazione ottenuta ci mostra che se fosse $\Delta = 0$ sarebbe pure $\Delta' = 0$, ossia se fosse nullo il discriminante di una base, sarebbe nullo il discriminante di ogni altra base.

Se dunque sopra una superficie F esistesse una base col discriminante nullo, questa sarebbe una proprietà intrinseca della superficie stessa. Ma per quanto io non abbia potuto stabilire in generale il fatto che la condizione $\Delta \neq 0$ è *necessaria* perchè le curve $\Gamma' \ldots \Gamma^t$ formino una base, tuttavia credo che non esistano superficie F dotate della proprietà accennata. Ad ogni modo questa è una questione che per ora lascio insoluta.

Facciamo ora l'ipotesi, eventualmente limitativa, che *il discriminante* Δ *della base* $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ *sia diverso da zero.* Vogliamo vedere *come si deve operare* (*per somma e sottrazione*) *sulla base data, affine di passare ad una base minima.* Data una curva Γ di F, essa si esprime mediante la base data nel modo seguente:

$$\lambda \Gamma \equiv \lambda (\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1 (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \ldots \tag{24}$$

ove λ è un intero diverso da zero. Osserviamo anzitutto che se gli interi $\lambda_1 \ldots \lambda_t$ son divisibili per λ, ossia se:

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \lambda, \ldots, \lambda_t = \bar{\lambda}_t \lambda,$$

la procedente relazione si può sostituire con l'altra:

$$\Gamma = (\Gamma_x + \Gamma_y) + \bar{\lambda}_1 (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \ldots$$

Difatti nell'ipotesi fatta, $\Gamma\,\Gamma' \ldots \Gamma^t$ dànno luogo sulla curva K di F, dolla qualo parlavamo al n° precedente, a $t+1$ corrispondonzo dell'insieme G, dipendenti socondo i numeri $(-\lambda, \bar{\lambda}_1 \lambda, \ldots, \bar{\lambda}_t \lambda)$ e quindi dipendenti secondo $(-1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_t)$ (ved. l'Ossorvazione con cui si chiudo la Parte I^a). Ne doriva che lo curve $\Gamma\,\Gamma' \ldots \Gamma^t$ son esse pure dipendenti secondo $(-1, \bar{\lambda}_1, \ldots, \lambda_t)$ (n° 16).

Dunque se la baso considerata $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ non è minima, esisterà certo una Γ alla quale compete un coefficiente $\lambda > 1$ e primo con una almeno delle $\lambda_1 \ldots \lambda_t$: per es. con λ_1. Si potranno trovare allora due interi $\mu\,\mu_1$ tali che:

$$\lambda\mu + \lambda_1\mu_1 = 1. \tag{25}$$

Supponiamo prima μ e μ_1 positivi e consideriamo la curva $\bar{\Gamma}' \equiv \mu_1 \Gamma + \mu \Gamma'$. Vediamo com'ossa si esprime colla base data. Si ha ovidentemente:

$$\lambda \bar{\Gamma}' \equiv \mu_1 \lambda \Gamma + \mu \lambda \Gamma',$$

dalla quale, mediante la (24) e la relazione identica:

$$\Gamma' \equiv (\Gamma_x' + \Gamma_y') + (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y'),$$

si trae:

$$\lambda \bar{\Gamma}' \equiv \lambda\mu_1(\Gamma_x + \Gamma_y) + \lambda_1\mu_1(\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \lambda_2\mu_1(\Gamma'' - \Gamma_x'' - \Gamma_y'') + \ldots$$
$$\ldots + \lambda\mu(\Gamma_x' + \Gamma_y') + \lambda\mu(\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y'),$$

ossia, ricordando la (25):

$$\lambda \bar{\Gamma}' \equiv \lambda[\mu_1(\Gamma_x + \Gamma_y) + \mu(\Gamma_x' + \Gamma_y')] + (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \lambda_2\mu_1(\Gamma'' - \Gamma_x'' - \Gamma_y'') + \ldots. \tag{26}$$

Le curve $\Gamma'' \ldots \Gamma^t$ si esprimono mediante la base data colle relazioni idontiche:

$$\Gamma'' \equiv (\Gamma_x'' + \Gamma_y'') + (\Gamma'' - \Gamma_x'' - \Gamma_y'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma^t \equiv (\Gamma_x^t + \Gamma_y^t) + (\Gamma^t - \Gamma_x^t - \Gamma_y^t),$$

sicchè indicando con Δ' il discriminante dell'insieme $(\bar{\Gamma}'\,\Gamma'' \ldots \Gamma^t)$, grazie alla formola (23), avremo:

$$\lambda^2 \Delta' = \Delta, \tag{27}$$

perchè attualmente il determinante Λ è espresso da:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2\mu_1 & \lambda_3\mu_1 & \ldots & \lambda_t\mu_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Finora abbiamo considerato il caso che i numeri $\mu\ \mu_1$ sieno positivi; se uno o entrambi son negativi si definirà la $\overline{\Gamma}'$ mediante la relazione:

$$\overline{\Gamma}' \equiv \mu_1 \Gamma + \mu \Gamma' + L,$$

ove L è una curva a valenza zero appartenente ad un sistema lineare così ampio, che esistano curve corrispondenti al simbolo $\mu_1 \Gamma + \mu \Gamma' + L$. La (26) sarà sostituita dalla:

$$(26') \qquad \lambda \overline{\Gamma}' \equiv \lambda [\mu_1(\Gamma_x + \Gamma_y) + \mu(\Gamma_x' + \Gamma_y') + (L_x + L_y)] + (\Gamma' - \Gamma_x' - \Gamma_y') + \\ + \lambda_2 \mu_1 (\Gamma'' - \Gamma_x'' - \Gamma_y'') + \dots$$

ed anche in tal caso il discriminante Δ' del gruppo $(\overline{\Gamma}'\ \Gamma'' \dots \Gamma^{\prime})$ sarà legato a Δ dalla (27).

La (27) ci dice anzitutto che $\Delta' \neq 0$ e quindi che l'insieme $(\overline{\Gamma}'\ \Gamma'' \dots \Gamma^{\prime})$ si può prendere come base invece di $(\Gamma'\ \Gamma'' \dots \Gamma^{\prime})$, e inoltre ci dice che λ^2 è un divisore di Δ.

Trattiamo ora la base $(\overline{\Gamma}'\ \Gamma'' \dots \Gamma^{\prime})$ come la base iniziale; avremo un'altra base il cui discriminante Δ'' in valore assoluto è minore di Δ'. Così proseguendo si otterrà una successione di numeri interi diversi da zero:

$$\Delta\ \Delta'\ \Delta'' \dots$$

di cui ciascuno ha valore assoluto minore del precedente. Dunque la successione avrà un ultimo termine Δ^s e la base corrispondente sarà una *base minima.*

È facile dimostrare che:

Tutte le basi minime hanno lo stesso discriminante.

Difatti se $\Delta\ \Delta'$ sono i discriminanti di due basi minime, in virtù della (23) avremo due relazioni del tipo:

$$\Delta' = \Lambda^2\ \Delta$$

$$\Delta = \Lambda'^2\ \Delta',$$

ove $\Lambda\ \Lambda'$ son numeri interi. Ora la prima dice che il rapporto $\frac{\Delta'}{\Delta}$ non è inferiore ad 1, la seconda che lo stesso rapporto non è superiore ad 1, dunque verrà:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 1,$$

ossia:

$$\Delta' = \Delta.$$

Il procedimento che abbiamo indicato per la riduzione alla base minima, dice di più che:

I discriminanti ($\neq 0$) *delle varie basi hanno per massimo comun divisore il discriminante di una base minima.*

18. *Teorema di Bézout sopra una superficie con due fasci unisecantisi. — Espressioni del grado e del genere di una curva tracciata sulla superficie stessa.* — Abbiamo

altrove avuto occasione di chiamare *teorema di Bézout* sopra una superficie, un teorema analogo a quello che ci apprende il modo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve piane. Per una superficie algebrica qualunque la questione si può porre così: Definire un sistema di caratteri di ogni curva tracciata sulla superficie, in guisa che il numero dei punti comuni a due tali curve si esprima *soltanto* mediante i caratteri della superficie ed i caratteri definiti delle due curve (*).

Oltrechè sul piano e sulle superficie razionali, il teorema di Bézout si conosce sulle rigate, come risulta dalla formola ritrovata al n° 14, sulle superficie generali nel loro ordine, come si desume dalle ricerche di Nöther (**), sulla *superficie di Kummer* e sulle superficie iperellittiche, come si rileva da un teorema di Poincaré sul numero degli zeri comuni a più funzioni Θ di dato ordine (***).

Qui ci proponiamo di dare il teorema per le superficie con due fasci unisecantisi.

Sia $(\Gamma' \dots \Gamma^t)$ una base del sistema di tutte le curve tracciate sulla superficie F con due fasci unisecantisi, ed in relazione alle curve di questa base conserviamo le notazioni introdotte al principio del n° precedente. Data su F una curva qualunque L di indici $\alpha\,\beta$, essa si esprime mediante la base data, con la formola:

$$\lambda L + \lambda_1 \Gamma' + \dots + \lambda_t \Gamma^t = \lambda (L_x + L_y) + \lambda_1 (\Gamma_x' + \Gamma_y') + \dots \tag{28}$$

Segando con Γ^i i due membri di questa relazione, avremo:

$$\lambda \gamma_i + \lambda_1 \gamma_{1i} + \dots + \lambda_t \gamma_{ti} = \lambda (\alpha \beta_i + \beta \alpha_i) + \lambda_1 (\alpha_1 \beta_i + \beta_1 \alpha_i) + \dots$$
$$(i = 1 \dots t),$$

ove γ_i rappresenta il numero dei punti comuni ad L e Γ^i. Se si pone:

$$c_i = \alpha \beta_i + \beta \alpha_i - \gamma_i,$$

verrà:

$$\lambda c_i + \lambda_1 c_{1i} + \lambda_2 c_{2i} + \dots + \lambda_t c_{ti} = 0. \tag{29}$$

Sia ora L' un'altra curva di indici $\alpha'\,\beta'$ tracciata su F, e sia γ_i' il numero dei punti in cui essa incontra Γ^i. Avremo similmente:

$$\lambda' c_i' + \lambda_1' c_{1i} + \lambda_2' c_{2i} + \dots + \lambda_t' c_{ti} = 0, \tag{30}$$

ove si è posto:

$$c_i' = \alpha' \beta_i + \beta' \alpha_i - \gamma_i'.$$

Seghiamo con L' i due membri della (28) e rappresentiamo con I il numero dei punti comuni ad L, L'. Verrà allora:

$$\lambda I + \lambda_1 \gamma_1' + \dots + \lambda_t \gamma_t' = \lambda (\alpha \beta' + \beta \alpha') + \lambda_1 (\alpha_1 \beta' + \beta_1 \alpha') + \dots$$

ossia:

$$\lambda I = \lambda (\alpha \beta' + \beta \alpha') + \lambda_1 c_1' + \lambda_2 c_2' + \dots + \lambda_t c_t'. \tag{31}$$

(*) Cfr. la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc., " Memorie della R. Accad. di Torino ", (2), t. 52 (1902); n° 26.

(**) Cfr. Nöther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*. " Berliner Abhandlung " (1882).

(***) Vedi la Memoria citata di G. Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*. " Journal de Math. ", (4), t. 9 (1893).

Moltiplicando i due membri di questa per λ', eppoi profittando delle (30), otterremo:

$$\lambda\lambda' I = \lambda\lambda'(\alpha\beta' + \beta\alpha') - \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h',$$

dalla quale, giacchè $\lambda\lambda' \neq 0$, si trae:

$$(31') \qquad I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \frac{1}{\lambda\lambda'} \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h'.$$

In particolare se la base $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ è minima λ e λ' saranno uguali all'unità, e quindi:

$$(31'') \qquad I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda'_h.$$

La (31') si può porre sotto una forma diversa facendoci comparire invece delle λ, λ' i numeri c_i, c_i', che hanno un significato geometrico più netto.

Poichè le t equazioni (29) e la (31) son soddisfatte per valori non tutti nulli delle $\lambda\, \lambda_1 \ldots \lambda_t$, che figurano in esse linearmente e omogeneamente, avremo:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta + \beta\alpha' - I & c_1' & \ldots & c_t' \\ c_1 & c_{11} & \ldots & c_{1t} \\ c_2 & c_{21} & \ldots & c_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_t & c_{t1} & \ldots & c_{tt} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$(\alpha\beta' + \beta\alpha' - I)\Delta + \begin{vmatrix} 0 & c_1' & \ldots & c_t' \\ c_1 & c_{11} & \ldots & c_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_t & c_{t1} & \ldots & c_{tt} \end{vmatrix} = 0,$$

dalla quale se $\Delta \neq 0$, si rileva:

$$(32) \qquad I = \alpha\beta' + \beta\alpha' - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h',$$

ove Δ_{ih} rappresenta il subdeterminante di c_{ih} nel discriminante Δ.

Il teorema di Bézout sopra la superficie F *con due fasci unisecantisi, è espresso dalla formola* (31') *o dalla* (32).

Il grado (virtuale) ν della curva L sarà espresso evidentemente da una qualunque delle formole:

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \nu &= 2\alpha\beta - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h \\ \nu &= 2\alpha\beta - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h, \end{aligned} \right.$$

che si ottengono dalle (31'), (32) supponendo L' coincidente con L.

Il genere (virtuale) ρ di L si può ricavare direttamente dalla (28), oppure dalla (15) sostituendoci una delle espressioni (33). Così trovasi:

$$(34)\quad \begin{cases} \rho = (\alpha - 1)(\beta - 1) + \beta p_1 + \alpha p_2 - \frac{1}{2\lambda^2} \sum\limits_{i,h} c_{ih} \lambda_i \lambda_h \\ \rho = (\alpha - 1)(\beta - 1) + \beta p_1 + \alpha p_2 - \frac{1}{2\Delta} \sum\limits_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h . \end{cases}$$

19. *Caso di una superficie con due fasci unisecantisi razionalmente identici.* — Fra le superficie con due fasci unisecantisi sono particolarmente notevoli quelle che posseggono due fasci razionalmente identici.

In questo numero ci occuperemo di tali superficie, applicando ad esse i risultati ottenuti nel caso generale.

Sia dunque F una superficie coi due fasci $|K_x|$, $|K_y|$ razionalmente identici di generi $p_1 = p_2 = p$: i suoi punti possono porsi in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di due curve coincidenti, ossia colle coppie di punti di una curva C, ove si considerino come diverse due coppie che differiscono per l'ordine. Ogni corrispondenza T fra i punti di C sarà rappresentata su F da una curva T; in particolare l'*identità* sarà rappresentata da una curva K unisecante le K_x e le K_y.

In generale la C non ammette trasformazioni birazionali in sè stessa, e quindi su F non ci son generalmente altre curve unisecanti le K_x e le K_y all'infuori della K; se però esistono trasformazioni birazionali di C in sè stessa, queste son rappresentate su F da altrettante curve come la K, ed in tal caso è evidente che si potrà porre fra i punti di F e le coppie ordinate dei punti di una curva, una corrispondenza tale che una prefissata di quelle curve unisecanti rappresenti l'identità.

Le corrispondenze a valenza γ (positiva, negativa o nulla) son rappresentate su F da *curve* che diremo *a valenza* γ. Sia T una curva a valenza γ di indici α, β.

Dicendo allora T_y' il gruppo delle K_y che passano pei punti ove la curva K_x' sega T, T_y'' il gruppo delle K_y passanti pei punti ove K_x'' sega T, e K_y', K_y'' le K_y che passano rispettivamente pei punti ove K è tagliata da K_x', K_x'', avremo:

$$T_y' + \gamma K_y' \equiv T_y'' + \gamma K_y'',$$

donde, in virtù delle considerazioni svolte al n° 15, si trae:

$$(35)\qquad T + \gamma K \equiv (T_x + T_y) + \gamma (K_x + K_y).$$

Notiamo qui incidentemente che se si considerano i gruppi segati sulla identità K dalle curve che figurano in questa relazione, *si ottiene nuovamente il teorema dimostrato al n° 8 ed il principio di corrispondenza che da esso discende.*

Dalla (35) si ricava facilmente il grado ν di T in funzione di α, β, γ. Difatti se si segano con T i due membri della relazione stessa, viene:

$$\nu + \gamma u = 2\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta),$$

ove u denota il numero dei punti uniti della corrispondenza rappresentata dalla curva T. Giacchè:

$$u = \alpha + \beta + 2\gamma p,$$

avremo:

$$\nu = 2(\alpha\beta - \gamma^2 p). \tag{35'}$$

In modo analogo si vede che il numero dei punti comuni a T ed alla curva T' di caratteri α', β', γ', è espresso dalla formola:

$$\alpha\beta' + \beta\alpha' - 2\gamma\gamma' p.$$

Il genere ρ di T si otterrà dalla formola (15), sostituendoci il valore ora trovato di ν:

$$\rho = (\alpha - 1)(\beta - 1) + p(\alpha + \beta - \gamma^2). \tag{35''}$$

Se i due fasci unisecantisi sono a moduli generali o, ciò che è lo stesso, se la curva C è a moduli generali, su essa non vi saranno che corrispondenze a valenza (*), e quindi sulla F non si troveranno altre curve che quelle dotate di valenza. Si può dunque enunciare il teorema:

Sopra una superficie con due fasci unisecantisi $|\mathrm{K}_x|$, $|\mathrm{K}_y|$, *razionalmente identici ed a moduli generali, tutte le curve si ottengono con operazioni di somma e sottrazione a partire dai due fasci e da una curva* K *unisecante le* $\mathrm{K}_x\,\mathrm{K}_y$.

Più precisamente: Data una curva T esiste un intero γ, positivo, negativo o nullo (valenza di T), tale che T appartiene totalmente al sistema lineare:

$$|T_x' + T_y' + \gamma(K_x' + K_y') - \gamma K|,$$

ove K_x' K_y' sono due qualunque curve dei due fasci, e T_x' (o T_y') denota il gruppo delle K_x (o K_y) passanti pei punti comuni a T ed alla K_y' (o K_x').

Se p è il genere dei due fasci, α β gli indici di T, il grado ed il genere di questa curva sono espressi dalle formole (35'), (35'').

Se poi i due fasci non sono a moduli generali, esisterà un numero finito (non superiore a $2p^2$) di curve tali che applicando ad esse ed alle curve dei due fasci le operazioni di somma e sottrazione, si ottengono tutte le curve di F.

Osserveremo per ultimo che K dà luogo su F ad un'*involuzione quadratica* Φ', ove si chiamino omologhi due punti di F quando sono le intersezioni di due coppie di curve dei due fasci che projettano gli stessi due punti di K.

La *inversa* di una corrispondenza che sia rappresentata dalla curva T, è rappresentata dalla curva T^{-1} *coniugata* di T nella involuzione Φ', ossia dalla curva che contiene i coniugati dei punti di T.

Sicchè le *corrispondenze simmetriche* son rappresentate da curve mutate in sè dalla involuzione, o come anche si dice *appartenenti all'involuzione*.

(*) Hurwitz, loc. cit., § 2.

§ 2. — Le superficie con un sistema algebrico d'indice 2 e grado 1.

20. *Generalità.* — *Curve a valenza.* — Sia Φ una superficie che rappresenti *senza eccezione* le coppie non ordinate dei punti di una curva di genere p (*). Le coppie dei punti di C delle quali fa parte un punto fissato, son rappresentate su Φ da una curva H; sicchè ai punti di C vengono a corrispondere ∞^1 curve H, razionalmente identiche a C, le quali costituiscono un sistema algebrico Σ d'*indice* 2, cioè tale che per ogni punto di Φ passano due curve H, e di *grado* 1, cioè tale che due sue curve si segano in un punto. — Viceversa è chiaro che ogni superficie con un sistema algebrico d'indice 2 e grado 1, rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva.

La superficie Φ è riferibile alla superficie F che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C, in una corrispondenza algebrica (1, 2), poichè ogni coppia di punti di C dà luogo a due coppie ordinate *diverse*, e in questa corrispondenza ai punti di Φ corrispondono su F le coppie dell'involuzione Φ', che consideravamo alla fine del precedente §.

Ogni corrispondenza simmetrica T fra i punti di C, è rappresentata da una curva T tracciata su Φ, o viceversa. Se sulla C è data una corrispondenza non simmetrica S, e si considerano le coppie dei punti omologhi in questa corrispondenza *prescindendo dall'ordine*, esse vengono rappresentate dai punti di una curva di Φ, la quale però deve riguardarsi come immagine della somma $S + S^{-1}$ di S con la sua inversa.

La corrispondenza identica viene rappresentata su Φ dalla curva K_1 *inviluppo del sistema* Σ, ossia dal luogo dei punti di Φ dai quali escono due H coincidenti.

Per ogni curva T di Φ ci sono da considerare: il *genere* ρ, il *grado* ν, l'*indice* α, ossia il n° delle intersezioni di T con una H, e il numero u dei punti comuni a T e alla curva K_1 (n° dei punti uniti della corrispondenza di cui T è immagine). Questi quattro caratteri son legati dalla relazione:

$$4\alpha(p-1) + 2\nu = 4(\rho - 1) + u \text{ (**)}.$$

Nel seguito il gruppo delle curve di Σ, diverse da una H fissata, che escono dai punti in cui questa taglia T, si indicherà con la lettera stessa T dotata dell'indice x.

Una curva di Φ dicesi a valenza γ quando rappresenta una corrispondenza simmetrica a valenza γ.

Sia T una tal curva. Allora trasportando sulla superficie Φ la proprietà caratteristica delle corrispondenze a valenza (n° 4), e indicando con T_x (o T_x') il gruppo delle curve di Σ uscenti dai punti in cui T vien segata da H (o da H') si può dire che i gruppi di *elementi* di Σ, $T_x + \gamma\mathrm{H}$ e $T_x' + \gamma\mathrm{H}'$, sono equivalenti entro all'ente

(*) Per le citazioni relative a questa classe di superficie, ved. l'introduzione alla presente Memoria.

(**) De-Franchis, loc. cit., n° 18.

algebrico $\infty^1\ \Sigma$. Ma siccome una serie razionale di curve di un sistema algebrico, è contenuta totalmente in un sistema lineare (*), avremo:

$$T_x + \gamma \mathsf{H} \equiv T_x' + \gamma \mathsf{H}' \tag{36}$$

ove il segno $\equiv$ ha il significato che già precisammo al n° 13.

Alla curva T corrisponde sulla superficie F delle coppie ordinate (ved. al n° 19), una curva S, a valenza γ, appartenente all'involuzione Φ'. Sicchè continuando ad usare le notazioni del n° 19, avremo:

$$S + \gamma K \equiv (S_x + S_y) + \gamma (K_x + K_y).$$

Se H è la curva di Σ omologa di K_x nella corrispondenza (2, 1) tra F e Φ, ed H' la curva omologa di K_y, alla curva S_y (o S_x) corrisponderà la curva T_x (o T_x') costituita dalle ulteriori curve di Σ uscenti dai punti comuni ad H (o H') e a T.

Siccome nel passaggio da F a Φ a curve equivalenti su F corrispondono su Φ curve equivalenti (**), e d'altronde alla S corrisponde la T contata due volte, perchè ogni punto di T proviene da due di S, avremo sulla superficie Φ:

$$2T + \gamma K_1 \equiv (T_x + \gamma \mathsf{H}) + (T_x' + \gamma \mathsf{H}'),$$

ossia, in virtù della (36):

$$2T + \gamma K_1 \equiv 2(T_x + \gamma \mathsf{H}). \tag{37}$$

In particolare se T è a valenza zero, dalla (36) rileviamo: $T_x \equiv T_x'$, e dalla (37): $2T \equiv 2T_x$.

La prima di queste si può anche enunciare dicendo che una curva a valenza 0 sega su ogni curva di Σ un gruppo che equivale a quello segato da un conveniente insieme di curve H: viceversa è chiaro che ogni curva soddisfacente ad una tal condizione, come p. es. una curva che appartenga al sistema lineare individuato da un gruppo di curve H, è a valenza zero.

Dalla seconda relazione non si può *a priori* dedurre che T e T_x sono equivalenti, ma noi proveremo che nel caso attuale questa deduzione è lecita, dimostrando che *ogni curva a valenza zero tracciata su Φ appartiene ad un sistema lineare individuato da un gruppo di curve di Σ.*

A tal uopo ci occorreranno due lemmi che andiamo ad esporre:

Lemma I. — La dimensione del sistema lineare (completo) che contiene totalmente una serie lineare completa di dimensione r, *formata con le curve di* Σ, è $\frac{r(r+3)}{2}$.

Sieno infatti $\mathsf{H}_1\ \mathsf{H}_2 \ldots \mathsf{H}_n$ le curve di un gruppo della g_n^r completa che si considera entro Σ. Se $r = 0$ ogni curva del sistema

$$|D| = |\mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 + \ldots + \mathsf{H}_n|$$

(*) Cfr. Enriques, *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* " Rendiconti di Palermo ", t. 10 (1896).

(**) Ved. la mia Nota, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* " Rendiconti del R. Istituto Lombardo ", (2), t. 36 (1903); n° 2.

dovrà segare su una qualunque H un gruppo identico a quello segato dalla curva composta $H_1 + \dots + H_n$, e quindi il sistema $|D|$ si ridurrà a questa sola curva.

Supponiamo ora che il gruppo $H_1 \dots H_{n-1}$ individui entro Σ una serie completa ∞^0, ma che il gruppo $H_1 \dots H_n$ individui una g^1. In quest'ipotesi calcoliamo la dimensione R del sistema $|D|$. Esso sega sopra una H di Σ una serie ∞^1, perchè ogni H è riferita *prospettivamente* alle curve di Σ, e siccome facendo avvicinare indefinitamente H ad H_n, quel riferimento prospettivo permane, la dimensione della serie segata da $|D|$ su H_n non potrà differire da 1. D'altronde l'unica curva del sistema $|D|$ che contenga come parte H_n, è quella spezzata in $H_1 \dots H_{n-1}$, dunque:

$$R - 1 - 1 = 0, \quad \text{ossia:} \quad R = 2.$$

Supponiamo ora che il gruppo $H_1 \dots H_{n-1}$ individui una g^1 e che il gruppo $H_1 \dots H_n$ individui una g^2. Considerando come prima la serie segata su H_n dal sistema $|D|$, si vede che essa è ∞^2. Ma i resti delle curve D passanti per H_n costituiscono il sistema lineare $|H_1 + \dots + H_{n-1}|$, che per quanto precede è di dimensione 2, dunque indicando al solito con R la dimensione di $|D|$, avremo:

$$R - 2 - 1 = 2, \quad \text{ossia:} \quad R = 5.$$

Così proseguendo, servendosi dell'induzione completa, si trova che la dimensione del sistema $|H_1 + \dots + H_n|$, quando r è la dimensione della serie individuata dal gruppo $H_1 \dots H_n$, è espressa da $\frac{r(r+3)}{2}$ (*).

Lemma II. — Il sistema lineare che contiene totalmente una serie lineare non speciale di curve di Σ, è regolare.

Dal fatto che ogni curva rappresentante le coppie di punti di un gruppo variabile in una g^1_{2p-2} canonica di C, è una curva canonica di F (**), segue subito che su una H ogni curva canonica sega un gruppo *speciale* di $2p - 3$ punti, e quindi che ogni sistema lineare speciale sega su H gruppi speciali. Se ne deduce che il sistema $|D| = |H_1 + \dots + H_n|$, che contiene totalmente la g^r_n non speciale, è esso pure non speciale.

Calcoliamo ora la dimensione virtuale di questo sistema, data dal teorema di Riemann-Roch (***). Il grado ν di $|D|$ è uguale ad n^2, il genere ρ è uguale a

$$n(p-1) + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

come si vede ricordando che le varie parti della curva composta $H_1 + \dots + H_n$ s'incontrano a due a due in un punto; e il genere aritmetico P_a di Φ è espresso da:

$$P_a = \frac{p(p-1)}{2} - p \; (^+).$$

(*) Un ragionamento analogo si trova nella Nota citata del Dott. Maroni, pel caso di una superficie con due fasci unisecantisi.

(**) Ved. la mia Nota, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti* ....; n° 5.

(***) Cfr. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica.* " Annali di Matematica ", (2), t. 25 (1897); n° 34 e segg.

($^+$) Cfr. la mia Nota *Sulle superficie* .....; n° 6.

Sicchè:

$$\nu - \rho + P_a + 1 = n - p + \frac{n(n-2p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}.$$

Giacchè per ipotesi la g_n^r è non speciale sarà $n = r + p$, e quindi sostituendo nella precedente uguaglianza avremo:

$$\nu - \rho + P_a + 1 = r + \frac{(r+p)(r-p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{r(r+3)}{2}.$$

Dunque la dimensione virtuale di $|D|$ coincide con l'effettiva, e perciò $|D|$ è regolare.

E passiamo infine alla dimostrazione della equivalenza di T e T_x. Anzitutto si osservi che, come già accennammo, su una curva H' di Σ le due curve segano gruppi equivalenti. Difatti sopra H' le due curve (composte) T_x e T_x' (ove T_x' rappresenta il gruppo delle H che passano pei punti comuni ad H' e a T) segano due gruppi equivalenti; ma su H' la T e la T_x' segano lo stesso gruppo, dunque T e T_x segano su H' gruppi che si equivalgono.

Ciò posto supponiamo che la serie individuata da T_x entro Σ, sia non speciale, del che potremo esser sicuri se p. es. il numero α delle parti che compongono T_x è maggiore di $2p-2$. In tale ipotesi non solo il sistema $|T_x|$ sarà regolare, ma il sistema $|T|$ non potrà essere speciale, perchè staccherà su ogni H gruppi non speciali. Dal momento che $|T|$ ha gli stessi caratteri (grado e genere) di $|T_x|$, come si rileva, p. es., dal fatto che $2T \equiv 2T_x$, la dimensione virtuale di $|T|$ sarà uguale alla dimensione effettiva di $|T_x|$, e quindi $|T|$ avrà dimensione effettiva non inferiore a quella di $|T_x|$.

Ora si osservi che $|T_x|$ sega su una H generica una serie *completa* (non speciale), e che $|T|$ sega sulla stessa H gruppi di questa serie. Ne viene che il sistema residuo di H rispetto a $|T|$ avrà certo dimensione non inferiore a quella del sistema residuo di H rispetto a $|T_x|$.

La serie individuata entro Σ da una $T_x - \mathsf{H}$, sarà non speciale, perchè staccando un elemento generico da una serie non speciale entro un ente ∞^1, si ha una serie non speciale. Siccome inoltre i due sistemi residui segano su ogni H gruppi equivalenti, essi si troveranno nelle identiche condizioni dei sistemi primitivi. Ne viene che se da $|T_x - \mathsf{H}|$ si può ancora sottrarre una H, si potrà togliere anche da $|T - \mathsf{H}|$, e i sistemi residui si troveranno nelle stesse condizioni dei sistemi $|T|$ e $|T_x|$; e così proseguendo.

Dopo un numero finito di sottrazioni si arriverà ad un sistema $|T_x - s\mathsf{H}|$ dal quale non è più possibile togliere altre curve di Σ. Perchè ciò accada bisogna evidentemente che il sistema *completo* $|T_x - s\mathsf{H}|$ si riduca ad una sola curva composta con curve di Σ.

Siccome ogni curva $T - s\mathsf{H}$ deve segare sopra una H qualsiasi un gruppo equivalente a quello segato da $T_x - s\mathsf{H}$, e d'altronde questo gruppo individua una g^0 completa, la $T_x - s\mathsf{H}$ ed una $T - s\mathsf{H}$, taglieranno ogni H nello stesso gruppo di punti. Dal che si deduce che $|T - s\mathsf{H}|$ riducesi alla curva $T_x - s\mathsf{H}$, e quindi che $T \equiv T_x$.

Ci resta da considerare l'ipotesi che la serie individuata da T_x sia speciale. In tal caso aggiungeremo a questa serie una seconda serie individuata da una curva S_x composta con α' curve H, in guisa che $\alpha + \alpha'$ sia maggiore di $2p-2$. La curva generica S del sistema $|S_x|$ sarà a valenza zero, e quindi la curva $S+T$ sarà pure a valenza zero. Poichè la serie individuata da $S_x + T_x$ è non speciale, avremo:

$$S + T \equiv S_x + T_x,$$

dalla quale, tenendo conto che $S \equiv S_x$, si trae ancora:

$$T \equiv T_x \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

21. *Dipendenza fra curve tracciate sulla superficie* Φ. — Sieno $\Gamma' \, \Gamma'' \dots \Gamma^k$ curve tracciate su Φ. Diremo che esse sono *dipendenti* o che una di esse *dipende* dalle rimanenti, quando si posson determinare dei numeri interi $\lambda_1 \dots \lambda_k$, non tutti nulli, tali che:

$$\lambda_1 \Gamma' + \dots + \lambda_k \Gamma^k \equiv \lambda_1 \Gamma_x' + \dots + \lambda_k \Gamma_x^k, \tag{38}$$

ove Γ_x^i rappresenta il gruppo delle curve del sistema Σ che passano pei punti comuni a Γ^i e ad una H fissata. Se $\overline{\Gamma}_x^i$ denota il gruppo delle H passanti pei punti comuni a Γ^i e alla curva $\overline{\mathsf{H}}$, dalla (38) si rileva:

$$\lambda_1 \Gamma_x' + \dots + \lambda_k \Gamma_x^k \equiv \lambda_1 \overline{\Gamma}_x' + \dots + \lambda_k \overline{\Gamma}_x^k,$$

la quale ci dice che le curve $\Gamma' \dots \Gamma^k$ rappresentano k corrispondenze (simmetriche) fra i punti di C, dipendenti secondo i numeri $(\lambda_1 \dots \lambda_k)$ (n° 9).

Viceversa si vede facilmente, seguendo una via analoga a quella del n° 15, che più corrispondenze (simmetriche) dipendenti secondo $(\lambda_1 \dots \lambda_k)$, son rappresentate su Φ da altrettante curve dipendenti secondo gli stessi numeri.

Talvolta, per brevità, la (38) si esprimerà dicendo che *la curva (virtuale)* $\lambda_1 \Gamma' + \dots + \lambda_k \Gamma^k$ *è a valenza zero.* A proposito di questa locuzione si posson ripetere le osservazioni già fatte nel caso analogo, al n° 15.

Dimostreremo ora che:

Sopra la superficie Φ è possibile trovare un numero finito di curve indipendenti, tali che ogni altra curva di Φ sia dipendente da esse.

Indichiamo con G l'insieme di tutte le corrispondenze simmetriche esistenti sulla curva C. Dal teorema fondamentale del n° 11, segue che nell'insieme G esisteranno certe t corrispondenze indipendenti $\Gamma' \dots \Gamma^t$, tali che ogni altra corrispondenza Γ di G sia dipendente da quelle. Poichè la dipendenza fra più corrispondenze di G, si rispecchia nella dipendenza fra le curve di Φ che rappresentano quelle corrispondenze, le curve $\Gamma' \dots \Gamma^t$ di Φ, immagini delle suddette t corrispondenze dell'insieme G, soddisfaranno alle condizioni dell'enunciato.

Il gruppo delle curve $\Gamma' \dots \Gamma^t$ si chiamerà una *base* pel sistema di tutte le curve tracciate sopra Φ.

Se le corrispondenze $\Gamma' \ldots \Gamma^t$ furono scelte in guisa che indicando con Γ un'altra corrispondenza qualsiasi di G, le $\Gamma\, \Gamma'\, \Gamma'' \ldots \Gamma^t$ risultino dipendenti secondo i numeri $(1\, \lambda_1 \ldots \lambda_t)$, ove le λ sono interi convenienti, la *base* $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ si dirà *minima.*

22. *Discriminante di una base. — Teorema di Bézout. — Espressioni pel grado e pel genere di una curva tracciata su* Φ. — Le considerazioni analoghe a quelle che facemmo ai n[i] 17, 18 per la superficie F, si posson ripetere per la Φ, modificando solo la definizione del discriminante di una base. Perciò adesso ci limiteremo ad enunciare i resultati ai quali conducono le considerazioni stesse.

Se $\Gamma' \ldots \Gamma^t$ son curve appartenenti a Φ, di indici rispettivi $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_t$, e se γ_{ih} esprime il numero dei punti comuni alle curve $\Gamma^i\, \Gamma^h$, si chiamerà *discriminante* del gruppo $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ il determinante simmetrico:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{t1} & c_{t2} & \ldots & c_{tt} \end{vmatrix},$$

ove si è posto $c_{ih} = \alpha_i\, \alpha_h - \gamma_{ih}$.

Quando le curve $\Gamma' \ldots \Gamma^t$ *son dipendenti il discriminante* Δ *si annulla.*

Supponiamo che le curve $\Pi' \ldots \Pi^t$ costituiscano anch'esse una base e che le $\Pi^i\, \Gamma' \ldots \Gamma^t$ risultino dipendenti secondo i numeri $(\lambda_i\, \lambda_{1i} \ldots \lambda_{ti})$: allora il discriminante Δ' della base $(\Pi' \ldots \Pi^t)$ risulta legato a Δ dalla relazione:

$$(\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_t)^2\, \Delta' = \Lambda^2\, \Delta\,,$$

ove Λ è il determinante delle λ_{ih}.

Da questa si rileva che se si annulla il discriminante di una base, lo stesso accade dei discriminanti di tutte le altre. Noi faremo l'ipotesi (eventualmente limitativa) che i discriminanti delle basi non sieno nulli. Allora si può dire che

Le basi minime hanno lo stesso discriminante, che è il massimo comun divisore dei discriminanti $(\neq 0)$ *di tutte le basi.*

Sia L una curva d'indice α dipendente dalla base $(\Gamma' \ldots \Gamma^t)$ secondo i numeri $(\lambda\, \lambda_1 \ldots \lambda_t)$, e sia γ_i il numero dei punti comuni ad L e alla curva Γ^i. In modo analogo per un'altra curva L' tracciata su Φ, introduciamo i caratteri α', $(\lambda'\, \lambda_1' \ldots \lambda_t')$ e γ_i'. Allora il numero I dei punti comuni ad L, L' è espresso dalle due formole:

$$I = \alpha\alpha' - \frac{1}{\lambda\lambda'} \sum_{i,h} c_{ih}\, \lambda_i\, \lambda_h'$$

$$I = \alpha\alpha' - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih}\, c_i\, c_h'$$

nella seconda delle quali Δ_{ih} rappresenta il subdeterminante dell'elemento c_{ih} nel discriminante Δ, e $c_i\, c_h'$ son definiti dalle uguaglianze:

$$c_i = \alpha\, \alpha_i - \gamma_i\,, \qquad c_i' = \alpha'\, \alpha_i - \gamma_i'.$$

Il grado ν e il genere ρ della curva L vengono espressi da:

$$\nu = \alpha^2 - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h = \alpha^2 - \frac{1}{\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h ,$$

$$\rho = \alpha(p-1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i,h} c_{ih}\lambda_i\lambda_h + 1 = \alpha(p-1) + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{2\Delta} \sum_{i,h} \Delta_{ih} c_i c_h + 1 .$$

ove u è il numero dei punti comuni ad L e alla curva K_1, inviluppo di Σ. Naturalmente introducendo i caratteri della curva K_1 rispetto alla base $(\Gamma' \ldots \Gamma')$ e l'indice di K_1, che è uguale a 2, perchè le curve di Σ toccano il loro inviluppo, dalla precedente formola si elimina la u. Ma l'espressione che così si ottiene per ρ è complicata e riteniamo inutile trascriverla.

Osservazione. — Nelle formole (34) che davano il genere di una curva tracciata su F, non entravano caratteri della curva immagine dell'identità, perchè le curve canoniche di F, risultando dall'addizione di gruppi canonici dei due fasci unisecantisi, erano a valenza zero.

Invece nella formola che dà il genere di una curva tracciata sulla superficie Φ, che consideriamo attualmente, compariscono caratteri della curva K_1 immagine dell'identità, perchè le curve canoniche di Φ sono a valenza 1 (come risulta dal fatto che fra esse ci sono le immagini delle g^1_{2p-2} canoniche di C), e quindi esse non si compongono direttamente con le curve di Σ, ma sono legate a queste da una relazione in cui entra anche K_1 (ved. al n° 20).

23. *Caso della superficie che rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva a moduli generali.* — Non vogliamo passare sotto silenzio il caso in cui il sistema Σ, contenuto in Φ, è un ente ∞^1 a moduli generali, perchè applicando a questo caso le considerazioni svolte per una Φ qualunque, si ottengono risultati che, per la loro semplicità, riescono interessanti.

Se il sistema Σ è a moduli generali, ossia se la curva C da cui nasce la superficie Φ, è a moduli generali, pel teorema di Hurwitz, sopra Φ non si troveranno che curve a valenza. Dunque, secondo il n° 20, se T è una curva di Φ esisterà sempre un intero γ (positivo, negativo o nullo), tale che:

(39) $$2T + \gamma K_1 \equiv 2(T_x + \gamma H).$$

Questa relazione si può enunciare dicendo che *la curva* K_1, *inviluppo del sistema* Σ, *è una base per la totalità delle curve tracciate su* Φ.

Però, al contrario di quanto accadeva nel caso della superficie F rappresentanto le coppie ordinate dei punti di C, l'immagine dell'identità non costituisce attualmente una base minima.

Ma è facile vedere che *una curva* Γ *immagine di una corrispondenza simmetrica a valenza uno, può assumersi come base minima.*

Difatti la corrispondenza T a valenza γ e la corrispondenza Γ a valenza 1, sono dipendenti secondo i numeri $(1, -\gamma)$ (n° 9), e quindi (n° 21) tra le T, Γ passa la relazione:

(40) $$T - \gamma\Gamma \equiv T_x - \gamma\Gamma_x .$$

Si può prendere come curva Γ quella che rappresenta le coppie di una qualsiasi g_n^1: in particolare, se $p > 1$, possiamo assumere come base minima una curva canonica. Sicchè in tal caso *tutte le curve della superficie* Φ *si ottengono con le operazioni di somma e sottrazione dalle curve del sistema* Σ, *d'indice 2 e grado 1, e da una curva canonica.*

Dalla (39) o dalla (40) si trae che il numero dei punti comuni a due curve T, T' di indici α, α' e di valenze γ, γ', è:

$$\alpha\,\alpha' - \gamma\,\gamma'\,p.$$

In particolare il grado ν di T è espresso da:

$$\nu = \alpha^2 - \gamma^2 p,$$

e quindi il genere ρ da:

$$\rho = \alpha(p-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}p + 1.$$

I risultati precedenti interpretati nel caso in cui la Φ è una *superficie iperellittica generale* ($p = 2$), ne forniscono proprietà, che credo nuove.

§ 3. — Esame particolare delle superficie che rappresentano le coppie, ordinate o non, dei punti di una curva ellittica.

24. *Determinazione effettiva di una base minima sulla superficie che rappresenta le coppie ordinate dei punti di una curva ellittica singolare. — Esempio numerico.* — Come applicazione delle considerazioni generali svolte nei §§ precedenti (della Parte IIª), studieremo dapprima le superficie che rappresentano le coppie ordinate dei punti di una curva ellittica singolare, e poi passeremo ad alcune osservazioni sulle superficie che rappresentano le coppie non ordinate (rigate ellittiche).

La esistenza su C di qualche corrispondenza singolare, porta la esistenza di qualche curva priva di valenza sulla superficie F (coi due fasci ellittici unisecantisi e razionalmente identici, $|K_x|$, $|K_y|$) che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C.

Si tratta di caratterizzare geometricamente, in questo caso singolare, una base (minima) di tutte le curve tracciate su F.

Dicendo $(1, \tau)$ i periodi dell'integrale normale di 1ª specie u disteso sulla C, ad ogni corrispondenza fra i punti di C verrà associata una soluzione in numeri interi (h, g, H, G) della equazione:

$$(h + g\tau)\,\tau = H + G\tau. \tag{41}$$

Le corrispondenze a valenza provengono dalle soluzioni *identiche* di quest'equazione, cioè dalle soluzioni:

$$h = G, \qquad g = H = 0\ (*).$$

(*) Hurwitz, loc. cit., § 2.

Per l'ipotesi fatta che C sia singolare, esisterà almeno una soluzione non identica $(h'\,g'\,H'\,G')$ della (41). Supponiamo che la nostra curva C sia una cubica piana ellittica di equazione:

$$x_2^2 = 4\,x_1^3 - g_2 x_1 - g_3\,,$$

e che sia $p(u \mid 1,\tau)$ la funzione p di WEIERSTRASS ad essa relativa, dimodochè la rappresentazione parametrica di C sarà:

$$x_1 = p(u)\,, \qquad x_2 = p'(u).$$

Allora se si pone:

$$\pi' = h' + g'\tau,$$

in virtù della relazione:

(42) $$(h' + g'\tau)\,\tau = H' + G'\tau\,,$$

potremo dire che la $p(u \mid 1,\tau)$ possiede il *moltiplicatore complesso* π' (*), ossia che $p(\pi' u)$ è funzione razionale di $p(u)$ del grado $\alpha = G'h' - g'H'$.

Segue da ciò che ponendo:

(43) $$u' = \pi' u\,,$$

ad ogni punto $x(x_1 x_2)$ della curva C, e quindi ad ogni valore di u, corrisponde un valore di u' e quindi un altro punto $y(y_1 y_2)$ della curva; e viceversa che ad un punto y, e quindi ad un valore di u', rispondono α valori (incongrui) di u, e quindi α punti x. La (43) definisce dunque una corrispondenza algebrica singolare $(\alpha, 1)$ fra la serie di punti x, y.

Questa corrispondenza sarà rappresentata su F da una curva T, unisecante le K_x e α-secante le K_y: il suo genere sarà dunque uguale ad 1, e il suo grado sarà uguale a zero (ved. la formola (15)).

Per rappresentare algebricamente la corrispondenza T basterà determinare due corrispondenze a valenza (positiva o nulla) S', S'', ciascuna delle quali contenga come parte T: il che si fa in infiniti modi. Ragionando per chiarezza sulla F, si potrà, p. es., proceder così: Si determinino genericamente due sistemi lineari $|S'|$, $|S''|$, di cui ciascuno sia la somma di serie lineari dei due fasci unisecantisi, e tanto ampii che entrambi contengano parzialmente la T. Allora questa curva si potrà definire come l'*intersezione* di due curve a valenza zero ben determinate, all'infuori, eventualmente, di un numero finito di punti comuni alle parti residue. Poichè ogni corrispondenza a valenza si rappresenta con una sola equazione fra i punti x, y di C, le coppie dei punti omologhi nella T, resteranno definite dal fatto di soddisfare contemporaneamente a due equazioni, all'infuori forse di un numero finito di soluzioni estranee.

Nel caso attuale è facile scrivere le equazioni di due corrispondenze S', S'', a

(*) Cfr. ad es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. Pisa, Spoerri (1901); pag. 525 e segg.

valenza, che contengano come parte la T. Difatti le coordinate $y_1\, y_2$ del punto y corrispondente ad x nella T, sono espresse da:

$$y_1 = p(u'), \qquad y_2 = p'(u'),$$

dove u' è legato al valore dell'integrale u nel punto x, dalla relazione (43). E poichè $p(u')$ è funzione razionale di $p(u)$, avremo:

$$y_1 = \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)},$$

nella quale f, φ son polinomii. L'equazione:

$$y_1\, \varphi(x_1) - f(x_1) = 0,$$

rappresenta una corrispondenza S' a valenza, fra i punti della curva C, e la S' contiene come parte la T.

Derivando i due membri della relazione:

$$p(u') = \frac{f(pu)}{\varphi(pu)},$$

avremo:

$$p'(u') = \frac{\psi(pu, p'u)}{\chi(pu, p'u)},$$

dove ψ e χ son polinomii. Sicchè un'altra corrispondenza S'' a valenza, contenente come parte la T, sarà rappresentata dall'equazione:

$$y_2\, \chi(x_1 x_2) - \psi(x_1 x_2) = 0.$$

Sotto forma trascendente la T si può rappresentare con la sola equazione:

(44) $$\Theta(u' - \pi' u \,|\, 1, \tau) = 0 \;(*).$$

Ad ogni corrispondenza singolare viene associato un moltiplicatore complesso della funzione p, e viceversa ad ogni moltiplicatore complesso si può associare (in infiniti modi) una corrispondenza singolare fra i punti di C. Così se π' è un moltiplicatore complesso, basterà scrivere la (44), per avere la rappresentazione di una corrispondenza singolare ad esso associata.

Siccome ogni altro moltiplicatore complesso π della p è legato a π' da una relazione del tipo:

$$\lambda \pi + \lambda_1 \pi' + \lambda_2 = 0,$$

ove $\lambda\, \lambda_1\, \lambda_2$ son numeri interi, la corrispondenza già costruita T (associata al moltiplicatore π') ed una corrispondenza qualsiasi associata al moltiplicatore 1 (cioè a

(*) Hurwitz, loc. cit.

valenza — 1), costituiranno una *base* di tutte le corrispondenze esistenti sopra C. Conviene scegliere come corrispondenza associata al moltiplicatore 1, l'identità K.

Ma avendo scelto arbitrariamente per costruire la T, uno degli infiniti moltiplicatori complessi della p, la base (T, K) non sarà in generale minima.

Vediamo dunque di procurarci con sicurezza una base minima. Perciò occorrerà applicare il noto procedimento che permette di costruire un *moltiplicatore complesso elementare*, conoscendo un moltiplicatore complesso qualsiasi (*).

Riprendiamo la (42) e scriviamola sotto la forma:

$$g'\tau^2 + (h' - G')\tau - H' = 0.$$

Moltiplicando i due membri di questa per un conveniente numero (razionale), si può sempre ridurre al tipo:

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0,$$

ove A, B, C sono interi primi fra loro.

Ricordiamo che la *forma quadratica* (A, B, C), il cui discriminante è $D = AC - B^2$, dicesi di *prima* o di *seconda specie*, secondochè A, C non sono o sono ambedue pari. Orbene si dimostra che se (A, B, C) è di 1ª specie

$$\pi'' = B + A\tau$$

è un moltiplicatore complesso elementare, ossia tale che ogni altro moltiplicatore è della forma $\lambda_1 \pi'' + \lambda_2$, con $\lambda_1 \lambda_2$ interi; e che se (A, B, C) è di 2ª specie, un moltiplicatore elementare è:

$$\pi'' = \frac{1}{2}(B + 1 + A\tau).$$

Ponendo:

$$u' = \pi'' u,$$

e attribuendo a π'' il primo o il secondo valore, secondochè (A, B, C) è di 1ª o di 2ª specie, avremo la rappresentazione trascendente di una corrispondenza singolare S, di cui un indice è uguale ad 1, e l'altro, α, è dato da:

$$\alpha = D, \qquad \alpha = \frac{1}{4}(D + 1),$$

secondochè (A, B, C) è di 1ª o di 2ª specie.

La *base* (S, K) sarà evidentemente *minima*.

Ritornando alla superficie che rappresenta le coppie ordinate dei punti di C, ne possiamo fissare un modello projettivo, considerando nello spazio a quattro dimensioni $(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ l'intersezione delle due varietà (cilindriche) a tre dimensioni:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3$$
$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2 y_1 - g_3.$$

(*) Bianchi, loc. cit., pag. 529.

Su questa superficie F del 9° ordine i due fasci unisecantisi $|K_x|$, $|K_y|$ son segati dai piani generatori dei due cilindri, e sono quindi costituiti da cubiche piane ellittiche; l'identità K è pure una cubica ellittica segata su F dal piano:

$$x_1 - y_1 = 0, \qquad x_2 - y_2 = 0.$$

Per scrivere le equazioni della curva S bisognerà ricorrere alla formola effettiva di moltiplicazione, che esprime $p(\pi'' u)$ come funzione razionale di $p(u)$. Questa formola ci darà l'equazione di una varietà passante per S; l'equazione di un'altra varietà pure passante per S, si otterrà derivando i due membri della formola suddetta.

Ogni altra curva di F *si compone con operazioni di somma e sottrazione a partire dalle curve dei due fasci, e dalle curve* S, K.

Poichè il numero dei punti uniti di una corrispondenza (α, β), associata ad una soluzione (h, g, H, G) della (41), è espresso da:

$$\alpha + \beta - h - G \text{ (*)},$$

il numero dei punti comuni ad S e K sarà uguale ad

$$\alpha + 1 - B + B = \alpha + 1,$$

se (A, B, C) è di 1ª specie, e ad

$$\alpha + 1 - \frac{1}{2}(B + 1) - \frac{1}{2}(1 - B) = \alpha,$$

se (A, B, C) è di 2ª specie.

Sicchè il discriminante Δ della base (S, K) sarà espresso da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha = 4D$$

nel primo caso, e da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\alpha - 1 = D$$

nel secondo caso.

Conoscendo il discriminante della base (S, K) si può calcolare il grado e il genere di una curva tracciata su F, e il numero dei punti comuni a due tali curve, in funzione dei loro indici e dei numeri dei punti in cui esse tagliano S, K (ved. il n° 18).

Esempio numerico. — Non ci tratterremo sopra i più semplici esempii numerici che si potrebbero addurre, cioè quelli relativi ai casi di una cubica armonica o equianarmonica (**). Osserveremo solo che in entrambi i casi tutte le curve tracciate su F si potranno ottenere per somma e sottrazione da una curva rappresentante una corrispon-

---

(*) Hurwitz, loc. cit.

(**) Le corrispondenze biunivoche di ogni specie sopra una curva ellittica, furono studiate geometricamente da Segre nella Nota: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche.* " Atti della R. Acc. di Torino „ (1889).

denza biunivoca ordinaria, e da un'altra rappresentante una corrispondenza *biunivoca* singolare, cioè segante in un punto le curve dei due fasci $|K_x|$, $|K_y|$, nonchè dalle curve stesse di questi fasci (*).

Considereremo piuttosto un esempio un po' più elevato, studiando la superficie F relativa alla cubica ellittica singolare:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - 30x_1 - 28 \text{ (**)}.$$

Il rapporto τ dei periodi di un integrale di 1ª specie, soddisfa in tal caso alla equazione:

$$\tau^2 + 2 = 0.$$

Siccome questa è una forma quadratica di 1ª specie (1, 0, 2), una corrispondenza singolare come la S, si otterrà prendendo:

$$h = 0 \quad g = 1, \qquad H = -2, \qquad G = 0,$$

e sarà rappresentata sotto forma trascendente dalla relazione:

$$u' = i\sqrt{2}\, u.$$

La formola di moltiplicazione relativa al moltiplicatore $i\sqrt{2}$, è:

$$-2p(i\sqrt{2}\,.\,u) = p(u) + \frac{9}{2p(u) - 4},$$

sicchè una prima equazione alla quale soddisfano le coordinate $x_1\, x_2$, $y_1\, y_2$ delle coppie di punti omologhi nella S, sarà:

$$2x_1^2 + 4x_1 y_1 + 4x_1 + 8y_1 + 9 = 0. \tag{45}$$

Derivando i due membri della formola di moltiplicazione, ricaveremo una seconda equazione alla quale soddisfano le coordinate dei punti x, y omologhi nella S:

$$2x_2(x_1 + 2)^2 + 4i\sqrt{2}\,(x_1 + 2)^2 y_2 - 9x_2 = 0. \tag{46}$$

L'indice α della S non è altro che il discriminante della forma (1, 0, 2), cioè $\alpha = 2$.

Le equazioni della superficie F appartenente allo spazio S_4 $(x_1\, x_2\, y_1\, y_2)$ saranno attualmente:

$$x_2^2 = 4x_1^3 - 30x_1 - 28$$
$$y_2^2 = 4y_1^3 - 30y_1 - 28,$$

e la curva S sarà segata su F dalle due varietà (45), (46).

(*) La superficie delle coppie ordinate dei punti di una curva ellittica, fu incontrata da Amaldi come il tipo più generale di superficie con più di due fasci unisecantisi all'infuori delle superficie razionali). Ved. la sua Nota nei " Rendiconti dei Lincei ", (5), t. 11 (1902), 2° semestre.

(**) A proposito di questa cubica ved. il libro già citato del Bianchi, pag. 545.

Sia Γ' una curva di indici $(\alpha' \beta')$ tracciata su F, e sieno $\gamma_1' \gamma_2'$ i numeri dei punti in cui essa taglia S e l'identità K. Il grado di Γ' sarà espresso dalla formola:

$$2\alpha'\beta' + \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c_1' & c_2' \\ c_1' & 4 & 0 \\ c_2' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha'\beta' - \frac{c_1'^2 + 2c_2'^2}{4},$$

ove si è posto:

$$c_1' = \alpha' + 2\beta' - \gamma_1', \qquad c_2' = \alpha' + \beta' - \gamma_2';$$

il genere verrà dato da:

$$\alpha'\beta' - \frac{c_1'^2 + 2c_2'^2}{8} + 1.$$

Se poi Γ'' è un'altra curva di F e per questa s'introducono i caratteri $\alpha''\beta''$ $\gamma_1''\gamma_2''c_1''c_2''$, analoghi a quelli introdotti per Γ', il numero dei punti comuni a Γ' e Γ'' sarà uguale ad

$$\alpha'\beta'' + \alpha''\beta' + \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & c_1' & c_2' \\ c_1'' & 4 & 0 \\ c_2'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = \alpha'\beta'' + \alpha''\beta' - \frac{c_1'c_1'' + 2c_2'c_2''}{4}.$$

E così le più importanti questioni relative alle curve tracciate su F, vengono completamente risolute.

25. *Le rigate ellittiche come superficie delle coppie di punti di una curva ellittica.* — La varietà ∞^2 delle coppie non ordinate dei punti di una curva ellittica C, si può sempre riferire ad una rigata ellittica Φ, e viceversa (*). Le generatrici K_x della rigata rappresentano le g_2^1 di C, e le curve H del sistema di grado 1 e indice 2, Σ, le quali corrispondono ai punti di C, incontrano in un sol punto le generatrici.

Le curve che rappresentano le coppie dei punti delle ∞^2 g_3^1 contenute in una g_3^2, costituiscono una rete di grado 3, che contiene ∞^1 curve composte $H + K_x$. Assumeremo come fascio $|K_y|$ uno dei fasci della rete suddetta.

Sia ora T una curva qualsiasi segante in β punti le K_x, in α punti le K_y e in $a (= \alpha - \beta)$ punti le curve di Σ. Chiamando K_x' K_x'' K_x''' le generatrici che passano pei punti base di $|K_y|$, avremo per la (17) (n° 14):

$$T + \beta(K_x' + K_x'' + K_x''') \equiv T_x + T_y, \tag{47}$$

ove T_x (o T_y) denota il gruppo delle K_x (o K_y) passanti pei punti comuni ad una K_y (o K_x) e a T.

Vediamo di dedurre dalla (47) il modo di comporre la T con le curve del sistema Σ e col loro inviluppo K_1.

(*) Segre, *Ricerche sulle rigate ellittiche .....* " Atti della R. Accad. di Torino ", t. 21 (1886); n° 19.

Le tre curve di $|K_y|$ che contengono come parti rispettivamente K' K'' K''', lasciano come resti tre curve di Σ, H' H'' H''', ciascuna delle quali passa per due dei tre punti base di $|K_y|$. Pel fatto che ogni generatrice rappresenta una corrispondenza a valenza uno, avremo (nº 20):

$$2K_x' + K_1 \equiv 2(H'' + H'''),\qquad 2K_x'' + K_1 \equiv 2(H''' + H'),\qquad 2K_x''' + K_1 \equiv 2(H' + H''),$$

e quindi:

$$2(K_x' + K_x'' + K_x''') + 3K_1 \equiv 4(H' + H'' + H''').$$

Sostituendo nella (47) dopo averla moltiplicata per 2, verrà:

$$2T - 3\beta K_1 + 4\beta(H' + H'' + H''') \equiv 2T_x + 2T_y. \tag{48}$$

Se per costruire il gruppo T_x si sega T con la curva composta $H' + K_x'$, avremo:

$$T_x \equiv \beta K_x' + M',$$

ove M' è il gruppo delle K_x che passano pei punti comuni a T e ad H'. Analogamente, se per costruire T_y si sega T con la curva K_x', si otterrà:

$$T_y \equiv \beta(H' + K_x').$$

Sostituendo nella (48), avremo:

$$2T - 3\beta K_1 + 4\beta(H' + H'' + H''') \equiv 4\beta K_x' + 2\beta H' + 2M'. \tag{49}$$

Siccome ognuna delle curve del gruppo M' è a valenza uno, la curva composta M' sarà a valenza α, sicchè:

$$2M' + \alpha K_1 \equiv 2(N' + \alpha H'),$$

ove N' è il gruppo delle curve di Σ, diverse da H', che escono dai punti comuni a T ed H'.

Se nella (49) sostituiamo l'espressione di $2M'$ data dalla precedente relazione, e quella di $2K_x'$ data dalla:

$$2K_x' + K_1 \equiv 2(H'' + H'''),$$

otterremo, a riduzioni fatte:

$$2T + (\alpha - \beta)K_1 \equiv 2[N' + (\alpha - \beta)H'],$$

la quale prova che la curva T ha la valenza $\alpha - \beta$.

Questo risultato ci dice che:

Sopra una curva ellittica qualsiasi le corrispondenze simmetriche sono tutte a valenza.

Precisamente: Se una corrispondenza simmetrica ha l'indice α ed ha β coppie comuni con una g_2^1 della curva ellittica, la sua valenza è $\alpha - \beta$.

Lo stesso fatto si sarebbe potuto stabilire per via trascendente, identificando le formole che rappresentano la corrispondenza diretta con quelle che rappresentano la corrispondenza inversa.

Bologna, Aprile 1903.

SULLE

VIBRAZIONI DI UNA MEMBRANA

CHE SI POSSONO

FAR DIPENDERE DA DUE SOLI PARAMETRI

MEMORIA

DI

GIULIO BISCONCINI

Approvata nell'adunanza del 24 Maggio 1903.

Il prof. Levi-Civita, proponendosi in una memoria pubblicata in questa Accademia (*), la questione di doterminare i tipi di potenziali, che dipendono da due sole coordinate, e sono quindi costanti lungo le linee di una certa congruenza $Xf \equiv X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, fu condotto a studiare le soluzioni comuni alle due equazioni:

$$\Delta_2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \qquad Xf = 0.$$

Se noi scambiamo nella $\Delta_2 f$ la variabile z in it, la nuova equazione:

$$\square f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

definisce le vibrazioni trasversali di una membrana elastica (**), e il problema propostosi dal Levi-Civita trova l'equivalente in quest'altro: *Determinare i tipi di vibrazioni trasversali di una membrana, che si possono far dipendere da due soli parametri.*

Per la risoluziono di questo problema ci siamo valsi dei risultati contenuti nella momoria citata.

(*) *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate* (" Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", Serie II, t. XLIX, a. 1899).

(**) È noto infatti, che queste vibrazioni sono definite da un'equazione del tipo $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = A^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$, A^2 essendo una costante. Per passare da questa all'equazione $\square f = 0$ basterà cambiare l' unità di tempo nel rapporto da 1 ad A.

In essa l'A. dimostrò, che le traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini e le congruenze rettilinee isotrópe sono le sole congruenze equipotenziali e insegnò, come, per arrivare all'equazione, cui doveva soddisfare il potenziale lungo queste linee, bastasse aggiungere alle traiettorie della congruenza

$$\rho_1 = \rho_1(x, y, z), \qquad \rho_2 = \rho_2(x, y, z),$$

una terza famiglia di superficie

$$\rho_3 = \rho_3(x, y, z)$$

indipendente da esse, ed, espresso il $\Delta_2 f$ in coordinate curvilinee ρ_1, ρ_2, ρ_3, bastasse porre $\frac{\partial f}{\partial \rho_3} = 0$ ed eventualmente moltiplicare per un opportuno fattore in modo da eliminare ρ_3. Ora, poichè l'equazione $\square f = 0$ differisce dall'equazione di Laplace solo per lo scambio della variabile reale z nella immaginaria it, la via che dovevamo seguire, si presentava ben delineata; dovevamo: 1° determinare nel campo x, y, t tutti i sottogruppi reali di quel gruppo, nel quale si muta il gruppo delle similitudini, quando si fa detto scambio; 2° trovare le equazioni delle traiettorie

$$\rho_1 = \rho_1(x, y, t), \qquad \rho_2 = \rho_2(x, y, t) \tag{1}$$

generate dalle corrispondenti trasformazioni infinitesime, con che avremmo ottenuto le equazioni delle nuove linee coordinate variabili col tempo; 3° determinare l'equazione delle vibrazioni dipendenti dai soli parametri ρ_1, ρ_2 secondo il processo più sopra indicato.

Nel § 4 abbiamo preso in considerazione il caso, in cui le linee equipotenziali appartenessero a una congruenza rettilinea ed isotrópa e, valendoci di una forma semplice data dal Ribaucour per l'integrale generale di queste congruenze, abbiamo dedotto le equazioni (1), dimostrando (senza eseguir calcoli) come l'equazione dei potenziali isotrópi si potesse anche riguardare come l'equazione delle vibrazioni in questione.

Infine abbiamo considerato a parte il caso delle congruenze di lunghezza nulla (v. § 5), che, mentre nel campo x, y, z dovevasi escludere, poteva dare nel campo x, y, t, come infatti ha dato, risultati, che non fossero negativi.

Ci sia permesso qui di ringraziare vivamente il Professore Levi-Civita, che, oltre all'averci gentilmente favorito il tema di questo lavoro, ci fu sempre largo di aiuti e consigli.

§ 1. — *Ricerca gruppale.*

1. — È noto che, nello spazio ordinario, l'unico gruppo, che lasci ferma una curva piana, è il gruppo a 7 parametri delle similitudini, il quale lascia fissa una conica. Scelta questa in modo che in coordinate omogenee assuma la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

cioè scelto quale ente invariante l'assoluto dello spazio, il nostro gruppo G_7 risulta definito dalle trasformazioni infinitesime (*):

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = r,$$
$$S_1f = yr - zq, \quad S_2f = zp - xr, \quad S_3f = xq - yp,$$
$$Uf = xp + yq + zr,$$

dove p, q, r sono, secondo le notazioni ordinarie, simboli di derivate di una funzione $f(x, y, z)$ rispetto alle variabili x, y, z.

Se si passa al campo x, y, t mediante lo scambio di z in it $(i = \sqrt{-1})$ e si pone $s = \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t}$, le trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 assumeranno la forma:

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = s,$$
$$S_1f = ys + tq, \quad S_2f = tp + xs, \quad S_3f = xq - yp,$$
$$Uf = xp + yq + ts$$

e la conica all'infinito, che rimane fissa, sarà reale ed avrà per equazione:

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Consideriamo ora il gruppo subordinato di G_7 sopra il piano all'infinito e determiniamone le corrispondenti trasformazioni infinitesime, quando sopra questa varietà a due dimensioni si scelga il sistema di coordinate non omogenee definito dalle formule:

$$\xi = \frac{x}{t}, \qquad \eta = \frac{y}{t}.$$

Quando alle variabili x, y, t si dànno gli incrementi $\delta x, \delta y, \delta t$, le nuove coordinate ξ, η subiranno in generale gli incrementi:

$$\delta\xi = \frac{t\delta x - x\delta t}{t^2}, \qquad \delta\eta = \frac{t\delta y - y\delta t}{t^2},$$

per cui nelle successive trasformazioni infinitesime del gruppo subordinato i coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ saranno ciò che diventano $\delta\xi$ e $\delta\eta$, quando $\delta x, \delta y, \delta t$ si sostituiscano con gli incrementi, che subiscono x, y, t per effetto delle corrispondenti trasformazioni di G_7.

Si riconosce allora senz'altro, che, in virtù delle prime trasformazioni infinitesime e della settima, ξ ed η assumono degli incrementi, che sono nulli o identicamente o tenuto conto dei valori infiniti, che hanno sulla nostra varietà x, y, t: in altre parole le suddette trasformazioni infinitesime non agiscono sul piano all'infinito, cosa d'altronde intuibile *a priori*, se si pensa al significato cinematico delle trasformazioni stesse.

(*) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, § 34.

Gli incrementi assunti dalle nostre variabili nelle rimanenti tre trasformazioni infinitesime sono rispettivamente:

$$\delta\xi = -\epsilon\frac{xy}{t^2} = \epsilon\xi\eta, \qquad \delta\eta = \epsilon\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right) = \epsilon(1-\eta^2);$$

$$\delta\xi = \epsilon\left(1-\frac{x^2}{t^2}\right) = \epsilon(1-\xi^2), \qquad \delta\eta = -\epsilon\frac{xy}{t^2} = -\epsilon\xi\eta;$$

$$\delta\xi = -\epsilon\frac{y}{t} = -\epsilon\eta, \qquad \delta\eta = \epsilon\frac{x}{t} = \epsilon\xi;$$

ϵ indicando un'arbitraria infinitesima, per cui le trasformazioni $\Sigma_1 f$, $\Sigma_2 f$, $\Sigma_3 f$ subordinate all'infinito sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial\eta} - \eta\left(\xi\dfrac{\partial f}{\partial\xi} + \eta\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\right), \\[2ex] \Sigma_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial\xi} - \xi\left(\xi\dfrac{\partial f}{\partial\xi} + \eta\dfrac{\partial f}{\partial\eta}\right), \\[2ex] \Sigma_3 f = \xi\dfrac{\partial f}{\partial\eta} - \eta\dfrac{\partial f}{\partial\xi}. \end{cases}$$

Sarebbe facile riconoscere, che queste trasformazioni infinitesime sono indipendenti e che le parentesi di Poisson formate con esse si esprimono linearmente per le trasformazioni stesse. Esse quindi costituiscono un gruppo Γ_3 transitivo, che si riconosce, dalla forma delle sue trasformazioni infinitesime, essere proiettivo.

E poichè il gruppo G_7 lascia ferma la conica $x^2+y^2+t^2=0$, così il nostro gruppo subordinato Γ_3 lascierà fisso sulla varietà, in cui opera, il cerchio:

$$\xi^2+\eta^2=1.$$

Determiniamo ora il gruppo subordinato di Γ_3 sopra questa varietà ad una dimensione.

Fissando la posizione di un punto del cerchio mediante l'angolo θ, che il raggio passante per esso forma con un raggio fisso, avremo:

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi},$$

e l'incremento che assume θ quando ξ ed η s'incrementano di $\delta\xi$ e $\delta\eta$ sarà:

$$\delta\theta = \frac{\xi\delta\eta - \eta\delta\xi}{\xi^2+\eta^2} = \xi\delta\eta - \eta\delta\xi.$$

Per cui, se teniamo conto che gli incrementi di $\delta\xi$ e $\delta\eta$ nelle trasformazioni infinitesime $\Sigma_1 f$, $\Sigma_2 f$, $\Sigma_3 f$ sono dati dalle (1), risulterà, che le trasformazioni subordinate da queste sul cerchio daranno a θ rispettivamente gli incrementi:

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \epsilon[\xi(1-\eta^2)+\xi\eta^2] &&= \epsilon\cos\theta, \\ \delta\theta &= \epsilon[-\xi^2\eta - \eta(1-\xi^2)] &&= -\epsilon\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ \delta\theta &= \epsilon(\xi^2+\eta^2) &&= \epsilon, \end{aligned}$$

ed il gruppo subordinato g_3 sarà individuato dalle trasformazioni infinitesime

$$s_1 f = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}, \quad s_2 f = -\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}, \quad s_3 f = \frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

Fra le trasformazioni infinitesime di questo gruppo ve ne saranno di quelle, che lascieranno fissi o due punti (reali o immaginari), o uno solo, o infine tutti i punti del cerchio $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Determinate queste trasformazioni infinitesime, potremo determinare le corrispondenti del gruppo G_7 e quindi i suoi sottogruppi ∞^1.

Quanto all'ordine seguìto avvertiremo, che abbiamo imposto successivamente alle trasformazioni infinitesime di g_3 la condizione di operare in modo da mantenere fermi:

a) tutti i punti del cerchio,
b) due punti reali distinti,
c) due punti reali coincidenti,
d) due punti imaginari.

2. — Prima però di accingerci a questa discussione crediamo opportuno premettere una osservazione, che ci sembra essenziale.

Avuto riguardo alla pura questione gruppale, due trasformazioni infinitesime saranno a ritenersi equivalenti, quando sieno riducibili l'una all'altra mediante una trasformazione, che appartenga al gruppo. Una definizione così generale non potrà darsi però, ove si tenga presente l'applicazione, che abbiamo in vista. E in vero, mentre dovremo riguardare le variabili x, y come coordinate cartesiane di un piano (quello della membrana elastica), la variabile t dovrà ritenersi invece un parametro, che misura il tempo. Non sarà perciò lecito nella discussione scambiare indifferentemente il loro ufficio, come si potrebbe fare, se esse rappresentassero coordinate di spazio, ma si dovrà avere riguardo di tenere sempre distinta la t.

La definizione accennata di equivalenza non può dunque applicarsi senz'altro al nostro caso, perchè essa potrebbe condurci ad ammettere equivalenti due sottogruppi ∞^1, che in realtà lo fossero solo nell'àmbito gruppale. Essa andrà dunque intesa nel senso, che le trasformazioni di G_7, rispetto alle quali due sottogruppi ∞^1 si presentassero equivalenti, non debbano involgere in un ufficio scambievole le tre variabili x, y, t.

Dovremo dunque nel confronto usare solo delle trasformazioni finite che provengono dalle trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f, X_3 f, Uf, S_3 f$, poichè le prime due equivalgono a una trasformazione parallela di assi, la terza ad un cambiamento dell'origine da cui si conta il tempo, la Uf a un cambiamento dell'unità di misura delle lunghezze e del tempo, l'ultima ad una rotazione degli assi x, y nel loro piano; mai invece potremo usare delle trasformazioni finite appartenenti alle $S_1 f$ ed $S_2 f$, perchè in esse l'ufficio di t è scambiato rispettivamente con quello di y o di x.

3. — Tenuto presente questo veniamo alla determinazione dei sottogruppi ∞^1 di G_7, distinguendo i quattro casi, di cui s'è detto al n° 1.

a) Indicando con e_i $(i = 1, 2, \dots, 7)$ delle costanti arbitrarie, la trasformazione infinitesima più generale del gruppo G_7 avrà la forma:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 Uf + e_5 S_1 f + e_6 S_2 f + e_7 S_3 f.$$

Poichè abbiamo notato che $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, Uf non operano sul piano all' infinito, mentre l' opposto avviene per le altre tre, le quali muovono i punti del cerchio $\xi^2 + \eta^2 = 1$ nel modo già detto, così affinchè la Xf soddisfi alla condizione di lasciar fissi tutti i punti di questo, basterà supporre:

$$e_5 = e_6 = e_7 = 0.$$

Se ammettiamo inoltre dapprima che sia $e_4 \neq 0$ potremo dare a Xf la forma:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + Uf.$$

Questa si riduce ulteriormente eseguendo la trasformazione:

$$x' = x + e_1, \qquad y' = y + e_2, \qquad t' = t + e_3,$$

appartenente al sottogruppo $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, e diventa (le notazioni essendo evidenti)

$$e_1 p' + e_2 q' + e_3 s' + (x' - e_1) p' + (y' - e_2) q' + (t' - e_3) s'$$

ovvero, a operazioni eseguite:

$$Uf.$$

Se supponiamo invece $e_4 = 0$ abbiamo:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f,$$

nella quale sono ancora da distinguere, in base alla osservazione fatta al n° 2, i due casi $e_3 \neq 0$ ed $e_3 = 0$.

Nel primo essa è equivalente, pel tramite di una opportuna rotazione degli assi xy nel loro piano, alla trasformazione infinitesima:

$$X_1 f + c X_3 f,$$

nel secondo alla:

$$X_1 f.$$

Possiamo quindi far rientrare questo tipo nel precedente, togliendo in esso per c la restrizione imposta.

b) Prendiamo ora in esame il caso, in cui due punti reali del cerchio rimangono fissi, ed osserviamo, che, senza togliere nulla in generalità alla questione, potremo sempre supporre, che tali punti sieno gli estremi di un diametro, p. es. di quello coincidente coll'asse delle ξ (*).

La trasformazione più generale

$$(\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \operatorname{sen}\theta + \lambda_3) \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

del gruppo g_3 subordinato sul cerchio attribuendo alla θ l'incremento:

$$\epsilon (\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \operatorname{sen}\theta + \lambda_3),$$

(*) Potremo sempre ridurci a questo caso mediante una trasformazione proiettiva appartenente a g_3.

questo dovrà essere nullo per i due valori 0 e π di θ, cioè si dovrà avere:

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad -\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

ovvero:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_3 = 0.$$

La trasformazione di g_3, che lascia fermi i due punti in questione, essendo dunque $s_2 f$, la corrispondente trasformazione infinitesima più generale di G_7 sarà:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 Uf + e_6 S_2 f$$

o anche, non potendo essere $e_6 = 0$, perchè si ricadrebbe nel caso $a)$:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 Uf + S_2 f.$$

Eseguiamo ora su essa una trasformazione di G_7 formata combinando una traslazione con una dilatazione e sia:

$$x = \frac{1}{\rho} x' + \alpha, \qquad y = \frac{1}{\rho} y' + \beta, \qquad t = \frac{1}{\rho} t' + \gamma.$$

Otterremo:

$$Xf = e_1 \rho p' + e_2 \rho q' + e_3 \rho s' + e_4 \{(x' + \rho\alpha) p' + (y' + \rho\beta) q' + (t' + \rho\gamma) s'\} + (t' + \rho\gamma) p' + (x' + \rho\alpha) s',$$

ovvero (omettendo anche gli apici):

$$Xf = \rho \{(e_1 + e_4\alpha + \gamma) p + (e_2 + e_4\beta) q + (e_3 + e_4\gamma + \alpha) s\} + e_4 Uf + S_2 f.$$

Si vedrebbe pure, come d'altronde è intuibile *a priori*, che una trasformazione di $S_3 f$ non porta, oltre quelle, che ora vedremo, ulteriori riduzioni; noi quindi per brevità tralascieremo di introdurla.

Supponiamo dapprima $e_4 \neq 0$ e cerchiamo, se sia possibile determinare le costanti indeterminate α, β, γ in modo, che s'annulli il coefficiente di ρ nella espressione di Xf precedentemente ottenuta.

Dovremo perciò avere:

$$\begin{aligned} e_4\alpha + \qquad \gamma &= -e_1, \\ e_4\beta \qquad &= -e_2, \\ \alpha + \qquad e_4\gamma &= -e_3, \end{aligned}$$

e questo sistema ammette una soluzione, se oltre all'essere $e_4 \neq 0$ è pure $e_4 \neq \pm 1$.

Verificato ciò e determinate α, β, γ in modo da soddisfare ad esso, avremo il sottogruppo:

$$cUf + S_2 f. \qquad (c \neq 0, +1, -1.)$$

Vediamo ora cosa avvenga pei tre valori esclusi di e_4.

Se ammettiamo $e_4 = 0$, possiamo determinare α e γ in modo, che si annullino in Xf i coefficienti di p ed s, dopo di che essa diventa:

$$Xf = e_2 \rho q + S_2 f,$$

nella quale, o si prende $e_2 = 0$ e allora si ha il primo tipo:

$$S_2 f,$$

o si prende $\rho = \frac{1}{e_2}$ e si ha il secondo tipo:

$$q + S_2 f.$$

Se supponiamo in secondo luogo che sia $e_4 = +1$, disponendo opportunamente delle quantità indeterminate introdotte, potremo annullare o i primi o gli ultimi due termini della somma entro parentesi nella espressione di Xf ed ottenere, nell'un caso:

$$Xf = \rho(e_3 - e_1)s + Uf + S_2 f,$$

nell'altro:

$$Xf = \rho(e_1 - e_3)p + Uf + S_2 f.$$

Entrambe per $e_1 = e_3$ dànno origine al sottogruppo:

$$Uf + S_2 f,$$

mentre invece porgono i due tipi distinti:

$$s + Uf + S_2 f,$$
$$p + Uf + S_2 f,$$

quando si faccia nella prima $\rho = \frac{1}{e_3 - e_1}$ e nella seconda $\rho = \frac{1}{e_1 - e_3}$.

In modo analogo, nell'ipotesi che sia $e_4 = -1$, si sarebbero ottenuti i tre tipi:

$$-Uf + S_2 f$$
$$s - Uf + S_2 f$$
$$p - Uf + S_2 f.$$

I risultati ottenuti ci autorizzano così a togliere nel sottogruppo $cUf + S_2 f$ le restrizioni imposte alla costante c.

c) Consideriamo ora il caso, in cui i due punti del cerchio, che restano fermi, coincidano e supponiamoli situati sulla direzione positiva dell'asse ξ.

Nella trasformazione infinitesima più generale di g_3:

$$(\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \operatorname{sen}\theta + \lambda_3)\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

potremo sempre supporre $\lambda_3 \neq 0$, perchè, se ciò non fosse, i valori di θ definiti dalla equazione:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

annullerebbero l'incremento $\epsilon(\lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \operatorname{sen}\theta)$ di θ e due punti opposti del cerchio $\left[\text{precisamente i punti } \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ (\text{mod. } \pi)\right]$ sarebbero fissi.

Ci sarà perciò permesso di scriverla sotto la forma:

$$(\mu_1 \cos\theta - \mu_2 \operatorname{sen}\theta + 1)\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Siccome poi l'incremento

$$\epsilon(\mu_1 \cos\theta - \mu_2 \operatorname{sen}\theta + 1)$$

assunto dalla θ deve annullarsi per $\theta = 0$ insieme con la sua derivata prima rispetto a θ (perchè $\theta = 0$ è una radice doppia dell'equaziono $\mu_1 \cos\theta - \mu_2 \operatorname{sen}\theta + 1 = 0$), così dovromo avere ovviamente:

$$\mu_1 + 1 = 0, \qquad \mu_2 = 0$$

e la trasformaziono infinitesima di g_3 sarà $s_3 f - s_1 f$.

Corrispondentemente, la trasformazione infinitesima più generale di G_7 potrà scriversi:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 Uf + S_3 f - S_1 f.$$

Eseguiamo ora su questa la solita trasformazione:

$$x = \frac{1}{\rho} x' + \alpha, \quad y = \frac{1}{\rho} y' + \beta, \quad t = \frac{1}{\rho} t' + \gamma$$

ed otterremo:

$$Xf = \rho\{(e_1 + e_4\alpha - \beta)p + (e_2 + e_4\beta + \alpha - \gamma)q + (e_3 + e_4\gamma - \beta)s\} + e_4 Uf + S_3 f - S_1 f.$$

Supposto dapprima $e_4 \neq 0$, si riconosce come precedentemente, che si possono senz'altre restrizioni determinare α, β, γ, in modo che s'annulli la somma entro parentesi. Si arriva così al tipo:

$$cUf + S_3 f - S_1 f. \qquad (c \neq 0)$$

Se invece $e_4 = 0$, potromo usufruire dolle nostre indeterminate in modo da annullare o i due primi o i due ultimi termini della somma.

Nell'un caso avremo:

$$Xf = \rho(e_3 - e_1)s + S_3 f - S_1 f,$$

nell'altro:

$$Xf = \rho(e_1 - e_3)p + S_3 f - S_1 f,$$

e queste trasformazioni infinitesime dànno origine ai tre sottogruppi:

$$S_3 f - S_1 f,$$
$$s + S_3 f - S_1 f,$$
$$p + S_3 f - S_1 f,$$

con che rimane tolta per il tipo $cUf + S_3 f - S_1 f$ ancho l'unica limitaziono, cho s'era dovuto fare per i valori della costante.

d) Veniamo infine al caso, in cui nessun punto realo del cerchio sta fisso.

Partendo, come negli altri casi, dalla trasformazione infinitesima più generale di g_3, si vede, che in questo caso deve essere $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, per cui la corrispondente trasformazione infinitesima di G_7 sarà:

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 Uf + S_3 f.$$

Eseguita la trasformazione:

$$x = \frac{1}{\rho} x' + \alpha, \quad y = \frac{1}{\rho} y' + \beta, \quad t = \frac{1}{\rho} t' + \gamma$$

essa diventa:

$$Xf + \rho \{ (e_1 + e_4\alpha - \beta) p + (e_2 + e_4\beta + \alpha) q + (e_3 + e_4\gamma) s \} + e_4 Uf + S_3 f.$$

Se si suppone $e_4 \neq 0$ potremo determinare le costanti α, β, γ in modo, che s'annulli la somma entro parentesi, ottenendo così il sottogruppo:

$$cUf + S_3 f. \qquad (c \neq 0)$$

Se invece si suppone $e_4 = 0$ e si attribuisce ad α il valore $-e_2$ e a β il valore e_1 otteniamo:

$$Xf = e_3 \rho s + S_3 f$$

nella quale si può ancora usufruire delle costanti per ottenere gli altri due tipi:

$$S_3 f,$$
$$s + S_3 f.$$

Anche qui veniamo così a togliere pel tipo $cUf + S_3 f$ la restrizione circa la costante.

Crediamo opportuno di raccogliere in una tabella i tipi di sottogruppi ∞^1 del gruppo G_7, che dal nostro punto di vista dobbiamo ritenere distinti:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 f + cX_3 f &\equiv p + cs \\ Uf &\equiv xp + yq + ts \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} q + S_2 f &\equiv tp + q + xs \\ cUf + S_2 f &\equiv (cx + t)p + cyq + (x + ct)s \\ s + Uf + S_2 f &\equiv (x + t)p + yq + (x + t + 1)s \\ s - Uf + S_2 f &\equiv (-x + t)p - yq + (x - t + 1)s \\ p + Uf + S_2 f &\equiv (x + t + 1)p + yq + (x + t)s \\ p - Uf + S_2 f &\equiv (-x + t + 1)p - yq + (x - t)s \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} s + S_3 f - S_1 f &\equiv yp + (-x - t)q + (-y + 1)s \\ p + S_3 f - S_1 f &\equiv (y + 1)p + (-x - t)q - ys \\ cUf + S_3 f - S_1 f &\equiv (cx + y)p + (-x + cy - t)q + (-y + ct)s \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} s + S_3 f &\equiv yp - xq + s \\ cUf + S_3 f &\equiv (cx + y)p + (-x + cy)q + cts \end{aligned}\right.$$

§ 2. — *Linee coordinate, dai cui parametri dipendono le vibrazioni.*

1. — Procederemo ora alla determinazione delle traiettorie, che le trasformazioni infinitesime ora trovate generano e mostreremo nei casi più semplici, come debba avvenire la propagazione delle vibrazioni della lamina.

Vedremo come alcuni tipi saranno da scartare, perchè gli integrali corrispondenti $\rho_1 = \rho_1(x, y, t)$, $\rho_2 = \rho_2(x, y, t)$ non risulteranno indipendenti rispetto alle variabili x e y. Ora questa è per noi una condizione essenziale, perchè le formule $\rho_1 = \rho_1(x, y, t)$, $\rho_2 = \rho_2(x, y, t)$, che nello spazio x, y, t s'interpretano come linee di una congruenza, nel piano xy devono invece rappresentare formule di trasformazione fra due sistemi di coordinate x, y e ρ_1, ρ_2, e come tali devono poter risolversi rispetto a x e a y.

Vedremo, come fra i casi più semplici si trovino: quello in cui il movimento è riferito a un sistema di assi cartesiani in moto traslatorio uniforme, e quello in cui questi assi ruotano pure uniformemente.

2. — I. $X_1 f + c\, X_3 f$. Le traiettorie di questa trasformazione infinitesima sono definite dal sistema differenziale:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dt}{c}$$

ovvero in termini finiti dalle equazioni:

$$\rho_1 = cx - t \qquad \rho_2 = y.$$

Vediamo allora subito, che il caso in cui $c = 0$ devesi escludere, in base a quanto s'è detto al n° 1.

Per $c \neq 0$ le linee coordinate sono rette parallele agli assi, le prime spostantisi uniformemente col tempo, le altre fisse.

L'interpretazione fisica del fenomeno è in questo caso assai semplice. Fissato un punto (x, y) della lamina, al quale nell'istante iniziale $t = t_0$ corrisponda una data vibrazione w, se al crescere del tempo ci spostiamo nel senso positivo sopra la parallela all'asse delle x condotta per il punto, di una quantità corrispondente alla variazione del tempo divisa per c, troviamo punti per cui w ha sempre lo stesso valore (perchè appunto ρ_1 e ρ_2 si mantengono inalterati).

È chiaro allora, che se una linea l della lamina è formata di punti, pei quali la vibrazione trasversale ha lo stesso valore, essa col variare di t mantiene la sua forma spostandosi parallelamente a se stessa nel senso dell'asse delle x.

II. Uf. Le traiettorie sono:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}.$$

e in termini finiti:

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}, \qquad \rho_2 = \frac{y}{x}.$$

Le linee coordinate sono dunque cerchi col centro nell'origine delle coordinate x, y, e rette uscenti da esso; sono dunque le linee coordinate di un sistema polare che ha per asse e centro rispettivamente l'asse delle x e l'origine del sistema cartesiano, con l'avvertenza che il raggio dei cerchi varia proporzionalmente al tempo.

La vibrazione trasversale di un punto (x, y) della lamina avrà dunque col variare di t lo stesso valore sopra punti del raggio vettore relativo al punto (x, y), i quali si spostino sopra la sua direzione positiva di quantità proporzionali alla variazione del tempo.

Se indichiamo allora con l la curva luogo dei punti, che in un certo istante t hanno una stessa ampiezza di vibrazione trasversale w, il luogo l_1 dei punti, che hanno la stessa ampiezza di vibrazione in un istante successivo $t + t_1$, si otterrà portando sopra i raggi vettori a partire dai punti della curva dei segmenti uguali al prodotto di t_1 per il raggio vettore iniziale.

La curva l_1 è quindi omotetica ad l col rapporto d'omotetia $\frac{1}{1+t_1}$.

III. $q + S_2 f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{t} = \frac{dy}{1} = \frac{dt}{x},$$

e in termini finiti:

$$\rho_1^2 = t^2 - x^2, \qquad \rho_2 = y + \log \sqrt{\frac{t-x}{t+x}}.$$

Il primo sistema è costituito da coppie di rette parallele all'asse delle y simmetricamente disposte rispetto ad esso; il secondo da curve logaritmiche deformabili col tempo.

IV. $cUf + S_2 f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{cx+t} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{x+ct},$$

e in termini finiti:

$$(x^2 + y^2 - t^2)\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^c = \rho_1 \qquad \frac{x^2 - t^2}{y^2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Il primo sistema di linee coordinate è formato da curve, la cui natura dipende dal valore della costante c, e che nell'istante $t = 0$ sono circonferenze di raggio ρ_1.

Messo il secondo sistema sotto la forma $\frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{\rho_2 t^2} = 1$, si rileva, come esso sia formato da iperboli od ellissi (omotetiche a se stesse col variare del tempo) secondo che ρ_2 è positivo o negativo; per $\rho_2 = 0$ si ha manifestamente l'asse delle x.

Interessa, per la semplicità delle linee coordinate e della equazione delle vibrazioni corrispondente, mettere in evidenza il caso in cui sia $c = 0$.

Ponendo per c questo valore nelle formule precedenti e facendo una opportuna combinazione dei parametri ρ_1, ρ_2, troviamo di poter scegliere quali linee coordinate:

$$t^2 - x^2 = \rho_1^2, \qquad y = \rho_2.$$

V. $s + Uf + S_2 f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{y} = \frac{dt}{x+t+1},$$

in termini finiti:

$$\frac{2(x+t)+1}{4y^2}=\rho_1, \qquad ye^{x-t}=\rho_2.$$

Si scorge allora che il primo sistema di linee (le cui equazioni possono anche scriversi $4\rho_1 y^2-2x-(2t+1)=0$) è costituito da parabole che al variare del tempo variano in modo che il loro asse si mantiene sempre parallelo all'asse x; il secondo sistema, pur esso variabile col tempo, è formato da curve logaritmiche.

VI. $s-Uf+S_2f$.

In modo analogo si trovano quali linee coordinate:

$$\frac{2(x-t)+1}{4y^2}=\rho_1, \qquad ye^{x+t}=\rho_2.$$

VII. $p+Uf+S_2f$.

Così pure in questo caso si trova:

$$\frac{2(x+t)+1}{4y^2}=\rho_1, \qquad ye^{-x+t}=\rho_2.$$

VIII. $p-Uf+S_2f$.

E analogamente:

$$\frac{2(x-t)+1}{4y^2}=\rho_1, \qquad ye^{-x-t}=\rho_2.$$

Da un confronto fatto fra le linee coordinate di questi quattro ultimi casi vediamo, che quelle del V e VI (e analogamente del VII e VIII) differiscono solo per lo scambio di t in $-t$ e quindi coincidono nell'istante $t=0$ e sono distinte nei tempi successivi; e che nei casi V e VII (e analogamente VI e VIII) le linee del primo sistema coincidono in ogni istante, mentre sono distinte quelle del secondo.

IX. $s+S_3f-S_1f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x-t}=\frac{dt}{1-y},$$

in termini finiti:

$$(x+t)^2+2y=\rho_1, \qquad \frac{1}{3}(x+t)^3+y(x+t)-x=\rho_2.$$

Nel piano x, y le linee coordinate sono dunque parabole e curve del terzo ordine.

X. $p+S_3f-S_1f$.

In modo analogo si trovano le linee coordinate:

$$(x+t)^2+2y=\rho_1, \qquad \frac{1}{3}(x+t)^2+y(x+t)+t=\rho_2.$$

XI. $cUf+S_3f-S_1f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{cx+y}=\frac{dy}{-x+cy-t}=\frac{dt}{-y+ct},$$

e in termini finiti:

$$\frac{x^2+y^2-t^2}{2(x+t)^2}=\rho_1 \qquad (x+t)e^{\frac{cy}{x+t}}=\rho_2.$$

Scritto il primo sistema di curve sotto la forma:

$$x^2(1-2\rho_1)+y^2-2\rho_1 tx-t^2(1+2\rho_1)=0$$

si rileva ch'esso è costituito da ellissi, parabole o iperboli corrispondentemente a valori di ρ_1 minori, uguali o maggiori di $\frac{1}{2}$; gli assi di queste curve al variare di t si mantengono sempre paralleli a se stessi. Il secondo sistema è costituito da curve trascendenti.

È interessante mettere in rilievo il caso particolare in cui sia $c=0$, perchè ci è permesso in questo caso scegliere le linee coordinate molto semplici:

$$x+t=\rho_1, \qquad x^2+y^2-t^2=\rho_2^2,$$

cui corrisponderà un'equazione delle vibrazioni pure assai semplice.

XII. $s+S_3f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{1},$$

e in termini finiti:

$$x^2+y^2=\rho_1^2, \qquad t+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=\rho_2,$$

ovvero introducendo le coordinate polari:

$$r=\rho_1, \qquad t+\theta=\rho_2.$$

Le linee coordinate sono dunque cerchi fissi concentrici e rette passanti pel loro centro ruotanti uniformemente col crescere del tempo.

Le vibrazioni della lamina saranno dunque riferite ad un sistema cartesiano che ruoti in modo uniforme intorno all'origine.

XIII. $cUf+S_3f$. Traiettorie:

$$\frac{dx}{cx-y}=\frac{dy}{-x+cy}=\frac{dt}{ct}.$$

In termini finiti possiamo scegliere:

$$(x^2+y^2-t^2)\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^{ic}=\rho_1, \qquad \frac{x^2+y^2}{t^2}=\rho_2^2.$$

Vediamo allora subito, come il caso particolare $c=0$, debba escludersi perchè le equazioni che si ottengono dalle precedenti ponendo $c=0$ non possono risolversi rispetto alle variabili x, y (v. n° 1).

§ 3. — *Equazioni delle vibrazioni.*

Passiamo ora a costruire per ogni singolo caso la equazione, che definisce le vibrazioni stazionarie della membrana. Ci varremo perciò di una constatazione fatta dal Levi-Civita e che si può, nel caso nostro, enunciare nel modo seguente: Se alle due famiglie di superficie $\rho_1 = \text{cost}$, $\rho_2 = \text{cost}$ si associa nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ una terza famiglia $\rho_3 = \text{cost}$ da esse indipendente o si esprime la equazione:

$$\Box w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

in coordinate curvilinee ρ_1, ρ_2, ρ_3, basta porre nella equazione risultante $\frac{\partial w}{\partial \rho_3} = 0$ ed eventualmente moltiplicare per un fattore dipendente da ρ_3, affinchè essa si muti in una equazione $\overline{\Box} w = 0$, che, non solo non contiene ρ_3 come variabile di derivazione, ma nemmeno la contiene nei coefficienti: in una equazione cioè, che definisce w come funzione delle sole coordinate ρ_1, ρ_2.

Per il calcolo ci varremo della formula di Beltrami:

$$\Box w = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3 {}_r \frac{\partial}{\partial \rho_r} \left\{ \sum_1^3 {}_s \sqrt{a}\, a^{(rs)} \frac{\partial w}{\partial \rho_s} \right\},$$

dove con a indichiamo il dotorminante del quadrato dell'elemento lineare dello spazio in questione espresso in coordinate curvilinee ρ_1, ρ_2, ρ_3 e con $a^{(rs)}$ gli elementi reciproci dogli elementi a_{rs} di questo determinante.

Avvertiamo però, che ci risparmieremo questo calcolo tutte le volte che con semplice cambiamento di parametri ci riuscirà immediato il passaggio dai tipi di sottogruppi ∞^1 del gruppo delle similitudini nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ai tipi da noi trovati.

Negli altri casi, o almeno nei più complicati, riporteremo il calcolo per estoso.

I. Aggiunto al sistema di superficie

$$cx - t = \rho_1, \qquad y = \rho_2, \qquad\qquad (c \neq 0)$$

trovate al paragrafo precedente, il sistema:

$$t = \rho_3,$$

si ha successivamente:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2 = \frac{1}{c^2} d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + \left(\frac{1}{c^2} - 1\right) d\rho_3^2 + \frac{2}{c^2} d\rho_1 d\rho_3 .$$

$$a = \begin{vmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{c^2} - 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{c^2} .$$

$$a^{(11)} = c^2 - 1, \qquad a^{(22)} = 1, \qquad a^{(33)} = -1,$$

$$a^{(23)} = 0, \qquad a^{(31)} = 1, \qquad a^{(12)} = 0,$$

$$\Box w = \frac{c}{i} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{i}{c} \left((c^2 - 1) \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + \frac{\partial w}{\partial \rho_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{i}{c} \frac{\partial w}{\partial \rho_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left[\frac{i}{c} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_1} - \frac{\partial w}{\partial \rho_3} \right) \right] \right\} .$$

E l'equazione delle vibrazioni sarà:

$$\overline{\Box} w \equiv (c^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} = 0 .$$

II. Al sistema di superficie considerato al § 2, II o all'equivalente:

$$x^2 + y^2 = -t^2 \operatorname{tg}^2 i\rho_1, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\rho_2,$$

aggiungiamo:

$$x^2 + y^2 - t^2 = -\rho_3^2$$

e avremo:

$$x = i\rho_3 \operatorname{sen} i\rho_1 \cos\rho_2, \qquad y = i\rho_3 \operatorname{sen} i\rho_1 \operatorname{sen}\rho_2, \qquad t = \rho_3 \cos i\rho_1.$$

Queste formule sono quelle in cui si mutano le corrispondenti del Levi-Civita (*) nel caso dei potenziali conici, quando posto $z = it$ si muti in esse ρ_1 e ρ_3 rispettivamente in $i\rho_1$ e $i\rho_3$, per cui senz'altro potremo, eseguendo lo stesso cambiamento nella sua equazione:

$$\theta_4 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\rho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \operatorname{cotg}\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 0$$

scrivere come equazione delle vibrazioni:

$$\overline{\Box}\, w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 i\rho_1}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + i \operatorname{cotg} i\rho_1 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} = 0.$$

III. Aggiungasi al sistema:

$$t^2 - x^2 = \rho_1^2, \qquad y + \log \sqrt{\frac{t-x}{t+x}} = \rho_2$$

la equazione $y = \rho_3$ e si otterrà:

$$x = i\rho_1 \operatorname{sen} i(\rho_2 - \rho_3), \qquad y = \rho_3, \qquad t = \rho_1 \cos i(\rho_2 - \rho_3).$$

Confrontando questo caso col caso dei potenziali elicoidali, che corrisponde alla trasformazione infinitesima $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + m\frac{\partial f}{\partial z}$, si vede che da esso si passa al nostro quando si eseguisca sulle variabili x, y, z la sostituzione $\begin{pmatrix} z & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix}$, e posto $z = it$, si faccia $m = -i$ e si sostituiscano ai parametri ρ_1, ρ_3 rispettivamente $i\rho_1$. $i(\rho_2 - \rho_3)$.

Dopo di ciò la equazione:

$$\theta_3^{(m)} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \left(1 + \frac{m^2}{\rho_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial \rho_1} = 0$$

si muta nella:

$$\overline{\Box}\, w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} - \left(1 + \frac{1}{\rho_1^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial w}{\partial \rho_1} = 0,$$

che caratterizza le vibrazioni in questo caso.

(*) Loc. cit., pag. 115. Avvertiamo che per le analoghe citazioni di questo paragrafo ci riferiremo sempre alle formule di questa pag. e della seguente.

IV. Scritte le traiettorie sotto la forma:

$$(x^2+y^2-t^2)\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^c=\rho_1^2, \qquad \frac{x^2-t^2}{y^2}=\operatorname{tg}^2 i\rho_2$$

e aggiunto il sistema di superficie:

$$\frac{t-x}{t+x}=e^{2\varrho_3}.$$

si trova che

$$x=\rho_1 \operatorname{sen} i\rho_2 e^{c\varrho_3} \operatorname{sen} i\rho_3, \quad y=\rho_1 \cos i\rho_2 e^{c\varrho_3}, \quad t=-i\rho_1 \operatorname{sen} i\rho_2 e^{c\varrho_3} \cos i\rho_3.$$

A queste formule si sarebbe arrivati, se (conformemente al modo con cui si può passare dalla trasformazione infinitesima $y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}+m\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ alla nostra) si fosse eseguita la sostituzione $\begin{pmatrix} z & x & y \\ x & y & z\end{pmatrix}$ e dopo aver posto $z=it$ si fosse preso $m=-ic$ e ai parametri ρ_2 e ρ_3 si fossero sostituiti rispettivamente $i\rho_2$ ed $i\rho_3$.

Dunque essendo:

$$\theta_5^{(m)}u\equiv\left(1+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\rho_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1}\left(2+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\rho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho_1}+\frac{1}{\rho_1^2}\operatorname{cotg}\rho_2\frac{\partial u}{\partial\rho_2}=0$$

la equazione dei potenziali spirali, avremo come equazione delle vibrazioni:

$$\overline{\Box u}\equiv\left(1-\frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\rho_2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1}\left(2-\frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\rho_2}\right)\frac{\partial w}{\partial\rho_1}-\frac{1}{\rho_1^2}i\operatorname{cotg} i\rho_2\frac{\partial w}{\partial\rho_2}=0.$$

Per il caso particolare in cui sia $c=0$, se insieme con le equazioni

$$t^2-x^2=\rho_1^2, \qquad y=\rho_3,$$

si considera la

$$\frac{x}{t}=i\operatorname{tg} i\rho_3,$$

si hanno le relazioni:

$$x=i\rho_1 \operatorname{sen} i\rho_3, \qquad y=\rho_2, \qquad t=\rho_1\cos i\rho_3,$$

che si ottengono dalle analoghe relative al caso dei potenziali simmetrici eseguendo la solita sostituzione sulle variabili x, y, z, mutando poi z in it e sostituendo a ρ_1 e ρ_3 rispettivamente $i\rho_1$ ed $i\rho_3$.

Dalla equazione:

$$\theta_2 u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho_1}=0$$

otteniamo perciò l'analoga:

$$\overline{\Box w}\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial w}{\partial\rho_1}=0.$$

V. Dal sistema di equazioni

$$\frac{2(x+t)+1}{4y^2}=\rho_1, \qquad ye^{x-t}=\rho_2,$$

cui si sia aggiunto

$$x - t = \rho_3 .$$

otteniamo:

$$x + t = 2\rho_1\rho_2^2 e^{-2\varrho_3} - \frac{1}{2}, \qquad y = \rho_2 e^{-\varrho_3},$$

e quindi successivamente abbiamo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2 = d(x+t)\, d(x-t) + dy^2 =$$
$$= e^{-2\varrho_3} d\rho_2^2 + \rho_2^2 e^{-2\varrho_3}(1 - 4\rho_1) d\rho_3^2 + 2\rho_2^2 e^{-2\varrho_3} d\rho_1\, d\rho_3 + 2\rho_2 e^{-2\varrho_3}(2\rho_1 - 1) d\rho_2\, d\rho_3 ,$$

$$a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \rho_2^2 e^{-2\varrho_3} \\ 0 & e^{-2\varrho_3} & \rho_2 e^{-2\varrho_3}(2\rho_1 - 1) \\ \rho_2^2 e^{-2\varrho_3} & \rho_2 e^{-2\varrho_3}(2\rho_1 - 1) & \rho_2^2 e^{-2\varrho_3}(1 - 4\rho_1) \end{vmatrix} = -\rho_2^4 e^{-6\varrho_3},$$

$$a^{(11)} = 4\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} e^{2\varrho_3}, \qquad a^{(22)} = e^{2\varrho_3}, \qquad a^{(33)} = 0,$$

$$a^{(23)} = 0, \qquad a^{(31)} = \frac{e^{2\varrho_3}}{\rho_2^2}, \qquad a^{(12)} = -\frac{2\rho_1 - 1}{\rho_2} e^{2\varrho_3};$$

$$\square w = \frac{1}{\rho_2^2 e^{-3\varrho_3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\rho_2^2 e^{-3\varrho_3}\left(4\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} e^{2\varrho_3}\frac{\partial w}{\partial\rho_1} - \frac{2\rho_1 - 1}{\rho_2} e^{2\varrho_3}\frac{\partial w}{\partial\rho_2} + \frac{e^{2\varrho_3}}{\rho_2^2}\frac{\partial w}{\partial\rho_3}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left[\rho_2^2 e^{-3\varrho_3}\left(-\frac{2\rho_1 - 1}{\rho_2} e^{2\varrho_3}\frac{\partial w}{\partial\rho_1} + e^{2\varrho_3}\frac{\partial w}{\partial\rho_2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\rho_3}\left[e^{-\varrho_3}\frac{\partial w}{\partial\rho_1}\right]\right\},$$

$$\overline{\square w} \equiv 4\rho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial\rho_1^2} + \rho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial\rho_2^2} - 2(2\rho_1 - 1)\rho_2 \frac{\partial^2 w}{\partial\rho_1\partial\rho_2} + 6\rho_1 \frac{\partial w}{\partial\rho_1} = 0.$$

VI. Se si considerano le due equazioni

$$\frac{2(x-t)+1}{4y^2} = \rho_1, \qquad y e^{x+t} = \rho_2$$

e vi si aggiunge

$$x + t = \rho_3$$

si trova:

$$x - t = 2\rho_1\rho_2^2 e^{-2\varrho_3} - \frac{1}{2}, \qquad y = \rho_2 e^{-\varrho_3},$$

per cui otterremo lo stesso quadrato dell'elemento lineare e quindi la stessa equazione per le vibrazioni del caso precedente.

VII. Dal sistema delle due equazioni

$$\frac{2(x+t)+1}{4y^2} = \rho_1, \qquad y e^{-(x-t)} = \rho_2$$

posto

$$x - t = \rho_3$$

abbiamo:

$$x + t = 2\rho_1\rho_2^2 e^{2\varrho_3} - \frac{1}{2}, \qquad y = \rho_2 e^{\varrho_3},$$

e con calcolo identico a quello del n° V si trova:

$$\Box w \equiv 4\rho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} + \rho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + 2(2\rho_1 + 1)\rho_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - 6\rho_1 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} = 0.$$

VIII. Come al n° VI si conclude, che si arriverà alla stessa equazione del caso precedente.

IX. Dalle equazioni

$$(x+t)^2 + 2y = \rho_1, \quad \frac{1}{3}(x+t)^3 + y(x+t) - x = \rho_2,$$

con la posizione

$$x + t = \rho_3$$

si ricava:

$$x = \frac{\rho_1\rho_3}{2} - \rho_2 - \frac{\rho_3^3}{6}, \quad y = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3^2):$$

per cui essendo:

$$ds^2 = d(x+t)\,d(x-t) + dy^2 = d\rho_3(2dx - d\rho_3) - dy^2 =$$

$$= \frac{d\rho_1^2}{4} + (\rho_1 - 1)\,d\rho_3^2 - 2d\rho_2 d\rho_3,$$

si trova eseguendo i noti calcoli:

$$\overline{\Box} w \equiv 4\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} + (1 - \rho_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

X. Considerando come terza equazione:

$$x + t = \rho_3$$

si giunge alla equazione:

$$\overline{\Box} w = 4\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} - (1 + \rho_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2}.$$

XI. Dalle equazioni

$$\frac{x^2 + y^2 - t^2}{2(x+t)^2} = \rho_1, \qquad (x+t)e^{\frac{cy}{x+t}} = \rho_2$$

posto

$$x + t = \rho_3$$

si deduce:

$$x - t = 2\rho_1\rho_3 - \frac{\rho_3}{c^2}\log^2\frac{\rho_2}{\rho_3}, \quad y = \frac{\rho_3}{c}\log\frac{\rho_2}{\rho_3},$$

e quindi:

$$ds^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\rho_3^2}{\rho_2^2}\,d\rho_2^2 + \left(2\rho_1 + \frac{1}{c^2}\right)d\rho_3^2 + 2\rho_3 d\rho_1 d\rho_3 - \frac{2}{c^2}\frac{\rho_3}{\rho_2}\,d\rho_2 d\rho_3.$$

Come al solito si arriva allora all'equazione:

$$\overline{\Box} w \equiv 2\rho_1\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} - c^2\rho_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + 2\rho_2\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial w}{\partial \rho_1} - c^2\rho_2\frac{\partial w}{\partial \rho_2} = 0.$$

Avendo nel caso particolare in cui $c = 0$ preso come linee coordinate:

$$x + t = \rho_1, \qquad x^2 + y^2 - t^2 = \rho_2^2$$

se si pone inoltre $y = \rho_3$ si trova:

$$ds^2 = \frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2}\, d\rho_1^2 + d\rho_3^2 + 2\frac{\rho_2}{\rho_1}\, d\rho_1 d\rho_2 - 2\frac{\rho_3}{\rho_1}\, d\rho_1 d\rho_3$$

e si arriva all'equazione:

$$\overline{\square} w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + 2\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + 2\frac{\partial w}{\partial \rho_2} = 0 .$$

Integrata una prima volta rispetto a ρ_2 si ha:

$$2\rho_1 \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + \frac{\partial w}{\partial \rho_2} + 2w - \varphi(\rho_1) = 0 ,$$

e da questa immediatamente:

$$F\left(\log\sqrt{\rho_1} - \rho_2, \qquad w\rho_1 - \frac{1}{2}\int \varphi(\rho_1)\, d\rho_1\right) = 0.$$

A questo integrale generale della $\overline{\square} w = 0$ possiamo anche dare la forma più semplice:

$$w = F_1(\rho_1) + \frac{1}{\rho_1} F_2(\log\sqrt{\rho_1} - \rho_2),$$

con F_1 ed F_2 indicando simboli di funzioni arbitrarie.

XII. Considerando con le due equazioni

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2 , \quad t + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \rho_2$$

la terza

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \rho_3 ,$$

si trova:

$$x = \rho_1 \cos \rho_3 , \qquad y = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_3 , \qquad t = \rho_2 - \rho_3 .$$

Esse scendono dalle formule del Levi-Civita relative al caso dei potenziali elicoidali, quando si ponga in esse $z = it$, $m = i$ e si cambi ρ_2 in $i\rho_2$. Fatto questo cambiamento anche nella corrispondente equazione (v. nº III di questo paragrafo), si ha pel nostro caso:

$$\overline{\square} w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} + \left(\frac{1}{\rho_1^2} - 1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial w}{\partial \rho_1} = 0 .$$

XIII. Se aggiungiamo alle equazioni del paragrafo precedente, o alle equivalenti

$$(x^2 + y^2 - t^2)\left(\frac{x + iy}{x - iy}\right)^{ic} = -\rho_1^2, \quad \frac{x^2 + y^2}{t^2} = -\operatorname{tg}^2 i\rho_2$$

la equazione

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \rho_3$$

otteniamo:

$$x = i\rho_1 \operatorname{sen} i\rho_2\, e^{c\varrho_3} \cos \rho_3 , \quad y = i\rho_1 \operatorname{sen} i\rho_2\, e^{c\varrho_3} \operatorname{sen} \rho_3 , \quad t = \rho_1 \cos i\rho_2\, e^{c\varrho_3},$$

formule, che, come era chiaro *a priori*, si potevano ottenere da quelle corrispondenti al caso dei potenziali spirali mutando z in it e conseguentemente ρ_1 o ρ_2 rispettivamonte in $i\rho_1$ e $i\rho_2$.

Dalla equazione $\theta_5^{(m)} = 0$ (v. n° V) otteniamo allora:

$$\square w \equiv \left(1 + \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\rho_2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{\rho_1}\left(2 + \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 i\rho_2}\right)\frac{\partial w}{\partial \rho_1} - \frac{1}{\rho_1^2}\, i \operatorname{cotg} i\rho_2 \frac{\partial w}{\partial \rho_2} = 0.$$

§ 4. — *Caso corrispondente ai potenziali isotrópi.*

Come ha dimostrato il Prof. Levi-Civita non solo le traiettorie di un gruppo G_7 di similitudini dello spazio ordinario sono linee equipotenziali, ma anche le congruenze rettilinee ed isotrópe godono della stessa proprietà (*).

Come risulta dalla sua memoria i potenziali corrispondenti si possono anche definire come soluzioni simultanee delle equazioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

per modo, che se si considera il sistema (che da esse si deduce osservando, che u deve essere essenzialmente complesso):

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} = 0, \\ &\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right)^2, \\ &\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z}\frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

e si indicano con

$$(2)\qquad \rho_1(x, y, z) = \text{cost}, \qquad \rho_2(x, y, z) = \text{cost}$$

due suoi integrali, ogni congruenza rettilinea ed isotrópa, e quindi equipotenziale, risulta da essi definita indipendentemente dalle condizioni di realità, e la equazione dei potenziali è:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho_2^2} = 0.$$

Passando allora nel campo immaginario x, y, t ($t = -iz$) potremo scegliere come linee coordinate, rispetto alle quali avviene il fenomeno delle vibrazioni stazionarie, le linee:

$$(3)\qquad \rho_1(x, y, it) = \text{cost}, \qquad \rho_2(x, y, it) = \text{cost},$$

con la condizione che ρ_1 e ρ_2 risultino reali.

(*) Loc. cit., pag. 138.

Le (3) dovranno dunque essere integrali delle equazioni, che si deducono dalle (1) ponendo *it* in luogo di z, cioè delle

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial t}\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0\,,$$

che si compendiano, posto $v = \rho_1 + i\rho_2$, nelle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = 0\,,$$

il che ci permette di concludere che l'equazione delle vibrazioni in questo caso sarà:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2_2} = 0\,.$$

Possiamo di più dare effettivamente le equazioni di trasformazione fra le coordinate x, y e le ρ_1, ρ_2 perchè basta ricorrere alle formule:

$$x = -iz\,\frac{\operatorname{sen}\rho_1 + \operatorname{sen}\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\varphi(\rho_2)\operatorname{sen}\rho_1 - \psi(\rho_1)\operatorname{sen}\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)}\,,$$

$$y = iz\,\frac{\cos\rho_1 + \cos\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\varphi(\rho_2)\cos\rho_1 - \psi(\rho_1)\cos\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)}\,,$$

date dal Ribaucour (*) per gli integrali di una congruenza rettilinea e isotrópa e porre in esse $z = it$.

Le funzioni ρ_1, ρ_2 definite dalle formule, che ne risultano:

$$x = t\,\frac{\operatorname{sen}\rho_1 + \operatorname{sen}\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\varphi(\rho_2)\operatorname{sen}\rho_1 - \psi(\rho_1)\operatorname{sen}\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)}\,,$$

$$y = -t\,\frac{\cos\rho_1 + \cos\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\varphi(\rho_2)\cos\rho_1 - \psi(\rho_1)\cos\rho_2}{\operatorname{sen}(\rho_1 - \rho_2)}\,,$$

sono reali, come appunto richiedevasi.

(*) Op. cit. (v. prefazione).

§ 5.

Caso corrispondente alle linee equipotenziali di lunghezza nulla nello spazio ordinario.

1. — Il Prof. Levi-Civita nella sua memoria escluse, perchè non reali, le congruenze di linee di lunghezza nulla, quelle linee cioè, che sono definite da una equazione.

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{1}$$

per cui vale la relazione:

$$X^2+Y^2+Z^2=0.$$

Ora è quasi superfluo osservare, che linee immaginarie nello spazio $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ possono essere reali nello spazio $ds^2=dx^2+dy^2-dt^2$, e che quindi non possiamo esimerci dal ricercare, se il caso escluso dal Levi-Civita possa dar luogo a un nuovo tipo di vibrazioni elastiche di una membrana che dipendono da due soli parametri.

È quello che ora ci proponiamo di vedere.

Nel campo x, y, t, scritta la (1):

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{1'}$$

potremo asserire, che fra i coefficienti di questa passerà la relazione:

$$X^2+Y^2=T^2 \ (^*). \tag{2}$$

Dovrà inoltre essere $T\neq 0$ se non si vuole che sieno nulli tanto X che Y, per cui potremo porre in virtù della (2):

$$\frac{X}{T}=\cos\alpha \qquad \frac{Y}{T}=\operatorname{sen}\alpha$$

e scrivere la (1′) sotto la forma:

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{3}$$

Ora se si vuole, che la funzione w definita dall'equazione:

$$\Box w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{4}$$

(*) Basta perciò osservare, che gli incrementi assunti dalle variabili per effetto di una trasformazione infinitesima, sono proporzionali, ai coefficienti della trasformazione stessa, e quindi essendo $\epsilon T=\delta t=-i\delta z=-\epsilon i Z$ sarà $Z=iT$.

sia costante lungo le linee della congruenza (3), bisognerà che il sistema formato dalle equazioni (3) e (4) sia completo (*).

Introdotte le variabili ξ, η mediante le posizioni:

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = x - iy,$$

dalle quali scendono le:

$$\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} = e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta},$$

dovremo determinare la forma della funzione α in modo, che risulti completo il sistema:

$$Xw \equiv e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

$$\overline{\Box w} \equiv 4 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

cioè che si abbia:

$$(\Box X - X\Box)w \equiv \lambda \frac{\partial Xw}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial Xw}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial Xw}{\partial t} + \pi \Box w + \chi Xw, \tag{5}$$

$\lambda, \mu, \nu, \pi, \chi$ essendo funzioni opportune di ξ, η, t.

Ora avendosi:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 2i \frac{\partial \alpha}{\partial t}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 \left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) +$$
$$+ i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + (3),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) = i \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) + i \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right) -$$
$$- \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta}\left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{4}(3)',$$

ed osservando che l'espressione $X(\Box w)$ non contiene che termini del terzo ordine, che nella differenza $(\Box X - X\Box)w$ si elidono con quelli, che nelle precedenti uguaglianze abbiamo per brevità indicato coi simboli (3) e $(3)'$ potremo scrivere:

$$(\Box X - X\Box)w = 4ie^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 4ie^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} +$$
$$+ 4i\left(e^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - 2ie^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} + 2ie^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial t} +$$
$$+ e^{i\alpha}\left(-4 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + 4i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 - i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} +$$
$$+ e^{-i\alpha}\left(-4 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - 4i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^2 + i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right) \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

(*) Cfr. Levi Civita, loc. cit., pag. 12.

Inoltre essendo:

$$\frac{\partial Xw}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} + \left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) + i \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial Xw}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial t} + \left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + i \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial Xw}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \left(e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} + e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial t} \right) + i \frac{\partial \alpha}{\partial t} \left(e^{i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

dedurremo:

$$\lambda \frac{\partial Xw}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial Xw}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial Xw}{\partial t} + \pi \square w + \chi Xw = \lambda e^{i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu e^{-i\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} +$$

$$+ (\lambda e^{-i\alpha} + \mu e^{i\alpha} + 4\nu + 4\pi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + (\lambda + \nu e^{i\alpha}) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial t} + (\mu + \nu e^{-i\alpha}) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial t} +$$

$$+ i e^{i\alpha} \left(\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial t} - i\chi \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} - i e^{-i\alpha} \left(\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial t} + i\chi \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \pi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Perchè valga la (5) dovrà prima di tutto essere $\pi = \chi = 0$, perchè la parentesi di Poisson $(\square X - X \square) w$ non contiene nè $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, nè $\frac{\partial w}{\partial t}$, e inoltre fra le funzioni $\lambda, \mu, \nu, \alpha$ dovranno passare le seguenti relazioni:

$$(6) \begin{cases} \text{I.} & \lambda = 4i \dfrac{\partial \alpha}{\partial \eta}, \\ \text{II.} & \mu = -4i \dfrac{\partial \alpha}{\partial \xi}, \\ \text{III.} & \lambda e^{-i\alpha} + \mu e^{i\alpha} + 4\nu = 4i \left(e^{i\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right), \\ \text{IV.} & \lambda + \nu e^{i\alpha} = -2i e^{i\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \text{V.} & \mu + \nu e^{-i\alpha} = 2i e^{-i\alpha} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}. \end{cases}$$

$$\text{VI.} \quad -4 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + 4i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 - i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = i \left(\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right).$$

Poichè la III, tenuto conto delle I, II, IV, V, risulta identicamente soddisfatta, potremo dalle (6) con la eliminazione di λ, μ, ν, ottenere due relazioni, cui dovrà soddisfare α.

Dal confronto delle IV e V, dopo l'eliminazione di λ e μ a mezzo delle I e II, otteniamo la prima di queste relazioni:

$$(7) \qquad e^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + e^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0.$$

Per ottenere la seconda, si eliminino dalla VI λ, μ, ν; si avrà così:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 - 4 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + i \left(4 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right) = -2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} \left(e^{i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - e^{-i\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right).$$

Questa però, poichè il secondo membro è puramente immaginario (come si vede osservando, che cambia di segno col mutare di i in $-i$ e ξ in η) si scinderà nelle due equazioni:

$$
(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 - 4\,\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = 0\,,\\
&4\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = 2i\,\frac{\partial\alpha}{\partial t}\left(e^{i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - e^{-i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Scritta la prima di queste sotto la forma:

$$
\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 = \left(e^{i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} + e^{-i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right)^2 - \left(e^{i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - e^{-i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right)^2
$$

ed eliminata la $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ mediante la (7) abbiamo:

$$
(9)\qquad e^{i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} - e^{-i\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = 0\,,
$$

in virtù della quale la seconda delle (8) diventerà:

$$
(10)\qquad 4\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = 0
$$

e quindi il sistema (7), (8) equivarrà a quello formato dalle equazioni (7), (9), (10).

Se si osserva però, che la (10) è una conseguenza delle (7) e (9) (*) e che il sistema formato da quest'ultime è completo (**), si vede, che basterà integrare questo sistema per ottenere la funzione incognita α.

A tal uopo osserviamo, che, se la funzione α, determinata dalle (7) e (9), risulta definita da una equazione implicita:

$$
f(\xi, \eta, t, \alpha) = 0\,,
$$

si avranno le relazioni:

$$
\frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\,,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial\eta} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\,,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}\,,
$$

e quindi la f riguardata come funzione delle 4 variabili ξ, η, t, α dovrà soddisfare al sistema:

$$
e^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial\xi} + e^{-i\alpha}\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,,
$$

$$
e^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial\xi} - e^{-i\alpha}\frac{\partial f}{\partial\eta} = 0\,,
$$

che equivale al sistema Jacobiano:

$$
(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\,e^{-i\alpha}\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,,\\
&\frac{\partial f}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\,e^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial t} = 0\,.
\end{aligned}\right.
$$

(*) Basta, per vederlo, derivare successivamente la (7) rispetto ξ, η, t; dalla somma delle due prime equazioni così ottenute togliere la terza e sommare membro a membro l'equazione risultante col quadrato della (9).

(**) Perchè il sistema equivalente, che si deduce risolvendo le due equazioni rispetto $\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}$, è Jacobiano.

Un sistema di integrali indipendenti della prima equazione è, ove si indichino con u_1, u_2, u_3 delle costanti arbitrarie:

$$\alpha = u_1, \quad \eta = u_2, \quad \xi e^{-i\alpha} - 2t = u_3. \tag{12}$$

Ora, poichè il sistema integrale delle (11) deve dipendere soltanto da u_1, u_2, u_3, dovremo supporre nella seconda equazione f funzione di queste variabili, per cui essa si scriverà:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial \eta} + \frac{1}{2}e^{i\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) = 0,$$

ossia:

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} - e^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$$

che ammette come integrali:

$$u_1 = \text{cost}, \qquad u_3 + u_2 e^{i\alpha} = \text{cost},$$

ossia per le (12):

$$\alpha = \text{cost} \qquad -2t + \xi e^{-i\alpha} + \eta e^{i\alpha} = \text{cost}.$$

L'integrale generale del sistema (11) sarà dunque:

$$F(\alpha, \; -2t + \xi e^{-i\alpha} + \eta e^{i\alpha}) = 0$$

con F designando una funzione arbitraria.

Questa equazione, introdotte le variabili x, y ed indicando con φ una nuova funzione arbitraria, potrà scriversi:

$$x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha - t - \varphi(\alpha) = 0. \tag{13}$$

Concludendo possiamo dire, che quando si sia determinata una funzione α delle variabili x, y, t, che soddisfi a questa equazione, due integrali indipendenti $\rho_1 = \text{cost}$, $\rho_2 = \text{cost}$ dell'equazione (3), o dell'equivalente in variabili ξ, η:

$$e^{i\alpha}\frac{\partial f}{\partial \xi} + e^{-i\alpha}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ci rappresenteranno le linee coordinate, dai cui parametri dipendono le vibrazioni della lamina. Ora è facile convincersi, che:

$$\alpha = \text{cost}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \text{cost}$$

sono due integrali richiesti.

Per il primo la cosa è immediata, perchè basta tener presente la (7): per il secondo basta derivare questa stessa relazione rispetto a t e usufruire della (9): si ottiene allora identicamente:

$$e^{i\alpha}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) + e^{-i\alpha}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = 0.$$

Poichè d'altronde α verifica la (13) e $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ l'equazione, che si trae dalla (13) derivando rispetto a t, cioè la

$$-x\operatorname{sen}\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\eta\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial t}-1-\varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial t}=0,$$

così i due sistemi di curve $\rho_1=\text{cost}$, $\rho_2=\text{cost}$ saranno caratterizzati dalle due equazioni:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\cos\rho_1+y\operatorname{sen}\rho_1-\varphi(\rho_1)-t=0,\\ &x\operatorname{sen}\rho_1-y\cos\rho_1+\varphi'(\rho_1)+\rho_2=0.\end{aligned}\right.$$

2. — È facile formarsi un'idea dell'andamento delle curve dei due sistemi.

Le linee $\rho_1=\text{cost}$ sono rette, che al variare di t si spostano parallelamente a se stesse e che per uno stesso valore di t inviluppano una curva $\lambda^{(t)}$, le cui equazioni in forma parametrica sono:

$$\begin{aligned} x\cos\rho_1+y\operatorname{sen}\rho_1-\varphi(\rho_1)-t&=0,\\ -x\operatorname{sen}\rho_1+y\cos\rho_1-\varphi'(\rho_1)\qquad&=0,\end{aligned}$$

ovvero:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=[\varphi(\rho_1)+t]\cos\rho_1-\varphi'(\rho_1)\operatorname{sen}\rho_1,\\ y&=[\varphi(\rho_1)+t]\operatorname{sen}\rho_1+\varphi'(\rho_1)\cos\rho_1.\end{aligned}\right.$$

Al variare di t si hanno evidentemente curve parallele fra loro, i cui punti corrispondenti (situati sulla stessa normale) distano di un segmento uguale all'incremento di t.

Il secondo sistema di curve $\rho_2=\text{cost}$ ha quale rappresentazione parametrica le equazioni (14) equivalenti alle:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=[\varphi(\rho_1)+t]\cos\rho_1-[\varphi'(\rho_1)+\rho_2]\operatorname{sen}\rho_1,\\ y&=[\varphi(\rho_1)+t]\operatorname{sen}\rho_1+[\varphi'(\rho_1)+\rho_2]\cos\rho_1,\end{aligned}\right.$$

od anche, indicando con x_0, y_0 le coordinate dell'inviluppo (15):

$$\begin{aligned} x&=x_0-\rho_2\operatorname{sen}\rho_1,\\ y&=y_0+\rho_2\cos\rho_1,\end{aligned}$$

le quali ci mostrano, che ogni curva del secondo sistema corrispondente ad un dato valore di t si ottiene dalla curva $\lambda^{(t)}$ portando sulle tangenti di questa a partire dal loro punto di contatto e in una determinata direzione uno stesso segmento ρ_2.

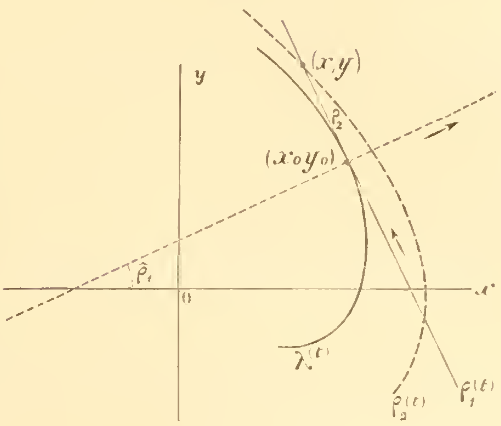
È ovvio allora, come da una curva $\rho_2^{(t)}$ corrispondente a un istante t, si ottenga la curva $\rho_2^{(t')}$ corrispondente a un istante successivo t'. Per i punti di $\rho_2^{(t)}$ basterà tirare delle rette normali alle rette $\rho_1^{(t)}$ passanti per essi, e portare sulle loro direzioni positive a partire dai punti di $\rho_2^{(t)}$ dei segmenti uguali all'incremento $t'-t$ del tempo; il luogo di questi punti è la curva $\rho_2^{(t')}$.

Se p. es. la funzione φ riducesi ad una costante k, le rette $\rho_1 = \text{cost}$ aventi per equazione:

$$x \cos \rho_1 + y \operatorname{sen} \rho_1 - (t+k) = 0$$

inviluppano i cerchi di raggio $t+k$:

$$x = (t+k)\cos\rho_1, \qquad y = (t+k)\operatorname{sen}\rho_1$$



e quindi le curve $\rho_2 = \text{cost}$ saranno i cerchi:

$$x = (t+k)\cos\rho_1 - \rho_2 \operatorname{sen}\rho_1, \qquad y = (t+k)\operatorname{sen}\rho_1 + \rho_2\cos\rho_1$$

di raggio $\sqrt{\rho_2^2 + (t+k)^2}$.

3. — Si tratta ora di vedere qual forma assuma l' equazione delle vibrazioni invariabili ρ_1, ρ_2.

Se assumiamo la t come terza variabile ρ_3 avremo dalle (16):

$$x + iy = [\varphi(\rho_1) + \rho_3]e^{i\rho_1} + i[\varphi'(\rho_1) + \rho_2]e^{i\rho_1}$$
$$x - iy = [\varphi(\rho_1) + \rho_3]e^{-i\rho_1} - i[\varphi'(\rho_1) + \rho_2]e^{-i\rho_1}$$

e quindi successivamente:

$$ds^2 = d(x+iy)\,d(x-iy) - dt^2 = \{[\rho_3 + \varphi(\rho_1) + \varphi''(\rho_1)]^2 + \rho_2^2\}\, d\rho_1^2 + d\rho_2^2 +$$
$$+ 2[\rho_3 + \varphi(\rho_1) + \varphi''(\rho_1)]\,d\rho_1 d\rho_2 - 2\rho_2\, d\rho_1 d\rho_2 .$$

$$a = \begin{vmatrix} [\rho_3+\varphi(\rho_1)+\varphi''(\rho_1)]^2+\rho_2^2 & \rho_3+\varphi(\rho_1)+\varphi''(\rho_1) & -\rho_2 \\ \rho_3+\varphi(\rho_1)+\varphi''(\rho_1) & 1 & 0 \\ -\rho_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\rho_2^2 .$$

$$a^{(11)} = 0, \qquad a^{(22)} = 1, \qquad a^{(33)} = -1,$$

$$a^{(12)} = 0, \qquad a^{(13)} = -\frac{1}{\rho_2}, \qquad a^{(23)} = \frac{\rho_3 + \varphi(\rho_1) + \varphi''(\rho_1)}{\rho_2} .$$

Applicando la formula di Beltrami avremo:

$$\square w \equiv \frac{1}{i\rho_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left[i\rho_2 \left(-\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial \rho_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left[i\rho_2 \left(\frac{\partial w}{\partial \rho_2} + \frac{\rho_3 + \varphi(\rho_1) + \varphi''(\rho_1)}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial \rho_3} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left[i\rho_2 \left(-\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial \rho_1} + \frac{\rho_3 + \varphi(\rho_1) + \varphi''(\rho_1)}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial \rho_2} - \frac{\partial w}{\partial \rho_3} \right) \right] \right\}$$

e quindi l'equazione voluta sarà:

$$\square \bar{w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2_2} + \frac{2}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial \rho_2} = 0 \,,$$

il cui integrale generale è:

$$w = \psi(\rho_1) - \frac{1}{\rho_2} \chi(\rho_1)$$

ψ e χ essendo simboli di funzioni arbitrarie.

Gennaio 1903.

RICERCHE

INTORNO ALLA

TALPA ROMANA Orfield Thomas

E AD

ALTRE FORME DI TALPE EUROPEE

MEMORIA

del Socio

Prof. LORENZO CAMERANO

Approvata nell'Adunanza del 14 Giugno 1903.

Il Dott. Orfield Thomas pubblicò in sulla fine del 1902 (1) in una breve descrizione la diagnosi di una nuova specie di Talpa dei contorni di Roma col nome di *Talpa romana*, ritenendola distinta dalla *Talpa europaea* Linn. e dalla *Talpa caeca* Savi, per caratteri desunti principalmente dalle proporzioni dei molari superiori ed inferiori e dalle arcate zigomatiche.

La diagnosi del Thomas è fondata sopra due pelli provviste del loro cranio, una appartenente ad un individuo di Ostia e l'altra ad un individuo di Frascati, i quali furono raccolti dal Dott. L. Sambon durante i suoi studi sulla malaria. Di questi individui non è indicato il sesso, e neppure il Thomas potè accertare se in essi l'occhio fosse chiuso o aperto, trattandosi di pelli conservate a secco.

Con questo lavoro il Thomas ha opportunamente richiamato l'attenzione degli osservatori sopra i caratteri che si possono trarre dall'esame dei molari, per ciò che riguarda le loro proporzioni, per la distinzione delle specie di Talpe europee.

In un mio precedente lavoro, oggimai antico (2), io mi sono occupato della questione relativa alla possibilità di separare specificamente la *Talpa europaea* Linn. dalla *Talpa caeca* Savi, prendendo in esame nel modo più diligente che mi venne fatto i caratteri differenziali dati sino ad allora dai varî autori, vale a dire: il muso, gli occhi, i denti, sopratutto gli incisivi, i premolari ed i canini, le zampe, la coda nelle loro proporzioni rispettive ed anche le aree di inserzione muscolari nel vertice del

---

(1) *On the Mole of the Roman District*, " Ann. and Mag. of Natur. Hist. „ Ser. 7. vol. X, pagg. 516 e 517.

(2) *Ricerche intorno alle specie italiane del genere Talpa Linn.*. " Mem. R. Acc. Scienze di Torino „. Serie II, Vol. XXXVII, 1885.

Invece di Orfield *si legga sempre* Oldfield.

cranio indicate dal Lataste. Io giunsi allora alla conclusione che fra la *Talpa europaea* Linn. e la *Talpa caeca* Savi, per quanto risultava dal materiale a mia disposizione, non si poteva trovare un complesso di caratteri costanti che rendesse possibile una diagnosi differenziale sicura.

Del contorno di Roma io ebbi allora un solo esemplare ad occhi chiusi, il quale pei *caratteri sopra menzionati* non si presentava gran fatto distinto dagli altri.

Intorno alle talpe del contorno di Roma si avevano pure allora soltanto i dati forniti dal Bonaparte (1) colle parole seguenti:

" Oltre la diversa conformazione degli occhi (egli dice), appena potremmo asse-
" gnare altro carattere per distinguere le nostre due Talpe, se non fosse quello dei
" due denti incisivi anteriori della mascella superiore, che nella *Talpa caeca* sono un
" poco più grandi dei rimanenti, mentre nella *Talpa europaea* sono tutti d'ugual
" grandezza. Alcuni autori hanno preteso che nella prima fosse più schiacciata la
" punta del muso, altri hanno aggiunto ch'essa ha i piedi più bianchi e meno pelosi
" di quelli dell'*europaea*, che il suo pelame è più nero; ma queste differenze noi non
" le abbiamo trovate costanti. Il Prof. Savi ha creduto che ci fosse diversità nella
" statura, ed ha scritto che la *Talpa caeca* è più piccola di quella ad occhi aperti.
" Forse la stazione montana contribuisce a mantenere in questi animali proporzioni
" più ristrette, ed il Savi ha cura di dirci che tutti i suoi esemplari di Talpe veni-
" vano dall'Apennino. Fra noi però la *Talpa caeca* vive anche nelle pianure, anzi
" abbonda nelle campagne di Roma, e siamo certi che essa giunge ad uguagliare e
" a superare persino la grossezza di quella illuminata di Lombardia. — Lungh. totale
" poll. 6 e lin. 2 ".

Io ho pensato, dopo la pubblicazione del Thomas, che fosse cosa di qualche interesse il riprendere lo studio della questione relativa al differenziamento in specie delle Talpe italiane con nuovo materiale e tenendo conto dei nuovi caratteri differenziali indicati dall'Autore sopra menzionato.

A questo proposito si presentano al nostro esame le principali domande seguenti:

1° La talpa della regione romana (*Talpa romana* Orfield Thomas) è realmente specie distinta dalla *Talpa caeca* Savi, colla quale il Bonaparte la riuniva?

2° La *Talpa romana* Orfield Thomas è specie distinta dalla *Talpa europaea* Linn. delle altre località italiane e delle altre località europee?

3° La *Talpa caeca* Savi è specie distinta dalle altre talpe cieche che si trovano in varie località italiane o in varie altre località europee?

4° La *Talpa caeca* Savi è specie realmente distinta dalla *Talpa europaea* Linn.?

5° La *Talpa europaea* Linn. delle località italiane è forma distinta dalla *Talpa europaea* Linn. delle altre regioni d'Europa?

A rispondere, almeno in parte, a queste questioni tendono le ricerche che seguono.

Il materiale sul quale vennero compiute le mie ricerche proviene dalle località seguenti: Contorni di Torino, Saluzzo, Rivarossa, Rivoli, Ceresole d'Alba, Moncalieri, Biella, Cumiana, Monte Soglio, Lanzo, Andonno, Andrate, Domodossola, Cadore, Buttrio,

---

(1) *Iconografia della Fauna italica - Mammiferi.*

Urbino, Contorno di Firenze, Contorno di Roma, Maccarese, Ostia, Marino, Catanzaro, Modica, Francia meridionale, Amburgo, Praga, Bucarest, Dobrudja. Si devono aggiungere due esemplari (tipi) di *Talpa caeca* Savi conservati in alcool e inviati al Museo di Torino dal Savi stesso. Conservati in alcool ed a secco sono oltre a 250 individui che io ho avuto occasione di studiare.

Ho applicato a questo studio il metodo del *coefficiente somatico* (1).

Discussione dei caratteri.

Per evitare qualunque pericolo di suggestione nell'apprezzamento dei caratteri differenziali fra le varie forme di Talpe in discussione ho proceduto anzitutto all'esame dei caratteri stessi nelle varie serie di individui secondo le località di provenienza e senza alcuna preoccupazione di distinzioni specifiche.

Colorazione. — Non ho osservato caratteri differenziali di colorazione apprezzabili nelle serie di individui delle varie località studiate.

I caratteri forniti dalle dimensioni delle varie parti degli animali sono i seguenti:

Statura. — La statura è misurata in millimetri dall'apice del muso all'apice della coda. Ho ottenuto le serie seguenti (2):

α) Valle del Po: ♂ - 165-168-169-170_2-173-174-(**176,50**)-178-179-180_5-183-184_2-185_2-187-188_3.

β) Regione Romana: ♂ - 176-178-180_2-183-184_2-185_7-186-187-188-190_5-191-(**191,50**)-192-193_2-195_5-197_2-198-200_3-202_2-205_2-207.

γ) Valle del Po: ♀ - 150-155_2-156-158_5-160_2-(**163**)-164-165_5-167-168-170_2-172_2-173-174-176.

δ) Regione Romana: ♀ - 164-170_2-174-175-177-178-180_5-**182**-184_3-185_3-187-188_4-190-191-192-193-195-198-200.

ε) Amburgo: ♂ - 162-173-174-**177**-178_2-180_3-183-185_2-188-190_2-191-192.

θ) „ ♀ - 160-(**165**)-168-170_3.

σ) Praga: ♂ - 166_2-167_2-**168**-169-170.

μ) „ ♀ - 158-160.

ρ) Contorni di Firenze: ♂ - 176-178-183-**185**-188-194.

ω) „ ♀ - 162-163-165_2-(**166**)-170.

χ) Bucarest: ♂ - 160.

ψ) „ ♀ - 147-158.

---

(1) L. Camerano, *Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico,* " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino „, Vol. XXXV, 1890. — *La lunghezza base nel metodo somatometrico in Zoologia,* " Boll. Musei di Zool. e Anat. Comp. di Torino „, Vol. XVI, n. 394, 1901. — *Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, ecc.*, ibidem, vol. XVI, n. 405, 1901. — *Ricerche somatometriche in Zoologia.* " Boll. dei Musei di Zool. e Anat. Comp. di Torino „, Vol. XVII, n. 431, 1902.

(2) Il numero stampato in carattere più grosso e nero è quello della *classe media.* Se esso è collocato fra parentesi vuol dire che nella serie studiata non è stato verificato. — I numeri più piccoli, collocati in basso a destra di ciascuna classe, indicano la frequenza della classe nella serie. — Queste osservazioni valgono anche per tutti gli specchietti di misure seguenti.

Per lo studio delle dimensioni delle varie parti dell'animale secondo il metodo del coefficiente somatico ho scelto come *lunghezza base* la lunghezza massima del cranio, poichè, data la conformazione esterna della Talpa, il suo fitto pelo, la sua pelle spessa, la lunghezza massima del capo non si può esternamente misurare con sufficiente esattezza da poter essere assunta come lunghezza base. La stessa cosa si può dire, data la forma speciale del bacino ed i suoi rapporti coi visceri addominali, della lunghezza dalla bocca all'apertura anale. Neppure ho creduto conveniente di assumere come lunghezza base la lunghezza totale dell'animale, poichè in essa verrebbero incluse parti molto variabili come il muso e la coda ed inoltre perchè tale misura non potrebbe su materiale conservato in alcool determinarsi con sufficiente esattezza.

Le misure che seguono sono espresse, salvo annotazione in contrario, in 360$^{\text{esim}}$i somatici.

Lunghezza del muso dagli incisivi anteriori all'apice.

α) Valle del Po: ♂ - 63-68_2-70-72_2-73-74-76-(**76,50**)-77_2-78_3-80_2-81-85-88-90_4.
β) Regione Romana: ♂ - 69-71-72-74_3-76_7-78_5-(**80,50**)-81_3-83_{10}-84-85_3-88_3-90_2-92_2.
γ) Valle del Po: ♀ - 64-65-67-72_6-74_4-75-**77_3**-79-80_3-82-85-90.
δ) Regione Romana: ♀ - 66-68_5-73_4-76_2-78_5-80_3-81-(**81,50**)-83-85_4-88_2-95-97_2.
ε) Amburgo: ♂ - 60-68_2-74-(**76**)-78_3-80_5-82-83-85_3-87-88-92.
θ) „ ♀ - 74_2-(**79,50**)-85_3.
μ) Praga: ♀ - 65-(**68,50**)-72.
σ) „ ♂ - 65-68-73-(**76**)-78_2-79-87.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 74-80-85_2-(**85,50**)-88-97.
ω) „ ♀ - 70-72_2-75-(**76**)-82.
χ) Bucarest: ♂ - 62.
ψ) „ ♀ - 67-72.

Larghezza massima del muso.

α) Valle del Po: ♂ 78-81-85-88_2-93-95-97_3-(**99**)-100-106-107-110_3-113_3-115-117-120_2.
β) Regione Romana: ♂ - 90-92_5-95_5-97-99_2-102_6-104_4-107_2-(**108**)-109-111_4-114_3-115-117_3-118_2-120-126.
γ) Valle del Po: ♀ - 82_2-85-90_2-93_2-95-(**97,50**)-98-100_3-101_2-103_4-106_3-110-113_3.
δ) Regione Romana: ♀ - 84-85_5-90-92_3-95_2-97_6-99-100_2-(**100,50**)-102_2-104_2-107_3-109-110-117.
ε) Amburgo: ♂ - 90-95-97-100_5-103-(**103.50**)-105_2-106-107_2-113-117_5.
θ) „ ♀ - 85-95_2-(**95,50**)-106_2.
μ) Praga: ♀ - 70-(**76**)-82.
σ) „ ♂ - 83-88-**90_2**-93-95-97.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 100-104-105-(**105,50**)-107_2-111.
ω) „ ♀ - 98-100-103_2-(**104**)-110.
χ) Bucarest: ♂ - 103.
ψ) „ ♀ - 82-93.

Larghezza del disco proboscideo.

α) Valle del Po: ♂ - 49-50-51-52-54_3-55-**57**$_3$-58_4-60_4-62_2-65.
β) Regione Romana: ♂ - 46_3-47_6-49_2-51_4-52_5-54_4-55_6-(**56**)-57_4-58_4-60_2-65-66.
γ) Valle del Po: ♀ - 50_2-51_2-53_2-55-57_7-58_3-(**58,50**)-60_2-62-64_3-67.
δ) Regione Romana: ♀ - 44_2-47-49_{14}-50_4-(**52**)-54_3-57_5-58-60.
ϵ) Amburgo: ♂ - 58_2-60_5-64-65_2-**66**-67-68_4-70-71-72-74.
θ) „ ♀ - 53-(**62**)-63_3-71.
σ) Praga: ♂ - 58_3-60_2-(**61**)-62-64.
μ) „ ♀ - 60-(**64,50**)-69.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 60-**65**$_2$-66-68_2-70.
ω) „ ♀ - 55_2-57-(**58,50**)-62_2.
χ) Bucarest: ♂ - 51.
ψ) „ ♀ - 57-62.

Distanza dell'occhio dall'apice del muso.

α) Valle del Po: ♂ - 180-185_3-190_2-195_2-(**197,50**)-199_2-200_3-204_2-206_2-207-208_2-210-211-215.
β) Regione Romana: ♂ - 175-185_3-189_4-190-194-195_2-(**196,50**)-198-199-203_8-204_2-208_{10}-212_4-214-216-218_2.
γ) Valle del Po: ♀ - 180-185_6-190_2-191-196_6-(**198**)-201-206_2-210-211-212_2-216.
δ) Regione Romana: ♀ - 185_2-195_{10}-200-(**202,50**)-204_6-205-208_5-209-210-213-214-220_2.
ϵ) Amburgo: ♂ - 180_2-185_6-191_2-**195**-200_2-204_4-206-210_2.
θ) „ ♀ - 185-**191**-201.
σ) Praga: ♂ - 175_2-180_2-191-195-(**195,50**)-216.
μ) „ ♀ - 170-(**183**)-196.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 189-190-195_2-(**196**)-200-203.
ω) „ ♀ - 180-185_2-(**193**)-200-206.
χ) Bucarest: ♂ - 175.
ψ) „ ♀ - 170-185.

Larghezza massima del piede anteriore.

α) Valle del Po: ♂ - 161-175_2-180_4-(**180,50**)-185_7-189-190_2-195_3-200_3.
β) Regione Romana: ♂ - 175-180_3-185_6-189_4-(**193,50**)-194_6-195_3-198_2-199_6-203_4-204_3-208-212_3.
γ) Valle del Po: ♀ - 164-169-170-175_4-180_3-(**182,50**)-185_5-190-191_3-196_3-200-201.
δ) Regione Romana: ♀ - 175_5-179-180_2-185_5-189_4-190-195_7-(**197,50**)-199_2-200_2-214-220.
ϵ) Amburgo: ♂ - 175-185-190-191-(**193,50**)-195_4-200_6-204-206_2-209-210-212.
θ) „ ♀ - 180-(**190,50**)-191_3-201.
σ) Praga: ♂ - 185_2-190-(**194,50**)-195-197-201-204.
μ) „ ♀ - 190-**193**-196.

ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 175-**180**$_2$-185_3.
ω) „ ♀ - 170-175-**180**-185-190.
χ) Bucarest: ♂ - 165.
ψ) „ ♀ - 196_2.

Lunghezza massima del piede anteriore (senza le unghie).

α) Valle del Po: ♂ - 131-142-146-149-153-156_3-(**158**)-159-165-170_9-175-180_2-185.
β) Regione Romana: 152_2-156_3-157_2-161_6-162_3-165-166_7-170_4-171_3-(**173,50**)-175_2-180_2-185_4-195_3.
γ) Valle del Po: ♀ - 140-144-148-150_2-154_2-159_4-160-(**162,50**)-165_6-169_3-175-180-185.
δ) Regione Romana: 136-146-151-155-156_9-160-(**160,50**)-161_4-165_5-166-170_3-175_2-185_2.
ε) Amburgo: ♂ - 175_4-180_5-185_7-(**187,50**)-190-191-195-200.
θ) „ ♀ - 164-169-(**177.50**)-180_2-191.
σ) Praga: ♂ - 165_2-170_2-(**173**)-175-180-191.
μ) „ ♀ - 175-(**177,50**)-180.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ 166-170-(**173**)-175_3-180.
ω) „ „ ♀ 154-160_2-(**164,50**)-165-175.
χ) Bucarest: ♂ - 160.
ψ) „ ♀ - 165-175.

Lunghezza massima del piede posteriore (senza le unghie).

α) Valle del Po: ♂ - 151-161-165_3-166-170-(**173**)-175_5-180_7-185-190_2-195.
β) Regione Romana: ♂ - 161_3-162_2-165-166_2-170_7-171_2-175_{13}-180_4-(**182**)-185_5-189-195-203.
γ) Valle del Po: ♀ - 154-165-109-170_5-175_6-(**177**)-180_4-185_3-191_2-200.
δ) Regione Romana: ♀ - 136-146-(**160,50**)-161_3-165_9-170_6-175_4-180_5-185_2.
ε) Amburgo: ♂ - 180_4-185_5-190_5-(**193**)-195_3-196-200-206.
θ) „ ♀ - 180-(**185,50**)-191_4.
σ) Praga: ♂ - 185_2-187-190_2-(**193**)-195-201.
μ) „ ♀ - 185_2.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 170-**175**$_2$-180_3.
ω) „ „ ♀ - 180_3-(**182,50**)-185_2.
χ) Bucarest: ♂ - 175.
ψ) „ ♀ - 190-196.

Larghezza del piede posteriore.

α) Valle del Po: ♂ - 73_3-76_2-77_2-78_3-80_4-(**81,50**)-82_2-83-85_2-88-90_3.
β) Regione Romana: ♂ - 71_2-72-74-76_5-78_5-(**80,50**)-81_5-83_{13}-84-85_3-84_4-90_2.
γ) Valle del Po: ♀ - 67-70-72_3-74_2-75-(**76**)-77_3-79_3-80_2-82_4-85_4.
δ) Regione Romana: ♀ - 68-70_3-73_5-75-76_3-78_7-79-(**82,50**)-83_2-85-88_2-90_3-97_2.
ε) Amburgo: ♂ - 80-83-85_4-88_4-90_2-(**91,50**)-95-97_2-98-100_3-103.
θ) „ ♀ - 85_5.

σ) Praga: ♂ - 82-83-88_2-**(89,50)**-90-95-97.
μ) „ ♀ - 90-**(91,50)**-93.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 92-**(94,50)**-95_3-97_2.
ω) „ „ ♀ - 90_2-**(91,50)**-93_3.
χ) Bucarest: ♂ - 82.
ψ) „ ♀ - 82-103.

Lunghezza della coda.

α) Valle del Po: ♂ - 253-263-272-278-280-284-288-290-**292**-297-300_3-302_3-309_2-313-320-321-330-331.
β) Regione Romana: ♂ - 240-246_2-249-253-256_2-258-263-265_5-268_2-270_5-272_2-273_3-**(281,50)**-282-284-286-292-294-295_3-297-303_2-305_2-313-314-323.
γ) Valle del Po: ♀ - 217_2-247-250-$\mathbf{268_2}$-270-275-278_2-280-286_3-288_3-297_2-300-307-309-310-319_2.
δ) Regione Romana: ♀ - 243-250_2-253_2-256-260-263_6-265_2-**(271,50)**-272_6-280-282_3-284_2-292-294.
ε) Amburgo: ♂ - 244-257_2-260-263-270-**(277,50)**-280_2-282_3-292-300_2-310-311.
θ) „ ♀ - 265_3-275-**(275,50)**-286.
σ) Praga: ♂ - 290-302-311-**(320)**-321-331-349-350.
μ) „ ♀ - 278-**(303)**-330.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 292-310-**(311,50)**-314-320-322-331.
ω) „ „ ♀ - 270_2-278-**(289,50)**-298-309.
χ) Bucarest: ♂ - 278.
ψ) „ ♀ - 278-298.

Lunghezza massima del cranio (misura base) espressa in millimetri.

α) Valle del Po: ♂ - 34_2-35_4-$\mathbf{36_{13}}$-37_7-38_2.
β) Regione Romana: ♂ - 35-$\mathbf{37_{11}}$-38_{10}-39_8.
γ) Valle del Po: ♀ - 33-34_6-35_{11}-**(35,50)**-36_3-38.
δ) Regione Romana: ♀ - 36_5-$\mathbf{37_{15}}$-38_4.
ε) Amburgo: ♂ - 34_2-35_2-**(35,50)**-36_8-37_8.
θ) „ ♀ - 34_5.
σ) Praga: ♂ - 34-35-**(35,50)**-36-37.
μ) „ ♀ - 35-**(35,50)**-36.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 36_2-37_2-**(37,50)**-38-39.
ω) „ „ ♀ - 35_3-**(35,50)**-36_2.
χ) Bucarest: ♂ - 35.
ψ) „ ♀ - 35_2.

Lunghezza massima basale del cranio.

α) Valle del Po: ♂ - 300-302-303$_2$-304-307$_2$-309$_2$-**310**$_{10}$-311$_4$-312-315-318-319-320.
β) Regione Romana: ♂ - 302$_2$-303-305$_5$-307-308-309$_3$-311$_3$-**(312)**-313$_6$-314-316$_2$-321-322.
γ) Valle del Po: ♀ - 300-304$_5$-305-307$_4$-309$_8$-310-**(311,50)**-313-316-323.
δ) Regione Romana: ♀ - 300-302$_4$-303$_2$-307$_2$-310$_3$-**(310,50)**-311$_6$-315-321$_2$.
ε) Amburgo: ♂ - 300-302$_3$-305-307-309-**310**$_3$-311$_4$-312-315-316-319-320$_2$.
θ) „ ♀ - 297-302-307-**(307,50)**-318$_2$.
σ) Praga: ♂ - 310-311$_2$-316$_2$-318-**(319,50)**-329.
μ) „ ♀ - 309-**(309,50)**-310.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 311$_2$-313-314-315-**(315,50)**-320.
ω) „ „ ♀ - 300-309$_2$-**(309,50)**-310-319.
χ) Bucarest: ♂ - 319.
ψ) „ ♀ - 309$_2$.

Larghezza massima del cranio misurata sulle arcate zigomatiche.

α) Valle del Po: ♂ - 113-114$_2$-115$_4$-117-118$_2$-120$_4$-122-**(122,50)**-123-124$_4$-126$_5$-127-130-132.
β) Regione Romana: ♂ - 123-126-128-129$_4$-131-133$_3$-134$_2$-**(135)**-136$_7$-138$_4$-141-142-147.
γ) Valle del Po: ♀ - 106-109-111-113$_3$-114-**(115,50)**-116$_2$-118$_7$-120$_2$-122-123-125.
δ) Regione Romana: ♀ - 125-126$_5$-128$_3$-130$_2$-131$_3$-133-135$_2$-**(135,50)**-136$_5$-146.
ε) Amburgo: ♂ - 110$_2$-112-113-115$_2$-116$_2$-117$_5$-**(117,50)**-118-119-120$_2$-122-123-125.
θ) „ ♀ - 116$_2$-**119**-122$_2$.
σ) Praga: ♂ - 119-120-122-**(124)**-126$_2$-127-129.
μ) „ ♀ - 118-**(119)**-120.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 118-120-122-**(124)**-126-128-130.
ω) „ „ ♀ - 120-**(122,50)**-123$_3$-125.
χ) Bucarest: ♂ - 113.
ψ) „ ♀ - 123$_2$.

Larghezza massima del cranio misurata nella regione mastoidea.

α) Valle del Po: ♂ - 161-165$_4$-166-169-170$_{11}$-**(170,50)**-173$_2$-174-175$_5$-180$_2$.
β) Regione Romana: ♂ - 157-162$_2$-165-166$_6$-170$_4$-**171**-175$_{11}$-180$_2$-185.
γ) Valle del Po: ♀ - 160$_2$-165$_5$-**(167,50)**-169$_5$-170$_7$-175$_2$.
δ) Regione Romana: ♀ - 161$_2$-165$_8$-166$_2$-**(168)**-170$_4$-175$_7$.
ε) Amburgo: ♂ - 165$_7$-169$_2$-**170**$_9$-173-175.
θ) „ ♀ - 169$_2$-174$_2$-**174,50**-180.
σ) Praga: ♂ - 165$_3$-170$_2$-**(172,50)**-175-180.
μ) „ ♀ - 165-**(167,50)**-170.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 166-170$_4$-**(170,50)**-175.
ω) „ „ ♀ - 165-**170**-175$_3$.
χ) Bucarest: ♂ - 170.
ψ) „ ♀ - 170-175.

Larghezza massima del cranio nella regione orbitale.

α) Valle del Po: ♂ - 66-68-69-70_2-72_2-73_3-**74**-75_7-76-78_3-80_4-82_2.

β) Regione Romana: ♂ - 71_2-73_1-74_5-76_4-**77**-78_9-81_2-83_2.

γ) Valle del Po: ♀ - 70-72_8-74_3-**75**-76-77_5-80_2.

δ) Regione Romana: ♀ - 70-71_2-73_5-75_4-76-78_6-(**79**)-81-83_2.

ε) Amburgo: ♂ - 65-68_8-**69_2**-70_6-72_2-73.

θ) „ ♀ - 71_2-(**72,50**)-74_3.

σ) Praga: ♂ - 66-68_3-(**70.50**)-72-74-75.

μ) „ ♀ - 67-(**68,50**)-70.

ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 71_2-72-73-(**74,50**)-75-78.

ω) „ „ ♀ - 70-72_2-73-(**73.50**)-77.

χ) Bucarest: ♂ - 72.

ψ) „ ♀ - 72_2.

Lunghezza del palato.

α) Valle del Po: ♂ - 140-142_2-143-144_2-146_3-148_2-149-**150_9**-151_3-154-155-160_2.

β) Regione Romana: ♂ - 146-149-151-153-156_{11}-157_4-(**158**)-161_5-162_4-165-170.

γ) Valle del Po: ♀ - 144_3-148_6-**149_3**-150_5-152_2-154_4.

δ) Regione Romana: ♀ - 146-153_3-**156_6**-160_2-161_{10}-165-166.

ε) Amburgo: ♂ - 141-144_2-146_5-148_3-(**148,50**)-150_7-151-156.

θ) „ ♀ - 148_5.

σ) Praga: ♂ - 145-146_3-148-(**149,50**)-151-154.

μ) „ ♀ - 144-(**147**)-150.

ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 142-146_2-(**147**)-148-150-152.

ω) „ „ ♀ - 145-150-(**152,50**)-154_2-160.

χ) Bucarest: ♂ - 149.

ψ) „ ♀ - 144-154.

Larghezza del cranio a livello del 1° molare superiore.

α) Valle del Po: ♂ - 66-78-83_3-82_3-83-(**84**)-85_5-87-88_2-90_8-92_2-102.

β) Regione Romana: ♂ - 85_2-84_4-90_3-91-92_9-(**94**)-95_5-97_3-102_3.

γ) Valle del Po: ♀ - 72-79-80_3-82_4-(**83,50**)-85_3-87_5-93_2-95_2.

δ) Regione Romana: ♀ - 85_2-86_6-90_5-(**91**)-92_6-93-95_2-97_2.

ε) Amburgo: ♂ - 73-75-77-78_2-80_2-(**80.50**)-82-83_4-85_4-87_2-88_2.

θ) „ ♀ - 82-(**83,50**)-85_4.

σ) Praga: ♂ - 78_3-80-(**81,50**)-82_2-85.

μ) „ ♀ - 82-(**83,50**)-85.

ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 76-78_2-(**79,50**)-80_2-83.

ω) „ „ ♀ - 75-80-(**81**)-82_2-87.

χ) Bucarest: ♂ - 82.

ψ) „ ♀ - 82_2.

Larghezza del palato a livello del 1° molare superiore.

α) Valle del Po: ♂ - 38-40_2-41_2-$\mathbf{44}_4$-45_{11}-46_3-48_2-49_2-50.
β) Regione Romana: ♂ - 41-43_3-44_4-45_2-$\mathbf{46}_7$-47_5-49_6-51_2.
γ) Valle del Po: ♀ - 40-41_3-42-43-(**44,50**)-45_2-46_8-48_4-49.
δ) Regione Romana: ♀ - 41-43_4-46_6-$\mathbf{45}_5$-46-49_7.
ε) Amburgo: ♂ - 42_2-43_2-44_7-45_6-(**45,50**)-46_2-49.
θ) „ ♀ - 42-**45**-47_2-48.
σ) Praga: ♂ - 44_3-45-46-(**46,50**)-48-49.
μ) „ ♀ - 45-(**45,50**)-46.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 43-44_2-(**44,50**)-45_2-46.
ω) „ „ ♀ - 43-(**44,50**)-45-46_3.
χ) Bucarest: ♂ - 41.
ψ) „ ♀ - 46_2.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari superiori.

α) Valle del Po: ♂ - 60-63_7-64-65_7-(**65,50**)-66_3-67_3-69-70_4-71.
β) Regione Romana: ♂ - 58-63-65-$\mathbf{66}_4$-68_5-69_5-71_4-72-73_5-74_3.
γ) Valle del Po: ♀ - 57-62_2-**63**-64_3-65_2-66_2-67_8-68-69.
δ) Regione Romana: ♀ - 68_9-69_2-70_4-71_2-(**71,50**)-73_6-75.
ε) Amburgo: ♂ - 58_5-60_7-$\mathbf{61}_2$-62_2-63_3-64.
θ) „ ♀ - 58-$\mathbf{61}_2$-64.
σ) Praga: ♂ - 61_2-63_3-(**63,50**)-64-66.
μ) „ ♀ - 60-(**62**)-64.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 63-65_3-(**65,50**)-66-68.
ω) „ „ ♀ - 67_2-70-(**72**)-75-77.
χ) Bucarest: ♂ - 64.
ψ) „ ♀ 62_2.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari inferiori.

α) Valle del Po: ♂ - 68_2-69-70_8-71_2-72_3-73_5-**74**-75_3-77-78-80.
β) Regione Romana: ♂ - 71-72-73_7-74-75-76_6-**77**-78_6-81_5-83.
γ) Valle del Po: ♀ - 69-70-71-72_9-**73**-74_4-75-76-77_2.
δ) Regione Romana: ♀ - 75_3-76-78_{14}-(**78,50**)-80_3-81_2-82.
ε) Amburgo: ♂ - 63-65_5-66_5-(**66,50**)-67-68_4-69_2-70_2.
θ) „ ♀ - 69_5.
σ) Praga: ♂ - 63-68-(**68.50**)-70-71_2-72-74.
μ) „ ♀ - 70-(**71**)-72.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ 68-69_2-(**69,50**)-70_2-71.
ω) „ „ ♀ 70-72_2-73-(**73,50**)-77.
χ) Bucarest: ♂ - 72.
ψ) „ ♀ - 67-72.

Larghezza massima del 2° molare superiore.

α) Valle del Po: ♂ - 18-19-21_2-$\mathbf{22_2}$-23_4-24_5-25_{10}-26_3.
β) Regione Romana: ♂ - 24_2-26_3-27_3-28_{13}-**(28,50)**-29_6-30-31-33.
γ) Valle del Po: ♀ - 20_2-21_{12}-**23**-24-25_2-26_4.
δ) Regione Romana: ♀ - 24_5-25_2-26-**27**-28_4-29_{10}-30.
ε) Amburgo: ♂ - 19_3-20_6-21_4-$\mathbf{22_5}$-23-25.
θ) " ♀ - 21_5.
σ) Praga: ♂ - 19-**(21,50)**-22_2-23_2-24_2.
μ) " ♀ - 23_2.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 22-23_2-**(23,50)**-24_4-25.
ω) " " ♀ - 23_4-**(24)**-25.
χ) Bucarest: ♂ - 21.
ψ) " ♀ - 21_2.

Lunghezza massima del 2° molare superiore.

α) Valle del Po: ♂ - 22-23-24_5-25_{12}-26_3-**(27)**-28_2-29-30-31-32.
β) Regione Romana: ♂ - 19-23_5-$\mathbf{24_{16}}$-25-26_3-28_3-29.
γ) Valle del Po: ♀ - 23_6-24-$\mathbf{25_2}$-26_{11}-27.
δ) Regione Romana: ♀ - 24_{18}-25_4-**(26,50)**-28-29.
ε) Amburgo: ♂ - 19_2-20_3-21_2-**(21,50)**-22_4-23_7-24_2.
θ) " ♀ - 21_2-**(23,50)**-24_2-26.
σ) Praga: ♂ - 21-22_2-**(22,50)**-23_2-24_2.
μ) " ♀ - 20-**(20.50)**-21.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 22_2-$\mathbf{23_3}$-24.
ω) " " ♀ - 23_3-**(24.50)**-25-26.
χ) Bucarest: ♂ - 23.
ψ) " ♀ - 21-23.

Larghezza massima del 2° molare inferiore.

α) Valle del Po: ♂ - 14-15_2-$\mathbf{16_3}$-17-18.
β) Regione Romana: ♂ - 15-17_9-18_8-**(18,50)**-19_{10}-21-22.
γ) Valle del Po: ♀ - 13_5-14_2-**(14,50)**-15_9-16_5.
δ) Regione Romana: ♀ - 15_2-$\mathbf{17_9}$-18_1-19_9.
ε) Amburgo: ♂ - 12_6-13_{11}-**(13,50)**-15_3.
θ) " ♀ - 13_5.
σ) Praga: ♂ - 12-13-**(13.50)**-15_5.
μ) " ♀ - 13_2.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 14_2-**(14,50)**-15_1.
ω) " " ♀ - 13-**(14)**-15_4.
χ) Bucarest: ♂ - 13.
ψ) " ♀ - 13_2.

Lunghezza massima del 2° molare inferiore.

α) Valle del Po: ♂ - 20-21_2-23-**(23,50)**-24_8-25_{12}-26_3-27.
β) Regione Romana: ♂ - 19_2-23_7-**(23,50)**-24_{16}-25-26_3-28.
γ) Valle del Po: ♀ - 21-23_4-**24**-25_3-26_{11}-27.
δ) Regione Romana: ♀ - 19_3-20-**22**-24_{16}-25_4.
ε) Amburgo: ♂ - 21_2-22_2-**23_5**-24_7-25_4.
θ) „ ♀ - 21-**(23,50)**-26_4.
σ) Praga: ♂ - 22-**24_3**-25-26_2.
μ) „ ♀ - 23_2.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 23_3-**(23,50)**-24_3.
ω) „ „ ♀ - 25_2-**(25,50)**-26_3.
χ) Bucarest: ♂ - 23.
ψ) „ ♀ - 23_2.

Lunghezza del canino superiore.

α) Valle del Po: ♂ - 25_3-26-27_2-28_2-**(29,50)**-30_7-32-34.
β) Regione Romana: ♂ - 24_2-28_2-29-**(31,50)**-32_2-33_5-34-35_2-36_2-37-39.
γ) Valle del Po: ♀ - 21-26_3-**(26,50)**-28-29_2-30_2-31-32.
δ) Regione Romana: ♀ - 28-29_7-30-31-**(31,50)**-33_3-34_4-35.
ε) Amburgo: ♂ - 22-23-24_4-25_2-**26_3**-28_3-29_2-30_2.
θ) „ ♀ - 21_2-**(23,50)**-24-26_2.
σ) Praga: ♂ - 24_3-26_2-**(27)**-29-30.
μ) „ ♀ - 18-**(22)**-26.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 25_3-**26**-27_2.
ω) „ „ ♀ - 23-26_2-**(26,50)**-28-30.
χ) Bucarest: ♂ - rotti.
ψ) „ ♀ - 23-30.

Lunghezza del canino inferiore.

α) Valle del Po: ♂ - 10-13-**(14.50)**-15_{12}-17-18_2-19.
β) Regione Romana: ♂ - 14-15-17_3-**18_5**-19_5-21_2-22_2.
γ) Valle del Po: ♀ - 11_3-13_2-**15_{10}**-16-19.
δ) Regione Romana: ♀ - 15_5-17_4-**(17,50)**-18_2-19_7-20.
ε) Amburgo: ♂ - 10_3-11-12_2-**(12,50)**-13_4-15_9.
θ) „ ♀ - 11_3-**(13)**-15_2.
σ) Praga: ♂ - 12-**(14)**-15_5-16.
μ) „ ♀ - 10-**(12,50)**-15.
ρ) Contorno di Firenze: ♂ - 14_2-**(14.50)**-15_4.
ω) „ „ ♀ - 15_4.
χ) Bucarest: ♂ - 13.
ψ) „ ♀ - 13-15.

Dall'esame comparativo dei dati precedentemente riferiti risulta:

Statura. — Gli individui maschi della Regione Romana giungono a dimensioni notevolmente maggiori che non quelli di tutte le altre località (la stessa cosa si dica per gli individui femmine) e presentano i seguenti campi di variabilità:

♂	da mill.	176 a 207	colla media di	**191.50**
♀	„	164 a 200	„ „	**182.**

Gli individui della Valle del Po, di Amburgo, di Praga, di Firenze, ecc., sono spiccatamente più piccoli.

Valle del Po:	♂ -	da mill.	165 a 188	colla media di	**176.50**
Amburgo:	♂ -	„	162 a 192	„ „	**177**
Praga:	♂ -	„	166 a 170	„ „	**168**
Firenze:	♂ -	„	176 a 194	„ „	**185**
Valle del Po:	♀ -	„	150 a 176	„ „	**163**
Amburgo:	♀ -	„	160 a 170	„ „	**165**
Praga:	♀ -	„	158 a 160	„ „	**159**
Firenze:	♀ -	„	162 a 170	„ „	**166**

È da notarsi che gli individui maschi e femmine di Firenze, sono di dimensioni un po' maggiori di quelli della Valle del Po, di Amburgo, di Praga ed anche di Bucarest.

Lunghezza del muso dagli incisivi anteriori all'apice. — Non si notano differenze notevoli fra gli individui maschi della Regione Romana e quelli delle altre località. Si osserva tuttavia una maggior lunghezza negli individui maschi del Contorno di Firenze. — Nelle femmine, quelle della Regione Romana presentano lunghezza maggiore.

Larghezza massima del muso. — I valori maggiori sono presentati dai maschi della Regione Romana e così pure si dica per le femmine.

Larghezza del disco proboscideo. — I valori minori sono presentati dagli individui maschi e femmine della Regione Romana.

Distanza dell'occhio dall'apice del muso. — Nei maschi delle varie località non vi sono differenze notevoli, mentre nelle femmine della Regione Romana si trovano valori notevolmente superiori a quelli delle femmine delle altre località.

Larghezza massima del piede anteriore. — I valori più elevati sono presentati dalle femmine della Regione Romana, mentre nei maschi della Valle del Po si trovano i valori meno elevati.

Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie. — I maschi della Valle del Po presentano i valori più bassi. Questa misura dà pure valori bassi per le femmine della Regione Romana.

Lunghezza massima del piede posteriore senza le unghie. — Le femmine della Regione Romana hanno i valori più bassi; i maschi invece hanno valori non molto diversi da quelli delle altre località.

Larghezza massima del piede posteriore. — Non si notano differenze spiccate fra gli individui delle varie località.

Lunghezza della coda. — I valori più elevati sono presentati dagli individui maschi dei contorni di Praga. — Le femmine della stessa località hanno pure coda più lunga delle femmine delle altre. Fra i maschi e le femmine della Regione Romana e quelli delle altre località non vi sono differenze notevoli.

Lunghezza massima basale del cranio. — Non vi sono differenze notevoli.

Larghezza massima del cranio misurata sulle arcate zigomatiche. — Gli individui maschi e femmine della Regione Romana hanno valori notevolmente più elevati che non negli individui delle altre località.

Larghezza massima del cranio alla regione mastoidea. — Non vi sono differenze notevoli.

Larghezza del cranio alla regione orbitale. — I valori più elevati appartengono ai maschi e alle femmine della Regione Romana.

Lunghezza del palato. — Questa è notevolmente maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana.

Larghezza del cranio a livello del 1° molare superiore. — Essa è notevolmente maggiore negli individui maschi e femmine della Regione Romana.

Larghezza del palato a livello del 1° molare superiore. — Non vi sono differenze notevoli.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari superiori. — Nei maschi della Regione Romana è spiccatamente maggiore che non in quelli delle altre località. Fra le femmine invece la differenza non è spiccata.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari inferiori. — Esso è maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana che non in quelli delle altre località.

Larghezza massima del 2° molare superiore. — Essa è notevolmente maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana.

Lunghezza massima del 2° molare superiore. — Non vi sono differenze notevoli.

Larghezza massima del 2° molare inferiore. — Essa è notevolmente maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana.

Lunghezza massima del 2° molare inferiore. — Non vi sono differenze notevoli.

Lunghezza del canino superiore. — Essa è maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana.

Lunghezza del canino inferiore. — Essa è maggiore nei maschi e nelle femmine della Regione Romana.

Dall'esame delle serie delle *varianti* e della loro frequenza, dalla considerazione delle *classi estreme* di ciascuna serie, ed anche dal confronto degli stessi valori *medii* di ciascuna serie e, inoltre, tenuto conto delle osservazioni sopra riferite, risulta:

1° *che gli individui di Talpa che provengono dalla Regione Romana, per quanto riguarda le proporzioni delle varie parti del capo e delle varie parti del cranio, sono spiccatamente diversi dagli individui di Talpa delle altre località sopra esaminate;*

2° *che gli individui di Talpa della Regione Romana appartengono, anche prescindendo da altri caratteri differenziali che verrò menzionando in seguito, ad una forma distinta che merita di essere designata con nome specifico.*

3° *Tutti gli individui che ho potuto osservare della Regione Romana appartengono alla forma specifica stata indicata recentemente da Orfield Thomas col nome di Talpa romana.*

* * *

Ai caratteri sopra menzionati delle dimensioni per distinguere la *Talpa romana* Orf. Th. dalle altre Talpe italiane ed europee, si possono aggiungere i seguenti che ho osservato nella numerosa serie di individui dei due sessi, che ho avuto a mia disposizione.

1° Il secondo molare inferiore presenta una piccola cuspide basale, supplementare esterna al fondo della valle che separa le cuspidi principali. Questo carattere indicato nei due esemplari studiati da Orfield Thomas, venne da me trovato costante, sebbene con sviluppo vario. — Debbo dire tuttavia che in qualche esemplare delle altre forme di Talpe se ne trova qualche accenno.

2° L'ultimo molare presenta pure una leggera cuspide. Anche questo carattere, pure indicato dal Thomas, nella serie degli individui da me esaminati apparve abbastanza costante.

3° *La lunghezza che va dall'angolo posteriore dell'arcata zigomatica all'angolo posteriore della cavità orbitaria portata lungo la faccia laterale del cranio in modo che essa parta dall'angolo posteriore della cavità orbitaria, arriva colla sua estremità anteriore o al di là del canino o a metà della larghezza del canino stesso.* — Nelle altre forme di Talpe italiane o europee da me studiate, la stessa lunghezza arriva o a livello del 1° premolare o al più al margine interno del canino.

Questo carattere differenziale nella numerosa serie di cranii maschi e femmine da me studiati mi è apparso costante. Esso è una conseguenza dello sviluppo diverso sia delle arcate zigomatiche, sia della porzione facciale del cranio, che si nota fra la *Talpa romana* Orf. Th. e le altre forme di Talpa.

4° Le arcate zigomatiche nella *Talpa romana*, sia nei maschi che nelle femmine, sono più robuste, e ciò appare a colpo d'occhio dalle figure qui unite. Le arcate stesse sono più arcuate: ciò contribuisce a dare al profilo generale del cranio, guardato dalla parte superiore, un aspetto diverso da quello delle altre forme di Talpe italiane ed europee. Questo carattere appare del resto molto spiccato anche dalle soprariferite misure.

5° I premolari superiori sono in complesso meno robusti e meno alti nella *Talpa romana* che non nelle altre. — Questo carattere venne già da me indicato nelle figg. 4 e 6 della tavola II del mio precedente lavoro sulla Talpa (Op. cit.), le quali rappresentano di profilo un cranio di Talpa di Roma od un cranio di Talpa di Sicilia che, come dirò meglio in seguito, appartiene pure alla specie *Talpa romana* Orfield Thomas.

Devo tuttavia osservare che questo carattere, spiccatissimo in molti individui, lo è meno in altri e che non raramente lo si può osservare in individui di Talpa non appartenenti alla *Talpa romana*. Credo perciò che esso debba venire in ultima linea.

6° La stessa considerazione si può fare poi canini superiori ed inferiori i quali sono spesso, ma non sempre, più sviluppati nella *Talpa romana*.

7° Nessun carattere differenziale sicuro si può trarre dallo sviluppo rispettivo degli incisivi, come già, del resto, avevo fatto notare nel mio precedente lavoro sopra citato.

*
* *

La diagnosi della *Talpa romana* Orfield Thomas, può essere formolata nel modo seguente:

Talpa romana Orfield Thomas.

Annals and Magazine of Natural History, Ser. 7, vol. X, dicembre 1902; pag. 516-17.

Talpa caeca (partim). — Bonaparte, *Iconografia della Fauna italica,* Tom. I, punt. 7, tav. 17, fig. 1, 1833.
Talpa europaea (partim). — Camerano, *Ricerche intorno alle specie italiane del genere Talpa,* " Mem. Accad. Scienze di Torino ", Ser. II, vol. XXXVII, 1885, tav. I, figg. 7, 12, 15, 16, tav. 2ª, figg. 4, 6.
Talpa caeca (partim). — Trouessart, *Catal. Mamm.*, vol. 1, pag. 206, Berlino, 1898-99.

La *colorazione* è come nella *Talpa europaea* Linn. ben nota.

Occhi con apertura palpebrale nulla (1).

Statura. — Nei maschi *classi estreme* 176-207, *media* **191,50**; nelle femmine *cl. estr.* 164-200, *media* **182** (2).

Larghezza massima del muso. — Nei maschi *cl. estr.* 69-92, *media* **80,50**; nelle femmine *cl. estr.* 66-97, *media* **81,50** (3).

Larghezza del disco proboscideo. — Nei maschi *cl. estr.* 46-66, *media* **56**; nelle femmine *cl. estr.* 44-60, *media* **52**.

Distanza dell'occhio dall'apice del muso. — Nei maschi non vi è differenza notevole dalle altre forme di Talpe europee; nelle femmine si ha: *cl. estr.* 185-220, *media* **202,50**.

Larghezza massima del piede anteriore. — Nelle femmine si ha: *cl. estr.* 175-220, *media* **197,50**.

Lunghezza massima del piede anteriore. — Nei maschi *cl. estr.* 152-195, *media* **173,50**; nelle femmine *cl. estr.* 136-185, *media* **160,50**.

Lunghezza massima del piede posteriore. — Nelle femmine *cl. estr.* 136-185, *media* **160,50**.

Larghezza massima del cranio misurata sulle arcate zigomatiche. — Nei maschi *cl. estr.* 123-147, *media* **135**; nelle femmine *cl. estr.* 125-146, *media* **135,50**.

Arcate zigomatiche robuste. — La lunghezza che va dall'angolo posteriore dell'arcata zigomatica all'angolo posteriore della cavità orbitaria, portata lungo la faccia laterale del cranio, in modo che essa parta dall'angolo posteriore della cavità orbitaria stessa, arriva colla sua estremità anteriore o al di là del canino o a metà della larghezza del canino stesso.

---

(1) Si menzionano qui soltanto i caratteri che si presentano diversi nella *Talpa romana* rispetto alle altre forme di Talpe italiane ed europee.

(2) Questi valori sono espressi in millimetri.

(3) Questi valori e gli altri che sono segnati pei caratteri seguenti, sono espressi in 360esimi somatici e quindi sono senz'altro paragonabili fra loro. — I valori estremi e le medie sono dedotti dall'esame di serie sufficientemente numerose per lasciar credere, dato l'andamento delle classi nelle serie e le loro frequenze, che l'esame di altri individui della stessa località non potrà far variare di molto i valori estremi stessi e quindi le medie.

Larghezza del cranio alla regione orbitale. — Nei maschi *cl. estr.* 71-83, *media* **77**; nelle femmine *cl. estr.* 70-88, *media* **79**.

Lunghezza del palato. — Nei maschi *cl. estr.* 146-170, *media* **158**; nelle femmine *cl. estr.* 146-166, *media* **156**.

Larghezza del cranio a livello del 1° molare superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 85-102, *media* **94**; nelle femmine *cl. estr.* 85-97, media **91**.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari superiori. — Nei maschi *cl. estr.* 58-74, *media* **66**.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari inferiori. — Nei maschi *cl. estr.* 71-83, *media* **77**; nelle femmine 75-82, *media* **78,50**.

Larghezza massima del 2° molare superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 24-33, *media* **28,50**; nelle femmine *cl. estr.* 24-30, media **27**.

Larghezza massima del 2° molare inferiore. — Nei maschi *cl. estr.* 15-22, *media* **18,50**; nelle femmine *cl. estr.* 15-19, *media* **17**.

Lunghezza del canino superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 24-39, *media* **31,50**: nelle femmine *cl. estr.* 28-35, *media* **31,50**.

Lunghezza del canino inferiore. — Nei maschi *cl. estr.* 14-22, *media* **18**; nelle femmine *cl. estr.* 15-20, *media* **17,50**.

Secondo molare inferiore con una piccola cuspide basale supplementare al fondo della valle che separa le cuspidi principali.

La *Talpa romana* Orfield Thomas si presenta in tutti gli esemplari da me esaminati, completamente cieca.

Per ciò che riguarda la sua distribuzione geografica io posso fornire i dati seguenti. Essa è assai frequente nei contorni di Roma, tanto nella regione del piano, quanto in quella montuosa. Ne ho inoltre esaminato un esemplare femmina raccolto dal conte M. G. Peracca a Catanzaro. L'esemplare di Talpa indicato di Sicilia (1), nel mio precedente lavoro sulle Talpe italiane, appartiene pure alla *Talpa romana*. È lecito supporre che questa specie estenda la sua area di distribuzione a tutta la parte meridionale d'Italia, almeno nella Regione Tirrena. Sono tuttavia necessarie altre ricerche per determinare i suoi limiti di estensione verso il Nord di Roma ed anche verso l'Est, sopratutto per quanto riguarda il versante Adriatico. Debbo dire a questo proposito che dai contorni di Urbino e dai contorni di Firenze io ho ricevuto soltanto esemplari di *Talpa europaea* Linn. cogli occhi aperti.

* * *

Separata come specie, pei caratteri sopra indicati, la *Talpa romana* Orfield Thomas, si presenta ora la domanda: *La Talpa caeca descritta dal Savi è forma distinta specificamente dalla Talpa romana stessa?*

(1) Cfr. anche: L. Camerano, *Dell'esistenza della Talpa europea in Sicilia*, " Boll. dei Musei di Zool. e Anat. comp. di Torino „, vol. 1°, n. 4, 1886.

Il Museo Zoologico di Torino possiede due esemplari tipici inviati a suo tempo dal Savi stesso; questi esemplari io già studiai nel mio precedente lavoro sulle Talpe italiane ed ora ho ristudiato minutamente, sopratutto per quanto riguarda i caratteri presentati dal cranio e dai denti. Per gli altri caratteri non ripeterò qui ciò che già dissi nel mio precedente lavoro.

Pei caratteri delle dimensioni del cranio questi individui si scostano notevolmente dalla *Talpa romana* e così pure per quelli dei denti, avvicinandosi notevolmente alla *Talpa europaea* Linn. Le dimensioni della *Talpa caeca* del Savi sono spiccatamente più piccole di quelle della *Talpa romana* e sopra ciò già si avevano le osservazioni del Bonaparte che io ho riferite in principio di questo lavoro.

Il carattere che io ho sopra indicato della misura della lunghezza delle arcate zigomatiche, rispetto alla posizione del canino superiore, è nella Talpa del Savi come nella *Talpa europaea* di Linneo e non come nella *Talpa romana*. Inoltre la larghezza del secondo molare inferiore è molto piccola.

Un'occhiata del resto data allo specchietto delle misure (espresse in 360^{esimi} somatici) delle varie parti del cranio e dei denti e il confronto con quelle della *Talpa romana* e della *Talpa europaea* porta facilmente l'osservatore *a conchiudere che la Talpa caeca Savi è forma al tutto distinta dalla Talpa romana* Orfield Thomas.

*
* *

La *Talpa caeca* Savi ha affinità notevolissime colla *Talpa europaea* Linn., non solo per l'insieme delle dimensioni delle varie parti del corpo: ma anche per le proporzioni e la forma delle varie parti del cranio e dei denti. Essa si differenzia tuttavia pel fatto che *le sue palpebre sono completamente saldate.*

Se si prescinde per un momento da questo carattere e si confrontano i cranii dei due individui tipici sopradetti della Talpa del Savi con quelli della *Talpa europaea* Linn. e si procede a misure col metodo dei coefficienti somatici, si giunge facilmente alla conclusione che non è possibile distinguere i primi dai secondi, nè per le dimensioni relative, nè per la forma, fatta eccezione per la larghezza del 2° molare inferiore, che nei due esemplari sopradetti è spiccatamente minore. Caratteri differenziali non si trovano neppure fra le altre parti del corpo. A questa conclusione ero giunto pure nel mio precedente lavoro sulle Talpe italiane, *e questa conclusione io confermo ora dopo l'esame di un molto più ampio materiale.*

Rimane da discutersi il carattere della chiusura completa delle palpebre.

Intorno alla variabilità dell'ampiezza dell'apertura delle palpebre nella *Talpa europaea* Linn., già ho detto a lungo nel lavoro ripetutamente citato, dove sono anche riferite le osservazioni degli altri Autori, e ad esso rimando il lettore. Osserverò soltanto che, a quanto pare, esemplari di Talpa con palpebre completamente chiuse, si trovano talvolta qua e là nella Regione Alpina, in località dove si trovano pure esemplari con occhi aperti: mentre non mi venne fatto mai di osservarne nel piano. Le Talpe che io ho avuto dal Contorno di Firenze hanno tutte gli occhi aperti. — Il Savi, noterò pure, dice espressamente che gli esemplari ciechi da lui descritti provenivano dall'Appennino.

Lo studio dei due esemplari ciechi che io ho avuto da Domodossola e da Andrate, mostra che i caratteri del loro cranio e dei loro denti sono come quelli della *Talpa europaea* Linn., anche per ciò che riguarda la larghezza del 2° molare inferioro.

Non credo possibile per ciò separare specificamente questi ultimi esemplari dalla Talpa europaea Linn. pel solo fatto che essi hanno le palpebre completamente saldate, tanto più tenendo conto del fatto che nella *Talpa europaea* Linn., si trova variare l'apertura delle palpebre da m. 0,002 ad una semplice puntura di spillo e tanto più che sono stati osservati esemplari di *Talpa europaea*, in cui un occhio aveva palpebre aperte e l'altro saldato, ed inoltre anche pel fatto che gli esemplari ad occhi con palpebre saldate, pare si trovino sporadicamente qua e là.

Per quanto riguarda gli esemplari del Savi è necessario tuttavia tener conto delle considerazioni seguenti:

1° Secondo quanto dice il Savi stesso (vale a dire: " nel novembre poi del decorso anno (1), ebbi fra mano di quelle Talpe che trovansi sul nostro Appennino, e rimasi sommamente sorpreso di non trovar loro l'apertura delle palpebre "), pare che sull'Appennino questa forma di Talpa sia frequente e forse localizzata sull'Appennino stesso. Ho avuto occasione di vedere alcuni esemplari di Talpa provenienti da Vallombrosa. Essi hanno le palpebre completamente saldate. La loro statura è piccola e concorda con quella data dal Savi per la sua *Talpa caeca*. Ma non ho potuto su di esse procedere a misure comparative delle varie parti del cranio e dei denti.

2° Il carattere sopra menzionato della assai piccola larghezza del 2° molare inferiore, se risultasse sufficientemente costante, dovrebbe essere preso in considerazione, e unito alla costanza della chiusura delle palpebre e alla speciale stazione dell'animale, potrebbe legittimare la separazione specifica della forma descritta dal Savi. Per quanto tuttavia non si debba nascondere il fatto che le Talpe europee di Amburgo presentino per la larghezza del 2° molare inferiore valori assai bassi con frequenza notevole.

♂ Amburgo: 12_6-13_{11}-**(13,50)**-15_3 — Esemplari del Savi: ♂ - 11-12.

* * *

L'esame fatto di serie di esemplari di *Talpa europaea*, con palpebre aperte, di Amburgo, Praga, Bucarest e di varie località italiane (sopra indicate), mi ha mostrato che fra essi non è possibile istituire divisioni di gruppi speciali.

Gli individui di qualche località, come ad esempio i maschi di Amburgo, presentano nella serie studiata uno sviluppo maggiore della coda.

Gli individui del Contorno di Firenze hanno una statura un po' maggiore degli altri, la lunghezza del muso nei maschi di Firenze è pure più spiccata, ecc.; ma per poter dare a queste differenze un giusto valore, sarebbe necessario l'esame di serie più numerose delle varie località di quelle che io ho avuto a mia disposizione. Ad ogni modo tenendo conto dei caratteri, certamente molto importanti, del cranio e dei denti, credo poter affermare che gli individui di Amburgo, Praga, Bucarest e

(1) *Sopra la Talpa cieca degli antichi*, " Nuovo Giornale dei Letterati „ Pisa, 1822, vol. 2°, pag. 304, anno 1822.

quelli con occhi aperti delle varie regioni italiane, appartengono ad una sola forma specifica e precisamente alla *Talpa europaea* Linn., della quale specie si può dare la seguente diagnosi, simmetrica con quella della *Talpa romana* Orfield Thomas.

Talpa europaea Linn.

S. N., XII, p. 73, n. 1.

La colorazione è come nella Talpa romana ed è ben nota.

Occhi con apertura palpebrale distinta di diametro variabile, in qualche esemplare eccezionalmente nulla (1).

Statura. — Nei maschi *cl. estr.* 160-194, *media* **177**; nelle femmine 147-176, *media* **166,50** (2).

Larghezza massima del muso. — Nei maschi *cl. estr.* 78-120, *media* **99**; nelle femmine *cl. estr.* 70-113, *media* **91,50** (3).

Larghezza del disco proboscideo. — Nei maschi *cl. estr.* 49-70, *media* **59,50**; nelle femmine *cl. estr.* 50-67, *media* **58,50**.

Distanza dell'occhio dall'apice del muso. — Nelle femmine *cl. estr.* 170-216, *media* **190**.

Larghezza massima del piede anteriore. — Nelle femm. *cl. estr.* 164-201, *media* **182,50**.

Lunghezza massima del piede anteriore. — Nei maschi *cl. estr.* 131-200, *media* **215**; nelle femmine *cl. estr.* 140-191, *media* **165,50**.

Lunghezza massima del piede posteriore. — Nelle femmine *cl. estr.* 154-200, *media* **177**.

Larghezza massima del cranio misurata sulle arcate zigomatiche. — Nei maschi *cl. estr.* 113-132, *media* **122,50**; nelle femmine *cl. estr.* 106-125, *media* **115,50**.

Le *arcate zigomatiche* sono gracili. — La lunghezza che va dall' angolo posteriore dell'arcata zigomatica all'angolo posteriore della cavità orbitaria, postata lungo la faccia del cranio, in modo che essa parta dall'angolo posteriore della cavità orbitaria stessa, arriva colla sua estremità anteriore o a livello del 1° premolare o al più al margine posteriore del canino superiore.

Larghezza del cranio alla regione orbitale. — Nei maschi *cl. estr.* 65-82, *media* **73,50**; nelle femmine *cl. estr.* 67-80, *media* **73,50**.

Lunghezza del palato. — Nei maschi *cl. estr.* 140-160, *media* **150**; nelle femmine *cl. estr.* 144-154, *media* **149**.

Larghezza del cranio a livello del 1° molare superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 66-102, *media* **84**; nelle femmine *cl. estr.* 72-95, *media* **83,50**.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari superiori. — Nei maschi *cl. estr.* 60-71, *media* **64,50**.

Lunghezza dello spazio occupato dai molari inferiori. — Nei maschi *cl. estr.* 63-80, *media* **71,50**; nelle femmine *cl. estr.* 67-77, *media* **72**.

Larghezza massima del 2° molare superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 18-26, *media* **22**; nelle femmine *cl. estr.* 20-26, *media* **23**.

Larghezza massima del 2° molare inferiore. — Nei maschi *cl. estr.* 12-18, *media* **15**; nelle femmine *cl. estr.* 13-16, *media* **14,50**.

Lunghezza del canino superiore. — Nei maschi *cl. estr.* 24-34, *media* **29**; nelle femmine *cl. estr.* 18-32, *media* **25**.

Lunghezza del canino inferiore. — Nei maschi *cl. estr.* 10-19, *media* **14,50**; nelle femmine *cl. estr.* 10-19, *media* **14,50**.

Secondo molare inferiore senza cuspide basale supplementare.

---

(1) Si menzionano qui soltanto i caratteri che si presentano diversi da quelli della *Talpa romana* Orfield Thomas.

(2) Valori espressi in millimetri.

(3) Questi ed i seguenti valori sono espressi in 360$^{\text{esimi}}$ somatici.

Per quanto riguarda la distribuziono dolla *Talpa europaea* Linn. in Italia, dirò che pare essa occupi sopratutto la Valle del Po e si spinga nella parte peninsulare ad incontrare la *Talpa romana*; ma i limiti di distribuziono delle due specie rimangono da chiarire.

*
* *

Viene in ultimo la questione del modo di considerare tassonomicamente la *Talpa caeca* Savi.

Dopo la soparazione in specie distinta della *Talpa romana* Orfield Thomas, la quale presenta le palpebre completamento saldate, questo carattere *da solo* non può più bastare, qualunque sia il valore che ad esso si voglia dare, a diagnosticare un'altra specie del genere Talpa, è d'uopo ricorrere ad un altro carattere di partenza per la distinzione specifica.

Como ho detto sopra, i tipi del Savi presentano le maggiori affinità cogli esemplari di *Talpa europaea* Linn., tanto che non riesce possibile trovare un carattere per distinguerli specificamente. Il carattero stesso della chiusura delle palpebre può trovarsi fra gli esemplari di quest'ultima specie.

Se lo studio di serie numerose di individui di Talpe a palpebre saldate della regione montagnosa appenninica, mettesse in evidenza una diminuzione spiccata della larghezza doi molari rispetto alla *Talpa europaea*, in rapporto colla minore statura media e se la forma di Talpa in questione si presentasse localizzata nella regione montagnosa appenninica, io non esiterei a considorare la *Talpa caeca* Savi come specie da conservarsi nei cataloghi.

Se poi le ricerche future condotte lungo la zona montagnosa appenninica mettessero invece in chiaro il fatto, dell'estendersi in essa promiscuamente colla forma cieca, anche della forma a palpebre non saldate, come pare avvenga nella zona alpina, e se il carattere della diminuzione di larghezza dei molari non risultasse spiccato, io credo si debba ritornare alla proposta che già feci nel precedente lavoro sulle Talpe italiane, di dare alla *Talpa caeca* di Savi il valore di *semplice variazione*.

*
* *

Como conclusione delle ricerche di cui ho esposto i risultamenti, rispondo alle varie domande che ho formulato in principio di questo lavoro.

1° La *Talpa romana* Orfield Thomas è specie distinta nettamente dalla *Talpa caeca* Savi e dalla *Talpa europaea* Linn.

2° La *Talpa europaea* Linn. delle varie località italiane, non pare forma diversa dalla *Talpa europaea* delle altre regioni d'Europa.

3° La *Talpa europaea* Linn. presenta nella regione montagnosa, come pare avvenga anche in altre regioni d' Europa, talvolta individui colle palpebre saldate.

4° La *Talpa caeca* Savi è forma affinissima alla *Talpa europaea* Linn., da cui si differenzia secondo il Savi per la saldatura *normale* delle palpebre.

5° Por potor con sicurezza determinare il valore tassonomico della *Talpa caeca* Savi, è d'uopo chiariro il fatto della sua localizzazione nella regione montuosa appenninica o studiarne i caratteri in serie numerose di individui.

Talpa romana Orfield Thomas	***Maccarese***															
	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂	11 ♂	12 ♂	13 ♂	14 ♂	15 ♂	16 ♂
(Misure assolute in millimetri)																
Lunghezza totale	198	184	192	190	190	195	185	193	202	205	195	205	200	200	193	197
Id. massima del cranio . .	38	38	39	38	38	38	37	38	39	39	38	39	38	39	39	38
Id. della coda	31	26	28	31	28	32	26	27	33	32	31	32	33	33	30	30
Id. del muso dagli incisivi all'apice	8,5	7,5	10	8	8	9	8	8,5	7,5	9	8	10	8,5	8	9	8
Larghezza massima del muso	10	10	10	10	10	10,5	9,5	10	12	10	11,5	11	11	10	11	11
Id. del muso alla base della parte nuda	5	5	5	5,5	5,5	6	5,5	5	6,5	7	7	6	5	6	5	6
Distanza dall'occhio all'apice del muso	22	22	21	23	23	21	19,5	20	22	22	22	22	22	22	22	22
Larghezza massima del piede anteriore	19,5	19	20	19	19	21	21	20	22	21	21	21	21	20	21	21
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	17	16,5	18	17	17	18	16,5	16,5	18	18	18	18	17,5	17	17	18
Id. id. del piede posteriore .	17	17	17,5	18	17,5	19	18	18	20	19	18	18,5	19	19	19	18,
Larghezza massima del piede posteriore	8.5	8,5	8,5	9	8	9,5	8,5	8,5	9	9	8,5	9	9,5	9	9	8
(Misure in 360esimi somatici)																
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	36
Id. della coda	294	246	258	294	265	303	253	256	305	295	294	295	313	305	277	28
Id. del muso dagli incisivi all'apice	84	71	92	76	76	85	78	81	69	83	76	92	81	74	83	7
Larghezza massima del muso	95	95	92	95	95	99	92	95	111	92	109	102	104	92	102	10
Id. del muso alla base della parte nuda	47	47	46	52	52	57	54	47	60	65	66	55	47	55	46	5
Distanza dall'occhio all'apice del muso	208	208	194	218	218	199	190	189	203	203	208	203	208	203	203	20
Larghezza massima del piede anteriore	185	180	185	180	180	199	204	189	203	194	199	194	199	185	194	19
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	161	156	166	161	161	170	161	156	166	166	170	166	166	157	157	17
Id. id. del piede posteriore .	161	161	162	170	166	180	175	170	203	175	170	171	180	175	175	17
Larghezza massima del piede posteriore	81	81	78	85	76	90	83	81	83	83	81	83	90	83	83	7

								Marino		Ostia				Contorno di Roma								
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂
200	195	176	185	183	180	185	185	185	188	185	187	180	190	185	197	186	190	195	202	190	195	184
39	39	37	37	37	37	39	37	38	39	39	38	38	39	39	38	38	39	39	40	39	40	37
27	31	30	29	27	28	29	30	26	26	30	27	28	35	30	28	28	32	29	30	34	33	28
95	9	8	8	8	8,5	9	9	9	9	9	8	8,5	9	9	8	8	9	8	10	9	8	8
11	11	10	11	13	12	12	11	11	11	12	9,5	12	10	12	10,5	12	12	13	13	12,5	13	12
6	5	6	5	6	5	6	5,5	5,5	5,5	5,5	5	5,5	6	6	5,5	6	6	5,5	6	6,5	6	6
19	20	20	19	20	19	21	21	22	22,5	22	22	20	23	22	21,5	22	23	23	22	22,5	24	22
19	21	21	19	20	21	20	19	21	20	22	21	21	23	21	20	22	23	22	22	22	23,5	20
19	20	19	18	20	20	19	20	17	17,5	16,5	16,5	17	18,5	18	16	18	20	18	18	18,5	19	17
19	20	18	19	18	19	17	20	17	19	17,5	19	18	19	20	20	18,5	19	18	20	19	19	17,5
9	9	8	8,5	9	9	8	8,5	7,5	8	9	8	9	9	9,5	8	7,5	9	85	8	9,5	9	8
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
249	286	292	282	263	272	282	292	246	240	277	256	265	323	277	265	265	295	268	270	314	297	272
88	83	78	78	78	83	88	88	85	83	83	76	81	83	83	76	76	83	74	90	83	72	78
102	102	97	107	126	117	117	107	104	102	111	90	114	92	111	99	114	111	120	118	115	118	117
55	46	58	49	58	49	58	54	52	51	51	47	52	55	55	52	57	55	51	54	60	54	58
175	185	195	185	195	185	204	204	208	208	203	208	189	212	203	203	208	212	212	198	208	216	214
175	194	204	185	195	204	195	185	199	185	203	198	199	212	194	189	208	212	203	198	203	212	195
175	185	185	175	195	195	185	195	161	162	152	156	161	171	166	152	170	185	166	162	171	171	165
175	185	175	185	175	185	165	195	161	175	162	180	170	175	185	189	175	175	166	180	175	171	170
83	83	78	83	88	88	78	83	71	74	83	76	85	83	88	76	71	83	78	72	88	81	78

Talpa romana

Orfield Thomas

(Misure assolute in millimetri)

		Ostia e Maccarese										
	(*)	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂	11 ♂
Lunghezza massima del cranio	36,7	38	37	39	39	37	37	37	37	37	37	35
Id. basale id.	31,6	33	32.5	33	34	33	31	31	33	32	32	30
Larghezza zigomatica	15	15	13	15	15	14	13,5	14	14	14	14	12
Id. mastoidea	17,8	19	18	20	17	18	18	18	18	18	17	17,5
Id. interorbitale	8	8	8	8	8	8	7,5	8	8	8	7,5	7,5
Lunghezza del palato	16,2	16	16	17	17	16	15	17	16	16	16	14,5
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	11.1	10	10	11	10	10	9,5	10	10,5	10,5	9,5	8,5
Id. id. all'indentro id.	4,7	4,5	5	5	5	5,25	4,5	5	4,5	5	5	4,5
Spazio occupato dai molari superiori . .	7,5	7	7,5	7,5	7	7	7	6.5	7,5	6	7	7
Id. id. inferiori . .	8,1	7,5	7,75	8	7,75	8	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5
Larghezza del 2° molare superiore . . .	3	3	2,5	3	3	2,75	3	2.75	2,75	3	2,5	2,75
Lunghezza id. id. . . .	—	2,5	3	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Larghezza id. inferiore . . .	2	2	2	2	2	1,75	1,75	1,75	2.25	2	1,75	1,75
Lunghezza id. id. . . .	—	2,5	2,5	2,5	2,5	2	2	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Altezza del canino superiore												
Id. id. inferiore												

(Misure in 360^{esimi} somatici)

Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	310	313	316	305	314	321	302	302	321	311	311	309
Larghezza zigomatica	147	142	126	138	138	136	131	136	136	136	136	129
Id. mastoidea	175	180	175	185	157	175	175	175	175	175	165	180
Id. interorbitale	78	76	78	74	74	78	73	78	78	78	73	77
Lunghezza del palato	160	153	156	157	157	156	146	165	156	156	156	149
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	109	95	97	102	92	97	92	97	102	102	92	88
Id. id. all'indentro "	46	47	49	46	46	51	44	49	44	49	49	46
Spazio occupato dai molari superiori . .	74	66	73	69	65	68	68	63	73	58	68	72
Id. id. inferiori . .	79	71	75	74	72	78	73	73	73	73	73	77
Larghezza del 2° molare superiore . . .	29	28	24	28	28	27	29	27	27	29	24	28
Lunghezza id. id. . . .	—	24	29	23	23	24	19	24	24	24	24	26
Larghezza id. inferiore . . .	20	19	19	18	18	17	17	17	22	19	17	18
Lunghezza id. id. . . .	—	24	24	23	23	19	19	24	24	24	24	26
Altezza del canino superiore												
Id. id. inferiore												

(*) Misure date da Orfield Thomas (il sesso degli esemplari descritti non è indicato dall'A.).

Marino			Ostia			Maccarese								Contorno di Roma				
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂
39	39	38	38	38	37	38	38	37	37	38	39	37	38	38	39	39	38	39
33	33	33	—	33	—	33	32	32	32,5	32,5	33	31,5	34	33	33	33,5	33	33,5
15	15	15	—	—	—	14	13,5	14	14	14	14	14,5	13,5	14	14	14,5	13,5	14,5
18	18,5	18	—	—	18	17,5	18	18	18	18	18	18	18	17,5	18	17,5	17,5	17,5
3,5	9	8	8,5	—	8,5	7,5	7,5	7,5	8	8,5	8,5	8	7,75	8	8	8	8	8
7,5	17	17	17	16,5	17,5	16,5	16	16	16,5	17	17,5	16,5	16,5	16,5	17	17,5	16,5	17,5
10	10	9,5	10	9,5	9	9,5	10	9,5	9	10	9,5	10	10	9	10	10	9	10
5	5,5	5	5	5	4,5	5	4,75	5	4,5	4,75	4,75	4,5	4,5	4,5	5	5	4,5	5
,75	8	7,5	7,5	7	7,5	7	7	7	7	7,5	7,5	7,5	7,5	7,25	7,5	8	7,25	8
,75	8,5	8	8	8	8	7,75	8	7,5	8	8,5	8,5	8,5	8,5	8	8,5	8,75	8	8,75
3	3	2,75	3	2,75	3	3	3	3	3	3,25	3,25	3	3,5	2,75	3	3	3	3
3	3	2,5	2,5	3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,75	2	2,5	2,75	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
,75	2	2	1,75	1,75	1,75	1,75	2	2	2	2,25	2,5	2	1,75	2	2	2,25	2	2
2,5	2,5	3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,75	2,5	2,5	2,75	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
3	3,5	3	3,5	3,5	3,75	2,5	2,5	3	3,5	3,5	3,75	4	3,75	3,5	3,5	3,75	3,5	4
2	2	2	2	2,25	1,75	1,5	1,75	1,75	1,5	2,25	2	2,25	2	2	2	2	2	2,25
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	369	360
305	305	313	—	313	—	313	303	311	316	308	305	307	322	313	305	309	313	309
138	138	142	—	—	—	133	128	136	136	133	129	141	129	133	129	134	129	134
166	171	170	—	—	175	166	170	175	175	170	166	175	170	166	166	162	166	162
78	83	76	81	—	83	71	71	73	78	81	78	78	73	76	74	74	76	74
162	157	161	161	156	170	156	151	156	161	161	162	161	156	156	157	162	156	162
92	92	90	95	90	88	90	95	92	88	95	88	91	95	85	92	92	85	92
46	51	47	47	47	49	47	45	49	44	45	44	41	43	43	46	46	43	46
73	74	71	71	66	73	66	66	68	68	71	69	73	71	69	69	74	69	74
81	78	76	76	76	78	73	76	73	78	81	78	83	81	76	78	81	76	81
28	28	26	28	26	29	28	28	29	29	31	30	29	33	26	28	28	28	28
28	28	24	24	28	24	24	24	24	24	26	25	24	26	24	23	23	24	23
15	18	19	17	17	17	17	19	19	19	21	18	19	17	19	18	21	19	18
23	23	28	24	24	24	24	24	24	24	26	25	24	26	24	23	23	24	23
28	32	28	33	33	36	24	24	29	34	33	35	39	36	33	32	35	33	37
18	18	19	19	22	17	14	17	17	15	21	18	22	19	19	18	18	19	21

Talpa romana Orfield Thomas	**Maccarese**										
	1 ♀	2 ♀	3 ♀	4 ♀	5 ♀	6 ♀	7 ♀	8 ♀	9 ♀	10 ♀	11 ♀
(Misure assolute in millimetri)											
Lunghezza totale	170	164	192	170	180	185	180	180	185	187	190
Id. massima del cranio	36	37	37	37	37	37	37	38	37	37	36
Id. della coda	25	27	28	26	27	29	28	31	27	27	28
Id. del muso dagli incisivi all'apice	8	10	10	9	7	7	7,5	7	7,5	8,5	8,5
Larghezza massima del muso	10	11	10	10	9,5	9	9,5	8,5	9	10	10
Id. del muso alla base della parte nuda	6	5	5	6	5	4,5	5	5	5	4.5	5
Distanza dall'occhio all'apice del muso .	20	19	21	19	21	21	21	22	20	20	22
Larghezza massima del piede anteriore .	20	20	20	19,5	18	19	18	19	18	20	20
Lungh. mass. del piede ant. senza le unghie	17	19	18	19	14	15	16	17	16	16	16,5
Id. id. post. id.	18	17	18	19	14	15	17	17	17	17	18
Larghezza id. id. id.	9	10	10	9	8	7,5	8	9	8	8	9
(Misure in 360esimi somatici)											
Lunghezza massima totale del cranio . .	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	36[illegible]
Id. della coda	250	263	272	253	263	282	272	294	263	263	2[illegible]
Id. del muso dagli incisivi all'apice	80	97	97	88	68	68	73	66	73	85	8[illegible]
Larghezza massima del muso	100	107	97	97	92	88	92	84	88	97	1[illegible]
Id. del muso alla base della parte nuda	60	49	49	58	49	44	49	47	49	44	[illegible]
Distanza dall'occhio all'apice del muso .	200	185	204	185	204	204	204	208	195	195	2[illegible]
Larghezza massima del piede anteriore .	200	195	195	189	175	185	175	180	175	195	[illegible]
Lungh. mass. del piede ant. senza le unghie	170	185	175	185	136	146	156	161	156	156	[illegible]
Id. id. post. id.	180	165	175	185	136	146	165	161	165	165	[illegible]
Larghezza id. id. id.	90	97	97	88	78	73	78	85	78	78	[illegible]

					Marino	Ostia								Contorno di Roma				Modica
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♂
184	188	188	184	188	178	185	177	191	198	200	195	188	182	174	175	184	180	177
36	37	37	37	38	37	36	37	38	38	38	38	37	37	37	37	37	37	39
26	25	26	28	27	26	25	28	28	30	28	30	28	29	27	27	30	28	29
,5	7	8	8	8	7	8	7	9	10	8	8,5	9	8	8	7,5	7,5	7,5	9
9	9	10	10,5	10	9	11	9	10,5	11	11	11,5	11	10,5	11	12	9,5	10	11,5
5	5,5	5,5	5	6	5	5	5	6	6	6	6	5,5	5	5	5	5	5	5,5
20	20	21,5	20	22	20	21	20	22,5	22	22	22	21	22	21	20	20	20	20
18	19	19	20	21	19	19	18	20	21	20	20	19	22	18,5	20	20	20	20
16	16	16	16	17	15,5	15,5	16	17	18	17,5	16,5	16	17	17	17	18	17	19
17	18,5	19	17	18	17	17	17	19	17	18	18	18	17	16,5	17	18	18	19
,5	9	8	8,5	8	7,5	7	7,5	8	7,5	7,5	8	8	7,5	8	7,5	8,5	7	8
60	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
60	243	253	272	256	253	250	272	265	284	265	284	272	282	263	263	292	272	268
5	68	78	78	76	68	80	68	85	95	76	81	88	78	78	83	73	73	83
0	88	97	102	95	88	110	88	99	104	104	109	107	102	107	117	92	97	106
0	54	54	49	57	49	50	49	57	57	57	57	54	49	49	49	49	49	51
05	195	209	195	208	195	210	195	213	208	208	208	204	214	204	195	195	195	185
30	185	185	195	199	185	190	175	189	199	189	189	185	214	179	195	195	195	185
50	156	156	156	161	151	155	156	161	170	166	156	156	165	165	165	175	165	175
70	180	185	165	170	165	170	165	180	161	170	170	175	165	161	165	175	175	175
5	88	78	83	76	73	70	73	76	70	70	76	78	73	78	73	83	68	74

Talpa romana Orfield Thomas	***Ostia e Maccarese***					***Marino***	***Ostia***		
	1 ♀	2 ♀	3 ♀	4 ♀	5 ♀	6 ♀	7 ♀	8 ♀	9 ♀
(Misure assolute in millimetri)									
Lunghezza massima del cranio	37	37	36	37	37	36	37	36	37
Id. basale id.	31	32	30	33	31	31,5	—	31	32
Larghezza zigomatica	15	14	13	13,5	14	13,5	—	13,5	13,5
Id. mastoidea	17	17	17	17	17	17,5	—	17	17
Id. interorbitale	8,5	8	7	9	8	7,5	—	7,5	7,5
Lunghezza del palato	16	15	15,5	16,5	15	15,5	16	15,5	16
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	10	10	9	9,5	9,5	9,5	9,5	9	9
Id. id. all'indentro id. .	5	5	4,5	5	5	4,5	4,5	4,5	4,5
Spazio occupato dai molari superiori . .	7	7	7	7	7	7,5	7	7	7
Id. id. inferiori . .	8	8	7.5	7,75	8	8	8	8	8
Larghezza del 2° molare superiore . .	3	2,5	2,5	2,5	3	3	3	2,5	2,5
Lunghezza id. id. . .	3	2,5	2,5	2,5	2.5	2,75	2,5	2,5	2,5
Larghezza del 2° molare inferiore . . .	1,75	2,5	1,75	1,5	1,75	1,5	2	1,75	1,75
Lunghezza id. id. . .	2,5	2,5	2.5	2	2	2	2	2.5	2,5
Altezza del canino superiore.						3.25	3,5	3,25	3,5
Id. id. inferiore						1,75	2*	2	2
(Misure in 360esimi somatici).									
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	302	311	300	321	302	315	—	310	311
Larghezza zigomatica	146	136	130	131	136	135	—	135	131
Id. mastoidea	165	165	170	165	165	175	—	170	165
Id. interorbitale	83	78	70	88	78	75	—	75	73
Lunghezza del palato	156	156	155	161	146	155	156	155	156
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	97	97	90	92	92	95	93	90	88
Id. id. all'indentro id. .	49	49	45	49	49	45	44	45	44
Spazio occupato dai molari superiori . .	68	68	70	68	68	75	68	70	68
Id. id. inferiori . .	78	78	75	78	75	80	78	80	78
Larghezza del 2° molare superiore . .	29	24	25	24	29	30	29	25	24
Lunghezza id. id. . .	29	24	25	24	24	28	24	25	24
Larghezza del 2° molare inferiore . . .	17	19	18	15	17	15	19	18	17
Lunghezza id. id. . . .	24	24	25	19	19	20	19	25	24
Altezza del canino superiore						33	34	33	34
Id. id. id.						18	19	20	19

(*) Manca il 1° molare a destra.

	Maccarese									Contorno di Roma			Modica	Catanzaro
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀
37	38	38	38	37	37	37	37	36	36	37	37	37	39	32
31	32	33	32	31,5	32	31	31,5	31	31	32	32	33	33,5	28
14	13,5	14	13,5	13	14	13	13	13	12,5	13	13	13,5	15	11,5
18	18	18	17,5	18	18	17	18	16,5	17,5	16,5	16,5	17	19	15
7,5	7,5	8,5	7,5	8	8	8	8,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	8	7,5
16	17	17	17	16,5	17,5	17	16,5	16	16	16,5	16,5	16,5	17	14.5
9	9	9,5	9	9,5	9	9	9,5	9	9,5	9,5	9,5	9	10	7.25
5	4,5	4,5	4,5	4,5	4.25	4,5	5	4,5	4,5	4,75	4,5	4,5	5	— (*)
7,5	7,25	7,5	7,25	7,5	7	7	7	7	7	7,5	7,5	7,5	7,5	7
8	8,25	8	8,25	8	8	7,75	8	8	7.25	8	8	8	8,5	7
2,5	3	2,75	3	3	3	3	3	2,75	2,75	3	3	3	3	2,5
2.5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2.5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2.5
2	1,75	2	1,75	2	2	1,75	1.75	1,75	1.75	1,75	1,75	2	2,5	1,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2.5	2,5	2,5	2.5	2,5	2,5	2,5	2.5	2,75	2,5
3,5	3,25	3	3,25	3	3	3	3	3	3,5	3	3	3	3	2,5
2	2	1,75	2	1,5	1.5	1,5	1.75	1,75	1,5	1,5	1,75	1,75	2	1.5
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
302	303	313	303	307	311	302	307	310	310	311	311	321	309	315
136	128	133	128	126	136	126	126	130	125	126	126	131	138	129
175	170	170	166	175	175	165	175	165	175	161	161	165	175	169
73	71	81	71	78	78	78	83	75	75	73	73	73	74	82
156	161	161	161	161	166	165	161	160	160	161	161	161	157	163
88	85	90	85	92	88	88	92	90	95	92	92	88	92	82
49	43	43	43	44	44	44	49	45	45	46	44	44	46	—
73	69	71	69	73	68	68	68	70	70	73	73	73	69	79
81	78	76	78	78	78	75	78	80	78	78	78	78	78	79
24	28	26	28	29	29	29	29	28	28	29	29	29	28	28
24	24	24	24	24	24	24	24	25	25	24	24	24	23	28
19	17	19	17	19	19	17	17	18	18	17	19	19	18	17
24	24	24	24	24	24	24	24	25	25	24	24	24	25	28
34	31	28	31	29	29	29	29	30	35	29	29	29	28	28
19	19	17	19	15	15	15	17	18	15	15	17	17	18	17

Talpa europaea Linn.	Contorno di Torino								
	* ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂
(Misure assolute in millimetri)									
Lunghezza totale	170	180	184	180	180	185	178	187	179
Id. massima del cranio	35	36	37	35	37	37	37	38	37
Id. della coda	30	30	31	28	28	31	30	33	26
Id. del muso dagli incisivi all'apice .	7,5	9	9	7	8	7	7,5	8	8
Larghezza massima del muso	11	11	11	11	10	10	8	8,5	9
Id. alla base della parte nuda . .	5	6	5	6	6	5,5	5,5	6	6
Distanza dall'occhio all'apice del muso . .	20	19	21	18	20,5	20	19	22	20
Larghezza massima del piede anteriore . .	18	20	20	18	19	19	18	19	18
Lunghezza id. id. senza le unghie	14,5	17	16	16,5	16	18	15	16	16
Id. id. del piede posteriore id.	17	18	18	18	17	19	17	17,5	17
Larghezza massima id. id.	7,5	8	8	8	7,5	9	7,5	8	8
(Misure in 360^{esimi} somatici)									
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. della coda	309	300	302	288	272	302	292	313	253
Id. del muso dagl'incisivi all'apice .	77	90	88	72	78	68	73	76	78
Larghezza massima del muso	113	110	107	113	97	97	78	81	88
Id. alla base della parte nuda . .	51	60	49	62	58	54	54	57	58
Distanza dall'occhio all'apice del muso . .	206	190	204	185	199	195	185	208	195
Larghezza massima del piede anteriore . .	185	200	195	185	185	185	175	180	175
Lunghezza id. id. senza le unghie	149	170	156	170	156	175	146	153	156
Id. id. del piede posteriore id.	175	180	175	185	165	185	165	166	165
Larghezza massima id. id.	77	80	78	82	73	88	73	76	78

(1) Individuo albino.

Saluzzo					Rivarossa		Rivoli	Lanzo	Sassi	Andonno	Cadore			Urbino
10 ♂	11 ♂	12 ♂	13 ♂	14 ♂	15 ♂	16 ♂	17 ♂	18 ♂ (1)	19 ♂ (1)	20 ♂	21 ♂	22 ♂	23 ♂	24 ♂
65	188	188	174	168	170	185	180	183	169	184	173	188	180	167
37	38	37	36	35	36	37	36	36	36	38	35	36	34	36
31	30	27	28	30	30	33	29	32	30	35	27	33	28	29
6,5	9	7	7	7,5	8	8	8	9	9	8,5	7	9	7	8
10	9	9	10	9	11	12	11,5	12	12	10	11	11	10	11
5,5	5,5	5	6,5	5,5	6	6	6	5,5	5	6	6	6	5,5	6
8,5	21	21	20	20	19	19	21	21,5	20	22	20,5	20	19,5	20
.6,5	19	19	19	18	20	20	20	19,5	19	20	18	18	17	18,5
.3,5	15	17,5	17	16,5	18	19	18	17	17	18	16	17	15	17
15	17	18	17,5	17	19	20	18	19	18	18	18	18	17	20
7,5	8	8	8,5	7,5	9	8,5	8	8	8	9,5	8	8,5	8,5	8
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
302	284	263	280	309	300	321	290	320	300	331	278	330	297	290
63	85	68	70	77	80	78	80	90	90	81	72	90	74	80
97	85	88	100	93	110	117	115	120	120	95	113	110	106	110
54	52	49	65	57	60	58	60	55	50	57	62	60	58	60
180	199	204	200	206	190	185	210	215	200	208	211	200	207	200
161	180	185	190	185	200	195	200	195	190	189	185	180	180	185
131	142	170	170	170	180	185	180	170	170	170	165	170	159	170
151	161	175	175	175	190	195	180	190	180	170	185	180	180	200
73	76	78	85	77	90	83	80	80	80	90	82	85	90	80

Talpa europaea Linn.	Rivoli (Piemonte)	Torino								
	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂
(Misure assolute in millimetri)										
Lunghezza massima del cranio	36	35	36	37	36	34	34	35	35	37
Id. basale id.	31	31	31	32	31	30	29,5	30	29,5	31
Larghezza zigomatica	12,5	11	12	13	12	12	12,5	11,5	12	13
Id. mastoidea	17,5	17	16,5	17,5	16,5	16	17	16,5	17	18
Id. interorbitale	7,5	8	7,5	7,5	7,5	6,5	7	7	7	7
Lunghezza del palato	15	14	15	15,5	15	14	14	14	15	14,5
Larghezza al di fuori del 1° molare	8,5	8	9	9	9	8,5	8,5	8	8	10,5
Id. all'indentro id.	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4	5
Spazio occupato dai molari superiori	7	6,5	6,5	6,5	6,5	6	6,5	6,5	6,5	7,25
Id. id. inferiori	8	7	7	7	7	6,5	7	7	7,5	7,5
Larghezza del 2° molare superiore	2,5	2,5	2,5	2,25	2,5	2	2,5	2,75	2,5	2,5
Lunghezza id. id.	3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	3	3	2,75	3
Larghezza id. inferiore	1,5	1,5	1,5	1.5	1,5	2	1,5	1,5	1,5	1,5
Lunghezza id. id.	2	2,5	2,5	2,5	2,5	2,25	2	2,5	2	2,5
Altezza del canino superiore										
Id. id. inferiore										
(Misure in 360esimi somatici)										
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	310	319	310	311	310	318	312	309	304	302
Larghezza zigomatica	125	114	120	126	120	127	132	118	123	126
Id. mastoidea	175	175	165	170	165	169	180	170	174	175
Id. interorbitale	75	82	75	73	75	69	74	72	72	68
Lunghezza del palato	150	144	150	151	150	148	148	144	154	141
Larghezza al di fuori del 1° molare	85	82	90	88	90	90	90	82	82	102
Id. all'indentro id.	45	46	45	44	45	48	48	46	41	49
Spazio occupato dai molari superiori	70	67	65	63	65	63	69	67	67	71
Id. id. inferiori	80	72	70	68	70	69	74	72	77	73
Larghezza del 2° molare superiore	25	26	25	22	25	21	26	18	26	24
Lunghezza id. id.	30	26	25	24	25	26	32	31	28	29
Larghezza id. inferiore	15	15	15	16	15	16	16	15	15	15
Lunghezza id. id.	20	26	25	24	25	24	21	26	21	24
Altezza del canino superiore										
Id. id. inferiore										

(1) Individuo albino.
(2) Cranio avuto dal Dott. F. Lataste.

				Saluzzo					Valli di Lanzo	Sassi (Piemonte)		Rivarossa (Piemonte)	Torino			Domodossola	Gironda (Francia)	Andrate (Piemonte)
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	[illegible]	♂	[illegible]	♂	[illegible]	[illegible]	♀
									(1)	(1)	(1)						(2)	
37	36	36	38	36	36	37	36	37	36	35	36	37	37	36	36	33	35	32
32	31	31	32	30	32	31,5	31	32	31	30	31	31,5	32	31	31,5	28	30	28
12	11	12	12,5	12,5	11,5	13	12	12,5	13	11	11,5	13	13	12,5	12,5	11	13	9,5
17	17	17	17,5	16,5	17	18	17	17,5	18	17	17	18	17.75	17,25	17	15,5	18	16
7,5	7,5	7,5	8	8	8	8	7,5	8	7,5	7,5	8	8	7,5	7	7	7	7	6
1,5	15	15	15	15	15,5	15	15	15,5	15	14,5	14	15,5	15,5	15	16	14	14,5	13,5
8,5	9	8,5	9	9	8	9.5	8	9	8	8,5	9	8	9,5	9	8,5	7	8,5	6,5
5	4,5	4	4,75	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4	4	4,5	4,5	4,75	4,5	4,5	3,5	5	3,5
6,5	6	6,5	7	6,5	7	6,5	6,5	6,5	6,25	6.25	6,5	6,5	6,75	7	7	6	6	5,5
7,5	7	7	7,5	7	7,5	7	7	7,5	7.5	7	7	7,5	7,5	7,75	7,5	7	7	7
2	2,5	2,5	2,25	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,25	2,25	2,25	2,25	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2
2,25	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,75	1,5	1,5	1,75	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,25	1,5	1,5
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,75	2,5	2,5	2	2,5	2,5
3,25	2,5	3	2,5	3	3	2,75	3	3	2,5	2,5	2.5	2,75	3,5	3	3			
1,5	1	1.5	1,5	1,5	1,5	1,5	1.5	1,5	1,5	1,5	1,25	1,5	1,75	1,75	1,75			
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
311	310	310	303	300	320	307	310	311	310	309	310	307	311	310	315	305	309	315
117	115	120	118	125	115	126	120	122	130	113	115	126	126	125	125	120	134	107
165	170	170	166	165	170	175	170	170	180	170	170	175	173	173	170	169	185	180
73	75	75	76	80	80	78	75	73	75	82	80	78	73	70	70	76	72	68
146	150	150	142	150	155	146	150	151	150	149	140	146	151	150	160	153	149	152
83	90	85	85	90	80	92	80	88	80	87	90	78	92	90	85	76	87	73
49	45	40	45	45	45	44	45	44	40	41	45	44	46	45	45	38	51	39
63	60	65	66	65	70	63	65	63	63	64	65	63	66	70	70	65	62	62
73	70	70	71	70	75	68	70	72	75	72	70	73	73	78	75	76	72	79
19	25	25	21	25	25	24	25	24	23	23	23	22	24	25	25	22	26	23
22	25	25	23	25	25	24	25	24	25	26	25	24	24	25	25	27	26	28
15	15	15	15	15	18	15	15	17	15	15	15	15	15	15	15	14	15	17
24	25	25	23	25	25	24	25	24	25	26	25	24	27	25	25	22	26	28
32	25	30	28	30	30	27	30	29	25	26	25	27	34	30	30			
15	10	15	15	15	15	15	15	15	15	15	13	15	17	18	18			

Talpa europaea Linn.	***Contorno di Torino***						***Saluzzo***	
	1 ♀	2 ♀	3 ♀	4 ♀	5 ♀	6 ♀	7 ♀	8 ♀
(Misure assolute in millimetri)								
Lunghezza totale	158	170	172	158	165	160	164	170
Id. massima del cranio	34	35	36	34	35	35	35	35
Id. della coda	27	28	27	26	27	24	31	24
Id. del muso dagli incisivi all'apice .	8	7,5	8	6	7	6,5	7,5	8
Larghezza massima del muso	10	9,5	10	8	8	9	11	8
Id. alla base della parte nuda . .	6	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	5
Distanza dall'occhio all'apice del muso . .	17	20,5	18,5	20	19	19	18	20
Larghezza massima del piede anteriore . .	18	19	17,5	17	19	18	17	18
Lunghezza id. id. senza le unghie	16	16	15	16	16	15	16	17
Id. id. del piede posteriore id.	18	17	17	17	17	15	17	17
Larghezza massima id. id.	8	7,5	7	7,5	8	7	7	7,5
(Misure in 360^{esimi} somatici)								
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. della coda	286	288	270	275	278	247	319	247
Id. del muso dagl'incisivi all'apice .	85	77	80	64	72	67	77	82
Larghezza massima del muso	106	98	100	85	82	93	113	82
Id. alla base della parte nuda . .	64	57	55	58	57	57	57	51
Distanza dall'occhio all'apice del muso . .	180	211	185	212	196	196	185	206
Larghezza massima del piede anteriore . .	191	196	175	180	196	185	175	185
Lunghezza id. id. senza le unghie	169	165	150	169	165	154	165	175
Id. id. del piede posteriore id.	191	175	170	180	175	154	175	175
Larghezza massima id. id.	85	77	70	79	82	72	72	77

(1) Individuo albino.

Saluzzo			***Rivarossa***		***Rivoli***			***Biella***	***Cumiana***	***Sassi***		***Monte Soglio***	***Buttrio***
11 ♀	12 ♀	13 ♀	14 ♀	15 ♀	16 ♀	17 ♀	18 ♀	19 ♀	20 ♀	21 ♀ (1)	22 ♀ (1)	23 ♀	24 ♀
156	155	167	168	160	174	165	172	176	173	150	165	158	155
34	34	36	36	35	36	35	35	35	34	35	35	36	34
28	27	30	31	28	28	26	30	31	28	26	27	25	27
8,5	7	6,5	8	7	7,5	7,5	7	7	7,5	7	7	8	7
10	10	9	11	9	10	10	10	11	9,5	10	11	10	9
6	5	6	6	5,5	5	5,5	6	5,5	5,5	5	5,5	5	5,5
19	18,5	18,5	19	18	21	18	21	20	18.5	19	18	19	18,5
18	17,5	18	18	19	20	18	18	18,5	18	16.5	17	17,5	16
15	15	14	16	16	18	18	16	16	16	15	14	15	15
17	17	18,5	17	18	20	16,5	16,5	17	17.5	16.5	17	16,5	17
7,5	7	8	8	8	8,5	8	7,5	8	8	7	6,5	7,5	7
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
297	286	300	310	288	280	268	309	319	217	268	278	250	286
90	74	65	80	72	75	77	72	72	79	72	72	80	74
106	106	90	110	93	100	103	103	113	101	103	113	100	95
64	53	60	60	57	50	57	62	67	58	31	37	50	58
201	196	185	190	185	210	185	216	206	196	196	185	190	196
191	185	180	180	196	200	185	185	190	191	170	175	175	169
159	159	140	160	165	180	185	165	165	169	154	144	150	159
180	180	185	170	185	200	170	170	175	185	170	175	165	180
79	74	80	80	82	85	82	77	82	85	72	67	75	74

Talpa europaea Linn.	**Rivoli** (Piemonte)			**Biella**	**Torino**		
	1 ♀	2 ♀	3 ♀	4 ♀	5 ♀	6 ♀	7 ♀
(Misure assolute in millimetri)							
Lunghezza massima del cranio	35	35	36	38	35	34	34
Id. basale id.	30	30	31	33	30	29	30,
Larghezza zigomatica	11	11,5	12,5	12	11	11	11,
Id. mastoidea	16,5	16,5	16,5	18	16,5	16	16
Id. interorbitale	7	7	8	8,5	7	7	7
Lunghezza del palato	14	15	15	16	15	14	14
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	9	8,5	8	8,5	7	7,5	8
Id. id. all'indentro id. .	4,5	4,5	4	4,5	4	4	4,
Spazio occupato dai molari superiori . .	6,5	6,5	6,25	6	6	6,25	6,
Id. id. inferiori . .	7	7	7	7,5	7	7	7
Larghezza del 2° molare superiore . .	2	2	2	2,5	2	2,5	2
Lunghezza id. id. . .	2,5	2,25	2,25	2,75	2,5	2,5	2,
Larghezza del 2° molare inferiore . . .	1,25	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,
Lunghezza id. id. . .	2,5	2,5	2,5	2,5	2.5	2,5	2,
Altezza del canino superiore.					2,5	2,75	2,
Id. id. inferiore					1,5	1,75	1,
(Misure in 360esimi somatici).							
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	36
Id. basale id.	309	309	310	313	309	307	32
Larghezza zigomatica	113	118	125	114	113	116	12
Id. mastoidea	170	170	165	170	170	169	16
Id. interorbitale	72	72	80	80	72	74	74
Lunghezza del palato	144	154	150	152	154	148	14
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	93	87	80	80	72	79	8
Id. id. all'indentro id. .	46	46	40	43	41	42	4
Spazio occupato dai molari superiori . .	67	67	63	57	62	66	6
Id. id. inferiori . .	72	72	70	71	72	74	74
Larghezza del 2° molare superiore . .	21	21	20	24	21	26	21
Lunghezza id. id. . .	26	23	23	26	26	26	2
Larghezza del 2° molare inferiore . . .	13	15	15	14	15	16	1
Lunghezza id. id. . . .	26	26	25	24	26	26	2
Altezza del canino superiore					28	29	2
Id. id. id.					15	19	1

(1) Individuo albino.

Saluzzo								Cumiana	Rivarossa	Sassi (Torino)	Torino	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀
										(1)		
33	35	35	35	34	35	34	35	34	35	35	35	36
29	30	30	29,5	29	30	29	29,5	29	29,5	30	30	30,5
10	11,5	11,5	11,5	10	11,5	10,5	11,5	11	11,5	11	12	12
16	16,5	15,5	16	16	16,5	16	16	16	16	16,5	16	16
7	7	7	7,5	7,5	7	7,5	7	7	7	8	7,5	7
14	14,5	14	15	14	14,5	14	14,5	14	14	14,5	14,75	15
8,5	8,5	8,5	8	9	8,5	8	8	9	8	8,5	8	8,5
4,5	4,5	4,5	4	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4	4,5	4,5
6	6,5	6	6,25	6	6,5	6,25	6,5	6	6,5	6,25	6,5	6,75
7	7	7,5	7	6,5	7	7	7	7	7	7	7,25	7,25
2,25	2	2	2,25	2,5	2	2	2	2	2	2,5	2,5	2,5
2,25	2,25	2,25	2,25	2,5	2,25	2,5	2,5	2,25	2,5	2,5	2,5	2,5
1,25	1,5	1,25	1,25	1,5	1,5	1,5	1,25	1,5	1,5	1,25	1,5	1,5
2,5	2,25	2,25	2,25	2,5	2,75	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	2,5
2,75	2,75	—	2,5	3	2,75	2,75	2,75	2	2,75	2,5	3	2,75
1	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1,25	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
316	309	309	304	307	309	307	304	307	304	309	309	305
109	118	118	118	106	118	111	118	116	118	113	123	120
175	170	160	165	169	170	169	165	169	165	175	165	160
76	72	72	77	77	72	77	72	74	72	77	77	70
153	149	144	154	148	149	148	144	148	148	149	152	150
93	87	87	82	95	87	85	82	95	82	87	82	85
49	46	46	41	48	46	48	46	48	46	41	46	45
65	67	62	64	64	67	66	67	64	67	67	67	68
76	72	77	72	69	72	74	72	74	72	72	77	73
25	21	21	23	26	21	21	21	21	21	26	26	25
27	23	23	23	26	23	26	26	24	26	26	26	25
14	15	13	13	16	15	16	13	16	15	13	15	15
27	23	23	23	26	23	26	26	21	26	26	26	25
30	28	—	26	32	28	29	28	21	28	26	31	28
11	15	15	15	11	15	13	15	11	15	13	15	15

Talpa europaea Linn.	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂	11 ♂	12 ♂
(Misure assolute in millimetri)												
Lunghezza totale	177	185	180	192	173	162	188	185	183	—	174	[illegible]
Id. massima del cranio	36	36	35	37	36	34	37	37	36	34	35	[illegible]
Id. della coda	26	28	25	29	30	23	32	30	27	—	25	[illegible]
Id. del muso dagli incisivi all'apice	6	8	8,5	7	8	7	8	8,5	8	8	8	[illegible]
Larghezza massima del muso	9	10	10	10	10	9	11	11	10	10	11	[illegible]
Id. del muso alla base della parte nuda	6,5	7	7	6	6	6	7	6	6	7	6,5	[illegible]
Distanza dall'occhio all'apice del muso .	21	21	20	20	20	18	21	21	20	18	18	[illegible]
Larghezza massima del piede anteriore .	21	20	20	18	20	18	20	19,5	20	20	20	[illegible]
Lungh. mass. del piede ant. senza le unghie	18	18	18	18	20	16,5	19	18	17,5	18	18	[illegible]
Id. id. post. id.	18	20	19	19	18	17	19	19	19	17	20	[illegible]
Larghezza id. id. id.	10	10	9,5	9	10	8	9	8,5	9	9	10	[illegible]
(Misure in 360esimi somatici)												
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	[illegible]
Id. della coda	260	280	257	282	300	244	311	292	270	—	257	[illegible]
Id. del muso dagli incisivi all'apice	60	80	87	68	80	74	78	83	80	85	82	[illegible]
Larghezza massima del muso	90	100	103	97	100	95	107	107	100	106	113	[illegible]
Id. del muso alla base della parte nuda	65	70	72	58	60	64	68	58	60	74	67	[illegible]
Distanza dall'occhio all'apice del muso .	210	210	206	195	200	191	204	204	200	191	185	[illegible]
Larghezza massima del piede anteriore .	210	200	206	175	200	191	195	190	200	212	206	[illegible]
Lungh. mass. del piede ant. senza le unghie	180	180	185	175	200	175	185	175	175	191	185	[illegible]
Id. id. post. id.	180	200	196	185	180	180	185	185	190	180	206	[illegible]
Larghezza id. id. id.	100	100	98	88	100	85	88	83	90	95	103	[illegible]

	mburgo												Bucarest		
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	1	2	3
	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	
1	190	180	178	—	—	180	178	170	160	170	168	170	158	147	160
7	37	36	37	36	37	36	36	34	34	34	34	34	35	35	35
1	29	31	29	—	—	28	30	25	25	27	25	26	29	27	27
[illegible]	9,5	8,5	7	8	8	8,5	8	8	7	7	8	8	7	6,5	6
2	12	10,5	12	10	12	10	10,5	10	8	9	10	9	9	8	10
7	7,25	6	7	6	6.75	6	6,5	6,75	5	6	6	6	6	5.5	5
1	21	18,5	19	18	19	18	18,5	19	18	18	18	17.5	16,5	18	17
1,5	21	20	19	20	20	20	19.5	19	17	18	18	18	19	19	16
0	19	18	18,5	18	19	18,5	19	18	17	16	15.5	17	17	16	15,5
0	19	19	20	19	20	19	19	18	18	18	18	17	18,5	19	17
.0	9	8.5	9	8	8.25	9	8,5	8	8	8	8	8	10	8	8
60	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
02	282	310	282	—	—	280	300	265	265	286	265	275	298	278	278
38	92	85	68	80	78	85	80	85	74	74	85	85	72	67	62
17	117	105	117	100	117	100	105	106	85	95	106	95	93	82	103
68	71	60	68	60	66	60	65	71	53	64	64	64	62	57	51
04	204	185	185	180	185	180	185	201	191	191	191	185	170	185	175
09	204	200	185	200	195	200	195	201	180	191	191	191	196	196	165
95	185	180	180	180	185	185	190	191	180	169	164	180	175	165	160
95	185	190	195	190	195	190	190	191	191	191	191	180	190	196	175
97	88	85	88	80	85	90	85	85	85	85	85	85	103	82	82

Talpa europaea Linn.

	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♂	9 ♂	10 ♂
(Misure assolute in millimetri)										
Lunghezza massima del cranio	36	36	35	37	36	34	37	37	36	34
Id. basale id.	31	32	31	32	30	29	31	31	32	29,5
Larghezza zigomatica	12	12	11,5	12	11,5	11	12	11,5	12,5	11
Id. mastoidea	17	17	16,5	17	16,5	16	17	17	17	16
Id. interorbitale	7	7	7	7	7	6,5	7	7	7	6,5
Lunghezza del palato	15	15	14	15	15	14	15	14,5	15	14
Larghezza al di fuori del 1° molare	8,5	7,5	7,5	8,5	8	8	8	7,5	8,5	8,25
Id. all'indentro id.	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4	4,5	4,5	4,5	4
Spazio occupato dai molari superiori	6,25	6	6	6	6	5,5	6	6,5	6	6
Id. id. inferiori	6,75	7	6,5	6,5	7	6,5	7	7	6,5	6.25
Larghezza del 2° molare superiore	2	2	2	2,25	2,25	2	2	2.25	2	2
Lunghezza id. id.	2,25	2,25	2,25	2.25	2,25	2	2,25	2,5	2	2
Larghezza id. inferiore	1,25	1,25	1,25	1.25	1,25	1,20	1,25	1,25	1,25	1,25
Lunghezza id. id.	2,25	2,5	2	2,5	2.25	2,25	2,5	2,5	2,5	2
Altezza del canino superiore	3	3	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,75	2,25
Id. id. inferiore	1.5	1,5	1	1.5	1,25	1	1,5	1,25	1,5	1,25
(Misure in 360esimi somatici)										
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	310	320	319	311	300	307	302	302	320	312
Larghezza zigomatica	120	120	118	117	115	116	117	112	125	116
Id. mastoidea	170	170	170	165	165	169	165	165	170	169
Id. interorbitale	70	70	72	68	70	69	68	68	70	69
Lunghezza del palato	150	150	144	146	150	148	146	141	150	148
Larghezza al di fuori del 1° molare	85	75	77	83	80	85	78	73	85	87
Id. all'indentro id.	45	45	46	44	45	42	44	44	45	42
Spazio occupato dai molari superiori	63	60	62	58	60	58	58	63	60	64
Id. id. inferiori	68	70	67	63	70	69	98	68	65	66
Larghezza del 2° molare superiore	20	20	21	22	23	21-	19	22	20	21
Lunghezza id. id.	23	23	23	22	23	21	22	24	20	21
Larghezza id. inferiore	13	13	13	12	13	13	12	12	13	13
Lunghezza id. id.	23	23	21	22	23	24	24	24	25	21
Altezza del canino superiore	30	30	26	22	25	26	24	24	28	26
Id. id. inferiore	15	15	10	15	13	11	15	12	15	13

(*) Dente di forma corta e molto larga, anomala.

burgo													Bucarest		
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	1	2	3
♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♀	♂
37	36	37	37	36	37	36	36	34	34	34	34	34	35	35	35
32,5	31	32	32	31,5	32	31	30,5	28,5	30	29	28	30	30	30	31
12,25	11	12	12	11,5	12,5	11	11.25	11	11	11,25	11.5	11,5	12	12	11
17	17	17,5	17	17	17	17	17,25	16	16	17	16,5	16.5	16,5	17	16,5
7,5	7	7	7	7	7	6.5	6.75	6.75	6,75	7	7	7	7	7	7
15,5	15	15	15	15	16	14,75	15	14	14	14	14	14	15	14	14.5
8	8,5	9	8,5	8,25	8,5	8	8,25	8	8	8	8	9.75	8	8	8
4,5	4.5	5	4,5	4,25	4,5	4,25	4,5	4,5	4	4,5	4,5	4.25	4,5	4.5	4
6	6	6,25	6,25	6	6	6	6	6	5,5	5.75	6	5,75	6	6	6,25
6,75	6,5	7	6,75	6,5	6,75	6,5	6,5	6,5	6.5	6,25	6,5	6,5	7	6,5	7
2	2	2	2,25	2,5	2,25	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,25	2	2.25	2	2	2	2,25	2,25	2	2,5	2	2.25	2.75	2	2,25	2,25
1,25	1,25	1,25	1,5	1,25	1,5	1,25	1,5	1,25	1,5	1,25	1.25	1,25	1,25	1,25	1.25
2,25	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2.5	2,5	2	2,5	2.5	2.5	2.5	2,25	2,25	2,25
2,5	2,75	3	2,5	—	2	2,5	2,5	2	2.5	2.5	2.25	2	2,25	3	rotti
1,5	1,25	1,5	1,25	—	1	1,25	1,5	1,25	1	1	1	1,25	1,25	1,5	1,25
360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
316	310	311	311	315	311	310	305	302	318	307	297	318	309	309	319
119	110	117	117	115	122	110	113	116	116	119	122	122	123	123	113
165	170	170	165	170	165	170	173	169	169	180	174	174	175	175	170
73	70	68	68	70	68	65	68	71	71	74	74	74	72	72	72
151	150	146	146	150	156	148	150	148	148	148	148	148	144	144	149
78	85	88	82	83	83	80	83	85	85	85	85	82	82	82	82
44	45	49	44	43	44	43	45	48	42	47	47	45	46	46	41
58	60	63	61	60	58	60	60	64	58	61	64	61	62	62	64
66	65	68	66	65	66	65	65	69	69	66	69	69	72	67	72
19	20	19	22	25	22	20	20	21	21	21	21	21	21	21	21
22	20	22	19	20	19	23	23	21	26	21	24	24	21	23	23
12	13	12	15	13	15	13	15	13	13	13	13	13	13	13	13
22	25	24	24	25	24	25	23	21	26	26	26	26	23	23	23
24	28	29	24	—	19(*)	25	23	21	26	26	24	21	23	30	rotti
15	13	15	12	—	10	13	15	13	11	11	11	13	13	15	13

Talpa europaea Linn.	***Francia*** (1)	***Urbino***	***Andonno*** (Piemonte)	***Candide*** (Cadore)			***Buttrio*** (Friuli)
	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	1 ♀
(Misure assolute in millimetri)							
Lunghezza massima del cranio	34	36	38	34	36	35	34
Id. basale id.	29,5	31	33	30	31	30	29
Larghezza zigomatica	12	13.5	13	11,5	11,5	11,5	10,5
Id. mastoidea	16	17,5	18	17	17,5	17	16
Id. interorbitale	6.5	7,5	7,5	7	8	8	7
Lunghezza del palato	14	15,5	16	14	15	14,5	14
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	8,5	8	8,25	7,75	7,5	7,5	8
Id. id. all'indentro id.	5,5	4,5	4,5	4,5	4,25	4	4
Spazio occupato dai molari superiori . .	6,5	6,5	6,5	6	6	6	5,5
Id. id. inferiori . .	6,5	7,5	7	7	7	6,75	6,5
Larghezza del 2° molare superiore . . .	2,5	2,5	2,25	2,25	2,25	2,5	2
Lunghezza id. id. . . .	2,5	2,5	2,5	2,25	2,25	2	2,25
Larghezza id. inferiore . . .	1,5	1,25	1,5	1,25	1,25	1,25	1,25
Lunghezza id. id. . . .	2.25	2,5	2.5	2	2,5	2,25	2,25
Altezza del canino superiore				2,25	3	2	2,5
Id. id. inferiore				1.25	1,5	1	1
(Misure in 360esimi somatici)							
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	312	310	313	318	310	309	307
Larghezza zigomatica	127	135	123	122	115	118	111
Id. mastoidea	169	175	170	180	175	175	169
Id. interorbitale	69	75	71	74	80	82	74
Lunghezza del palato	148	155	152	148	150	149	148
Larghezza id. al di fuori del 1° molare	90	80	78	82	75	77	85
Id. id. all'indentro „	58	45	43	47	43	41	42
Spazio occupato dai molari superiori . .	69	65	62	64	60	62	58
Id. id. inferiori . .	69	75	66	74	70	70	69
Larghezza del 2° molare superiore . . .	26	25	21	24	23	26	21
Lunghezza id. id. . . .	26	25	24	24	23	21	24
Larghezza id. inferiore . . .	16	13	14	13	13	13	16
Lunghezza id. id. . . .	24	25	24	21	23	23	24
Altezza del canino superiore				24	30	21	26
Id. id. inferiore				13	15	10	11

(1) Cranio avuto dal sig. Dott. F. Lataste.

Talpa europaea Linn.	Contorni di Firenze										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♀	♀	♀	♀	♀
(Misure assolute in millimetri)											
Lunghezza totale	194	188	183	185	178	176	165	165	163	170	162
Id. massima del cranio . .	39	37	38	37	36	36	35	36	35	35	36
Id. della coda	34	30	34	34	32	31	27	27	29	30	27
Id. del muso dagli incisivi all'apice.	8	10	9	9	8	8,5	7	7	7	8	7.5
Larghezza massima del muso	12	11	11	11	10	10,5	10	10	9,5	10	11
Id. del muso alla base della parte nuda	6,5	7	7	7	6,5	7	6	5,5	5,5	6	5.5
Distanza dall'occhio all'apice del muso.	22	20	20	20	19	20	20	18	18	18	20
Larghezza massima del piede anteriore	20	18	19	19	18	18,5	18	17	17	18,5	18
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	19	18	17,5	18	17	18	16	16	15	17	16
Larghezza del piede posteriore	10,5	10	10	9,5	9,5	9,5	9	9	9	9	9
Lunghezza massima del piede posteriore	19	18	18	18,5	18	18	18	18	17.5	18	18
(Misure in 360^{esimi} somatici)											
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. della coda	314	292	322	331	320	310	278	270	298	309	270
Id. del muso dagli incisivi all'apice.	74	97	85	88	80	85	72	70	72	82	75
Larghezza massima del muso	111	107	104	107	100	105	103	100	98	103	110
Id. del muso alla base della parte nuda	60	68	66	68	65	70	62	55	57	62	55
Distanza dall'occhio all'apice del muso.	203	195	189	195	190	200	206	180	185	185	200
Larghezza massima del piede anteriore	185	175	180	185	180	185	185	170	175	190	180
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	175	175	166	175	170	180	165	160	154	175	160
Larghezza del piede posteriore	97	97	95	92	95	95	93	90	93	93	90
Lunghezza massima del piede posteriore	175	175	170	180	180	180	185	180	180	185	180

Talpa europaea Linn.	Contorni di Firenze										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	♂	♂	♂	♂	♂	♂	♀	♀	♀	♀	♀
(Misure assolute in millimetri)											
Lunghezza massima del cranio	39	37	38	37	36	36	35	36	35	35	36
Id. basale id.	34	32	33	32	32	31,5	31	31	30	30	30
Larghezza zigomatica . . .	13	13	12,5	12,5	13	12,75	12	12	12	12	12,5
Id. mastoidea . . .	18	18	18	17,5	17	17	17	16,5	17	17	17
Id. interorbitale . .	7,75	8	7,5	7,25	7,5	7,25	7,5	7,25	7	7	7
Lunghezza del palato . . .	16,5	15	15	15	15	14,75	15	15	15,5	15	14,5
Larghezza del palato al di fuori del 1° molare . .	8,5	8,5	8	8	8	8	8	7,5	8	8,5	8
Larghezza del palato all'indentro del 1° molare .	5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,25	4,5	4,5	4,5
Spazio occupato dai molari superiori	7	7	7	6,5	6,5	6,5	7,5	7,5	6,5	6,5	7
Id. dai molari inferiori . .	7,5	7,25	7,25	7	7	7	7,5	7	7	7	7,25
Larghezza del 2° molare sup.	2,75	2,5	2,5	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25	2,5
Lunghezza id. id.	2,50	2,25	2,5	2,25	2,25	2,25	2,50	2,5	2,25	2,25	2,25
Larghezza id. inf.	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,25	1,5	1,5
Lunghezza id. id.	2,5	2,5	2,5	2,5	2,25	2,25	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Altezza del canino superiore	2,75	2,75	2,75	2,75	2,5	2,5	2,25	2,75	2,5	2,5	3
Id. id. inferiore	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
(Misure in 360esimi somatici)											
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. basale id.	314	311	313	311	320	315	319	310	309	309	300
Larghezza zigomatica . . .	120	126	118	122	130	128	123	120	123	123	125
Id. mastoidea . . .	166	175	170	170	170	170	175	165	175	175	170
Id. interorbitale . .	72	78	71	71	75	73	77	73	72	72	70
Lunghezza del palato . . .	152	146	142	146	150	148	154	150	160	154	145
Larghezza del palato al di fuori del molare . . .	78	83	76	78	80	80	82	75	82	87	80
Larghezza del palato all'indentro del 1° molare .	46	44	43	44	45	45	46	43	46	46	45
Spazio occupato dai molari superiori	65	68	66	63	65	65	77	75	67	67	70
Id. dai molari inferiori . .	69	71	69	68	70	70	77	70	72	72	73
Larghezza del 2° molare sup.	25	24	24	22	23	23	23	23	23	23	25
Lunghezza id. id.	23	22	24	22	23	23	26	25	23	23	23
Larghezza id. inf.	14	15	14	15	15	15	15	15	13	15	15
Lunghezza id. id.	23	24	24	24	23	23	26	25	26	26	25
Altezza del canino superiore	25	27	26	27	25	25	23	28	26	26	30
Id. id. inferiore	14	15	14	15	15	15	15	15	15	15	15

Talpa europaea Linn.	Contorni di Praga								
	1 ♂	2 ♂	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♂	7 ♂	8 ♀	9 ♀
(Misure assolute in millimetri)									
Lunghezza totale	169	170	167	166	168	167	166	160	158
Id. massima del cranio . .	34	35	37	37	36	37	37	35	36
Id. della coda	33	34	32	34	29	33	31	27	33
Id. del muso dagli incisivi all'apice	7,5	8,5	7,5	7	6,5	8	8	7	6,5
Larghezza massima del muso	9	9	10	9	9	9	8,5	8	7
Id. del muso alla base della parte nuda	6	6	6	6	6	6	6	6,75	6
Distanza dall'occhio all'apice del muso	18	21	18	18	18	20	18,5	19	17
Larghezza massima del piede anteriore	19	18	20	19	19	21	19,5	19	19
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	18	17	17	17	17	18,5	17,5	17,5	17,5
Id. id. del piede posteriore .	19	18	20	19,25	19	19,5	19	18	18,5
Larghezza massima del piede posteriore	9	8	10	9	9	9	8,5	9	9
(Misure in 360esimi somatici)									
Lunghezza massima del cranio	360	360	360	360	360	360	360	360	360
Id. della coda	349	350	311	331	290	321	302	278	330
Id. del muso dagli incisivi all'apice	79	87	73	68	65	78	78	72	65
Larghezza massima del muso	95	93	97	88	90	90	83	82	70
Id. del muso alla base della parte nuda	64	62	58	58	60	60	58	69	60
Distanza dall'occhio all'apice del muso	191	216	175	175	180	195	180	196	170
Larghezza massima del piede anteriore	201	185	195	185	190	204	197	196	190
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie	191	175	165	165	170	180	170	180	175
Id. id. del piede posteriore .	201	185	195	187	190	190	185	185	185
Larghezza massima del piede posteriore	95	82	97	88	90	88	83	93	90

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Diagramma costrutto per indicare la variazione dei caratteri della *Talpa romana* Orfield Thomas e della *Talpa europaea* Linn.

La lunghezza delle linee è determinata dai valori (espressi in 360^{esimi} somatici) delle *classi* estreme osservate per ciascun carattere e per ciascuna *serie* di *varianti*.

Fig. 1. —	*Talpa romana* Orfield Thomas	♂	(Roma)	mandibola	(ingrandita).
„ 2. —	„ „	♀	(„)	cranio visto super.	(id.).
„ 3. —	„ „	♂	(„)	„	(id.).
„ 4. —	*Talpa europaea* Linn.	♂	(Torino)	cranio visto super.	(id.).
„ 5. —	„ „	♂	(„)	mandibola	(id.).
„ 6. —	„ „	♀	(„)	cranio visto super.	(id.).
„ 7. —	*Talpa romana* Orfield Thomas	♀	(Roma)	cranio visto infer.	(id.).
„ 8. —	„ „	♂	(„)	„	(id.).
„ 9. —	„ „	♂	(„)	cranio visto di fianco	(id.).
„ 10. —	*Talpa europaea* Linn.	♂	(Torino)	cranio visto infer.	(id.).
„ 11. —	„ „	♀	(„)	„	(id.).
„ 12. —	„ „	♂	(„)	cranio visto di fianco	(id.).

(Le fotografie dei cranii sono state eseguite dal Dott. Luigi Cognetti de Martiis).

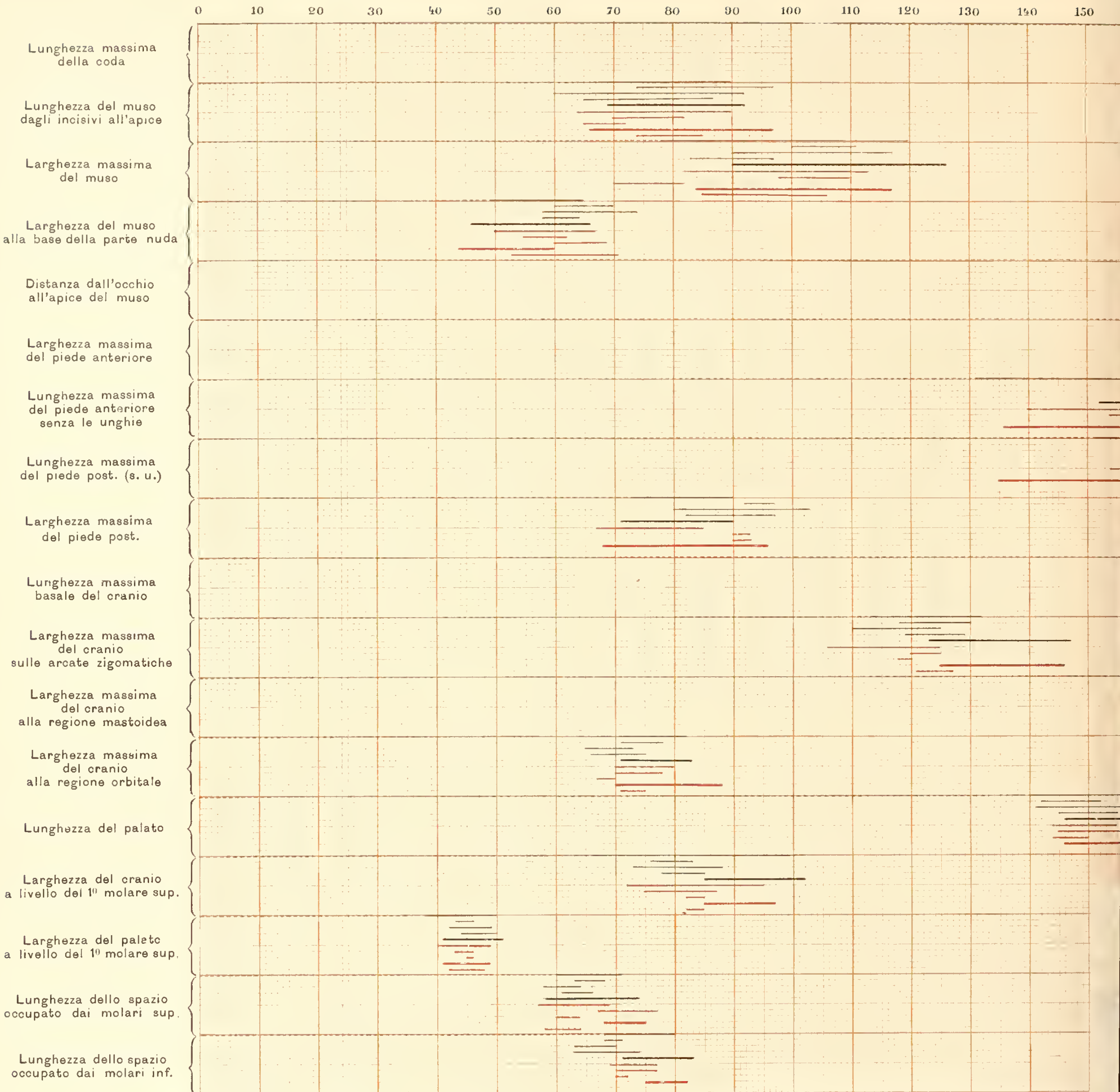
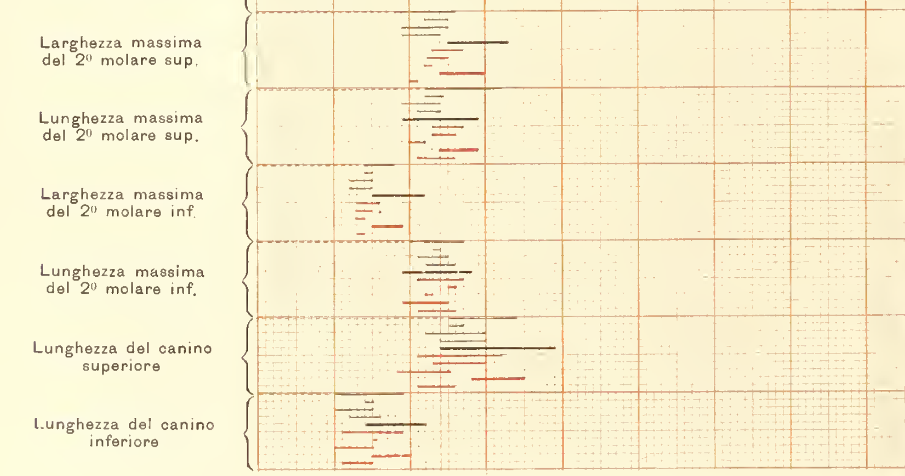
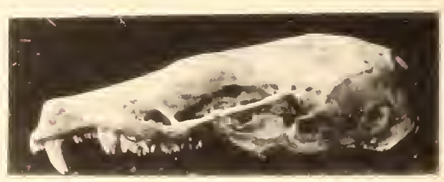


0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
Lunghezza massima della coda
Lunghezza del muso dagli incisivi all'apice
Larghezza massima del muso
Larghezza del muso alla base della parte nuda
Distanza dall'occhio all'apice del muso
Larghezza massima del piede anteriore
Lunghezza massima del piede anteriore senza le unghie
Lunghezza massima del piede post. (s. u.)
Larghezza massima del piede post.
Lunghezza massima basale del cranio
Larghezza massima del cranio sulle arcate zigomatiche
Larghezza massima del cranio alla regione mastoidea
Larghezza massima del cranio alla regione orbitale
Lunghezza del palato
Larghezza del cranio a livello del 1º molare sup.
Larghezza del palato a livello del 1º molare sup.
Lunghezza dello spazio occupato dai molari sup.
Lunghezza dello spazio occupato dai molari inf.
Larghezza massima del 2º molare sup.
Lunghezza massima del 2º molare sup.
Larghezza massima del 2º molare inf.
Lunghezza massima del 2º molare inf.
Lunghezza del canino superiore
Lunghezza del canino inferiore

Fig. 12

Fig. 9



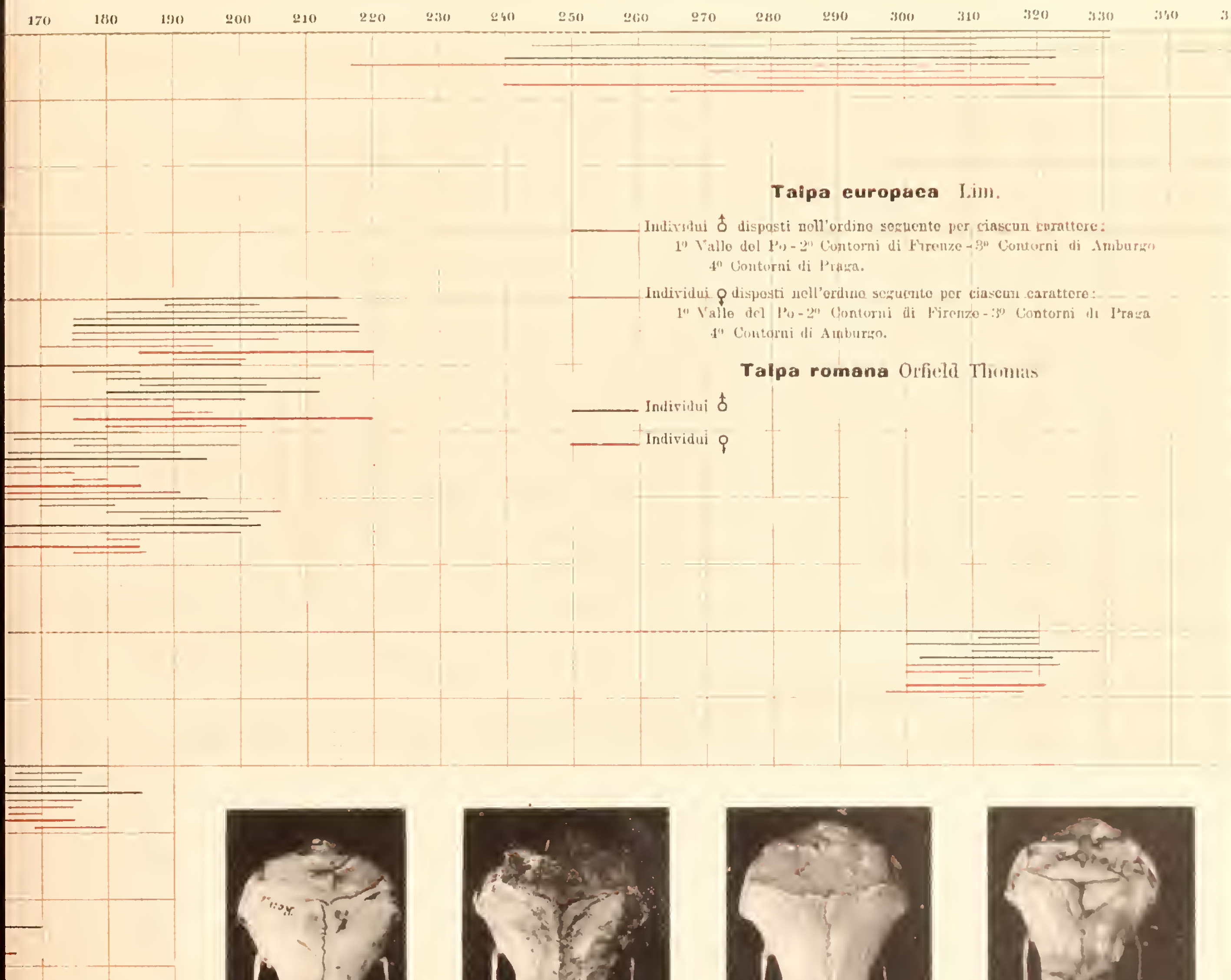



Fig. 2


Fig. 3


Fig. 4


Fig. 6

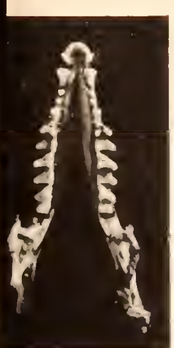


Fig. 1

Fig. 5

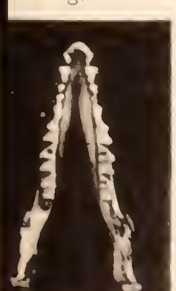



Fig. 7


Fig. 8


Fig. 10


Fig. 11

Lit. Salussolia, Torino.

SUL

TERZO MASSIMO INVERNALE

NELL'ANDAMENTO DIURNO DEL BAROMETRO

MEMORIA

DEL DOTTOR

EFISIO FERRERO

Approvata nell'Adunanza del 20 Dicembre 1903.

La variazione diurna del barometro presenta, in tutte le stagioni e in tutti i paesi della terra, due massimi ben distinti verso le 10^h e due minimi verso le 4^h tanto del mattino quanto della sera.

Oltre questi due massimi il Rykatschew (1) per il primo riscontrò la presenza di un terzo massimo nei mesi invernali tra le 2^h e le 3^h di notte, e nella sua magistrale opera " La marche diurne du baromètre en Russie „ (2) affermò che l'esistenza di questo terzo massimo non è un' accidentalità, come era stato creduto prima di allora, ma è invece un fenomeno normale per tutti gli anni e generale, almeno per i climi della zona temperata dell'emisfero boreale.

Brito Capello (3) ed il Ragona (4) si occuparono anch'essi di questo fenomeno; ma il primo si limitò semplicemente ad accennare che nelle curve che rappresentano l'andamento diurno della pressione atmosferica a Lisbona, calcolate coi dati delle osservazioni dirette, nei mesi di Gennaio e Dicembre si nota un terzo massimo notturno la cui origine è difficilissimo stabilire giacchè esso non mostra nessun rapporto con qualche variazione di temperatura o di tensione di vapore o con la velocità del vento. Il secondo ne fece uno studio più accurato, ma per il solo clima di Modena, e mentre prima aveva considerato la presenza del terzo massimo come un'acciden-

---

(1) " Bull. de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg „. Tome X.

(2) " Repertorium für Meteorologie herausgegeben von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften „, Band VI, N. 10, 1879.

(3) *Pression atmosphérique à Lisbonne 1856-1875*, Lisbona, 1879.

(4) *Sul terzo massimo in inverno*, " Annuario della Società meteorologica italiana „, 1878.

talità e l'aveva attribuito all'influenza del vento, che raggiunge in quell'ora il più grande valore, dovette in seguito anch'egli confermare la normalità del fenomeno (1).

Infine F. Hann in un suo classico studio (2) sopra l'oscillazione diurna del barometro, fece una breve osservazione su questo terzo massimo notturno.

Egli osservò che a Tokio ($\varphi = 35°41'$ N) dal 1886 al 1890 nel mese di Gennaio il barometro salì dalla una dopo mezzanotte alle 2^h raggiungendo costantemente a quell'ora un piccolo massimo, e ridiscese poi sempre sino al minimo normale del mattino: lo stesso fatto riscontrò nel mese di Dicembre, ma per soli 3 dei 5 anni presi in esame. Oltre a Tokio egli osservò la formazione del terzo massimo a Eger ($\varphi = 50°5'$ S) per tutti i mesi d' inverno e a Irkoutsk ($\varphi = 52°16'$) per il solo mese di Gennaio.

Il fatto che il terzo massimo invernale nell'andamento diurno della pressione atmosferica, anche nei climi della zona temperata, qualche volta scompare, dipende dall'essere le curve che rappresentano questo andamento generalmente calcolate con la solita formola periodica del Bessel, la quale, come dice il Rykatschew, non è stata dedotta dalla teoria dell'andamento diurno del barometro, ma è invece una serie che può rappresentare l'andamento di una funzione periodica se si prende in considerazione un numero sufficiente di termini.

Il Rykatschew fu anche il solo che quosto fenomeno fece oggetto di studio speciale, esteso ed accurato, considerando una ventina circa di stazioni quasi tutte poste nella zona temperata dell'emisfero boreale. Ma poichè la questione del terzo massimo è di una importanza notevolissima, come quella che, al dire del Ragona, ha relazione con le ricerche più delicate e più interessanti della Meteorologia, e sebbene renda più complessa la teoria della variazione diurna del barometro, può tuttavia condurre (cosa che ancora non si è raggiunta) alla spiegazione di questo fenomeno, io ho creduto opportuno farne un ulteriore e più esteso studio.

Dagli *Annali*, che si trovano nella ricca biblioteca di questo R. Osservatorio, ho potuto raccogliere i dati delle osservazioni orarie fatte direttamente, come si usa nella maggior parte delle stazioni inglesi, od ottenuti dagli apparecchi registratori, di circa 60 stazioni.

Per le stazioni boreali mi sono limitato ai soli mesi invernali, e precisamente: Novembre, Dicembre, Gennaio e Febbraio; mentre per le stazioni di latitudine australe ho esteso lo studio a tutti i mesi dell'anno, prendendo in esame le osservazioni di un periodo d'anni generalmente non inferiore ai dieci. Per la massima parte delle stazioni ho dovuto calcolare le medie orarie della pressione atmosferica di ciascun mese per tutto il periodo d'anni considerato; per altri invece ho trovato queste medie già riunite e calcolate negli *Annali* stessi. Per un gran numero di stazioni inglesi ho ridotto in millimetri le altezze barometriche espresse in pollici inglesi. Tutti questi dati sono riportati nelle tabelle A e B, nelle quali mi sono limitato alle sole ore notturne dalle 22^h alle 5^h. Infine per ciascuna località ho costruite le

---

(1) *Pressione atmosferica bi-oraria del 1888*, " Annali dell' Ufficio centrale di Meteorologia „, vol. IX, parte 1ª, 1887.

(2) " Denkschriften der Wiener Akademie „, Band LIX, 1892.

curve che rappresentano l'andamento diurno del barometro nei diversi mesi, e ciò non solo per poter determinare l'ora in cui avviene il terzo massimo, ma anche per poter apprezzare con maggior precisione l'andamento notturno del barometro. Le più importanti di queste curve (limitate alle sole ore notturne) sono riportate nella tavola ultima, per far meglio vedere l'andamento del fenomeno nelle diverse latitudini.

Esaminando queste curve come pure i dati delle tabelle A e B, si rileva a tutta prima un fatto di una importanza notevole, e cioè come nell'emisfero Nord il primo indizio di un terzo massimo verso le 2^h di notte, non comincia a comparire che intorno al 31° di latitudine. Difatti a Lahore (31°14') si nota nella curva del mese di Dicembre un leggero rallentamento tra 1^h e 2^h ant.; questo rallentamento diventa più distinto e visibile non solo in Dicembre ma anche in Gennaio, a Leh e a S. Fernando, e finalmente ad Atene e meglio ancora a Lisbona il 3° massimo è formato. Proseguendo oltre noi vediamo che in tutte le numerose stazioni poste dal 31° al 66° di latitudine nord, almeno in uno dei mesi invernali, si riscontra tra 1^h e 2^h di notte un terzo massimo distintissimo o almeno un sensibile rallentamento della curva barometrica, e qualche volta questa nell'ora suddetta rimane stazionaria, come per esempio avviene nel mese di Gennaio a Torino, Trieste, Aberdeen, ecc. Spesso, come a Lisbona, Bucarest, ecc., si osserva nei successivi mesi invernali una specie di variazione progressiva nell'andamento notturno del barometro, come appunto aveva già notato il Rykatschew a Nertchinsk e a Tiflis, e cioè: nella curva di Novembre si comincia a notare un segno di convessità verso le 2^h, in Dicembre e Gennaio il terzo massimo è formato, ed in Febbraio compare al suo posto di nuovo un rallentamento. Qualche volta questo rallentamento persiste anche nei mesi di Ottobre e di Marzo.

La formazione del terzo massimo è dunque più frequente e distinta nei mesi di Gennaio e Dicembre, mentre negli altri mesi è spesso sostituita da un rallentamento della curva. La sua amplitudine è molto piccola, non è mai superiore ai $^2/_{10}$ di millimetro, spesso è appena di $^1/_{100}$ o poco più, e l'amplitudine media di essa si può ritenere di poco inferiore a $^1/_{10}$ circa di millimetro.

Esaminando ora l'andamento diurno del barometro nelle stazioni australi si nota verso 1^h un terzo massimo notturno nel mese di Aprile a Rosario e dall'Aprile all'Agosto ad Hobarton intorno alle 2^h. In quest'ultima stazione si osserva inoltre nel mese di Settembre alla stessa ora un rallentamento, e in Ottobre e Dicembre un terzo massimo alle 3^h.

Sfortunatamente è troppo piccolo il numero delle stazioni australi, ed anche pochi sono gli anni d'osservazione d'Hobarton, per poterne dedurre qualche esatta conclusione; tuttavia io credo che si possa affermare: 1° che il terzo massimo di Dicembre ad Hobarton sia un'accidentalità; 2° che anche nelle latitudini medie australi esso sia osservabile nei mesi invernali.

Prendendo esempio dal Rykatschew, nello specchio seguente ho indicato con *m* i mesi, nei quali vi è realmente un terzo massimo, con *r* i mesi nei quali si osserva da 1^h alle 3^h di notte un rallentamento distinto nella curva barometrica, e con *s* i mesi nei quali questa rimane, alla stessa ora, stazionaria.

Ho indicate anche alcune stazioni di quelle considerate dal Rykatschew, e le due di Tokio e d'Eger dell'Hann, contrassegnandole con asterisco.

Latitudini nord.

	Latitudine	Novembre	Dicembre	Gennaio	Febbraio		Latitudine	Novembre	Dicembre	Gennaio	Febbraio
Roorckee	29°52′	—	—	—	—	Praga *	50° 5′	r	m	r	—
Lahore	31 34	—	r	—	—	Eger *	50 5	m	m	m	r
Leh	34 10	r	r	r	—	Falmouth	50 9	—	r	r	—
Tokio *	35 41	—	m	m	—	Nertchiusk*	51 19	r	m	m	r
San Fernando	36 28	—	r	r	—	Vlissingen	51 27	—	s	m	m
Atene	37 58	m	m	r	m	Kew	51 28	—	s	s	—
Lisbona	38 43	—	m	m	—	Greenwich *	51 29	—	r	r	—
Pechino *	39 57	m	m	m	m	Valencia	51 55	—	s	s	—
Napoli *	40 50	r	m	m	r	Irkoutsk	52 16	r	m	m	m
Tiflis *	41 43	m	m	m	r	Potsdam	52 23	m	m	m	m
Noukous *	42 47	r	m	m	m	Helder	52 58	—	s	m	m
Toronto *	43 39	m	m	m	—	Groningen	53 13	—	m	m	m
Bucarest	44 25	r	m	m	r	Bamoul *	53 20	—	—	r	—
Novorossiïsk	44 44	m	m	m	m	Mosca *	55 46	r	—	r	—
Markhot	44 45	m	m	m	m	Kazan *	55 47	m	r	m	m
Torino	45 4	r	r	s	—	Fort-William	56 49	m	—	m	m
Trieste	45 39	r	m	s	—	Catherinbourg *	56 49	—	m	r	—
Kalocsa	46 32	—	m	m	s	Aberdeen	57 10	—	s	s	—
Klagenfurt	46 37	r	r	r	r	Pavlovsk	59 41	m	r	m	r
Sonnblick	47 3	m	m	r	s	Upsal	59 51	m	m	m	—
O'-Gyalla	47 53	m	m	r	m	Pietroburgo *	59 56	m	m	m	m
Kremünster	48 4	m	m	m	m	Helsingfors *	60 10	m	m	m	m
Vienna	48 15	r	m	m	—	Port-Provvidence	64 26	—	m	—	—
Bielitz	49 49	m	—	m	m	Port-Clarence	65 30	s	m	m	r
Krakau	50 4	m	r	m	r	Chamisso-Island	66 13	—	s	s	—

Latitudini sud.

	Latitudini	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Rosario y Fisherton	34°17′	—	—	—	m	—	—	—	—	—	—	—	—
Hobarton	42 52	—	—	—	m	m	m	m	m	r	m	—	m

Nella Tavola seguente sono indicate le ore in tempo medio locale del 3° massimo e del 3° minimo nei mesi di Dicembre e Gennaio per quelle stazioni in cui questo momento si è potuto determinare approssimativamente dalle curve.

	Latitudine	DICEMBRE			GENNAIO		
		Tempo		Intervallo	Tempo		Intervallo
		del 3° minimo	del 3° massimo		del 3° minimo	del 3° massimo	
Lisbona	38°43′	1^h10^m	$2^h\ 5^m$	0^h55^m	1^h10^m	2^h10^m	$1^h\ 0^m$
Bucarest	44 25	1 5	2 15	1 10	1 0	2 25	1 25
Novorossiïsk	44 44	1 20	2 35	1 15	1 15	2 30	1 15
Markhot	44 45	1 0	2 45	1 45	0 0	1 45	1 45
Kalocsa	46 32	1 5	2 5	1 0	0 0	2 0	2 0
Sonnblick	47 3	23 55	1 10	1 15	—	—	—
O'-Gyalla	47 53	0 0	1 0	1 0	—	—	—
Kremünster	48 4	0 10	1 15	1 5	1 15	2 20	1 5
Vienna	48 15	1 10	2 5	0 55	1 0	1 45	0 45
Vlissingen	51 27	—	—	—	1 10	2 35	1 25
Irkoutsk	52 16	1 0	2 30	1 30	0 50	2 50	2 0
Potsdam	52 23	1 0	2 10	1 10	1 5	2 0	0 55
Helder	52 58	—	—	—	1 0	2 0	1 0
Groningen	53 13	0 10	1 30	1 20	1 5	2 10	1 5
Fort-William	56 49	—	—	—	23 40	0 50	1 10
Pavlovsk	59 41	—	—	—	23 45	1 20	1 35
Upsal	59 51	1 5	2 5	1 0	23 55	1 5	1 10
Port-Clarence	65 30	1 30	2 50	1 20	23 45	1 15	1 30
Media		0^h50^m	$2^h\ 1^m$	1^h11^m	0^h37^m	1^h56^m	1^h19^m

Non sempre però il terzo massimo si forma verso le 2^h di notte: infatti, limitando le osservazioni ai soli mesi di Dicembre e Gennaio, si nota che a Markhot e Port Clarence nel mese di Dicembre; a Vlissingen, Irkontsk nel Gennaio, il terzo massimo si forma alle 3^h; mentre a Trieste e in molte altre stazioni in questi mesi esso si forma verso 1^h. In qualche altra località nei mesi invernali anticipa e si forma verso le 24^h, così, ad O'-Gyalla e Potsdam in Febbraio e a Fort-William in Febbraio e Novembre; ma in generale quando ciò avviene, si osserva inoltre egualmente un rallentamento tra 1^h e 2^h.

Un fatto degno di nota avviene a Klagenfurt. Il secondo massimo che dovrebbe formarsi alle 10^h di sera, si confonde col terzo massimo notturno e si forma invece alla 1^h nei mesi di Novembre e Dicembre, alle 24 nel Gennaio e alle 3^h in Febbraio, mentre da 1^h alle 2^h di notte accade il solito rallentamento.

Questo caso non è isolato, anzi è frequente nelle latitudini elevate. Difatti a Upsal, Port Provvidence e Port Clarence nel mese di Febbraio il secondo massimo si forma a mezzanotte; in quest'ultima inoltre si distingue dalle 2^h alle 3^h un rallentamento. A Chamisso-Island nel Dicembre il secondo massimo avviene a mezzanotte, mentre la curva dalle 2^h alle 3^h rimane stazionaria. Bisogna però osservare che delle ultime tre stazioni non si hanno che uno o due anni di osservazione.

Prima di concludere credo opportuno fare ancora qualche considerazione relativa alle stazioni poste in latitudini inferiori al 31° nord.

In nessuna di queste stazioni, che sono 24, si vede intorno alle 2^h di notte alcun indizio di terzo massimo, nè alcuna flessione nella curva. Però un primo rallentamento compare in molte di esse dalle 12^h alle 23^h, il quale è certamente privo d'interesse, perchè si trova anche in un gran numero di stazioni della zona temperata. Invece il secondo rallentamento, il quale si osserva frequentemente nei diversi mesi in gran parte di queste stazioni tropicali tra 3^h e 4^h di notte, mentre è rarissimo nelle latitudini medie, e non è raro neppure nelle latitudini elevate, può far pensare ad una relazione fra esso e il terzo massimo notturno; tanto più che esso si riscontra anche con più frequenza nei mesi invernali in regioni poste nelle latitudini tropicali dell'emisfero sud.

Riassumendo si può concludere:

1) In tutti i paesi posti tra il 30° ed il 66° di latitudine nord nei mesi invernali, o almeno in qualcuno d'essi, con più frequenza nei mesi di Dicembre e Gennaio, si riscontra oltre i due massimi e i due minimi normali, un terzo massimo notturno, la cui amplitudine si può in media ritenere non superiore a $^1/_{10}$ di millimetro.

Questo si forma verso le 2^h di notte, mentre il terzo minimo avviene circa un'ora e un quarto più presto.

Molto spesso al posto del terzo massimo si nota alla stessa ora nella curva dell'andamento diurno un distinto rallentamento.

2) Si può ritenere con molta probabilità, che lo stesso fenomeno avvenga nelle latitudini medie dell'emisfero australe nei mesi d'inverno di quelle regioni.

3) Rimane accertato, che nelle latitudini inferiori al 30° nord, e in generale in tutte le località della zona torrida, non si ha, nell'ora e nei mesi indicati, nessun indizio di terzo massimo nell'andamento diurno della pressione atmosferica.

TAVOLE

DELL'ANDAMENTO ORARIO DELLA PRESSIONE ATMOSFERICA IN mm. FRA LE 22^h E LE 5^h DI NOTTE

PER 57 STAZIONI BOREALI E 6 AUSTRALI

Novembre.

TAB. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Trichinopoly	10°50′	78°44′E	77.7	9 (1881-1889)	754.90	754.60	754.24	753.80	753.45	753.20	752.99	753.38
Aden	12 45	45 3 E	28.7	14 (1880-1893)	760.56	760.54	760.18	759.80	759.55	759.32	759.34	759.68
Bellary	15 9	76 57 E	449.7	9 (1881-1889)	723.68	723.58	723.38	723.07	722.77	722.51	722.51	722.87
Belgaum	15 52	74 42 E	769.8	10 (1879-1888)	696.38	696.15	695.79	695.44	695.11	694.93	695.01	695.37
Rangoon	16 46	96 12 E	12.6	10 (1877-1887)	760.10	760.10	759.95	759.65	759.45	759.24	759.22	759.34
Poona	18 28	74 10 E	561.3	10 (1879-1888)	714.01	713.88	713.65	713.35	713.20	713.12	713.27	713.55
Bombay	18 54	72 49 E	11.3	20 (1876-1895)	760.00	759.75	759.37	759.07	758.76	758.66	758.73	759.04
Cuttack	20 29	85 54 E	24.4	21 (1872-1892)	760.10	760.05	759.93	759.70	759.45	759.24	759.24	759.50
Nagpur	21 9	79 11 E	312.6	17 (1877-1893)	735.77	735.62	735.37	735.19	734.99	734.84	734.84	735.14
Chittagong	22 21	91 50 E	26.4	9 (1877-1885)	759.32	759.24	759.07	758.83	758.63	758.41	758.28	758.51
Calcutta (Alipore)	22 32	88 20 E	6.5	13 (1881-1893)	761.17	761.05	760.95	760.64	760.44	760.24	760.26	760.36
Jubbulpore	23 9	79 59 E	404.7	19 (1875-1893)	728.35	728.20	727.95	727.75	727.57	727.44	727.42	727.73
Hazaribagh	24 0	85 24 E	612.2	13 (1873-1885)	710.73	710.68	710.48	710.30	710.12	710.20	709.86	709.95
Deesa	24 16	72 14 E	142.0	11 (1878-1888)	750.66	750.45	750.08	749.84	749.64	749.47	749.47	749.77
Kurrachee	24 47	67 4 E	14.9	19 (1875-1893)	761.45	761.40	761.17	760.95	760.75	760.61	760.59	760.85
Allahabad	25 26	81 52 E	94.3	10 (1876-1885)	754.60	754.50	754.29	754.16	753.99	753.91	753.83	754.04
Patna	25 37	85 14 E	55.8	13 (1873-1885)	758.21	758.12	757.87	757.61	757.36	757.19	757.21	757.51
Dhubri	26 7	89 50 E	4.7	8 (1881-1888)	759.37	759.37	759.14	758.94	758.71	758.51	758.48	758.68
Goalpara	26 11	90 40 E	117.7	9 (1873-1881)	752.01	752.08	751.93	751.83	751.67	751.42	751.26	751.37
Lucknow	26 50	81 0 E	112.8	10 (1876-1885)	753.02	752.97	752.77	752.67	752.46	752.31	752.16	752.43
Jeypore	26 55	75 50 E	436.3	16 (1881-1896)	726.06	725.97	725.76	725.64	725.41	725.31	725.29	725.41
Sibsagar	26 59	94 40 E	101.6	12 (1874-1885	754.19	754.11	754.01	753.86	753.70	753.58	753.48	753.75
Agra	27 10	78 5 E	169.4	11 (1875-1885)	748.60	748.45	748.30	748.05	747.91	747.66	747.59	747.91
Roorkee	29 52	77 56 E	270.4	11 (1875-1885)	739.31	739.21	739.00	738.77	738.56	738.41	738.34	738.54
Lahore	31 34	74 20 E	214.2	19 (1875-1893)	744.03	744.00	743.93	743.80	743.67	743.54	743.49	743.59
Leh	34 10	77 42 E	3508.4	16 (1876-1891)	501.00	501.16	501.28	501.28	501.31	501.33	501.36	501.46
San Fernando	36 28	6 12 W	28.5	10 (1890-1899)	762.16	762.08	761.88	761.58	761.47	761.30	761.21	761.23
Atene	37 58	23 44 E	107.1	2 (1895-1896)	754.77	754.79	754.71	754.72	754.66	754.57	754.53	754.54
Lisbona	38 43	9 8 W	102.3	15 (1874-1888)	755.35	755.31	755.18	755.01	754.91	754.79	754.71	754.75

/

Segue **Novembre.**

TAB. A

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Bucarest	44°25′	26° 6′ E	84.0	14 (1885-1898)	758.38	758.38	758.38	758.38	758.37	758.30	758.26	758.29
Novorosiïsk	44 44	37 49 E	37.1	6 (1892-1897)	762.47	762.45	762.47	762.48	762.47	762.35	762.27	762.30
Markhot	44 45	37 49 E	435.5	4 (1894-1897)	725.70	725.72	725.72	725.88	725.80	725.75	725.68	725.72
Torino	45 4	7 41 E	276.4	16 (1871-1886)	737.36	737.37	737.32	737.31	737.17	737.04	736.94	736.90
Trieste	45 39	13 46 E	25.8	10 (1890-1899)	762.26	762.31	762.31	762.19	762.16	762.06	761.94	761.89
Kalocsa	46 32	19 0 E	98.4	4 (1896-1899)	757.41	757.42	757.37	757.30	757.26	757.12	757.02	757.04
Klagenfurt	46 37	14 18 E	438.0	10 (1891-1900)	725.81	725.86	725.90	725.97	725.94	725.90	725.87	725.81
Sonnblick	47 3	12 57 E	3106.0	6 (1891-1896)	519.77	519.74	519.67	519.69	519.60	519.52	519.42	519.37
O'-Gyalla	47 53	18 11 E	115.0	9 (1892-1900)	755.75	755.75	755.71	755.73	755.71	755.60	755.52	755.50
Kremünster	48 4	14 8 E	384.0	10 (1891-1900)	729.97	729.96	729.94	729.98	729.91	729.82	729.76	729.73
Vienna	48 15	16 21 E	203.0	15 (1886-1891)	746.28	746.27	746.25	746.21	746.18	746.08	746.00	745.98
Bielitz	49 49	19 3 E	313.0	3 (1896-1898)	736.14	736.08	736.07	736.19	736.14	736.02	735.93	735.50
Krakau	50 4	19 57 E	220.0	31 (1858-1888)	742.84	742.83	742.84	742.84	742.82	742.76	742.70	742.68
Falmouth	50 9	5 4 W	55.8	25 (1871-1895)	754.65	754.57	754.55	754.42	754.34	754.24	754.11	754.11
Vlissingen	51 27	3 37 E	7.7	10 (1890-1899)	762.82	762.80	762.81	762.76	762.68	762.59	762.49	762.49
Kew	51 28	0 19 W	10.4	25 (1871-1895)	759.04	758.99	758.94	758.86	758.81	758.68	758.63	758.63
Valencia	51 55	10 18 W	7.0	25 (1871-1895)	757.97	757.90	757.90	757.75	757.64	757.56	757.46	757.44
Irkoutsk	52 16	104 19 E	478.0	10 (1889-1898)	725.58	725.51	725.49	725.19	725.18	725.10	725.04	725.07
Potsdam	52 23	13 4 E	84.9	7 (1893-1899)	756.52	756.47	756.42	756.45	756.44	756.32	756.25	756.25
Helder	52 58	4 46 E	14.6	10 (1890-1899)	762.45	762.41	762.41	762.32	762.24	762.12	761.43	762.03
Groningen	53 13	6 35 E	9.0	10 (1890-1899)	761.51	761.48	761.48	761.44	761.39	761.31	761.24	761.21
Fort-William	56 49	5 7 W	12.8	5 (1891-1895)	756.02	755.99	756.02	755.99	755.94	755.82	755.77	755.72
Aberdeen	57 10	2 6 W	26.8	25 (1871-1895)	754.04	753.99	753.96	753.91	753.86	753.75	753.68	753.65
Pavlovsk	59 41	30 29 E	40.0	10 (1889-1898)	758.08	758.08	758.03	758.15	758.08	757.99	757.90	757.86
Upsal	59 51	17 30 E	24.0	10 (1892-1901)	757.01	756.98	756.95	757.17	757.11	757.03	756.97	756.94
Port-Provvidence	64 26	173 0 W	—	1 (1848-1849)	751.45	751.50	751.50	751.11	750.99	750.91	750.91	750.91
Port-Clarence	65 30	165 30 W	—	2 (1850-1852)	754.92	755.07	755.16	754.37	754.40	754.40	754.50	754.47
Chamisso-Island	66 13	161 46 W	—	1 (1849-1850)	749.52	749.69	749.79	749.47	749.42	749.39	749.39	749.32

Dicembre.

Tab. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Trichinopoly	10°50′	78°44′E	77.7	9 (1881-1889)	756.02	755.72	755.38	755.00	754.62	754.31	754.09	754.45
Aden	12 45	45 3 E	28.7	14 (1880-1893)	761.56	761.42	761.30	761.05	760.90	760.59	760.66	760.90
Bellary	15 9	76 57 E	449.7	9 (1881-1889)	724.88	724.78	724.54	724.27	723.97	723.73	723.68	724.02
Belgaum	15 52	74 42 E	769.8	10 (1879-1888)	697.11	696.89	696.66	696.30	695.89	695.69	695.72	696.00
Rangoon	16 46	96 12 E	12.6	10 (1877-1887)	760.87	760.90	760.75	760.46	760.18	759.93	759.93	760.05
Poona	18 28	74 10 E	561.3	10 (1879-1888)	714.84	714.67	714.54	714.27	713.91	713.67	713.81	714.06
Bombay	18 54	72 49 E	11.3	20 (1876-1895)	761.12	760.87	760.59	760.31	759.98	759.80	759.88	760.13
Cuttack	20 29	85 54 E	24.4	21 (1872-1892)	761.40	761.32	761.20	760.97	760.72	760.54	760.56	760.85
Nagpur	21 9	79 11 E	312.6	17 (1877-1893)	736.56	736.38	736.16	736.02	735.80	735.65	735.60	735.82
Chittagong	22 21	91 50 E	26.4	9 (1877-1885)	760.77	760.69	760.49	760.34	760.10	759.83	759.75	759.93
Calcutta (Alipore)	22 32	88 20 E	6.5	13 (1881-1893)	763.13	763.00	762.88	762.64	762.47	762.22	762.22	762.29
Jubbulpore	23 9	79 59 E	404.7	19 (1875-1893)	728.97	728.74	728.54	728.40	728.23	728.08	728.08	728.30
Hazaribagh	24 0	85 24 E	612.2	13 (1873-1885)	711.39	711.34	711.13	710.96	710.81	710.61	710.48	710.48
Deesa	24 16	72 14 E	142.0	11 (1878-1888)	751.19	750.99	750.69	750.48	750.35	750.10	750.10	750.38
Kurrachee	24 47	67 4 E	14.9	19 (1875-1893)	762.85	762.75	762.54	762.32	762.19	762.09	762.02	762.19
Allahabad	25 26	81 52 E	94.3	10 (1876-1885)	755.87	755.74	755.58	755.48	755.31	755.18	755.10	755.28
Patna	25 37	85 14 E	55.8	13 (1873-1885)	759.58	759.53	759.24	759.09	758.88	758.68	758.66	758.91
Dhubri	26 7	89 50 E	4.7	8 (1881-1888)	760.66	760.69	760.54	760.39	760.26	759.95	759.88	759.98
Goalpara	26 11	90 40 E	117.7	9 (1873-1881)	753.38	753.40	753.28	753.15	753.02	752.82	752.64	752.67
Lucknow	26 50	81 0 E	112.8	10 (1876-1885)	754.21	754.11	753.94	753.78	753.60	753.45	753.35	753.55
Jeypore	26 55	75 50 E	436.3	16 (1881-1896)	727.06	726.93	726.68	726.58	726.37	726.22	726.12	726.30
Sibsagar	26 59	94 40 E	101.6	12 (1874-1885)	755.46	755.43	755.33	755.16	755.00	754.82	754.72	754.95
Agra	27 10	78 5 E	169.4	11 (1875-1885)	749.54	749.32	749.16	749.01	748.81	748.70	748.62	748.83
Roorkee	29 52	77 56 E	270.4	11 (1875-1885)	740.27	740.14	739.92	739.81	739.63	739.43	739.33	739.46
Lahore	31 34	74 20 E	214.2	19 (1875-1893)	745.05	745.05	744.91	744.84	744.81	744.71	744.54	744.51
Leh	34 10	77 42 E	3508.4	16 (1876-1891)	499.99	499.99	500.01	500.06	500.04	500.09	500.09	500.16
San Fernando	36 28	6 12 W	28.5	10 (1890-1899)	763.90	763.84	763.62	763.49	763.46	763.35	763.16	763.07
Atene	37 58	23 44 E	107.1	2 (1895-1896)	752.60	752.59	752.45	752.34	752.37	752.31	752.16	752.06
Lisbona	38 43	9 8 W	102.3	15 (1874-1888)	756.80	756.79	756.62	756.44	756.45	756.36	756.23	756.19

Segue **Dicembre.** TAB. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Bucarest	44°25′	26° 6′E	84.0	14 (1885-1898)	758.04	758.08	758.01	757.90	757.95	757.92	757.80	757.75
Novorosiïsk	44 44	37 49 E	37.1	6 (1892-1897)	761.37	761.42	761.42	761.35	761.37	761.37	761.28	761.25
Markhot	44 45	37 49 E	435.5	4 (1894-1897)	724.60	724.65	724.60	724.38	724.48	724.52	724.38	724.35
Torino	45 4	7 41 E	276.4	16 (1871-1886)	737.15	737.19	737.13	737.04	737.03	736.97	736.87	736.73
Trieste	45 39	13 46 E	25.8	10 (1890-1899)	761.47	761.52	761.48	761.49	761.49	761.46	761.33	761.21
Kalocsa	46 32	19 0 E	98.4	4 (1896-1899)	756.12	756.12	756.03	755.86	755.89	755.83	755.67	755.84
Klagenfurt	46 37	14 18 E	438.0	10 (1891-1900)	725.15	725.19	725.21	725.32	725.29	725.28	725.25	725.24
Sonnblick	47 3	12 57 E	3106.0	6 (1891-1896)	516.45	516.42	516.35	516.42	516.39	516.31	516.22	516.13
O'-Gyalla	47 53	18 11 E	115.0	9 (1892-1900)	754.37	754.38	754.30	754.46	754.24	754.20	754.07	753.96
Kremünster	48 4	14 8 E	384.0	10 (1891-1900)	729.38	729.39	729.33	729.38	729.36	729.32	729.25	729.17
Vienna	48 15	16 21 E	203.0	15 (1886-1891)	745.75	745.76	745.68	745.56	745.57	745.50	745.38	745.31
Bielitz	49 49	19 3 E	343.0	3 (1896-1898)	734.43	734.39	734.32	734.28	734.21	734.14	734.07	733.95
Krakau	50 4	19 57 E	220.0	31 (1858-1888)	742.94	742.94	742.86	742.74	742.73	742.69	742.60	742.54
Falmouth	50 9	5 4 W	55.8	25 (1871-1895)	756.17	756.12	756.04	755.79	755.74	755.72	755.61	755.51
Vlissingen	51 27	3 37 E	7.7	10 (1890-1899)	761.95	761.99	762.00	761.94	761.94	761.93	761.82	761.71
Kew	51 28	0 19 W	10.4	25 (1871-1895)	760.39	760.39	760.31	760.08	760.08	760.03	759.90	759.83
Valencia	51 55	10 18 W	7.0	25 (1871-1895)	759.02	758.97	758.94	758.78	758.66	758.66	758.53	758.43
Irkoutsk	52 16	104 19 E	478.0	10 (1889-1898)	727.08	726.99	726.89	726.87	726.89	726.89	726.74	726.69
Potsdam	52 23	13 4 E	84.9	7 (1893-1899)	754.05	754.02	753.95	753.91	753.93	753.89	753.79	753.70
Helder	52 58	4 46 E	14.6	10 (1890-1899)	761.01	761.01	760.94	760.91	760.89	760.89	760.78	760.71
Groningen	53 13	6 35 E	9.0	10 (1890-1899)	760.10	760.10	760.06	760.09	760.09	760.03	759.94	759.87
Fort-William	56 49	5 7 W	12.8	5 (1891-1895)	754.42	754.34	754.31	754.09	754.01	753.91	753.75	753.65
Aberdeen	57 10	2 6 W	26.8	25 (1871-1895)	753.80	753.78	753.75	753.60	753.60	753.55	753.45	753.38
Pavlovsk	59 41	30 29 E	40.0	10 (1889-1898)	757.88	757.91	757.89	757.76	757.74	757.71	757.63	757.58
Upsal	59 51	17 30 E	24.0	10 (1892-1901)	754.85	754.84	754.82	754.65	754.66	754.64	754.59	754.54
Port-Provvidence	64 26	173 0 W	—	1 (1848-1849)	754.14	754.24	754.14	755.00	754.92	754.80	754.65	754.47
Port-Clarence	65 30	165 30 W	—	2 (1850-1852)	756.83	756.94	757.04	756.96	756.96	756.99	756.96	757.01
Chamisso-Island	66 13	161 46 W	—	1 (1849-1850)	764.66	764.81	764.96	764.86	764.81	764.81	764.86	764.86

Gennaio.

Tab. A

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Trichinopoly	10°50′	78°44′ E	77.7	9 (1881-1889)	756.75	756.48	756.19	755.84	755.48	755.18	755.00	755.38
Aden	12 45	45 3 E	28.7	14 (1880-1893)	760.72	760.64	760.41	760.26	759.83	759.60	759.63	759.98
Bellary	15 9	76 57 E	449.7	9 (1881-1889)	724.70	724.65	724.47	724.27	723.94	723.73	723.68	723.99
Belgaum	15 52	74 42 E	769.8	10 (1879-1888)	697.11	696.86	696.69	696.40	696.08	695.79	695.84	696.15
Rangoon	16 46	96 12 E	12.6	10 (1877-1887)	761.20	761.15	761.07	760.97	760.59	760.26	760.29	760.51
Poona	18 28	74 10 E	561.3	10 (1879-1888)	715.10	714.87	714.72	714.44	714.13	713.93	714.03	714.29
Bombay	18 54	72 49 E	11.3	20 (1876-1895)	761.15	760.95	760.66	760.39	760.05	758.83	758.85	760.08
Cuttack	20 29	85 54 E	24.4	21 (1872-1892)	761.78	761.63	761.40	761.22	761.00	760.80	760.69	760.95
Nagpur	21 9	79 11 E	312.6	17 (1877-1893)	736.16	735.97	735.75	735.55	735.32	735.11	735.06	735.32
Chittagong	22 21	91 50 E	26.4	9 (1877-1885)	761.25	761.27	761.17	760.95	760.69	760.41	760.29	760.34
Calcutta (Alipore)	22 32	88 20 E	6.5	13 (1881-1893)	762.88	762.75	762.59	762.34	762.17	761.91	761.83	761.91
Jubbulpore	23 9	79 59 E	404.7	19 (1875-1893)	728.54	728.33	728.10	727.88	727.70	727.49	727.44	727.70
Hazaribagh	24 0	85 24 E	612.2	13 (1873-1885)	711.08	711.06	710.86	710.76	710.58	710.37	710.20	710.20
Deesa	24 16	72 14 E	142.0	11 (1878-1888)	750.91	750.61	750.33	750.10	749.92	749.74	749.62	749.94
Kurrachee	24 47	67 4 E	14.9	19 (1875-1893)	762.44	762.34	762.14	761.96	761.78	761.61	761.58	761.73
Allahabad	25 26	81 52 E	94.3	10 (1876-1885)	755.84	755.74	755.58	755.48	755.28	755.10	755.00	755.13
Patna	25 37	85 14 E	55.8	13 (1873-1885)	759.65	759.58	759.32	759.09	758.86	758.61	758.48	758.68
Dhubri	26 7	89 50 E	4.7	8 (1881-1888)	760.29	760.39	760.31	760.21	760.03	759.80	759.65	759.68
Goalpara	26 11	90 40 E	117.7	9 (1873-1881)	753.10	753.10	752.97	752.84	752.67	752.41	752.16	752.26
Lucknow	26 50	81 0 E	112.8	10 (1876-1885)	754.19	754.09	753.89	753.73	753.55	753.35	753.20	753.30
Jeypore	26 55	75 50 E	436.3	16 (1881-1896)	726.27	726.12	725.97	725.84	725.66	725.49	725.34	725.41
Sibsagar	26 59	94 40 E	101.6	12 (1874-1885)	755.48	755.43	755.38	755.18	755.02	754.80	754.62	754.87
Agra	27 10	78 5 E	169.4	11 (1875-1885)	749.47	749.26	749.06	748.83	748.70	748.45	748.32	748.42
Roorkee	29 52	77 56 E	270.4	11 (1875-1885)	740.40	740.27	740.02	739.78	739.58	739.38	739.21	739.31
Lahore	31 34	74 20 E	214.2	19 (1875-1893)	744.49	744.46	744.36	744.29	744.21	744.05	743.83	743.83
Leh	34 10	77 42 E	3508.4	16 (1876-1891)	498.62	498.59	498.59	498.56	498.53	498.51	498.46	498.46
San Fernando	36 28	6 12 W	28.5	10 (1890-1899)	763.77	763.62	763.44	763.16	763.13	763.04	762.86	762.73
Atene	37 58	23 44 E	107.1	2 (1895-1896)	751.76	751.77	751.65	751.31	751.27	751.12	751.23	751.11
Lisbona	38 43	9 8 W	102.3	15 (1874-1888)	757.94	757.95	757.80	757.64	757.65	757.59	757.44	757.35

Segue **Gennaio.** TAB. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Bucarest	44°25′	26° 6′E	84.0	14 (1885-1898)	758.04	758.04	757.98	757.92	757.95	757.94	757.80	757.70
Novorosiïsk	44 44	37 49 E	37.1	6 (1892-1897)	760.13	760.10	760.08	760.02	760.03	760.03	759.92	759.78
Markhot	44 45	37 49 E	435.5	4 (1894-1897)	723.10	723.07	723.03	723.10	723.13	723.07	722.97	722.83
Torino	45 4	7 41 E	276.4	16 (1871-1886)	739.80	739.96	739.68	739.62	739.62	739.52	739.38	739.28
Trieste	45 39	13 46 E	25.8	10 (1890-1899)	761.00	761.04	761.01	760.90	760.90	760.89	760.77	760.61
Kalocsa	46 32	19 0 E	98.4	4 (1896-1899)	755.52	755.48	755.39	755.66	755.68	755.62	755.44	755.31
Klagenfurt	46 37	14 18 E	438.0	10 (1891-1900)	723.64	723.68	723.71	723.67	723.65	723.64	723.64	723.64
Sonnblick	47 3	12 57 E	3106.0	6 (1891-1896)	515.71	515.68	515.65	515.30	515.28	515.20	515.08	515.00
O'-Gyalla	47 53	18 11 E	115.0	9 (1892-1900)	753.46	753.45	753.38	753.24	753.22	753.18	753.05	752.94
Kremünster	48 4	14 8 E	384.0	10 (1891-1900)	728.31	728.28	728.22	728.09	728.10	728.08	728.01	727.95
Vienna	48 15	16 21 E	203.0	15 (1886-1891)	745.72	745.72	745.63	745.58	745.59	745.54	745.48	745.30
Bielitz	49 49	19 3 E	343.0	3 (1896-1898)	734.47	734.48	734.42	734.60	734.60	734.60	734.53	734.45
Krakau	50 4	19 57 E	220.0	31 (1858-1888)	745.13	745.11	745.11	745.12	745.13	745.12	745.05	744.98
Falmouth	50 9	5 4 W	55.8	25 (1871-1895)	756.34	756.29	756.22	756.14	756.12	756.09	755.99	755.87
Vlissingen	51 27	3 37 E	7.7	10 (1890-1899)	762.64	762.68	762.64	762.32	762.37	762.38	762.23	762.11
Kew	51 28	0 19 W	10.4	25 (1871-1895)	761.12	761.10	761.02	760.97	760.97	760.92	760.80	760.72
Valencia	51 55	10 18 W	7.0	25 (1871-1895)	758.68	758.66	758.63	758.56	758.48	758.48	758.36	758.28
Irkoutsk	52 16	104 19 E	478.0	10 (1889-1898)	728.08	728.04	727.98	727.93	728.02	728.05	727.94	727.82
Potsdam	52 23	13 4 E	81.9	7 (1893-1899)	754.59	754.58	754.52	754.40	754.42	754.38	754.26	754.14
Helder	52 58	4 46 E	14.6	10 (1890-1899)	761.61	761.57	761.43	761.27	761.36	761.30	761.19	761.14
Groningen	53 13	6 35 E	9.0	10 (1890-1899)	760.41	760.39	760.35	760.14	760.18	760.13	760.08	760.05
Fort-William	56 49	5 7 W	12.8	5 (1891-1895)	756.04	755.94	755.89	755.99	755.92	755.82	755.67	755.48
Aberdeen	57 10	2 6 W	26.8	25 (1871-1895)	754.55	754.50	754.47	754.37	754.37	754.26	754.16	754.06
Pavlovsk	59 41	30 29 E	40.0	10 (1889-1898)	758.19	758.24	758.24	758.42	758.40	758.36	758.28	758.20
Upsal	59 51	17 30 E	24.0	10 (1892-1901)	756.12	756.43	756.41	756.47	756.44	756.42	756.31	756.25
Port-Provvidence	61 26	173 0 W	—	1 (1848-1849)	758.21	758.21	758.18	758.12	758.07	757.97	757.85	757.80
Port-Clarence	65 30	165 30 W	—	2 (1850-1852)	759.55	759.60	759.58	760.21	760.15	760.08	759.98	759.93
Chamisso-Island	66 13	161 46 W	—	1 (1849-1850)	765.34	765.42	765.39	765.03	765.03	764.98	764.91	764.88

Febbraio.

Tab. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Trichinopoly	10°50′	78°44′E	77.7	9 (1881-1889)	756.02	755.89	755.61	755.05	754.72	754.47	754.31	754.67
Aden	12 45	45 3 E	28.7	14 (1880-1893)	760.36	760.26	760.13	759.88	759.50	759.37	759.42	759.60
Bellary	15 9	76 57 E	449.7	9 (1881-1889)	723.32	723.38	723.17	722.97	722.67	722.41	722.36	722.77
Belgaum	15 52	74 42 E	769.8	10 (1879-1888)	696.59	696.33	696.08	695.74	695.37	695.08	695.06	695.39
Rangoon	16 46	96 12 E	12.6	10 (1877-1887)	760.21	760.24	760.05	759.78	759.48	759.27	759.19	759.50
Poona	18 28	74 10 E	561.3	10 (1879-1888)	714.06	713.91	713.67	713.37	713.02	712.84	712.84	712.97
Bombay	18 54	72 49 E	11.3	20 (1876-1895)	760.66	760.49	760.26	759.93	759.55	759.32	759.32	759.58
Cuttack	20 29	85 54 E	24.4	21 (1872-1892)	759.95	759.90	759.83	759.42	759.17	758.91	758.94	759.09
Nagpur	21 9	79 11 E	312.6	17 (1877-1893)	734.58	734.50	734.30	734.13	733.84	733.67	733.57	733.84
Chittagong	22 21	91 50 E	26.4	9 (1877-1885)	760.03	759.95	759.88	759.60	759.32	759.09	758.86	759.02
Calcutta (Alipore)	22 32	88 20 E	6.5	13 (1881-1893)	761.40	761.37	761.32	761.10	760.85	760.56	760.46	760.54
Jubbulpore	23 9	79 59 E	404.7	19 (1875-1893)	727.22	727.06	726.83	726.56	726.30	726.05	726.02	726.30
Hazaribagh	24 0	85 24 E	612.2	13 (1873-1885)	709.76	709.74	709.61	709.46	709.19	708.95	708.75	708.78
Deesa	24 16	72 14 E	142.0	11 (1878-1888)	749.64	749.44	749.16	748.91	748.67	748.50	748.37	748.65
Kurrachee	24 47	67 4 E	14.9	19 (1875-1893)	761.30	761.27	761.15	760.92	760.56	760.36	760.29	760.44
Allahabad	25 26	81 52 E	94.3	10 (1876-1885)	753.70	753.70	753.58	753.40	753.20	753.02	752.92	753.13
Patna	25 37	85 14 E	55.8	13 (1873-1885)	757.19	757.29	757.09	756.83	756.60	756.32	756.24	756.43
Dhubri	26 7	89 50 E	4.7	8 (1881-1888)	758.76	758.83	758.78	758.56	758.26	757.95	757.77	757.95
Goalpara	26 11	90 40 E	117.7	9 (1873-1881)	751.47	751.47	751.37	751.16	750.84	750.61	750.48	750.64
Lucknow	26 50	81 0 E	112.8	10 (1876-1885)	752.18	752.08	751.98	751.80	751.57	751.35	751.16	751.35
Jeypore	26 55	75 50 E	436.3	16 (1881-1896)	725.08	724.98	724.80	724.62	724.34	724.14	724.07	724.19
Sibsagar	26 59	94 40 E	101.6	12 (1874-1885)	753.78	753.70	753.63	753.48	753.28	753.13	752.99	753.23
Agra	27 10	78 5 E	169.4	11 (1875-1885)	747.56	747.38	747.18	747.03	746.72	746.54	746.39	746.39
Roorkee	29 52	77 56 E	270.4	11 (1875-1885)	738.46	738.41	738.26	737.91	737.65	737.35	737.19	737.35
Lahore	31 34	74 20 E	214.2	19 (1875-1893)	743.39	743.42	743.32	743.14	742.99	742.73	742.61	742.71
Leh	34 10	77 42 E	3508.4	16 (1876-1891)	497.40	497.50	497.52	497.42	497.37	497.21	497.24	497.26
San Fernando	36 28	6 12 W	28.5	10 (1890-1899)	763.23	763.17	763.04	762.94	762.75	752.55	762.42	762.42
Atene	37 58	23 44 E	107.1	2 (1895-1896)	752.61	752.56	752.59	752.89	752.81	752.67	752.53	752.66
Lisbona	38 43	9 8 W	102.3	15 (1874-1888)	756.84	756.83	756.75	756.66	756.53	756.35	756.25	756.30

Segue **Febbraio.** TAB. *A*

	φ	λ	H metri	Anni di osservazione	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Bucarest	44°25′	26° 6′ E	84.0	14 (1885-1898)	757.11	757.11	757.12	757.06	757.03	756.92	756.83	756.82
Novorosiïsk	44 44	37 49 E	37.1	6 (1892-1897)	759.00	758.97	759.00	759.00	759.03	758.93	758.80	758.82
Markhot	44 45	37 49 E	435.5	4 (1894-1897)	721.77	721.73	721.77	721.80	721.80	721.63	721.57	721.43
Torino	45 4	7 41 E	276.4	16 (1871-1886)	739.36	739.38	739.38	739.21	739.16	738.96	738.88	738.86
Trieste	45 39	13 46 E	25.8	10 (1890-1899)	762.22	762.26	762.27	762.22	762.18	762.04	761.92	761.87
Kalocsa	46 32	19 0 E	98.4	4 (1896-1899)	755.61	755.64	755.66	755.42	755.42	755.28	755.21	755.23
Klagenfurt	46 37	14 18 E	438.0	10 (1891-1900	723.72	723.81	723.88	723.94	723.96	723.97	723.96	723.95
Sonnblick	47 3	12 57 E	3106.0	6 (1891-1896)	518.07	518.05	518.02	518.02	517.93	517.78	517.65	517.59
O'-Gyalla	47 53	18 11 E	115.0	9 (1892-1900)	752.04	752.04	752.07	752.03	752.03	751.89	751.81	751.81
Kremünster	48 4	14 8 E	384.0	10 (1891-1900)	728.64	728.62	728.64	728.56	728.54	728.46	728.40	728.41
Vienna	48 15	16 21 E	203.0	15 (1886-1891)	745.14	745.13	745.13	744.98	744.94	744.79	744.72	744.75
Bielitz	49 49	19 3 E	343.0	3 (1896-1898)	731.87	731.88	731.84	731.60	731.61	731.50	731.38	731.37
Krakau	50 4	19 57 E	220.0	31 (1858-1888)	744.18	744.19	744.27	744.20	744.17	744.10	744.02	744.00
Falmouth	50 9	5 4 W	55.8	25 (1871-1895)	756.53	756.45	756.45	756.29	756.19	756.04	755.94	755.94
Vlissingen	51 27	3 37 E	7.7	10 (1890-1899)	764.11	764.08	764.07	764.18	764.08	763.92	763.78	763.73
Kew	51 28	0 19 W	10.4	25 (1871-1895)	761.27	761.27	761.27	761.15	761.07	760.92	760.85	760.85
Valencia	51 55	10 18 W	7.0	25 (1871-1895)	759.22	759.19	759.17	759.07	758.94	758.83	758.68	758.66
Irkoutsk	52 16	104 19 E	478.0	10 (1889-1898)	727.11	727.11	727.07	727.17	727.18	727.09	727.04	727.08
Potsdam	52 23	13 4 E	81.9	7 (1893-1899)	754.11	754.09	754.10	753.96	753.92	753.78	753.69	753.69
Helder	52 58	4 46 E	14.6	10 (1890-1899)	763.27	763.25	763.22	763.34	763.19	763.05	762.96	762.92
Groningen	53 13	6 35 E	9.0	10 (1890-1899)	761.89	761.91	761.92	762.08	761.99	761.90	761.80	761.73
Fort-William	56 49	5 7 W	12.8	5 (1891-1895)	757.85	757.82	757.87	757.77	757.75	757.59	757.56	757.54
Aberdeen	57 10	2 6 W	26.8	25 (1871-1895)	756.24	756.19	756.19	756.04	755.99	755.84	755.77	755.72
Pavlovsk	59 41	30 29 E	40.0	10 (1889-1898)	755.76	755.71	755.78	755.61	755.63	755.59	755.53	755.51
Upsal	59 51	17 30 E	24.0	10 (1892-1901)	755.01	755.08	755.10	754.96	754.91	754.80	754.75	754.70
Port-Provvidence	64 26	173 0 W	—	1 (1848-1849)	759.60	759.70	759.73	759.68	759.63	759.55	759.55	759.37
Port-Clarence	65 30	165 30 W	—	2 (1850-1852)	754.82	754.92	754.95	754.62	754.50	754.47	754.37	754.26
Chamisso-Island	66 13	161 46 W	—	1 (1849-1850)	751.14	751.32	751.32	752.11	752.01	751.88	751.72	751.67

TAB. *B*

	Batavia — $\varphi = 6°11'$; $\lambda = 106°50'$ E; H = m. 8.0; 30 anni (1866-95)								St. Elena — $\varphi = 15°57'$; $\lambda = 5°40'$ W; H = m. 538.3; 5 anni (1841-45)							
	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Gennaio	759.52	759.51	759.24	758.83	758.47	758.22	758.17	758.40	717.89	717.79	717.41	716.98	716.67	716.50	716.57	716.78
Febbraio	759.68	759.68	759.43	759.01	758.64	758.41	758.37	758.56	717.51	717.51	717.21	716.83	716.47	716.24	716.32	716.42
Marzo	759.58	759.60	759.34	758.95	758.57	758.33	758.28	758.45	717.59	717.48	717.23	716.91	716.55	716.30	716.24	716.42
Aprile	759.18	759.18	758.96	758.55	758.16	757.93	757.87	757.99	717.87	717.84	717.74	717.46	717.08	716.78	716.72	716.83
Maggio	759.20	759.14	758.97	758.60	758.22	757.97	757.89	758.07	718.70	718.65	718.45	718.19	717.97	717.72	717.69	717.79
Giugno	759.55	759.51	759.40	759.07	758.71	758.43	758.37	758.54	720.05	719.95	719.72	719.57	719.29	719.01	718.99	719.04
Luglio	759.83	759.84	759.73	759.44	759.12	758.84	758.78	758.93	720.84	720.76	720.63	720.38	720.08	719.80	719.70	719.75
Agosto	759.98	760.02	759.84	759.49	759.17	758.93	758.87	759.02	720.66	720.61	720.41	720.08	719.75	719.51	719.41	719.44
Settembre	760.17	760.18	759.90	759.51	759.20	759.05	759.05	759.25	719.82	719.77	719.51	719.09	718.73	718.48	718.38	718.53
Ottobre	759.84	759.74	759.41	759.04	758.71	758.52	758.56	758.81	718.94	718.75	718.40	717.97	717.62	717.33	717.38	717.57
Novembre	759.60	759.49	759.17	758.76	758.38	758.18	758.21	758.48	718.27	718.09	717.74	717.26	716.93	716.81	716.88	717.06
Dicembre	759.41	759.36	759.07	758.64	758.28	758.03	757.98	758.22	718.19	718.07	717.72	717.23	716.93	716.75	716.78	717.06

TAB. *B*

	Asuncion (Paraguay) φ = 25°16'; λ = 57°40' W; H = m. 138.3; 4 anni (1894-97)								**Cordoba** φ = 31°25'; λ = 64°12' W; H = m. 438.1; 5 anni (1894-98)							
	22h	23h	mezzanotte	1h	2h	3h	4h	5h	22h	23h	mezzanotte	1h	2h	3h	4h	5h
Gennaio	749.83	749.83	749.68	749.39	749.27	749.22	749.36	749.68	722.55	722.70	722.64	722.39	722.12	722.00	722.09	722.32
Febbraio	751.18	751.20	751.12	751.02	750.88	750.79	750.87	751.13	723.20	723.29	723.27	723.11	722.92	722.72	722.67	722.81
Marzo	751.62	751.65	751.63	751.50	751.38	751.30	751.37	751.63	723.79	723.85	723.83	723.64	723.13	723.24	723.21	723.34
Aprile	754.24	754.21	754.18	754.04	753.91	753.84	753.87	754.09	725.61	725.60	725.51	725.47	725.29	725.05	724.92	725.01
Maggio	755.37	755.41	755.38	755.21	755.06	754.97	754.94	755.05	726.15	726.19	726.06	725.83	725.65	725.41	725.27	725.26
Giugno	757.06	757.12	757.09	757.04	756.94	756.80	756.78	756.81	727.23	727.29	727.19	726.99	726.76	726.54	726.38	726.29
Luglio	756.38	756.42	756.43	756.41	756.25	756.14	756.06	756.14	727.32	727.36	727.24	726.98	726.75	726.51	726.33	726.31
Agosto	755.08	755.17	755.18	755.19	755.02	754.87	754.82	754.94	726.77	726.85	726.79	726.69	726.39	726.09	725.91	725.93
Settembre	754.48	754.52	754.53	754.48	754.34	754.21	754.21	754.43	726.55	726.54	726.47	726.36	726.08	725.78	725.69	725.82
Ottobre	752.91	752.93	752.82	752.70	752.53	752.52	752.64	752.91	725.74	725.80	725.68	725.43	725.19	725.06	725.13	725.33
Novembre	751.32	751.31	751.20	751.02	750.92	750.95	751.12	751.43	723.21	723.21	723.08	722.94	722.71	722.66	722.76	723.03
Dicembre	749.99	750.08	749.96	749.81	749.65	749.61	749.73	750.01	722.21	722.29	722.14	721.96	721.65	721.58	721.77	722.08

Tab. *B*

	Rosario y Fisherton $\varphi = 34°17'$; $\lambda = 57°18'$ W; H = m. 27.8; 7 anni (1891-97)								Hobarton $\varphi = 42°52'$; $\lambda = 147°27'$ E; H = m. 32.0; 8 anni (1841-48)							
	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	22^h	23^h	mezzanotte	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h
Gennaio	756.54	756.59	756.50	756.32	756.21	756.28	756.50	756.78	756.14	755.99	755.61	755.58	755.28	755.16	755.05	755.56
Febbraio	757.70	757.76	757.71	757.51	757.45	757.41	757.54	757.86	757.70	757.64	757.67	757.72	757.39	757.29	757.21	757.44
Marzo	758.15	758.23	758.23	758.01	757.96	757.91	758.01	758.27	758.00	757.92	758.07	757.97	757.85	757.61	757.61	757.67
Aprile	761.03	761.04	760.97	761.03	760.90	760.78	760.80	760.99	757.59	757.41	757.54	757.24	757.36	757.11	757.21	757.09
Maggio	761.88	761.93	761.93	761.68	761.57	761.42	761.38	761.49	757.70	757.59	757.26	756.88	757.14	757.01	756.83	756.96
Giugno	763.30	763.33	763.31	763.23	763.14	763.01	762.92	763.00	757.72	757.72	757.34	757.19	757.01	757.04	757.01	757.11
Luglio	762.76	762.85	762.88	762.66	762.53	762.34	762.26	762.27	757.64	757.75	757.14	756.91	757.06	756.96	756.80	756.75
Agosto	762.81	762.89	762.88	762.82	762.61	762.45	762.40	762.53	756.88	756.73	756.85	756.85	756.45	756.27	756.22	756.55
Settembre	762.26	762.33	762.37	762.41	762.23	762.10	762.15	762.35	756.45	756.29	756.09	755.92	755.92	755.72	755.69	755.77
Ottobre	760.48	760.56	760.54	760.37	760.23	760.18	760.32	760.59	756.65	756.60	756.19	755.89	755.84	755.89	755.79	755.99
Novembre	758.10	758.11	758.02	757.96	757.87	757.93	758.10	758.40	754.29	754.16	754.19	753.78	753.65	753.48	753.55	753.60
Dicembre	756.99	757.04	756.93	756.87	756.77	756.88	757.12	757.46	756.12	756.04	755.94	755.61	755.43	755.51	755.36	755.61

ELENCO DEGLI ANNALI

dai quali furono tolti i dati orari dell'andamento diurno della pressione atmosferica

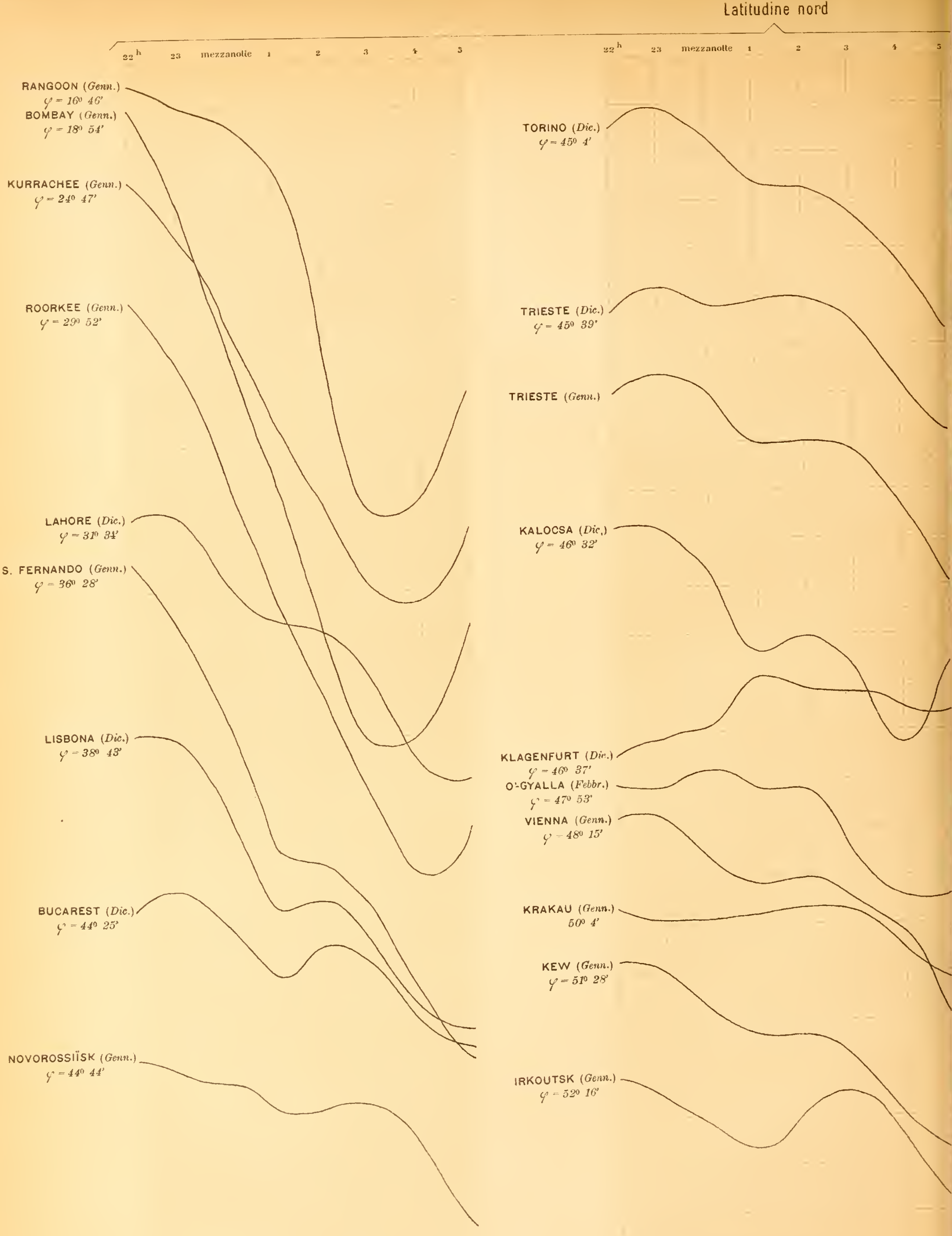
Stazioni dell'emisfero Nord.

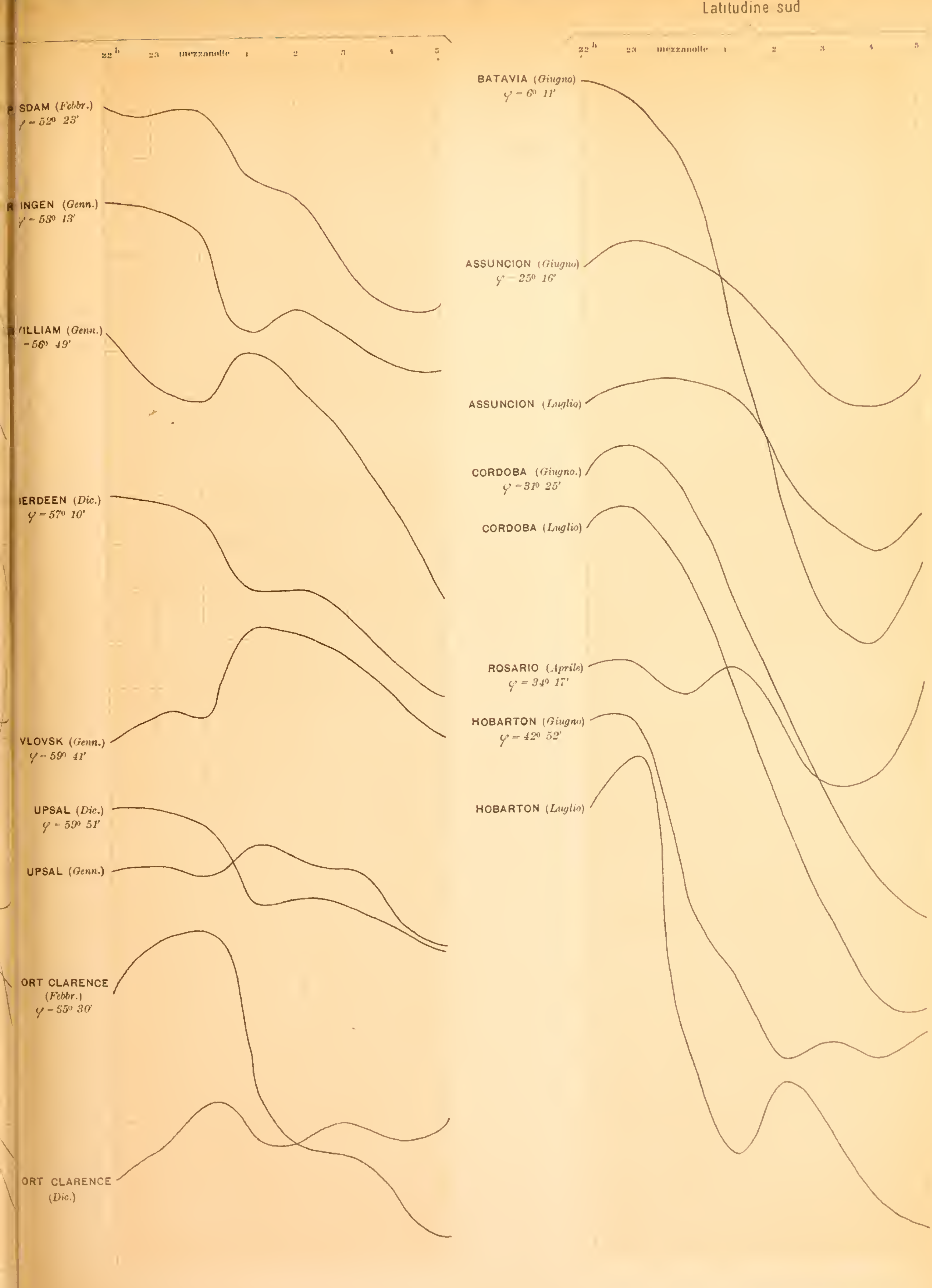
1. *Trichinopoly*	Indian Meteorological Memories. Vol. IX, Parte VI
2. *Aden*	„ „ „ „ VII
3. *Bellary*	„ „ „ „ V
4. *Belgaum*	„ „ „ „ V
5. *Rangoon*	„ „ „ „ VII
6. *Poona*	„ „ „ „ IV
7. *Bombay*	Magnetical and Meteorological Observations made at the Government Observatory, Bombay
8. *Cuttack*	Indian Meteorological Memories, Vol. IX, Parte II
9. *Nagpur*	„ „ „ „ IV
10. *Chillagon*	„ „ „ „ I
11. *Calcutta*	„ „ „ „ VIII
12. *Jubbulpore*	„ „ „ „ III
13. *Hazaribagh*	„ „ Vol. V „ II
14. *Deesa*	„ „ „ „ VIII
15. *Kurrachee*	„ „ „ „ IX
16. *Allahabad*	„ „ „ „ IV
17. *Patna*	„ „ „ „ II
18. *Dhubri*	„ „ „ „ III
19. *Goalpara*	„ „ „ „ I
20. *Lucknow*	„ „ „ „ V
21. *Jeypore*	„ „ Vol. IX „ IX
22. *Sibsagar*	„ „ Vol. V „ I
23. *Agra*	„ „ „ „ IV
24. *Roorckee*	„ „ „ „ III
25. *Lahore*	„ „ „ „ X
26. *Leh*	„ „ „ „ VII
27. *San Fernando* . . .	Anales del Instituto y Observatorio de Marina de S. Fernando
28. *Atene*	Annales de l'Observatoire National d'Athènes
29. *Lisbona*	Annaes do Observatorio do Infante D. Luiz, Lisboa
30. *Bucarest*	Analele Institutului Meteorological Românieri, Tomo XV
31. *Novorosiïsk*	Annales de l'Observatoire Physique Central Nicolas
32. *Markhot*	„ „ „
33. *Torino*	Bollettino dell'Osservatorio della R. Università di Torino
34. *Trieste*	Rapporto annuale dell'Osservatorio Marittimo di Trieste
35. *Kalocsa*	Jahrbücher der Königl. Ungar. Reichs. Anstalt für Meteor., Budapest
36. *Klagenfurt*	„ K. K. Central-Anstalt für Meteorologie, Vienna
37. *Sonnblick*	„ „ „ „
38. *O'-Gyalla*	„ Königl. Ungar. Reichs. Anstalt für Meteor., Budapest
39. *Kremünster*	„ K. K. Central-Anstalt für Meteorologie, Vienna
40. *Vienna*	„ „ „ „
41. *Bielitz*	„ „ „ „
42. *Krakau*	„ „ „ „

43.	*Falmouth*	Hourly Means of the Readings obtained from the Self-Recording Instruments at the Five Observatories under the Meteorological Council, London
44.	*Vlissingen*	Annuaire Météorologique publié par l'Institut Royal Météorologique des Pays-Bas, Utrecht
45.	*Kew*	Hourly Means of the Read. obt. from the Self-Record. Instrum. ecc., Meteor. Council, London
46.	*Valencia*	Hourly Means of the Read. Met. Concil, London
47.	*Irkoutsk*	Annales de l'Observatoire Physique Central, St-Pétersbourg
48.	*Potsdam*	Ergebnisse der Meteorologischen Beobachtungen in Potsdam, Berlin
49.	*Helder*	Annuaire Météor. publié par l'Institut Royal des Pays-Bas, Utrecht
50.	*Groningen*	„ „ „ „
51.	*Fort-William* . . .	Hourly Means, ecc. Meteorological Council, London
52.	*Aberdeen*	„ „ „
53.	*Pavlovsk*	Annales de l'Observatoire Physique Central, St-Pétersbourg
54.	*Upsal*	Bulletin Mensuel de l'Observatoire Météorologique de l'Université d'Upsal
55.	*Port-Provvidence* . .	Contributions to our Knowledge of the Meteorol. at the Artic regions
56.	*Port-Clarence* . . .	„ „ „ „
57.	*Chemisso-Island* . .	„ „ „ „

Stazioni dell'emisfero Sud.

1.	*Batavia*	Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory of Batavia, Vol. XVIII
2.	*St-Elena*	Magnetical and Meteorological Observations, St-Helena
3.	*Asuncion (Paraguay)*	Anales de la Oficina Meteorologica Argentina, Buenos Aires
4.	*Cordoba*	„ „ „ „
5.	*Rosario y Fisherton* .	„ „ „ „
6.	*Hobarton*	Magnetical and Meteorological Observations, Hobarton


Latitudine nord
22h
23
mezzanotte
1
2
3
4
5
RANGOON (Genn.)
φ = 16° 46'
BOMBAY (Genn.)
φ = 18° 54'
KURRACHEE (Genn.)
φ = 24° 47'
ROORKEE (Genn.)
φ = 29° 52'
LAHORE (Dic.)
φ = 31° 34'
S. FERNANDO (Genn.)
φ = 36° 28'
LISBONA (Dic.)
φ = 38° 43'
BUCAREST (Dic.)
φ = 44° 25'
NOVOROSSIÏSK (Genn.)
φ = 44° 44'
TORINO (Dic.)
φ = 45° 4'
TRIESTE (Dic.)
φ = 45° 39'
TRIESTE (Genn.)
KALOCSA (Dic.)
φ = 46° 32'
KLAGENFURT (Dic.)
φ = 46° 37'
O'-GYALLA (Febbr.)
φ = 47° 53'
VIENNA (Genn.)
φ = 48° 15'
KRAKAU (Genn.)
50° 4'
KEW (Genn.)
φ = 51° 28'
IRKOUTSK (Genn.)
φ = 52° 16'



ussolia, Torino

SULLA

INCIDENZA DI RETTE, PIANI E SPAZII ORDINARII

IN UNO

SPAZIO A CINQUE DIMENSIONI

E SU ALCUNE

CORRISPONDENZE BIRAZIONALI

FRA

PIANI E SPAZII ORDINARII

MEMORIA

DI

UMBERTO PERAZZO

Approvata nell'adunanza del 19 Gennaio 1904.

Ci proponiamo nel presente lavoro di studiare, con procedimento elementare, alcune varietà costituite in un S_5 da " sistemi di rette, piani, spazî ordinarî incidenti a dati spazî in numero finito „ e di determinare *elementarmente* gli ordini di tutte le possibili varietà che si possono ottenere in tal guisa nell'S_5. Tali numeri sono tutti contenuti nelle formole generali dello SCHUBERT (*) e del PIERI (**).

Di analoghe ricerche per lo spazio a quattro dimensioni tratta una nota del Prof. SEGRE (***), alla quale dovremo più volte ricorrere nel seguito. Anche in un S_5 vennero considerati " sistemi di rette, piani od S_3 incidenti a dati spazî „ da varî Autori, che citeremo nel seguito.

Procederemo — nella determinazione degli ordini delle varietà di rette od S_3 (poscia di piani) del tipo di cui sopra — dalle varietà d'ordine più basso a quelle d'ordine più elevato, soffermandoci, allorchè ci si presenteranno varietà degne di nota, ad un breve studio relativo. Accenniamo fra queste ultime ai due diversi tipi di " rigate (razionali) del 4° ordine appartenenti all' S_5 „ (****) (n[i] 14, 24) e ad una

(*) *Die* n-*dimentionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums*, " Math. Annalen „, t. 26 (1885) e *Beitrag zur Liniengeometrie in* n *Dimensionen*, " Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg „, (1892).

(**) *Sul problema degli spazî secanti*, " Rend. Ist. Lomb. „, (II). 26 (1893); (II). 27 (1894).

(***) *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, " Rend. del Circolo Matem. di Palermo „, tomo II (1888).

(****) C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XIX (1884).

notevole rigata ellittica del 6° ordine (*) (ni 25-28). Degna di studio ci si presenterà ancora (ni 15-22) una particolare varietà del 4° ordine a tre dimensioni; da essa trarremo " per proiezione „ (n° 23) alcuni risultati dell' Hirst (**) relativi alla congruenza, nello spazio ordinario, delle ∞^2 congiungenti coppie di punti omologhi in una generale corrispondenza quadratica fra due piani. — Accenniamo infine ad una notevole forma cubica " contenente tre rette doppie — non in un S_4 — ed un piano doppio ad esse incidente „, lo studio della quale (ni 39-44) completerà da un certo punto di vista (v. l'oss. (*) al n° 44) quello relativo alla " forma cubica con 9 rette doppie „ di cui mi occupai in una precedente nota (***).

È noto come in un S_n un sistema di spazî S_α, tale che per ogni punto dell'S_n ne passi un solo, determini tra due $S_{n-\alpha}$, assunti in posizione generica, una corrispondenza biunivoca, omologhi essendo due punti secati da uno stesso S_α del sistema sopra i due $S_{n-\alpha}$. Tale concetto è stato applicato da alcuni Autori alla determinazione di particolari corrispondenze biunivoche. In particolare il Dr. Carrone (****) — partendo da alcune categorie di " sistemi di spazî incidenti in un S_n a dati spazî in numero finito, e tali che per ogni punto dell'S_n passi un solo spazio del sistema „ — determina varî tipi di corrispondenze birazionali.

Considereremo nell'S_5 (§ 8) tutti i sistemi di rette, piani, S_3, della natura di cui sopra e quelle corrispondenze birazionali da essi definite, che non furono ancor dedotte in tal modo: tra esse due notevoli trasformazioni del 5° ordine tra due S_3, che non rientrano, per quanto mi è noto, in altri tipi più generali studiati. Premetteremo (§§ 5, 6, 7) l'esame di alcuni sistemi di spazî (S_{n-2}, S_{n-3}) di un S_n, della natura sopradetta, da cui trarremo tipi di trasformazioni tra due piani od S_3 i quali rientrano in altri noti ed interessanti, dedotti per altra via (*****).

(*) La più generale rigata ellittica del 6° ordine con curva minima del 3° ordine: C. Segre, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XXI (1886).

(**) *On Cremonian congruences*, " Proceedings of the London Math. Society „, vol. 14 (1880).

(***) *Sopra una forma cubica con 9 rette doppie dello spazio a cinque dimensioni, ecc.*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XXXVI (1901).

(****) *Le trasformazioni birazionali fra due spazî ad* n *dimensioni*, *ecc.*, " Atti dell'Accademia Gioenia di Catania „, vol. XI, serie 4ª.

(*****) E precisamente: *a)* Una trasformazione birazionale fra due piani del De Jonquières, (" Nouv. Ann. „, (II) 6, (1864); " Giornale di Mat. „, t. 23 (1885)); — *b)* Una trasformazione birazionale tra due S_3 " nella quale i sistemi omaloidici nei due S_3 sono costituiti da rigate (razionali) d'ordine qualunque n con retta direttrice $(n-1)$pla fissa, ecc. „ studiata dal Prof. C. Segre: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XXI (1885), n° 21; — *c)* Una trasformazione " monoidale „ tra due S_3, trattata distesamente dal De Paolis: *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine* n *con un punto* (n — 1)*-plo*, " Giornale di Mat. „, t. 13 (1875).

CAPITOLO I.

§ 1.

1. — Sono rispettivamente ∞^8, ∞^9, ∞^8 le rette, i piani, gli spazî ordinarî contenuti in un S_5. Diremo *incidenti* due rette, una retta ed un piano, una retta ed un S_3 allorchè hanno a comune un punto; *incidenti* un piano ed un S_3 quando hanno a comune una retta, due S_3 se hanno a comune un piano. Diremo infine che due piani *si incontrano* (senz'altro), o che l'uno *si appoggia* all'altro, allorchè hanno un (solo) punto a comune; li diremo *incidenti secondo una retta* allorchè hanno una retta a comune.

Sono condizioni *semplici:* l'incidenza di una retta e di un S_3 e " l'incontrarsi „ di due piani; *doppie* l'incidenza di una retta e di un piano, di un S_3 e di un piano; *triple* l'incidenza di due rette o di due S_3; *quadrupla* l'incidenza di due piani secondo una retta.

2. — Indicheremo nel seguito — per brevità — colle notazioni: $(p, q, r)_1$, $(p, q, r)_3$ risp. i sistemi delle rette o degli S_3 incidenti a p rette, q piani, r S_3; con $(p; q, \bar{s}; r)_2$ il sistema dei piani incidenti a p rette, s piani, r S_3 e che incontrano q piani. Supporremo sempre nel seguito assegnati in modo generico gli spazî direttori dei sistemi $(p, q, r)_1, \ldots$

I simboli $(p, q, r)_1$, $(p, q, r)_3$, $(p; q, \bar{s}; r)_2$ ci rappresentoranno gruppi risp. di rette, S_3, piani, in numero finito, allorchè sarà ordinatamente:

$$(1) \qquad 3p + 2q + r = 8; \qquad p + 2q + 3r = 8; \qquad 2p + q + 4s + 2r = 9.$$

In tali casi, cogli stessi simboli rappresenteremo risp. il numero di quelle rette, di quegli S_3 o di quei piani.

È sufficiente alla determinazione degli ordini di tutte le varietà $(p, q, r)_1$, $(p, q, r)_3$, $(p; q, \bar{s}; r)_2$ quella dei numeri rappresentati da tali simboli nelle ipotesi (1) (*), simboli che potremo ottenere esplicitamente, risolvendo le (1), per valori intieri, positivi delle p, q, r, s.

Poichè si corrispondono fra di loro per dualità nell'S_5 i sistemi $(p,q,r)_1$ e $(r,q,p)_3$: $(p; q, \bar{s}; r)_2$ e $(r; q, \bar{s}; p)_2$, terremo presente che nelle ipotesi (1): $(p, q, r)_1 = (r, q, p)_3$; $(p; q, \bar{s}; r)_2 = (r; q, \bar{s}; p)_2$.

§ 2.

3. — Il simbolo $(p, q, r)_1$ dà luogo nell'ipotesi $3p + 2q + r = 8$ ai seguenti:

$$(210)_1,\ (202)_1,\ (121)_1,\ (040)_1,\ (113)_1,\ (105)_1,\ (032)_1,\ (024)_1,\ (016)_1,\ (008)_1$$

che prenderemo in esame nell'ordine scritto.

(*) Notisi che il simbolo $(p, q, r)_1$, ad es., rappresenta l'ordine di ciascuna delle tre varietà $(p-1, q, r)_1$, $(p, q-1, r)_1$, $(p, q, r-1)_1$ nell'ipotesi $p, q, r > 1$. Queste varietà possono ridursi a due, ovvero ad una sola, allorchè uno o risp. due dei tre numeri p, q, r è nullo. Ecc.

4. — Si fa facilmente:

(I) $(210)_1 = (012)_3 = 1$. Ordine della forma $(110)_1$ e della $M_3\,(200)_1$.
(II) $(202)_1 = (202)_3 = 2$. Ordine delle due forme $(102)_1$, $(102)_3$ e della rigata $(201)_1$.
(III) $(121)_1 = (121)_3 = 2$. Ordine delle due forme $(021)_1$, $(021)_3$, della M_3 $(111)_1$, e della rigata $(120)_1$ (*).

5. — (IV) $(040)_1 = (040)_3 = 3$. Ordine della $M_3\,(030)_1$.

In un S_5 le ∞^1 rette incidenti a tre piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ costituiscono — com'è noto — una varietà cubica F a tre dimensioni, appartenente all'S_5. Delle proprietà relative, che enuncieremo senza dimostrazione, alcune son note (**), altre possono facilmente dedursi da queste o direttamente. — Proiettando la $M_3{}^3$ F da un punto che non le appartenga sopra un S_4, si ottiene ivi — com'è accennato in una Memoria del Prof. SEGRE (***) — una forma cubica F' con piano doppio. Faremo vedere (n[i] 8-11) come le varie proprietà di questa forma, ivi determinate, ed alcune altre nuove — relative specialmente all'inviluppo degli iperpiani (S_3) tangenti — possano ottenersi " per proiezione " da analoghe, relative alla F.

6. — *a) In un* S_5 *le* ∞^2 *rette incidenti a tre piani, si appoggiano di conseguenza ad* ∞^1 *piani; punteggiano collinearmente due qualunque di essi, e ne sono proiettate secondo reti collineari di* S_3.

b) La ∞^1 *di piani di cui sopra è un ente duale di se stesso nell'*S_5. Può ritenersi: *come il sistema dei piani incidenti a quattro rette; oppure a tre rette ed un* S_3*, od ancora a tre* S_3 *ed una retta, od infine: a quattro* S_3.

Può ritenersi ancora come *il sistema dei piani congiungenti terne di punti omologhi in tre punteggiate riferite fra loro proiettivamente;* oppure: *comuni a terne di iperpiani omologhi in tre fasci riferiti fra loro proiettivamente.*

c) Gli ∞^2 S_3 *incidenti a tre piani* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *qualsiansi della* F, *incidono di conseguenza a tutti i piani della* F. *Due arbitrarî di questi vengono secati dagli* S_3 *della* ∞^2 *secondo piani rigati collineari e proiettati secondo reti collineari di iperpiani.*

Chiameremo (R), (P), (S) i tre sistemi risp. di rette, piani, S_3 ora considerati:

(*) Un cono quadrico di 2ª specie nell'S_5 — alle cui proprietà dovremo varie volte ricorrere in seguito — può considerarsi in diversi modi come il " luogo delle rette, dei piani, o degli S_3 incidenti ad un dato numero di spazî ". E precisamente: *Viene generato un cono quadrico di 2ª specie nell'*S_5: 1) *Dal sistema* ∞^3 *delle rette incidenti ad una retta e a due* S_3; 2) *id. delle* ∞^3 *rette incidenti a due piani e ad un* S_3; 3) *id. degli* ∞^2 *piani incidenti a una retta, a due* S_3 *ed appoggiati ad un piano;* 4) *id. degli* ∞^2 *piani incidenti ad un piano, ad un* S_3 *ed appoggiati ad un piano;* 5) *id. degli* ∞^1 S_3 *incidenti ad una retta e a due* S_3; 6) *id. degli* ∞^1 S_3 *incidenti a due piani e ad un* S_3. Brevemente: dai sistemi $(102)_1$, $(021)_1$, $(112)_2$, $(0;\,1,\,\bar{1};\,1)_2$, $(102)_3$, $(021)_3$.

(**) Veggansi i due lavori del Prof. SEGRE: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani,* " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXI (1885): n° 9; e *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazî,* " Rend. del Circolo Mat. di Palermo ", tomo V (1891): n° 2.

(***) C. SEGRE: *Sulle varietà cubiche nello spazio a quattro dimensioni, ecc.,* " Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino " (II), tomo XXXIX (1888): n° 52.

le proprietà relative enunciate, possono essere assunte ognuna quale definizione del sistema stesso — e quindi della F (*).

7. — *d) Da ogni punto* O *dell'S_5 esce un solo S_3 del sistema* (S): congiungente ad es. le tre rette comuni ai tre S_3 $O\alpha_1$, $O\alpha_2$, $O\alpha_3$, presi a due a due.

E dualmente.

e) Da ogni punto M della F esce un piano π ed una retta r dei sistemi (P) ed (R) risp. — L'S_3 tangente in M alla F coinciderà coll'S_3 πr, che li congiunge. Fissato un secondo piano π' di (P), l'S_3 tangente in M alla F potrà considerarsi — per ogni posizione di M nel piano π — come l'S_3 proiettante da π l'omologo di M in una certa collineazione (n° 6 *a)*) tra i piani π e π'. Pertanto: *Gli* S_3 *tangenti ad* F *nei punti di un suo piano* π *costituiscono una rete* (π) *collineare al piano punteggiato* (π) *dei punti di contatto.*

f) Due generatrici del sistema (R) sono congiunte da un S_3 di (S), che contiene di conseguenza una schiera di tali generatrici (la schiera incidente a questa essendo fornita dalle intersezioni dell'S_3 cogli ∞^1 piani di (P)). Dualmente: La retta r intersezione di due S_3 del sistema (S) appartiene ad (R): da essa escono ∞^1 S_3 del sistema (S), costituenti un cono quadrico di 2ª specie (il 2° sistema di S_3 generatori essendo costituito dagli S_3 tangenti ad F nei punti della r).

La F è comune quindi ad ∞^2 coni quadrici di 2ª specie, costituenti una rete — poichè i coni della ∞^2 uscenti da ogni punto dello spazio contengono, oltre alla F, l'S_3 del sistema (S) che passa per quel punto, costituendo quindi un fascio. Pertanto: *La* F *può ritenersi quale varietà base e luogo dei sostegni di una rete di coni quadrici di seconda specie* (**).

8. — Il cono proiettante la F da un punto O esterno ad essa, o — ciò che fa lo stesso — il cono circoscritto da O alla F, contiene ∞^1 S_3 generatori, proiettanti i piani del sistema (P). L'S_3 del sistema (S) uscente da O (n° 7 *d)*) — che indicheremo con Σ — è secato dagli ∞^1 piani di (P) secondo le rette di una schiera (n° 7 *f)*). Pertanto: *Gli* S_3 *generatori del cono cubico* (O) *secano* Σ *secondo i piani tangenti ad*

(*) I tre sistemi (R), (P), (S) possono ancora ottenersi assai semplicemente come segue (cfr. n° 7: *f)*): Si fissino nell'S_5 due schiere rigate aventi a comune una generatrice g: intersezione degli S_3 che le contengono, supposti non incidenti. Da ogni punto della g esce una direttrice dell'una e dell'altra schiera: il loro piano genera il sistema (P); gli ∞^2 S_3 congiungenti le generatrici dell'una a quelle dell'altra schiera: il sistema (S) e finalmente le ∞^2 rette comuni a tutte le possibili coppie di S_3 del sistema (S): il sistema (R). — E dualmente.

(**) Si possono facilmente determinare tutti i tipi possibili di " reti di coni quadrici di 2ª specie nell'S_5 ", applicando i risultati d'una nota del Prof. Segre: *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XIX (1884): n° 28. Oltre alla rete (I) di cui sopra, si hanno i tipi seguenti:

II) La rete dei coni quadrici (di seconda specie) aventi a comune un S_3 generatore.

III) La rete dei coni quadrici (di seconda specie) che hanno a comune un piano generatore e sono lungo questo toccati da uno stesso iperpiano.

IV) La rete ottenuta proiettando una rete di coni quadrici di 1ª specie dell'S_4 da un punto non appartenente all'S_4; o — come caso particolare — proiettando una rete di quadriche dell'S_3 da una retta sghemba coll'S_3.

un cono quadrico. Un S_3 generatore del cono giacerà con Σ in uno stesso S_4, che non potrà ulteriormente tagliare il cono, contenendo già una quadrica ed un piano della F. Quindi: *Gli* S_3 *generatori del cono cubico* (O) *giacciono negli iperpiani di un fascio, il cui sostegno:* Σ *è doppio per il cono.*

9. — Dalle considerazioni del n° 8 si deduce: *La proiezione di* F *da un punto* O *sopra un* S_4: ω *è una forma cubica* F′ *costituita da* ∞^1 *piani giacenti negli iperpiani* (S_3) *di un fascio. Il sostegno del fascio* (cioè il piano $\sigma \equiv \omega\Sigma$) *è doppio per la* F′. *I piani di* F′ *secano* σ *secondo le tangenti ad una conica* Γ.

Chiameremo (P') il sistema ∞^1 dei piani della F'. *Giace sulla* F′ (n^i 5, 6) *un sistema* ∞^2 (R′) *di generatrici, attraversate dai piani di* (P′). *Due arbitrarî piani del sistema* (P′) *sono punteggiati collinearmente dalle generatrici di* (R′): *due qualsiansi rette di* (R′) *son punteggiate proiettivamente dai piani di* (P′). Ecc. Si osservi che — generata la F' mediante il sistema (P') dei piani congiungenti terne di punti omologhi in tre punteggiate proiettive, i cui sostegni non sieno in uno stesso S_3 (ed in generale due a due sghembi), questi possono poi scegliersi — ed in ∞ modi — in guisa tale che due di essi sieno incidenti, ed il terzo sghembo col piano dei primi due (*). Ciò perchè nell'analoga generazione della F due dei sostegni possono scegliersi in Σ.

10. — Ritornando alla $M_3{}^3F$: sia π un generico piano di tale varietà: si appoggierà (n° 7 *f*)) alle rette del sistema (R) che giacciono in Σ secondo una direttrice s della schiera costituita da quelle rette. Il piano Os conterrà una retta r della schiera. Gli ∞^1 S_3 di (S) che contengono r (n° 7 *f*)) incideranno a π secondo rette del fascio di centro il punto rs. Un S_3 di tale ∞^1, diverso da Σ è proiettato da O secondo un iperpiano il quale, contenendo il piano $Or \equiv Os$ (e quindi la s) ed una seconda retta di π (diversa da s), conterrà il piano π. Cioè: Gli S_3 del sistema (S) che contengono r sono proiettati da O secondo gli iperpiani del fascio $(O\pi)$. Ognuno di questi iperpiani contiene ∞^1 S_3 tangenti alla F, costituenti (n° 7 *e*)) nell'iperpiano il fascio (π): e più precisamente: tangenti nei punti di quella retta del fascio (rs), comune a π ed all'S_3 di (S) giacente in quell'iperpiano (n° 7 *e*)). Variando anzi l'iperpiano nel fascio $(O\pi)$, la retta descrive un fascio — di centro (rs) — ad esso proiettivo.

Pertanto: nell'iperpiano ω: *Gli iperpiani* (S_3) *uscenti da un generico piano* π' (proiezione di π) *della forma* F′ *sono tangenti ad* F′ *lungo le rette di un fascio* (proiezione del fascio (rs)-π) *contenuto in* π' *ed il cui centro è il punto di contatto colla conica* Γ *della retta* $(r' \equiv s')$ *comune al piano* π' *ed al piano doppio. Gli* S_3 *tangenti del fascio* (π') *e le rette di contatto si corrispondono in una proiettività.*

11. — Poichè gli S_3 del sistema (S) si proiettano secondo gli ∞^2 iperpiani tangenti alla forma F', si potrà ritenere il sistema degli iperpiani tangenti ad F' come *il sistema* ∞^2 *degli* S_3 *congiungenti coppie di rette omologhe in due piani rigati dati e*

(*) O, in altre parole: la F' può considerarsi come luogo degli ∞^1 piani congiungenti coppie di elementi omologhi in una punteggiata e in una schiera rigata riferite fra di loro proiettivamente ovvero in una punteggiata e in un inviluppo piano di 2ª classe, riferiti proiettivamente.

riferiti collinearmente in modo generico. E due qualsiansi piani π'_1, π'_2 di (P') sono secati dagli S_3 tangenti ad F' secondo piani rigati collineari.

Da ogni retta generica r *dell'S_4 escono tre iperpiani tangenti alla* F' (uniti nella collineazione — fra due reti sovrapposte di S_3 — che si ottiene proiettando coppie di rette omologhe nei due piani rigati collineari π'_1, π'_2, ad es., dalla retta r).

Discende ancora da un' osservazione al n° 6 e dalle cose precedenti: Fissato nell'S_4 due schiere rigate aventi una generatrice g' a comune (senz'altre particolarità di posizione): da ogni punto della g' esce una direttrice dell'una e dell'altra schiera: il piano delle due direttrici genera, col variare del punto sulla g', una forma cubica con piano doppio. E gli ∞^2 S_3 congiungenti le generatrici dell'una a quelle dell'altra schiera, costituiranno il sistema degli iperpiani tangenti alla forma. Gli stessi sistemi, risp. di piani e di S_3, possono ottenersi in modo analogo partendo da una schiera rigata e dal sistema delle tangenti ad una conica (Γ), sistema il quale contenga una generatrice g' della schiera (la retta comune al piano e risp. all'S_3 contenenti l'inviluppo e la schiera).

12. — (V) $(113)_1 = (311)_3 = 3$: Ordine delle forme $(013)_1$, $(211)_3$; de la M_3 $(103)_1$ e della rigata $(112)_1$.

Il sistema $(013)_1$ genera una forma cubica con 9 rette doppie (*).

Le rette del sistema $(103)_1$ costituiscono — come facilmente può verificarsi — ∞^1 fasci nei piani generatori di una M^3_3, del tipo considerato ai numeri precedenti.

Le ∞^1 rette del sistema $(112)_1$ giacciono in un S_4 ed ivi costituiscono la rigata cubica delle rette incidenti ad una retta e a tre piani (**).

Il sistema $(211)_3$ — corrispondente per dualità al precedente — genera un cono cubico di 1ª specie. Tralascieremo nel seguito, per brevità, il confronto fra sistemi di spazi, duali fra loro nell'S_5.

13. — (VI) $(105)_1 = (501)_3 = 4$. Ordine delle forme $(005)_1$, $(401)_3$ e della rigata $(104)_1$.

$(005)_1$. Le rette incidenti a $5 S_3$ $\Sigma_1 \ldots \Sigma_5$ costituiscono una forma F del 4° ordine. È noto invero (***) che — più in generale — in un S_n è dell' $(n-1)$° ordine la forma costituita dalle ∞^{n-2} rette incidenti ad n S_{n-2}. — Viceversa: nell' S_n una forma dell' $(n-1)$° ordine la quale contenga n S_{n-2} contiene il sistema ∞^{n-2} delle rette che ad essi si appoggiano. Facilmente se ne può stabilire l' equazione e — come caso particolare — quella della nostra F (****). — Le 10 rette $r_{ik} = \Sigma_i \Sigma_k$ $(i, k = 1, \ldots, 5;\ i \neq k)$

(*) Cfr. la mia nota: *Sopra una forma cubica, ecc.*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XXXVI, 1901. Questa forma può considerarsi altresì come " luogo degli ∞^2 piani d'un sistema $(310)_2$ " o, ciò che fa lo stesso, d'un sistema $(013)_2$ ".

(**) C. Segre: *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a 4 dimensioni*, " Rend. Circolo Mat. di Palermo ", t. II (1888), n° 5.

(***) Cfr. ad es. C. Carrone: *Le trasformazioni birazionali tra due spazi ad* n *dimensioni, ecc.*, " Atti dell'Acc. Gioenia di Catania ", vol. XI, serie 4ª: n° 22.

(****) Sieno $A' = B' = 0$; ..., $A^{n-1} = B^{n-1} = 0$, $x_n = x_{n+1} = 0$ $\left(\text{ove } A' \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i' x_i;\ B' = \sum_{i=1}^{n+1} b_i' x_i;\ \ldots,\ A^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(n-1)} x_i,\ B^{(n-1)} \equiv \sum_{i=1}^{n+1} b_i^{(n-1)} x_i \right)$ le equazioni di n S_{n-2} fra loro linearmente indipendenti, e quindi:

$$A' + \rho' B' = 0,\ \ldots,\ A^{(n-1)} + \rho^{(n-1)} B^{(n-1)} = 0. \tag{1}$$

le equazioni dei fasci d'iperpiani uscenti dai primi $n-1$ di essi. Dall'S_{n-2}: $x_n = x_{n+1} = 0$ verranno sono evidentemente *doppie* per la F. Inoltre: ciascuno degli $S_3 \Sigma_i$ è secato dalla M_3^3 (n° 6 *b)*) degli ∞^1 piani incidenti ai rimanenti secondo una cubica *doppia* per la F (poichè i piani della M_3^3 uscenti dai suoi punti non stanno (ognuno) con Σ_i in uno stesso S_4. La cubica ha evidentemente per corde le quattro rette (doppie) comuni a Σ_i ed agli S_3 rimanenti, poichè ad es. $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_5$ secano la M_3^3 dei piani incidenti a $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_5$ secondo quadriche, tagliati risp. dalle $r_{12}, \ldots, r_{15}$ secondo coppie di punti.

Le rette incidenti ai $5 S_3$ $\Sigma_1, \ldots \Sigma_5$ determinano fra due di essi (Σ_1, Σ_2 ad es.) una corrispondenza biunivoca, omologhi essendo i punti d'incidenza di una retta del sistema coi due S_3. D'altra parte: un piano incidente agli S_3 rimanenti ($\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$) seca sopra i due S_3 punti congiunti da una retta del sistema. Quindi la corrispondenza si potrà ritenere definita dal sistema degli ∞^3 piani incidenti a tre S_3 ($\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$) o — ciò che fa lo stesso —: a tre rette (r_{34}, r_{35}, r_{45}). Questa corrispondenza — del 3° ordine — fu studiata dal Prof. Ascione (v. n° 61).

14. — $(104)_1$ Le rette incidenti ad una retta r ed a quattro S_3: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ possono ottenersi riferendo prospettivamente i 4 fasci $(\Sigma_1), \ldots, (\Sigma_4)$ alla punteggiata (r) e costruendo le rette comuni a quaterne di S_4 omologhi (proiettanti uno stesso punto della r): Costituiranno pertanto una rigata razionale del 4° ordine (*), a direttrice rettilinea: uno dei due tipi possibili (dal punto di vista proiettivo) di rigate del 4° ordine appartenenti all'S_5 (**). (Ci si presenterà il 2° tipo — più generale — come sistema $(031)_1$: n° 24). V'hanno ∞^3 cubiche sghembe direttrici della rigata F (***). Quindi: *In un* S_5 *le* ∞^1 *rette incidenti ad una retta e a quattro* S_3 *si appoggiano di conseguenza (secondo cubiche sghembe) ad* ∞^3 S_3.

Le generatrici della F *punteggiano proiettivamente la* r *a ciascuna delle* ∞^3 *cubiche sghembe direttrici. Viceversa* (****): riferite proiettivamente una retta punteggiata ad una

secati secondo gli $n-1$ fasci di S_{n-3} le cui equazioni parametriche nell'S_{n-2} $x_n = x_{n+1} = 0$ si ottengono ponendo $x_n = x_{n+1} = 0$ nelle forme $A', B', \ldots$ Affinchè $n-1$ S_{n-3} appartenenti ord. a questi fasci concorrano in un punto, occorre e basta che i parametri corrispondenti $\rho', \ldots, \rho^{(n-1)}$ soddisfino alla:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_1' + \rho' b_1', & \ldots\ldots, & a'_{n-1} + \rho' b'_{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-1)} + \rho^{n-1} b_1^{(n-1)}, & \ldots, & a_{n-1}^{(n-1)} + \rho^{(n-1)} b_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Gli S_{n-1} dei fasci (1) relativi a questi parametri si taglieranno allora secondo una retta incidente agli $n S_{n-2}$. Le (1) colla (2) costituiranno pertanto le equazioni parametriche della forma. Ed eliminando le ρ se ne otterrà l'equazione:

$$\begin{vmatrix} a_1' B' - b_1' A', \ldots, & \ldots\ldots, & a'_{n-1} B' - b'_{n-1} A' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(n-1)} B^{n-1)} - b_1^{(n-1)} A^{(n-1)}, & \ldots, & a_{n-1}^{(n-1)} B^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} A^{n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

(*) Veronese, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen, ecc.*, " Math. Annalen ", Bd. XIX.

(**) C. Segre, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XIX (1884).

(***) Id., n° 5.

(****) Id., n° 6.

cubica sghemba, il cui S_3 non incontri la retta, le ∞^1 congiungenti coppie di punti omologhi costituiscono una rigata del tipo della F.

15. — (VII) $(032)_1 = (230)_3 = 4$: Ordine della forma $(130)_3$, della M_3 $(022)_1$ e della rigata $(031)_1$.

$(022)_1$: Le ∞^2 rette incidenti a due piani α_1, α_2 e a due S_3 Σ_1, Σ_2 costituiscono una varietà (M_3): F del *4° ordine*. Questa può ritenersi invero la completa intersezione di due coni quadrici di 2^a specie: il cono C_1 delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_1$ ed il cono C'_2 delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_2$. Tali coni non hanno fra di loro posizione *generica*, poichè i piani α_1, α_2 appartengono ad entrambi (e quindi alla F).

(Il fascio determinato da due forme quadratiche (M_4^2) che abbiano a comune due piani fra loro sghembi (senza punti a comune) ha quale varietà base una M_3^4 del tipo della F, poichè (v.[i] il n° 26) i coni appartenenti al fascio sono della 2^a specie (ed in numero di tre), ecc.).

16. — Indichiamo con A, A' i punti $\alpha_1\Sigma_1, \alpha_2\Sigma_1$, comuni a Σ_1 e risp. ai piani α_1, α_2: analogamente con B, B' i punti $\alpha_1\Sigma_2, \alpha_2\Sigma_2$. Dal punto A ($\equiv \alpha_1\Sigma_1$) ad es., esce un fascio di rette del sistema $(022)_1$, contenuto nel piano — della F — comune all'S_4 ed all'S_3 che da A proiettano risp. Σ_2 ed α_2. Poichè detto piano incide secondo rette a Σ_2 e ad α_2, secherà α_2 secondo una retta uscente dal punto $B' \equiv \alpha_2\Sigma_2$. Analogamente: da B uscirà un piano della F incidente ad α_2 secondo una retta uscente da A'; e da ognuno dei punti A', B' un piano incidente ad α_1 secondo una retta che uscirà dal punto B o dal punto A rispettivamente.

V'ha infine un piano incidente secondo rette a $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_2$ e che incontra α_1 in un punto C (il piano comune ai tre S_4 che dalla retta $A'B'$ proiettano $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_1$). Analogamente il piano comune ai tre S_4 che dalla AB proiettano $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_2$ inciderà secondo rette a $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_1$ e incontrerà α_2 in un punto C'. Entrambi tali piani apparterranno alla F, poichè contengono risp. i fasci (C), (C') di rette del sistema $(022)_1$.

Assai semplice è la configurazione degli *otto piani* della F.

Dal punto A — ad es. — escono, oltre al piano $\alpha_1 \equiv ABC$, due piani: il piano comune all'S_4 $A\Sigma_2$ ed all'S_3 $A\alpha_2$ ed il piano comune ai tre S_4: $AB\Sigma_1$, $AB\Sigma_2$ ($\equiv A\Sigma_2$), $AB\alpha_2$: li indicheremo pel momento con σ e τ. Essi hanno a comune una retta (giacendo entrambi nei due S_4 $A\Sigma_2$; $AB\alpha_2$): pertanto il piano α_2 ed il piano τ sono tagliati secondo rette da σ: dovranno incontrarsi nel punto comune alle due rette. In altre parole: Il punto C' comune a τ e ad α_2 starà sopra la retta $\sigma\alpha_2$ (uscente (v.[i] sopra) da B'). Od ancora: Il piano σ uscente da A seca α_2 secondo la retta $B'C'$. Ecc. Quindi: *Riferendo fra loro i due triangoli* ABC, A'B'C' *in guisa che sieno coppie di vertici omologhi* AA', BB', CC', *apparterranno alla* F — *oltre ai piani* ABC, A'B'C' — *i sei piani congiungenti i vertici di ciascuno dei due triangoli ai lati opposti agli omologhi vertici nell'altro.*

17. — Da ciascuno dei 6 punti A, B, C, A', B', C' escono tre piani della F, non in uno stesso S_3. Pertanto: *I sei punti* A, B, C, A', B', C' *sono doppî per la varietà* F. Ciascuno degli otto piani contiene tre punti doppi della F; il piano contenente gli ulteriori tre punti — che chiameremo *opposto* al primo — non ha col primo alcun punto a comune. Ritenendo nei due triangoli così determinati omologhe sempre le coppie di vertici AA', BB', CC', potrà ottenersi ancora da essi la configurazione degli otto piani della F, collo stesso procedimento sopra enunciato (n° 16).

18. — Le ∞^2 rette del sistema $(022)_1$ determinano fra i due piani α_1, α_2 una corrispondenza biunivoca, omologhi essendo i punti P_1, P_2 intersezioni dei piani α_1, α_2 con ogni retta del sistema. Descrivendo il punto P_1 una retta r in α_1, l'omologo P_2 descriverà in α_2 una conica, poichè le ∞^3 rette incidenti ad una retta r e a due $S_3 \Sigma_1$, Σ_2, costituiscono un cono quadrico di 2^a specie. La trasformazione definita dal sistema $(022)_1$ tra i due piani α_1, α_2 è pertanto *quadratica* (*).

Poichè da ciascuno dei sei punti A, B, C, A', B', C' esce un fascio di rette del sistema $(022)_1$, i due triangoli ABC, $A'B'C'$ saranno i triangoli fondamentali della trasformazione. (E precisamente: ad A sarà omologa la $B'C'$, ecc. (n° 16)).

19. — Viceversa: Suppongasi stabilita fra due piani α_1, α_2 — non in uno stesso S_4 — una corrispondenza quadratica generale: Ne siano ABC, $A'B'C'$ i triangoli fondamentali. È noto che si possono riferire proiettivamente fra loro ad es. i due fasci (A), (A'), ed i fasci (B), (B') in guisa che ad ogni punto P_1 di α_1 corrisponda, nella data corrispondenza quadratica, quel punto di α_2 che è comune ai due raggi omologhi ad AP_1 e BP_1 nelle date proiettività. Pongasi per brevità: $a_1 \equiv AP_1$, $a_2 \equiv A'P_2$ $b_1 \equiv BP_1$, $b_2 \equiv B'P_2$. L'$S_3 a_1 a_2$ descrive — variando la coppia di raggi omologhi a_1, a_2 — un sistema di S_3 generatori di un cono quadrico di 2^a specie, di cui è sostegno la AA'. Analogamente dicasi per l'$S_3 b_1 b_2$.

Le rette incidenti ad ogni coppia di raggi a_1, a_2 giacendo negli S_3 generatori del 1° sistema si appoggieranno agli S_3 del 2° sistema. Ed analogamente pel cono (BB'). Le congiungenti coppie di punti omologhi: $P_1 \equiv a_1 b_1$, $P_2 \equiv a_2 b_2$ si appoggieranno pertanto agli S_3 generatori del 2° sistema tanto nell'uno che nell'altro cono. Riassumendo: *Le congiungenti coppie di punti omologhi in una data corrispondenza quadratica (generale) fra due piani che non si incontrino, si possono — ed in ∞ modi — riguardare come le rette che si appoggiano a quei due piani e a due* S_3.

20. — La nostra varietà F apparterrà a tre coni quadrici di 2^a specie, di cui sono sostegni le tre rette AA', BB', CC'. I tre coni appartengono ad uno stesso fascio di forme quadratiche (di cui è base la M_3^4 F). E si avrà: *In un* S_5 *le ∞^2 rette incidenti a due piani e a due* S_3 *incidono di conseguenza ad* ∞^1 S_3*: costituenti tre sistemi di* S_3 *generatori di coni quadrici di seconda specie.*

21. — Altri sistemi ∞^2 di rette contenuti nella F dedurremo, considerando questa come intersezione di due fra i coni (AA'), (BB'), (CC').

(*) Ciò discende altresì dall'osservazione seguente: È noto che una forma quadratica nell'S_5 può ritenersi generata dal " sistema delle ∞^3 rette che congiungono coppie di punti reciproci in una reciprocità fra due piani " (e dualmente). La F è comune a due (e quindi ad un fascio) di M_4^2 aventi a comune due piani: le ∞^2 generatrici della F determineranno quindi tra α_1, α_2 una corrispondenza nella quale " coppie di punti omologhi sono reciproci in due (e quindi in un fascio) di reciprocità fra i piani α_1, α_2 ": pertanto una corrispondenza quadratica.

Nel cono (AA') apparterranno ad uno stesso sistema di S_3 generatori gli S_3 $AA'BC$, $AA'B'C'$; all'altro sistema gli S_3 $AA'BC'$, $AA'B'C$.

Indicheremo risp. con (S_a) e (T_a) i due sistemi. Analogamente nel cono (BB') indicheremo con (S_b) il sistema di S_3 cui appartengono $BB'AC$, $BB'A'C'$ e con (T_b) il sistema cui appartengono $BB'AC'$, $BB'A'C$. Nel cono (CC') infine chiameremo (S_c) il sistema cui appartengono $CC'AB$, $CC'A'B'$; (T_c) quello cui appartengono $CC'AB'$, $CC'A'B$.

Ciò posto, si osservi che: se un S_3 del cono (AA') — ad es. — ed un S_3 del cono (BB') si tagliano secondo un piano, un S_3 del 1° e un S_3 del 2° cono, i quali appartengano a sistemi opposti a quelli dei due S_3 in questione, si taglieranno in generale secondo una retta *incidente* al piano intersezione di quei due S_3. Se ne dedurrà, considerando i due coni (AA'), (BB'): Le ∞^2 rette comuni agli S_3 dei sistemi (S_a), (S_b) incidono ai due piani ABC', $A'B'C$ della F, fra loro opposti (n° 17), nonchè agli $\infty^1 S_3$ dei sistemi (T_a), (T_b); le rette comuni agli S_3 dei sistemi (S_a), (T_b) incidono ai piani $AB'C$, $A'BC'$ ed agli S_3 dei sistemi (T_a), (S_b); le rette comuni agli S_3 dei sistemi (T_a), (S_b): ai piani $A'BC$, $AB'C'$ ed agli S_3 dei sistemi (S_a), (T_b); infine le rette comuni agli S_3 dei sistemi (T_a),(T_b): ai piani $ABC \equiv \alpha_1$, $A'B'C' \equiv \alpha_2$ ed agli S_3 dei sistemi (S_a), (S_b), tra cui Σ_1, Σ_2. Quest'ultimo sistema coincide col sistema (R) da cui si è partiti: i tre precedenti, che indicheremo ordinatamente con (R'), (R''), (R'''), saranno della stessa natura di quello. Partendo dai due coni (AA'), (CC'): ovvero dai coni (BB'), (CC'), non si ottengono altri sistemi di rette della F. Invero: le rette comuni agli S_3 dei sistemi (S_a), (S_c) — ad es. — dovranno incidere ai piani $A'BC'$, $AB'C$: coincideranno pertanto (*) colle ∞^2 rette comuni agli S_3 dei sistemi (S_a), (T_b).

Riassumendo: *Appartengono alla* F, *oltre al sistema* (R) *mediante il quale fu definita, tre sistemi* ∞^2 *di rette:* (R'), (R''), (R'''), *della stessa natura di* (R): *Determinano essi fra le tre coppie* ABC', A'B'C; AB'C, A'BC'; A'BC, AB'C' *di piani opposti della* F *corrispondenze quadratiche* (n° 18) *del tipo più generale, nelle quali i punti fondamentali son sempre forniti dai sei punti doppî della* F (A, B, C, A', B', C'). Ogni retta dei quattro sistemi predetti è comune a tre determinati S_3 generatori dei coni (AA'), (BB'), (CC'). E precisamente: Le generatrici di (R) — incidenti ai piani ABC, $A'B'C'$ ed agli $\infty^1 S_3$ dei sistemi (S_a), (S_b), (S_c) — sono comuni a terne di S_3 dei sistemi (T_a), (T_b), (T_c); le generatrici di (R') — incidenti ai piani ABC', $A'B'C$ ed agli S_3 dei sistemi (T_a), (T_b), (S_c) — sono comuni a terne di S_3 dei sistemi (S_a), (S_b), (T_c); ecc.

Da ogni punto P della F escono 4 rette, appartenenti ai 4 sistemi (R), ...; *esse giacciono in uno stesso* S_3 (tangente alla F nel punto P).

22. — Ogni $S_3 : \Pi$, appartenente ad uno dei tre coni (AA'), (BB'), (CC') seca la F secondo una quadrica, i cui due sistemi di rette sono offerti dalle intersezioni di Π cogli S_3 generatori dei due coni rimanenti.

E si ha facilmente: *Le generatrici di ciascuno dei quattro sistemi* (R), (R'), (R''), (R''')

(*) Non possono da un punto (della F) uscire due rette distinte incidenti a due piani opposti della F: chè altrimenti il loro piano inciderebbe a questi, e questi avrebbero pertanto un punto a comune.

possono distribuirsi in tre modi diversi secondo ∞^1 *schiere rigate: Le schiere a queste incidenti costituiscono gli ulteriori tre sistemi.* (Ad es.; le generatrici di (R) si distribuiscono secondo le ∞^1 schiere giacenti negli S_3 di (T_a), (T_b), (T_c); e le schiere incidenti costituiranno ordinatamente i sistemi (R'''), (R''), (R'), ecc.).

23. — Si immaginino ora proiettati i 4 sistemi (R), (R'), (R''), (R''') della F da una retta r dell'S_5, non incidente alla F, sopra un S_3 Ω, assunto in posizione generica rispetto ad F ed r. Alcune proposizioni dimostrate relativamente ai sistemi (R),... possono tradursi senz'altro per le congruenze loro proiezioni. Si avrà ad es. (*): *Assegnata una corrispondenza quadratica, del tipo più generale, fra due piani* α_0, α'_0 *di un* S_3 (Ω), *di cui sieno* $A_0B_0C_0$; $A'_0B'_0C'_0$ *i triangoli fondamentali, le* ∞^2 *rette congiungenti coppie di punti omologhi nella corrispondenza si possono in tre modi distribuire secondo sistemi* ∞^1 *di schiere rigate. Le schiere ad esse incidenti costituiscono tre sistemi* ∞^2 *di rette, le quali punteggiano le coppie di piani* $A_0B_0C_0'$, $A_0'B_0'C_0$; $A_0B_0'C_0$, $A_0'B_0C_0'$; $A_0'B_0C_0$, $A_0B_0'C'_0$ *secondo coppie di punti omologhi in determinate corrispondenze quadratiche* (*nelle quali sono punti fondamentali* A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'). Ripetendo per ciascuna delle tre nuove congruenze ottenute quanto si disse per la 1ª (R_0), si giunge ad un insieme di sei sistemi ∞^1 di schiere rigate, tutti della stessa natura.

Assegnato in Ω un punto P_0 ad arbitrio, il piano proiettante rP_0 ha colla F 4 punti a comune (n° 15), da ognuno dei quali escono 4 generatrici della F, appartenenti ai 4 diversi sistemi (R), ... (R'''): Le congruenze (R_0), ... (R_0''') sono pertanto *del quarto ordine.* Assegnato ad arbitrio un piano π_0 in Ω, l'S_4 proiettante: $r\pi_0$ contiene due rette di ciascuno dei sistemi (R), ..., (R''') (**): Le congruenze (R_0),...,(R'''_0) saranno *della seconda classe.*

24. — $(031)_1$. Le ∞^1 rette incidenti a tre piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e ad un $S_3\Sigma$ costituiscono una rigata F del 4° ordine (n° 15). Le generatrici della rigata si appoggiano ad ∞^1 piani — poichè appartengono al sistema ∞^2 delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (n° 6*a*)) —. E le ∞^1 direttrici piane della rigata così ottenute sono *coniche,* poichè un $S_4 : \omega$ uscente dal piano di una direttrice (ad es. α_1) contiene *due* generatrici della rigata (incidenti in ω alle due rette $a_2 \equiv \alpha_2\omega$, $a_3 \equiv \alpha_3\omega$ e ai due piani α_1, $\sigma \equiv \omega\Sigma$). La F appartiene ad un notevole tipo di rigate, esaminato nella nota del Prof. Segre (citata al n° 14) sulle *Rigate razionali, ecc.* (***).

Per quanto precede, e poichè la F ammette (****) ∞^3 cubiche (sghembe) direttrici: *In un* S_5 *le* ∞^1 *rette incidenti a tre piani e ad un* S_3 *incidono di conseguenza* (*secondo coniche*) *ad* ∞^1 *piani e* (*secondo cubiche sghembe*) *ad* ∞^3 S_3.

Due coniche direttrici sono punteggiate (n° 6*a*)) *proiettivamente dalle generatrici della rigata. Viceversa* (*****): riferite proiettivamente due coniche, situate in piani che non

(*) Cfr. Hirst: *On Cremonian congruences*, " Proceedings of the London Math. Society ", vol. 14 (1880).

(**) Un generico iperpiano: ω contiene due rette del sistema (R), ad es.: le due rette incidenti in ω alle due rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$ ed ai due piani $\sigma_1 \equiv \Sigma_1\omega$, $\sigma_2 \equiv \Sigma_2\omega$.

(***) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XIX (1884): vⁱ il n° 5 (in fine).

(****) Id., cfr. la nota (*) al medesimo n° 5.

(*****) Id., n° 6.

s'incontrino, le ∞^1 congiungenti coppie di punti omologhi costituiscono una rigata del tipo della F.

Le ∞^1 *coniche direttrici punteggiano proiettivamente due qualsiansi generatrici della rigata* (n° 6).

Due cubiche direttrici hanno (*) a comune due punti; una conica ed una cubica direttrici un sol punto. *Le generatrici della* F *punteggiano proiettivamente due cubiche ovvero una conica ed una cubica direttrici* (**).

Le generatrici della F *si possono — in* ∞ *modi — ritenere come le rette comuni a quaterne di iperpiani omologhi in quattro fasci, riferiti fra di loro proiettivamente* (***). Riferiti *viceversa* proiettivamente quattro fasci di S_4 le ∞^1 rette comuni a quaterne di S_4 omologhi costituiscono una rigata del tipo della F, *purchè non sieno i quattro fasci prospettivi ad una stessa punteggiata*, nel qual caso verrebbe generata una rigata $(104)_1$, del tipo cioè esaminato al n° 14.

25. — (VIII) $(024)_1 \equiv (420)_3 = 6$: Ordine della forma $(320)_3$, della M_3 $(014)_1$ e della rigata $(023)_1$.

$(023)_1$: Ci limiteremo per brevità allo studio della rigata F " delle rette che si appoggiano a due piani: α_1, α_2 od a tre S_3: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ". La rigata può considerarsi come parziale intersezione dei tre coni quadrici di seconda specie contenenti i tre sistemi ∞^3 delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_1$; $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_2$; $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_3$. Dalla M_2^8 completa intersezione delle tre M_4^2 si staccano i due piani α_1, α_2: la F sarà quindi del 6° ordine, al più. D'altra parte: la M_3 (del 4° ordine: n° 15) delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ (ad es.) seca Σ_3 secondo una curva del 4° ordine ed un $S_4 : \omega$ uscente da Σ_3 contiene due generatrici della F (incidenti alle due rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$ od ai due piani $\sigma_1 \equiv \Sigma_1\omega$, $\sigma_2 \equiv \Sigma_2\omega$): la F è quindi precisamente del *sesto ordine*. Le sue generatrici si appoggiano ad α_1, α_2 secondo *cubiche* (poichè un $S_4 : \omega$ uscente da α_1 — ad es. — contiene ulteriormente le tre sole rette, della F, incidenti alla retta $a_2 \equiv \alpha_2\omega$ ed ai 4 piani α_1, $\sigma_1 \equiv \Sigma_1\omega$, $\sigma_2 \equiv \Sigma_2\omega$, $\sigma_3 \equiv \Sigma_3\omega$ (****)). Indicheremo nel seguito risp. con C_1 e C_2 le due cubiche.

26. — La F costituisce coi due piani α_1, α_2 fra loro sghembi (senza punti a comune) la M_2^8 base di una rete: (R) di forme quadratiche (M_4^2). Gli ∞^1 coni appartenenti alla rete sono *della 2ª specie*: Sia V infatti il vertice di un cono della rete: poichè V non può giacere contemporaneamente nei piani α_1, α_2, al cono apparterrà uno dei due S_3 $V\alpha_1$, $V\alpha_2$: sarà quindi della 2ª specie.

Per ognuno dei coni di 2ª specie della rete gli S_3 generatori di uno dei due sistemi (all'infuori dei due S_3 che proiettano α_1, α_2 dal sostegno del cono) non incidono ad α_1, α_2: a tali S_3 incidono le generatrici della F. Se ne deduce: *In un* S_5 *le* ∞^1 *rette incidenti a due piani ed a tre* S_3 *incidono di conseguenza ad* ∞^2 S_3, *distribuiti secondo sistemi generatori di* ∞^1 *coni quadrici di 2ª specie contenenti la rigata di quelle*

(*) Vi ancora l'oss^e^ (*) al n° 5 della nota dianzi citata.

(**) Id., n° 6.

(***) Veronese: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse, ecc.*, " Math. Annalen ", Bd. XIX.

(****) C. Segre: *Considerazioni elementari sull'incidenza, ecc.*, n° 5.

rette. A ciascuno degli S_3 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ può esser sostituito — evidentemente — un qualsiasi S_3 della ∞^2 (in particolare ad es. la F potrà venir considerata come " luogo delle ∞^1 rette incidenti ad α_1, α_2 ed a tre S_3 assunti in tre coni distinti della rete (R), fra gli S_3 generatori che non incidono ad α_1, α_2 "). Pertanto: *Le generatrici della* F *si appoggiano* (come già a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$) *agli* ∞^2 S_3 *direttori, secondo quartiche sghembe di 1ª specie.* La rigata F e le due cubiche C_1, C_2 risulteranno *ellittiche.*

Il cono (qualsiasi della rete (R)) " delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_1$, ad es. " ha quale sostegno la congiungente i punti $A_1 \equiv \Sigma_1\alpha_1$, $A_2 \equiv \Sigma_1\alpha_2$. Poichè da ciascuno di questi esce una generatrice della F, distinta da tale congiungente (p. es. dal punto $A_1 \equiv \Sigma_1\alpha_1$ la retta comune ai due S_4 $A_1\Sigma_2$, $A_1\Sigma_3$ ed all'S_3 $A_1\alpha_2$), apparterranno essi risp. a C_1 ed a C_2. Pertanto: Le ∞^1 rette-sostegni dei coni contenuti nella rete (R) si appoggiano alle due cubiche C_1, C_2.

27. — Le generatrici della F determinano fra le due cubiche C_1, C_2 una corrispondenza univoca. Supposto viceversa che fra due cubiche C_1, C_2 (ellittiche) giacenti in piani α_1, α_2 fra loro sghembi, si possa stabilire una corrispondenza univoca, le ∞^1 congiungenti coppie di punti omologhi costituiranno " in generale " una rigata del tipo della F. Invero " la rigata sarà anzitutto del 6° ordine " (*). Sieno m, n due sue generatrici; M_1, N_1; M_2, N_2 le loro intersezioni risp. con α_1 ed α_2. Un S_4 condotto per l'S_3 mn, e che non passi nè per α_1, nè per α_2, secherà ulteriormente la rigata secondo una curva del 4° ordine, che potrà spezzarsi secondo una curva direttrice del 3° ordine (ellittica, e quindi piana) ed una generatrice, allorchè (e solo allora) le ulteriori intersezioni delle rette M_1N_1, M_2N_2 colle cubiche C_1, C_2 risp. sieno congiunte da una generatrice della rigata (omologhe cioè nella corrispondenza fra C_1 e C_2). In tal caso le generatrici della rigata si appoggieranno a tre piani (e quindi ad ∞^1, secondo cubiche) punteggiando collinearmente (n° 6 *a)*) C_1 e C_2 (**). La rigata potrà considerarsi allora come " luogo delle ∞^1 rette che si appoggiano ad una cubica piana ellittica e a due piani α_1, α_2, in posizione generica rispetto al piano della cubica ". Facendo astrazione da tale caso si riconosce facilmente l'esistenza sulla rigata di ∞^2 quartiche sghembe di 1ª specie, e quindi di ∞^2 S_3 direttori della rigata, la quale si presenta quindi del tipo della F (***).

28. — Consideriamo un S_3 direttore della rigata: ad es. Σ_1 (e ricordiamo che la congiungente i punti $A_1 \equiv \Sigma_1\alpha_1$, $A_2 \equiv \Sigma_1\alpha_2$, appartenenti risp. alle cubiche C_1, C_2, è il sostegno di un cono quadrico della rete (R) (n° 26)). Un $S_4 : \omega$ condotto per Σ_1

(*) Poichè un $S_4 : \omega$ uscente da α_1 seca ulteriormente la rigata (fuori di C_1) secondo le tre generatrici uscenti dai tre punti comuni alla C_2 ed alla retta $\omega\alpha_2$.

(**) Può dedursi di qua la nota proposizione (Cfr. C. Segre: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXIV (1889): n° 3): " Una corrispondenza univoca fra due cubiche, tale che ad una terna di punti in linea retta dell'una corrisponda nell'altra una simile terna di punti, è collineare ".

(***) Le due rigate contemplate in questo n° costituiscono i due possibili tipi di rigate ellittiche del 6° ordine dell'S_5, con curva minima del 3° ordine: C. Segre, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine,* " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXI (1886): n° 15.

I risultati contenuti al n° 15 di tale nota ci avrebbero permesso di abbreviare i ragionamenti precedenti: abbiam creduto bene di esporli ugualmente, per uniformità di metodo.

contiene (n° 25) due generatrici della F, le quali " si appoggiano alle due rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$, uscenti risp. da A_1 e da A_2 ".

I punti d'appoggio delle due generatrici con C_1 e C_2 si presenteranno quindi allineati con A_1, A_2 risp. Variando l'$S_4\omega$ nel fascio (Σ_1) si riconoscerà che " alle ∞^1 coppie di punti di C_1 allineate con A_1 sono omologhe in C_2, nella corrispondenza univoca determinata dalle generatrici della F, le ∞^1 coppie di punti allineate con A_2. Ciò può ripetersi partendo da altri S_3 direttori della rigata, appartenenti a coni diversi della rete (R). Si giunge pertanto all'esistenza degli ∞^1 *centri di proiezione* nella corrispondenza univoca (n° 27) fra C_1 e C_2 (*). *Le ∞^1 congiungenti coppie di centri omologhi di proiezione costituiscono i sostegni degli ∞^1 coni quadrici di 2ª specie contenenti la rigata* F.

Due arbitrari coni della rete (R) hanno a comune (v. n° 25) una M_3^4 del tipo esaminato ai nⁱ 15-22 (per la quale passa un terzo cono della rete). Le generatrici della F apparterranno ad ∞^2 M_3^4 di tal tipo. Se ne deduce: " La corrispondenza che esse determinano fra C_1, C_2 è contenuta (n° 18) in ∞^2 corrispondenze quadratiche fra i piani α_1, α_2 " (**) (***).

La rigata F si presenta anche semplicemente come segue: Abbiansi in un piano α_1 tre fasci di raggi $(A), (B), (C)$ ed in un secondo piano α_2, che non incontri α_1, tre fasci di raggi $(A'), (B'), (C')$: riferendo proiettivamente le tre coppie di fasci $(A),(A')$; $(B), (B')$; $(C), (C')$, in guisa che mai sieno omologhe congiungenti vertici di coppie omologhe di fasci, v'hanno ∞^1 terne di raggi concorrenti nei fasci $(A), (B), (C)$ cui sono omologhe terne di raggi concorrenti nei fasci $(A'), (B'), (C')$: Le ∞^1 congiungenti punti di concorso di terne omologhe costituiscono una rigata del tipo della F. E viceversa: la rigata F può sempre pensarsi generata in tal modo.

29. — Ci limiteremo — nel numero presente — alla determinazione degli ordini $(016)_1$, $(008)_1$.

(IX) $(016)_1 = (610)_3 = 9$: Ordine della forma $(510)_3$, della M_3 $(006)_1$ e della rigata $(015)_1$.

Le generatrici della rigata $(015)_1$ " delle ∞^1 rette incidenti ad un piano α ed a $5S_3 : \Sigma_1, ..., \Sigma_5$ " si appoggiano al piano α secondo una curva del 4° ordine senza punti doppi (n° 13) ed agli S_3 Σ_i secondo sestiche (n° 25). Un $S_4 : \omega$ condotto per Σ_1 — ad es. — contiene, fuori di Σ_1, tre sole generatrici della rigata (incidenti alla retta $a \equiv \omega\alpha$ ed ai 4 piani $\sigma_2 \equiv \omega\Sigma_2, ..., \sigma_5 \equiv \omega\Sigma_5$ (****)). La rigata è pertanto *del nono ordine.*

(X) $(008)_1 = (800)_3 = 14$: Ordine della forma $(700)_3$ e della rigata $(007)_1$.

Le generatrici della rigata $(007)_1$ " delle ∞^1 rette incidenti a $7S_3 : \Sigma_1, ... \Sigma_7$ " si

---

(*) C. Segre, *Le corrispondenze univoche, ecc.*, n° 1.

(**) Id., n° 3.

(***) Corrispondentemente al fatto (cfr. l'oss. (*) al n° 18) che la F è varietà base di una rete di M_4^2 aventi a comune due piani sghembi α_1, α_2 si ha che " le ∞^1 coppie di punti omologhi nella corrispondenza fra C_1 e C_2 sono costituite da punti reciproci in ∞^2 reciprocità fra i piani α_1, α_2, formanti una rete ". Da ciò si deduce subito che la corrispondenza fra C_1 e C_2 è contenuta in ∞^2 corrispondenze quadratiche, relative agli ∞^2 fasci di reciprocità della rete.

(****) C. Segre, *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza, ecc.*, n° 5.

appoggiano a questi secondo curve del 9° ordine (v. sopra). Un $S_4 : \omega$ condotto per Σ_1 — ad es. — contiene, fuori di Σ_1, sole 5 generatrici della rigata (incidenti ai 6 piani $\sigma_2 \equiv \omega\Sigma_2, \dots \sigma_7 \equiv \omega\Sigma_7$ (*)). La rigata è quindi del 14° ordine.

§ 3.

30. — Nel simbolo $(p;\, q,\, \bar{s};\, r)_2$ la s può assumere i soli valori 0 ed 1 (poichè non v'hanno piani incidenti secondo rette a due piani, assegnati in modo generico nell'S_5). Per brevità sostituiremo alla scrittura $(p;\, q,\, \bar{o};\, r)_2$ la seguente: $(pqr)_2$. Il simbolo $(p;\, q,\, \bar{s};\, r)_2$ darà luogo, nell'ipotesi: $2p + q + 4s + 2r = 9$, ai seguenti (oltre ai loro corrispondenti per dualità nell'S_5):

$$(212)_2,\ (311)_2,\ (410)_2,\ (231)_2,\ (330)_2,\ (151)_2,\ (250)_2,\ (170)_2,\ (090)_2,$$
$$(2;\, 1,\, \bar{1};\, 0)_2,\ (1;\, 1,\, \bar{1};\, 1)_2,\ (1;\, 3,\, \bar{1};\, 0)_2,\ (0;\, 5,\, \bar{1};\, 0)_2,$$

che prenderemo in esame nell'ordine scritto.

31. — (XI) $(212)_2 = 2$. Ordine della forma $(112)_2$ e della M_3 $(202)_2$.

(XII) $(311)_2 = (113)_2 = 3$. Ordine delle forme $(211)_2$, $(013)_2$ e delle M_3 $(301)_2$, $(103)_2$.

(XIII) $(410)_2 = (014)_2 = 3$. Ordine della forma $(310)_2$ e delle M_3 $(400)_2$, $(004)_2$.

I due sistemi $(013)_2$, $(310)_2$ hanno definizioni fra loro duali ed equivalenti: essi generano (v. n° 12) una forma cubica con 9 rette doppie. Analogamente i 4 sistemi $(301)_2$, $(103)_2$, $(400)_2$, $(004)_2$ hanno a coppie definizioni fra loro duali e tutte equivalenti: generano una M_3^3 normale per l'S_5 (n^i 5-11). — Finalmente gli ∞^2 piani: $(211)_2$ incidenti a due rette r_1, r_2, ad un $S_3 : \Sigma$ ed appoggiati ad un piano: α costituiscono un cono cubico di vertice il punto $\alpha\Sigma$: Pongasi invero $\Pi_{12} \equiv r_1 r_2$, $r \equiv \Pi_{12}\Sigma$. I piani del sistema incidono alle tre rette r, r_1, r_2. Costituiranno ∞^1 fasci, uscenti dalle generatrici della schiera incidente (in Π_{12}) ad r, r_1, r_2 e giacenti negli S_3 comuni alle coppie di S_4 che dalle generatrici proiettano α e Σ. Tali S_3 contengono tutti il punto $\alpha\Sigma$. Quindi, ecc. L'$S_3\Sigma$ è *doppio* per il cono cubico.

32. — (XIV) $(231)_2 = (132)_2 = 5$: Ordine delle forme $(131)_2$, $(032)_2$ e delle M_3 $(221)_2$, $(122)_2$.

$(221)_2$: Gli ∞^1 piani incidenti a due rette: r_1, r_2, ad un $S_3 : \Sigma$ ed appoggiati a due piani: α_1, α_2, secano l'S_3 $\Pi_{12} \equiv r_1 r_2$ secondo le generatrici della schiera incidente alle tre rette: r_1, r_2, $r \equiv \Pi_{12}\Sigma$: *si appoggiano quindi ad* ∞^1 *rette* (: *le direttrici della schiera*). Un $S_4 : \omega$ condotto per Π_{12} seca ulteriormente la M_3 (che indicheremo con F) secondo i tre piani (**) incidenti in ω alle 4 rette r_1, r_2, $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$ ed al piano $\sigma \equiv \Sigma\omega$.

La F è quindi *del quinto ordine*. Essa può considerarsi come parziale intersezione dei due coni cubici $(211)_2$ (n° 31) degli ∞^2 piani incidenti ad r_1, r_2, Σ ed appoggiati risp. ad α_1 o ad α_2: coni aventi a comune l'$S_3\Sigma$, doppio per entrambi. Le $\infty^1 M_2^3$ del

(*) C. Segre, *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza, ecc.*, n° 7.

(**) In un S_4 gli ∞^1 piani incidenti ad un piano σ e a tre rette costituiscono una forma cubica con piano doppio (σ): C. Segre: *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni, ecc.*, n° 52.

fascio determinato dai due coni saranno dunque " coni cubici dotati di S_3 doppio „ (*). E poichè in ognuno di essi gli $\infty^1 S_3$ generatori incidono, secondo rette pel vertice, ad ∞^2 piani direttori (**) e i piani della F giacciono in quegli S_3: *I piani generatori della* F *si appoggiano ad* ∞^3 *piani.* Poichè un $S_4:\omega$ condotto per Σ contiene, fuori di Σ, un solo piano della F (comune ai due S_3 che dalla congiungente i punti $R_1 \equiv r_1\omega$, $R_2 \equiv r_2\omega$ proiettano le rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$): gli ∞^1 piani della F secheranno Σ secondo le generatrici di una rigata del 4° ordine. La retta $r \equiv \Pi_{12}\Sigma$ è direttrice semplice della rigata. Il luogo dei vertici degli ∞^1 coni cubici contenenti la F è una cubica sghemba C appartenente all'$S_3\Sigma$, come facilmente si deduce per via analitica (***). Dai suoi punti (p. es. dal punto $\alpha_1\Sigma$ o dal punto $\alpha_2\Sigma$) escono coppie di piani della F, e quindi coppie di generatrici della rigata. La cubica C è pertanto direttrice doppia della rigata e *linea doppia* altresì per la F.

$(131)_2$: Ci limitiamo qui ad osservare, poichè ci sarà utile in seguito, che per la forma $(131)_2$ " degli ∞^2 piani che si appoggiano a tre piani: α_1, α_2, α_3 ed incidono a una retta: r e ad un $S_3:\Sigma$ „ *è triplo l'*$S_3\Sigma$. Invero: un $S_4:\omega$, uscente da Σ, seca ulteriormente la forma secondo il (solo) cono quadrico di cui son piani direttori Ra_1, Ra_2, Ra_3 (ove si sia posto: $R \equiv r\omega$, $a_i \equiv \alpha_i\omega$). — Si potrebbe ora dedurre — variando ω nel fascio (Σ) — l'esistenza di un secondo sistema ∞^2 di piani nella forma (direttori dei coni quadrici di cui sopra), ecc. La r è *doppia* per la forma.

33. — (XV) $(330)_2 \equiv (033)_2 = 6$: Ordine della forma $(230)_2$ e delle M_3 $(320)_2$, $(023)_2$.

$(320)_2 \equiv (023)_2$: I due sistemi $(320)_2$, $(023)_2$ hanno definizioni fra loro duali e coincidenti. Sieno r_1, r_2, r_3; α_1, α_2 risp. le rette ed i piani direttori di un sistema $(320)_2$.

Un S_4 uscente da uno dei tre S_3 $\Pi_{12} \equiv r_1r_2$, $\Pi_{13} \equiv r_1r_3$, $\Pi_{23} \equiv r_2r_3$ contiene, come facilmente si verifica, due piani del sistema $(320)_2$. Dualmente: dai punti di ciascuna delle r_1, r_2, r_3 escono coppie di piani del sistema, non giacenti colle r_1, r_2, r_3 risp. in uno stesso S_3 (anzi in uno stesso S_4): Le rette r_1, r_2, r_3 sono pertanto *doppie* per la F (****). La F può ritenersi parziale intersezione delle due M_4^3 (v^i n° 12): " dei piani che si appoggiano ad r_1, r_2, r_3, α_1 „ e " dei piani che s'appoggiano ad r_1, r_2, r_3, α_2 „. Dalla M_3^9 loro completa intersezione si staccano i tre S_3 Π_{12}, Π_{13}, Π_{23}: la F è quindi del 6° ord. al più. Dalle cose precedenti poi, o dalla nota (****) si deduce ch'essa è (almeno, e

---

(*) Si prova analiticamente in modo immediato che una forma cubica — in un S_5 — dotata di S_3 doppio è un cono (veggasi del resto la nota (***)).

(**) Ciò si deduce applicando i risultati del n° 52 della Memoria sopra citata alla " forma cubica con piano doppio, intersezione di un variabile cono del fascio con un iperpiano, non passante pel vertice „.

(***) Un fascio di forme cubiche nell' S_5 aventi un medesimo S_3 doppio $x_5 = x_6 = 0$ può rappresentarsi coll'equazione:

$$(1) \qquad (A + \lambda A')x_5^2 + (B + \lambda B')x_5x_6 + (C + \lambda C')x_6^2 = 0,$$

ove λ è un parametro, e le $A, \ldots, A', \ldots$ sono forme lineari delle $x_1, x_2, \ldots, x_6$. La (1) rappresenta per ogni valore di λ un cono di vertice il punto $x_5 = x_6 = 0$, $A + \lambda A' = 0$, $B + \lambda B' = 0$, $C + \lambda C' = 0$. Col variare di λ, tale punto descrive la cubica di equazioni parametriche nell'$S_3 x_5 = x_6 = 0$: $A + \lambda A' = 0$, $B + \lambda B' = 0$, $C + \lambda C' = 0$.

(****) Le r_1,r_2; r_1,r_3; r_2,r_3 saranno direttrici doppie altresì per le tre rigate risp. secate su $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ dagli ∞^1 piani del sistema $(320)_2$: le tre rigate risulteranno del IV° ordine almeno, e — per quanto segue — precisamente del 4° ordine.

quindi) precisamente del *sesto ordine.* — La F può ritenersi, coi tre $S_3\,\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$, varietà base di un fascio di forme cubiche. E poichè tutte conterranno i tre $S_3\,\Pi_{12}$, Π_{13}, Π_{23} — e quindi le r_1, r_2, r_3 come rette doppie — potranno ritenersi (v^i nota (*) al n° 44) della stessa natura delle due forme determinanti il fascio. Se ne deduce facilmente — in virtù di alcune proprietà relative a queste forme (*) —: *Gli* ∞^1 *piani della* F *si appoggiano ad* ∞^3 *piani, costituenti due sistemi distinti* (e tali che da ogni punto dell'S_5 escono un piano del primo e uno del secondo sistema, come facilmente si verifica).

34. — Ci limiteremo — in questo e nei numeri seguenti (n^i 34-37) — alla determinazione degli ordini delle varietà, che ancora ci rimangono a considerare nel pres. §.

(XVI) $(151)_2 = 10$: Ordine della forma $(051)_2$ e della M_3 $(141)_2$.

$(141)_2$: Gli ∞^1 piani incidenti ad una retta r, ad un $S_3\,\Sigma$, ed appoggiati a 4 piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ secano sopra ciascuno dei piani $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ una curva del 5° ordine (n° 32). Conducasi per α_1 — ad es. — un $S_3:\Pi$. Se P è un punto della M_3, giacente in Π e non appartenente ad α_1, il piano della M_3 uscente da P secherà Π secondo una retta (incidente ad α_1). D'altra parte un piano incidente a Π si appoggia certamente ad α_1. Pertanto l'intersezione di Π colla M_3 — fuori di α_1 — sarà costituita da un numero finito di rette: tante quanti i piani incidenti ad una retta: r, a due $S_3:\Sigma, \Pi$ ed appoggiati a tre piani: $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$: quindi in numero di 5 (n° 32). La M_3 è quindi del *10° ordine.*

35. — (XVII) $(250)_2 = (052)_2 = 11$: Ordine della forma $(150)_2$ e delle M_3 $(240)_2$, $(042)_2$.

$(042)_2$: Gli ∞^1 piani incidenti a due $S_3:\Sigma_1, \Sigma_2$ e che si appoggiano a 4 piani: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ secano su ognuno di questi una curva del 5° ordine (n° 32). Un $S_3:\Pi$ condotto per α_1 — ad es. — seca la M_3, fuori di α_1, secondo le 6 rette traccie sopra Π dei piani che si appoggiano ad $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ed incidono agli $S_3\,\Sigma_1, \Sigma_2, \Pi$ (n° 33). — La M_3 è quindi dell'*11° ordine.*

36. — (XVIII) $(170)_2 = (071)_2 = 21$: Ordine della forma $(070)_2$ e delle M$_3$ $(160)_2$, $(061)_2$.

$(061)_2$: Gli ∞^1 piani incidenti ad un $S_3:\Sigma$ ed appoggiati a 6 piani: $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ secano ciascuno di questi secondo una curva del 10° ordine (n° 34). Un $S_3:\Pi$ condotto per α_1 — ad es. — seca la M_3 fuori di α_1 secondo le 11 rette (n° 35) traccie sopra Π dei piani incidenti a Π, Σ ed appoggiati ai 5 piani $\alpha_2, \ldots, \alpha_6$. La M_3 è quindi del *21° ordine.*

37. — (XIX) $(090)_2 = 42$: Ordine della M_3 $(080)_2$.

$(080)_2$: Gli ∞^1 piani appoggiati ad 8 piani $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$, secano sopra ognuno di essi una curva del 21° ordine (n° 36). Un $S_3:\Pi$ condotto per α_1 — ad es. — seca la M_3, fuori di α_1, secondo le 21 rette (n° 36) traccie su Π dei piani incidenti a Π ed appoggiati ai 7 piani $\alpha_2, \ldots, \alpha_8$. La M_3 è pertanto del *42° ordine.*

(*) V^i il n° 9 della mia nota cit.^a: *Sopra una forma cubica con nove rette doppie, ecc.*

§ 4.

38. — (XX) $(2; 1, \bar{1}; 0)_2 = (0; 1, 1; 2)_2 = 1$. Ordine della forma $(1; 1, \bar{1}; 0)_2$ e delle $M_3\,(2\bar{1}0)_2$, $(012)_2$.

(XXI) $(1; 1, 1; 1)_2 = 2$. Ordine della forma $(0; 1, \bar{1}; 1)_2$ e della $M_3\,(1\,1\,1)_2$.

(XXII) $(1; 3, \bar{1}; 0)_2 = (0; 3, \bar{1}; 1)_2 = 3$. Ordine della forma $(0; 3, \bar{1}; 0)_2$ e delle M_3 $(1; 2, \bar{1}; 0)_2$, $(0; 2, \bar{1}; 1)_2$.

$(1; 2, \bar{1}; 0)_2$. Gli ∞^1 piani incidenti ad una retta r, ad un piano β (secondo rette) ed appoggiati a due piani α_1, α_2 costituiscono nell'S_4 $r\beta \equiv \omega$ una forma cubica con piano doppio (poichè incidono — in ω — al piano β ed alle tre rette: $r, a_1 \equiv \omega\alpha_1$, $a_2 \equiv \omega\alpha_2$.) (v[i] la nota (**) al n° 32).

39. — $(0; 3, \bar{1}; 0)_2$: Il sistema ∞^2 dei piani incidenti secondo rette ad un piano β e che si appoggiano a tre piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ corrisponde a se stesso per dualità nell'S_5. Lo indicheremo nel seguito con (K). La forma F che lo contiene è del *terz'ordine* (n° 38) e — dualmente — della *terza classe* (*). Ogni S_3 condotto arbitrariamente per β seca $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ secondo tre punti congiunti da un piano del sistema. La rete (β) di S_3 seca sui tre piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tre sistemi collineari due a due di punti, e i piani del dato sistema compaiono come " congiungenti terne di punti omologhi " (**). Dualmente: Ogni retta di β è proiettata da $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ secondo tre S_4 intersecantisi in un piano del sistema.

Il piano rigato (β) vien proiettato da $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ secondo tre reti collineari di S_4 e i piani del sistema dato compaiono come " comuni a terne di S_4 omologhi ".

40. — Da ciascuna delle tre rette: r_1, r_2, r_3 (n° 5) incidenti ai quattro piani $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ esce un fascio di piani del sistema (K) (nell'S_3 che la congiunge a β): *appartengono quindi alla* F *i tre* S_3 $r_1\beta$, $r_2\beta$, $r_3\beta$. — I tre S_3: $\Pi_{12} \equiv r_1r_2$, $\Pi_{13} \equiv r_1r_3$, $\Pi_{23} \equiv r_2r_3$ secano secondo rette i quattro piani $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: in ognuno di essi sarà contenuto un fascio di piani del sistema (K), di cui sarà asse la retta comune all'S_3 ed a β. Pertanto: *appartengono alla* F *i tre* S_3: $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$. I tre S_3 $r_1\beta$, $r_2\beta$, $r_3\beta$ non giacciono in uno stesso S_4 (poichè non stanno in uno stesso S_4 r_1, r_2, r_3) e — per la stessa ragione — mai possono giacere in uno stesso S_4 due qualsiansi degli S_3 $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$. Se ne deduce: *Il piano* β *è doppio per la forma* F; *e sono altresì doppie per la* F *le tre rette* r_1, r_2, r_3 (incidenti a β, ma in posizione reciproca affatto generica).

41. — Un $S_4 : \omega$ condotto ad arbitrio per l'S_3 $\Pi_{12} \equiv r_1r_2$ — ad es. — secherà ulteriormente la F secondo una M_3^2 che nel punto ωr_3 presenterà un punto doppio: un cono quadrico cioè di 1ª specie, di cui è vertice il punto ωr_3. Col variare di ω nel fascio (Π_{12}) la M_3^2 ulteriore intersezione assumerà ∞^1 posizioni e la quadrica da

(*) Poichè si possono ritenere (come apparirà dal seguito) tangenti alla F gli ∞^4 iperpiani uscenti dai piani di (K).

(**) Notisi però che tre piani — in posizione generica nell'S_5 — riferiti collinearmente fra loro, non possono in generale ritenersi " sezioni di una stessa rete di S_3 ". E dualmente.

essa secata su Π_{12} descriverà evidentemente un fascio. È facile riconoscere che " la quartica base del fascio si spezza nelle due rette r_1, r_2 e nella $b_{12} \equiv \Pi_{12}\beta$ contata due volte „ (*). Le quadriche del fascio cioè hanno a comune oltre alle due generatrici r_1, r_2, la direttrice b_{12}, e in ogni punto di questa tutte ammettono lo stesso piano tangente. O — in altre parole — le generatrici delle ∞^1 quadriche costituiscono una congruenza lineare speciale di asse la retta b_{12} (e le direttrici: la congruenza di assi r_1, r_2).

42. — Poichè (n° 41) l'ulteriore intersezione colla F di un S_4 di uno dei fasci (Π_{12}), (Π_{13}), (Π_{23}) è costituita da una M_3^2 conica di 1ª specie, si avrà — considerando i due sistemi ∞^1 di piani che a questa appartengono — e col variare dell'S_4 nel fascio: *Appartengono alla* F — *oltre al sistema* (K) — *un sistema* ∞^2: (K_1) *di piani, incidenti ad* r_1, r_2, r_3, *e tre sistemi* ∞^2: (L_1), (L_2), (L_3) *di piani i quali si appoggiano risp. ad* r_1, r_2, r_3 *e secano ordin.*ᵉ *i tre* S_3 Π_{23}, Π_{13}, Π_{12} *secondo le generatrici di congruenze lineari speciali, di cui sono assi risp. le tre rette* $\mathrm{b}_{23} \equiv \Pi_{23}\beta$, $\mathrm{b}_{13} \equiv \Pi_{13}\beta$, $\mathrm{b}_{12} \equiv \Pi_{12}\beta$.

43. — Nell'S_3 Π_{12} — ad es. — si consideri un fascio di raggi della congruenza lineare speciale (b_{12}) secata dal sistema (L_3). I piani di (L_3) secanti i raggi del fascio giacciono nell'S_4 congiungente il piano del fascio alla r_3 (e vi costituiscono un cono quadrico di vertice il centro del fascio). Tale S_4 contiene il piano β (poichè il piano del fascio passa per b_{12} e la r_3 è incidente a β): è quindi un S_4 del fascio di cui è sostegno l'S_3 βr_3. — Pertanto: i sistemi (L_1), (L_2), (L_3) si possono pure ottenere considerando i tre fasci di S_4 di cui sono sostegni gli S_3 βr_1, βr_2, βr_3 e le M_3^2 ulteriori intersezioni colla F degli iperpiani dei fasci. Con ciascuno dei sistemi (L_1), (L_2), (L_3) si otterrà costantemente il sistema (K) (in luogo del sistema (K_1) come al n° preced.).

44. — Se κ, κ_1 sono due piani, generici, dei sistemi (K), (K_1) risp., dalla congiungente i punti κb_{12}, $\kappa_1 r_3$ (n° 42) escirà evidentemente un piano del sistema (L_3) che li taglierà entrambi secondo rette (nⁱ 42, 43): *i piani* κ, κ_1 *hanno quindi a comune un punto.* Con analogo ragionamento si dimostra che due piani, appartenenti risp. a due diversi sistemi (L_i) $(i = 1, 2, 3)$ *hanno a comune un punto.* — I piani del sistema (K) secano $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ secondo terne di punti allineati (su rette del piano β): e d'altra parte è questa — evidentemente — l'unica particolarità di posizione d'un generico piano di (K) rispetto ai tre S_3 Π_{12}, Π_{13}, Π_{23}. Quindi: *Gli* ∞^2 *piani del sistema* (K_1) *possono riguardarsi come i piani incidenti a tre rette* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3$ — *non in un* S_4 — *ed appoggiati ad un piano* (κ) *il quale sechi secondo punti allineati i tre* S_3 *che le congiungono due a due.* In questo senso la F può considerarsi come caso particolare

(*) Il cono secato da ogni $S_4 : \omega$, uscente da Π_{12}, sulla F contiene sempre due piani della F uscenti risp. da r_1 e da r_2 (intersezioni di ω cogli S_3 $r_1 r_3$, $r_2 r_3$) ed un piano uscente dalla $b_{12} \equiv \Pi_{12}\beta$ (comune ad ω ed all'S_3 βr_3). Quindi r_1, r_2, b_{12} sono rette basi del fascio di quadriche — in Π_{12} — di cui sopra. D'altra parte l'$S_4 \Pi_{12}\beta$ seca ulteriormente la F secondo i $2 S_3 \beta r_1$, βr_2, che alla loro volta secano su Π_{12} i 2 piani $b_{12} r_1$; $b_{12} r_2$. Una ulteriore retta base del fascio dovrebbe appartenere a questa " coppia di piani „ e d'altra parte incidere ad r_1, r_2: non può quindi esser distinta dalla b_{12}.

della M_4^3 con 9 rette doppie, definibile appunto (*) mediante un generico sistema $(310)_2$ (senza restrizioni cioè, relative alla posizione del piano κ rispetto alle direttrici r_1, r_2, r_3). Alla F potranno quindi applicarsi — con ovvie modificazioni — varie proprietà relative a quella forma (**).

45. — (XXIII) $(0; 5, \bar{1}; 0)_2 = 6$: Ordine della M_3 $(0; 4, \bar{1}; 0)_2$.

$(0; 4, \bar{1}; 0)_2$: Gli ∞^1 piani incidenti secondo rette ad un piano β ed appoggiati a 4 piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ secano sopra ciascuno dei piani $\alpha_1, \ldots \alpha_4$ una curva del 3° ordine (n° 39). Un $S_2 : \Pi$ uscente dal piano α_1 — ad es. — seca la M_3, fuori di α_1, secondo le tre rette traccie sopra Π dei piani incidenti secondo rette al piano β, all'$S_3\Pi$, ed appoggiati ai tre piani $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (n° 38). La M_3 è pertanto del *6° ordine*. E il piano β è per essa *triplo*, come facilmente si verifica.

CAPITOLO II.

§ 5.

46. — Abbiansi due spazî di egual dimensione: Π_m, Π'_m, aventi a comune un S_l $(l \geq -1)$ congiunti cioè da un $S_{2m-l} : S$. Si immagini un $S_n : \Sigma$ uscente da S, o coincidente con S $(n \geq 2m - l)$. Un sistema $\infty^m : (K)$ di S_{n-m} dello spazio Σ tale che da ogni punto P di Σ esca un solo spazio del sistema, e che non abbia particolari relazioni con Π_m, Π'_m determinerà fra questi spazî, nel senso di cui si disse nell'„ introduzione „ una corrispondenza biunivoca (che potrà ritenersi determinata altresì, tra Π e Π', dal sistema ∞^m degli S_{m-l} comuni a S ed agli S_{n-m} del sistema (K)). — Come sistemi (K) potranno assumersi nell'S_n particolari sistemi di S_{n-m} incidenti a dati spazî, e pei quali valga la proprietà enunciata. Determinando categorie di tali sistemi — per n qualunque $(\geq 2m - l)$ — potranno ottenersi fra Π_m, Π'_m corrispondenze biunivoche, il cui ordine sarà, in generale, funzione della dimensione n.

Ci limiteremo a pochi esempi, che ci forniranno corrispondenze biunivoche tra due piani o due S_3. Supporremo sempre assegnati i due piani od S_3, e gli spazî direttori del sistema da considerarsi, in posizione reciproca affatto generica nell'S_n.

47. — Assumansi due piani π, π' e in un S_n che contenga lo spazio $\pi\pi'$ si consideri il *sistema* ∞^2: (K) *degli* S_{n-2} *i quali sono incidenti ad un* $S_{n-2} : \Sigma$ *e si appog-*

(*) Vedi la mia nota cit^a al n° 12. — Erasi provato in essa (n° 17) che allorchè una forma cubica contiene tre rette doppie r_1, r_2, r_3, non in un S_4, contiene di conseguenza altre 6 rette doppie, ecc. E ciò basandosi sul fatto che quando in un fascio di quadriche la quartica base contiene come parte due rette sghembe deve ulteriormente spezzarsi secondo due rette r, s appoggiate alle prime. Ma queste rette r, s possono coincidere: cioè le quadriche del fascio raccordarsi lungo una direttrice comune: in corrispondenza a tale ipotesi le 9 rette doppie si riducono a 6 distinte: distribuite secondo i lati di un triangolo e secondo tre rette uscenti dai vertici di questo (in posizione reciproca generica), ecc. E la forma cubica assume il tipo ora considerato.

(**) Assumendo i punti fondamentali delle coordinate in guisa che il piano β venga rappresentato dalle: $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ e le tre rette r_1, r_2, r_3 risp. dalle: $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$, $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ la F verrà rappresentata da un'equazione del tipo: $a.x_1x_2x_6 + b.x_2x_3x_4 + c.x_3x_4x_5 + d.x_1x_5x_6 = 0$ (essendo a, b, c, d coefficienti arbitrarî).

giano ad n — 2 *rette*: $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$. Da ogni punto P dell'S_n escirà un solo S_{r-2} del sistema: congiungente P agli $n-2$ punti comuni all'iperpiano $P\Sigma$ ed alle rette $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$. Se il punto P descrive in π una retta r, l'S_{n-2} del sistema (K) uscente da P descriverà il sistema ∞^1 degli S_{n-2} incidenti ad un $S_{n-2}:\Sigma$ e ad $n-1$ rette: $r, r_1, r_2, \dots r_{n-2}$: sistema costituente una forma F dell'$(n-1)^o$ ordine, poichè è noto (*) che — dualmente — sono in numero di $n-1$ le rette di un S_n incidenti ad n S_{n-2} e ad una retta.

a) L'$S_{n-2}:\Sigma$ è multiplo d'ordine $n-2$ per la F: poichè da ogni suo punto P escono tanti S_{n-2} del sistema quanti — nella stella (P) — sono gli S_{n-2} incidenti secondo S_{n-3} e secondo rette per P risp. all'$S_{n-2}\Sigma$ e agli $n-1$ piani Pr, Pr_1, Pr_2 ... Pr_{n-2} (ossia quanti sono in un S_{n-1} gli S_{n-3} incidenti ad un S_{n-3} e ad $n-1$ rette): quindi in numero di $n-2$ (per quanto sopra).

b) Ogni S_{n-2} del sistema (K) il quale tagli secondo una retta il piano π, si appoggierà ad ogni retta r assunta in π: appartiene quindi alla F. Gli S_{n-2} del sistema (K) incidenti a π, escono dal punto $P \equiv \pi\Sigma$: tagliano quindi secondo S_{n-3} per P e risp. secondo rette per P: l'$S_{n-2}\Sigma$ e gli $n-1$ piani π, $Pr_1, \dots, Pr_{n-2}$. Quindi (osserv. *a)*) sono in numero di $n-2$.

c) Da ogni S_{n-3} incidente a $\Sigma, r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$ escono ∞^1 S_{n-2} del sistema (K) — costituenti un fascio nell'S_{n-1} che congiunge l'S_{n-3} a Σ: E fra gli S_{n-2} del fascio ve ne sarà uno incidente ad ogni retta r fissata — ad es. — in π: Gli S_{n-3} incidenti a Σ, $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$ costituiranno pertanto una M_{n-2} contenuta nella F: Si possono riguardare come gli S_{n-3} congiungenti le $(n-2)$-ple di punti secate sopra le $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$ dagli iperpiani del fascio (Σ): quindi $(n-2)$-ple di punti omologhi in $n-2$ punteggiate riferite fra loro proiettivamente. Si verifica agevolmente — p. es. trasformando il problema per dualità nell'S_n — che la M_{n-2} in questione è d'ordine $n-2$. La indicheremo con Φ.

48. — Segue dal fatto che la F è dell'$(n-1)^o$ ordine, e dalle osservazioni *a), b), c)*: *In un* S_n *il sistema* (K) *degli* ∞^2 S_{n-2} *incidenti ad un* $S_{n-2}:\Sigma$ *e ad* (n — 2) *rette* $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$, *definisce tra due piani* π, π' *una trasformazione — di* De Jonquières (**) — *dell'*(n — 1)^o *ordine.* Ponendo $n-1=m$: *Alle rette di* π *— ad es. — sono omologhe in* π' *curve d'ordine* m, *aventi a comune un punto* (m — 1)*-plo e passanti semplicemente per 2* (m — 1) *punti fissi.*

49. — Dal punto $\pi\Sigma$ escono ∞^1 S_{n-2} del sistema (K) costituenti — come facilmente si deduce dall'oss.^{e} *a)* (n° 47) — un cono d'ordine $n-2$, pel quale è multiplo d'ordine $n-3$ l'$S_{n-2}\Sigma$; ed a cui appartengono — evidentemente — gli $n-2$ S_{n-2} incidenti a π; Σ; $r_1, r_2, \dots, r_{n-2}$ (n° 47 *b)*) e la M_{n-2}^{n-2} Φ (n° 47 *c)*). Pertanto: *Al punto* $\pi\Sigma$ *corrisponde in* π' *la curva d'ordine* m — 1 *avente nel punto* $\pi'\Sigma$ *un punto* (m — 2)*-plo e passante semplicemente per gli ulteriori* 2 (m — 1) *punti fondamentali* (*semplici*) *della trasformazione.* — Ai punti (fondamentali) traccie su π degli $n-2$ S_{n-2} incidenti a

(*) C. Carrone, Memoria cit^a, n° 22.
(**) " Nouv. Ann. ", (II), 6, (1864). — " Giornale di Mat. ", t. 23 (1885).

π', Σ, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-2}$ corrispondono le traccie di questi spazî su π', ossia (poichè ognuno di essi contiene un S_{n-3} incidente a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-2}$ ed appoggiato a π'): *le rette congiungenti il punto* $\pi'\Sigma$ *ad* $m-1$ *determinati punti base* (*semplici*): *le traccie della* Φ *su* π'. Analogamente si prova che *ai punti comuni a* π *ed alla* Φ *sono omologhe le congiungenti il punto* $\pi'\Sigma$ *agli* $m-1$ *punti traccie su* π' *degli* S_{n-2} *incidenti a* $\pi, \Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-2}$.

§ 6.

50. — Si considerino due S_3: Π, Π', e in un S_n contenente lo spazio $\Pi\Pi'$: *il sistema* ∞^3: (K) *degli* S_{n-3} *incidenti ad un* S_{n-2} *e ad* $n-3$ *rette* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$. Da ogni punto P dell'S_n esce un solo S_{n-3} del sistema: congiungente P agli $n-3$ punti comuni all'S_{n-1} $P\Sigma$ ed alle rette $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$. Se il punto P descrive in Π un piano: α, l'S_{n-3} del sistema (K) uscente da P descriverà: " il sistema ∞^2 degli S_{n-3} incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed appoggiati al piano α ": Si distribuiranno questi, secondo ∞^1 fasci negli ∞^1 S_{n-2} incidenti ad α (secondo rette), a Σ ed alle $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ (fasci aventi per sostegni gli S_{n-4} congiungenti i gruppi di $n-3$ punti secati da quegli S_{n-2} sulle $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$).

Gli ∞^1 S_{n-2} in questione escono dal punto $\alpha\Sigma$, e costituiscono un cono d'ordine $n-2$ che indicheremo con F (cfr. n° 49):

a) L'$S_{n-2}\Sigma$ è multiplo d'ordine $n-3$ per il cono F (n° 49).

b) Appartengono ad F gli S_{n-2} incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed all'$S_3\,\Pi$ (secondo piani), poichè incideranno ad ogni piano α contenuto in Π. Tali S_{n-2} esciranno dalla retta $\Pi\Sigma$: saranno quindi (cfr. n° 47 *a)*) tanti quanti in un S_{n-2} gli S_{n-4} incidenti ad un S_{n-4} e ad $n-2$ rette: quindi (n° 47) in numero di $n-3$.

c) Appartiene ancora alla F la M_{n-3}: Φ degli ∞^1 S_{n-4} incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ (cfr. n° 47 *c)*): Essa è d'ordine $n-3$ (cfr. ancora n° 47 *c)*).

51. — Discende dal numero precedente: *In un* S_n *il sistema* (K) *degli* ∞^3 S_{n-3} *incidenti ad un* S_{n-2} *e ad* $n-3$ *rette definisce tra due* S_3: Π, Π' *una trasformazione dell'*$(n-2)^\circ$ *ordine.*

Ponendo $n-2=m$: *Agli* ∞^3 *piani di* Π — *ad es.* — *sono omologhe in* Π' *le rigate d'ordine* m *aventi a comune:* (a) *una direttrice rettilinea* $(m-1)$*-pla;* (b) $m-1$ *generatrici; e passanti* (c) *semplicemente per* $m-1$ *punti fissi* (*).

52. — Se un punto P descrive in Π una retta r, l'S_{n-3} del sistema (K) uscente da P descrive " il sistema ∞^1 degli S_{n-3} incidenti ad un S_{n-2}: Σ e ad $n-2$ rette $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ": sistema costituente (n° 47 *c)*) una M_{n-2}^{n-2}, che indicheremo con R.

a) Gli S_{n-3} generatori della R secano Σ secondo S_{n-4} costituenti una M_{n-3} (forma) dell'$(n-3)^\circ$ ordine: poichè un S_{n-1}: ω per Σ seca ulteriormente la R secondo il solo S_{n-3} congiungente gli $n-2$ punti $\omega r, \omega r_1, \ldots \omega r_{n-3}$.

(*) La trasformazione birazionale trattata dal Prof. Segre al n° 21 della sua Nota: *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, " Atti R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXI (1885) — dedotta mediante convenienti proiezioni su due S_3 di una M_3 normale luogo di una ∞^1 razionale di piani — abbraccia come caso molto particolare la trasformazione di cui sopra.

b) Ciascuno degli $n-3$ S_{n-2} incidenti (n° 50 *b)*) a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed a Π (e quindi ad ogni retta r contenuta in Π), contiene un (solo) S_{n-3} della R (congiungente gli $n-2$ punti comuni a quell'S_{n-2} ed alle: $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$).

c) La M_{n-3} Φ degli S_{n-4} incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ appartiene alla R, poichè da ogni suo S_{n-4} generatore esce *un* S_{n-3} del sistema (K) incidente ad una fissata retta r (ad es. in Π).

Potremo ora aggiungere al n° 51: *Alle rette di* Π — *ad es.* — *sono omologhe in* Π' *le curve d'ordine* m *aventi una data retta* $(\Sigma\Pi')$ *quale* m — 1 *secante; appoggiate semplicemente ad* m — 1 *rette* (*che incidono alla* m — 1 *secante*); *e passanti semplicemente per* m — 1 *punti fissi.*

53. — Gli S_{n-3} del sistema (K) i quali si appoggiano alla retta $s \equiv \Pi\Sigma$ (retta fondamentale $(m-1)$-pla in Π) costituiscono un cono d'ordine $n-3$: proiettante dalla s la varietà Φ (n° 50 *c)*): Invero ogni S_{n-2} che congiunga la s ad un S_{n-4} incidente a $\Sigma, r_1, \ldots, r_{n-3}$ contiene tutto un fascio di S_{n-3} del sistema (K) incidenti alla s. L'$S_{n-2}\,\Sigma$ è multiplo d'ordine $n-4$ per il cono (poichè un $S_{n-1}: \omega$ per Σ seca ulteriormente il cono secondo il solo S_{n-2} generatore, congiungente la s agli $n-3$ punti $r_1\omega, r_2\omega, \ldots r_{n-3}\omega$).

Al cono appartengono, oltre alla Φ, gli $n-3$ S_{n-2} (n° 50 *b)*) incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed a Π (e quindi uscenti dalla $s \equiv \Pi\Sigma$). Pertanto: *Alla retta* s $\equiv \Pi\Sigma$ *è omologa in* Π' *la rigata dell'* (m—1)° *ordine avente la retta* $\Sigma\Pi'$ *quale direttrice* (m—2)-*pla, e passante semplicemente per le* m — 1 *rette e gli* (m — 1) *punti base del sistema omaloidico in* Π'. E precisamente: *Ai punti della* s *corrispondono le curve d'ordine* m — 1 *aventi la* $\Sigma\Pi'$ *quale* (m — 2) *secante, appoggiate alle* m — 1 *rette basi e passanti semplicemente per gli* m — 1 *punti base.* (Infatti: Gli S_{n-3} del sistema (K) uscenti da un determinato punto P della s costituiscono evidentemente il cono — d'ordine $n-3$ — proiettante da P la varietà Φ. E poichè gli S_{n-4} generatori della Φ secano — come facilmente si verifica (cfr. n° 52 *a)*) — su Σ una M_{n-4} d'ordine $n-4$, il cono (P) sarà secato da Σ secondo una M_{n-3}^{n-4} (conica). D'altra parte ciascuno degli S_{n-2} incidenti a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed a Π contiene certamente un S_{n-3} del cono (P), quindi ecc.).

Alle rette (fondamentali semplici in Π) *traccie su* Π *degli* S_{n-2} *incidenti a* Σ, r_1, r_2, ... r_{n-3} *ed a* Π', *corrispondono* evidentemente i piani comuni a questi spazî ed a Π' ovvero: *i piani congiungenti la* $\Sigma\Pi'$ *agli* m — 1 *punti fondamentali semplici in* Π' (n° 51): poichè un S_{n-4} (della Φ) incidente a $\Sigma, r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed appoggiato a Π', congiunto alla $\Sigma\Pi'$ dà luogo ad uno degli $m-1$ S_{n-2} di cui sopra. — Più precisamente: *Ai punti di ciascuna delle rette fondamentali semplici in* Π, *corrispondono, nel piano omologo, i raggi di un fascio: avente per centro il punto fondamentale congiunto da quel piano alla* $\Sigma\Pi'$.

Analogamente si prova: *Ai punti* (fondamentali semplici in Π) *comuni a* Π *ed alla varietà* Φ (n° 50 *c)*) *corrispondono in* Π' *gli* m — 1 *piani congiungenti la* $\Sigma\Pi'$ *alle* m — 1 *rette fondamentali semplici di* Π'.

§ 7.

54. — Si considerino due $S_3 : \Pi, \Pi'$ e in un S_n contenente lo spazio $\Pi\Pi'$: *il sistema* $\infty^3 : (K)$ *degli* S_{n-3} *i quali incidono — secondo* S_{n-4} *— ad un* $S_{n-3} : \Sigma$ *assegnato, e si appoggiano ad* $n-3$ *piani*: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$. Da ogni punto P dell'S_n esce un solo S_{n-3} del sistema: congiungente P agli $n-3$ punti che l'$S_{n-2} P\Sigma$ seca sopra $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}$. Se il punto P descrive in Π un piano α, l'S_{n-3} del sistema (K) uscente da P descrive " il sistema ∞^2 degli S_{n-3} incidenti ad un $S_{n-3} : \Sigma$ (secondo S_{n-4}: ciò sottintenderemo in seguito) ed appoggiati ad $n-2$ piani: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$ ": Tale sistema costituisce una forma F dell'$(n-2)^{\circ}$ ordine. Invero: un $S_{n-1} : \omega$ uscente da Σ seca la F unicamente secondo la M_{n-2}^{n-2} degli ∞^1 S_{n-3} " incidenti in un S_{n-1} ad un $S_{n-3} : \Sigma$ e ad $(n-2)$ rette: $a \equiv \alpha\omega$, $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega, \dots a_{n-3} \equiv \alpha_{n-3}\omega$ " (v[i] n° 47).

a) L'$S_{n-3}\Sigma$ è multiplo d'ordine $n-3$ per la F: poichè è multiplo d'ordine $n-3$ (n° 47 *a)*) per le ∞^2 M_{n-2} sezioni della F cogli iperpiani uscenti da Σ.

b) Appartengono alla F gli ∞^1 S_{n-3} incidenti a Σ, a Π secondo rette, ed appoggiati agli $n-3$ piani $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$. Essi costituiscono una $M_{n-2}\Psi$, di cui vogliamo ora determinare l'ordine: Escono tali S_{n-3} dal punto $P \equiv \Pi\Sigma$ e nella stella (P) incidono secondo S_{n-4} e risp. secondo rette per P, all'S_{n-3} Σ ed agli $n-2$ $S_3 : \Pi, P\alpha_1, P\alpha_2, \dots, P\alpha_{n-3}$: Per sezione con un $S_{n-1} : \omega$, generico, daranno luogo " agli ∞^1 S_{n-4} che in un $S_{n-1}(\omega)$ incidono, secondo S_{n-5}, ad un S_{n-4} $(\Sigma_0 = \omega\Sigma)$ e si appoggiano ad $n-2$ piani $(\pi_0, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,n-3})$ ". L'ordine della M_{n-3} costituita da tali S_{n-4} in ω, eguaglierà l'ordine della Ψ.

Indicheremo con ρ_{n-1} tale ordine, ed in generale con ρ_m: l'ordine dell'analoga varietà relativa ad un S_m. Un S_{n-2} condotto in ω per l'S_{n-4} Σ_0 secherà la M_{n-3}, fuori di Σ_0 secondo gli $n-3$ S_{n-4} incidenti a Σ_0 ed alle $n-2$ rette comuni all'S_{n-2} ed agli $n-2$ piani $\pi_0, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,n-3}$ (n° 47). D'altra parte da ogni punto P di Σ_0 escono (cfr. il ragionamento di poc'anzi) tanti S_{n-4} della M_{n-3} quanti in un S_{n-2} sono gli S_{n-5} incidenti, secondo S_{n-6}, ad un S_{n-5} ed appoggiati a $n-2$ piani: cioè in numero di ρ_{n-2}: L'S_{n-4} Σ_0 è quindi multiplo d'ordine ρ_{n-2} per la M_{n-3}. E si avrà quindi: $\rho_{n-1} = (n-3) + \rho_{n-2}$ (*). Analogamente: $\rho_{n-2} = (n-4) + \rho_{n-3}$ ecc. E poichè (n° 45) è $\rho_5 = 6$, sarà ρ_{n-1} (ordine della Ψ) $= \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

c) Appartiene alla F (cfr. n° 47 *c)*) la $M_{n-2} : \Phi$ degli ∞^2 S_{n-4} incidenti all'S_{n-3} Σ, secondo S_{n-5}, ed appoggiati ai piani $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$. Un $S_{n-1} : \omega$ uscente da Σ seca la Φ, fuori di Σ, secondo la M_{n-3}^{n-3} (cfr. n° 52) degli ∞^1 S_{n-4} incidenti a Σ ed alle rette $a_1 \equiv \omega\alpha_1$, $a_2 \equiv \omega\alpha_2, \dots, a_{n-3} \equiv \omega\alpha_{n-3}$. D'altra parte, da ogni punto di Σ escono tanti S_{n-4} incidenti a Σ ed appoggiati ad $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}$ quanti S_{n-5} — in un S_{n-1} — incidono ad

---

(*) Alla stessa relazione si può giungere pure brevemente come segue (cfr. n° 45): In ω gli ∞^1 S_{n-4} " incidenti secondo S_{n-5} a Σ_0 ed appoggiati ai piani $\pi_0, \alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,n-3}$ " secano sopra ognuno di tali piani una curva d'ordine $n-3$ (v[i] sopra: determ.° dell'ordine della F). Conducasi per uno di essi (π_0 ad es.) un $S_3 : \Pi_0$. L'intersezione di Π_0 colla varietà, fuori di π_0, si comporrà di un numero finito di rette: tante quanti sono — in ω — gli S_{n-4} " incidenti a Σ_0 (secondo S_{n-5}), a Π_0 (secondo rette) ed appoggiati agli $n-3$ piani $\alpha_{0,1}, \dots, \alpha_{0,n-3}$ ": quindi in numero di ρ_{n-2}. Ecc.

un S_{n-4} (secondo S_{n-6}) e si appoggiano ad $n-3$ piani. Detto quindi ρ_n l'ordine della Φ, e in generale: ρ_m l'ordine della varietà analoga relativa ad un S_m, sarà $\rho_n = (n-3) + \rho_{n-1}$. Analogamente: $\rho_{n-1} = (n-4) + \rho_{n-2}$ ecc. E poichè (n° 5): $\rho_5 = 3$ sarà $\rho_n = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

55. — L'$S_{n-3}\Sigma$ — (multiplo d'ordine $n-3$ per la F) — è multiplo d'ordine $\frac{(n-3).(n-4)}{2}$ per ciascuna delle due varietà $\left(M_{n-2}^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}\right)$ Ψ e Φ. Queste contengono ancora entrambe la M_{n-3}: H degli $\infty^1 S_{n-4}$ incidenti, secondo S_{n-5}, a Σ, e che si appoggiano ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$ ed a Π (*). L'ordine di questa M_{n-3} eguaglia l'ordine della M_{n-2}:H_1 degli $\infty^2 S_{n-4}$ incidenti ad un $S_{n-3}(\Sigma)$ e che si appoggiano ad $(n-4)$ piani $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-4})$ e a due S_3 (Π, Π_1), poichè per entrambe le varietà l'ordine è espresso dal numero finito di S_{n-4} incidenti, secondo S_{n-5}, ad un S_{n-3}, ed appoggiati ad $n-3$ piani e a due S_3.

Premettiamo la determinazione dell'ordine della M_{n-2} " luogo degli $\infty^1 S_{n-3}$ di un S_n incidenti ad un S_{n-2}: Σ, ad $n-3$ rette: $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ ed appoggiati a due piani „ o — ciò che fa lo stesso — l'ordine della M_{n-1} (forma) " degli $\infty^2 S_{n-3}$ incidenti ad un S_{n-2}: Σ, ad $n-4$ rette: $r_1, r_2, \ldots, r_{n-4}$ ed appoggiati a tre piani: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ „. Un S_{n-1}: ω condotto per Σ, seca la M_{n-1}, fuori di Σ, secondo il cono quadrico di specie $n-4$, costituito dagli $\infty^1 S_{n-3}$ — in ω — i quali passano per l'S_{n-5} congiungente i punti $R_1 \equiv r_1\omega$, $R_2 \equiv r_2\omega$, ..., $R_{n-4} \equiv r_{n-4}\omega$ e si appoggiano alle tre rette: $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$, $a_3 \equiv \alpha_3\omega$ (ovvero: " incidono — secondo S_{n-4} — ai tre S_{n-3} proiettanti da quell'S_{n-5} le rette a_1, a_2, a_3 „). — D'altra parte, indicato con ρ_n l'ordine della forma, ecc. (come al n° prec.), l'$S_{n-2}\Sigma$ sarà multiplo d'ordine ρ_{n-1}, poichè da un suo generico punto I escono tanti S_{n-3} della forma quanti — in un S_{n-1} — sono gli S_{n-4} incidenti ad un S_{n-3}, ad $n-4$ rette ed appoggiati a tre piani. Pertanto: $\rho_n = \rho_{n-1} + 2$. Analogamente: $\rho_{n-1} = \rho_{n-2} + 2$, ecc. E poichè (n° 32): $\rho_5 = 5$, sarà: $\rho_n = 5 + 2(n-5) = 2(n-3) + 1$.

Conducasi ora — per la determinazione dell'ordine della H_1 — un S_{n-1}: ω per l'$S_{n-3}\Sigma$: secherà la H_1, fuori di Σ, secondo la M_{n-3} degli: " $\infty^1 S_{n-4}$ incidenti (in ω) a Σ, alle $(n-4)$ rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, ..., $a_{n-4} \equiv \alpha_{n-4}\omega$ ed appoggiati ai due piani $\pi \equiv \Pi\omega$, $\pi_1 \equiv \Pi_1\omega$ „: varietà d'ordine: $2(n-4) + 1$, per quanto sopra. — D'altra parte: indicando con ρ_n, al solito, l'ordine della H_1 ecc., si verifica — come poc'anzi — che l'$S_{n-3}\Sigma$ è multiplo d'ordine ρ_{n-1} per la H_1. Quindi: $\rho_n = \rho_{n-1} + 2(n-4) + 1$.

Analogamente: $\rho_{n-1} = \rho_{n-2} + 2(n-5) + 1$, ..., $\rho_6 = \rho_5 + 2.2 + 1$.

Ma (n° 15), è $\rho_5 = 4$. Pertanto: $\rho_n = 4 + 2\{2 + \ldots + (n-5) + (n-4)\} + (n-5)$.

Ossia: $\rho_n = 4 + (n-2)(n-5) + (n-5) = (n-3)^2$ (**).

(*) La Ψ si ottiene anzi proiettando la H dal punto $\Pi\Sigma$.

(**) L'ordine della varietà H può determinarsi altresì col procedimento seguente: Gli $\infty^1 S_{n-4}$ " incidenti a Σ (secondo S_{n-5}) ed appoggiati agli $n-3$ piani $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}$ ed all'S_3 Π „ secano su Π una curva d'ordine $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ (n° 54 *c)*). Un generico S_4: ω uscente da Π seca ulteriormente la H, fuori di Π secondo le rette, in numero finito, traccie su ω degli S_{n-4} " incidenti a Σ (secondo S_{n-5}), ad ω (secondo rette) ed appoggiati ad $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-3}$. Tale numero rappresenta l'ordine della varietà degli $\infty^2 S_{n-4}$ " incidenti a Σ (secondo S_{n-5}), ad ω (secondo rette) ed appoggiati ad $n-4$ piani $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4})$. Gli S_{n-4} generatori di tale varietà si distribuiscono secondo ∞^1 fasci negli S_{n-3} inci-

56. — Discende dai n[i] precedenti (54 e 55): *In un* S_n *il sistema* ∞^3 *degli* S_{n-3} *incidenti (secondo* S_{n-4}*) ad un* $S_{n-3}:\Sigma$ *ed appoggiati ad* $n-3$ *piani:* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$ *definisce tra due* $S_3:\Pi, \Pi'$ *una trasformazione dell'*$(n-2)^o$ *ordine.* Ponendo: $n-2=m$: *Ai piani di* Π *sono omologhe in* Π' *le* ∞^3 *superficie d'ordine* m, *aventi un punto* (m—1)-*plo a comune (il punto* $\Sigma\Pi'$*) e passanti semplicemente per due curve sghembe d'ordine* $\frac{m(m-1)}{2}$, *le quali hanno a comune: il punto* $\Sigma\Pi'$, *multiplo per entrambe d'ordine* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, *ed ulteriormente* $(m-1)^2$ *punti semplici* (*).

57. — Se un punto P descrive in Π una retta r, l'S_{n-3} del sistema (K) uscente da P descrive — nell'iperpiano $\omega\equiv\Sigma r$ — la forma $(M_{n-2}):R$ " luogo degli $\infty^1 S_{n-3}$ incidenti — in ω — a Σ ed alle $n-2$ rette r, $a_1\equiv\alpha_1\omega$, $a_2\equiv\alpha_2\omega, \ldots, a_{n-3}\equiv\alpha_{n-3}\omega$ ": forma d'ordine $n-2$ (n° 47).

a) L'$S_{n-3}\Sigma$ è multiplo d'ordine $n-3$ per la R (n° 47 *a)*).

b) L'$S_{n-1}\omega$ seca la Ψ (n° 54 *b)*) fuori di Σ, secondo $n-3$ S_{n-3}, i quali, giacendo in ω e incidendo (secondo rette) a Π, si appoggieranno ad r, e quindi apparterranno ad R.

c) L'$S_{n-1}\omega$ seca la Φ (n° 54 *c)*), fuori di Σ, secondo una M_{n-3}^{n-3}: da ognuno dei suoi S_{n-4} generatori esce un S_{n-3} della R: comune ai due S_{n-2} che da quell'S_{n-4} proiettano Σ ed r. La M_{n-3}^{n-3} appartiene quindi alla R.

Se ne deduce: *Alle rette di* Π *corrispondono in* Π' *le* ∞^4 *curve piane d'ordine* m, *aventi nel punto* $\Sigma\Pi'$ *un punto* (m — 1)-*plo ed appoggiate a ciascuna delle due curve basi* $\left(C^{\frac{m(m-1)}{2}}\right)$ *in* m — 1 *punti (fuori di* $\Sigma\Pi'$*).* Costituiranno tali curve: ∞^2 reti nei piani della stella di centro il punto $\Sigma\Pi'$, per ciascuna delle quali i punti base saranno forniti: dal punto $\Sigma\Pi'$: $(m-1)$-plo e dagli $(m-1)+(m-1)$ punti d'intersezione (fuori di $\Sigma\Pi'$) del piano della rete colle due curve basi.

58. — Dal punto $\Sigma\Pi$ (come da ogni punto di Σ) escono $\infty^2 S_{n-3}$ del sistema (K): costituenti un cono d'ordine $(n-3)$, pel quale è multiplo d'ordine $n-4$ l'$S_{n-3}\Sigma$ ed a cui appartengono le due varietà Ψ e Φ (cfr. n[i] 49, 53). Pertanto: *Al punto* $\Sigma\Pi$ *corrisponde in* Π' *una superficie d'ordine* m — 1, *avente in* $\Sigma\Pi'$ *un punto* (m — 2)-*plo, e passante semplicemente per le due curve basi del sistema omaloidico in* Π'.

Ai punti della curva (fondamentale in Π) che è traccia su Π dalla M_{n-2} " luogo degli $\infty^1 S_{n-3}$ incidenti a Σ, a Π' secondo rette ed appoggiati ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$ "

denti a Σ (secondo S_{n-4}), ad ω (secondo piani) ed appoggiati ad $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-4}$: S_{n-3} uscenti dalla retta $\omega\Sigma$. Sopra un generico S_{n-2} essi secano la varietà degli $\infty^1 S_{n-5}$ " incidenti ad un S_{n-5} (secondo S_{n-6}) ed appoggiati ad $n-3$ piani ": varietà d'ordine $\frac{(n-3).(n-4)}{2}$ (cfr. ad es. la nota (*) al n° 54).

L'ordine della H sarà espresso pertanto da: $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+\frac{(n-3)(n-4)}{2}=(n-3)^2$.

(*) Si ottiene tale trasformazione dalla trasformazione monoidale trattata dal De Paolis, " Giornale di Mat. ", t. 13 (1875), supponendo ivi che la curva base $C^{n(n-1)}$ (cfr. n° 10 e seg[ti]) del sistema omaloidico si spezzi in due curve di egual ordine. Altro caso particolare interessante — dimostrato possibile e trattato distesamente dal De Paolis — si ottiene spezzando la $C^{n(n-1)}$ base in $n-1$ curve razionali: le due particolarizzazioni si trovano riunite in un caso da noi esaminato al n° 61.

saranno omologhe le rette traccie su Π' di quegli S_{n-3}, ovvero (poichè ognuno di quegli S_{n-3} può ottenersi congiungendo il punto $\Sigma\Pi'$ con un S_{n-4} (della Φ) incidente a Σ ed appoggiato ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-3}$ ed a Π'): *le generatrici del cono* (*d'ordine* m — 1) *che dal punto fondamentale* $\Sigma\Pi'$ proietta la $C^{\frac{m.(m-1)}{2}}$ *traccia della varietà* Φ *sopra* Π'.

Analogamente si verifica che: *Ai punti della curva comune a* Π *ed alla varietà* Φ *corrispondono in* Π' *le generatrici del cono* (*d'ordine* m — 1) *proiettante dal punto* $\Sigma\Pi'$ *la traccia su* Π' *della varietà* Ψ.

§ 8.

59. — Nell'S_5 v'hanno i seguenti (e soli) sistemi di spazî (S_3, piani e rette) " incidenti a dati spazî in numero finito „ e tali che " da ogni punto dell'S_5 esca un solo spazio del sistema „:

Sistemi ∞^2 di S_3: $(002)_3$, $(111)_3$, $(030)_3$, $(301)_3$.

„ ∞^3 di piani: $(300)_2 \equiv (003)_2$, $(201)_2$, $(121)_2$, $(022)_2$, $(0\overline{1}1)_2$, $(0;\,2,\overline{1};\,0)_2$.

„ ∞^4 di rette: $(101)_1$, $(020)_1$, $(012)_1$, $(004)_1$.

Esamineremo brevemente le corrispondenze (biunivoche) determinate tra due piani, ovvero tra due S_3 dai sistemi di S_3 risp. o di piani di cui sopra (*).

60. — $(002)_3$: Gli $\infty^2 S_3$ incidenti a due $S_3 : \Sigma_1, \Sigma_2$ escono dalla retta $\Sigma_1\Sigma_2$: vengono secati da un generico S_3 secondo " le rette incidenti a due rette „: sistema il quale determina (com'è noto) fra due piani π e π', fissati in quell'S_3, *una generale corrispondenza quadratica.* Della stessa natura, evidentemente, risulterà la corrispondenza determinata dal sistema $(002)_3$ fra due piani " assunti in posizione generica „.

$(111)_3$: Gli $\infty^2 S_3$ incidenti ad una retta r, un piano α ed un $S_3 : \Sigma$ passano pel punto $A \equiv \alpha\Sigma$: incidono quindi secondo rette per A ai piani α, Ar e secondo piani per A all'$S_3\Sigma$. Da un arbitrario, generico S_4 verranno secati secondo " gli ∞^2 piani incidenti (in quell'S_4) a due rette r_1, r_2 e ad un piano: σ „. Potremo limitarci, come poc'anzi, all'esame della corrispondenza determinata da questo sistema tra due piani π, π', fissati nell'S_4 che lo contiene. Il sistema stesso rientra quale caso particolare: $n = 4$ in quello esaminato ai n[i] 47-49. Pertanto: *la corrispondenza ch'esso determina fra i piani* π, π' *è del terzo ordine. Alle rette di* π — *ad es.* — *sono omologhe in* π' *le curve del 3° ordine aventi a comune un punto doppio e passanti semplicemente per altri 4 punti. Ecc.* (**).

$(030)_3$: Da ogni punto P dell'S_5 esce un solo S_3 incidente a tre piani dati: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (l'S_3 congiungente le tre rette comuni agli $S_3 P\alpha_1$, $P\alpha_2$, $P\alpha_3$ presi due a due): La corrispondenza *(biunivoca) determinata dal sistema* $(030)_3 : (K)$ *tra due piani* π, π' *è del*

(*) Dal Prof. Carrone vennero esaminate — nella Mem[a] più volte citata — le corrispondenze determinate fra due S_4 dai sistemi di rette $(101)_1$, $(020)_1$, $(004)_1$ (n[i] 23 e 22). Il sistema $(012)_1$ definirebbe tra due S_4 una corrispondenza (343), secondo la notazione usata in tale Memoria.

(**) Tralascieremo per brevità di ripetere per $n = 4$ i risultati del n° 49, relativi alla determinazione delle linee omologhe agli elementi fondamentali in π. — Ciò sia detto altresì per le ulteriori applicazioni dei risultati dei §§ 5, 6, 7.

4° ordine: Se il punto P descrive invero in π — ad es. — una retta: r, l'S_3 del sistema (K) uscente da P descrive il " sistema ∞^1 degli S_3 incidenti a tre piani $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e ad una retta (r) ": sistema contenuto in una forma F del 4° ordine (n° 15). *a)* Da ogni retta p incidente ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ escono due S_3 del sistema (K) ed appoggiati alla r (i due S_3 incidenti ai $4S_3, p\alpha_1, p\alpha_2, p\alpha_3, pr$, uscenti dalla p). Questi due S_3 non giacciono in uno stesso iperpiano: quindi ogni retta p è doppia per la F. In altre parole: La F contiene quale varietà doppia la M_3^3 delle rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. — *b)* Appartengono alla F i tre S_3 (n° 5) incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \pi$. Se ne deduce: *Alle rette di* π *sono omologhe in* π' *le quartiche aventi tre punti doppi fissi e passanti semplicemente per altri tre punti. Ecc.*

$(301)_3$: È caso particolare ($n = 5$) del sistema studiato ai n^i 17-49. Pertanto: *In un* S_5 *il sistema* ∞^2 *degli* S_3 *incidenti a tre rette e ad un* S_3 *definisce tra due piani* π, π' *una corrispondenza del 4° ordine. Alle rette di* π *— ad es. — sono omologhe in* π' *le curve del 4° ordine aventi un punto triplo fisso e passanti semplicemente per altri sei punti. Ecc.*

61. — $(300)_2 = (003)_2$: Determina tra due S_3, una corrispondenza biunivoca del 3° ordine studiata dal Prof. Ascione (*) e ulteriormente dal Prof. Carrone (**).

$(0\bar{1}1)_2$: I piani incidenti ad un piano α e ad un $S_3\Sigma$, escono dal punto $A = \alpha\Sigma$, ed incidono ad α e Σ " secondo rette per A ": verranno secati da un arbitrario S_4:ω secondo le " ∞^3 rette incidenti (in ω) ad una retta e ad un piano ". Tale sistema determina tra due $S_3 : \Pi, \Pi'$ una trasformazione del 2° ordine (**).

$(201)_2$: È caso particolare ($n = 5$) del sistema trattato ai n^i 50-53. Si avrà quindi: *In un* S_5 *il sistema* ∞^3 *dei piani incidenti a due rette e ad un* $S_3 : \Sigma$ *definisce tra due* $S_3 : \Pi, \Pi'$ *una corrispondenza biunivoca del 3° ordine. Ai piani di* Π *— ad es. — sono omologhe in* Π' *le rigate cubiche aventi a comune la direttrice doppia, e due generatrici; passanti inoltre per due punti fissi. Alle rette di* Π *sono omologhe in* Π' *le cubiche sghembe bi-secanti la direttrice doppia, appoggiate semplicemente alle due generatrici e passanti pei due punti fissi. Ecc.*

$(0 : 2, \bar{1} ; 0)_2$: È caso particolare ($n = 5$) del sistema considerato ai n^i 54-58. Pertanto: *In un* S_5 *il sistema* ∞^3 *dei piani incidenti secondo rette ad un piano, ed appoggiati a due altri piani definisce tra due* $S_3 : \Pi, \Pi'$ *una corrispondenza biunivoca del 3° ordine. Ai piani di* Π *— ad es. — sono omologhe in* Π' *le superficie del 3° ordine che passano per due cubiche sghembe, assegnate con cinque punti a comune; ed hanno inoltre tutte quale punto doppio uno di quei cinque punti* (***). *Alle rette di* Π *sono omologhe in* Π' *le cubiche piane, aventi in quello un punto doppio, ed aventi a comune una coppia di punti con ciascuna delle due cubiche basi.*

(*) " Giornale di Mat. di Battaglini ", 1893.
(**) Memoria citata, n° 23.
(***) Oppure — assunta in modo generico su ciascuna delle due cubiche una quaterna di punti —: ... *le* ∞^3 *superficie del 3° ordine aventi a comune un punto doppio e 12 punti semplici (in posizione particolare).*

62. — $(121)_2$: Da ogni punto P dell'S_5 esce un solo piano " incidente ad una retta r ed un $S_3\,\Sigma$ assegnati, ed appoggiato a due dati piani α_1, α_2 „ (il piano comune nell'$S_4 : \omega \equiv P\Sigma$ ai due S_3 che dalla congiungente P al punto $R \equiv \omega r$, proiettano le due rette $a_1 \equiv \alpha_1\omega$, $a_2 \equiv \alpha_2\omega$). Il sistema $(121)_2$ — che denoteremo, al solito, con (K) — definisce pertanto tra due $S_3 : \Pi, \Pi'$ una corrispondenza biunivoca. Descrivendo il punto P un piano α in Π, il piano del sistema (K) uscente da P descriverà " il sistema ∞^2 dei piani incidenti ad r, Σ ed appoggiati ai piani $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ „: costituente una forma F del 5° ordine (n° 32).

a) L'$S_3\Sigma$ è triplo per la F (n° 32).

b) Appartiene alla F la $M_3 : \Psi$ — del 5° ordine (n° 32) — degli ∞^1 piani " incidenti a r, Σ, Π e appoggiati ad α_1, α_2 „.

c) Alla F appartengono ancora le due M_3^2 delle rette incidenti: 1) ad r, α_1, Σ; 2) ad r, α_2, Σ (poichè da una retta p, incidente p. es. ad r, α_1, Σ esce uno ed un sol piano del sistema (K) ed appoggiato ad α: il piano comune ai tre $S_4\,p\alpha$, $p\alpha_2$, $p\Sigma$). Indicheremo risp. con Φ_1, Φ_2 le due varietà.

d) La F contiene finalmente i due $S_3 : \Delta_1, \Delta_2$ incidenti ad $r, \alpha_1, \alpha_2, \Sigma$ (poichè in ognuno d'essi è contenuto un fascio di piani della F: di cui è asse la congiungente i due punti intersezioni di quell'S_3 con r ed α).

63. — Determineremo ora le relazioni di posizione esistenti fra le varietà (M_3) Σ; Ψ; Φ_1, Φ_2; Δ_1, Δ_2 (che tradurremo in relazioni di posizione tra le curve basi del sistema omaloidico in Π').

1) $\Sigma - \Psi$: Gli ∞^1 piani incidenti ad r, Π, Σ, appoggiati ad α_1, α_2, secano Σ secondo le generatrici di una rigata del 4° ordine (*): comune quindi a Σ e Ψ. — 2) $\Sigma - \Phi_1$ (o Φ_2): L'$S_3\Sigma$ è secato dalle ∞^2 rette incidenti ad r, α_1, Σ (p. es.) secondo gli ∞^2 punti di un piano (comune a Σ ed all'$S_4\,r\,\alpha_1$). — 3) $\Sigma - \Delta_1$ (o Δ_2): I due $S_3\Delta_1, \Delta_2$ sono incidenti (secondo piani) all'$S_3\Sigma$. — 4) $\Psi - \Phi_1$ (o Φ_2): Da ogni retta p incidente ad r, α_1, Σ ed a Π esce un piano incidente a Π, Σ, r, ed appoggiato ad α_1, α_2 (il piano comune ai tre $S_4 : p\Pi$, $p\Sigma$, $p\alpha_2$). Pertanto: le due $M_3 : \Psi$, Φ_1 hanno a comune la superficie delle ∞^1 rette incidenti ad r, α_1, Σ, Π: rigata cubica giacente nell'$S_4\,r\,\alpha_1$ (n° 12). Analogamente Ψ e Φ_2 hanno a comune una rigata cubica giacente nell'$S_4 : r\alpha_2$. — 5) $\Psi - \Delta_1$ (o Δ_2): In un S_3 (Δ_1) il quale sia incidente ad $r, \alpha_1, \alpha_2, \Sigma$ giace uno ed un solo piano incidente ad r, Π, Σ, appoggiato ad α_1, α_2 (il piano congiungente il punto $\Delta_1 r$ alla retta $\Delta_1\Pi$). La $M_3^5\Psi$ ha quindi un piano a comune tanto con Δ_1 che con Δ_2. — 6) Φ_1 (o Φ_2) — Δ_1 (o Δ_2): Detti risp. R ed a_1 il punto $\Delta_1 r$ e la retta $\Delta_1\alpha_1$, è chiaro che le rette uscenti da R nel piano Ra_1 si possono considerare come incidenti ad r, α_1 e (giacendo in Δ_1) anche a Σ. Pertanto Φ_1 e Δ_1 hanno a comune un piano; così pure Φ_1, Δ_2: Φ_2, Δ_1; Φ_2, Δ_2. È facile verificare che le due $M_3^2 : \Phi_1$ e Φ_2 non hanno alcuna superficie a comune, e che i due $S_3 : \Delta_1, \Delta_2$ non sono fra loro incidenti.

64. — Indicheremo con s; φ_1, φ_2; d_1, d_2 e con s'; φ_1', φ_2'; d_1', d_2' le intersezioni delle varietà: Σ; Φ_1, Φ_2: Δ_1, Δ_2 risp. con Π e con Π'. Detta infine Ψ' la M_3^5 degli ∞^1

(*) Un S_4 uscente da Σ seca infatti la Ψ, fuori di Σ, secondo un (solo) piano, come facilmente si verifica (v[i] del resto il n° 67, in fine).

piani " incidenti ad r. Σ, Π' ed appoggiati ad α_1, α_2 „ ne indicheremo con ψ l'intersezione con Π; con ψ' indicheremo l'intersezione di Ψ e Π'. — Segue dai n^i 62-63: *In un* S_5 *il sistema* (K) *degli* ∞^3 *piani incidenti ad una retta* r, *un* $S_3 \Sigma$ *ed appoggiati a due piani* α_1, α_2 *definisce tra due* $S_3 \Pi, \Pi'$ *una corrispondenza biunivoca del* 5° *ordine. Ai piani di* Π *— p. es. — sono omologhe in* Π' *le superficie del* 5° *ordine aventi a comune una retta tripla* (s'), *passanti inoltre semplicemente per una curva del* 5° *ordine* (ψ'), *per due coniche* (φ_1', φ_2') *e per due rette* (d_1', d_2') (*). *La quintica (sghemba, razionale)* ψ' *ha la retta* s' *quale quadrisecante, le due coniche* φ_1', φ_2' *si appoggiano ognuna in un punto alla* s', *le rette* d_1', d_2' *sono incidenti alla* s'; *la quintica* ψ' *ha tre punti a comune con ciascuna delle coniche* φ_1', φ_2' *ed un punto con ciascuna delle due rette* d_1', d_2'; *le due coniche* φ_1', φ_2' *si appoggiano ognuna in un punto alla* d_1' *ed ognuna in un punto alla* d_2'; *non hanno punti a comune. Le due rette* d_1', d_2' *sono fra loro sghembe* (**).

65. — Se un punto P descrive in Π una retta m, il piano del sistema (K) uscente da P descriverà il sistema ∞^1 " dei piani incidenti a due rette r, m, ad un $S_3 \Sigma$ ed appoggiati a due piani α_1, α_2 „: sistema costituente una M_3 del 5° ordine (n° 32) che indicheremo con M.

a) Gli ∞^1 piani — di (K) — costituenti la M secano Σ secondo le generatrici d'una rigata del 4° ordine (n° 32).

b) Le due M_3^5: Ψ, M hanno a comune quattro piani. Invero: gli ∞^1 piani della Ψ secano pure Π secondo le generatrici d'una rigata del 4° ordine (cfr. n° 63): da ciascuno dei punti comuni alla m ed a questa rigata esce un piano incidente ad m, r, Π, Σ ed appoggiato ad α_1, α_2: comune quindi a Ψ ed M.

c) La M ha a comune con ciascuna delle M_3^5: Φ_1, Φ_2 una rigata del 4° ordine. Infatti: la M seca sopra il piano α_1, ad es., una cubica C^3 avente nel punto $A_1 \equiv \alpha_1 \Sigma$ un punto doppio (n° 31, in fine). È chiaro che le due varietà M, Φ_1 avranno a comune la rigata " delle rette uscenti dai punti della C^3 ed incidenti ad r e Σ „. Queste si appoggiano a Σ nei punti di una cubica C'^3 (piana, con punto doppio A_1) proiezione sopra Σ, dalla retta r della cubica C^3. Un S_4: ω condotto per Σ seca la C^3, fuori di A_1. in un punto P, la r in un punto R: la retta PR costituisce colla cubica C'^3 la completa intersezione di ω colla rigata, la quale risulta pertanto del

(*) Il passaggio per le due rette d_1', d_2' è conseguenza delle condizioni precedenti (come si deduce dal seguito).

(**) Assegnati in Π' tre punti A', B', C', è *unica* la superficie del 5° ordine avente in s' una retta tripla e passante semplicemente per A', B', C' e per le linee ψ'; φ_1', φ_2'; d_1', d_2': il piano $\pi' \equiv A'B'C'$ seca infatti la s in un punto S', la ψ' secondo 5 punti P_1', ..., P_5', le due coniche φ_1', φ_2' secondo coppie di punti P_6', P_7'; P_8', P_9', le due rette d_1', d_2' secondo due punti: P'_{10}, P'_{11}. Si consideri nel piano π' la quintica Q (unica) passante semplicemente per i 14 punti: A', B', C', P_1', ..., P_{11}' ed avente in S' un punto triplo. Un piano σ condotto ad arbitrio per la s' seca — fuori della s' — la ψ' in un punto, ciascuna delle due coniche φ_1', φ_2' iu un punto e la quintica Q in uua coppia di punti. Si immagini la conica passante per questi cinque punti: variando il piano σ nel fascio (s') essa assumerà una ∞^1 di posizioni. Una superficie del 5° ordine la quale abbia la s' quale retta tripla, passi semplicemente per le linee ψ'; φ_1', φ_2'; d_1', d_2' e per i tre punti A', B', C' è secata da π' secondo la quintica Q: di conseguenza sarà costituita dalle ∞^1 coniche di cui sopra (poichè ognuna di esse ha a comune colla superficie due punti tripli (su s') per la superficie, e cinque punti semplici). Quindi, ecc.

4° ordine. (Si è fatta astrazione dalla retta RA_1, la quale descriverebbe, al variare di ω nel fascio (Σ) un fascio (A_1) nel piano A_1r, non appartenente alla M).

Se ne deduce: *Alle rette di* Π *sono omologhe in* Π' *le quintiche sghembe aventi la* s' *quale quadrisecante, appoggiate in quattro punti alla quintica* ψ' *ed in quattro punti a ciascuna delle due coniche* φ_1', φ_2' (*) (**).

66. — Da ogni punto P della $s \equiv \Sigma\Pi$ escono ∞^1 piani del sistema (K): incidenti secondo rette per P ai tre $S_3 : \Sigma, P\alpha_1, P\alpha_2$ ed al piano Pr: costituenti quindi un cono cubico (P) (come si rende manifesto secando con un S_4). *a)* Il cono (P) è secato da Σ secondo un cono quadrico (comune a Σ ed al cono quadrico di 2ª specie " degli ∞^2 piani incidenti ai due S_3 $P\alpha_1$, $P\alpha_2$ ed al piano Pr "). *b)* Ogni retta p incidente ad r, α_1, Σ ed all'S_3 $P\alpha_2$ è congiunta a P da un piano generatore del cono (P). Il cono cubico (P) e la varietà Φ_1 hanno quindi a comune la rigata delle " ∞^1 rette incidenti ad r, α_1, Σ ed all' S_3 $P\alpha_2$ ": rigata cubica giacente nell' S_4 $r\alpha_1$ (n° 12). Ed analogamente per la varietà Φ_2. *c)* Il cono (P) e la Ψ hanno a comune i tre piani incidenti secondo rette per P ai quattro S_3: $\Sigma, \Pi, P\alpha_1, P\alpha_2$ ed al piano Pr.

Gli ∞^2 piani del sistema (K) uscenti dai punti di s costituiscono una forma G del 4° ordine. Infatti: è del 6° ordine (n° 33) la forma degli ∞^2 piani incidenti a due rette s, r ed appoggiati a tre piani $\sigma, \alpha_1, \alpha_2$. Suppongasi che il piano σ giaccia colla s in uno stesso $S_3 : \Sigma$. La forma si spezzerà: 1) nel cono quadrico degli ∞^2 piani uscenti dal punto $S \equiv s\sigma$ e secanti secondo rette per S i due $S_3 : S\alpha_1, S\alpha_2$ ed il piano Sr. 2) nella forma G degli ∞^2 piani che incidono ad r, a Σ secondo rette incidenti alla s; e si appoggiano ad α_1, α_2. Quindi ecc. *a)* L' S_3 Σ è doppio per la G (poichè l'ulteriore intersezione colla G di un S_4 del fascio (Σ) è un cono quadrico). *b)* Un piano incidente a Σ e Π si appoggia alla s loro intersezione: appartiene quindi alla G la varietà Ψ. *c)* Da ogni retta p incidente ad r, α_1, Σ esce un piano della G, comune all' S_3 ps ed all' S_4 $p\alpha_2$. Analogamente da ogni retta incidente ad r, α_2, Σ. Appartengono quindi alla G, le varietà Φ_1, Φ_2. *d)* E finalmente appartengono alla G gli S_3 Δ_1, Δ_2, poichè incidendo a Σ, e quindi ad s, contengono ognuno un fascio di piani della G, di asse la congiungente i punti intersezioni di quell' S_3 con r ed s.

Si deduce dalle considerazioni del presente n°: *Ai punti della retta* $s \equiv \Sigma\Pi$ *sono omologhe in* Π' *le* ∞^1 *cubiche sghembe le quali si appoggiano in due punti alla* s', *e in tre punti alla* ψ' *ed a ciascuna delle due coniche* φ_1'. φ_2'. — *Tale sistema* ∞^1 *di cubiche costituisce una superficie del 4° ordine — omologa alla retta* s *— la quale con-*

(*) La linea del 25° ordine completa intersezione di due superficie del sistema omaloidico in Π': omologhe a due piani α, β di Π, si spezza: 1) nella retta s', da contarsi 9 volte; 2) nella quintica ψ'; 3) nelle due coniche φ_1', φ_2'; 4) nelle due rette d_1', d_2'; 5) nella quintica omologa alla retta $\alpha\beta$.

(**) Assegnati ad arbitrio due punti A', B' in Π': è unica la quintica passante per $A'. B'$ e soddisfacente a quelle condizioni. Assunto invero un punto C', fuori della $A'B'$, è individuata (nota (**) al n° 64) la superficie del 5° ordine avente la s' quale retta tripla, passante per le ψ'; φ'_1, φ'_2; d_1', d'_2 e per i tre punti A', B', C'. Una quintica la quale sechi secondo quaterne di punti le linee s'; ψ'; φ_1', φ'_2 e passi per A' e B' ha con quella superficie un numero di intersezioni maggiore del prodotto degli ordini: giace cioè sulla superficie. Assunto un secondo punto D' e costruita la superficie del 5° ordine relativa alla terna A', B', D', la quintica si otterrà individuata come parte (nota precedente) dell'intersezione delle due superficie.

tiene la s' quale retta doppia e — semplicemente — tutte le altre linee del sistema omaloidico in Π' (*).

67. — Da ogni punto della curva ψ — comune a Π ed alla varietà Ψ' — esce un piano del sistema (K) incidente a Π' (secondo una retta). Poichè tale piano incide a Σ, e contiene una retta incidente ad r, Σ, α_1 — ad es. — ed a Π' (congiungente i punti d'intersezione del piano stesso risp. con r ed α_1): *Ai punti della quintica ψ sono omologhe in Π' le rette che si appoggiano alla retta s' ed alle due coniche φ_1', φ_2'*. E — ricordando che ciascuna delle due coniche ha a comune un punto colla s' —: *Alla quintica ψ è omologa in Π' la rigata del 4^o ordine di cui è direttrice — tripla — la retta s' e direttrice semplice ciascuna delle due coniche φ_1', φ_2', unisecanti la s'*.

68. — Da ogni punto P della conica φ_1 — comune a Π ed alla varietà Φ_1 — (n° 62 *c)*) ovvero: traccia su Π delle ∞^1 rette p incidenti ad r, α_1, Σ e Π, escono ∞^1 piani del sistema (K) costituenti un fascio (p) nell' S_3 comune ai due $S_4\, p\Sigma . p\alpha_2$. *a)* L' S_3 contenente il fascio è incidente a Σ. — *b)* Fra gli ∞^1 piani del fascio uno è incidente a Π, e quindi appartenente alla varietà Ψ (il piano congiungente p alla retta intersezione di Π coll' S_3 contenente il fascio). — *c)* L'S_3 che contiene il fascio ha pure un piano a comune colla Φ_2 (poichè giace in un $S_4(p\alpha_2)$ col piano α_2 ed incide ad r e Σ). Pertanto: *Ai punti della conica φ_1 sono omologhe in Π' le rette che si appoggiano alla retta s', alla quintica ψ' ed alla conica φ_2'*. E — ricordando (n° 64) che la s' è quadrisecante la quintica ψ', che la conica φ_2' si appoggia in un punto alla s' e in tre punti alla ψ' — si potrà concludere senz'altro: *Alla conica φ_1 è omologa in Π' la rigata del 4^o ordine, della quale son direttrici: la retta s' (tripla), la quintica ψ' e la conica φ_2' (semplici)*. (Le due rette d_1', d_2' ne sono generatrici). — Analogamente scambiando i due piani α_1 ed α_2.

69. — Da ogni punto P della retta $d_1 \equiv \Delta_1\Pi$ escono ∞^1 piani del sistema (K) costituenti un fascio nell' $S_3\Delta_1$, di asse la congiungente i punti $P, \Delta_1 r$. Quindi: *Ad ogni punto della retta d_1 è omologa in Π' tutta la retta d_1'*. Analogamente si corrispondono d_2 e d_2'.

70. — $(022)_2$. Assegnati nell'S_5 in modo generico due piani α_1, α_2 e due $S_3\, \Sigma_1, \Sigma_2$, da ogni punto P dell' S_5 esce un solo piano incidente a Σ_1, Σ_2 ed appoggiato ad α_1, α_2 (il piano congiungente P ai due punti che l' S_3 comune agli iperpiani $P\Sigma_1, P\Sigma_2$ seca sopra α_1 ed α_2). La corrispondenza — biunivoca — definita dal sistema $(022)_2$ tra

(*) Può verificarsi — con procedimento affatto analogo a quello tenuto nella nota (**) al n° 64 — che tali condizioni definiscono effettivamente *una* superficie del 4^o ordine. Un piano ω arbitrario seca invero s' in un punto S'; ψ' secondo cinque punti $P_1', \ldots, P_5'$; le due coniche φ_1', φ_2' secondo due coppie di punti P_6', P_7'; P_8', P_9' e le due rette d_1', d_2' secondo due punti P'_{10}, P'_{11}. Si consideri in ω la quartica C^4 avente in S' un punto doppio e passante semplicemente per gli 11 punti $P_1', \ldots P'_{11}$. Ogni superficie del 4^o ordine avente s' quale retta doppia, passante per ψ'; $\varphi_1' \varphi_2'$: e conseguentemente per d_1', d_2' dovrà contenere la C^4. Condotto ora un piano σ ad arbitrio per la s', si immagini la conica passante per i 5 punti — fuori di s' — comuni a σ ed alle ψ'; φ_1', φ_2' e C^4. Variando σ nel fascio (s') ecc.

due $S_3 : \Pi, \Pi'$ può studiarsi con procedimento perfettamente analogo a quello tenuto pel sistema precedente (n[i] 62-69). Ci limitiamo pertanto ad enunciare i risultati cui si giungerebbe: *In un* S_5 *il sistema degli* ∞^3 *piani appoggiati a due piani* α_1, α_2 *ed incidenti a due* $S_3 \Sigma_1, \Sigma_2$ *definisce tra due* $S_3 \Pi, \Pi'$ *una corrispondenza del 5° ordine. Ai piani di* Π *(ad es.) sono omologhe in* Π' *le superficie del 5° ordine aventi a comune due rette doppie* s_1', s_2' *e passanti semplicemente per una curva* ψ' *del 6° ordine, una quartica sghemba di 1ª specie* φ' *e due rette* d_1', d_2' (*). *Le due rette* s_1', s_2' *sono fra loro sghembe; ciascuna di esse è quadrisecante la curva* ψ' *e corda della* φ'*; le due curve* ψ', φ' *hanno sei punti a comune; infine le due rette* d_1', d_2' *sono fra loro sghembe e si appoggiano in un punto a ciascuna delle linee* s_1', s_2', ψ' *e* φ' (**). *Alle rette di* Π *corrispondono in* Π' *le* ∞^4 *curve sghembe del 5° ordine aventi le due rette* s_1', s_2' *quali quadrisecanti, ed appoggiate in quattro punti a ciascuna delle due curve* ψ' *e* φ'.

Indicando con $s_1, s_2; \psi; \varphi; d_1, d_2$ le linee fondamentali in Π, analoghe ordinatamente alle $s_1', s_2'; \psi'; \varphi'; d_1', d_2'$ in Π': *Ai punti della* s_1 *corrispondono in* Π' *le coniche giacenti nei piani del fascio* (s'_2), *appoggiate semplicemente alla* s'_1 *e in due punti a ciascuna delle due curve* ψ' *e* φ' (le coniche cioè che contengono i gruppi di cinque punti intersezioni — fuori della s_2' — dei piani del fascio (s_2') colle linee s_1', ψ', φ'). *Costituiscono queste coniche la superficie del 4° ordine — omologa alla* s_1 *— che ha* s_2' *quale retta doppia e passa semplicemente per le ulteriori linee fondamentali del sistema omaloidico in* Π' $(s_1'; \psi'; \varphi'; d_1', d_2')$. — *Analogamente scambiando* s_1 *con* s_2.

Ai punti della curva ψ *corrispondono le rette incidenti a* s_1', s_2' *ed alla quartica* φ' *— costituenti una rigata del 4° ordine (omologa alla* ψ*) di cui* s_1', s_2' *sono direttrici doppie.*

Ai punti della curva φ *sono omologhe le rette incidenti ad* s_1', s_2' *ed alla curva del 6° ordine* ψ' *— costituenti una rigata del 4° ordine (omologa alla* φ*) di cui* s'_1, s'_2 *sono direttrici doppie.*

Ad ogni punto della d_1 *è omologa in* Π' *tutta la* d_1'. *Analogamente si corrispondono* d_2 *e* d_2'.

(*) Il passaggio per le due rette d_1', d_2' è conseguenza delle condizioni precedenti, come appare dal seguito.

(**) Le due rette s_1', s_2' sono le traccie degli $S_3 \Sigma_1, \Sigma_2$ sopra Π'; ψ' la curva intersezione di Π' colla $M_3^6 \Psi$ " degli ∞^1 piani incidenti a Σ_1, Σ_2, Π ed appoggiati ad α_1, α_2; φ' la curva traccia su Π' della $M_3^4 \Phi$ delle ∞^2 rette incidenti ad $\alpha_1, \alpha_2, \Sigma_1, \Sigma_2$ "; d_1', d_2' le rette comuni a Π' ed agli $S_3 \Delta_1, \Delta_2$ incidenti risp. a $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_1$ e a $\Sigma_1, \Sigma_2, \alpha_2$. Analogamente indicheremo con s_1, s_2; φ; d_1, d_2 le traccie delle varietà Σ_1, Σ_2; Φ; Δ_1, Δ_2 su Π; con ψ la curva comune a Π ed alla M_3^6 " degli ∞^1 piani incidenti a Σ_1, Σ_2, Π' ed appoggiati ad α_1, α_2 ".

RICERCHE INTORNO ALLA VARIAZIONE

DEL

Bufo viridis Laur., del *Bufo mauritanicus* Schlegel

E DEL

Bufo regularis Reuss.

MEMORIA

del Socio

LORENZO CAMERANO

Approvata nell'Adunanza del 28 Febbraio 1904.

" Avec les mathématiques plus largement employées, on verra s'introduire dans les sciences biologiques plus de méthode, plus de rigueur, plus de précision. Pour employer une expression vulgaire, mais significative, on se paiera moins de mots qu'on ne le fait aujourd'hui „.

J.-J. Deschamps, *Principes de la Biologie rationnelle*, " Bull. Soc. Philom. „, Paris, 1902.

In una lettura intorno alle " Ricerche somatometriche in zoologia „ che io ebbi l'onore di fare recentemente al terzo " Convegno nazionale dell'Unione zoologica italiana „, tenutosi in Roma nell'ottobre 1902 (1), io dicevo: " L'indeterminatezza dei dati descrittivi che la maggior parte dei lavori di zoologia sistematica presenta è la ragione precipua per la quale essi riescono di così scarso aiuto per lo studio dei molteplici problemi che le teorie evolutive hanno fatto sorgere intorno ai viventi, problemi che per esser risolti vogliono invece dati formolati nel modo più preciso possibile e sopratutto dati che si possano facilmente comparare fra loro.

Nello studio degli individui, io aggiungevo, i dati che si ricavano dalla misura delle varie loro parti sono i primi e più importanti, non solo perchè le dimensioni di un organo sono la risultante di moltissime cause che hanno agito sull'organo stesso, ma anche perchè costituiscono un elemento importantissimo, e talora l'unico che noi abbiamo, per la comparazione degli individui fra loro, comparazione che deve fornirci gli elementi per determinare la rassomiglianza degli individui stessi e per formare il criterio morfologico, uno dei concetti fondamentali, come è noto, della specie.

Conchiudevo dicendo che per fare lavoro utile per un ulteriore progresso della zoologia sistematica e dello studio del fenomeno della variazione delle forme animali

---

(1) " Bollettino dei Musei di Zool. e Anat. Comp. di Torino „, vol. XVII, n. 431 (1902).

è necessario: 1° Stabilire un piano uniforme di misure per ciascun gruppo di animali; 2° Non limitarsi a dare le misure degli individui di maggiori dimensioni; ma aggiungere quelle delle altre serie di individui studiati, accompagnandole con tutti i dati necessari che possono condurre alla interpretazione delle misure stesse (1).

Per tutte le questioni di indole generale relative alla applicazione del metodo somatometrico da me proposto, della lunghezza base, della costituzione delle serie, dell'aggruppamento del materiale di osservazione ecc., voglia il lettore consultare il mio precedente lavoro: *Sulla variazione del " Bufo vulgaris "* (" Mem. Accad. delle Scienze di Torino ", Ser. II, vol. L, 1900), del quale il presente è una continuazione. Credo utile tuttavia di insistere sopra alcuni punti relativi al metodo stesso e alla sua applicazione.

Scopo del precedente lavoro sul *Bufo vulgaris* e del presente non è di fare uno *studio statistico delle variazioni* nel vero senso della parola; ma di fornire i materiali per tentare di risolvere alcuni punti del fenomeno di variazione; i dati potranno anche essere utili a chi voglia fare uno *studio statistico propriamente detto.*

Non si deve intendere che il metodo da me proposto per esprimere con numeri diverse modalità del fenomeno della variazione sostituisca il metodo della ricerca statistica propriamente detto. Insisto sopra questo punto, perchè qualcuno, forse per non aver io saputo nei precedenti lavori esporre abbastanza chiaramente il mio concetto, ha interpretato il metodo da me proposto come se dovesse sostituire il metodo statistico classico.

Lascio qui in disparte la questione generale se l'applicazione pura e semplice del metodo statistico allo studio della variazione degli animali possa darci realmente quei frutti che taluno spera, sopratutto per quanto riguarda la controversa questione dei limiti della specie, della varietà, malgrado il poco buon risultamento che ne ha tratto l'Antropologia, che l'ha per lungo tempo applicato, tanto che essa ripiglia ora lo studio delle questioni antropologiche, partendo da altre basi. Dico tuttavia che se si vuol fare uno studio statistico della variazione negli animali non vi è modo di uscire dal metodo statistico propriamente detto, dal calcolo delle probabilità, dalla fondamentale teoria dei grandi numeri e via discorrendo.

Il metodo da me proposto e seguito mira anzitutto a determinare per ciascun carattere e per ciascuna specie *i limiti di variazione possibili dei rapporti*; mira a determinare ciò che si potrebbe diro *il campo*, nel quale *è possibile* una variazione dei rapporti stessi per ciascuna specie: mira a determinare i valori estremi della loro variazione nell'ámbito della diagnosi specifica.

Il numero dei valori diversi che il rapporto di un carattere può presentare per una data specie (studiato col metodo del coefficiente somatico), dato il criterio moderno che presiede alla distinzione delle specie, non può essere che relativamente

---

(1) Per quanto riguarda, ad esempio, il *Bufo viridis* Laur. una delle specie che ora ci occupano, io potrei dare qui un lungo elenco di lavori faunistici che trattano della specie in discorso, dallo studio dei quali si dovrebbe ragionevolmente supporre di poter trarre i dati necessarii per farsi un concetto dei caratteri che il *Bufo viridis* presenta nelle diverse località. Essi invece il più delle volte non portano altro che il nome della specie e l'indicazione se essa è comune o rara e, per lo studio della variabilità del *Bufo viridis*, non riescono di nessun aiuto.

limitato. Nel caso che ora ci occupa delle specie del genere *Bufo* si può ritenere che l'esame di qualche centinaio di esemplari, sopratutto se provenienti da località diverse dell'area di distribuzione geografica della specie stessa, mette in evidenza tutti i valori possibili in questione, e per tal modo si determinano i valori estremi. Ora a fare ciò non si richiede nessun lavoro statistico propriamente detto; poichè basta esaminare tanti esemplari quanti la ricerca empirica dimostra necessarî ad ottenere quei due valori estremi della serie dei valori stessi, che non vengono più oltrepassati da nessun individuo, per quanti altri se ne esaminino. Quando ciò è stato ottenuto *i campi di variabilità* dei varî caratteri nelle diverse specie si possono comparare fra di loro e dalla loro comparazione pare a me non si possa negare che ne esca un criterio chiaro della potenzialità a variare dei rapporti delle varie parti fra loro nella stessa specie o fra specie diverse. — Lo studio così fatto concede di dare un valore sicuro ai varî caratteri nei loro rapporti colla *formazione della diagnosi specifica*.

Si dirà: quando si studia una serie anche numerosa di individui di una specie è possibile che in essa non si incontrino che valori o più elevati o più bassi e quindi non si ha alcun criterio sicuro che i valori estremi della serie siano realmente i valori estremi del campo di variazione che si cercano.

Ciò è giustissimo: ma come ho ripetutamente detto, in questo genere di ricerche è d'uopo non *essere impazienti*; è d'uopo ritenere come *provvisorî* i valori estremi, fino a tanto che l'esame successivo di altre serie di individui, mostri, come ho detto sopra, che per quanti nuovi individui si esaminino, non si trovano valori nuovi. Quando si è giunti a questo risultato si riuniscono tutti i valori delle diverse serie in una sola (e ciò si può fare senz'altro se si tratta di valori calcolati col metodo del coefficiente somatico) i di cui termini estremi segneranno i limiti delle variazioni possibili pel carattere che si studia.

Non è certamente necessario avvertire che i valori anormali, od anche quelli che per qualsiasi ragione possono lasciare dubbio che lo siano, vanno esclusi dalla serie e devono essere studiati a parte per determinare bene il modo di interpretarli.

Risulta da quanto si è detto che *l'indice di variabilità* da me proposto indica un fenomeno speciale del variare delle specie e che non può sostituire *l'indice di variazione* del metodo statistico propriamente detto che esprime un fenomeno diverso. Così pure si dica della *media* da me proposta del campo di variazione: ed infine che i *valori estremi* hanno nel procedimento in questione una importanza particolare.

L'indice di variabilità, la media, i valori estremi appartenenti a campi di variabilità stabiliti colle condizioni sopradette, diventano termini paragonabili fra loro per lo studio dello speciale sopradetto fenomeno della variazione.

L'importanza del campo di variazione determinato nel modo che si è detto potrà essere riconosciuta, o negata, secondo i concetti fondamentali dai quali si parte e che riguardano il modo di intendere la specie ed il suo variare.

Per chi considera la specie come qualche cosa di indefinibile esattamente, perchè in movimento di variazione continua per mutamenti minimi, in qualunque direzione; per chi qualunque minima variazione degli individui considera senz'altro come indizio di variazione della specie; per chi in una parola segue l'idea che si venne formando in molti dopo le pubblicazioni darwiniane e che fu concretata nella formola brutale: " non esistono specie „; per costoro, dico, l'importanza della determinazione del campo di variabilità col metodo sopra detto deve apparire nulla. I valori estremi non sono per essi valori limiti; ma sono valori aberranti o sono valori di passaggio ad altre forme. È necessario allora ricorrere al calcolo statistico propriamente detto con tutte le sue modalità per vedere di determinare i valori più probabili per una delimitazione della specie pur non riconoscendo in essa alcun carattere oggettivo.

Come è noto, a questa maniera di intendere le cose, che rispecchia un po' delle teorie fondamentali della variazione del Lamarck e del Darwin, un po' della interpretazione che per molti anni se ne fece, oggi si contrappone un ragionare diverso e si fa strada la convinzione che si è andato troppo oltre nell'affermare senz'altro: *le specie non esistono.*

Si fa strada la convinzione che, pur accogliendo il principio dell'evoluzione delle forme animali, si debba tuttavia considerare la specie come entità oggettivamente definibile e costante, malgrado le variazioni degli individui che la costituiscono, per un tempo determinato. Le variazioni individuali sono come oscillazioni intorno ad un punto, il quale può rimanere costante, come costanti possono rimanere i limiti di oscillazione dei caratteri.

Se si parte da questi concetti fondamentali, è chiaro che la determinazione dei limiti del campo di variabilità è possibile, non solo, ma diventa elemento importante per determinare i limiti fra i quali oscilla la forma della specie in un momento determinato. Pare a me che il metodo sopra proposto per la determinazione del campo di variabilità possa, senza bisogno di altre complicazioni, soddisfare alle esigenze della ricerca.

Aggiungerò che dalle ricerche fatte sulle specie del genere *Bufo* risultano, a mio avviso, argomenti per accogliere la seconda maniera sopra menzionata di intendere la specie e il suo variare.

Quella variabilità che si legge in tante opere descrittive, come così grande e con limiti così vaghi, in realtà appare essere molto minore e contenuta entro a limiti non difficilmente definibili, quando si sottopongono allo studio somatometrico serie abbastanza numerose di individui provenienti dai vari punti dell'area di distribuzione geografica delle specie.

Nel metodo da me proposto ho indicato pure varie sorta di indici: *di frequenza, di mancanza,* ecc. Essi si riferiscono allo studio delle frequenze delle varianti *nell'interno delle serie,* vale a dire costituiscono un mezzo semplice e preciso per esprimere le modalità di distribuzione delle frequenze nelle serie e per sostituire la solita frase di *più o meno abbondante o scarso,* che si suole usare generalmente quando viene opportuno di discutere della frequenza di certe varianti in rapporto a questioni speciali che interessano, ad esempio, le circostanze di vita di una data serie di individui, ecc.

Nel valore da darsi a questi indici è d'uopo aver presente il fatto che è possibile che in una serie le frequenze si presentino casualmente distribuite e perciò prima di conchiudere in modo definitivo è d'uopo esaminare un numero sufficiente di serie numerose di individui, per aver un criterio attendibile della costanza della distribuzione delle frequenze stesse.

Particolarmente utili riescono questi indici nello studio dei vari caratteri di una stessa serie di individui.

Consideriamo, ad esempio, cento individui ♂ di *Bufo vulgaris* nella variazione somatometrica dei loro carattori e nella distribuzione delle frequenze delle varianti di ciascun carattere; se si trova che per la lunghezza massima del capo il maggior numero delle frequenze è pei valori inferiori alla media del campo di variabilità, mentre per la larghezza massima del capo stesso il maggior numero delle frequenze è per i valori superiori alla media (trattandosi di valori di rapporti somatometrici delle parti), questo dato ha certamente un notevole grado di attendibilità, poichè è un fatto che si osserva nella stessa serie di individui. Ripotendosi l'osservazione sopra altre serie sufficientemente numerose di individui, in tempi diversi, si potranno ottenere dati che concederanno conclusioni attendibili da mettersi in rapporto colle cause della prevalenza di certe varianti rispetto alle altre, in rapporto, ad esempio, coll'azione esercitata dalla scelta naturale, ecc.

Anche gli indici in questione, come l'indice di variabilità sopradetto, indicano speciali modalità del fenomeno di variazione, mentre gli indici del calcolo statistico propriamente detto ne indicano altre. Gli uni non possono sostituire gli altri: ma a mio avviso, e gli uni e gli altri, opportunamente usati, possono riuscire utili ad uno studio dei fenomeni in questione più preciso di quanto non sia stato fatto fino ad ora.

***

In un mio precedente lavoro sulla *Variazione del "Bufo vulgaris„ Laur.* ("Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino„, Serie II, vol. L, 1900), ho seguito un determinato piano di misure su ogni individuo della specie sopradetta. Lo stesso piano ho seguito pure nelle presenti ricerche sul *Bufo viridis* Laur., sul *B. mauritanicus* Schlegel e sul *B. regularis* Reuss. — Ho creduto utile tuttavia, per ottenere una precisione migliore, data la natura delle parti e la conservazione del materiale in alcool, di modificare il modo di misurazione delle dita della mano. Se si trattasse di misure da eseguirsi sullo scheletro non vi sarebbe evidentemente dubbio alcuno sul modo di procedere; trattandosi invece di procedere sulla mano rivestita dalle sue parti molli e dovendo i dati dello sviluppo relativo delle dita servire precipuamente ai bisogni delle diagnosi specifiche, la pratica mi ha dimostrato essere conveniente misurare le dita stesse dal loro apice all'angolo che ciascun dito forma col seguente, a cominciare dal dito interno.

***

Del *Bufo viridis*, specie, come è noto, che ha un'ampia distribuzione geografica in Asia, in Europa e in parte anche nell'Africa settentrionale, ho potuto studiare 559 esemplari provenienti da molte località diverse.

Del *Bufo mauritanicus*, specie dell'Africa settentrionale e occidentale ho studiato 77 esemplari, provenienti in maggior parte da varie località del Marocco.

Del *Bufo regularis*, specie che dai cataloghi faunistici appare diffusa, si può dire, in tutta l'Africa ed anche nell'Arabia, io ho avuto a mia disposizione una serie di 125 esemplari provenienti da Wadi Halfa nel Sudan.

È tuttavia da studiarsi la questione se le forme indicate della costa di Guinea, della Sierra Leone ecc. (var. *A.* del *Catalogue of Batr. sal.* del Boulenger, 1882) e quelle dell'Africa meridionale, del Capo di Buona Speranza, ecc. (var. *B.* del sopracitato catalogo), non siano da separarsi in specie distinte. I dati che qui fornisco intorno alle serie di Wadi Halfa, potranno essere, spero, un buon contributo allo studio di tale questione.

***

Statura. — Intorno al modo di disporre i dati numerici relativi alla statura degli individui delle diverse specie di *Bufo*, il lettore potrà consultare il mio precedente lavoro: *Intorno alla variazione del " Bufo vulgaris " Laur.* (" Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino ", Ser. II, vol. L, 1900, pag. 93 e seg.). Nel presente lavoro ho seguito le stesse norme.

I dati numerici della statura sono espressi in millimetri, e vengono disposti in serie per dedurre i limiti del campo di variazione della statura stessa nel periodo della riproduzione.

Bufo viridis.

Serie di individui in amore ♂ e ♀ raccolte contemporaneamente a Giroletto (località non lontana da Torino alle falde delle Alpi): ♂ 50_2-51-52_2-53_2-54_3-55_3-56_4-57_3-58_6-59-60_8-61_4-**(61,50)**-62_3-63_7-64_6-65_3-66-67_2-69-73 — ♀ 53-54-55_3-56-58-59_3-60_3-61-62_3-**(63,50)**-64-65-66-67-68_3-69-70-71-72_2-74.

Serie di individui in amore ♂ e ♀ raccolte contemporaneamente a Moncalieri (presso Torino): ♂ 50-52_2-53_2-54-55_4-56_5-57_9-58_9-59_5-60_{10}-**(60,50)**-61_8-62_4-63_2-64_2-65_4-66_2-70-71 — ♀ 53-55_2-56-58_3-59_3-60_5-61_2-62_4-63_3-**64**-65-66_4-67_3-68-69_3-70_4-71-73-75.

Individui ♂ e ♀ raccolti in amore in una pozza presso Torino: ♂ 56-58-59-61-63 — ♀ 58-60-63-64-65.

Contorni di Sassari. Individui in amore raccolti contemporaneamente: ♂ 70-71_3-73_4-74_3-75_2-77-78_7-79_4-**(80)**-81_6-82_4-83_4-84_3-85_4-86_2-87_3-88-89-90_2 — ♀ 71-74-80_2-81_3-82-83_4-89-**(91,50)**-92-112.

Luras (Sardegna). Individui in amore raccolti contemporaneamente: ♂ 63-66-69-**(78)**-85-90-93 — ♀ 70-72-80.

Individui in amore di Sardegna di località varie. Ghilarza: ♀ 76 — *Località non precisata:* ♀ 77-82-85 — ♂ 69.

Contorni di Catania. Individui in amore raccolti contemporaneamente: ♂ 64-65-66_3-67-68_3-69-70_3-71-**(72,50)**-73-75-81 — ♀ 65-71-74-87.

Bordonaro (Messina): ♂ 68-70-73-74_2-77_2-85 — ♀ 68-72-76-77-82-89.

Milazzo: ♂ 62-70-72-74 — ♀ 68-69-70-71-72-75-81.

Modica: ♂ 66 — ♀ 70-76-88.

Isola di Lipari (La specie venne importata dalla Sicilia 12 o 15 anni fa): ♂ 55_2-58-68 — ♀ 82.

Cosenza: ♂ 58-60-69 — ♀ 73.

Taranto: ♂ 58-60-65-68_2 — ♀ 71-72.

Campobasso: ♂ 61_2-63_2-64-65-67-70-(70,50)-72-73-76-80 — ♀ 64-73-77_3-78.
Roma: ♂ 60-61-63.
Firenze: ♀ 67.
Ancona: ♂ 58-59-61-63-64-66-68 — ♀ 75.
Lago Trasimeno (Isola maggiore): ♂ 60-62-63_2-65_2-67-68-73 — ♀ 65-67-68-69_3-70-78.
Conegliano veneto: ♂ 60.
Marcellise veronese: ♀ 75.
Valle di Non: ♂ 65.
Rovereto: ♀ 68.
Corfù: ♂ (in amore) 57-59-60_5-61-62_3-64_3-65-(65,50)-66_3-67-69-74 — ♂ (id.) 57-58_2-59-61_2-62_2-63_4-67-71-73-77.
Isola di Candia: ♂ 68-70-71-73 — ♀ 65_2-68-70_2-71-73-76_2-81-87.
Gerusalemme: ♂ 74-75_2-76-78-81 — ♀ 82-83-84.
Ain-el-Doueh (Palestina): ♂ 64-74-75 — ♀ 91.
Jaffa: ♂ 64.
Ain-Nana (Libano) 2000 metri s. l. del mare: ♂ 65-68 — ♀ 69.
Siria (località non precisata): ♂ 66-68-73 — ♀ 75-82-83.
Ferzol (Palestina): ♀ 70.
Tunisi: ♂ 70.
Atene: ♀ 72.
Volo (Grecia): ♀ 73.
Tiflis: ♂ 67-73-79-82.
Tokmak: ♂ 81.
Chuldscha (China): ♂ 57.

Riferisco anche i dati di statura seguenti, traendoli da varî autori. Si tratta per lo più di misure di individui isolati di diverse località.

Individui maschi.

Canton Ticino (Fatio (1)) 60 — Piemonte (M. Lessona (2)), dimensioni mass. 75 — Verona (Boulenger (3)) 71 — Provincie venete (De Betta (4)) ♂ e ♀ da 60 a 70 e nel Tirolo da 80 a 85 — Atene (Boulenger (5)) 82 — Duirat (Tunisia) (Boulenger (5)) 72 — R. Ili (Boulenger (5)) 77 — Copenaghen (Boulenger (5)) 72 — Tschinas Turkestan (Boulenger (5)) 78. — Le maggiori dimensioni osservate dal Bedriaga in individui dell'Asia centrale (6) sono di mill. 63-70 $^1/_3$.

(1) *Faune des Vertébrés de la Suisse. Rept. Batr.*, p. 415.
(2) *Studii sugli Anfibi anuri del Piemonte,* " Accad. Lincei „. Roma, 1876-77.
(3) *The tailless Batrachians of Europe.* p. II. Londra, 1898, p. 231.
(4) *Erpetologia delle provincie venete e del Tirolo meridionale,* " Acc. di Agricolt. di Verona „. XXXV, 1857, p. 316.
(5) *Palaeartic and Aethiopian Toads,* " Prooc. Zool. Soc. „, 1880, p. 554.
(6) *Wiss. Resultate der von N. M. Przewalski nach Central Asien,* " Zoolog. „, Theil. III. Amphibien und Reptilien. St. Petersburg, 1898.

Individui femmine.

Canton Ticino (Fatio (1)) 73-83 — Piemonte (M. Lessona (2)) dimens. mass. 82 — Berlino (Boulenger (3)) 79 — Szamos Ujvar (Ungheria) (Boulenger (3)) 85 — Ghardaia (Algeria) (Boulenger (3)) 87 — Mar Morto (Palestina) (Boulenger (3)) 93 — Algeri (Boulenger (4)) 70 — Noukauss, Amou-Daria (Boulenger (4)) 82. — Le maggiori dimensioni osservate dal Bedriaga in individui dell'Asia centrale sono (5) di mill. 72-76.

Bufo regularis.

Statura. — Wadi Halfa (individui in amore raccolti contemporaneamente): ♂ 45-46_2-47_2-48_4-50_2-51_2-53_2-55_5-56-57-**(57,50)**-61-62-63-68-70 — ♀ 50_2-51-54_2-55_4-57-58-60-61-63-**(63,50)**-68_3-69_2-77.

Bufo mauritanicus.

Statura (Individui in amore). — Larache (Marocco): ♂ 87-110; ♀ 96-106-115-122 — Tangeri (id.): ♂ 105-112-118-120_4-128-135; ♀ 114-120_3-126-127-136_2 — Rabat (id.): ♂ 95-105-107-112; ♀ 110_2 — Tetuan (id.): ♂ 80-83-86-91-93_2-95_2-105_2-107-108-112-113-115; ♀ 107-108 — Mazagan (id.): ♂ 94-124-125; ♀ 125-126-130 — Tunisi: ♂ 100-115; ♀ 98-100-115-120.

Considerando complessivamente le serie delle varie località di questa specie si ha:

C. e. ♂ = 80-135 — M = 107,50 C. e. ♀ = 96-136 — M = 116.

Dal confronto dei dati sopradetti vengono messi in evidenza i fatti seguenti:

In Piemonte, che è una delle località continentali estreme nelle quali si trova verso sud-ovest il *Bufo viridis*, i maschi e le femmine di questa specie si trovano nel periodo della riproduzione ad avere una statura oscillante pei maschi intorno alle medie di mm. 60,50-61.50 e per le femmine di mm. 63,50-64, con spiccata maggior frequenza di valori inferiori a queste medie.

I valori: millim. 69 a 75 sono da considerarsi pei maschi come massimi che vengono raramente raggiunti; la stessa cosa si dica pei valori: mm. 74 a 82 per le femmine.

Per le altre località della Valle del Po, per quanto posso giudicare dagli esemplari, in verità poco numerosi, da me esaminati, e dai pochi dati di misure che si possono trarre dai numerosi lavori faunistici che menzionano questa specie per le località anzidette, i valori relativi alla statura media e massima oscillano, con poche differenze, intorno a quelli sopra citati pel Piemonte.

Procedendo per l'Italia peninsulare mi pare che le dimensioni del *Bufo viridis* vadano crescendo portando le medie dei maschi a mm. 66,50 e quelle delle femmine a mm. 71,50.

---

(1) Op. cit.
(2) Op. cit.
(3) *The tailless Batrach.*, op. cit.
(4) *Palaeartic and Aeth. Toads*, op. cit.
(5) Op. cit.

Per la Sicilia si trovano nei maschi di *Bufo viridis* le medie di mm. 68-72,50-76,50 e per le femmine mm. 74,50-76-78,50.

Per la Sardegna le medie dei maschi dànno mm. 78-80 e quelle delle femmine mm. 78-91,50.

In Italia, per quanto ho potuto osservare, il *Bufo viridis* raggiunge le sue maggiori dimensioni in Sardegna. Nei maschi ho osservato la dimensione massima di mm. 90 (colla frequenza = 0,0357) e nelle femmine la dimensione massima di mm. 112 (colla frequenza = 0,0667). Se si confrontano le serie di valori presentate dagli individui piemontesi con quelle degli individui sardi si nota che i valori massimi delle prime corrispondono ai valori minimi delle seconde.

Per la Siria e la Palestina trovo nei maschi i valori medii di mm. 64-69,50-77,50 e nelle femmine mm. 76-79-81.

In un esemplare di Ain el Doueh ho trovato il valore di mm. 91. Il Boulenger dà per una femmina del Mar Morto mm. 93. Si noti che gli individui raccolti ad Ain-Nana nel Libano, a 2000 sul livello del mare presentano invece (valori isolati) pei ♂ mm. 65-68 e per le ♀ mm. 69.

In complesso pare che gli individui della Siria e della Palestina si avvicinano per le dimensioni medie e massime a quelli di Sardegna.

Gli individui delle isole di Candia e di Corfù si avvicinano alle dimensioni di quelli di Sicilia e forse la stessa cosa si può dire per quelli della Grecia, del Tirolo, dell'Ungheria, di Tiflis e dell'Asia centrale.

La dimensione massima segnata dal Boulenger per un ♂ di Copenaghen è di mm. 72 e per una ♀ di Berlino di mm. 79.

Risulta da quanto precede che, nello stato presente delle nostre cognizioni, il *Bufo viridis* raggiunge le sue dimensioni maggiori in Sardegna e le sue dimensioni minori in Piemonte.

Ricerche più estese dimostreranno in seguito l'attendibilità o meno di queste ipotesi e concederanno di tentare la spiegazione delle differenze dei limiti del campo di variazione della statura mettendo questo fatto in rapporto colle circostanze locali.

Del campo di variabilità delle parti nelle diverse specie studiate.

La variabilità maggiore, come risulta dagli specchietti uniti a questo lavoro, è in tutte le specie presentata dall'arto posteriore, nel suo complesso, e in particolar modo dal *piede*. Vengono in seguito l'arto anteriore, il capo coi suoi diametri longitudinali e trasversali (mediani e posteriori) e le parotidi nel loro diametro longitudinale.

In generale i maschi presentano nello sviluppo relativo delle varie parti variabilità spiccatamente maggiore che non le femmine. Nel *B. mauritanicus* tuttavia, per quanto risulta dagli esemplari studiati, le femmine variano per diversi caratteri, come i maschi e per taluni presentano variabilità maggiore.

Nelle quattro specie del genere *Bufo* studiate si notano differenze complessive nella potenzialità a variare dello sviluppo relativo delle parti. Più variabile appare il *B. vulgaris*, seguono il *B. mauritanicus* e il *B. viridis* e per ultimo viene il *B. regularis*. Non credo sia possibile dare una interpretazione di questo fatto, tanto più osservando che pel *B. vulgaris*, pel *B. viridis* e pel *B. mauritanicus* ho potuto studiare serie provenienti da numerosi punti della loro distribuzione geografica, distribuzione, come è noto, molto ampia sopratutto pel *B. vulgaris* e pel *B. viridis*.

La maggiore o minore potenzialità a variare dipende forse da caratteri inerenti alle specie, dalle sue condizioni dietologiche e forse anche potrebbe avere azione nel fenomeno in discorso l'età delle specie stesse (1). Ma per discutere con frutto tali questioni mancano per ora i dati necessarii.

Venendo ad osservazioni più particolareggiate, nel *B. viridis* si nota una complessiva minore variabilità nei ♂ di Corfù rispetto ai ♂ delle altre località. E così pure nelle ♀ di Candia rispetto alle ♀ delle altre località. Ciò è forse in rapporto colla vita della specie in un' isola relativamente ristretta? Anche per rispondere a questa domanda è d'uopo ripetere le osservazioni intorno ad altre serie delle stesse località.

Negli individui molto giovani delle varie specie è notevolmente maggiore che non negli adulti la variabilità dello sviluppo relativo dei diametri trasversali del capo, sopratutto la larghezza del capo all'angolo posteriore dei mascellari, la larghezza del capo a metà degli occhi, il diametro interorbitale e il diametro trasversale maggiore dell'occhio. Nell'accrescimento dell'animale fino all'epoca della riproduzione, la variabilità delle parti sopradette del capo va diminuendo, mentre si fa più manifesta la variabilità delle diverse parti dell'arto posteriore e dell'arto anteriore. Queste parti conservano una spiccata variabilità anche in individui di età relativamente avanzata.

Il paragone della variabilità delle diverse parti, fra le serie studiate, di individui della stessa specie, ma di località diverse, mostra talvolta differenze notevoli. Nei ♂ di *B. viridis*, ad esempio, di Givoletto, la variabilità della lunghezza del piede dà 77, mentre in quelli di Moncalieri si ha appena 41. Le serie studiate di queste località sono assai numerose di individui e perciò si può dare a questa differenza un certo peso, tanto più che una analoga differenza si ha per la variabilità della lunghezza della coscia. Nei ♂ di Givoletto essa è 68, in quelli di Moncalieri appena 37. Nelle femmine delle stesse località si osserva lo stesso fatto per la lunghezza della coscia; nelle ♀ di Givoletto si trova 34; in quelle di Moncalieri solo 28. La stessa cosa si dica per la variabilità della lunghezza del braccio: nelle ♀ di Givoletto 34, in quelle di Moncalieri 28. Per la variabilità dell'avambraccio la cosa è anche più spiccata; nelle ♀ di Givoletto si trova 41; in quelle di Moncalieri solo 16. L'esame dei dati riuniti nelle tabelle degli indici di variabilità uniti a questo lavoro (e in quelle che si riferiscono al *B. vulgaris* e che sono stampate nel mio precedente lavoro sulla variabilità di questa specie) (2) mostrerà molti altri fatti analoghi in serie di individui provenienti anche da località non molto discoste fra loro. Ricerche future condotte sopra serie anche più numerose di quelle ora studiate concederanno forse di precisare meglio le modalità del fenomeno ora indicato, per poterne tentare la spiegazione.

---

(1) DANIELE ROSA, *La riduzione progressiva della variabilità*, ecc. Torino, C. Clausen. 1899.
(2) Op. cit.

Individui in amore	*Indici di variabilità*							
	B. viridis (1)		*B. regular.*		*B. maurit.*		*B. vulgaris* (1)	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀	♂	♀
Lunghezza del capo	28,50	23	34	23	28	25	28	14,50
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	23	21	21	19	48	34	29,50	26
Id. a metà degli occhi	25,50	20,50	21	19	26	22	32,50	26
Id. alle narici	15	11.50	13	10	13	8	11.50	8,50
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	14	19	15	13	15	14	18,50	11
Id. alle narici	11,50	11	10	11	9	14	13	10
Diametro interorbitale	12,50	11.50	14	12	15	15	15	16
Distanza dall'apice del muso alle narici .	15	12	14	12	12	20	15.50	10,50
Id. dalle narici all'occhio	14	10,50	16	11	12	9	13,50	10
Id. dall'occhio al timpano	5,50	7	9	3	10	10	11,50	7
Lunghezza massima delle parotidi . . .	25,50	23.50	29	26	31	34	40	18
Larghezza id. id.	23	17,50	14	11	23	26	18,50	14.50
Lunghezza del braccio	31,50	26	26	25	41	39	39	29
Id. dell'avambraccio	31,50	26.50	19	26	41	39	43.50	28.50
Id. della mano	26	14,50	24	18	22	29	34,50	19
Id. del 1° dito	26	18.50	17	27	13	23	25,50	19
Id. del 2° dito	17,50	12	19	16	19	19	26.50	15
Id. del 3° dito	17,50	14,50	19	16	15	15	34,50	30
Id. del 4° dito	13,50	12.50	15	13	13	12	28	24,50
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	10	10.50	9	7	12	11	16	10
Id. id. id. id. interno .	14	10,50	11	9	11	11	14.50	8
Lunghezza della coscia	47	29	22	32	47	51	51.50	26
Id. della gamba	27	23.50	25	18	34	37	42	42
Id. del piede	57	34	41	20	59	59	68	44.50
Id. del 1° dito	16	14	13	16	17	14	27	27,50
Id. del 2° dito	28	20.50	25	22	18	22	34	21
Id. del 3° dito	33	34	29	38	40	30	54,50	26.50
Id. del 4° dito	41	32,50	24	25	37	33	57	29
Id. del 5° dito	29	20	24	27	25	18	32,50	32
Diametro massimo trasversale dell'occhio	13.50	10,50	20	13	14	20	11	7,50
Id. minimo del timpano	8,50	13,50	14	11	6	11	10,50	8,50
Id. massimo del timpano	11,50	12,50	13	10	10	12	13	7
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	9	10	8	13	11	10	12.50	10.50
Id. id. id. esterno	14,50	11	14	12	8	10	13	8,50
Dist. dall'apice del dito della membr. interd.								
Id. id. dall'apice del 1° dito	17.50	14	18	16	20	17	19,50	14
Id. id. id. 2° dito	28,50	17	19	17	30	22	25,50	12
Id. id. id. 3° dito	24,50	22.50	26	21	39	37	31,50	16.50
Id. id. id. 4° dito	13	16	17	14	17	12	16,50	10
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	24	21,50	18	21	15	22	—	—

(1) Sono segnati qui i valori medii degli indici di variabilità, desunti da tutte le serie, riunite in una serie unica, degli individui studiati.

Bufo viridis.

Della variazione delle parti nelle serie di individui studiati.

Lo studio dei limiti del campo di variazione delle parti dà luogo alle considerazioni seguenti:

Individui in amore (1).

Lunghezza del capo. — La variante minore è 92 e la maggiore è 132. — Nelle femmine si hanno: 86 e 126. Il capo nei maschi è più lungo che nelle femmine. Ciò dipende in massima parte dalla maggior lunghezza della porzione che va *dalle narici all'apice del muso*; nei maschi si ha infatti per questo carattere variante minore 0 e variante maggiore 23 e nelle femmine: var. minore 0 e var. magg. 18.

Minore differenza vi è fra i due sessi per la distanza fra *le narici e l'occhio:* nei ♂ var. minore 17, var. magg. 35; nelle ♀ var. minore 19, var. magg. 36. Così pure il *diametro trasversale massimo* dell'occhio dà nei ♂: var. minore 30, var. maggiore 50; nelle ♀ si ha: var. minore 32, var. magg. 47. Inoltre la distanza *dall'occhio al timpano* presenta nei ♂: var. minore 0, var. magg. 14; nelle ♀: var. minore 0, var. magg. 9. Nella *lunghezza obliqua del capo* troviamo nei ♂: var. minore 94 e var. magg. 133; nelle ♀: var. minore 90 e var. magg. 144 (2).

Larghezza massima del capo ed altri diametri trasversali. — La larghezza del capo misurata agli angoli post. dei mascellari presenta nei ♂ la var. minore 101 e la var. magg. 139; nelle ♀ la var. minore 92 e la var. magg. 142.

La larghezza del capo misurata a metà degli occhi ha nei ♂: var. minore 81, var. magg. 120. nelle ♀: var. minore 82 e la var. magg. 118. La lungh. del capo misurata alle narici ha nei ♀: var. min. 21 e var. magg. 44; nelle ♀: var. minore 19 e var. magg. 34. Il diametro interorbitale dà nei ♂: var. minore 21 e var. magg. 38; nelle ♀: var. minore 19 e var. magg. 35. Ne risulta che nelle ♀ il capo è più corto in complesso che nei ♂; ma tende ad essere posteriormente più largo. A metà del capo la differenza fra i ♂ e le ♀ è minima nella larghezza.

Altezza del capo misurata a metà della regione timpanica. — Nei ♂ si trova variante minore 36, var. magg. 55; nelle ♀: var. minore 35 e var. magg. 55. Altezza del capo misurata alle narici. Nei ♂ var. minore 19. var. magg. 35; nelle ♀: var. minore 19 e var. magg. 34. Come si vede, fra i due sessi non vi è nell'altezza del capo differenza sensibile.

Osservando ora l'andamento della variazione, entro ai limiti estremi sopra menzionati per la specie, nelle serie delle varie località si nota quanto segue (3):

---

(1) I dati numerici che seguono sono 360$^{\text{esimi}}$ somatici e sono senz'altro comparabili fra loro.

(2) Questo maggior valore della ♀ dipende in parte dal maggior sviluppo del diametro trasversale del capo a livello dell'angolo posteriore dei mascellari.

(3) Non è d'uopo ripetere che questi dati non sono da ritenersi definitivi: essi costituiscono un primo materiale per giungere poi, coll'esame di un maggior numero di individui delle stesse località a risultamenti definitivi.

Maschi. — Per la lunghezza totale del capo i valori minori sono presentati dalle serie di Corfù o di Candia, mentre i valori maggiori sono presentati dalle serie di Catania, di Tiflis, Campobasso, Sassari, Siria, Moncalieri: i valori intermedii dalle serie di Givoletto, Messina, Ancona, Roma, Taranto.

Per quanto riguarda la larghezza maggiore del capo si nota che i valori più elevati sono presentati dalle serie di Sassari, Moncalieri, Corfù, Tiflis, Messina, Roma, e in seguito vengono Campobasso, Ancona, Taranto, Candia e per ultimo Catania, che presenta complessivamente i valori minori. Si vede da ciò che lo sviluppo dei due diametri non procede nella stessa direzione nelle serie delle varie località. Confrontando gli specchietti uniti a questo lavoro in cui sono registrate le classi estreme delle serie, si nota anzi per parecchio di esse il fatto che ad un grande sviluppo della lunghezza del capo corrisponde un minore sviluppo della larghezza maggiore; si ha ad esempio:

Maschi in amore di Catania.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 111-132 — Largh. mass.: Cl. estr.: 101-122.

Maschi in amore di Corfù.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 92-111 — Largh. mass.: Cl. estr. 115-138.

Maschi in amore di Messina.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 98-118 — Largh. mass.: Cl. estr. 114-132.

Maschi in amore di Milazzo.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 107-116 — Largh. mass.: Cl. estr. 126-134.

In altre serie si trova uno sviluppo corrispondente di tutti due i diametri, come ad esempio:

Maschi in amore di Tiflis.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 107-126 — Largh. mass.: Cl. estr. 123-138.

Maschi in amore di Sassari.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 92-128 — Largh. mass.: Cl. estr. 111-139.

Maschi in amore di Campobasso.

Lungh. mass. del capo: Cl. estr. 99-124 — Largh. mass. Cl. estr. 112-128.

E via discorrendo.

Altezza del capo nella regione timpanica. — Hanno altezze maggiori le serie seguenti: Tiflis, Messina, Taranto, Ancona, Roma, Sassari, Givoletto, Moncalieri, Candia. Seguono Catania, Milazzo, Campobasso, Siria, Corfù.

Nella regione delle narici hanno maggiori altezze le serie: Givoletto, Tiflis, Taranto, Milazzo, Ancona, Messina, Moncalieri, Corfù. Seguono: Catania, Sassari, Candia, Roma.

Considerando complessivamente la lunghezza, la larghezza massima e le altezze del capo sopradette si nota:

1° Che nei maschi di Catania il capo tende ad allungarsi e a restringersi ed a rimanere poco alto; 2° che nei maschi di Tiflis il capo tende ad allargarsi posteriormente e ad essere più alto invece che ad allungarsi; 3° analoga tendenza si nota nel capo dei ♂ di Corfù; 4° nei ♂ di Moncalieri e Givoletto il capo è relativamente corto; ma largo posteriormente e alto sia anteriormente che posteriormente; lo stesso si può dire per la serie di Sassari.

Diametro trasversale dell'occhio e diametro del timpano. — Non vi sono notevoli differenze nelle varie serie.

Femmine in amore. — La lunghezza maggiore del capo è presentata dalle serie seguenti: Sassari, Catania, Givoletto, Lago Trasimeno, Moncalieri, Corfù, Milazzo, Messina. Vengono in seguito: Siria, Taranto, Candia, Campobasso. — I maggiori valori della larghezza del capo si trovano nelle serie di Messina, Sassari, Milazzo, Givoletto, Moncalieri, Corfù, Campobasso; seguono quelle di Siria, Candia, Catania. — Nel capo delle femmine, contrariamente a quanto venne sopra notato pei maschi, ad un maggior sviluppo della lunghezza corrisponde in generale un maggior sviluppo della larghezza massima.

I valori maggiori dell'altezza del capo nella regione timpanica sono presentati dalle serie seguenti: Sassari, Givoletto, Trasimeno, Moncalieri, Milazzo, Taranto; seguono: Messina, Corfù, Siria, Campobasso, Candia.

Per ciò che riguarda l'altezza maggiore del capo alla regione delle narici vengono in prima linea le serie di Moncalieri, Givoletto, poi quelle di Sassari, Catania, Candia, Corfù, Siria, Trasimeno, e poi ancora Milazzo, Messina, Campobasso, Taranto.

In complesso, il capo delle ♀ di Sassari, Givoletto e Moncalieri, appare più grosso che non nelle altre; mentre meno sviluppato si mostra nel suo insieme il capo delle ♀ di Candia, di Siria.

Diametro trasversale dell'occhio e diametri del timpano. — Le serie non presentano differenze notevoli, salvo per i diametri magg. e minore del timpano, che negli individui di Sassari possono essere notevolmente minori, discendendo fino a 5 e a 7; mentre nelle altre serie stanno al disopra di un *minimum* di 10.

Giovani. — Le proporzioni delle varie parti del capo sono notevolmente diverse da quelle degli individui in amore e la differenza è in complesso più spiccata, come agevolmente si comprende, negli individui da poco metamorfizzati che non negli altri.

Giovani e adulti	Lunghezza del capo	Larghezza del capo agli angoli dei mascellari	Altezza del capo alla regione timpanica	Altezza del capo alle narici	Diametro trasversale dell'occhio	Dall'apice del muso alle narici	Diametro massimo del timpano	Membrana timpanica non visibile	Lunghezza delle parotidi	Larghezza delle parotidi
	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
Siria, giovani, lungh. base da mill. 11 a 20. . . .	134,50	128	55	33,50	56,50	min.	(2)	(2)	(3)	(3)
Id. id. da 30 a 50	100,50	127,50	44	27,50	47,50	9	11	0	79,50	43,50
Id. id. ♂ in amore . .	108	121	42,50	25	40	10	16	0	73,50	36,50
Id. id. ♀ id. . .	98,50	109	43	25	41	6	15	0	76	38
Torino, giovani, lungh. base da mill. 20 a 40 . .	126	129,50	56,50	29	50	10	12	0	74	32
Id. ♂ in amore di Givoletto	102	120	46,50	28	38,50	12,50	17,50	0	73,50	30
Id. ♂ in amore di Moncalieri	108,50	125	44	25,50	42,50	19	11	0	76,50	31,50
Id. ♀ in amore di Givoletto	106,50	123	48,50	27	40,50	8	15,50	0	71	32,50
Id. ♀ in amore di Moncalieri	105	120,50	44	27	40	4	16	0	72,50	29
Sassari, giov., lungh. base da mill. 30 a 50 . .	104,50	121	46,50	27	46	9	11	7	80	34,50
Id. id. ♂ in amore . .	110	125	47	24	40,50	10	17	0	81	41,50
Id. id. ♀ in amore . .	112	131	49,50	26	40,50	9,50	14,50	0	82,50	42
Catania, giov., lungh. base da mill. 30 a 50 . .	122,50	126,50	50	28,50	42	6	12,50	2	78	36,50
Id. id. ♂ in amore . .	121,50	111,50	44	24,50	40	4	16	0	82,50	38,50
Id. id. ♀ in amore . .	111	120,50	42,50	26	38	1,50	14,50	0	79	44
Taranto, giov., lungh. base da mill. 38 a 43 . .	118,50	128,50	49	26,50	47	16	9	0	77,50	36,50
Id. id. ♂ in amore . .	110	119	46	24	41	12	14	0	90,50	34,50
Id. id. ♀ in amore . .	103	123,50	48	25	40,50	7,50	14	0	80,50	44,50

Appare chiaramente dallo specchietto sopra riferito come il capo negli individui molto giovani sia più grosso che negli adulti; la differenza è di già notevolmente diminuita quando il giovane si avvicina nella lunghezza base a 50 mm.

Mentre nei giovani diminuiscono, col crescere dell'animale, la lunghezza, la larghezza e l'altezza del capo, pigliano sviluppo altre parti e particolarmente la porzione del capo che è allo innanzi delle narici, cioè aumenta la lunghezza che va dall'apice del muso alle narici stesse.

Si noti pure come questa distanza nelle ♀ in amore sia minore che nei ♂, conservando le ♀ a questo riguardo carattere di giovane.

Il diametro trasversale dell'occhio viene, col crescere dell'animale, a trovarsi notevolmente minore; mentre invece aumenta quello del timpano. Si noti a questo

(1) Valori medii del campo di variazione in 360esimi somatici.

(2) Negli esemplari giovanissimi di Siria che io ho studiato la membrana timpanica o è invisibile o appena; ma non abbastanza da concedere una misura sicura.

(3) Negli esemplari giovanissimi di Siria da me studiati le parotidi sono appena accennate

proposito che negli individui giovanissimi la membrana timpanica non è visibile o appena.

Si noti inoltre come i ♂ in amore di Catania conservino il carattere giovanile della lunghezza notevole del capo; mentre in essi è avvenuta una diminuzione fortissima della larghezza massima e mentre per gli altri caratteri del capo le cose sono procedute nell'accrescimento in modo normale.

Parotidi. — La differenza di sviluppo in lunghezza delle parotidi fra i ♂ e le ♀ in amore appare dai dati seguenti, per le serie delle varie località.

Classi estreme.

Catania	Lungh. mass.	♂ 71-94,	♀ 73-83	—	Largh. mass.	♂ 31-46,	♀ 39-49
Taranto	„ „	„ 69-112	„ 75-88	—	„ „	„ 26-43	„ 38-51
Sassari	„ „	„ 70-92	„ 69-96	—	„ „	„ 32-51	„ 35-49
Campobasso	„ „	„ 70-92	„ 70-84	—	„ „	„ 27-43	„ 33-42
Moncalieri	„ „	„ 63-90	„ 63-82	—	„ „	„ 24-39	„ 22-36
Givoletto	„ „	„ 57-90	„ 54-88	—	„ „	„ 21-39	„ 26-39
Lago Trasimeno	„ „	„ 72-89	„ 68-77	—	„ „	„ 34-44	„ 31-42
Messina	„ „	„ 75-89	„ 79-90	—	„ „	„ 30-39	„ 32-40
Milazzo	„ „	„ 72-85	„ 73-89	—	„ „	„ 34-38	„ 31-42
Siria	„ „	„ 62-85	„ 69-83	—	„ „	„ 29-44	„ 30-46
Corfù	„ „	„ 68-84	„ 67-92	—	„ „	„ 23-38	„ 23-43
Candia	„ „	„ 69-77	„ 71-82	—	„ „	„ 29-35	„ 25-41
Tiflis	„ „	„ 75-102	„ —	—	„ „	„ 36-49	„ —
Ancona	„ „	„ 79-89	„ —	—	„ „	„ 38-44	„ —

Nelle serie di Catania, Taranto, Campobasso, Moncalieri, Givoletto, Lago Trasimeno, Siria, la lunghezza delle parotidi è spiccatamente maggiore nei ♂ che non nelle ♀. Nelle serie invece di Sassari, Messina, Milazzo, la lunghezza è leggermente superiore nelle ♀, e nella serie di Corfù la cosa è anche più spiccata. — Il diametro trasversale massimo è per contro di valore più elevato nelle femmine delle serie di Catania, Taranto, Messina, Milazzo, Siria, Corfù, Candia, mentre è meno elevato che nei ♂ nelle serie di Sassari, Campobasso, Moncalieri, Trasimeno. Nelle ♀ vi è quindi la tendenza nelle parotidi a compensare col maggior diametro in larghezza la minore lunghezza rispetto ai ♂.

Il maggior sviluppo in lunghezza delle parotidi nei ♂ è dato dalle serie di Tiflis, Taranto, Catania, e il minor sviluppo da quelle di Corfù e di Candia. Nelle ♀ il maggior sviluppo delle parotidi in lunghezza è dato dalle serie di Sassari, Messina, Taranto, Milazzo, Candia, e il minore dalla serie del Lago Trasimeno.

Giovani. — Negli individui giovanissimi le parotidi sono appena accennate e non si può procedere a misure sicure: sono invece ben sviluppate negli individui che hanno raggiunto una lunghezza base da 20 mm. a 40.

Nella maggior parte delle serie di Torino, Sassari, Catania, Taranto, le parotidi degli individui giovani sono meno sviluppate che nei ♂ in amore. Nella serie di Siria si osserva invece il fatto inverso. Nell'un caso e nell'altro le differenze sono tuttavia poco spiccate.

Braccio — Avambraccio — Mano. — In tutte le serie queste tre parti presentano le varianti maggiori nei ♂ che non nelle ♀, sopratutto per ciò che riguarda il braccio. Si osservano tuttavia differenze notevoli fra le serie delle diverse località.

Classi estreme.

Givoletto. Lungh. del braccio, ♂ 110-152, ♀ 111-144 — Id. dell'avambraccio, ♂ 71-114, ♀ 78-118 — Id. della mano. ♂ 79-111, ♀ 82-100.

Sassari. Lungh. del braccio, ♂ 115-149, ♀ 109-140 — Id. dell'avambraccio, ♂ 85-106, ♀ 82-102 — Id. della mano, ♂ 75-99, ♀ 77-96.

Messina. Lungh. del braccio, ♂ 122-143, ♀ 110-130 — Id. dell'avambraccio, ♂ 87-106, ♀ 81-95 — Id. della mano. ♂ 85-97, ♀ 84-95.

Moncalieri. Lungh. del braccio, ♂ 111-145, ♀ 97-124 — Id. dell'avambraccio, ♂ 79-109, ♀ 74-89 — Id. della mano, ♂ 82-104, ♀ 76-90.

Candia. Lungh. del braccio, ♂ 123-137, ♀ 111-128 — Id. dell'avambraccio, ♂ 95-101, ♀ 84-95 — Id. della mano, ♂ 88-98, ♀ 82-90.

Siria. Lungh. del braccio, ♂ 118-138, ♀ 104-123 — Id. dell'avambraccio, ♂ 84-102, ♀ 74-88 — Id. della mano, ♂ 82-102, ♀ 75-89.

Taranto. Lungh. del braccio, ♂ 122-133, ♀ 122-125 — Id. dell'avambraccio, ♂ 85-99, ♀ 85-96 — Id. della mano, ♂ 83-90, ♀ 85-91.

Milazzo. Lungh. del braccio, ♂ 122-129, ♀ 115-125 — Id. dell'avambraccio, ♂ 87-100, ♀ 75-87 — Id. della mano, ♂ 87-98, ♀ 63-91.

Trasimeno. Lungh. del braccio, ♂ 108-139, ♀ 122-125 — Id. dell'avambraccio, ♂ 89-99, ♀ 85-96 — Id. della mano, ♂ 83-99, ♀ 85-91.

Ancona. Lungh. del braccio, ♂ 126-148 — Id. dell'avambraccio, ♂ 87-101 — Id. della mano, ♂ 83-97.

Catania. Lungh. del braccio, ♂ 120-139, ♀ 104-117 — Id. dell'avambraccio, ♂ 69-101, ♀ 76-83 — Id. della mano, ♂ 74-98, ♀ 81-83.

Tiflis. Lungh. del braccio, ♂ 118-148 — Id. dell'avambraccio, ♂ 88-109 — Id. della mano. ♂ 83-105.

I ♂ e le ♀ di Givoletto presentano le varianti maggiori. Le varianti minori si trovano in esemplari delle serie di Corfù e di Campobasso, pel braccio nei ♂, nelle serie di ♂ di Catania per l'avambraccio e così pure per la mano. — Per le ♀ le varianti minori si trovano pel braccio nelle serie di Corfù e di Moncalieri, per l'avambraccio pure in esse e in quella di Siria, e per la mano in quelle di Milazzo, del Trasimeno, di Siria e di Moncalieri.

Nei giovani la lunghezza del braccio, dell'avambraccio e della mano è minore che negli adulti, come appare dallo specchietto seguente. La differenza fra i giovani e le ♀ in amore è minore che non fra i primi ed i ♂.

Valori medii in 360^{esimi} somatici del campo di variazione.

Giovani ed adulti	Lunghezza del braccio	Lunghezza dell'avambraccio	Lunghezza della mano	Lunghezza della coscia	Lunghezza della gamba	Lunghezza del piede	Membr. interdigit.-destra dall'apice del 1° dito	Id. dall'apice del 2° dito	Id. dall'apice del 3° dito	Id. dall'apice del 4° dito
Siria, giov., lungh. base da mill. 11 a 20 .	106	78	85,50	136	122	198	—	—	—	—
Id. id. da 30 a 50 .	117	80	84	133,50	129	205,50	31	43	62,50	21
Id. id. ♂ in amore . .	128	93	92,50	145,50	134	227	33	42	64,50	17
Id. id. ♀ in amore . .	113,50	81	82	131,50	125	198,50	30	43,50	60	17,50
Torino, giovani, lungh. base, da mill. 20 a 40	113	82,50	91	136,50	135	212,50	32	48,50	76,50	25,50
Id. ♂ in am., Givoletto	131	92,50	95	137,50	136	250	36,50	47	66	13
Id. ♂ in am., Moncalieri	128	94	93	148	133	229	35	46,50	65	14
Id. ♀ in am., Givoletto	127,50	98	91	134,50	126	213	32	47	66,50	20
Id. ♀ in am., Moncalieri	110,50	81,50	83	129,50	119,50	216	32	43,50	62,50	18,50
Sassari, giovani, lungh. base, da mill. 30 a 50	117	80	84	133,50	129	205,50	34	48,50	69,50	21,50
Id. id. ♂ in amore . .	132	95,50	87	140	133	233,50	32,50	42	81,50	14,50
Id. id. ♀ in amore . .	124,50	92	86,50	136	124,50	221	33,50	46,50	69	18,50
Catania, giovani, lungh. base, da mill. 30 a 50	117	80	87,50	122,50	116	204	27,50	46	69,50	20,50
Id. id. ♂ in amore . .	129,50	85	86	141	135	229	32	45,50	64,50	16
Id. id. ♀ in amore . .	110,50	79,50	82	130,50	117	210,50	31	41,50	61,50	18,50
Taranto, giovani, lungh. base, da mill. 38 a 43	124	85,50	82	128,50	120	200	31	47	66,50	19,50
Id. id. ♂ in amore . .	127,50	87	86,50	135,50	127	224,50	32,50	38	65	6,50
Id. id. ♀ in amore . .	123,50	90,50	88	138,50	125	209	31,50	35	63	14

Il 1° dito della mano ha uno sviluppo maggiore in lunghezza nelle ♀ che non nei ♂, come appare dai valori medii seguenti del campo di variazione delle serie studiate:

Valori medii ♂ 37-39,50-40,50$_3$-42,50
" " ♀ 39,50-42-42,50-43-44,50.

Meno spiccata è la differenza pel 2° dito della mano:

Valori medii ♂ 31,50-32-33-34,50$_2$-36
" " ♀ 25-32,50-35-35,50-36;

e così pure si dica pel 3° dito:

Valori medii ♂ 42-42,50$_3$-44,50-46,50
" " ♀ 39,50-42-44-45-47.

Più sviluppato può essere nelle ♀ che nei ♂ il 4° dito:

Valori medii ♂ 28,50-29$_2$-30,50-31
" " ♀ 29-31-31,50-32-35,50.

Coscia, gamba, piede. — La comparazione di queste tre parti nei ♂ e nelle ♀ per ciò che riguarda le classi estreme delle serie, dà lo specchietto seguente:

Givoletto. Lungh. della coscia, ♂ 104-171, ♀ 118-151 — Id. della gamba, ♂ 120-152, ♀ 116-136 — Id. del piede, ♂ 212-288, ♀ 195-231.

Moncalieri. Lungh. della coscia, ♂ 130-166, ♀ 116-143 — Id. della gamba, ♂ 118-148, ♀ 108-131 — Id. del piede, ♂ 209-249, ♀ 194-238.

Corfù. Lungh. della coscia, ♂ 131-162, ♀ 125-164 — Id. della gamba, ♂ 123-146, ♀ 115-138 — Id. del piede, ♂ 214-264, ♀ 197-242.

Sassari. Lungh. della coscia, ♂ 120-160, ♀ 119-153 — Id. della gamba, ♂ 112-154, ♀ 112-137 — Id. del piede, ♂ 209-258, ♀ 202-240.

Catania. Lungh. della coscia, ♂ 123-159, ♀ 124-137 — Id. della gamba, ♂ 123-147, ♀ 112-131 — Id. del piede, ♂ 206-252, ♀ 203-218.

Siria. Lungh. della coscia, ♂ 133-158, ♀ 117-146 — Id. della gamba, ♂ 124-144, ♀ 111-139 — Id. del piede, ♂ 209-245, ♀ 178-219.

Candia. Lungh. della coscia, ♂ 148-153, ♀ 122-139 — Id. della gamba, ♂ 134-148, ♀ 118-139 — Id. del piede, ♂ 236-243, ♀ 195-216.

Messina. Lungh. della coscia, ♂ 123-153, ♀ 126-153 — Id. della gamba, ♂ 126-143, ♀ 112-133 — Id. del piede, ♂ 222-249, ♀ 201-234.

Tiflis. Lungh. della coscia, ♂ 132-150 — Id. della gamba, ♂ 123-141 — Id. del piede, ♂ 207-242.

Milazzo. Lungh. della coscia, ♂ 126-149, ♀ 115-139 — Id. della gamba, ♂ 122-144, ♀ 102-125 — Id. del piede, ♂ 209-236, ♀ 191-235.

Ancona. Lungh. della coscia, ♂ 120-148 — Id. della gamba, ♂ 126-138 — Id. del piede, ♂ 224-242.

Taranto. Lungh. della coscia, ♂ 127-144, ♀ 135-142 — Id. della gamba, ♂ 122-132, ♀ 123-127 — Id. del piede, ♂ 216-233, ♀ 200-218.

Lago Trasimeno. Lungh. della coscia, ♂ 126-143, ♀ 113-129 — Id. della gamba, ♂ 122-134, ♀ 113-120 — Id. del piede, ♂ 211-242, ♀ 193-212.

Campobasso. Lungh. della coscia, ♂ 118-142, ♀ 122-143 — Id. della gamba, ♂ 118-137, ♀ 108-131 — Id. del piede, ♂ 217-252, ♀ 194-238.

Non sempre le varianti maggiori sono, per la coscia, presentate dai ♂: mentre è spiccata la maggior lunghezza in tutte le serie della gamba dei ♂ rispetto a quella delle ♀. La stessa cosa si dica pel piede.

Nei giovani, come si vede dallo specchietto della pagina precedente, lo sviluppo della coscia è minore che negli adulti, con maggior differenza rispetto ai ♂ che non alle ♀. Per la tibia vi è maggior variazione nelle diverse serie, pur presentandosi in generale analogo andamento nello sviluppo. Nel piede lo sviluppo maggiore negli adulti è spiccato, sempre tuttavia più nei ♂ che nelle ♀.

Lo sviluppo delle dita del piede procede nel modo seguente, tenendo conto dei valori medii del campo di variazione delle serie:

1° dito. *Valori medii* ♂ 37-39_3-40_2 — ♀ 36,50-37,50-38,50-39-39,50.
2° dito. „ „ ♂ 61-65.50_2-66-72,50-73 — ♀ 58-58,50_2-60_2.
3° dito. „ „ ♂ 96-98-100,50-101,50-105.50-108,50 — ♀ 91,50-92-93-93,50-96.
4° dito. „ „ ♂ 148-149-150-151-153-155 — ♀ 133,50-137,50-141-145,50-147.
5° dito. „ „ ♂ 88-95,50-98-99-99,50_2 — ♀ 84,50-87,50-88,50-89-95,50.

Ne risulta che nelle femmine lo sviluppo di lunghezza delle dita dei piedi è spiccatamente inferiore che nei maschi per ciò che riguarda il 2°, 3° e 4° dito: minor differenza vi è nel 1° dito e nel 5°.

Lo sviluppo dei tubercoli palmari procede nel modo seguente, tenendo conto dei valori medii delle serie:

Tubercolo palmare mediano, ♂ 17,50-19,50-20-20,50-21,50-22,50
" " " ♀ $17,50_2$-19,50-20-20,50
" " esterno, ♂ $11,50_2$-12-$14,50_2$-15,50-16,50
" " " ♀ 10-11-13_2.

La differenza fra i due sessi pel tubercolo palmare mediano è piccola, con maggior sviluppo tuttavia nei ♂. Pel tubercolo palmare esterno il maggior sviluppo nei ♂ è notevolmente spiccato.

I valori medii del campo di variazione delle serie della lunghezza dei tubercoli plantari procedono come segue:

Tubercolo plantare esterno, ♂ 8,50-9,50-10,50-11-12-12,50
" " " ♀ 8,50-10_2-11-11,50
" " interno, ♂ 17-19_3-20,50-32
" " " ♀ 16-18-19-20_2.

Per questi tubercoli, vi è maggior sviluppo del tubercolo interno nei ♂ che non nelle ♀.

Nei giovani i tubercoli palmari e plantari presentano dimensioni poco dissimili da quelle degli adulti, pur essendo leggermente minori.

Le distanze dall'apice delle dita delle membrane interdigitali dei piedi procedono nelle serie coi seguenti valori medii:

Distanza dall'apice del 1° dito. ♂ 32-32,50-34,50-35_2-36,50 — ♀ 30,50-32_2-$33,50_2$.
" " 2° dito, ♂ 42_2-45,50-46-46,50-47 — ♀ $43,50_2$-$46,50_2$-47.
" " 3° dito, ♂ $64,50_2$-65-66_2-81,50 — ♀ 58,50-62,50-66,50_2-69.
" " 4° dito, ♂ 13-14-14,50-16-17_2 — ♀ 12-13-14-18-20.

Si vede da quanto precede che le dita nelle ♀ sono rivestite per più lungo tratto dalla membrana interdigitale che non nei ♂, e quindi in esse molto probabilmente il piede colla sua forma meno lunga (nelle dita) ma presentante una maggior superficie di palmatura, è migliore organo di locomozione acquatica che non nei ♂. Ciò è forse in rapporto colle note modalità dell'accoppiamento e della deposizione delle uova della specie che ci occupa e col fatto dell'ingrossarsi assai del corpo della ♀ pel grande numero delle uova, prima della deposizione loro.

Nei giovani non si notano, in complesso, grandi differenze, rispetto agli adulti, nello sviluppo delle membrane interdigitali. In alcune serie, come si vede dallo specchietto dato precedentemente, crescendo l'animale, lo sviluppo della membrana diminuisce, in altre aumenta. È possibile che ciò dipenda dalle condizioni speciali in cui si sviluppano i girini, vale a dire la maggiore o minore profondità od ampiezza delle acque ed anche dal loro essere stagnanti o più o meno fortemente correnti.

I valori medî del campo di variazione della ripiegatura tarsea procedono nelle serie nel modo seguente:

♂ 52-53-56,50_2-59 — ♀ 50_2-51-52,50-53,50_2.

Ciò è in rapporto colle differenze di sviluppo del piede nei due sessi.

Bufo regularis.

Dai dati numerici riuniti nello specchietto che si riferisce a questa specie unito a questo lavoro risulta quanto segue:

La lunghezza del capo è un po' maggiore nei ♂ che non nelle ♀. Essa è poi notevolmente maggiore negli individui giovani che negli adulti. — La larghezza massima del capo è invece eguale nei due sessi, mentre è spiccatamente maggiore nei giovani. — Gli altri diametri trasversali del capo sono poco diversi nei due sessi. L'altezza del capo alla regione timpanica è un po' maggiore nei ♂ che nelle ♀; mentre è quasi eguale l'altezza alle narici. Le due misure dell'altezza dànno valori medî notevolmente più elevati nei giovani. — Piccole differenze presentano pure le misure delle altre parti del capo nei due sessi, sempre tuttavia con valori un po' più elevati pei ♂. Il diametro trasversale dell'occhio è maggiore nei ♂ che nelle ♀ ed è molto maggiore poi nei giovani.

Parotidi. — Esse sono nei loro due diametri leggermente più grosse e lunghe nei ♂ che nelle ♀.

Braccio, avambraccio, mano. — Il braccio è più lungo nei ♂ che nelle ♀. Nei giovani la lunghezza è presso a che eguale a quella delle ♀. Così si dica per l'avambraccio e per la mano, quantunque la differenza fra ♂ e ♀ sia meno spiccata. Piccole differenze in lunghezza presentano nei due sessi le dita della mano.

Coscia, gamba, piede. — La coscia è di lunghezza presso a che eguale nei due sessi: essa è un po' più lunga nei giovani.

La gamba nei ♂ e nei giovani è egualmente lunga un po' più che nelle ♀. Il piede è notevolmente più lungo nei ♂ che nelle ♀. Nei giovani è più lungo che nei ♂. Le dita sono in complesso un po' più lunghe nelle ♀ che nei ♂.

I *tubercoli palmari* presentano nei due sessi piccole differenze: i tubercoli plantari sono più sviluppati nelle ♀ che nei ♂. Il tubercolo plantare interno è nei giovani presso a che come nelle ♀. L'esterno invece è un po' più sviluppato nei ♂.

Lo sviluppo delle membrane interdigitali è poco diverso nei ♂, nelle ♀ e nei giovani.

In complesso, dalle serie di *B. regularis* studiate, risulta ch'e in questa specie, le differenze di dimensioni relative delle varie parti fra ♂, ♀ e giovani sono minori che non nel *B. viridis*.

Bufo mauritanicus.

Non molto spiccate sono le differenze fra ♂ e ♀ per ciò che riguarda le misure longitudinali e trasversali del capo. I ♂ presentano valori medii leggermente più elevati delle ♀. — L'occhio è un po' più grande nei ♂ che nelle ♀; maggiore ancora nei giovani. — Piccola differenza vi è fra i due sessi nelle parotidi.

Il braccio e l'avambraccio dànno valori medii superiori nei ♂ che nelle ♀. La mano invece dà valori più elevati per le ♀. Nella lunghezza delle dita della mano non vi sono differenze notevoli fra i due sessi, salvo pel 3° dito, che è più lungo nelle ♀.

Le misure dell'arto posteriore nelle varie sue parti dànno valori medii poco dissimili nei due sessi. — Le membrane interdigitali appaiono tuttavia più sviluppate nelle ♀ che nei ♂.

* * *

L'esame degli indici di frequenza mette in evidenza alcune modalità del fenomeno di variazione di cui si è parlato nel capitolo precedente.

Bufo viridis. — *Lunghezza del capo e sua larghezza massima.*

Lunghezza del capo nei ♂.

Givoletto.	M = 102	— F < M = 0.1129	— F > M = 0,7903
Moncalieri.	„ = 108,50	— „ = 0,3333	— „ = 0,6667
Corfù.	„ = 101.50	— „ = 0.3182	— „ = 0.6818
Catania.	„ = 121.50	— „ = 0,4118	— „ = 0.5882
Sassari.	„ = 110	— „ = 0,5789	— „ = 0,3158
Siria.	„ = 108	— „ = 0,6250	— „ = 0,3750

Lunghezza del capo nelle ♀.

Givoletto.	M = 106,50	— F < M = 0,6129	— F > M = 0,3871
Moncalieri.	„ = 105	— „ = 0,6154	— „ = 0,3077
Corfù.	„ = 100,50	— „ = 0,2308	— „ = 0,7692
Sassari.	„ = 112	— „ = 0,5500	— „ = 0,4000
Candia.	„ = 100,50	— „ = 0,5455	— „ = 0,4545

Larghezza del capo nei ♂.

Givoletto.	M = 120	— F < M = 0.2419	— F > M = 0,6452
Moncalieri.	„ = 125	— „ = 0.3718	— „ = 0.6026
Corfù.	„ = 126,50	— „ = 0,8636	— „ = 0.1364
Catania.	„ = 111,50	— „ = 0,8235	— „ = 0,1765
Sassari.	„ = 125	— „ = 0,4561	— „ = 0,4561
Siria.	„ = 121	— „ = 0,5000	— „ = 0.5000

Larghezza del capo nelle ♀.

Givoletto.	M = 123	— F < M = 0,8065	— F > M = 0,1935
Moncalieri.	„ = 120,50	— „ = 0,4872	— „ = 0,5128
Corfù.	„ = 122.50	— „ = 0,2154	— „ = 0,7846
Sassari.	„ = 131	— „ = 0,4500	— „ = 0,5000
Candia.	„ = 117,50	— „ = 0,5455	— „ = 0,4545.

Da questi dati si osserva che nei ♂ di Givoletto, Moncalieri, Corfù, la lunghezza del capo superiore alla media è presentata da un notevole maggior numero di individui che non quella inferiore, e così si dica per gli esemplari di Givoletto e di Moncalieri, anche per la larghezza massima del capo stesso. — Negli individui ♂ di Corfù sono più frequenti gli esemplari con valori inferiori alla media per la larghezza del capo. — Nelle ♀ di Givoletto e Moncalieri prevalgono per la lunghezza del capo invece i valori inferiori alla media: prevalgono pure sulle ♀ di Givoletto per la larghezza del capo, mentre in quelle di Moncalieri sono quasi egualmente numerosi gli individui con valore inferiore e quelli con valori superiori.

Negli esemplari ♂ di Sassari e di Siria predominano per la lunghezza del capo i valori superiori alla media, mentre per la larghezza massima le due serie di valori sono presso a che eguali per la loro frequenza.

Per le ♀ di Sassari e di Candia si dica la stessa cosa per i due diametri.

Distanza dall'apice del muso alle narici nei ♂.

Givoletto.	M = 12,50 —		F < M = 0,5000 —	F > M = 0,5000
Moncalieri.	„ = 12 —	F = M = 0,2179 —	„ = 0,2821 —	„ = 0,5000
Catania.	„ = 4 —		„ = 0,7647 —	„ = 0,2353
Sassari.	„ = 10 —		„ = 0,3333 —	„ = 0,6140
Corfù.	„ = 10,50 —		„ = 0,4545 —	„ = 0,5455
Siria.	„ = 10 —		„ = 0,3125 —	„ = 0,6875

Distanza dall'apice del muso alle narici nelle ♀.

Givoletto.	M = 8 —	F < M = 0,7742 —	F > M = 0,2258
Moncalieri.	„ = 4 —	„ = 0,7949 —	„ = 0,2051
Sassari.	„ = 9,50 —	„ = 0,7500 —	„ = 0,2500
Candia.	„ = 7. —	„ = 0,7273 —	„ = 0,2727
Corfù.	„ = 7,50 —	„ = 0,3846 —	„ = 0,6154.

Anche dalla considerazione delle frequenze risulta spiccata la differenza fra ♂ e ♀ per ciò che riguarda il prolungamento del muso: fa eccezione la serie di ♂ di Catania in cui predominano i valori inferiori alla media molto bassa, e le serie delle ♀ di Corfù, in cui predominano i valori superiori alla media.

Diametro massimo trasversale dell'occhio nei ♂.

Givoletto.	M = 38,50 —	F < M = 0,3548 —	F > M = 0,6452
Moncalieri.	„ = 42,50 —	„ = 0,7179 —	„ = 0,2821
Catania.	„ = 40 —	„ = 0,5882 —	„ = 0,4118
Sassari.	„ = 40,50 —	„ = 0,6667 —	„ = 0,3333
Corfù.	„ = 36,50 —	„ = 0,1818 —	„ = 0,8182
Siria.	„ = 40 —	„ = 0,5625 —	„ = 0,3750

Diametro massimo trasversale dell'occhio nelle ♀.

Givoletto.	M = 40,50 —		F < M = 0,6451 —	F > M = 0,3548
Moncalieri.	„ = 40 —		„ = 0,6410 —	„ = 0,3333
Sassari.	„ = 40,50 —		„ = 0,6000 —	„ = 0,4000
Candia.	„ = 41 —	F = M = 0,3636 —	„ = 0,2727 —	„ = 0,3636
Corfù.	„ = 40 —		„ = 0,5000 —	„ = 0,5000

Si vede che la tendenza dei valori è verso 40 e 41, poichè nelle serie con valore medio inferiore ad essi si hanno i maggiori valori di F > M, mentre nelle serie in cui il valore medio è superiore a 41, il maggior valore è per F < M.

Lunghezza e larghezza massima delle parotidi. — Nei ♂ in amore in alcune località le serie presentano, per la lunghezza massima, un notevole maggior numero di valori inferiori alla media e per la larghezza massima invece, un notevole maggior numero di valori al disopra della media.

Esemplari ♂ in amore di Givoletto.	Lungh. mass.	F < M = 0,6038 —	F > M = 0,3962
„ „ „	Largh. mass.	„ = 0,2264 —	„ = 0,6981
„ „ *di Siria*	Lungh. mass.	„ = 0,2500 —	„ = 0,7500
„ „ „	Largh. mass.	„ = 0,7500 —	„ = 0,2500

Si potrebbe in questi casi pensare ad una sorta di correlazione di sviluppo fra i due diametri delle parotidi, nel senso che mentre la lunghezza cresce, la larghezza diminuisce ed inversamente.

In serie di altre località il fatto è meno spiccato od anche si nota pei due diametri una distribuzione presso a che eguale della frequenza dei valori al disopra e al disotto della media. — Nelle ♀ questa ultima condizione è quella che si verifica più frequentemente.

Lunghezza del braccio, dell'avambraccio e della mano. — La ripartizione delle frequenze dei valori delle serie rispetto alla media dà indici non molto differenti per le tre misure sopradette, in guisa che essi o tendono ad equilibrarsi come pel braccio, o crescono o diminuiscono di conserva per l'avambraccio e per la mano, e ciò tanto pei ♂, quanto per le ♀.

Diametri massimi del tubercolo palmare mediano e del tubercolo palmare interno. — Nelle serie in cui i valori inferiori alla media sono più abbondanti pel diametro massimo del tubercolo palmare mediano, sono invece meno abbondanti i valori inferiori alla media pel diametro massimo del tubercolo palmare interno, ed inversamente. — In altre serie gli indici di frequenza sono presso che in equilibrio.

Esemplari ♂ di Givoletto.

Diam. mass. tubercolo palmare mediano.	F < M = 0,6129,	F > M = 0,3871
„ „ „ „ interno	„ = 0,3226	„ = 0,6774

Esemplari ♀ di Sassari.

Diam. mass. tubercolo palmare mediano.	F < M = 0,6000,	F > M = 0,4000
„ „ „ „ interno	„ = 0,2000	„ = 0,6500

Esemplari ♀ di Corfù.

Diam. mass. tubercolo palmare mediano.	F < M = 0,3846,	F > M = 0,6154
„ „ „ „ interno	„ = 0,4615	„ = 0,3077

Nello sviluppo dei due tubercoli si nota come la tendenza ad una correlazione di sviluppo, nel senso che mentre l'uno cresce l'altro diminuisce.

Fenomeni analoghi si verificano per le frequenze dei valori della lunghezza del tubercolo metatarsale interno e del tubercolo metatarsale esterno, come si può facilmente osservare dal confronto degli indici di frequenza registrati nelle tabelle unite al presente lavoro. L'esame di queste tabelle per ciò che riguarda gli indici di frequenza delle varianti nelle serie farà vedere fatti analoghi anche per le misure delle varie parti dell'arto posteriore.

Nel *Bufo regularis* e nel *Bufo mauritanicus* si osservano fatti analoghi, come si può vedere dalle tabelle relative.

Bufo viridis. — Se si confrontano gli indici di frequenza delle serie di località diverse si osservano spesso differenze notevoli. Così, ad esempio, il diametro massimo di lunghezza del tubercolo palmare mediano dei ♂ di Givolotto presenta: indice di frequenza $< M = 0{,}6129$, mentre lo stesso indice nella serie di ♂ di Moncalieri è soltanto $= 0{,}1667$, mentre ancora in quella di Corfù è $= 0{,}8636$, e così via discorrendo per gli altri caratteri.

Per poter determinare se ciò sia indizio d'una variazione in un senso o in altro negli individui delle varie località, come già feci osservare nel precedente lavoro sulla variazione del *B. vulgaris* (Op. cit.), è necessario ripetere in tempi successivi queste ricerche sopra altre serie di individui delle stesse località. Per ora si può solo stabilire il fatto che rimane come un punto preciso di partenza per ricerche future.

Lo studio delle tabelle di misure e di indici unite a questo lavoro mette pure in evidenza un'altra serie di fatti relativi alle tendenze della variazione. Così, ad esempio, nelle serie sopra citate di ♂ di Givoletto, l'indice di frequenza dei valori inferiori alla media del diametro massimo del tubercolo metatarsiale interno è eguale a 0,7419 e quello superiore alla media è di 0,2581, mentre gli stessi indici nella serie di Moncalieri sono rispettivamente di 0,1026 e di 0,7821 e in quella di Corfù sono rispettivamente di 0,8636 e di 0,0909.

Si osserva qui una sensibile eguaglianza nell'andamento della frequenza dei valori fra i tubercoli dell'arto anteriore e quello posteriore nelle serie di individui delle diverse località.

L'esame paziente degli indici di frequenza degli altri caratteri uniti a questo lavoro metterà in evidenza altri fatti simili che qui sarebbe troppo lungo enumerare minutamente.

I dati sopra esposti intorno alle frequenze delle varianti sono un primo materiale che dovrà essere completato coll'esame di serie più numerose delle stesse località, per poter poi tentare una qualche spiegazione in proposito.

* * *

Se si tiene conto delle cose dette nei capitoli precedenti e si confrontano con quanto già esposi nel precedente lavoro intorno alla variazione del *B. vulgaris* si vede che il fenomeno della variazione nelle cinque specie del genere *Bufo* studiate. *B. vulgaris*, *B. viridis*, *B. mauritanicus*, *B. regularis*, *B. praetextatus*, per quanto si può giudicare dal materiale che ho avuto a mia disposizione, si presenta, in complesso, con un unico aspetto, sia per ciò che riguarda le differenze di variazione dei due sessi, sia pel variare dei giovani rispetto agli adulti.

Da tutti i dati riuniti mi pare si possano trarre le considerazioni seguenti:

1° (1) Le varie parti dell'animale, nelle loro proporzioni rispettive, hanno oscillazioni di variazione meno ampie di ciò che potrebbe far credere l'esame dei dati assoluti di misura fatti sopra individui isolati.

2° Le variazioni dei rapporti degli organi nella specie per quanto riguarda lo sviluppo delle loro dimensioni hanno carattere di oscillazioni di una determinata ampiezza che si possono verificare nelle serie di individui della stessa specie anche in località molto distanti della sua area di distribuzione geografica.

3° È necessario procedere con molta prudenza nello stabilire le *così dette varietà o sottospecie locali*, fondandole su dati dedotti dai rapporti di dimensione delle varie parti dell'animale, coll'esame di pochi esemplari, poichè tali variazioni di rapporti possono coesistere anche in località molto diverse.

4° Rimanendo sempre nel campo ora studiato del variare dei rapporti di dimensione delle parti, il fenomeno di variazione di una specie non ci appare, per servirci di un esempio grossolano, come un corpo che proceda con una data velocità in una direzione con moto rettilineo; ma come un corpo che si sposta in una data direzione oscillando continuamente, fino a che abbia raggiunto il punto determinato. Le oscillazioni si compiono intorno a quel valore del rapporto che corrisponde al valore medio del campo di variazione inteso nel modo da me proposto.

5° Soltanto osservazioni fatte in tempi successivi sopra serie numerose di individui della stessa località, in modo che si possa avere certezza che essi rappresentano generazioni di individui successive, potranno far conoscere esattamente quale sia la direzione del cammino che tende a percorrere la variazione. Credo tuttavia, si possa, fondandoci sui precedenti dati di misura, ritenere che (nei casi in cui l'esame sia stato portato sopra una serie molto numerosa di individui), data la frequenza delle varianti superiori ed inferiori alla media eguale delle due parti della media del campo di variazione, la parte dell'animale che si studia nelle sue dimensioni sia come in equilibrio, oscillando intorno al suo valore medio. Se invece osserviamo, ad esempio, che la frequenza dei valori inferiori alla media è maggiore di quella dei valori superiori, si può credere che le dimensioni del carattere in questione tendano a diminuire; poichè crescendo sempre più la frequenza dei valori inferiori alla media, avverrà che i valori estremi della serie maggiori della media tenderanno ad essere eliminati (probabilmente per opera della scelta naturale), poichè essi si trovano sempre più lontani dall'*optimum* per la specie stessa. Così il valore della media del campo di variazione si abbasserà.

Se la variazione del carattere continuerà a procedere nello stesso senso, vale a dire a procedere verso un *optimum* voluto da determinate circostanze, vedremo diminuire questo valore medio fino a che le frequenze dei valori tornino ad equilibrarsi rispetto al nuovo valore diminuito della media del campo di variazione. Quando ciò sia stato ottenuto, il nuovo campo di variazione rappresenterà il campo di variazione compatibile colle circostanze di vita dell'animale, e il carattere studiato potrà, nelle serie di una data località, ritenersi (almeno temporaneamente) in equilibrio. La

(1) Il lettore voglia sempre aver presente alla mente che le considerazioni seguenti si fondano sulle variazioni dei rapporti delle parti e non sulle variazioni assolute delle parti stesse.

cosa può procedere tanto oltre fino a produrre la scomparsa del carattere (dato che ciò sia possibile per la natura del carattere stesso). Un esempio si può trovare nella variazione della membrana esterna del timpano del *B. vulgaris* (op. cit.).

6° Credo che nel caso nostro, trattandosi di specie certamente molto antiche e adattate da lungo tempo a condizioni di vita, oscillanti esse pure entro a limiti relativamente ristretti e necessariamente poco dissimili nei diversi punti dell'area di distribuzione geografica delle specie stesse, si possa ritenere che queste hanno raggiunto una costanza notevole nei rapporti di dimensioni delle varie parti, costanza che può non apparirci quando limitiamo il nostro studio a pochi individui presi qua e là e che ci rappresentano alcuni dei momenti della variazione oscillatoria, ma che ci si fa manifesta quando rivolgiamo la nostra attenzione a serie numerose di individui anche di località diverse.

7° Per poter affermare che una specie di *Bufo* (per non uscire dallo stretto campo delle presenti ricerche) è molto variabile od è poco variabile, *nel senso che comunemente si attribuisce a queste parole*, non basta tener conto dell'ampiezza del campo di variazione (calcolato col metodo da me proposto), ossia dei limiti nei quali oscillano i caratteri, ma bisogna anche vedere (con ripetute osservazioni in tempi successivi) se il valore medio del campo di variazione rimane costante, o tende a spostarsi in un senso o nell'altro.

Il presente lavoro ha appunto lo scopo precipuo di fissare in un momento dato i limiti del campo di variazione e il suo valore medio per serie di individui di varie località appartenenti alle sopranominate specie di *Bufo*, affinchè si possa avere un primo nucleo di materiale adatto a determinare un punto preciso di partenza, che conceda in seguito di determinare se il valoro medio del campo stesso rimanga costante o si sposti, e in una parola, conceda di poter vedere se le specie in discorso variino veramente nel senso che si suole comunemente attribuire a questa parola nel campo delle teorie evolutive.

8° Da tutti i campi di variazione delle varie parti del corpo (formati coi valori numerici dei rapporti di sviluppo delle parti stesse) per le specie seguenti del genere *Bufo*: *B. vulgaris*, *B. regularis*, *B. mauritanicus*, *B. viridis*, riuniti nel mio precedente lavoro sulla variazione del *B. vulgaris* e nel presente, si possono dedurre dei raffronti che servono ad indicare differenze specifiche nelle proporzioni delle varie parti.

Del *B. vulgaris* sono stati studiati e misurati 462 esemplari, del *B. viridis*, 559, del *B. regularis*, 125, del *B. mauritanicus*, 77. Si può credere che coll'esame di questo materiale si siano potuti riconoscere i *valori estremi* di variazione dei rispettivi rapporti delle parti per le singole specie e si può credere pure che l'esame di nuovo materiale farà variare di poco (particolarmente per le due prime specie) e forse solo per qualche carattere i limiti riconosciuti di oscillazione dei rapporti delle parti stesse. — Un più numeroso materiale sarà invece necessario, come già sopra è stato detto, per lo studio delle altre modalità della variazione, come la frequenza delle classi, la tendenza della variazione, il carattere speciale che può assumere la variazione delle serie di località determinate, e via discorrendo.

Nella tabella seguente sono segnati i limiti estremi del campo di variazione per ciascun carattere delle diverse specie studiate, desumendoli da serie uniche formate da tutte le serie di individui in amore delle varie località per ogni singola specie.

	Bufo vulgaris ♂	*Bufo mauritan.* ♂	*Bufo viridis* ♂	*Bufo regularis* ♂
Lunghezza base (espressa in millimetri) . .	53-103	80-135	50-93	45-70
Lunghezza totale del capo (1)	85-122	83-110	92-132	97-130
Id. dall'apice del muso alle narici	3-26	6-27	0-23	0-13
Id. dalle narici all'occhio	14-32	17-34	17-35	21-36
Id. dall'occhio al timpano	5-19	3-12	0-6	0-8
Largh. del capo all'angolo post. dei mascellari	102-148	103-150	107-139	118-138
Id. a metà degli occhi	74-116	75-100	81-120	89-109
Id. alle narici	18-30	19-31	19-44	19-31
Diametro interorbitale	23-44	24-38	21-38	26-39
Altezza del capo alla regione timpanica . .	29-56	42-56	36-55	46-60
Id. alle narici	19-34	22-30	18-35	22-31
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	23-46	32-45	30-50	35-54
Diametro minimo del timpano	6-19	12-17	10-22	19-32
Id. massimo del timpano	7-24	14-23	11-25	20-32
Lunghezza massima delle parotidi	47-102	63-93	57-112	55-83
Larghezza id. id.	20-44	27-49	21-51	19-32
Lunghezza del braccio	116-166	99-139	102-152	105-130
Id. dell'avambraccio	89-160	72-112	69-114	72-90
Id. della mano	70-120	75-96	74-111	77-100
Lunghezza del 1° dito della mano (2) . . .	35-47	34-46	30-50	35-51
Id. 2° dito id. . . .	30-43	21-39	24-45	21-39
Id. 3° dito id. . . .	42-55	32-46	33-55	36-54
Id. 4° dito id. . . .	24-36	21-33	20-39	21-35
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	9-31	18-29	13-30	15-23
Id. id. id. interno	5-26	12-22	3-24	9-19
Lunghezza della coscia	117-176	120-166	104-171	124-145
Id. della gamba	100-155	120-153	112-154	120-144
Id. del piede	189-306	189-247	206-288	197-237
Lunghezza del 1° dito del piede	30-71	30-46	27-50	31-43
Id. 2° dito id.	50-110	58-75	51-93	47-71
Id. 3° dito id.	72-151	77-116	77-133	83-111
Id. 4° dito id.	86-178	117-153	124-174	123-146
Id. 5° dito id.	80-123	80-104	69-114	75-98
Diam. mass. del tubercolo plantare interno .	5-24	14-24	12-37	10-17
Id. id. id. esterno .	6-28	8-15	2-23	3-16
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	25-49	24-43	24-48	23-40
Id. id. del 2° dito	28-68	26-55	26-60	36-54
Id. id. del 3° dito	48-89	41-79	50-88	52-77
Id. id. del 4° dito	9-30	13-29	5-24	14-30
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	—	44-58	37-71	45-62

(1) Questa e tutte le misure seguenti sono espresse in 360^{esimi} somatici.

(2) La lungh. delle dita è misurata dall'apice del dito all'angolo interno che esso fa col dito vicino.

	Bufo vulgaris ♀	*Bufo mauritan.* ♀	*Bufo viridis* ♀	*Bufo regularis* ♀
Lunghezza base (espressa in millimetri) . .	81-148	96-136	53-112	50-77
Lunghezza totale del capo	81-111	82-106	86-126	110-122
Id. dall'apice del muso alle narici	3-21	0-21	0-18	0-11
Id. dalle narici all'occhio	15-29	20-28	19-36	23-33
Id. dall'occhio al timpano	9-19	2-11	0-9	0-2
Largh. del capo all'angolo post. dei mascellari	108-149	108-141	92-137	118-138
Id. a metà degli occhi	77-114	77-98	82-118	90-108
Id. alle narici	19-30	19-26	17-34	21-30
Diametro interorbitale	25-45	24-38	19-35	25-36
Altezza del capo alla regione timpanica . .	37-58	42-55	35-55	43-55
Id. alle narici	22-35	20-33	20-34	22-32
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	23-37	27-46	34-47	35-47
Diametro minimo del timpano	6-16	10-20	5-22	18-28
Id. massimo del timpano	7-16	13-24	7-22	20-29
Lunghezza massima delle parotidi	50-87	61-94	54-96	55-80
Larghezza id. id.	21-44	30-55	22-51	16-26
Lunghezza del braccio	107-153	94-132	97-144	98-122
Id. dell'avambraccio	81-121	69-101	74-118	61-86
Id. della mano	82-106	74-102	63-100	77-94
Lunghezza del 1° dito della mano	40-48	29-51	29-55	33-59
Id. 2° dito id.	34-41	22-40	26-41	26-41
Id. 3° dito id.	38-52	34-48	30-52	37-52
Id. 4° dito id.	34-44	19-30	23-43	21-33
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	16-27	20-30	14-24	17-23
Id. id. id. interno	10-21	10-20	5-19	9-17
Lunghezza della coscia	112-172	119-169	113-164	120-151
Id. della gamba	84-147	114-150	102-139	120-137
Id. del piede	181-244	183-241	178-242	197-216
Lunghezza del 1° dito del piede	27-75	32-45	31-48	31-46
Id. 2° dito id.	44-80	47-68	46-70	51-72
Id. 3° dito id.	75-110	80-109	69-118	85-122
Id. 4° dito id.	109-153	114-146	106-189	120-144
Id. 5° dito id.	119-169	72-99	72-107	79-105
Diam. mass. del tubercolo plantare interno .	14-28	16-25	11-29	12-24
Id. id. id. esterno .	15-26	9-18	3-17	3-14
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	21-38	21-37	25-42	23-38
Id. id. del 2° dito	28-48	28-49	35-55	34-50
Id. id. del 3° dito	44-69	39-75	51-78	52-72
Id. id. del 4° dito	11-24	16-27	9-27	11-24
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	—	34-35	35-66	42-62

Dall'esame della precedente tabella si osserva che ciascuna specie ha qualche parte che spiccatamente è diversa per le proporzioni dalla corrispondente delle altre specie. Ad esempio, il *B. vulgaris* si distingue molto nettamente per l'ampiezza della distanza dall'occhio al timpano, e ciò tanto nei ♂ quanto nelle ♀. — I *B. viridis* e *regularis* sono notevolmente diversi dal *B. vulgaris* e dal *B. mauritanicus* per la distanza dall'apice del muso alle narici. Il diametro massimo trasversale dell'occhio è spiccatamente minore nei ♂ e ♀ del *B. vulgaris*, che non nelle altre specie considerate; mentre il *B. regularis* si distingue dalle altre specie per la notevole ampiezza della membrana timpanica tanto nei ♂ che nelle ♀ e pel minor sviluppo proporzionale delle sue parotidi.

È spiccata la maggior lunghezza dell'arto anteriore del *B. vulgaris* nei due sessi e la maggior lunghezza del piede nei ♂. colle relative dita, e via discorrendo.

Disposizione delle varianti in classi nelle serie (1).

Bufo viridis.

Giovani (lunghezza base da mill. 20 a 40) *del contorno di Torino.*

Lunghezza del capo: 115-120_7-124_7-125_2-**126**-127-129_2-130_4-131-133_2-135-137 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 115-120-124_4-126-127_2-129_3-**(129,50)**-130_2-131_2-132_2-133_5-135_3-139-141-144_2 — Id. a metà degli occhi: 97-98-99_4-101-105-106-107_6-108_3-**(108,50)**-110-111-113_3-115_4-116-118-120 — Id. alle narici: 25-26_2-27_4-28_4-29_3-**(29,50)**-30_6-31_4-32_4-33-34 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 49-50_3-51-53_9-54_2-55-56_3-**(56,50)**-58_5-60_3-63-64 — Altezza del capo alle narici: 24-25_2-26_3-27_8-28_2-$\mathbf{29}_5$-30_4-31-33-34 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 116-120_4-124_5-125_3-127_4-129-**130**-132_2-133-134-135-137-138-139-140_2-144 — Diametro interorbitale: 25-26-27_2-28-30-31_3-32_4-33_2-**(33,50)**-34_3-35-36_4-37_3-39_2-40-42 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 3-5_2-6_6-7_{10}-8_2-**(10)**-12_2-13_4-16-17 — Id. dalle narici all'occhio: 25-27_3-28_2-29_2-30-31_4-32_4-**(32,50)**-33_3-34_4-36_2-37_2-39-40 — Id. dall'occhio al timpano: 0_{15}-3_6-**(5)**-4-7 — Diametro massimo trasv. dell'occhio: 40-43-44-45_3-47_2-48_3-49_3-$\mathbf{50}_5$-51_4-53_4-54-58-60 — Id. minimo del timpano: 7-8-10-11_3-$\mathbf{12}_5$-13_7-14_3-16-17 (invisibile 7) — Id. massimo del timpano: identico al precedente, un caso solo con 15, mentre in esso il diametro minimo è di 8. In tutti gli altri casi i due diametri sono eguali — Lunghezza del braccio: 93-101-103_2-106_3-107_2-108_3-110-111-

(1) I valori delle varianti sono espressi in 360esimi della *lunghezza base* eguale alla distanza dalla sinfisi della mandibola a metà dell'apertura cloacale. Il numero stampato in carattere più grosso e nero è quello della *classe media*. Se esso è collocato fra parentesi vuol dire che nella serie studiata esso non è stato verificato. I numeri a sinistra della classe media indicano le classi di varianti inferiori alla media; quelli a destra le classi di varianti superiori alla media stessa. I numeri più piccoli collocati in basso a destra di ciascuna classe indicano la *frequenza* della classe stessa nella serie. — Una classe la di cui frequenza è eguale ad 1 non porta nessun numero più piccolo a destra. I valori sono stati arrotondati, trascurando le quantità frazionarie inferiori a 0,50, facendo eguali ad 1 le quantità superiori a 0,50 od eguali a 0,50.

112_3-**113**$_2$-114-115_3-120-124_2-129-130_2-133 — Id. dell'avambraccio: 72-73-74-75-78_2-79_2-80_4-81-82-**(82,50)**-83-84_3-85-86_4-87_3-90_3-93 — Id. della mano: 74-78-79-80_3-81-83-84_2-85_3-86_3-87_4-90_4-**(91)**-93_2-97-101-108 — Id. del 1° dito: 31-34-35-36-37-39_2-40_6-41-43_4-**(44,50)**-45_2-47-48-50_3-51_2-58 — Id. del 2° dito: 31_4-32-33_6-34_5-35-36_3-**37**$_2$-39_2-40_2-42-43 — Id. del 3° dito: 40-42-43-45_2-47_6-48-**49**-50_6-51_4-53-54-57-58 — Id. del 4° dito: 25-26-27_5-28-29_4-30_2-31_3-**(32,50)**-33-34_3-35-36_2-37_2-39-40 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 7-8-**12**$_6$-13_8-14_9-15_3-16-17 — Id. del tubercolo palmare alla base del dito interno: 4-6_4-7_{15}-8_2-9_4-10-**(10,50)**-14-15_2-17 — Id. della coscia: 115-120-124_2-125-126-127-129-130_2-131-132-133_7-135_3-**(136,50)**-137_2-139-141-144_2-150-158 — Id. della gamba: 106-107-115_4-120_4-124_7-**125**-126_3-127-129_2-130-132-133_2-135-144 — Id. del piede: 180-186-187_2-189-191-199-200_3-203_2-204-206-207-208-211-**(212,50)**-213_2-214_3-216_2-223-225-227-230-231-245 — Id. del 1° dito: 33-34-36_2-37-39-40_7-**42**-43_7-45_6-47-48-51 — Id. del 2° dito: 48-49-50-51-53_3-55-56_2-58_4-60_5-62_4-**(62,50)**-63-64-67-72_3-77 — Id. del 3° dito: 80_3-82-84-86_3-87_2-90_4-93_5-**94**-96-97-99-101_3-103_2-108_2 — Id. del 4° dito: 115-120_3-124-130-131-133_6-134_3-135_2-**(136.50)**-137_4-139-141-144_2-146_2-148-158 — Id. del 5° dito: 80_2-84-86_3-87_5-90_{12}-**(90,50)**-93_3-98-101_3 — Lunghezza del tubercolo metatarsale interno: 12_6-13_5-14_6-15-16_3-**17**$_2$-18_2-20-22_4 — Id. dell'esterno: 3_8-4_2-5_2-**(5,50)**-6_2-7_{14}-8 (17 valore anormale) — Id. delle parotidi: 62-65-67_5-69-71_2-72_2-**74**$_4$-75-77-78-79_5-80-82-84-86 — Larghezza id.: 24-25-26_2-27_6-28_3-29_2-30-31_2-**(32)**-33-34_2-36_4-37_2-40 — Distanza dall'apice del dito della membrana interdigitale. Dall'apice del 1° dito: 24-25_3-26-27_5-29-30-31_3-**(32)**-33-34_3-35-36_6-39_2-40 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-40_4-41-43-45_3-47_5-48_5-**(48,50)**-49-50_4-56-58_4 — Id. dall'apice del 3° dito: 62-63-67_2-72_5-74_7-76-**(76,50)**-77-79_3-80-82-86_5-90_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 15-18_2-20_3-21-22-23_4-24-25_3-**(25,50)**-26_3-27_6-28-29_3-36 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 42-43-47_5-48-49-50_2-51_4-53_4-54-55-56_3-**(57)**-58-66-72_4.

Maschi in amore di Moncalieri.

Lunghezza del capo: 93-101-104_3-105_3-106_8-107_4-108_6-**(108,50)**-109_4-110_3-111_3-112_9-113-114_9-115_5-116_6-118_7-120_3-122-124 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 111-116-118_4-120_6-122_6-124_{11}-**125**$_2$-126_{13}-127_3-128_4-129_6-130_8-131-132_2-133_2-134_4-135-137_2-139 — Id. a metà degli occhi: 87-92_2-93_2-94_5-95_2-96_5-97-98_4-99_6-100_6-101_6-102_6-103_5-**(103,50)**-104_5-105_2-106_5-107_5-108_4-109-110-112_2-116-120 — Idem alle narici: 23_3-24_{15}-25_{10}-26_{12}-27_{12}-**(27,50)**-28_{17}-29_4-30_3-31-32 — Altezza id. alla regione timpanica: 37-39-41_6-42_6-43_6-**44**$_{14}$-45_7-46_9-47_4-48_7-49_5-50_8-51_4 — Id. alle narici: 20-21-22_2-23_{10}-24_{13}-25_{14}-**(25,50)**-26_{11}-27_8-28_{10}-29_3-30_2-31_3 — Lunghezza obliqua del capo: 105_2-106-107_2-109_4-110_2-111_4-112_9-113_2-114_{13}-115_4-116_{10}-**117**-118_{10}-120_7-122_3-124_2-128-129 — Diametro interorbitale: 23_3-24_4-25_7-26_4-27_{11}-28_6-**29**$_6$-30_{11}-31_{14}-32_6-33_5-35 — Lunghezza del muso alle narici: 3_3-6_4-7_2-8-9_7-10-11_4-**12**$_{17}$-13_8-14_4-15_{14}-16_4-17_3-19_5-21 — Distanza dalle narici all'occhio: 23_2-24_7-25_9-26_{10}-27_{13}-**(27,50)**-28_{17}-29_6-30_6-35_4-32_4 — Distanza dall'occhio al timpano: 0_{64}-1_3-2_5-3_6 — Diametro massimo trasversale dell'occhio: 35_3-37_2-38_5-39_{17}-40_9-41_{13}-42_7-**(42,50)**-43_9-44_5-45_4-46_3-50 — Id. minimo del timpano: 11-12_5-13_5-14_7-15_{13}-16_{14}-**(16,50)**-17_{11}-18_{11}-19_9-20_2-21-22 (2 casi invisibile a destra e 2 casi invisibile a sinistra) — Id. massimo del timpano: 12_3-13_2-14_7-15_9-16_{14}-**17**$_{10}$-18_{16}-19_{12}-20_3-21-22 — Lunghezza delle parotidi: 63-66-67-68-69_2-70_3-

71_9-72_8-73_3-74_3-75_9-76_9-**(76,50)**-77_3-78_3-79_4-80-81_5-82_5-83_3-84-85-89-90 — Larghezza idem: 24_2-25_3-26_4-27_7-28_7-29_7-30_9-31_{11}-**(31,50)**-32_9-33_8-34_3-35_3-36_4-37_3-38-39_2 — Lunghezza del braccio: 111-112-116_2-118_4-119-120_3-122_6-124_6-126_{12}-127_3-**128_3**-129_5-130_5-131_2-132_3-133_6-134_3-137_4-138_4-143_2-144-145 — Idem dell'avambraccio: 79_2-82_2-83_2-84_2-85-86_2-87_8-88_4-89_5-90_6-91-92_5-93_8-**94_5**-95_3-96_8-98_4-99_2-100_2-101_3-102-104-105-109 — Id. della mano: 82-83_2-84_4-85-86_4-87_8-88_7-89_8-90_{10}-92_{10}-**93_6**-94_4-95_5-96_5-98-99-101-104 — Id. del 1° dito: 35_6-36_4-37_4-38_4-39_8-40_5-41_{12}-42_4-**(42,50)**-43_{10}-44_8-45_6-46_4-48_2-50 — Id. del 2° dito: 24-28-29_2-30_6-31_6-32_7-33_9-34_8-**(34,50)**-35_{11}-36_8-37_5-38_4-39_7-40-42-45 — Id. del 3° dito: 34-35-36_3-37_2-38_3-39_5-40_2-41_{14}-42_5-**(42,50)**-43_{13}-44_{10}-45_5-46_5-47_2-48_2-49-50-51_2 — Id. del 4° dito: 23_2-24_8-25_3-26_4-27_4-28_9-**29_7**-30_{11}-31_{13}-32_9-33_6-35_2 — Dimensione massima del tubercolo palmare mediano: 13-15_2-16_3-17_7-**(17,50)**-18_{25}-19_{25}-20_{11}-21_2-22_2 — Id. del tubercolo interno: 11-12_3-13_5-14_2-15_8-16_7-**(16,50)**-17_{14}-18_{18}-19_{14}-20_5-22 — Lunghezza della coscia: 130-132-133-134_2-135_2-136_2-137_3-138_5-139_5-140_2-141-142_3-143_4-144_7-145_3-146_2-147-**148_4**-149_4-150_4-151-152_3-153_2-154_4-155_6-156-158-159-166 — Id. della gamba: 118_2-122-124_2-126_3-128_4-129_3-130_6-131_3-132_7-**133_4**-134_5-135_2-136_5-137_8-139_7-140_3-141-143_2-144-145-148 — Id. del piede: 209-218-222_3-224-225_2-226-228_4-**229**-230_3-232_6-234_4-235-236_3-238_{10}-240_8-241-242_6-244_3-246_3-248_3-249_3 — Id. del 1° dito: 30-35_4-36_5-37_5-38_7-39_{12}-**(40)**-41_{13}-42_8-43_9-44_3-45_4-46_4-47_2-49-50_2 — Id. del 2° dito: 53-58_2-59_4-60_4-61_2-62_5-63_8-64_5-65_3-**(65,50)**-66_{10}-67_5-68_6-69-70_6-71_3-72_4-73_3-74-75_3-77-78 — Id. del 3° dito: 77-89-94-96_3-97-98_3-99_2-100_3-101_4-102_6-103_4-104_4-105_5-106_8-**(106,50)**-107_5-108_4-109_6-110_4-111_5-112_2-114_2-115-118-120-124 — Idem del 4° dito: 124-134-136-138-143-144_4-145_3-146_2-147_2-148_6-**149_3**-150_2-151_3-152_6-153_7-154-155_7-156_3-157_2-158_5-159_3-160-161_2-162_3-165-166_3-167-168_2-174 — Id. del 5° dito: 79-85-88-89_2-91-92-93_4-94_4-95_2-**(95,50)**-96_7-97_4-98_6-99_9-100-101_9-102_5-103_4-104_3-105_5-106_4-109_2-110-112 — Lungh. del tubercolo metatarsale interno: 12-14-15_2-16_4-17_9-18_{27}-19_{22}-20_7-22_5 — Lunghezza id. dell'esterno: 3-5-6_{36}-7_5-8_3-**(8,50)**-9_8-10_6-11_5-12_6-13_2-14_2 — Distanza dall'apice del dito della membrana interdigitale: dall'apice del 1° dito: 26_2-28_3-29_3-30_6-31_6-32_8-33_7-34_6-**35_8**-36_8-37_8-38_3-39_5-43_4-44_2 — Id. dall'apice del 2° dito: 33-35-37-38_3-39_3-40_3-41_9-42_5-43_9-44_6-45_5-46_7-**(46,50)**-47-48_6-49_3-50_8-51_6-53-57-58-60 — Id. dall'apice del 3° dito: 51-53-54-55-56-58-59_3-60_2-61_6-62_6-63_5-64_4-**65_7**-66_9-67_4-68_5-69_4-70_5-71_3-72_5-75-76-77-79 — Id. dall'apice del 4° dito: 6_9-7-9_6-10_3-11_7-12_{10}-13_5-**14_2**-15_4-16_4-17_6-19_5-20_3-22 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 42-44-46_2-47_2-48-50-51_3-52_3-53_4-54_9-55_5-56_3-**(56,50)**-57_8-58_4-59_4-60_6-61_5-62_7-63_4-64-65-68_2-71.

Femmine in amore di Moncalieri.

Lunghezza del capo: 94-96-97-98_2-99_3-100-101_2-102_3-103_4-104_6-**105_3**-106_4-107-108_2-109-110_2-114-116 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 109-113-118_8-120_9-**(120,50)**-122_4-123_2-124_2-125-126_4-128_2-129_2-131_2-132 — Id. a metà degli occhi: 86-87-89_3-91_2-92-93_9-**94_3**-95-96_5-97-98_7-99-101-102_3 — Id. alle narici: 20-21-22_3-23_6-24_{11}-25_3-26_8-**27_3**-28-29-34 — Altezza id. alla regione timpanica: 36-38-39-41_3-42_5-43_7-**44_2**-45_2-46_6-47_2-48_4-49_4-52 — Id. alle narici: 20-21_2-22_3-23_5-24_{10}-25_3-26_9-**27_4**-28-34 — Lungh. obliqua del capo: 98_2-100-101-102_2-103_2-104_4-105_2-106_2-**108_3**-109_3-110_4-111_2-112_3-113-114_2-115_2-116-118 — Diametro interorbitale: 22-23_4-24-25_2-26_8-27_7-**28**-29_2-30_5-31-32_2-33-34_3 — Dall'apice del muso alle narici: 0_{18}-3_{13}-5_3-6_4-8 —

Dalle narici all' occhio: 21-22_3-23_5-24_4-25_2-$\mathbf{26}_8$-27_9-28-29_2-30_3-31 — Dall' occhio al timpano: 0_{27}-1_5-3_5-5-6 — Diametro trasversale massimo dell'occhio: 34-35_3-36_3-37_5-38_8-39_5-**40**-41_5-42_5-43_2-46 — Diametro minimo del timpano: 11_2-12_2-13_3-14_5-15_6-$\mathbf{16}_{11}$-17_3-18_6-21_2 — Idem massimo: 11-12-13_2-14_6-15_6-$\mathbf{16}_{13}$-17_4-18_5-21_2 — Lunghezza del braccio: 97-98-102-104_2-105-106-107-108_2-109_2-110_3-**(110,50)**-111_3-112-113_4-114_2-115_2-116_3-118_3-120_4-122_2-124 — Id. dell'avambraccio: 74-76_4-77_4-78_3-79_4-81_5-**(81,50)**-82-83_2-84_5-85_2-86_3-87_3-88-89 — Id. della mano: 76_3-77_4-78-79_3-80-81_4-82_2-$\mathbf{83}_2$-84_6-85_3-86_3-87_3-88_2-89-90 — Id. del 1° dito: 35-36-37-38_4-39_2-40-41_7-42_6-$\mathbf{43}_5$-44_3-46_3-48_4-51 — Id. del 2° dito: 27-29-30_3-31_2-32_2-**(32.50)**-33_4-34_5-35_5-36_7-37_6-38_3 — Id. del 3° dito: 33-35-36-38_3-39_3-40-41_6-$\mathbf{42}_8$-43_6-44_5-45-46-49-51 — Id. del 4° dito: 24_3-25_2-26_5-27_3-28_2-$\mathbf{29}_5$-30_8-31_6-33_4-34 — Lunghezza delle parotidi: 63-64-66_3-67-68_3-69-70_2-71-72_6-**(72,50)**-73_2-74-75_3-76_3-77_3-78_2-79-80-81_2-82 — Larghezza id.: 22-26_2-27_3-28-$\mathbf{29}_5$-30_6-31_8-32_2-33_2-34_4-35_2-36_3 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 5_2-6_3-7-9_5-10_{10}-$\mathbf{11}_4$-12_7-14-15_3-16_2-17 — Id. dell' interno: 14-15_3-16_8-17_7-**(17,50)**-18_7-19_4-20_3-21_6 — Lunghezza della coscia: 116-118-120_4-123_3-124-125-126_3-128_2-129_2-**(129,50)**-130-131_2-132_2-134_5-136-137-138_5-139-140-142-143 — Id. della gamba: 108-111-113_2-115_5-116_3-118_8-**(119,50)**-120_6-122_5-123-125-126_3-127-129-131 — Id. del piede: 194-198-202_3-203_4-204-205_3-206_2-207_4-209-210-212_2-214-215-$\mathbf{216}_5$-219-220-222-224_2-226-231-232-238 — Id. del 1° dito: 31-33-34_2-35_2-36-37_3-38_3-$\mathbf{39}_5$-40_2-41_6-42_3-43_4-44_2-45-46_2-47 — Id. del 2° dito: 48-51-55_2-56-57_3-58_3-59_4-$\mathbf{60}_2$-61_3-62_4-63-64_5-65-66_6-68-71-72 — Id. del 3° dito: 78-84-86-87_3-89_2-90-$\mathbf{92}_2$-93_4-94_3-95-96_3-97_2-98_3-99-102_4-103-104_4-105-106 — Id. del 4° dito: 126_4-127-128-129-130_2-131_2-132-134_4-135-136_2-137-138_4-139-141_2-143-144_3-145_2-146-$\mathbf{147}_2$-149-157-168 — Id. del 5° dito: 78-81-82_3-83_2-84_2-85_2-86_3-87_2-**(88,50)**-89_2-90_3-91_4-92_2-93_5-94-95-96_2-98_2-99 — Lunghezza del tubercolo metatarsale interno: 15-16_4-17_3-18_8-$\mathbf{19}_4$-20_7-21_{10}-22-23 — Id. dell'esterno: 3-5-6_{11}-7-8_5-**(8,50)**-9_2-10_8-11_7-12_3-14 — Distanza dall'apice del dito della membrana interdigitale: dall'apice del 1° dito: 26_2-27-29_2-30_5-31_8-$\mathbf{32}_4$-33_6-34_3-35_2-36_3-37_2-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 35_3-37-38-39-40-41_2-42_3-43_6-**(43,50)**-44_2-45_2-46_8-47-48_3-49_3-51-52 — Id. dall'apice del 3° dito: 53-55-56-57_2-58_4-59_2-60_5-61-62_4-**(62,50)**-64_3-66_4-67_2-68_3-69-70-71_2-72_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 10-11-12-15_6-16_9-17_2-18_6-**(18,50)**-19-20_2-21_6-23_2-24-27 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 46-48_2-50-51_2-52_5-53_2-**(53,50)**-54_6-55_4-56_3-57_3-58_2-59_3-60_2-61_3.

Maschi in amore di Giroletto (presso Torino).

Lunghezza del capo: 96-97-99_3-100-101-$\mathbf{102}_6$-103_3-104_3-105_4-106_5-107_6-108_4-109_6-111_4-112_3-113_4-114_2-115_2-116_2-118 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 107-109-110-114_2-116_2-118_8-$\mathbf{120}_7$-122_8-123-124_8-125-126_8-127_3-129_4-130_2-131-132_3-133 — Id. a metà degli occhi: 90_2-91-92_2-93_2-94_3-95_2-96_3-97_5-98_2-99_5-100_4-101_6-$\mathbf{102}_4$-103_4-105_2-106_2-107_3-108_2-109_4-111_2-112-114 — Id. alle narici: 23_2-24-25_2-26_2-27_6-28_6-29_3-30_5-31_4-32_8-33_5-**(35,50)**-34_6-35_3-36_6-38-42_2-44 — Altezza del capo alla regione timpanica: 38-39_3-40-41_2-42-43_3-44_4-45_8-46_{10}-**(46,50)**-47_7-48_8-49_2-50_4-51_5-52-54-55 — Idem alle narici: 21-23_2-24_3-25_2-26_6-27_8-$\mathbf{28}_{13}$-29_{11}-30_6-31_4-32_3-33_2-35 — Lunghezza obliqua del capo: 94-100-101_2-102_2-104_3-105_3-106_1-$\mathbf{107}_4$-108_3-109_7-110_2-111_5-112_6-113-114-115_5-116-118_4-120_2 — Diametro interorbitale: 23_4-24_2-25_2-26-27_5-28_6-29_9-30_8-**(30.50)**-

31_6-32_3-33_4-34_4-35_4-36_3-38 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 6_6-7_4-8-9_3-10-11_8-12_8-**(12,50)**-13_7-14_5-15_4-16_4-17_7-18_2-19_2 — Id. dalle narici all'occhio: 17-23_6-24_5-25_3-$\mathbf{26}_4$-27_7-28_{10}-29_8-30_9-31_3-32_3-34-35 — Id. dall'occhio al timpano: 0_{32}-3_{11}-4-6_3 — Diametro trasversale massimo dell'occhio: 30_2-32-33_2-34-35_5-36_4-37_5-38_2-**(38,50)**-39_{11}-40_9-41_6-42_8-43_3-44-46-47 — Diametro minimo del timpano: 11_2-12_7-13_{10}-14_7-15_4-16_2-17_9-18_4-19_6-21 — Id. mass.: 11-12-13_2-14-15_5-16_8-17_{10}-**(17,50)**-18_8-19_5-20_4-21-22_3-23_2-24 — Lungh. delle parotidi: 57-60-62_2-64_2-66-68_3-69_2-70_4-71_6-72_6-73_4-**(73,50)**-74_3-75_5-77_2-78_3-79_2-80_3-84-87-90 — Id. larghezza: 21-23_2-25-26-27_4-28_2-29-$\mathbf{30}_4$-31_5-32_4-33_8-34_9-35_4-36_4-37-38-39 — Id. del braccio: 110-114-116-118_4-120_2-121-122_4-123-124_5-126_6-128-129_4-130_2-$\mathbf{131}_2$-132_5-134_2-135-136-137_2-138_3-140-141-143-144_3-145-147-148-149-150_2-152 — Id. dell'avambraccio: 71-79_2-84_2-85-86_4-87-88_3-89_3-90_9-91-92_3-**(92,50)**-93_6-94_6-95-96_6-97_3-98_2-99_3-100-101-102-103-114 — Id. della mano: 79-81-83_2-84_6-86_2-87_3-88_3-89_5-90_7-92_4-93_8-94_4-$\mathbf{95}_2$-96_6-97_3-98_2-102_2-111 — Id. del 1° dito: 33-34_4-35_6-36_6-37_7-38_5-39_6-40_6-**(40,50)**-41_5-42_3-43-44-45_3-46_3-47_2-48_3 — Id. del 2° dito: 27_2-28_4-29_3-30_{10}-31_7-32_7-33_8-34_6-**(34,50)**-35_4-36_2-37_3-38_2-39_2-40-42 — Id. del 3° dito: 34-39_6-41_5-42_9-43_9-44_8-**(44,50)**-45_4-46_9-47_4-48_5-51-55 — Id. del 4° dito: 23-24-25_4-26_3-27_6-28_9-29_6-30_{11}-$\mathbf{31}_5$-32_5-33_4-34_3-35-36_2-39 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 17_8-18_7-19_{11}-20_{12}-**(20,50)**-21_7-22_7-23_6-24_4 — Id. dell'interno: 9-11_5-12_5-13_2-14_4-15_3-**(15,50)**-16_8-17_{12}-18_9-19_6-20_4-21_2-22 — Lunghezza della coscia: 104-120_2-126-128-129_2-130_2-132_4-134_4-135-137_2-**(137,50)**-138_4-139-141_6-142_3-143_7-144_6-145_2-146_3-148-150_2-155_2-156-159-161-162-171 — Id. della gamba: 120_2-122-124_4-126_3-127_3-128_2-129_6-130_2-131_3-132_8-133_2-134_4-135_5-**136**-137_5-138-139-140-141_2-144_2-145-151-152 — Id. del piede: 212_2-214_2-216-218_2-219_2-220-221_2-222-224-225_4-226-227_3-228_3-229_4-230_3-231-232-234_2-235_2-236_5-238_6-240_3-242_2-246_3-248_2-**(250)**-256-288 — Id. del 1° dito: 29-30_4-31_2-32_2-33_4-34_5-35_5-36_4-37_3-38_7-$\mathbf{39}_7$-40_6-41_4-42_2-44_2-45_2-47-49 — Id. del 2° dito: 53_2-54_2-55_2-56_3-57_4-58-59_2-60_6-61-62_7-63_3-64_6-65_3-66_5-68_6-69_2-70-71-72_2-**73**-74-93 — Id. del 3° dito: 77-82-89-90_3-93_2-94_2-95_2-$\mathbf{96}_2$-97_4-98_2-99_5-100_4-101_2-102_3-103_4-104_3-105_4-106_3-107_5-108_4-109-112-114-115_2 — Id. del 4° dito: 134-135-138-140-141_3-142-143_3-144_6-145_3-146_3-148_3-149_5-$\mathbf{150}_5$-151_4-152-153_3-154_2-155_5-156_2-157_2-158-159_2-160-162-163-166 — Id. del 5° dito: 69-72-81-84_2-85_2-86_3-87_4-$\mathbf{88}_3$-89_4-90_{10}-91-92_5-93_5-94-95-96_4-97_3-98_2-99_3-100_2-102-104-107 — Lunghezza del tubercolo metatarsale interno: 16_4-17_{11}-18_{11}-19_9-20_{11}-**(20,50)**-21_5-22_4-23_6-25 — Id. dell'esterno: 6_3-7_2-8_2-10-11_{11}-12_{18}-**(12,50)**-13_{12}-14_8-15-17_2-18_2-19 — Distanza dall'apice del dito della membrana interdigitale: dall'apice del 1° dito: 25-26-28_6-29_2-30_4-31_4-32_3-33_5-34_9-35_7-36_6-**(36,50)**-37_2-38_3-39_7-41-48 — Id. dall'apice del 2° dito: 37_2-39_3-40_3-41-42_8-43_6-44_7-45_5-46_8-$\mathbf{47}_5$-48-50-51_4-53-54-55-57 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-56_2-58-59_2-60_3-61-62_6-63_5-64_5-65_3-**66**-67_2-68_6-69_6-70_4-71_3-72_6-73-74-75_2-77 — Id. dall'apice del 4° dito: 6_3-9_2-10-11_{11}-12_{12}-$\mathbf{13}_6$-14_7-15_4-16_2-17_4-18_3-19_2-20_5 — Lunghezza della piegatura tarsea: 44-46-47-48_4-49_3-50_3-51_5-52_6-53_4-54_7-55_3-56_8-**(56,50)**-57_3-58_6-59_3-62-63-64-69.

Femmine in amore di Giroletto (presso Torino).

Lunghezza del capo: 95_2-96_2-97-98-101_2-103_4-104_2-105_3-106_2-**(106,50)**-107_2-108-110_3-111_3-112-115-118 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 114-116-117_2-118_7-120_6-122_8-**(123)**-127-128_2-130_2-132 — Id. a metà degli occhi: 90_2-92-93-96-97_2-

98_5-99_4-100_3-**101_4**-102_3-104-105-107_2-112 — Id. alle narici: 21-23_2-24_4-25_5-**(25,50)**-26_8-27_5-28-29_4-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42_2-43_3-44_2-45_4-46_8-47_3-48_3-**(48,50)**-49_3-50-54-55 — Id. alle narici: 21-23-24_4-26_9-**27_5**-28-29_3-30_4-31_2-33 — Lunghezza obliqua del capo: 95-98-100-101-104-105_2-**(105,50)**-106_2-107_2-108_2-109_2-110_5-111_4-112-114_2-115_2-116_2 — Diametro interorbitale: 20-24_3-25_4-26_7-**(26,50)**-27_5-28-29_4-30_2-31_2-32-33 — Dall'apice del muso alle narici: 3_8-5_7-6_7-7_2-**(8)**-9-10_3-11-13_2 — Dalle narici all'occhio: 20-24_6-25_5-26_6-**(26,50)**-27_4-28-29_5-30-31-33 — Dall'occhio al timpano: 0_{16}-1_2-2_3-3_9 — Diametro massimo trasversale dell'occhio: 34_2-35_3-36_4-37_4-38_3-39_3-40-**(40,50)**-41_2-42-43_4-46_2-47_2 — Diametro minimo del timpano: 11_2-12_4-13_6-14-**15_4**-16_5-17_5-18_3-19 — Id. massimo: 11-12_2-13_3-15_5-**(15.50)**-16_5-17_6-18_4-19_2-20_3 — Lungh. delle parotidi: 54-65-66-67-68_3-69_3-70-**71_2**-72_1-73_2-74-75-76_3-77_2-78-79-80-85-88 — Id. larghezza: 26-27_2-29_2-30_3-31_2-32_5-**(32,50)**-33_4-34_2-35_3-36-37_3-38-39_2 — Lunghezza del braccio: 111_2-112-113-114_3-115_2-116_5-118-120_3-$122_2$$124_2$-126-$127_2$-**(127,50)**-128-129-130-135-140-144 — Id. dell'avambraccio: 78-80-81-82-83_2-84_3-85_4-86-87_3-89_2-90_2-91_2-92-93-95_2-**98_2**-118_2 — Id. della mano: 82_3-83-84_2-85_2-86-87_5-89_2-90_6-**91_2**-92_3-93-95-98-100 — Id. del 1° dito: 29-37_3-39_4-40-41_5-**42_2**-43_2-44-45-46_2-47_2-48_2-49-51-52-55_2 — Id. del 2° dito: 31_3-32-33_3-34_3-35_4-**36_5**-37_4-38_3-39-40_2-41 — Id. del 3° dito: 36-37-39_2-40_2-41_2-42_6-43_3-**44**-46_3-47_2-48_4-49-50-51-52 — Id. del 4° dito: 26_2-27_4-29_5-30_4-31_5-**(31,50)**-32_3-33_2-34_2-35_2-37 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 15-16_2-17_5-18_5-19_3-**(19,50)**-20_8-21_5-22-24 — Id. dell'interno: 9-10_3-11_7-12_9-**13_5**-14-15_2-16_2-17 — Lunghezza della coscia: 118-120_3-124-126-127_2-128_2-130_3-131_2-132-133-134_2-**(134,50)**-135-137-138_2-139-140_2-143-145-147-150-151 — Id. della gamba: 116-117-118_3-120_3-122_4-124_3-125_2-**126_2**-127_2-128_3-129_2-130_2-133-134-136 — Id. del piede: 195-199-201-203-205-207-209_2-210_4-211-212-**(213)**-214-215_3-216_2-219-220-221-222_2-223-225-226-227-228-231 — Id. del 1° dito: 31-33-34-35_4-36-37_6-38-**(38.50)**-39_4-40_2-41_3-42_2-43_2-44-46_2 — Id. del 2° dito: 46-51-52_2-53_2-55_2-56_2-57-**58_4**-59_2-60_3-61_2-63_3-66_3-68-69-70 — Id. del 3° dito: 69-79_2-87-90_4-91_2-92_5-93_4-**(93,50)**-94_2-95-98-100-101-102_3-103-105-118 — Id. del 4° dito: 126-127-129_3-130-131_2-134_3-136_3-137_2-138_3-139_2-140_3-**(141)**-143_2-144_2-145-150-156 — Id. del 5° dito: 72_2-79_2-80-81-82-83-84_2-**(84,50)**-85_5-86-87_3-88_2-89_2-90_4-91-93-95-97 — Lunghezza del tubercolo metatarsale interno: 11-**16_6**-17_4-18_7-19_3-20_7-21_3 — Id. dall'esterno: 6-8_2-9_3-10_4-11_6-**(11,50)**-12_7-13_4-14-15_2-17 — Distanza dall'apice del dito della membrana interdigitale: dall'apice del 1° dito: 26_3-28-29_4-30_5-31_3-**32**-33_3-34-35_3-36-37_5-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 39_2-40-41-42_4-44_2-45-46_6-**47_2**-48_2-49_3-50_2-51-53-54_2-55 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-57-58_2-60_2-61-62-63_4-64_2-65-66_3-**(66,50)**-67_3-68-69-70-72-75_2-76-78_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 13_2-15-16_3-17_2-18_7-19_3-**20_3**-21_3-23_3-24-25_2-27 — Lunghezza della piegatura tarsea: 39-42-44-47-48_3-49_3-50_3-51_3-52_3-**(52,50)**-53_3-54-55_2-56-57_2-58-61-64-66.

Giovani in cui la lunghezza base varia da 30 a 50 millimetri, di Sardegna (Sassari).

Lunghezza del capo: 96-103-**(104-50)**-106-109-111-113-115_2-117-123 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 108-120-**(121)**-126-128-129-130-131_2-132-134 — Id. a metà degli occhi: 90-94-98_2-100-**(102,50)**-106-110-111-113-115 — Id. alle narici: 23_2-24-25_3-**26_3**-29 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42-45-**(46.50)**-47_2-48-49_2-50-51_2 — Id. alle narici: 23-25_2-26-**27**-29-30_2-31 — Lunghezza obliqua del capo: 108-113-115-117_2-120-(**121**)-123_2-134 — Diametro interorbitale: 26-29-30-31-33_2-(**33,50**)-36-39-41 — Dal muso alle narici: 0_3-4-8_4-17_2 — Dalle narici all'occhio: 23-25-26_2-27-29-(**29,50**)-30-33-35-36 — Dall'occhio al timpano: 0_3-2-3_2-4_3-7 — Diametro trasversale dell'occhio: 39-41-45-**46**-47_2-48-49-51-53 — Id. minimo del timpano: 8_3-9-10-(**11**)-12_3-13-14 — Id. massimo del timpano: 8_3-9-10-(**11**)-12_3-13-14 — Lunghezza delle parotidi: 66-75-78-(**80**)-82_2-83-86_2-90-94 — Larghezza id.: 24-34_2-(**34,50**)-36-39-41_2-42-43-45 — Id. del braccio: 108-(**119**)-123_3-125-126-128-129-130 — Id. dell'avambraccio: 72-86_2-(**87**)-90_2-93-94-98-100-102 — Id. della mano: 82-84-86_2-90-**92**-93-94-98-102 — Id. del 1° dito: 36-39-41-42_2-(**42,50**)-43_2-44-49_2 — Id. del 2° dito: 25-31_2-**33**-34_2-36-37-38-41 — Id. del 3° dito: 41-42-43_2-44-**47**$_2$-49-50-53 — Id. del 4° dito: 24-26-**29**-30-31_2-33_3-34 — Id. del tubercolo palmare mediano: 12-15-16_2-**17**$_3$-20-21-22 — Id. dell'interno: 6-8_5-9-**10**-14_2 — Id. della coscia: 120-123-133-135-(**135,50**)-141-144-147-151_2 — Id. della gamba: 120_2-123-125-(**127**)-128-129-130-131-134_2 — Id. del piede: 192-205-206-(**210,50**)-211-214-218-222-223-226-229 — Id. del 1° dito del piede: 31-33_2-34_2-36_2-(**36,50**)-38-39-42 — Id. del 2° dito del piede: 48-49_2-50-51_2-55-(**56,50**)-60-63-65 — Id. del 3° dito del piede: 72-84-86-(**89**)-90_3-92-94-101-102 — Id. del 4° dito: 120-123-129-134-(**134,50**)-135-141-146-147-149 — Id. del 5° dito: 77-82-84_2-(**89,50**)-90_2-93-94_2-102 — Id. del tubercolo metatarsale esterno: 12-16_2-**17**$_2$-19-20-21-22_2 — Id. dell'interno: 7-8_4-9_3-10-(**11,50**)-16 — Dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-30-31-32-33_3-**34**-35-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 42-43-46-(**48,50**)-49_3-50_2-51-55 — Id. dall'apice del 3° dito: 60-65_2-67-68-69-(**69,50**)-70-72-73-79 — Id. dall'apice del 5° dito: 17-18-21_2-(**21,50**)-22-23_2-25_2-26 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 42-46_2-47-49_2-(**50,50**)-51-53-55-59.

Femmine in amore di Sardegna (Sassari).

Lunghezza del capo: 98-99-101-102-104-107_3-108-109_2-**112**-113_5-116-118-126 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 120-123-124-125-126-127-130_3-**131**-135_4-138_3-139-141-142 — Id. a metà dell'occhio: 87-89-90-91_2-94_2-95-96-97-99-100-101_2-102_3-(**102,50**)-107-108-118 — Id. alle narici: 17-22_2-**23**$_3$-24_5-25-26_5-27-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 44-45_2-46-48-49_4-(**49,50**)-51_2-52_2-53_3-54_3 — Id. alle narici: 22_2-24_2-**26**$_4$-27_4-28_3-30_5 — Lunghezza obliqua del capo: 98-100-104-**109**$_2$-111-112-113_4-115_2-116-117-118_3-120 — Diametro interorbitale: 22-25-26_3-27_3-(**27,50**)-28-29_3-30_4-31_2-32-33 — Dal muso alle narici: 0_6-2-4_2-5_2-8_2-9_2-(**10**)-11-12_2-13-18 — Dalle narici all'occhio: 19-22-23-24_6-(**24,50**)-25-26_3-27_4-29_2-30 — Dall'occhio al timpano: 0_5-2-8-3_4-4-5-(**5.50**)-9 — Diametro trasversale dell'occhio: 34-35_3-36_3-39_2-40_3-(**40.50**)-41_3-42_2-43-44-47 — Diametro minimo del timpano: 5-10-11-12_2-13_5-(**13.50**)-15_2-16_3-17-18-20-22_2 — Id. massimo: 7-13_3-(**14.50**)-15_5-16_2-17_2-18_2-20_3-22_2 — Lungh. delle parotidi: 69-75_2-77_2-78_2-80-82-(**82,50**)-83_3-85-86_2-87-89-91-93-96 — Largh. id.: 35_3-36_2-39_2-40-41_3-**42**-43_2-44_2-46_2-48-49 — Id. del braccio: 109-117-122_4-123-124_2-(**124,50**)-126_2-129_2-130-131_2-132-133-138-140 — Id. dell'avambraccio: 82-83_2-86-87_2-89_2-90-91_3-(**92**)-93_2-94_3-98-99-102 — Id. della mano: 77-82_2-83-85-86-(**86.50**)-87_2-89_2-90-91_2-92-93_3-95_2-96 — Id. del 1° dito: 39_2-40-41_2-42_2-43_5-44_3-(**44,50**)-45_2-46-48-50 — Id. del 2° dito: 31_2-32-34-35_7-(**35,50**)-36_6-38_2-40 — Id. del 3° dito: 30-39_3-(**39,50**)-41_3-42-43_3-44_3-45-46_2-47-48-49 — Id. del 4° dito: 26_3-27-28_2-29_2-30_5-**31**$_3$-32_2-36_2 — Id. del tubercolo palmare mediano: 18_6-19_2-20_4-**(20,50)**-21_2-22_5-23 — Id. dell'interno: 5-9-10_2-$\mathbf{11}_3$-12_4-13_3-14_3-16_3-17 — Id. della coscia: 119-124-130_2-132-133-135-**136**-138_2-139-143-144_3-145-147-150-152-153 — Id. della gamba: 112_2-117-119-122_3-124-**(124,50)**-129_3-130_2-131-132_3-134-135-137 — Id. del piede: 202_2-203-207-209-217-219_2-**221**-225-226_3-227-228-230-231-236_2-240 — Id. del 1° dito: 31_2-32_2-35_3-36_2-**(36,50)**-39_5-40_2-41_3-42 — Id. del 2° dito: 51_2-53-56-57_2-58_3-**(58.50)**-59_2-60-61-62_2-63_2-65_2-66 — Id. del 3° dito: 82-83-87-89_2-92_2-$\mathbf{93}_2$-95_3-99-100_3-101-102-103-104 — Id. del 4° dito: 119-122-132-133-135-136-137-**(137,50)**-138-139-140-142-143_2-144_2-147-148_3-156 — Id. del 5° dito: 80-83-85-86_2-87_3-**88**-89_2-90_2-91_3-94_2-96 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16_2-17_2-18_6-19-$\mathbf{20}_3$-21_2-22_2-23-24 — Id. dell'esterno: 4_4-5_3-6-7-9_6-**10**-12-13-15-16 — Dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-27-29-30_3-31_4-32_3-**(33,50)**-34-35-36_2-37-39-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 39_3-40_2-43_3-44_2-45_2-46-**(46,50)**-47_2-48-50-51-52-54 — Id. dall'apice del 3° dito: 55_2-59-61_3-62_2-65_3-67_2-68_3-**69**-71-78-83 — Id. dall'apice del 4° dito: 13-15_2-16_2-17_3-18_3-**(18,50)**-19-20_3-21-23-24_3 — Lungh. della ripiegatura tarsale: 39-48-49_3-$\mathbf{51}_2$-52_2-53_3-54-56_2-54-56_2-58-59-60-62-63.

Maschi in amore di Sardegna (Sassari).

Lunghezza del capo: 92-96-97-100_2-101_4-102_3-103_3-104_3-106_3-107_5-108_5-109-$\mathbf{110}_6$-111_3-112_2-113_4-115_2-116_3-122_2-124-128 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 111-113_2-116_2-117-118-119_3-120_4-122_3-123_4-124_5-$\mathbf{125}_5$-126_6-127_5-128_2-129_4-130_3-132_3-133-136-139 — Id. a metà degli occhi: 83-86_3-87-88_6-89_3-91_2-92_3-93-94_4-95_2-96_3-$\mathbf{97}_4$-98_5-99_3-100_3-101-102_5-104-105_4-106-111 — Id. alle narici: 19-20_2-21_6-22_7-23_{11}-**(23.50)**-24_7-25_{15}-26_5-27-28_2 — Altezza del capo alla regione timpanica: 39-41-42_2-43_2-44_5-46_4-$\mathbf{47}_6$-48_7-49_{10}-50_7-51_7-53_2-54_2-55 — Id. alle narici: 18-20-21_3-22_4-23-$\mathbf{24}_4$-25_{14}-26_9-27_6-28_6-29_4-30_4 — Lungh. obliqua del capo: 97-99_2-101_4-102-103-104_3-105_3-106_8-107_4-108_3-109_3-110_2-111_3-112_3-113_3-114_3-$\mathbf{115}_3$-116-117_2-122-129-133_2 — Diametro interorbitale: 22_2-23_3-24_4-25_6-26_8-27_{11}-28_6-**(28,50)**-29_8-30_4-31-32_3-35 — Dall' apice del muso alle narici: 0_2-3-4-5_2-6-7_3-8_3-9_6-10_3-11_2-**(11.50)**-12_4-13_{10}-14_3-15_6-16_3-17_2-18_3-19-20 — Dalle narici all'occhio: 19-20_3-21_{10}-22_{11}-23_9-**(23,50)**-24_6-25_{11}-26_3-27_2-28 — Dall'occhio al timpano: 0_{26}-2_{20}-3-4_7-5_3 — Diam. trasversale dell' occhio: 35_3-36_6-37_7-38_7-39_8-40_7-**(40.50)**-41_5-42_6-43_3-44_4-46 — Diametro minimo del timpano: 10-11-12_3-13_{13}-14_{11}-15_{10}-$\mathbf{16}_5$-17_4-18_4-19_4-22 — Id. massimo: 13_4-14_3-15_5-16_8-$\mathbf{17}_{11}$-18_{14}-19_3-20_5-21_4 — Lunghezza delle parotidi: 70-71-72-73-74-75_4-76_4-77_2-78_5-79_9-80_5-$\mathbf{81}_2$-82_5-83_6-84-86_2-88_2-89_2-90-91-92 — Id. larghezza: 32-34_5-35-36_2-37_4-38_5-39_6-40_8-41_7-**(41,50)**-42_6-43_3-44_4-45-46_3-48-51 Id. del braccio: 115-117-119-122-123_3-124_2-127_6-128_3-129_3-130-131_4-$\mathbf{132}_3$-133_4-134_3-135_5-136_3-137_2-138_4-139_4-141-142-149 — Id. dell'avambraccio: 85-89_2-91_6-92_8-93_4-94_2-95_4-**(95,50)**-96_5-97_4-98_3-99-100-101_3-102_6-103-104_2-105_2-106_2 — Id. della mano: 75-77-79-80_3-81-82-83_4-84_4-85_3-86_4-$\mathbf{87}_6$-88_5-89_3-90_3-91_5-92_5-93_2-94_2-96_2-98-99 — Id. del 1° dito: 32-34_4-35-36_4-37_3-38_3-39_5-40_4-**(40,50)**-41_6-42_9-43_3-44_8-46_5-49 — Id. del 2° dito: 25-28-29_5-30_5-31_6-32_8-$\mathbf{33}_5$-34_9-35_5-36_2-37-38_5-39-40_2-41 — Id. del 3° dito: 36-37-38_2-39_5-40_4-41_7-42_{12}-**(42,50)**-43_7-44_{10}-46_4-47-48-49_2 — Id. del 4° dito: 22-24-25_7-26_5-27_5-28_8-$\mathbf{29}_9$-30_9-31_4-32_3-33_2-35_2-36 — Id. del tuberc. palmare mediano: 15-17_3-18_4-19_4-$\mathbf{20}_5$-21_{10}-22_{10}-23_{11}-24_4-25_2 — Id. dell'interno: 3-5-9_5-10_2-11_2-**(11,50)**-12_5-13_8-14_{10}-15_8-16-17_7-18_5-20 — Id. della coscia: 120-127-131-134-135_2-136-137_2-138_2-139-$\mathbf{140}_3$-141-142_3-143_2-144_4-145_2-146_4-

147_5-148_4-149_4-150-151_2-152_3-154_3-155_2-157-160 — Id. della gamba: 112-116-123-124-125-126-127_3-128_3-129_3-130_5-131_2-132_5-**133_6**-134_3-135_4-136_3-137_3-138_2-139_2-141-142_2-144-146-147-154 — Id. del piede: 209-212-219-220_2-222_3-224-226_2-227_3-228_5-230-231_4-232-233_2-(**233,50**)-234_4-235-236_2-237-239_2-240-241-242_2-243_5-245-246-247-248_5-250_2-251-253-258 — Id. del 1° dito: 28-29-30-32_2-33_2-34_7-35_4-36_6-**37_3**-38_4-39_3-40_4-41_4-42_2-43_4-44_2-46_4 — Id. del 2° dito: 51-52-53-56-57-58_4-59_4-60_5-**61_7**-62_2-63_3-64_8-65_2-66-67_5-68_3-69_3-70_2-71_3 — Id. del 3° dito: 80-83-84-88_3-92_3-93_3-95_4-96_3-97-**98_4**-99_3-100_3-101_3-102_3-103_2-104_2-105_4-106_4-107_4-110_2-111-112-115-116 — Id. del 4° dito: 136-137-139_2-141_2-142-143_4-144_4-146_2-147_3-148_3-149_2-150_3-$151_2$$152_5$--**153**-$154_3$-155-156-$157_2$-158-$159_2$-$160_2$-161-162-163-$164_4$-168-170 — Id. del 5° dito: 84-85-87-88_4-89_3-91_7-92_6-93_3-94_5-95_3-96_5-97_4-**98_2**-99-100-101_3-102_4-103-108-112 — Id. del tubercolo metatarseo interno: 15-16-17_7-18_{10}-**19_7**-20_8-21_8-22_{11}-23_4 — Id. dell'esterno: 2-4_{11}-5_{11}-6_6-8_8-9_8-10_5-(**10,50**)-11_2-12-13-14_2-19 — Dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 24-25-26_2-27_2-28-29_2-38_8-31_2-32_6-(**32,50**)-33_2-34_8-35_7-36_5-37_5-39_4-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 26-36-37-38-39-40_3-41-**42_7**-43_5-44_6-45_2-46_{10}-47_3-48-49_8-51_3-53-57-58 — Id. dall'apice del 3° dito: 50-55_2-57-58-60_2-61_3-62_4-63_4-64_6-65_5-66_4-67-68_2-**69_3**-70_3-71_3-72-73-74_3-76-78-82_2-83_2-88 — Id. dall'apice del 4° dito: 5-8_5-9_4-10_3-11_4-12_5-13_5-14_4-(**14,50**)-15_5-16_5-17_6-18_7-21-23-24 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 42-44-46-47_2-48-49_3-50_2-51_7-**52_3**-53_7-54_6-55_5-56_4-57-58_6-59_3-60_2-61-62.

Maschi in amore di Messina.

Lunghezza del capo: 98-102_2-103-106-107-**108**-113-118 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 114-117-122_2-**123**-124-126-128-132 — Id. a metà degli occhi: 84-89-**93**-94_2-97-100-101-102 — Id. alle narici: 21-23_2-**24**-25-26_2-27_2 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42_2-44_2-46-(**46,50**)-47-48-51 — Id. alle narici: 21-23_2-24-(**24,50**)-25-26-27_2-28 — Lungh. obliqua id.: 98-102-(**106**)-107-108_2-112_2-113-114 — Diametro interorbitale: 21-25-**27**-28_3-29_2-33 — Dal muso alle narici: 0-2_2-3_2-4-5-(**8**)-11-14 — Dalle narici all'occhio: 21-23-25-(**25,50**)-26-27-28-29_2-30 — Dall'occhio al timpano: 0_5-2_2-4-5 — Diametro trasversale dell'occhio: 34-37_4-39_2-(**40,50**)-41-47 — Diam. minimo del timpano: 13-14-15_2-(**16**)-17-18_2-19 — Id. massimo: 14-15_2-16-(**16,50**)-17-18_2-19_2 — Lungh. delle parotidi: 75-76-78-79-(**82**)-84_2-87_2-89 — Id. larghezza: 30-31-34_2-(**34,50**)-35-37_2-39_2 — Lungh. del braccio: 122-123-126-129-131-(**132,50**)-136_2-142-143 — Id. dell'avambraccio: 87-89-93-94-95-(**96,50**)-97-98-99-106 — Id. della mano: 85-89_2-(**91**)-92-93-94_2-95-97 — Id. del 1° dito: 37_3-39-41-(**42**)-44_2-47_2 — Id. del 2° dito: 28-30-31-(**31,50**)-33-34_3-35_2 — Id. del 3° dito: 37-39-41-42_2-(**43**)-44-46-48-49 — Id. del 4° dito: 29-31_3-**32_2**-33-34-35 — Id. del tubercolo palmare mediano: 16-17-18-19_2-**20**-21-22-24 — Id. dell'esterno: 3-7-8_2-**9**-10-11-12-15 — Id. della coscia: 123-128-131-134-136-(**138**)-141-143-151-153 — Id. della gamba: 126-128-129-131_2-(**134,50**)-136_2-142-143 — Id. del piede: 222-229-233-234_2-236-238-(**238,50**)-248-249 — Id. del 1° dito: 34-36-37_4-39_2-(**40-50**)-42-47 — Id. del 2° dito: 64_2-66_2-67-68-(**70,50**)-73-74-77 — Id. del 3° dito: 99-102-103_2-107_2-(**107.50**)-108-112-116 — Id. del 4° dito: 143-150-156-**157**-159-160-169-171 — Id. del 5° dito: 89-97-98_3-(**100,50**)-102-106-111-112 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14-**18**-19_3-21_2-22_2 — Id. esterno: 5-8-9_2-**10_3**-11-15 — Dall'apice del 1° dito al margine libero della membrana interdigitale: 29-30-**33**-34_2-35_2-36-37 — Id. dall'apice del 2° dito: 37-39-40-41-**42**-44-46-47 — Id. dall'apice del 3° dito: 58-59-64-66-**(66,50)**-68-69-71-72-75 — Id. dall'apice del 4° dito: 10_2-14-15-**(16,50)**-17-18-21_2-23 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 47_2-49-51-**(52,50)**-53_2-54-57-58.

Femmine in amore di Messina.

Lunghezza del capo: 101-103-105-**(106)**-109-110-111 — Largh. del capo all'angolo del mascellare: 122-123-130-**(132)**-134-142 — Largh. id. a metà degli occhi: 89-92-94-95_2-**(100)**-111 — Id. alle narici: 22-23-**24_2**-25-26 — Altezza del capo alla regione timpanica: 41-42_2-**44**-45-47 — Id. alle narici: 22-23_2-**24**-26_2 — Lungh. obliqua del capo: 106-108-109-110-**(112,50)**-115-119 — Diam. interorbitale: 23-26-**28_2**-32-33 — Dal muso alle narici: 0_2-2_2-5-**(5,50)**-9 — Dalle narici all'occhio: 23-24_2-26_2-**(29,50)**-36 — Dall'occhio al timpano: 0_2-2-3_2-4 — Diam. trasv. dell'occhio: 34-35-**37_2**-38-40 — Diam. minimo del timpano: 13-14_2-**(15,50)**-16_2-18 — Id. massimo: 14_2-15-16-**(17,50)**-18-21 — Lungh. delle parotidi: 79_2-81-84-**(84,50)**-85-90 — Largh. id.: 32-33-35-**(36)**-37-38-40 — Id. del braccio: 110-116-117-119-**(120)**-122-130 — Id. dell'avambraccio: 81-83-84-**(88)**-89-90-95 — Id. della mano: 84-85-88-**(89,50)**-90-95 — Id. del 1° dito: 38-40-42-**(43,50)**-45-49 — Id. del 2° dito: 31-33-35-**(36)**-37_2-41 — Id. del 3° dito: 42-44-45_2-**(47)**-48-52 — Id. del 4° dito: 28-31-32-**(32,50)**-33-35-37 — Id. del tubercolo palmare mediano: 18-19-20_2-**(20,50)**-21-23 — Id. dell'interno: 5-8-9_2-10-11 — Id. della coscia: 126_2-127-130-**(139,50)**-147-153 — Id. della gamba: 112-**(122,50)**-126-127-130-132-133 — Id. del piede: 201-215-**(217,50)**-220-225-233-234 — Id. del 1° dito: 35-36-37-**(38,50)**-40_2-42 — Id. del 2° dito: 56-**(60,50)**-61-62_2-63-64-65 — Id. del 3° dito: 89-92-95-**(97,50)**-100-101-106 — Id. del 4° dito: 131-140-142-**(143,50)**-150-153-156 — Id. del 5° dito: 84-88-**(92,50)**-93-95-100-101 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16-18-19-20-21-**(22,50)**-29 — Id. dell'esterno: 5-9_3-**(10)**-14-15 — Dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-28-**(30,50)**-32-33_2-35 — Id. dall'apice del 2° dito: 35-37-41-**(41,50)**-43-45-48 — Id. dall'apice del 3° dito: 51-57-61-**(63,50)**-65-69-76 — Id. dall'apice del 4° dito: 13-14-16-**(16,50)**-19-20 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 51-52-55-**(56)**-57-58-61.

Maschi in amore di Milazzo.

Lunghezza del capo: 107-110-**(111,50)**-113-116 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 126-129-**130**-134 — Id. a metà degli occhi: 92-93-**(96)**-98-100 — Id. alle narici: 24-25-**(27)**-29-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 39-**(44.50)**-46_2-50 — Id. alle narici: 24-**26_2**-28 — Lungh. obliqua del capo: 107-110-**(112.50)**-115-118 — Diametro interorbitale: 26-**(27.50)**-28-29_2 — Dall'apice del muso alle narici: 2-3-**(7.50)**-12-13 — Dalle narici all'occhio: 24-**25**-26_2 — Dall'occhio al timpano: 0_2-2-3 — Diametro trasv. dell'occhio: 35-**(38)**-39-41_2 — Id. del timpano d. minimo: 15_3-**(16)**-17 — Id. massimo: 15_3-**(16)**-17 — Lunghezza delle parotidi: 72-73-**(78,50)**-81-85 — Id. larghezza: 34-35-**36**-38 — Id. del braccio: 122-125-**(125.50)**-128-129 — Id. dell'avambraccio: 87-93-**(93.50)**-98-100 — Id. della mano: 87_2-**(92.50)**-95-98 — Id. del 1° dito: 38-39-40-**(42)**-46 — Id. del 2° dito: 29-30-**(32.50)**-34-36

— Id. del 3° dito: 40-41-**(42,50)**-43-45 — Id. del 4° dito: 20-**(24,50)**-25-26_2-29 — Id. del tubercolo palmare mediano: 19-**(22,50)**-23-25-26 — Id. dell'interno: 9-10_2-**(12)**-15 — Id. della coscia: 126-128-**(137,50)**-140-149 — Id. della gamba: 122-128-**(133)**-135-144 — Id. del piede: 209-214-**(222,50)**-225-236 — Id. del 1° dito: 34-36-**(37,50)**-40-41 — Id. del 2° dito: 58-63-**(64)**-67-70 — Id. del 3° dito: 93-102-**(103)**-110-111 — Id. del 4° dito: 145-146-**(152,50)**-159-160 — Id. del 5° dito: 87-92-**(93,50)**-98-100 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 19-**20_2**-21 — Id. dell'esterno: 5_3-**(7)**-9 — Distanza dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 29-31-**(32,50)**-35-36 — Id. dall'apice del 2° dito: 34-**(40)**-41-43-46 — Id. dall'apice del 3° dito: 58-**(64)**-67-70_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 5-**(8,50)**-10_2-12 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 52-53-**(56)**-60_2.

Femmine in amore di Milazzo.

Lunghezza del capo: 101-102-106-**108**-110_2-115 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 127_2-129_2-130_2-**(131,50)**-136 — Id. a metà degli occhi: 89-90-93-**(95)**-96-99-101_2 — Id. alle narici: 22-24-25_2-**26_2**-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 40-42-43-44-**(45,50)**-47-48-51 — Id. alle narici: 22-**24**-25_2-26_3 — Lunghezza obliqua del capo: 107-110-111-112-113_2-**(113,50)**-120 — Diametro interorbitale: 26_2-27-**(28)**-29-30_3 — Dall'apice del muso alle narici: 0_2-2-3_3-10 — Dalle narici all'occhio: 22-23_2-24-25-**26**-30 — Dall'occhio al timpano: 0_2-2_2-3_3 — Diametro trasv. dell'occhio: 36_2-38-**(40,50)**-41-42_2-45 — Diam. minimo del timpano: 14-15_3-**16_2**-18 — Id. massimo: 14-15_3-16_2-18 — Lunghezza delle parotidi: 73-79-80_2-81-**(83)**-86-89 — Larghezza id.: 31-35-**(36,50)**-37-40-41-42 — Lunghezza del braccio: 115_2-118-**120**-122_2-125 — Id. dell'avambraccio: 75-80-**(81)**-85-86_2-87 — Id. della mano: 63-**77**-80-85_2-86-87-91 — Id. del 1° dito: 36-**42**-45-46_2-48_2 — Id. del 2° dito: 31-**34**-35_2-36-37_2 — Id. del 3° dito: 38-40_2-41-42-**(42,50)**-46-47 — Id. del 4° dito: 25-26-27-**(28,50)**-29-30-31-32 — Id. del tubercolo palmare mediano: 16-19-**21**-22-25_2-26 — Id. dell'interno: 5_2-**8**-9-10_2-11 — Id. della coscia: 115-125-126-**(127)**-134-136-138-139 — Id. della gamba: 102-**(113,50)**-115-122_2-123-125_2 — Id. del piede: 191-208-**(213)**-215-217-219-221-235 — Id. del 1° dito: 32-36-**(37)**-38-40-41-42 — Id. del 2° dito: 58-62-**(63)**-65_2-68 — Id. del 3° dito: 90-93_2-95-**(95,50)**-99-101 — Id. del 4° dito: 129-132-135-136-**(136,50)**-144_2 — Id. del 5° dito: 89-90_2-**(92,50)**-93_2-96 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16_2-**(18,50)**-19_2-20-21 — Id. dell'esterno: 5_3-**(8)**-9-10-11 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-**31_2**-32-34-35 — Id. dall'apice del 2° dito: 40-41-**(41,50)**-42-43-45_2 — Id. dall'apice del 3° dito: 62_2-63-**65**-67-68 — Id. dall'apice del 4° dito: 11-14-15-**16**-19-21 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 42-49-**51**-53_2-57-60.

Giovani (lunghezza base da mill. 11 a mill. 20) *del contorno di Beyruth in Siria.*

Lunghezza del capo: 131_3-133-**(134,50)**-135-138 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 123-124-**(128)**-131_3-133 — Id. del capo a metà degli occhi: 98_4-**(106)**-113-114 — Id. del capo alle narici: 33_4-**(33,50)**-34_2 — Diametro interorbitale: 38-45-**(47,50)**-55-57_3 — Dall'apice del muso alle narici: 0_3-5-6 — Altezza del capo alla regione timpanica: 45-**(55)**-57-65_3 — Id. alle narici: 29_2-33_3-**(33,50)**-38 — Lunghezza obliqua del capo (dall'apice del muso all'angolo posteriore del mascellare superiore): 133-135_2-**(140,50)**-148_3 — Dalle narici all'occhio: 38-**(43,50)**-45-49_3 — Diametro trasversale dell'occhio: 56-**(56,50)**-57_3 — Lunghezza del braccio: 98_3-**(106)**-111-113-114 — Id. dell'avambraccio: 73_4-**(78)**-81-83 — Id. della mano: 73-83-**(85,50)**-95-98 — Id. della coscia: 124-133-**(136)**-138-148_3 — Id. della gamba: 111-113-**(122)**-131_3-133 — Id. del piede: 183-191-**(198)**-208-213_3 — *Esemplari con 19 mill. di lungh. base.* Lungh. del 1° dito della mano: 38 — Id. del 2° dito: 31 — Id. del 3° dito: 57 — Id. del 4° dito: 38 — Id. del tubercolo palmare mediano: 19 — Id. del tubercolo palmare alla base del dito interno: 19 — Id. del 1° dito del piede: 38 — Id. del 2° dito: 57 — Id. del 3° dito: 95 — Id. del 4° dito: 133 — Id. del 5° dito: 95 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 19 — Id. del tubercolo metatarsale esterno: 8 — Altezza delle membrane interdigitali del piede: fra il 1° e 2° dito: 38 — Id. fra il 2° e il 3° dito: 57 — Id. fra il 3° e il 4° dito: 76 — Id. fra il 4° e il 5° dito: 28 — Lungh. della piegatura cutanea tarsea interna: 57.

Maschi in amore di Siria.

Lunghezza del capo: 96-97-98-101-102_2-104_2-106-107-**(108)**-111-113-116-118-120_2 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 113-115_2-116_2-120_3-**(121)**-122_3-123-126-127-128-129 — Id. a metà degli occhi: 83-86_2-93-94-95_2-96_2-**97**$_2$-98-100-101-108-111 — Id. alle narici: 21-22_3-23_3-24_4-25-**(25,50)**-26-28_2-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 37-38_2-39-41-42_3-**(42,50)**-43-44_4-45_2-48 — Id. alle narici: 19-22_2-23-24_5-**25**-26_2-27-28_2-31 — Lungh. obliqua del capo: 102-106_2-107_2-108-109_2-110_2-**111**$_3$-113-118-120 — Diametro interorbitale: 22-23-24_3-25-**26**$_2$-27-28_3-29_2-30_2 — Distanza dal muso alle narici: 3_3-6-9-**(10)**-12_2-13-14_3-15_2-16_2-17 — Id. dalle narici all'occhio: 19-22-23_2-24_2-**(24,50)**-25-26_2-27-28_2-29_2-30_2 — Dall'occhio al timpano: 0_7-2_5-**3**$_3$-4 — Diam. trasversale dell'occhio: 36-37-38_4-39_3-**40**-42_4-43-44 — Diam. minimo del timpano: 12_3-13-14_3-**(14,50)**-15_2-16_4-17_3 — Id. massimo: 12-13-14-15_3-**16**$_4$-17_4-19-20 — Lungh. delle parotidi: 62-65-72_2-**(73,50)**-74-75-76-78_2-79-82_2-83-84-85_2 — Largh. delle parotidi: 29-30-31_2-32_2-34_5-36_2-**(36,50)**-37-38-39-44 — Lungh. del braccio: 118-120_2-123-124-125_2-126_2-127_2-**(128)**-131-132-137-138 — Id. dell'avambraccio: 84-89_2-90-92_2-**93**-96_4-100-101_2-102_2 — Id. della mano: 83_2-84-85-86-87-89_2-90_2-91-**(92,50)**-93-95_2-96-102 — Id. del 1° dito: 30-34_4-36-**37**$_2$-38-39_2-42_4-44 — Id. del 2° dito: 25-28_2-29_2-31_3-**(31.50)**-32_3-33-34_2-36-38 — Id. del 3° dito: 36-38_2-39_4-**42**$_4$-43_2-44-45-48 — Id. del 4° dito: 24_2-25-26-27-28_5-**(28,50)**-29_3-30-32-33 — Lungh. del tubercolo palmare mediano: 19_3-21-22_4-**(22,50)**-23_3-24_3-26 — Id. del tubercolo palmare interno: 10-14_2-15-16_2-**(16.50)**-17_3-19_3-21_2-22-23 — Id. della coscia: 133_2-134-135-136-138-139-141-142-144-**(145,50)**-146_2-148-149-152-158 — Id. della gamba: 124-125-130_2-131_3-132-133_2-**(134)**-135-138-139-141-142-144 — Id. del piede: 209-217-222_3-225-226-**227**-228-229-230-231-233_2-242-245 — Id. del 1° dito: 34-35-36_2-37_2-38_3-**39**$_2$-42-43_2-44_2 — Id. del 2° dito: 58-60_2-62_2-63_2-64-**(65,50)**-66_2-68_2-70-71-72-73 — Id. del 3° dito: 93_2-95-96-101-**(101,50)**-102_2-104_3-106-107_3-109-110 — Id. del 4° dito: 133-139-141-143-146-147-**148**-149_2-150-151-152-153-156-158-163 — Id. del 5° dito: 89-94-95-96-97_2-98-99-**(99.50)**-101_4-102_2-109-110 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14-15-17-18-**19**$_4$-20-21_2-22-

23$_2$-24$_2$ — Id. dell'esterno: 5$_2$-6-7$_2$-8$_2$-9$_2$-**(9,50)**-11$_4$-12$_2$-14 — Dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-30-31$_2$-32$_3$-**33**-34$_3$-35-36-37-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 31-39-**42**$_3$-44-45-46-48$_3$-49$_3$-52-53 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-60-62$_4$-63$_3$-**(64,50)**-66$_2$-68-69-72$_2$-74 — Id. dall'apice del 4° dito: 9-12-13-16-**17**$_4$-18-19$_4$-22-23-25 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 47-50-51-53$_3$-55-56-**(56,50)**-58-59-60-62$_3$-63-66.

Femmine in amore di Siria.

Lunghezza del capo: 87-95-97-**(98,50)**-99-100-101-103-109-110 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 92-**109**-111-116-123$_2$-125$_2$-126 — Id. a metà degli occhi: 82-87$_2$-**(89,50)**-90-93-94-95-96-97 — Id. alle narici: 20-21-22$_3$-**(23)**-24-26$_3$ — Altezza del capo alla regione timpanica: 37-39-40-41-42-**(42,50)**-43$_4$-46 — Id. alle narici: 21$_2$-22-24$_3$-**(25)**-26$_2$-29 — Lunghezza obliqua del capo: 90-95-99-100-**101**-103-104-105-112 — Diametro interorbitale: 19-22-**(22,50)**-24-26$_5$ — Distanza dal muso alle narici: 0$_2$-1-2$_3$-3-5-**(6,50)**-12-17 — Id. dalle narici all'occhio: 19-22-**(22,50)**-24$_2$-26$_4$ — Id. dall'occhio al timpano: 0$_4$-2-3$_2$-4-**(4,50)**-7 — Diametro trasversale dell'occhio: 34-35$_2$-36-37-**38**-39$_2$-42 — Id. minimo del timpano: 12-13$_2$-**(14,50)**-15$_2$-16$_2$-17$_2$ — Id. massimo: 12-**15**-16-17$_4$-18$_2$ — Lungh. delle parotidi: 69-72-73-74$_3$-75-**(76)**-82-83 — Largh. delle parotidi: 30$_2$-31$_2$32-35-**(38,50)**-43$_2$-46 — Lungh. del braccio: 104$_2$-110-111-113$_2$-**(113,50)**-116-120-123 — Id. dell'avambraccio: 74-75-78-79-**(81)**-82$_2$-84-87-88 — Id. della mano: 75-77-78$_2$-**82**-87$_2$-88-89 — Id. del 1° dito: 34-35-36-38-**39**$_2$-41-42-44 — Id. del 2° dito: 26$_3$-28-30$_2$-**(31)**-32-34-36 — Id. del 3° dito: 32-33-34-36-37-**(38)**-39-42-43-44 — Id. del 4° dito: 26$_5$-**(27,50)**-28$_3$-29 — Lungh. del tubercolo palmare mediano: 17$_2$-19$_2$-**(19,50)**-20-21$_2$-22$_2$ — Id. dell'interno: 7-9$_2$-12-**(12,50)**-13-15-16-17-18 — Id. della coscia: 117-120$_2$-123-126-130-**(131,50)**-132-139-146 — Id. della gamba: 111-112-113-114-120-**125**-126-130-139 — Id. del piede: 178-191$_2$-198-**(198,50)**-202-206-211-217-219 — Id. del 1° dito: 31-34$_2$-35$_2$-**(36,50)**-37-38$_2$-42 — Id. del 2° dito: 56$_2$-57-58-59-61$_2$-**(62)**-65-68 — Id. del 3° dito: 86-87$_2$-90-91-**(93)**-94-95-97-100 — Id. del 4° dito: 106-120-124-126$_2$-127-129-143-**(147,50)**-189 — Id. del 5° dito: 79-82$_2$-86-87$_2$-**(89)**-91-92-99 — Id. del tubercolo metatarseo interno: 17$_2$-18-19-**20**$_3$-22-23 — Id. dell'esterno: 8-9$_4$-10$_2$-**(11)**-13-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26$_2$-**30**$_3$-31-32-34 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-41-43$_2$-**(43,50)**-44-47-48 — Id. dall'apice del 3° dito: 52-56-59-**60**-63-65-66-68 — Id. dall'apice del 4° dito: 13-17-**(17,50)**-18-19-20-21$_2$-22 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 35-**(46)**-47-48-52$_2$-53-57$_2$.

Individui giovani di Siria in cui la lunghezza base varia da mill. 30 a 50.

Lunghezza del capo: 81-**(98)**-103-108-109-110$_2$-111-114-115 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 122$_2$-123$_4$-126$_2$-**(127,50)**-129-133 — Id. a metà degli occhi: 81-95-103-104-105-110-**(114)**-115-118-147 — Id. alle narici: 24-25$_2$-26$_2$-27$_3$-**(27,50)**-31 — Altezza del capo alla regione timpanica: 40-41$_2$-43-**(44)**-45$_2$-47-48$_2$ — Id. alle narici: 24$_2$-25$_2$-26$_2$-27$_2$-**(27,50)**-31 — Lunghezza obliqua del capo: 109-112-114-117-**(117,50)**-118-120-123$_2$-126 — Diametro interorbitale: 25-28-30-**(30,50)**-31$_3$-32-33-36

— Id. dal muso alle narici: 3-4_{1}-**(5,50)**-5_{2}-8_{2} — Id. dalle narici all'occhio: 25-27_{2}-28-**(29)**-30-31_{3}-33 — Id. dall'occhio al timpano: 2-4-**(4,50)**-5-7 — Diametro trasversale dell'occhio: 41_{2}-43-44_{2}-45-47-**(47,50)**-49-54 — Id. minimo del timpano: 8-9-**12**-13_{2}-14_{2}-16_{2} — Id. massimo: 9-12-**(12,50)**-13_{2}-14-16_{4} — Lunghezza delle parotidi: 65-75-77-79-**(79,50)**-80-81_{2}-90-94 — Id. larghezza: 33-34-35-37-40-41-**(43,50)**-45-47-54 — Lunghezza del braccio: 106-108-114-115_{2}-116-**(117)**-118-125-128 — Id. dell'avambraccio: 70-**(80)**-81-82-86_{2}-88_{2}-90_{2} — Id. della mano: 70-81-82-**(84)**-86_{2}-88-90-95-98 — Id. del 1° dito: 33-40-**41_{2}**-43-44-45-47-49 — Id. del 2° dito: 27-29-32-**34_{2}**-35-36-39-41 — Id. del 3° dito: 40-41-43-44-**(44,50)**-45_{2}-47-48-49 — Id. del 4° dito: 21-25-26_{2}-27_{2}-31-**(32,50)**-34-41 — Id. del tubercolo palmare mediano: 16_{2}-17_{2}-**18_{3}**-20_{2} — Id. dell'interno: 8-9_{2}-12_{2}-**(12,50)**-14-16-17_{2} — Lunghezza della coscia: 118-129-131-132-**(133,50)**-135-136-144-147-149 — Id. della gamba: 123_{3}-128-**129_{2}**-131-133-135_{2} — Id. del piede: 184-197-205-**(205,50)**-206-207-210-216_{2}-221-227 — Id. del 1° dito: 33-34_{2}-35-36_{3}-**(37)**-39-41 — Id. del 2° dito: 49-51-53-54_{2}-56-59-**(59,50)**-65-70 — Id. del 3° dito: 81-82-86-88_{2}-90-**(90,50)**-96-106-110 — Id. del 4° dito: 126-129-131-132-135-**(137,50)**-143-144-147-149 — Id. del 5° dito: 81-82-86-88_{2}-**(89,50)**-90-94-95-98 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14-**17**-18_{3}-20_{4} — Id. dell'esterno: 4_{3}-9_{2}-**(10)**-13-14-16 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 25-26_{2}-27_{5}-**(31)**-32-35-37 — Id. dall'apice del 2° dito: 35-41-**(43)**-45_{2}-48_{2}-49-51 — Id. dall'apice del 3° dito: 53-56-60-**(62,50)**-65_{2}-68-70-72_{2} — Id. dall'apice del 4° dito: 16_{3}-18_{3}-**(21)**-24-25-26 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 44-48-51-54_{3}-**(54,50)**-55-56-65.

Maschi in amore di Corfù.

Lunghezza del capo: 92-97-98_{2}-101_{3}-**(101,50)**-102-104_{2}-105_{2}-106-107-108_{4}-109_{2}-110-111 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 115-116_{2}-117-118_{3}-120_{4}-122-124_{2}-126_{5}-**(126,50)**-127-134-138 — Id. a metà degli occhi: 92-94-96_{3}-97-98_{2}-99-100-**(101)**-102_{2}-104_{2}-105_{2}-106-107-108_{2}-110 — Id. alle narici: 23-24-25_{3}-26_{2}-**(26,50)**-27_{10}-29_{2}-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 38-39_{3}-40_{2}-41_{5}-42_{5}-**(42,50)**-43_{2}-44_{2}-45-47 — Id. alle narici: 23_{3}-24_{3}-25_{3}-26-**(26,50)**-27_{5}-28_{4}-29-30_{2} — Lungh. obliqua del capo: 104_{2}-105-107_{4}-108-109_{2}-110_{2}-**(113)**-114_{4}-115-116-118_{2}-120-122 — Diametro interorbitale: 23-24-25_{3}-26_{2}-27_{4}-**(27,50)**-28_{4}-29-30_{4}-31-32 — Id. dall'apice del muso alle narici: 6_{3}-8_{2}-9_{2}-10_{3}-**(10,50)**-11_{6}-12_{5}-15 — Id. dalle narici all'occhio: 23-24_{2}-26_{3}-**27_{3}**-28_{4}-29_{2}-30_{5}-31_{2} — Id. dall'occhio al timpano: 0_{13}-3_{9} — Diam. trasv. dell'occhio: 30-34-35-36-**(36,50)**-38_{4}-39_{6}-40-41_{3}-42_{3}-43 — Id. minimo del timpano: 11-12-**15_{2}**-16_{5}-17_{6}-18_{6}-19 — Id. massimo del timpano: 11-16-16_{4}-**(16,50)**-17_{7}-18_{7}-19-22 — Lunghezza delle parotidi: 68-71-72_{2}-73_{3}-74-**76_{2}**-78_{4}-79-81_{2}-82_{2}-83_{2}-84 — Id. larghezza: 23-26_{2}-27-28-29_{3}-30_{3}-**(30,50)**-31-32-33_{2}-34_{3}-35-36_{2}-38 — Lunghezza del braccio: 102-110-113-116_{3}-118-120_{5}-**(120,50)**-122-124-126_{3}-128-129_{2}-130-139 — Id. dell'avambraccio: 81-85-87_{3}-90_{4}-**(91,50)**-93-96_{3}-97_{2}-98_{2}-99-100-101-102 — Id. della mano: 84-86-87_{5}-89-90-92-**93**-96_{4}-97-101-102_{2} — Id. del 1° dito: 34-35_{2}-36-37-38_{5}-39_{2}-**(39,50)**-41-42_{4}-44_{2}-45_{2} — Id. del 2° dito: 30-31-32_{3}-33-34_{3}-35_{2}-**36_{5}**-38_{2}-39-42_{2} — Id. del 3° dito: 39-40-43-44_{4}-46_{3}-**(46,50)**-47_{2}-48_{4}-49_{2}-51_{3}-54 — Id. del 4° dito: 26-27_{2}-29_{4}-30-**31**-32_{3}-33_{3}-34_{2}-36_{5} — Id. del tubercolo palmare mediano: 16_{4}-17_{5}-18_{7}-19_{3}-**(19,50)**-21-23_{2} — Id. dell'interno: 11-12_4-13-14_3-**(14,50)**-15_5-16_3-17_4-18 — Id. della coscia: 131-137-139-141_3-144-145_3-146_2-**(146,50)**-148-150_2-153-155_2-156-158-159-162 — Id. della gamba: 123-124-130-131_2-132-134_2-**(134,50)**-135-137-138_2-139_4-140-142-144_2-146 — Id. del piede: 214-215-221-224-228_2-230-232-234-235-238_2-**(239)**-240-242_2-245-246_3-250-264 — Idem del 1° dito: 33_2-35_2-36_2-37-38_4-39_4-**40**-41_2-42_2-47 — Id. del 2° dito: 59_2-60-61-62-63_2-64-**66_5**-69-70_2-72_3-73_2 — Id. del 3° dito: 91-96-97-98_3-99-101-103-105-**(105,50)**-106-108_4-109-110_2-111-113-120 — Id. del 4° dito: 134-141_2-144-145-149-150-**151_2**-152-153_3-156-157-159-161-163-168_3 — Id. del 5° dito: 90-91-93_2-96_2-97-98_4-**99**-100-101-102-103-104-105-108_3 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-16_4-17_7-18_7-**19**-21-23 — Id. esterno: 8_2-9_6-10_2-**11_3**-12_6-14_3 — Id. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-28-29-32-33_4-34_2-**(34,50)**-35_2-36_3-37_2-38-39_2-42 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-41_2-42_2-43-44_4-45-**46_2**-47-48_3-49_2-50-53 — Id. dall'apice del 3° dito: 54-60-62_2-63_2-64_3-**66_4**-67-70-71_2-72-74-78_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 10-11-12_9-**14**-15-16_2-17_4-18_2 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 45-48-49-50-51-52_4-53-**(53,50)**-54_3-55_2-57-58-59-60_3-62.

Femmine in amore di Corfù.

Lunghezza del capo: 86-97_2-98_2-99_2-**(100,50)**-101_2-103-104-105_3-106_3-107-108-109_4-110-111_2-115 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 108-110-112-114-117-118_5-119-120_3-122_2-**(122,50)**-124_4-126-128-129_2-136-137 — Id. a metà degli occhi: 86-87-91-92-93-94_2-95-97_3-98_2-**(100,50)**-101-102_2-103_3-104_2-105-106_2-111-115 — Idem alle narici: 20-23_4-24-**25_3**-26_5-27_4-28_3-29_4-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 35-37-39-40_4-41_5-42-**43_4**-44_2-46_3-47_2-48-51 — Id. alle narici: 21-23_6-24_3-**25_6**-26_4-27_3-28_2-29_2 — Id. lunghezza obliqua: 105-108_2-109_2-110-111_3-112_3-114-115_2-116-118_4-122_4-**(124,50)**-131-144 — Diam. interorbitale: 22-23_4-24_3-25_3-26_3-27_3-28_2-**29_5**-35-36- — Id. dall'apice del muso alle narici: 0-3-6_5-7_3-8-**(8,50)**-9-10_4-11_3-12_3-13_2-14_2 — Idem dalle narici all'occhio: 23_4-24_3-25_5-**26_3**-27_3-28_2-29_6 — Id. dall'occhio al timpano: 0_{18}-2_2-3_5-4 — Diam. trasversale dell'occhio: 34-35_3-37_2-38_2-39_2-40_3-**(40,50)**-41_4-42_2-43_4-45-46-47 — Id. minimo del timpano: 13_3-14_5-15_3-16_2-**17_6**-18_3-19_3-21 — Id. massimo: 13_2-14_4-15_2-16-**17_5**-18_4-19_6-20-21 — Lungh. delle parotidi: 69-70-71-75_2-76_4-77-79_3-80_2-**(80,50)**-81_3-82-85_2-86_2-88-92 — Id. larghezza: 23_2-27-28-29_5-30_5-31_2-**33_2**-34-35_2-37-38-41-43 — Id. del braccio: 97-102-104_3-105_2-107-109_2-110-**111_2**-112_3-115_4-117-117-118_2-124-125 — Id. dell'avambraccio: 74-81_3-84_2-85_2-87-**(87,50)**-88_3-89_2-90-92_5-93-94_2-101_2 — Id. della mano: 84_2-85_2-86_2-87_3-88_3-89_2-90_2-**(90,50)**-92_5-93-94_3-97 — Idem del 1° dito: 35-39_3-40-41_2-42_2-**(42,50)**-43_3-44-45_2-46_5-47-50_2 — Id. del 2° dito: 27-30_2-32_2-33-34_5-35_3-36_2-37_4-39_2-41_3 — Id. del 3° dito: 43-44_2-45-46_{11}-**47_2**-48_4-49-50-51_2 — Id. del 4° dito: 28-29-30_2-31_4-32_2-33_4-34_4-35_3-**(35,50)**-37_2-39-43 — Id. del tubercolo palmare mediano: 14_2-15-16-17_6-**(17,50)**-18_4-19_6-20_5-21 — Id. dell'interno: 6_3-7_5-9_4-**10_6**-11_3-12_2-13-14_2 — Id. della coscia: 125-128-129-131_2-132-133-134-136_2-137-138_2-139-143_2-**(144,50)**-144_2-145_2-148-149_2-151-152-164 — Id. della gamba: 115-118-122_2-125-126_3-**(126,50)**-128_2-129_2-130_4-131_3-132-133-134-136-137_2-138 — Id. del piede: 197-212-214-215_4-216_2-218_2-219-**(219,50)**-223_3-224_4-228-229-230-231_2-236-242 — Id. del 1° dito: 31-32-33_3-34_4-35_6-36_2-37_2-39_2-**(39,50)**-40_2-41-44-48 — Id. del 2° dito: 50-52_2-53-54-55-56-57-58_2-59_2-**(60)**-61_3-62-63_3-64-65_2-66-69-70_2 — Id. del 3° dito: 84-87-88-

90-92$_2$-93-94$_3$-95-96$_2$-97$_2$-98$_3$-99$_2$-100-101-103-104-107-108 — Id. del 4° dito: 132-133-134$_2$-137-138-139-140-141-142$_2$-143$_6$-144$_3$-145-(145,50)-151-155-156-159 — Id. del 5° dito: 84$_2$-86$_2$-87-90$_2$-92$_3$-94$_3$-95-(95,50)-97-98$_2$-99-101-104-107 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14$_2$-15$_2$-16-17$_7$-18$_4$-19$_4$-20$_4$-21-22 — Id. dell'esterno: 6$_2$-7$_3$-9$_7$-10$_4$-11$_2$-12$_2$-13-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 25-29-30$_2$-31$_3$-32$_2$-33$_4$-(33,50)-34$_5$-35$_3$-36$_2$-37-42 — Id. dall'apice del 2° dito: 35-41-42-43$_3$-(43,50)-44-46$_7$-47$_3$-48$_5$-50-51-52$_2$ — Id. dall'apice del 3° dito: 58-61$_3$-63$_3$-64-65-(66,50)-67-68$_2$-69$_6$-70-71$_2$-72$_3$-75 — Id. dal 4° dito: 14$_2$-15$_3$-16-17$_2$-18$_3$-19$_4$-20$_5$(20.50)-21$_2$-22$_2$-23-27 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 46$_2$-47-50-51$_2$-52$_7$-53$_2$-(53.50)-54-55$_3$-56$_2$-58-59$_2$-61$_1$.

Maschi in amore di Candia.

Lunghezza del capo: 95-99-(100,50) — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 113-117-(117,50)-118-122 — Id. a metà degli occhi: 93-94-95-(97)-101 — Id. alle narici: 24-25$_2$-26 — Id. Altezza alla regione timpanica: 42-44-46$_2$ — Idem alle narici: 24-25$_2$-26 — Lungh. obliqua del capo: 101-104-(106,50)-108-112 — Diametro interorbitale: 25$_2$-(25,50)-26$_2$ — Id. dal muso alle narici: 7-10-(11)-13-15 — Id. dalle narici all'occhio: 21-(23,50)-25$_2$-26 — Id. dall'occhio al timpano: 3$_4$ — Diametro trasv. dell'occhio: 37-39-41$_2$ — Diametro minimo del timpano: 3-(11.50)-15$_2$-20 — Id. massimo: 18-19-20-(21,50)-25 — Lunghezza delle parotidi: 69-(73)-74-76-77 — Larghezza id.: 29-31-(32)-33-35 — Lunghezza del braccio: 123-127-128-(130)-137 — Id. dell'avambraccio: 95-98-99-101 — Id. della mano: 88-90-91-(93)-98 — Id. del 1° dito: 37-39-41$_2$ — Id. del 2° dito: 30-31-32-(32,50)-35 — Id. del 3° dito: 37-39-41$_2$ — Id. del 4° dito: 25-26-(30)-31-35 — Id. del tubercolo palmare mediano: 20-21$_2$-(22.50)-25 — Id. dell'interno: 19-20$_2$-21 — Lunghezza della coscia: 148-149-(150,50)-153 — Id. della gamba: 134-138-(141)-148 — Id. del piede: 236-237-239-(239,50)-243 — Id. del 1° dito: 35-(39,50)-40-44 — Id. del 2° dito: 59-(65,50)-66-69-72 — Id. del 3° dito: 94-(106,50)-107-111-113 — Id. del 4° dito: 148-152-153-(153,50)-159 — Id. del 5° dito: 89-96-101-103 — Lungh. del tubercolo tarsale interno: 15-16-(17,50)-20 — Id. dell'esterno: 5$_3$-(9)-13 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 33-36-37-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-(45)-46-48-51 — Id. dall'apice del 3° dito: 62-63-64-66 — Id. dall'apice del 4° dito: 5-10-(11,50)-16-18 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 58-59-61-62.

Femmine in amore dell'isola di Candia.

Lunghezza del capo: 93-95-99$_2$-100$_2$-(100,50)-101$_2$-103-105-108 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 112-113-114-115-116$_2$-(117,50)-118-119-122$_2$-123- — Id. a metà degli occhi: 90$_2$-91$_2$-93-95-98$_2$-99-100$_2$ — Id. alle narici: 21$_2$-22$_2$-23-24$_2$-(24,50)-25$_2$-26-28 — Altezza del capo alla regione timpanica: 40-41$_2$-42$_2$-43$_2$-44$_2$-46$_2$ — Id. alle narici: 22$_2$-24-25$_3$-26$_3$-28$_2$ — Lunghezza obliqua del capo: 100-101$_2$-102-104$_4$-108$_2$-116 — Diametro interorbitale: 24-25$_2$-26$_2$-27-(27,50)-29-30-31 — Id. dal muso alle narici: 0$_3$-2-3-4-5$_2$-(8)-10-11-14 — Id. dalle narici all'occhio: 22-24$_2$-25$_2$-26$_3$-27-28$_2$ — Id. dall'occhio al timpano: 2$_2$-3$_4$-4-5$_3$-8 — Id. trasversale dell'occhio: 38$_2$-

40-**41**$_4$-42-44$_2$ — Id. minimo del timpano: 10-13$_3$-(**13,50**)-14-15-16-17$_3$ — Id. massimo: 13$_2$-15$_2$-16-**17**$_3$-19-20-21 — Lunghezza delle parotidi: 71$_2$-72-74-75-(**76,50**)-77-78-79-81$_2$-82 — Largh. id.: 25-27-29-31-32-**33**-35-36-38-39-41 — Lungh. del braccio: 111-115-116-118$_2$-119$_2$-(**119,50**)-122$_2$-123-128 — Id. dell'avambraccio: 84$_2$-85-86-89-(**80,50**)-90-92-93-94-95$_2$ — Id. della mano: 82-83-84-85$_2$-**86**-87-89$_2$-90 — Id. del 1° dito: 35-37-39$_2$-(**39,50**)-40-41$_3$-43$_2$-44 — Id. del 2° dito: 31-32-33$_5$-**35**-36$_2$-39 — Id. del 3° dito: 39-40-43$_3$-44-(**45**)-46$_2$-48-50-51 — Id. del 4° dito: 28$_3$-30-31$_2$-(**32**)-33$_3$-35-36 — Diam. mass. tubercolo palmare mediano: 16-18$_2$-19-**20**$_2$-21$_2$-22$_2$-24 — Id. dell'interno: 8$_2$-9-10$_3$-11$_2$-(**13**)-14-16-18 — Lungh. della coscia: 122-128$_2$-129-(**130,50**)-132-133-134-137-138$_2$-139 — Id. della gamba: 118$_2$-119-120-122-123$_2$-124-127$_2$-(**128,50**)-139 — Id. del piede: 195-202-204-(**205,50**)-208-211-212-213$_2$-216$_3$ — Id. del 1° dito: 33$_4$-35-36$_2$-(**37,50**)-39$_3$-42 — Id. del 2° dito: 51-52-54-55-57-58-(**58,50**)-59-61-62-63-66 — Id. del 3° dito: 83-85-89-91-(**91,50**)-93$_3$-94-95$_2$-100 — Id. del 4° dito: 123-126-128$_2$-129-133$_2$-(**133,50**)-134-138-139-144 — Id. del 5° dito: 81$_2$-83-84-85-87$_2$-(**87,50**)-89$_2$-90-94 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-16-17$_2$-18-19-**20**-21$_2$-22-25 — Id. esterno: 5$_2$-8$_2$-9-10-**11**$_2$-12-15-17 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdig.: 26-28-29$_3$-30-(**30,50**)-33$_3$-34-35 — Id. dall'apice del 2° dito: 38-39-41$_3$-43-44$_2$-46-(**46,50**)-55 — Id. dall'apice del 3° dito: 51-56-57-58-(**58,50**)-59-62$_3$-66$_3$ — Id. dall'apice del 4° dito: 10-12-14-15$_3$-**16**-17-18-19-22 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 43-46-48-49-**50**-51$_2$-54-55$_2$-57.

Maschi in amore di Ancona.

Lunghezza del capo: 104-106-(**109,50**)-112-113-115 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 116-118-120-(**121**)-124-126 — Id. a metà degli occhi: 92-93-94-95-(**105**)-118 — Id. alle narici: 23-24-(**24,50**)-25$_2$-26 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 42-44-(**45**)-46-47-48 — Id. alle narici: 23$_2$-24-(**25**)-27$_2$ — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 111-113-(**114,50**)-115$_2$-118 — Diametro interorbitale: 22-23-**24**-26$_2$ — Distanza dall'apice del muso alle narici: 11$_2$-(**14,50**)-16-17-18 — Id. dalle narici all'occhio: 21-23-(**23,50**)-24-25-26 — Id. dall'occhio al timpano: 0$_2$-3-6$_2$ — Diametro massimo trasversale dell'occhio: 39-41$_2$-(**41,50**)-42-44 — Id. minimo del timpano: 11$_2$-12-(**15**)-16-19 — Id. massimo: 11$_2$-14-(**15**)-16-19 — Lungh. massima delle parotidi: 79-82-(**84**)-85-86-89 — Larghezza id.: 38-39-**41**-42-44 — Lunghezza del braccio: 126-129-130-**137**-148 — Id. dell'avambraccio: 87-(**94**)-96-97-100-101 — Id. della mano: 83-87-**90**-96-97 — Id. del 1° dito: 35-(**37,50**)-38-39-40$_2$ — Id. del 2° dito: 30-33-34-35-(**36**)-42 — Id. del 3° dito: 41-42-44-(**44,50**)-46-48 — Id. del 4° dito: 24-26-(**26,50**)-27-28-29 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 18-19-20-(**20,50**)-21-23 — Id. dell'interno: 8-11-12-(**12,50**)-16-17 — Lungh. della coscia: 120-129-(**134**)-136-138-148 — Id. della gamba: 126-129-(**132**)-136-138$_2$ — Id. del piede: 224$_2$-(**233**)-235-238-242 — Id. del 1° dito: 33-(**39**)-41-42-43-45 — Id. del 2° dito: 59-60-(**64**)-69$_2$-73 — Id. del 3° dito: 89-93-(**101**)-109-111-113 — Id. del 4° dito: 142-148-(**153**)-155-159-164 — Id. del 5° dito: 89-97-**98**-106-107 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 27-30-**32**-34-37 — Id. dell'esterno: 16$_2$-17-18-(**19,50**)-23 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-30-**32**-34-37 — Id. dall'apice del 2° dito: 41-42-44-46-**(48,50)**-56 — Id. dall'apice del 3° dito: 59-60-**(66)**-69_2-73 — Id. dall'apice del 4° dito: 11-16_2-**(17)**-21-23 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 49-51-53-**(56)**-58-63.

Maschi in amore del Lago Trasimeno.

Lunghezza del capo: 108-111_3-**(112)**-113_2-115_2-116 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 116-118-120-**(125)**-126-128-132_2-133-134 — Id. a metà degli occhi: 89-90-91-94-**(94,50)**-96-97_2-98-100 — Id. alle narici: 23_2-24-25_3-**26**-27-29 — Altezza del capo alla regione timpanica: 40-43-44_3-46-**(46,50)**-47-48-53 — Id. alle narici: 24_2-25_2-26_3-**(26,50)**-28-29 — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 100-103-104-107-108-109-110-**(111)**-113-122 — Diametro interorbitale: 21-23-24-25_2-**(25,50)**-26-28-29-30 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 6_2-8_2-9-**(11,50)**-13-14-15-17 — Id. dalle narici all'occhio: 21-22-23_2-24-**25_2**-26-29 — Id. dall'occhio al timpano: 0_4-2-3_3-6 — Diam. massimo trasversale dell'occhio: 38-39_3-40_2-**41**-42-44 — Id. minimo del timpano: 12-14_2-**(14,50)**-15-16_2-17_2 — Id. massimo: 12-14_3-**(15)**-16_2-17_2-18 — Lungh. mass. delle parotidi: 72-74-76_2-78-79^2-**(80,50)**-86-89 — Larghezza id.: 34-35-36-37-38-**(39)**-40-41_2-44 — Lungh. del braccio: 108-**(123,50)**-126_3-127_2-129-134-139 — Id. dell'avambraccio: 89-91-92-**94**-96_2-97-99_2 — Id. della mano: 83-85-86-89_2-**(91)**-92-96-97-99 — Id. del 1° dito: 36-38-39_2-40-**(41)**-42_2-44-46 — Id. del 2° dito: 27-28-30-31-**(31,50)**-32_2-33-35-36 — Id. del 3° dito: 33-34-38-39-**(39,50)**-42_3-44-46 — Id. del 4° dito: 25-26_2-27-28-29-**(30)**-34-35 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 18-19-20-21_2-**(21,50)**-22-23_2-25 — Id. dell'interno: 9-11-12-**(13)**-15-16_2-17_3 — Lunghezza della coscia: 126-127-129-133_2-134-**(134,50)**-138_2-143 — Id. della gamba: 122-124-126-127-**128**-132_3-133-134 — Id. del piede: 211-220-**(226,50)**-227-234-235_2-238_2-242 — Id. del 1° dito: 33-34-37-38_2-39_3-**(39,50)**-46 — Id. del 2° dito: 61-63_2-64_3-**(65)**-66_2-69 — Id. del 3° dito: 94-99-100-101-**(101,50)**-102-103-104-108-109 — Id. del 4° dito: 139-148-149-**(149,50)**-150-155-156-157-158-160 — Id. del 5° dito: 83-**(93)**-95-97_2-99-100-102_2-103 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16-17_4-19-**(19,50)**-20-21-23 — Id. dell'esterno: 8_3-9_3-10-**12**-16 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-28-30_2-**(30,50)**-32-33-34_2-35 — Id. dall'apice del 2° dito: 39_2-40-42-43-**(43,50)**-44-46-47-48 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-**(62,50)**-63_3-64-66_2-69-70 — Id. dall'apice del 4° dito: $11_2$12-13-14-**(14,50)**-15-17_2-18 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 50_2-52-53-**(53,50)**-54_3-57_2.

Maschi in amore di Campobasso.

Lunghezza del capo: 99-100_2-101-108-109_2-110-**(111,50)**-113-114_2-124 — Largh. del capo agli angoli dei mascellari: 112-113-115-116-117-118-**120**-123_2-124-126 — Id. a metà degli occhi: 81-83-89_3-91-**92**-93-95_2-96-103 — Id. alle narici: 21_3-**23_5**-24_2-25_2 — Altezza del capo alla regione timpanica: 36-39_2-40-41_2-**(42)**-43_2-44-45-46-48 — Id. alle narici: 20-23_3-24_4-**(24,50)**-25-26-28-29 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 100-101-102-104-106-109_3-110-113-**(113,50)**-123-133 — Diametro interorbitale: 21-24-25_2-**(25,50)**-26-27-28-29_2-30_3 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 3_2-5-11-**12**-13-14_2-15-17-18-21 — Id. dalle narici all'occhio: 19-20-21-22-23-**24_2**-25_2-26-29_2 — Id. dall'occhio al timpano: 0-2_2-3_8-5 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 34-35_2-36-38_2-**39**-40_2-41_2-44 — Id. minimo del timpano: 3-**(10)**-11_2-13_3-14-15_3-17_2 — Id. massimo: 13_2-14_2-**15_3**-17_4 — Lunghezza massima delle parotidi: 70-77_3-79-**81**-82-85-86_2-90-92 — Larghezza id.: 27-28-**35_2**-38_2-39-40_2-41_2-43 — Lunghezza del braccio: 107-112-113-**(122,50)**-124-127-128-129_2-130-132_2-138 — Id. dell'avambraccio: 83-86-89_2-90-91-**(91,50)**-97-98-100_3 — Id. della mano: 80-81-83-85-86-**(86,50)**-89_2-90_2-92_2-93 — Id. del 1° dito: 38-39_3-40-41_3-**43**-44-45-48 — Id. del 2° dito: 28-30_3-31-32-**33**-34_3-35-38 — Id. del 3° dito: 33-36-38-39-**(39,50)**-40_2-41_3-43-44-46 — Id. del 4° dito: 23-24_2-26_2-**(26,50)**-27-28_2-29-30_3 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 17-18-19-20_2-**21_2**-22-23_2-24-25 — Id. dell'interno: 14_2-16_2-17_4-**(18)**-19_2-20-22 — Lunghezza della coscia: 118-124-129-**(130)**-131-132_2-134-137-138-139-140-142 — Id. della gamba: 118-120-122-124-125-**(127,50)**-129-130-132_2-133_2-137 — Id. del piede: 207-216-220-225-227-**(229,50)**-235_2-236-237-238-242-252 — Id. del 1° dito: 32-34-35_2-**(37,50)**-38-39_3-40-41_2-43 — Id. del 2° dito: 59_2-63-64-**(65)**-66_2-67-68-69_2-70-71 — Id. del 3° dito: 89-97-103-104_2-106-107-109_2-**(111)**-113-115-133 — Id. del 4° dito: 136-140-149-150-**(151)**-154-155_2-158-159-161-163-166 — Id. del 5° dito: 86-89_2-92-93-95-**96**-97-**100_2**-104-106 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-16-17_2-**(17,50)**-18_3-19-20_4 — Id. dell'esterno: 10-11_3-13_2-14_2-**(14,50)**-15_2-17-19 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-30-32_2-33-34_2-**(34,50)**-35-36-40_2-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 43_2-45_2-47_2-49-**50**-51_2-52-57 — Id. dall'apice del 3° dito: 59-64-65_2-66_2-**(66,50)**-67-68-69-70-71-74 — Id. dall'apice del 4° dito: 10-12-13_3-14_2-**(16,50)**-17_2-18_2-23 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 47_2-49-50-51-52_2-54_2-**57_2**-67.

Maschi in amore di Taranto.

Lunghezza del capo: 108-**(110)**-111_2-112 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 114-116-**(119)**-122_2-124 — Id. a metà degli occhi: 90-94-95-**96**-102 — Id. alle narici: 22-24-**(25)**-26_2-28 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42_2-44-**(46)**-48-50 — Id. alle narici: 22-**24**-25-26_2 — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 95-106-**(107,50)**-111-112-120 — Diametro interorbitale: 25-26_2-**(28)**-30-31 — Dist. dall'apice del muso alle narici: 3-**12**-14-16-21 — Id. dalle narici all'occhio: 21-**(23)**-24_2-25_2 — Id. dall'occhio al timpano: 0_3-3_2 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 39-**(41)**-42_3-43 — Id. minimo del timpano: 12_2-**14**-16_2 — Id. massimo: 12_2-**14**-16_2 — Lungh. mass. delle parotidi: 69-$78_2$79-**(90,50)**-112 — Larghezza id.: 26-33-**(34,50)**-36-37-43 — Lungh. del braccio: 122-124-**(127,50)**-132_2-133 — Id. dell'avambraccio: 85-89-90-**(92)**-95-99 — Id. della mano: 83-**(86,50)**-87-90_3 — Id. del 1° dito: 31-39-**(39,50)**-42_2-48 — Id. del 2° dito: 31-**32_2**-33_2 — Id. del 3° dito: 37-39_2-**(40)**-42-43 — Id. del 4° dito: 22-26-**(28)**-30-31-34 — Diam. massimo del tubercolo palmare mediano: 19_2-**(20,50)**-21_2-22 — Id. dell'interno: 11-**(14,50)**-16_2-17-18 — Lungh. della coscia: 127-**(135,50)**-137-138-139-144 — Id. della gamba: 122_2-124-126-**(127)**-132 — Id. del piede: 216-217-222-**(224,50)**-230-233 — Id. del 1° dito: 32_2-36-**(37,50)**-39-43 — Id. del 2° dito: 53-**(61)**-66_2-68-69 — Id. del 3° dito: 89-95-99-102-**(102,50)**-116 — Id. del 4° dito: 143-144-**(148)**-149-150-153 —

Id. del 5° dito: 90-94-**(94,50)**-95-96-99 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-16-**17**-19_2 — Id. dell'esterno: 5_2-6_2-**(7)**-9 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-31-32-**(32,50)**-33-39 — Id. dall'apice del 2° dito: 33-**(38)**-42_3-43 — Id. dall'apice del 3° dito: 61-62-63-**(65)**-66-69 — Id. dall'apice del 4° dito: 5-6_2-**(6,50)**-8_2 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 37-42-43-47-**(48,50)**-60.

Maschi in amore di Catania.

Lunghezza del capo: 111-115-116-117-118-120_2-**(121,50)**-122_2-123-124_3-126-129-131-132 — Largh. del capo agli angoli dei mascellari: 101_2-102-104-106_2-107_3-108_2-109-110-111-**(111,50)**-113-120-122 — Id. a metà degli occhi: 87_2-90-93_2-94-**95**-96_2-98_3-100-101_2-102-103 — Id. alle narici: 21-24-**(24,50)**-25_2-26_6-27_5-28_2 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 39-40-41_3-42_3-43-$\mathbf{44}_4$-45-46-48-49 — Id. alle narici: 21_2-23-24_2-**(24,50)**-25_2-26_4-27_4-28_2 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascell. al muso: 102-103-104_2-107-108-111-112-**(112,50)**-113-115_3-116_2-118-122-123 — Diam. interorbitale: 24-25_2-26_6-27_2-28_2-**(28,50)**-29-30-31-33 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 0_6-3_5-2_2-5_3-**(5,50)**-8 — Id. dalle narici all'occhio: 24_3-25_3-26_5-27_3-**(27,50)**-28_2-30-31 — Id. dall'occhio al timpano: 0_9-1_2-2_2-3_3-5 — Diametro massimo trasv. dell'occhio: 36_2-37_2-38_4-39_2-**(40)**-41-42_3-43_2-44 — Id. minimo del timpano: 11-13_2-15-$\mathbf{16}_7$-17-19-20_2-21 — Id. massimo: 11-15_2-$\mathbf{16}_6$-17-18-19_3-20_2-21 — Lungh. mass. delle parotidi: 71-72-73-74-76_2-77_2-78-79_3-80-81-**(82,50)**-87-90-94 — Larghezza id.: 31-32-33_2-35-36-37_3-38_2-**(38,50)**-39-40-42_2-43-46 — Lunghezza del braccio: 120-122_2-123_2-124-125-127_3-129-**(129,50)**-131-133-134-137_2-139 — Id. dell'avambraccio: 69-**(85)**-89_2-90_2-92-93_3-95_2-96-97-98_3-101 — Id. della mano: 74-79-82-$\mathbf{86}_2$-87_2-88-89_2-90_2-93-94-96-98_2 — Id. del 1° dito: 36_2-37_3-38_3-39-40-**(40,50)**-41_2-42-44_2-45 — Id. del 2° dito: 26-27_2-31_2-$\mathbf{32}_2$-33_2-34-35-36_3-37-38 — Id. del 3° dito: 36_2-37_2-38_2-39-41_2-42-**(42,50)**-43_2-46-47-48-49_2 — Id. del 4° dito: 25-26_4-27_4-28_2-29-**(30,50)**-31-32-33_2-36 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 17-20_2-21_4-**(21,50)**-22_5-23_3-26-27 — Id. dell'interno: 5-10_3-11_5-13-**(14,50)**-15-16-17-18-19-21-24 — Lunghezza della coscia: 123-132-133-134_2-135-136-137-138-140-**(141)**-144-147-148-150-151-153-159 — Id. della gamba: 123-127_3-129_3-133-134_2-**(135)**-136-137_2-138-139-147_2 — Id. del piede: 206-221-224-225-227-**229**-231_3-232-235_2-238-240-243-248-252 — Id. del 1° dito: 32_2-35-36_2-37-38_5-**39**-40-41_2-42-46 — Id. del 2° dito: 59-62-63_2-64-65-66-67_2-68-69-71-72_2-**(72,50)**-76-77-86 — Id. del 3° dito: 95-98_2-99-101-102-106-107-**(108,50)**-110-111_2-113_2-115_2-122 — Id. del 4° dito: 138-143_2-144-148-149-150-151_2-152-153_2-**155**-158-159-164-172 — Id. del 5° dito: 87-90-93_3-94-95_2-96_2-97-98-99-**(99,50)**-100-103-104-112 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15_2-$\mathbf{16}_4$-17_3-19_2-20-21_3-22 — Id. dell'esterno: 8_4-10_3-11_4-**(12)**-13_2-14_2-16_2 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 25-26_2-27-28-30-31-$\mathbf{32}_4$-34-36_3-39_2 — Id. dall' apice del 2° dito: 34-37-38-41_3-42_3-43-44_3-45-**(45,50)**-47_2-56 — Id. dall'apice del 3° dito: 53-56-58_2-59-63-**(64,50)**-66_3-67_3-70-71-72-74-76 — Id. dall'apice del 4° dito: 10-11-13_2-14-15_4-$\mathbf{16}_5$-17-22_2 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 49-51-53_2-55_2-56-57_2-58_2-**59**-60_2-61-62-69.

Maschi in amore di Tiflis.

Lunghezza del capo: 107-108-109-110-(**116,50**)-124-126 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 123-124-127-128-(**130,50**)-134-138 — Id. a metà degli occhi: 97-99-100-101-(**102,30**)-105-108 — Id. alle narici: 21-24-23-(**25,50**)-26-27-30 — Altezza del capo alla regione timpanica: 43-44_2-46-47-(**48,50**)-54 — Id. alle narici: 25-26-27_2-(**27,50**)-30_2 — Lunghezza obliqua del capo: 105-113-$_2$-114-(**114,50**)-120-124 — Diam. interorbitale: 26-27_2-**28**-30_2 — Dist. dall'apice del muso alle narici: 5-9-11-13-(**14**)-18-23 — Id. dalle narici all'occhio: 23-24-25-(**26,50**)-27-30_2 — Id. dall'occhio al timpano: 2-3_3-**4**-6 — Diam. mass. trasvers. dell'occhio: 39-40-**41**$_2$-42-43 — Id. minimo del timpano: 11-12-13-14-(**14,50**)-15-18 — Id. massimo: 11-14-(**14,50**)-15-18 — Lunghezza delle parotidi: 75-78-81-(**88,50**)-89-94-102 — Largh. id.: 36-40-41-(**42,50**)-48_2-49 — Lungh. del braccio: 118-126-132-(**133**)-134-137-148 — Id. dell'avambraccio: 88-90-94_2-97-(**98,50**)-109 — Id. della mano: 83-89_2-90-(**94**)-97-105 — Id. del 1° dito: 33-36-(**40**)-42-43-44-47 — Id. del 2° dito: 27-30-**31**-32-33-35 — Id. del 3° dito: 35-36-39-41-(**41,50**)-43-48 — Id. del 4° dito: 23-24-(**27,50**)-30_3-32 — Diam. del tuberc. palmare mediano: 21-22-**24**$_2$-25-27 — Id. dell'interno: 12-15-16-(**16,50**)-18-20-21 — Lunghezza della coscia: 132-138-(**141**)-142-149-150_2 — Id. della gamba: 123-126-129-130-(**132**)-136-141 — Id. del piede: 207_2-220-222-(**224,50**)-228-242 — Id. del 1° dito del piede: 27-30-32-(**33**)-35-36-39 — Id. del 2° dito del piede: 59_2-60-61-(**61,50**)-64_2 — Id. del 3° dito del piede: 94-99-100-(**100,50**)-101-102-107 — Id. del 4° dito: 140-142-143-144-146-(**150,50**)-161 — Id. del 5° dito: 89-94-96_2-(**96,50**)-97-102 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 18-**21**$_3$-23-24 — Id. dell'esterno: 4-5_2-(**11**)-12-15-18 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-27-32-(**33,50**)-35-36-41 — Id. dall'apice del 2° dito: 44_2-**46**-47-48_2 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-59_2-60-(**62,50**)-66-70 — Id. dall'apice del 4° dito: 7-13_2-15-(**15,50**)-21-24 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 47-(**53,50**)-54_2-55-57-60.

Maschi in amore di Roma.

Lunghezza del capo: 106-108-(**110,50**)-111-112-115— Larghezza del capo agli angòli dei mascellari: 124-126_3-(**127**)-130 — Id. a metà degli occhi: 94-96-97-(**97,50**)-99-101 — Id. alle narici: 24_2-25-**26**-28 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42-(**46,50**)-47-48-50-51 — Id. alle narici: 23-**24**$_2$-25_2 — Lunghezza obliqua del capo: 112_2-115-(**116**)-120_2 — Diametro interorbitale: 28_2-29-30-(**30,50**)-33 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 9-(**10,50**)-11-12_3 — Id. dalle narici all'occhio: 27-28_2-(**28,50**)-29-30 — Id. dall'occhio al timpano: 0_3-3_2 — Diam. mass. trasvers. dell'occhio: 40-41_2-(**41,50**)-42-43 — Id. min. del timpano: 12_3-(**15**)-17-18 — Id. massimo: 12_2-14-(**15**)-17-18 — Lungh. delle parotidi: 65-72-(**73**)-76-80-81 — Largh. id.: 34-36-37-(**37,50**)-38-41 — Lungh. del braccio: 118-126-(**128**)-133-137-138 — Id. dell'avambraccio: 89-90-93-95-(**96**)-103 — Id. della mano: 89-**93**-95-96-97 — Id. del 1° dito: 36-37-38-(**38,50**)-40-41 — Id. del 2° dito: 30-32-(**32,50**)-34_2-35 — Id. del 3° dito: 43-44_2-(**45,50**)-46-48 — Id. del 4° dito: 28-29-**30**$_2$-32 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 21-22-23-25-(**25,50**)-30 — Id. interno: 12-(**15,50**)-18_2-19_2 — Lunghezza della coscia: 136-138-143_2-(**144**)-152 — Id. della gamba: 124-(**131,50**)-132-137-138-139 — Id. del piede: 234-240-242-(**249,50**)-258-265 — Id. del 1° dito: 40-43-**44**-47-48 — Id. del

2° dito: 68-70-**71**-72-74 — Id. del 3° dito: 100-102-106-(**107**)-109-114 — Id. del 4° dito: 149-153-156-(**157,50**)-158-166— Id. del 5° dito: 99-106-(**106,50**)-108-109-114 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 18_2-$\mathbf{19}_2$-20 — Id. dell'esterno: 6-$\mathbf{9}_2$-11-12 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 34-35-**36**-37-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 42-46-(**46,50**)-47-50-51 — Id. dall'apice del 3° dito: 60-**65**-68-69-70 — Id. dall'apice del 4° dito: 11-12_3-(**14,50**)-18 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 52-54-56-57-(**58,50**)-65.

Maschi in amore	Modica	Conegliano Veneto	Valle di Non (Trentino)	Tunisi	Toxmax	China
Lunghezza del capo	109	114	116	103	102	114
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	131	126	127	129	120	139
Id. a metà degli occhi	98	96	106	98	98	107
Id. alle narici	22	30	25	26	27	21
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	44	48	44	41	44	44
Id. alle narici	22	24	25	26	22	25
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	109	108	116	108	107	126
Diametro interorbitale	27	36	25	26	22	32
Distanza dall'apice del muso alle narici .	3	12	17	5	13	9
Id. dalle narici all'occhio	25	30	25	26	22	32
Id. dall'occhio al timpano	0	0	3	3	0	6
Diametro massimo trasversale dell'occhio	38	42	42	41	40	44
Id. minimo del timpano	16	12	17	15	13	13
Id. massimo del timpano	16	12	19	15	15	13
Lunghezza massima delle parotidi . . .	87	78	94	82	80	114
Larghezza id. id.	38	30	44	36	49	44
Lunghezza del braccio	142	126	127	129	129	126
Id. dell'avambraccio	93	96	94	93	93	95
Id. della mano	98	96	94	82	84	95
Id. del 1° dito	38	42	44	36	40	44
Id. del 2° dito	38	30	33	26	27	38
Id. del 3° dito	44	45	44	36	40	51
Id. del 4° dito	27	30	28	26	27	32
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	22	24	22	21	24	22
Id. id. id. id. interno .	11	21	17	15	18	19
Lunghezza della coscia	142	150	144	129	129	152
Id. della gamba	132	132	130	129	124	139
Id. del piede	246	240	222	206	204	240
Id. del 1° dito	38	36	39	36	40	38
Id. del 2° dito	76	66	61	62	62	76
Id. del 3° dito	115	102	100	93	93	107
Id. del 4° dito	164	150	144	139	133	152
Id. del 5° dito	115	102	100	87	89	107
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	16	27	22	18	18	19
Id. id. id. esterno	5	18	8	15	9	6
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	33	30	28	31	31	44
Id. id. id. 2° dito	49	48	44	41	44	51
Id. id. id. 3° dito	71	66	66	57	62	70
Id. id. id. 4° dito	16	12	19	15	22	19
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	66	54	55	51	53	63

Femmine in amore	Ancona	Taranto	Modica
Lunghezza del capo	96	101-105	94-108-109
Largh. del capo agli angoli dei mascellari .	120	120-127	118-123_2
Id. a metà degli occhi	101	85-96	82-87-90
Id. alle narici	24	25-28	19-21-25
Alt. del capo a metà della regione timpanica	48	45-51	37-38-41
Id. alle narici	24	25_2	19-20-23
Lungh. obl. del capo dall'angolo masc. al muso	106	110-112	102-104-108
Diametro interorbitale	29	25-28	24-25-26
Distanza dall'apice del muso alle narici . .	5	5-10	0_3
Id. dalle narici all'occhio	29	23-25	20-24-26
Id. dall'occhio al timpano	2	2-5	0-2-3
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	38	40-41	33_2-36
Id. minimo del timpano	17	13-15	14-16-21
Id. massimo del timpano	19	13-15	14-16-21
Lunghezza massima delle parotidi	67	75-86	78-81-82
Larghezza id. id.	29	38-51	28-33-36
Lunghezza del braccio	115	122-125	118-119_2
Id. dell'avambraccio	86	85-96	82_2-90
Id. della mano	82	85-91	78-81-82
Id. del 1° dito della mano	48	38-41	31-38-41
Id. 2° dito id.	29	30-33	28-31-33
Id. 3° dito id.	38	41-43	37-38-41
Id. 4° dito id.	27	28-30	24-25-26
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	22	20-23	16-19-21
Id. id. id. interno	10	5-10	8-9-10
Lunghezza della coscia	134	135-142	114-127-129
Id. della gamba	115	123-127	115-118-119
Id. del piede	206	200-218	200-204-207
Id. del 1° dito del piede	38	40-41	33-38-41
Id. 2° dito id.	62	60-66	61-62-67
Id. 3° dito id.	96	90-96	85-93-94
Id. 4° dito id.	134	130-137	133-134-135
Id. 5° dito id.	91	85-91	87-90-95
Lunghezza del tubercolo metatarsale interno	19	18-20	15-16-19
Id. id. id. esterno	14	6-10	4-5_2
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	34	30-33	26-28-33
Id. id. del 2° dito	43	35_2	33-41-45
Id. id. del 3° dito	58	61-65	52-61-62
Id. id. del 4° dito	24	13-15	9-15-16
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	56	50-51	51-52-53

Femmine in amore del Lago Trasimeno.

Lunghezza del capo: 98-99-102-103-**107**-110_2-116 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 110-113-**116**-118-120_3-122 — Id. a metà degli occhi: 86-88-89_2-(**90.50**)-93-94_2-95 — Id. alle narici: 21-23-(**23.50**)-24-25-26_4 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42_2-43-44-46-(**46,50**)-47-48-51 — Id. alle narici: 21_2-23_2-(**24,50**)-26_2-27-28 — Lunghezza obliqua del capo: 94-98-99-102-105-(**107**)-110-111-120 —

Diametro interorbitale: 21_4-22-23-26-31 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 3_2-5_2-(7)-8_2-10-11 — Id. dalle narici all'occhio: 21_4-22-23-(23,50)-25-26 — Id. dall'occhio al timpano: 2-3_3-(4)-5_3-6 — Diam. mass. trasv. dell'occhio: 37_2-38-(39-50)-41-42_4 — Id. min. del timpano: 10-13_3-(14)-16_3-18_2 — Id. mass.: 10-13_2-(14)-16_3-18_2 — Lunghezza delle parotidi: 68-69-70-72_2(72,50)-73_2-74-77 — Larghezza id.: 31-32-34-35-36-(36,50)-37-39-42 — Lunghozza del braccio: 104-107-111_2-(112)-113-115-116-120 — Id. dell'avambraccio: 79-81-82-84_3-(84,50)-89-90 — Id. della mano: 74-78-(79,50)-81-82-83-84_2-85 — Id. del 1° dito: 37-39-40-41-42_3-43 — Id. del 2° dito: — 31_3-32_2-34-(34,50)-36-38 — Id. del 3° dito: 37_2-40-41-42_3-43 — Id. del 4° dito: 23-(25,50)-26_5-27-28 — Diam. mass. tubercolo palmare mediano: 18-19_2-(20,50)-21_3-22-23 — Id. dell'interno: 5-9-10-(10,50)-11_3-16_2 — Lungh. della coscia: 113-116-120-(121)-124-125_2-127-129 — Id. della gamba: 113_2-115-116_2-(116,50)-119-120_2 — Id. del piede: 193_3-194-195-199-(202,50)-209-212 — Id. del 1° dito: 37_4-38-39-40-41 — Id. del 2° dito: 52_2-53-55-(57,50)-59-61-62-63 — Id. del 3° dito: 78-85-(86)-88-89-91-93-94_2 — Id. del 4° dito: 120-124-125-129_2-(129,50)-133-138-139 — Id. del 5° dito: 78-81-83_2-(83,50)-84-85-87-89 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16_3-17-18-(19,50)-21_2-23 — Id. dell'esterno: 6-8_2-10_2-11_2-14 — Distanza dall'apice dol 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-29-30_2-(30,50)-31_2-32-33 — Id. dall'apice del 2° dito: 37-39-41-42-43-(43,50)-47-48-50 — Id. dall'apice del 3° dito: 51-55-57_2-59-61-63_2 — Id. dall'apice del 4° dito: 13-14-15-16_3-17-21 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 42-44-46-(46,50)-47_2-48-50-51.

Femmine in amore di Catania.

Lunghezza del capo: 105-107-(111)-116-117 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 117-(120,50)-122_2-124 — Id. a metà dogli occhi: 86-87-(93)-97-100 — Id. del capo alle narici: 22_2-(22,50)-23_2 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 39-41-(42,50)-44-46 — Id. alle narici: 22-24-(26)-27-30 — Lungh. obliqua del capo: 112-116-(122,50)-124-133 — Diam. interorbitale: 21-24-(24,50)-25-28 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 0-2-3_2 — Id. dalle narici all'occhio: 21-24-(24,50)-25-28 — Id. dall'occhio al timpano: 0-2-5-6 — Diam. mass. trasv. dell'occhio: 37-38-39_2 — Id. min. del timpano: 12-13-(14,50)-15-17 — Id. massimo: 12-13-(14,50)-17_2 — Lungh. delle parotidi: 75-78-(79)-81-83 — Larghezza id.: 39-41_2-(44)-49 — Lunghezza del braccio: 104-106-(110,50)-116-117 — Id. dell'avambraccio: 76-(79,50)-83_3 — Id. della mano: 81-(82)-83_3 — Id. del 1° dito della mano: 39-41_2-(41,50)-44 — Id. del 2° dito: 33-34-37-41 — Id. del 3° dito: 37-(41,50)-42-45-46 — Id. del 4° dito: 25-27-29-33 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 19-20-(20,50)-21-22 — Id. dell'interno: 8-11-(13,50)-15-19, — Lungh. della coscia: 124-(130.50)-131-133-137 — Id. della gamba: 112-116-(117)-122-131 — Id. del piede: 203-205-209-(210.50)-218 — Id. del 1° dito del piede: 28-(31)-33_2-34 — Id. del 2° dito: 54-55-58-61 — Id. del 3° dito: 87-91-(92)-94-97 — Id. del 4° dito: 132-(135,50)-136-137-139 — Id. del 5° dito: 81-83-(84)-87_2 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-(16)-17_3 — Id. dell'esterno: 6-10_2-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-29-30-(31)-34 — Id. dall'apice dol 2° dito: 39-41_2-(41.50)-44 — Id. dall'apice del 3° dito: 55-61-(61,50)-63-68 — Id. dall'apice del 4° dito: 15-17_2-(18,50)-22 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 46_2-50-(52)-58.

Femmine in amore	Firenze	Marcellise (Veronese)	Rovereto	Bonifacio (Corsica)	Atene	Volo (Grecia)
Lunghezza del capo	113	101	111	111	100	113
Largh. del capo agli angoli dei mascellari .	113	125	132	132	135	128
Id. a metà degli occhi	97	96	101	101	100	94
Id. alle narici	24	24	26	26	25	27
Alt. del capo a metà della regione timpanica	43	48	53	53	45	49
Id. alle narici	21	24	26	26	25	30
Lungh. obl. del capo dall'angolo masc. al muso	113	106	116	116	115	108
Diametro interorbitale	24	29	26	26	25	25
Distanza dall'apice del muso alle narici . .	5	7	3	3	3	0
Id. dalle narici all'occhio	24	29	26	32	25	30
Id. dall'occhio al timpano	3	5	3	3	0	2
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	38	38	42	42	40	44
Id. minimo del timpano	13	18	16	16	18	20
Id. massimo del timpano	13	18	19	16	18	20
Lunghezza massima delle parotidi	75	91	90	79	75	74
Larghezza id. id.	32	48	37	42	40	44
Lunghezza del braccio	124	120	132	138	110	118
Id. dell'avambraccio	81	86	90	90	85	89
Id. della mano	81	86	101	90	85	89
Id. del 1° dito della mano	38	38	48	42	50	39
Id. 2° dito id.	27	31	42	37	40	35
Id. 3° dito id.	43	43	48	48	45	44
Id. 4° dito id.	27	29	37	32	30	32
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	16	24	21	21	25	20
Id. id. id. interno	8	19	16	11	10	10
Lunghezza della coscia	124	134	143	143	135	143
Id. della gamba	118	120	132	122	110	133
Id. del piede	209	203	243	222	215	222
Id. del 1° dito del piede	38	34	37	48	45	44
Id. 2° dito id.	54	58	69	69	70	64
Id. 3° dito id.	97	86	101	106	105	104
Id. 4° dito id.	134	134	159	148	140	148
Id. 5° dito id.	91	86	101	101	95	94
Lunghezza del tubercolo metatarsale interno	16	19	21	21	20	20
Id. id. id. esterno	5	14	11	11	13	15
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	27	29	21	32	30	35
Id. id. del 2° dito	43	43	48	53	40	39
Id. id. del 3° dito	59	67	69	79	55	64
Id. id. del 4° dito	16	19	26	21	15	20
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	45	58	58	53	50	59

Femmine in amore di Campobasso.

Lunghezza del capo: 97-98-99-101-(**102,50**)-108_2 — Larghezza del capo all'angolo del mascellare: 116-117-118_2-122-(**123,50**)-131 — Id. a metà degli occhi: 83-(**88,50**)-89_3-90-94 — Id. alle narici: 20-21-(**21,50**)-23_4 — Altezza del capo alla regione timpanica: 39-(**43**)-45-46-47_3 — Id. alle narici: 21-23-(**24,50**)-25_2-28_2 — Lungh. obliqua del capo: 98-104-(**105,50**)-106-108_2-113 — Diametro interorbitale: 25-26_3-(**26,50**)-28_2

— Dist. dall'apice del muso alle narici: 5_2-$\mathbf{7}_2$-8-9 — Id. dalle narici all'occhio: 22-**(22,50)**-23_5 — Id. dall'occhio al timpano: 0-2_4-5 — Diam. mass. trasv. dell'occhio: 35-$\mathbf{37}_3$-39_2 — Id. min. del timpano: 12_2-$\mathbf{14}_3$-16 — Id. massimo: 12_2-$\mathbf{14}_3$-16_2 — Lungh. delle parotidi: 70-73-75-**(77)**-80-83-84 — Id. larghezza: 33-35-37-**(37,50)**-38-39-42 — Id. del braccio: 113-116-117_2-**(117,50)**-118-122 — Id. dell'avambraccio: 80-83-84_3-**(87)**-94 — Id. della mano: 80_2-83-84-**(84,50)**-89 — Id. del 1° dito: 39-42_2-**(43)**-45-46-47 — Id. del 2° dito: 28-**(32,50)**-33_3-34-37 — Id. del 3° dito: 39-$\mathbf{42}_4$-45 — Id. del 4° dito: 28_5-**(29)**-30 — Diam. mass. tubercolo palmare mediano: 18-$\mathbf{19}_3$-20_2 — Id. dell'interno: 9_2-10-**(11,50)**-12_2-14 — Id. della coscia: 122-126-128_2-**(132,50)**-143 — Id. della gamba: 112-117_2-118-**(118,50)**-123-125 — Id. del piede: 203-206_2-**(210)**-211-213-217 — Id. del 1° dito: 28-32-33-**(33,50)**-35-37-39 — Id. del 2° dito: 55-56_2-**(59,50)**-61_2-64 — Id. del 3° dito: 89-90-92-94_2-**(96,50)**-104 — Id. del 4° dito: 129_2-136_3-**(138,50)**-148 — Id. del 5° dito: 83-84_2-**(88,50)**-89_2-94 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14_2-17-18-19-**(19,50)**-25 — Id. dell'esterno: 11-12_2-**(13)**-14_2-15 — Distanza dall'apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-**(31,50)**-32-33_2-34-35 — — Id. dall'apice del 2° dito: 37_2-**(41)**-42_2-44-45 — Id. dall'apice del 3° dito: 56_2-59-**61**-65-66 — Id. dall'apice del 4° dito: 9-14_2-**(14,50)**-15-18-20 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 45-47_2-**(50,50)**-51-54-56.

Individui giovani di Taranto, in cui la lunghezza base varia da 38 a 43 millimetri.

Lunghezza del capo: 114_2-117-118-**(118,50)**-123 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 123_2-126-**(128,50)**-133-134 — Id. a metà degli occhi: 95-**(102)**-104-105-108-109 — Id. alle narici: 25-26-**(26,50)**-27-28_2 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 45-47-**(49)**-50-52-54 — Id. alle narici: 25-**26**-27-28_2 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 114-**(120)**-123_3-126 — Diametro interorbitale: 26-27-28-**(29,50)**-33_2 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 13-14-**(16)**-17-18-19 — Id. dalle narici all'occhio: 24-25-**26**-27-28 — Id. dall'occhio al timpano: 0_4-2 — Diametro trasversale dell'occhio: 44-45-$\mathbf{47}_2$-50 — Id. minimo del timpano: 5-$\mathbf{9}_3$-13 — Id. massimo: 5-$\mathbf{9}_3$-13 — Lungh. massima delle parotidi: 70-77-**(77,50)**-84-85_2 — Largh. id.: 28-33-35-**(36)**-38-45 — Lungh. del braccio: 114_3-118-**(124)**-134 — Id. dell'avambraccio: 79-85_2-**(85,50)**-90-92 — Id. della mano: 79-81-**(82)**-85_2 — Id. del 1° dito: 28-**36**-38-42-44 — Id. del 2° dito: 24-26-**(31)**-32-33-38 — Id. del 3° dito: 38-42-**(42,50)**-44-45-47 — Id. del 4° dito: 25-26-**(26,50)**-27-28_2 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 17-$\mathbf{18}_2$-19_2 — Id. dell'interno: 8-**(8,50)**-9_4 — Lungh. della coscia: 123_2-126-**(128,50)**-133-134 — Id. della gamba: 142_2-118-**120**-123-126 — Id. del piede: 189-198-199-**(200)**-209-211 — Id. del 1° dito: 28_2-**35**-41-42 — Id. del 2° dito: 53-**(56,50)**-57_2-59-60 — Id. del 3° dito: 85-88-**90**-92-95 — Id. del 4° dito: 123-132-**(132,50)**-133-135-142 — Id. del 5° dito: 85_2-88-**(88,50)**-90-92 — — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14-**17**-18_2-20 — Id. dell'esterno: 5-**(7)**-8-9_2 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-28_2-29-**(31)**-36 — Id. dall'apice del 2° dito: 44-45-$\mathbf{47}_2$-50 — Id. dall'apice del 3° dito: 61-66-**(66,50)**-67-72 — Id. dall'apice del 4° dito: 18_2-19_2-**(19,50)**-21 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 38-**(42,50)**-45-50-53-57.

	Catania juv.	Tiflis ♂	Firenze ♂	Caschmir juv.	Caschmir juv.	Amudaria juv.
Lunghezza base (espressa in millimetri)	21	50-53	50	50	29	39
Lunghezza del capo	120	109-122	108	108	124	120
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	120	115-130	122	122	124	129
Id. a metà degli occhi	112	94-102	94	101	99	111
Id. alle narici	34	22-24	29	29	31	28
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	51	41-50	43	50	50	55
Id. alle narici	34	24-25	22	25	25	28
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	129	115_2	122	108	124	129
Diametro interorbitale	43	29-31	22	25	25	37
Distanza dall'apice del muso alle narici .	9	4-10	4	4	12	9
Id. dalle narici all'occhio	34	27-29	25	29	25	37
Id. dall'occhio al timpano	invis.	3-4	0	4	6	9
Diametro massimo trasversale dell'occhio	43	41-43	43	43	50	46
Id. minimo del timpano	invis.	11-14	18	14	6	5
Id. massimo del timpano	invis.	14_2	18	14	6	9
Lunghezza massima delle parotidi . . .	86	75-86	79	65	62	83
Larghezza id. id.	34	34-50	36	43	28	37
Lunghezza del braccio	120	115-122	137	108	112	129
Id. dell'avambraccio	77	79-81	86	86	74	83
Id. della mano	77	86-88	86	86	87	92
Id. del 1° dito	43	36-41	36	36	34	42
Id. del 2° dito	34	36-48	36	29	28	32
Id. del 3° dito	51	43-48	43	43	43	46
Id. del 4° dito	34	29-34	29	29	25	32
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	17	20-22	18	22	19	18
Id. id. id. id. interno .	9	14_2	18	7	9	18
Lunghezza della coscia	120	136-137	137	137	137	129
Id. della gamba	120	122-129	130	122	124	129
Id. del piede	206	194-224	230	209	199	222
Id. del 1° dito	43	29-38	43	36	37	42
Id. del 2° dito	69	50-54	58	58	62	60
Id. del 3° dito	103	79-88	101	94	87	97
Id. del 4° dito	137	137-143	158	137	124	152
Id. del 5° dito	95	72-122	94	101	81	92
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	17	20-22	14	14	12	23
Id. id. id. esterno	5	3-14	7	4	12	9
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	34	41-43	32	22	31	32
Id. id. id. 2° dito	43	43-54	43	43	37	51
Id. id. id. 3° dito	69	58-68	65	58	56	69
Id. id. id. 4° dito	26	14-20	14	14	19	23
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	51	54-58	50	58	50	55

Individui giovani di Catania in cui la lunghezza base varia da 30 a 50 millimetri.

Lunghezza del capo: 114-115-117-120_2-(**122,50**)-123-124_2-125-129-131 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 111-120_3-123_2-124_2-(**126,50**)-131-133-142 — Id. a metà degli occhi: 92-94-98_2-100-101-(**103**)-104-110-111-113-114 — Id. alle narici: 23_4-24-25-27-28_3-(**28,50**)-34 — Altezza del capo alla regione timpanica: 45_2-46_2-47_3-49-(**50**)-51_2-55 — Id. alle narici: 23-28_3-(**28,50**)-30-31_2-33-34_3 — Lungh. obliqua del capo: 113-115-117-120-**123**-124-125-129_2-131-133 — Diametro interorbitale: 23-27-28_2-30-31-**33**-34-37-41-43 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 3-4_4-5-$\mathbf{6}_2$-8-9_2 — Id. dalle narici all'occhio: 23_2-28_3-(**28,50**)-30-31-33_2-34_2 — Id. dall'occhio al timpano: (timp. invis. 2)-0_4-3_2-3-11_2 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 37-38_2-39_2-41-**42**-43_3-47 — Id. min. del timpano: (timp. inv. 2)-9_2-11_3-12-(**12,50**)-14-15-16 — Id. massimo: (timp. inv. 2)-9_2-11_3-12-(**12,50**)-14-15-16 — Lunghezza mass. delle parotidi: 70-75-76_2-78-79-84_3-86_2 — Larghezza id.: 28_3-30-33-34-(**36,50**)-39_3-43-45 — Lungh. del braccio: 101-110-113-115_2-**117**-120_2-123_2-133 — Id. dell'avambraccio: 65-74-77-78-79-(**80**)-83-84-85-86-90-95 — Id. della mano: 77-78-83-(**87,50**)-90_2-92_2-94-95_2-98 — Id. del 1° dito: 33-34-37-38-39_3-(**40**)-43_3-47. — Id. del 2° dito: 28-33-(**33.50**)-34_4-37-38-39_3 — Id. del 3° dito: 43-45_2-46_2-$\mathbf{47}_2$-49-51_3 — Id. del 4° dito: 23-24-28_2-30-31_3-(**32**)-34_2-41 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 11-14-15_2-16-$\mathbf{17}_2$-19-20_2-23 — Id. dell'interno: 4-6-8-9_3-(**10**)-11_3-16_2 — Lungh. della coscia: 98-113-120-(**122.50**)-127-129-135-141_2-142-146-147 — Id. della gamba: 90-113-(**116**)-120_2-125-127-128-131-135-141-142 — Id. del piede: 173-180-203-**204**-206-211-212-213-222-225-235 — Id. del 1° dito: 33-34_2-35-38-39-(**41**)-43_2-45-46-47 — Id. del 2° dito: 56-57_2-60_2-61-(**62,50**)-63_2-65-68-69 — Id. del 3° dito: 90_2-92-94-95-96-**98**-102-103-104-106 — Id. del 4° dito: 128-131-133-135_3-137-142-(**142,50**)-148-153-157 — Id. del 5° dito: 79-82-83_2-85-86-92-(**94,50**)-95_2-100-110 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-16-17-18-$\mathbf{19}_2$-23_5 — Id. dell'esterno: 4_3-5-(**8**)-9_3-11_3-12 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 21-26-(**27,50**)-28_2-30-31_3-33-34_2 — Id. dall'apice del 2° dito: 38-42-43-45_2-**46**-47_3-49-59 — Id. dall'apice del 3° dito: 60-65-66-68_2-69-(**69,50**)-70_2-74-77-79 — Id. dall'apice del 4° dito: 15_2-18-19-(**20,50**)-23_5-25-26 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 33-38-(**44,50**)-46-47-51_2-53-54-55_2-56.

Individui giovani di Ancona, in cui la lunghezza base varia da 53 a 59 millimetri.

Lunghezza del capo: 105-110-111-(**114**)-115-120-122 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 118-120-122-(**127**)-129-131-136 — Id. a metà degli occhi: 93-98-100-(**101**)-102-104-109 — Id. del capo alle narici: 23-**25**-27_4 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 46-47-$\mathbf{48}_2$-49-50 — Id. alle narici: 23-24-**25**-27_4 — Lungh. obliqua del capo: 110-111-114-115-118-(**119.50**)-129 — Diam. interorbitale: 24-25-(**25,50**)-26-27_3 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 9-10_2-(**11.50**)-17-19-20 — Id. dalle narici all'occhio: 24-25-(**25,50**)-26-27_3 — Id. dall'occhio al timpano: 0-3_2-6-7_2 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 43-45_2-45-(**46,50**)-47-50 — Id. minimo del timpano: 12_2-$\mathbf{13}_2$-14_2 — Id. massimo: 12_2-$\mathbf{13}_2$-14_2 — Lungh. delle parotidi: 67-72-75_2-(**76**)-81-85 — Larghezza id.: 33-37-(**38**)-39-41_2-43 — Lunghezza del braccio: 122-127-129-130-131-(**132,50**)-143 — Id. dell'avambraccio: 85-88-92-93-(**93,50**)-94-102 — Id. della mano: 79-(**87**)-88-92-93-94-95 — Id. del 1° dito della mano: 34-39-(**41**)-43$_2$-44-48 — Id. del 2° dito: 31-33-**34**$_2$-37$_2$ — Id. del 3° dito: 39-43-(**43,50**)-46-47-48 — Id. del 4° dito: 27-(**30,50**)-31$_2$-33$_2$-34 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 19-**20**$_3$-21 — Id. dell'interno: 6-9$_2$-10-(**11,50**)-16-17 — Lunghezza della coscia: 128-129-130-131-134-(**135,50**)-143 — Id. della gamba: 122$_2$-130-131-(**132,50**)-134-143 — Id. del piede: 207-217-(**222,50**)-230-234-236-238 — Id. del 1° dito del piede: 31-(**37,50**)-39-41$_2$-43-44 — Id. del 2° dito: 61$_2$-62-(**64,50**)-66-67-68 — Id. del 3° dito: 92-95-(**98,50**)-99-100-102-105 — Id. del 4° dito: 128-136-(**141**)-143-149-151-154 — Id. del 5° dito: 85-92-93-(**93,50**)-95-98-102 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 27-(**32**)-33-34$_2$-37$_2$ — Id. dell'esterno: 18-**19**-20$_4$ — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-(**32**)-33-34$_2$-37$_2$ — Id. dall'apice del 2° dito: 40-41-43-(**45**)-46-48-50 — Id. dall'apice del 3° dito: 61$_2$-(**64,50**)-66-67-68$_2$ — Id. dall'apice del 4° dito: 12-13$_2$-(**16**)-17-18-20 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 43-(**48,50**)-50-52-53-54$_2$.

Bufo mauritanicus.

Individui giovani di Mogador (Marocco), in cui la lunghezza base varia da 69 a 82 mill.

Lunghezza del capo: 102-105-(**106**)-108-110$_4$ — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 125-129-**130**-131-132-135$_3$ — Id. a metà degli occhi: 97-99$_2$-(**101**)-102$_2$-104$_2$-105 — Id. alle narici: 23$_5$-24-25-(**25,50**)-28 — Alt. del capo alla regione timpanica: 54$_2$-55$_2$-(**55,50**)-57$_4$ — Id. alle narici: 27$_2$-28-(**29,50**)-30-31$_3$-32 — Lunghezza obliqua del capo: 104$_2$-110$_2$-(**111,50**)-115-116$_2$-119 — Diametro interorbitale: 36$_2$-37$_4$-(**38**)-40$_2$ — Distanza dall'apice del muso alle narici: 2-5$_3$-(**5,50**)-7-8$_2$-9 — Id. dalle narici all'occhio: 25-**28**-30$_3$-31$_3$ — Id. dall'occhio al timpano: 5$_2$-(**7,50**)-9$_3$-10$_3$ — Diam. massimo trasversale dell'occhio: 37-41$_2$-(**41,50**)-42$_3$-45-46 — Id. minimo del timpano: 12-13-**14**$_2$-15-16$_3$ — Id. massimo: 14-16$_3$-(**17,50**)-18$_2$-21$_2$ — Lunghezza del braccio: 126$_2$-129$_2$-130-(**131**)-132-136$_2$ — Id. dell'avambraccio: 78$_2$-(**87,50**)-88-90-92-95$_2$-97 — Id. della mano: 88-90-(**91,50**)-92$_2$-94$_2$-95$_2$ — Id. del 1° dito: 44-45$_2$-46-47$_2$-(**47,50**)-48-51 — Id. del 2° dito: 32-(**34,50**)-36$_2$-37$_4$ — Id. del 3° dito: 42-44-45$_2$-46-(**47,50**)-50-52$_2$ — Id. del 4° dito: 25-26$_3$-(**26,50**)-27$_2$-28 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 23$_2$-25-(**25,50**)-26$_2$-27$_2$-28 — Id. dell'interno: 15-16$_2$-(**16,50**)-18$_5$ — Lunghezza della coscia: 141-145$_2$-149-(**150,50**)-151-152$_2$-160 — Id. della gamba: 141-143-144-145$_2$-**148**-151-155 — Id. del piede: 213-217-224$_3$-(**226,50**)-230$_2$-240 — Id. del 1° dito: 35$_2$-36$_2$-37$_2$-(**38,50**)-42$_2$ — Id. del 2° dito: 53-(**60,50**)-63$_2$-65$_3$-68$_2$ — Id. del 3° dito: 92-(**97**)-99$_4$-100-102$_2$ — Id. del 4° dito: 132-139-**141**$_2$-143-145-149$_2$ — Id. del 5° dito: 88-90$_3$-(**91**)-92$_2$-94$_2$ — Id. del tubercolo metatarsale interno: 18$_3$-20-(**20,50**)-21$_3$-23 — Id. dell'esterno: 10$_2$-(**12,50**)-13-14$_4$-15 — Distanza dall' apice del 1° dito alla metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-(**31,50**)-32$_3$-35$_3$-37 — Id. dall'apice del 2° dito: 46-47$_2$-48-(**50,50**)-51-54$_2$-55 — Id. dall'apice del 3° dito: 60-65-(**67.50**)-68$_2$-70-72$_2$-75 — Id. dall'apice del 4° dito: 18-21$_2$-(**21,50**)-22-23$_3$-25 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 40$_2$-(**50**)-51$_2$-52$_2$-54-60.

Maschi in amore di Tangeri.

Lunghezza del capo: 88-90-93-96-(**96,50**)-104-105 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 108-112-117-124-(**125**)-126-142 — Id. a metà degli occhi: 75-80-84-(**86**)-88_2-97 — Id. alle narici: 19-20-21_3-(**22**)-25 — Altezza del capo alla regione timpanica: 43-45_2-47-(**48**)-53_2 — Id. alle narici: 22-23-24_2-(**24,50**)-25-27 — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 87-91-96-101-(**106,50**)-109-126 — Diametro interorbitale: 24-(**29,50**)-30-32_3-35 — Dist. dall'apice del muso alle narici: 8-9-10-12-(**14,50**)-16-21 — Id. dalle narici all'occhio: 17-18-**21**-22_2-25 — Id. dall'occhio al timpano: 6_2-7-(**7,50**)-8_2-9 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 33_2-35_3-(**39**)-45 — Id. minimo del timpano: 13-14_3-(**14,50**)-15-16 — Id. massimo: 14-(**15,50**)-16_2-17_3 — Lungh. mass. delle parotidi: 72-75_2-78-(**78,50**)-82-85 — Larghezza id.: 27-35-(**38**)-39-42-47-49 — Lungh. del braccio: 99-104-(**109,50**)-116-117_2-120 — Id. dell'avambraccio: 72-80-81-(**82**)-85_2-92 — Id. della mano: 75_3-79-81-(**83,50**)-92 — Id. del 1° dito: 34-36-37-(**37,50**)-39_2-41 — Id. del 2° dito: 21-25-(**26,50**)-27_2-28-32 — Id. del 3° dito: 32-36_2-(**37**)-41_2-42 — Id. del 4° dito: 21_2-24-(**24,50**)-25-26-28 — Diam. massimo del tubercolo palmare mediano: 18-(**23**)-24_2-25-26-28 — Id. dell'interno: 14-15-17-(**17,50**)-18-19-21 — Lungh. della coscia: 120-128-(**141**)-142-143-147-162 — Id. della gamba: 120-123-129-130-(**136**)-139-152 — Id. del piede: 189-190-192-211-(**214,50**)-215-240 — Id. del 1° dito: 30-32-36-(**37**)-41_2-42 — Id. del 2° dito: 39-(**55**)-59-60-61-63-71 — Id. del 3° dito: 83-84-85-87-**88**-93 — Id. del 4° dito: 117-123-(**126,50**)-127-130-132-136 — Id. del 5° dito: 80-81-85_2-87-(**87,50**)-95 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 15-18-19_2-(**19,50**)-21-24 — Id. dell'esterno: 9-(**10,50**)-11_3-12_2 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 24-**28**-30-32_3 — Id. dall'apice del 2° dito: 37-39_2-42-(**43**)-44-49 — Id. dall'apice del 3° dito: 53-54-(**61,50**)-63-64-69-70 — Id. dall'apice del 4° dito: 18-21_3-(**21,50**)-24-25 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 45-49-(**49,50**)-51_2-53-54.

Maschi in amore di Rabat.

Lunghezza del capo: 79-(**85**)-87-91_2 — Largh. del capo agli angoli dei mascellari: 103-106-(**112**)-114-121 — Id. a metà degli occhi: 80_2-82-(**83,50**)-87 — Id. alle narici: 19-21-(**21,50**)-23-24 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 42-(**44,50**)-45_2-47 — Id. alle narici: 24_2-(**25,50**)-26-27 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascell. al muso: 87-89-90-(**93**)-99 — Diam. interorbitale: 29-30-31-(**31,50**)-34 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 6-7-(**9,50**)-10-13 — Id. dalle narici all'occhio: 29-30-31-(**31,50**)-34 — Id. dall'occhio al timpano: 10_3-(**10,50**)-11 — Diametro massimo trasv. dell'occhio: 32-(**33**)-34_3 — Id. minimo del timpano: 13-**14**-15_2 — Id. massimo: 17-18-(**18,50**)-19-20 — Lungh. mass. delle parotidi: 69-71-72-(**73**)-77 — Larghezza id.: 34_2-35-(**39**)-44 — Lunghezza del braccio: 110-114-(**117**)-122-124 — Id. dell'avambraccio: 79-83-84-87 — Id. della mano: 79-80-83-(**85**)-91 — Id. del 1° dito: 39-41-(**41,50**)-42-44 — Id. del 2° dito: 30-31-32-(**33,50**)-37 — Id. del 3° dito: 39_2-(**39,50**)-40_2 — Id. del 4° dito: 23-24-(**25**)-26-27 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 21-(**22,50**)-23_2-24 — Id. dell'interno: 14-15-(**15,50**)-16-17 — Lunghezza della coscia: 128-134-(**139,50**)-144-151 — Id. della gamba: 123-128-(**133,50**)-136-144 — Id. del piede: 196-212-(**215,50**)-220-235 — Id. del 1° dito: 34-35-**36**-37-38

— Id. del 2° dito: 58-(**62,50**)-64-67_2 — Id. del 3° dito: 86-91-(**95**)-96-104 — Id. del 4° dito: 123-133-135-(**135,50**)-148 — Id. del 5° dito: 80_2-87-(**88,50**)-97 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 14-16-**19**-24 — Id. dell'esterno: 9-10-**11**-13 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 31-32-**34**-37 — Id. dall'apice del 2° dito: 42-45_2-(**46**)-50 — Id. dall'apice del 3° dito: 64_2-65-(**69**)-74 — Id. dall'apice del 4° dito: 17-19-(**20,50**)-22-24 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 45_3-(**47,50**)-50.

Maschi in amore	Larache	Saffi	Tunisi
Lunghezza del capo	83-101	92-(**100**)-106-108	104-110
Largh. del capo agli angoli dei mascellari .	121-137	123-132-(**141**)-150	125-131
Id. a metà degli occhi	92-99	86-90-(**91**)-96	86-88
Id. alle narici	23-29	22-(**23**)-24	22_2
Alt. del capo a metà della regione timpanica	52-54	49-(**52,50**)-54-56	43-50
Id. alle narici	26-29	24-25-(**27**)-30	28-29
Lungh. obl. del capo dall'angolo masc. al muso	108-124	95-108-(**110,50**)-126	103_2
Diametro interorbitale	29-37	31-**32**-33	29-31
Distanza dall'apice del muso alle narici . .	12-13	12_2-(**15**)-18	8-11
Id. dalle narici all'occhio	23-27	21-22-(**24,50**)-28	25-29
Id. dall'occhio al timpano	7-9	6_2-(**9**)-12	3-4
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	37-39	36-37-(**37,50**)-39	34-36
Id. minimo del timpano	16-17	12-(**14,50**)-15-17	14-16
Id. massimo del timpano	18-20	16_2-(**18**)-20	14-16
Lunghezza massima delle parotidi	75-85	65-(**74,50**)-81-84	83-88
Larghezza id. id.	37-39	37-42-(**42,50**)-48	33-38
Lunghezza del braccio	121-124	114-117-(**121**)-128	116-126
Id. dell'avambraccio	91-92	90-92-(**101**)-112	88-97
Id. della mano	88-91	77-84-(**86,50**)-96	85-86
Id. del 1° dito della mano	43-46	39-(**39,50**)-40_2	40-41
Id. 2° dito id.	33-39	27_2-(**27,50**)-28	25-29
Id. 3° dito id.	39-41	34-36-(**39**)-44	36-38
Id. 4° dito id.	29_2	21-(**26,50**)-27-32	25_2
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	23-29	27-(**27,50**)-28_2	28-29
Id. id. id. interno	15-21	15-16-(**18**)-21	18-22
Lunghezza della coscia	147-166	148-(**156,50**)-160-165	130-157
Id. della gamba	137-153	141-142-(**144,50**)-148	137-147
Id. del piede	198-219	210-216-(**233**)-236	216-225
Id. del 1° dito del piede	39-46	36-(**41**)-42-46	36-41
Id. 2° dito id.	65-75	60-(**62,50**)-64-65	61-66
Id. 3° dito id.	95-116	84-(**94**)-99-104	90-97
Id. 4° dito id.	141-153	126-132-(**137**)-148	130-144
Id. 5° dito id.	95-104	90-95-(**97**)-104	90-91
Lunghezza del tubercolo metatarsale interno	21-23	20-(**21**)-22_2	22_2
Id. id. id. esterno	12-13	12-(**13,50**)-14-15	11-13
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	29-37	31-33-(**33,50**)-36	29-31
Id. id. del 2° dito	43-54	39-(**44,50**)-46-50	36-47
Id. id. del 3° dito	65-75	54-59-(**63**)-72	61-66
Id. id. del 4° dito	21_2	22-(**23**)-24_2	22_2
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	49-54	48-49-(**50**)-52	50-54

Maschi in amore di Tetuan.

Lunghezza del capo: 88-91-93_2-95_2-96-(**97**)-101-103_2-104-105-106 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 113_2-116-117-120_2-121-123_2-125-**126**-132-139 — Id. a metà degli occhi: 80-85-86_3-87_2-(**89,50**)-90-92-93-96-97-99 — Id. alle narici: 20-21-22-23_3-(**23,50**)-24_3-25-26_2-27 — Altezza del capo alla regione timpanica: 44-45_3-48_3-(**49**)-50-51_2-53-54_2 — Id. alle narici: 23_4-24-25-(**26**)-27_3-28-29 — Lunghezza obliqua del capo: 99_2-104_2-105-107-108-(**109,50**)-110-111-115-116-120_2 — Diametro interorbitale: 25-29-(**30_2**)-31_2-32_3-33-34_2-35 — Id. dal muso alle narici: 7_2-8-9_2-10-11-12_2-14-16-(**17**)-22-27 — Id. dalle narici all'occhio: 22-23_3-24_2-(**25,50**)-26_2-27_4-29_2 — Id. dall'occhio al timpano: 6-7_2-8_4-**9**-10-11-12_3 — Id. trasversale dell'occhio: 34_3-36_2-37-38-(**38,50**)-39_2-40-42-43_2 — Id. minimo del timpano: 13_4-**14_4**-15_5 — Id. massimo: 15-16-17_4-**18**-19_2-20-21_2 — Lunghezza delle parotidi: 63_3-71_2-75-77_2-(**78**)-79-81-87-91-93 — Largh. id.: 29_3-32_4-37-38-(**38,50**)-39_2-41-48 — Lungh. del braccio: 111-113_3-116-117-118-120-121-123-(**125**)-132-134_2-139 — Id. dell'avambraccio: 85-86-87-89-90_2-**91_2**-92-93-96-97 — Id. della mano: 85-86_2-87_2-88-89_3-90-(**90,50**)-91-92-96 — Id. del 1° dito: 36-38-39-40-**41**-42_2-43_3-44_2-46 — Id. del 2° dito: 31_3-32_2-33-**34_3**-35-36-37_2 — Id. del 3° dito: 36-39_3-41_2-**42_2**-43_3-44-48 — Id. del 4° dito: 22-24-25_3-26-27_3-(**27,50**)-28-29-31-33 — Diam. mass. tubercolo palmare mediano: 19-22_2-**23**-24_2-25-26_2-27_4 — Id. dell'interno: 12-13_3-14_3-(**14,50**)-15_4-16-17 — Lungh. della coscia: 138-143-148-149-150-(**150.50**)-153-154-158-159_2-161-163_2 — Id. della gamba: 127-130-132-135-137-143_2-144-(**147**)-150-151_3-167 — Id. del piede: 203-212-214-216-221-223-224-(**225**)-231-233-234-235-236-247 — Id. del 1° dito: 33_2-36-(**38**)-39-40-41_4-42-43_3 — Id. del 2° dito: 59-62-63_2-64-(**65,50**)-66-67_2-68-69-72_3 — Id. del 3° dito: 77-(**90**)-95_3-96-99-101_3-103_4 — Id. del 4° dito: 131-134-136-137_3-(**141**)-143_4-147-149-151 — Id. del 5° dito: 86-87-89-91_2-92_2-93-**95**-103_3-104 — Id. del tubercolo metatars. interno: 16-17_3-**18**-19_5-20_3 — Id. esterno: 8-9_2-10_4-11-(**11,50**)-12_2-13-15 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 27-30_2-32_2-34-**35**-37-38_2-43 — Id. dall'apice del 2° dito: 36-(**40**)-45_3-47-48_4-49-50_3 — Id. dall'apice del 3° dito: 62-63-64-65_3-67-68-70-(**70,50**)-74-77_2-79 — Id. dall'apice del 4° dito: 13-16-19-(**21**)-22-23_3-24_2-26_2-29 — — Lungh. della ripiegatura tarsea: 44-46-48-50_2-**51_2**-53_2-54-57-58.

Maschi in amore di Mazagan.

Lunghezza del capo: 93-95-(**96.50**)-100 — Larghezza del capo agli angoli de mascellari: 112-116-(**125**)-138 — Id. a metà degli occhi: 86-87-(**93**)-100 — Id. alle narici: 23_2-(**27**)-31 — Altezza del capo a metà della regione timpanica: 46_2-(**50**)-54 — Id. alle narici: 26-(**27.50**)-29_2 — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 101-102-(**106**)-111 — Diametro interorbitale: 29-32-(**33.50**)-38 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 15-(**19**)-20-23 — Id. dalle narici all'occhio: 20-23-(**23,50**)-27 — Id. dall'occhio al timpano: 6-(**8,50**)-9-11 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 35-(**36.50**)-38_2 — Id. minimo del timpano : 14-(**14.50**)-15_2 — Id. massimo: 17_2-(**20**)-23 — Lungh. massima delle parotidi: 73_2-(**75.50**)-78 — Larghezza id.: 38_2-(**42**)-46 — Lunghezza del braccio: 113-(**124,50**)-134-136 — Id. dell'avambraccio: 81_2-(**88,50**)-96 — Id. della mano: 78-81-(**87**)-96 — Id. del 1° dito: 35-37-(**38.50**)-42

— Id. del 2° dito: 25-26-**(29,50)**-34 — Id. del 3° dito: 32-35-**(39)**-46 — Id. del 4° dito: 22-23-**(24.50)**-27 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 23_2-**(25)**-27 — Id. dell'interno: 17_2-**18**-19 — Lungh. della coscia: 132-139-**(148)**-157 — Id. della gamba: 127-128-**(138)**-149 — Id. del piede: 193-200-**(215)**-237 — Id. del 1° dito: 35-40-**(40,50)**-46 — Id. del 2° dito: 60-61-**(66,50)**-73 — Id. del 3° dito: 86-87-**(96,50)**-107 — Id. del 4° dito: 121-128-**(139)**-157 — Id. del 5° dito: 81_2-**(90.50)**-100 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 20-**23**-26 — Id. dell'esterno: 10-11-**(12,50)**-15 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 26-**32**-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 26-**32**-38 — Id. dall'apice del 3° dito: 41-43-**(45.50)**-50 — Id. dall'apice del 4° dito: 20_2-**(21,50)**-23 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 46_2-**48**-50.

Femmine in amore di Larache.

Lunghezza del capo: 83-87-**(94)**-99-105 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 124_2-129-**(129,50)**-135 — Id. a metà degli occhi: 86-**92**-97-98 — Id. alle narici: 22_2-**(23)**-24_2 — Altezza del capo alla regione timpanica: 50_2-**(52)**-53-54 — Id. alle narici: 24-25-**(25,50)**-26-27 — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 100-**105**-109-110 — Diametro interorbitale: 30-31-**34**-38 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 3_2-**6**-9 — Id. dalle narici all'occhio: 25-**26**-27 — Id. dall'occhio al timpano: 9_4 — Diam. massimo trasversale dell'occhio: 38_2-39-**42**-46 — Id. minimo del timpano: 12-13-**(16)**-19-20 — Id. massimo: 18-19-**(21)**-22-24 — Lunghezza mass. delle parotidi: 74-**(79,50)**-81-83-85 — Larghezza id.: 30-**(39)**-41_2-48 — Lungh. del braccio: 112-**(120,50)**-125-128-129 — Id. dell'avambraccio: 83-**(92)**-94-95-101 — Id. della mano: 83-91-**(92,50)**-98-102 — Id. del 1° dito: 38-**(44,50)**-47-49-51 — Id. del 2° dito: 30-**34**-37-38 — Id. del 3° dito: 38-**(43)**-44-45-48 — Id. del 4° dito: 24-**26**-27-28 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 24-25-26-**(27.50)**-31 — Id. dell'interno: 13-14-15-**(16)**-19 — Lunghezza della coscia: 148-157-**(158,50)**-167-169 — Id. della gamba: 127-**(138.50)**-144-146-150 — Id. del piede: 198-**(219,50)**-225-233-241 — Id. del 1° dito: 32-34-**(38)**-41-44 — Id. del 2° dito: 56_2-60-**(62)**-68 — — Id. del 3° dito: 91-94_2-**(100)**-109 — Id. del 4° dito: 124-**135**-139-146 — Id. del 5° dito: 83-90-**91**-94-99 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 18-19-**(21,50)**-24-25 — Id. dell'esterno: 11-12-**(12,50)**-13-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 30_2-31-**(32)**-34 — Id. dall'apice del 2° dito: 44_2-45-**(47,50)**-51 — Id. dall'apice del 3° dito: 59-**(65)**-66-68-71 — Id. dall'apice del 4° dito: 21-**23**-24-25 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 41-**47**-48-53.

Femmine in amore di Saffi.

Lunghezza del capo: 93_2-95-**96**$_3$-99 — Largh. del capo agli angoli dei mascellari: 130-131-132-**(132,50)**-134-135 — Id. a metà degli occhi: 85-89-90-**(91,50)**-93-98 — Id. alle narici: 21_2-22_2-**(22,50)**-24 — Altezza del capo alla regione timpanica: 51-52-**53**-55_3 — Id. alle narici: 22-24_3-**27**-32 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 101-107-**(107,50)**-109-110-113-114 — Diametro interorbitale: 27-31_2-**(31,50)**-34-35-36 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 7-8-9-12-**(13,50)**-14-20

— Id. dalle narici all'occhio: 21-22-23-**24**-26-27 — Id. dall'occhio al timpano: 7_3-(**9**)-10-11_2 — Diametro mass. trasversale dell'occhio: 27-(**33**)-34_2-35-37-39 — Id. minimo del timpano: 14_2-**16**-17_2-18 — Id. massimo: 15-18-(**18,50**)-19_2-21-22 — Lunghezza massima delle parotidi: 82-85-(**86**)-87-89-90_2 — Larghezza id.: 43-45-(**49**)-51_3-55 — Lunghezza del braccio: 112_2-113-**122**-123-132 — Id. dell'avambraccio: 76-79-82-(**84,50**)-86-87-93 — Id. della mano: 76-84-(**84.50**)-86_2-90-93 — Id. del 1° dito: 39-40-41-(**42**)-45_3 — Id. del 2° dito: 27_2-28-31-32-**33**-39 — Id. del 3° dito: 40-41_2-42_2-(**42,50**)-45 — Id. del 4° dito: 21-22-24-25-(**25,50**)-27-30 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 21-24_2-(**24,50**)-26-27-28 — Id. dell' interno: 14-15-16-(**17**)-18-20 — Lunghezza della coscia: 144_2-146-154-(**154.50**)-157-165 — Id. della gamba: 131-137-(**140.50**)-141_3-150 — Id. del piede: 197-198-(**211**)-213-215-216-225 — Id. del 1° dito: 34-35-(**38**)-39-41-42 — Id. del 2° dito: 51-55-58-(**58,50**)-59-65-66 — Id. del 3 dito: 85-90-93_2-(**93.50**)-99-102 — Id. del 4° dito: 122-124-128-130-(**133**)-144_2 — Id. del 5° dito: 81-82-84-(**87**)-90-93_2 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 18-**21_3**-22-24 — Id. dell'esterno: 12-14_2-(**15**)-17-18 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 25-(**29,50**)-31-32-33-34 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-43-(**45**)-46-48-51_2 — Id. dall'apice del 3° dito: 56-58-61-(**65.50**)-69_2-75 — Id. dall'apice del 4° dito: 19-20-22-(**23**)-24_2-27 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 48-51_2-(**51.50**)-52-54-55.

Femmine in amore di Tangeri.

Lunghezza del capo: 82-87-88-(**92**)-94-96-102 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 108-109-112-117-(**118,50**)-120-129 — Id. a metà degli occhi: 77_3-(**85**)-87_2-93 — Id. alle narici: 19_3-20-**21**-23 — Altezza del capo alla regione timpanica: 42-43_2-44-**45**-48 — Id. alle narici: 21_2-(**22,50**)-23_2-24_2 — Lungh. obliqua del capo: 86-88-90-93-96-(**98,50**)-111 — Diametro interorbitale: 24-26-28-(**28,50**)-29-30-33 — Id. dall'apice del muso alle narici: 5-6-9_2-11-(**13**)-21 — Id. dalle narici all'occhio: 20_2-(**20,50**)-21_4 — Id. dall'occhio al timpano: 6-(**7.50**)-8_2-9_3 — Diametro trasv. dell'occhio: 31_2-32_2-(**35**)-36-39 — Id. minimo del timpano: 12-13_2-14-**15**-18 — Id. massimo del timpano: 16-17_2-19-(**19,50**)-20-21 — Lunghezza delle parotidi: 64-66-68-72-(**74**)-78-84 — Larghezza id.: 33-34_4-(**39**)-45 — Lunghezza del braccio: 94-99-103-(**104**)-109-111-114 — Id. dell'avambraccio: 72_2-77_2-(**78**)-81-84 — Id. della mano: 74-77-78-(**80**)-84-85-86 — Id. del 1° dito: 29-31-34-**37**-39-45 — Id. del 2° dito: 23_2-(**26,50**)-27_2-29-30 — Id. del 3° dito: 34_3-(**36,50**)-37-39_2 — Id. del 4° dito: 19-20_2-21_2-(**21.50**)-24 — Id. del tubercolo palmare mediano: 20-21_3-(**22**)-23-24 — Id. dell'interno: 13_2-14_2-15-(**16**)-19 — Id. della coscia: 119-129-(**131,50**)-135-138-140-144 — Id. della gamba: 114-123-(**124,50**)-125-127-135_2 — Id. del piede: 185-188-189-193-(**197.50**)-207-210 — Id. del 1° dito: 33-34_4-(**34.50**)-36 — Id. del 2° dito: 48-51_3-(**54**)-56-60 — Id. del 3° dito: 80_2-83-85-(**88**)-90-96 — Id. del 4° dito: 114_2-116-**120**-126_2 — Id. del 5° dito: 72-**77**-80-81_2-82 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 16_3-17-(**20**)-21-24 — Idem esterno: 9_2-11-**12**-13-15 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 21-23-(**26**)-27-29-30-31 — Id. dall'apice del 2° dito: 37_2-39-**40**-42-43 — Id. dall'apice del 3° dito: 51-56_2-**57**-60-63 — Id. dall'apice del 4° dito: 16-(**19,50**)-21_4-23 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 34-37-(**42.50**)-43-48-51-54.

Femmine in amore	Rabat	Tetuan	Mazagan
Lunghezza del capo	88_2	87-93	91-92-(**97**)-103
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	118_2	134-140	119-121-(**124**)-129
Id. a metà degli occhi	85_2	91-93	86-(**87,50**)-89_2
Id. alle narici	23_2	23-24	19-20-(**21**)-23
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	46-49	50_2	44-46-(**47,50**)-49
Id. alle narici	23-26	23-24	20-(**23**)-25-26
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	92-99	101-117	87-(**91**)-94-95
Diametro interorbitale	29-33	30_2	29-30-(**31,50**)-34
Distanza dall'apice del muso alle narici .	5-8	0-8	0-9_2
Id. dalle narici all'occhio	23_2	23-26	20-(**21,50**)-22-23
Id. dall'occhio al timpano	10_2	10_2	6_2-(**7,50**)-9
Diametro massimo trasversale dell'occhio	33-39	34-40	31-33-(**33,50**)-36
Id. minimo del timpano	13-16	13-17	10-(**12,50**)-14-15
Id. massimo del timpano	13-16	18-20	15-16-(**17**)-19
Lunghezza massima delle parotidi . . .	75-78	80-84	61-72-(**72,50**)-84
Larghezza id. id.	37-39	37_2	33-37-(**39,50**)-46
Lunghezza del braccio	111_2	101-123	94-102-(**103**)-112
Id. dell'avambraccio	78-85	87-90	67-72-(**75**)-81
Id. della mano	82_2	87-90	78-80-(**81**)-84
Id. del 1° dito	33-43	50_2	36-40-(**41**)-46
Id. del 2° dito	26_2	40_2	30-32-34
Id. del 3° dito	43_2	44-47	36-37-(**45**)-54
Id. del 4° dito	26_2	27-30	22-(**22,50**)-23_2
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	23_2	24_2	22-23-24-26
Id. id. id. id. interno .	13-16	10-17	13-(**13,50**)-14_3
Lunghezza della coscia	144-150	144-163	126-(**133,50**)-136-141
Id. della gamba	134_2	144-147	119-123-(**127,50**)-136
Id. del piede	199_2	225-226	183-197-(**202**)-207
Id. del 1° dito	36_2	37-43	33-34-(**38**)-43
Id. del 2° dito	59-62	67_2	47-(**55**)-60-63
Id. del 3° dito	88-98	100-101	83-(**86**)-89_2
Id. del 4° dito	121-137	140-141	116-(**121,50**)-126-127
Id. del 5° dito	82-88	90-94	75-(**80,50**)-81-86
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	20_2	20_2	17-18-(**20**)-23
Id. id. id. esterno	10-13	10-12	9-11-13
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	33_2	27-37	28-(**28,50**)-29_2
Id. id. id. 2° dito	49_2	47_2	28-29-(**34**)-40
Id. id. id. 3° dito	65_2	71-73	39-40-(**49,50**)-60
Id. id. id. 4° dito	23_2	23-24	17-(**18,50**)-19-20
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	39-46	50-53	40-42-(**44,50**)-49

Femmine in amore di Tunisi.

Lunghezza del capo: 85-89-90-(**95,50**)-106 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 119-125-128-(**130**)-141 — Id. a metà degli occhi: 81-(**88,50**)-91-95-96 — — Id. alle narici: 19-21-22-(**22.50**)-26 — Altezza del capo alla regione timpanica: 44-(**47,50**)-48-50-51 — Id. alle narici: 25_2-26-(**29**)-33 — Lunghezza obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 89-(**101,50**)-108_2-114 — Diam. interorbitale: 28-30-

(31)-33-34 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 2-**(4,50)**-5-6-7 — Id. dalle narici all'occhio: 22-**25**-27-28 — Id. dall'occhio al timpano: 2-3_2-**(4)**-6 — Diam. trasversale dell'occhio: 31-34-**(34,50)**-36-38 — Id. minimo del timpano: 13_2-**(14)**-15_2 — Id. massimo: 13_2-**(15,50)**-17-18 — Lungh. delle parotidi: 72-81-**(83)**-84-94 — Larghezza id.: 31-40-**(43)**-47-55 — Lunghezza del braccio: 110-116-**(119)**-126-128 — Id. dell'avambraccio: 72-**(80)**-81-87-88 — Id. della mano: 78-81-**(83)**-81-87-88 — Idem del 1° dito: 34_2-**(41)**-48_2 — Id. del 2° dito: 22-**(27,50)**-28-30-33 — Id. del 3° dito: 38-39-**41**-44 — Id. del 4° dito: 22_2-**(25,50)**-27-29 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 25-26-**(27,50)**-28-30 — Id. dell'interno: 13_2-**(15,50)**-18_2 — Lunghezza della coscia: 128-141-**(143,50)**-154-159 — Id. della gamba: 125-128-**(136)**-143-147 — Id. del piede: 191-200-**(209,50)**-210-228 — Id. del 1° dito: 34-37-38-**(39,50)**-45 — Id. del 2° dito: 53-56-**(59,50)**-62-66 — Id. del 3° dito: 81-85-**90**-99 — Id. del 4° dito: 125-128-**(132)**-135-139 — Id. del 5° dito: 78-**(88,50)**-91-92-99 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 19_2-**(21,50)**-22-24 — Id. dell'esterno: 11_2-**13**-15 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 28-30-**(30,50)**-31-33 — Id. dall'apice del 2° dito: 39-41-**(43,50)**-44-48 — Id. dall'apice del 3° dito: 59-60-63-**(66)**-73 — Id. dall'apice del 4° dito: 19_2-**(21,50)**-22-24 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 47-48-**(49)**-50-51.

Bufo regularis.

Giovani in cui la lunghezza base varia da 10 a 30 millimetri, di Wadi Halfa (Sudan).

Lunghezza del capo: 120_2-122-125_9-126_2-127_6-129-**132_8**-135_4-138_8-140_8-144_3 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 120_3-123_7-125_2-126_4-127_4-135_{17}-**(137)**-138-144_{10}-148_2-154_2 — Id. a metà degli occhi: 90-93_7-96_7-98_5-100_8-101_4-103_3-**(105)**-108_4-116_2-120_{11} — Id. alle narici: 25-26-27-30_{17}-32_3-**(33,50)**-34_4-35_{16}-36_2-37_4-38_2-42 — Altezza del capo alla regione timpanica: 47_3-48_{11}-51_5-54_3-**(55,50)**-57_2-58_4-60_{10}-62_7-63_5-64_2 — Id. alle narici: 34_{10}-35_7-36_7-**38_3**-42_{25} — Lungh. obliqua del capo dall'angolo mascellare al muso: 126-127-128_3-130-135_{15}-138_2-**140**-142_3-143_9-144_{13}-148-154_2 — Diametro interorbitale: 34-36_3-39_3-40_{18}-42_{13}-**(42,50)**-45-48_{11}-51_2 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 0_{19}-2-4-5_{13}-**(5,50)**-6_2-7_4-9_5 — Id. dalle narici all'occhio: 23-28_2-30-32_{13}-**(32,50)**-34_3-37-38_6-40_{11}-41_2-42_{12} — Id. dall'occhio al timpano: 0_{52} — Diametro trasv. dell'occhio: 42-47-48_4-49_2-50_7-51_2-53_{12}-54_6-**55_4**-57_3-60_2-62_6-64-68 — Idem min. del timpano - timp. invisibile in 50 esempl.: in 2 esempl.: 20-23 — Id. mass: 20-23 — Lung. del braccio: 96-100_2-101-102-103_2-106_4-107_3-**(111,50)**-113_{12}-102-102_2-106-108-115_7-118_6-120_{10}-126_2-127 — Id. dell'avambraccio: 64-68-72_3-75-77_2-78-79_5-**(79,50)**-80_{17}-83_7-84-85_3-90_9-95 — Id. della mano: 85_2-86-90_4-91_7-92_5-95-96_9-**(96,50)**-100_{12}-101_6 — — Id. del 1° dito: 36-39_4-40_6-**(40,50)**-41_4-42_{22}-43_{13}-45_2 — Id. del 2° dito: 26_2-32_5-**33_7**-34_5-35_{10}-36_{15}-40 — Id. del 3° dito: 45-47_2-48_7-50_5-51_1-52_7-**(52,50)**-53_7-54_8-55_4-57_6-60 — Id. del 4° dito: 24_9-25-26_7-27_{14}-28_9-**30_3**-32_5-33_3-36 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 16_2-17_{10}-18_{10}-19_2-**20_{13}**-21_{11}-24 — Id. dell'interno: 9_7-10-11_5-12_4-**(12,50)**-13_9-14_{12}-15_{11}-16_3 — Lunghezza della coscia: 131_4-132_5-135_4-137-138_8-140_8-141-143_3-**(143,50)**-144_6-146_4-148_5-156_3 — Id. della gamba: 120_2-125_8-126_9-

127_7-129_2-**132**-135_5-138_6-141_3-142_3-144_6 — Id. del piede: 200_7-203-206_3-212_{12}-214-216_6-220-(**223**)-224_3-225_4-228-231-233-240_2-246 — Id. del 1° dito: 39_2-40_2-42_{13}-43-45_9-(**46,50**)-48_{10}-54_{15} — Id. del 2° dito: 51_2-54-55_7-58_6-(**59,50**)-60_6-62_5-63_8-64_{13}-68_4 — Id. del 3° dito: 80-85_{17}-86-90_{18}-(**92**)-96_{11}-100-103_2-104 — Id. del 4° dito: 117-120_8-131_4-(**132,50**)-135_3-138_4-140_4-141_4-142_2-144_8-146_2-148_{12} — Id. del 5° dito: 72_4-75-77_6-80_7-(**84**)-85_{12}-90_{17}-96_6 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 11_{20}-13_2-15_8-17_3-(**17,50**)-18_5-24_{13} — Id. dell'esterno: 5_4-6_3-7_{11}-(**7,50**)-8_{17}-9_{10}-10_7 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 21_3-28_4-30_{19}-(**31,50**)-36_4-42_{21} — Id. dall'apice del 2° dito: 36-39-40_{11}-(**44,50**)-45_{13}-48_5-51_2-52_7-53_{12} — Id. dall'apice del 3° dito: 54-60_8-64_{20}-(**65**)-68_9-69_2-72_9-76_3 — Id. dall'apice del 4° dito: 18-20_{12}-21_7-(**22,50**)-23_9-24_{18}-27_4 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 51_2-55_{13}-56_2-58_2-60-64_{17}-66-68_2-69-(**69,50**)-72_9-76-78.

Individui giovani di Wadi Halfa (Sudan)
la cui lunghezza base varia da 31 a 38 millimetri.

Lunghezza del capo: 114-116 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 128_2 — Id. a metà degli occhi: 104_2 — Id. alle narici: 23-24 — Altezza del capo alla regione timpanica: 47-58 — Id. alle narici: 28-29 — Lunghezza obliqua del capo: 117-128 — Diametro interorbitale: 38-39 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 0-2 — Id. dalle narici all'occhio: 28-39 — Id. dall'occhio al timpano: 0_2 — Diam. massimo trasv. dell'occhio: 43-46 — Id. min. del timpano: 19-26 — Id. mass.: 19-23 — Lunghezza delle parotidi: 70-76 — Larghezza id.: 23-24 — Lunghezza del braccio: 99-114 — Id. dell'avambraccio: 66-76 — Id. della mano: 88-95 — Id. del 1° dito: 46-47 — Id. del 2° dito: 35-43 — Id. del 3° dito: 46-47 — Id. del 4° dito: 28-29 — Diametro mass. del tubercolo palmare mediano: 17-19 — Id. dell'interno: 12-14 — Lungh. della coscia: 139-152 — Id. della gamba: 128_2 — Id. del piede: 197-218 — Id. del 1° dito: 35-38 — Id. del 2° dito: 57-64 — Id. del 3° dito: 93-99 — Id. del 4° dito: 128-133 — Id. del 5° dito: 81-88 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 17-19 — Idem dell'esterno: 12-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 35-38 — Id. dall'apice del 2° dito: 46-47 — Id. dall'apice del 3° dito: 57-64 — Id. dall'apice del 4° dito: 19-23 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 52-57.

Maschi in amore di Wadi Halfa (Sudan).

Lunghezza del capo: 97-103-105-106_3-108-110_2-112-113_3-(**113,50**)-114-115_3-117_2-118_6-120_2-123-130 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 118-120_3-122_3-123-124_3-125-126_2-127_3-$\mathbf{128_4}$-129-130-131_3-135-137-138 — Id. a metà degli occhi: 89-92-97_3-98_4-**99**-101-102_2-103-104-105_6-106_2-107_3-108_2-109 — Id. alle narici: 19-20-21-23_4-24_4-$\mathbf{25_3}$-26_8-27_4-28_2-31 — Altezza del capo alla regione timpanica: 46_5-47-48_4-49_2-50_2-51_2-52_5-$\mathbf{53_3}$-54_2-55-56-59-60 — Id. alle narici: 22-23-24-25_2-26_9-(**26,50**)-27_2-28_4-29_3-30_3-31_3 — Lunghezza obliqua del capo: 106-107-109-111_3-113_2-115-**116**-117_4-118_3-120_4-122_3-123-124-125-126 — Diam. interorbitale: 26_3-27_2-28-29_4-30_4-31_3-32_4-(**32,50**)-

33_2-34-35_3-36-39 — Dist. dall'apice del muso allo narici: 0_6-3_4-4_2-6_2-7_6-$\mathbf{8}_3$-10-11_2-12_2-13_2 — Id. dalle narici all'occhio: 21-23_2-24_3-26_6-27_2-28_3-**(28,50)**-29_2-30_2-31_4-32_2-33-36 — Id. dall'occhio al timpano: **(8)**-0_{23}-2_5 — Diam. mass. trasvers. dell'occhio: 35-38_2-39_2-40_2-41-42_3-43-44-**(44,50)**-45_5-46_4-47_3-48-49-51-54 — Id. minimo del timpano: 19-20_2-21_4-22_2-23_9-24_2-**(25,50)**-26_3-27_2-28-30-31-32 — Id. massimo: 20-21_2-22-23_4-25-$\mathbf{26}_7$-27_3-28_2-29_2-30-31_2-32 — Lunghezza delle parotidi: 55-56-58-59-60-61-62-63_3-64-66_3-68_2-$\mathbf{69}_2$-70-71-72_3-75-76_2-77-78-83 — Largh. id.: 19-20_2-21_3-22-23_5-24_4-**(25,50)**-26_8-27-29-31-32_2 — Lungh. del braccio: 105-109_2-110_2-111_4-112_2-113_5-115_3-116-117_2-**(117,50)**-118_3-120_2-123-130 — Id. dell'avambraccio: 72-74_2-76_3-77_3-78_4-79_5-80-**81**-82-83_3-86-90_4 — Id. della mano: 77-79_2-83_2-84-85_4-86_3-87-88_3-**(88,50)**-90_5-92_3-97_3-100 — Id. del 1° dito: 35_3-38-39_6-40_2-41-42-**43**-45_3-46_4-47-48_3-49-50-51 — Id. del 2° dito: 21-24_2-26_6-27-28-29-$\mathbf{30}_2$-31_6-32_2-33-34_3-35-36-38-39_2 — Id. del 3° dito: 36-39-40_2-41_3-42-43_2-44-$\mathbf{45}_3$-46_3-47_3-48_2-49_2-50_3-53-54 — Id. del 4° dito: 21-23_4-24_2-25-26_6-27_2-$\mathbf{28}_2$-29_2-30_2-31_3-32_3-35 — Diam. del tuberc. palmare mediano: 15-16-17_2-18-$\mathbf{19}_5$-20_8-21_6-22_2-23_3 — Id. dell'interno: 9_2-10_2-11_3-12-13_4-$\mathbf{14}_7$-15_5-16_4-19 — Lunghezza della coscia: 124-125-126-128-129-130_3-131_3-132-133-134_2-**(134,50)**-135_2-136-138_2-139_2-141_3-142-144_2-145 — Id. della gamba: 120-122_2-124_4-125_2-126-128_4-129_2-130-131_2-**132**-133_3-134_3-138_2-144 — Id. del piede: 197-199-203_4-204_3-205-206-207_2-208-209-210-211-212_2-215_2-216_3-**(217)**-219_2-221-223-237 — Id. del 1° dito del piede: 31-32-33-34_2-35_8-36_3-**(37)**-38_5-39_5-40-41-43 — Id. del 2° dito del piede: 47_2-53_3-55-56_2-57-58_2-$\mathbf{59}_3$-60_3-61_2-62_2-63-64-66_3-68_2-71 — Id. del 3° dito del piede: 83-85-88-89-90_3-92_3-93_2-94_3-$\mathbf{97}_2$-98_5-99-100-101-102-103-104-111 — Id. del 4° dito: 123-125-128_2-130-131_5-132_2-133-**(134,50)**-135_3-136_2-138_2-139-141_2-144_3-146 — Id. del 5° dito: 75-80-82-83_2-84-85_5-86_5-**(86,50)**-87_2-88-90_4-92_2-93-95_2-98 — Id. del tubercolo metatars. interno: 10-11-12-13_4-**(13,50)**-14_5-15_7-16_5-17_5 — Id. dell'esterno: 3-6-7_3-8_5-9-**(9,50)**-10_2-11_5-12_3-13_3-14_3-15-16 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 23-26_2-28_2-29_2-30_3-31_2-**(31,50)**-32_4-33_2-34_3-35_2-36_2-38_3-40 — Id. dall'apice del 2° dito: 36-38-39_2-41-42_7-44_2-$\mathbf{45}_3$-46_3-47_2-48_2-49_2-50-52-54 — Id. dall'apice del 3° dito: 52_2-55_2-56-57_2-58_4-59_2-60_2-61_2-62-63_3-64_2-**(64,50)**-66_2-68-69-72-77 — Id. dall'apice del 4° dito: 14-15_2-16_2-17_2-18-19_2-20_4-21_6-**22**-23_5-24-26-30 — Lunghezza della ripiegatura tarsea: 45-46-49-51_3-52_5-53_6-**(53,50)**-54_3-55_3-56-57-58-59-60-62.

Femmine in amore di Wadi Halfa (Sudan).

Lunghezza del capo: 100-102-103_2-104-106_3-107_2-110_2-$\mathbf{111}_3$-112-114-117-118_2-122_2 — Larghezza del capo agli angoli dei mascellari: 118_2-120_5-122_2-124_2-125_2-126-127_2-**128**-130_2-131-138_2 — Id. a metà degli occhi: 90_3-92-93-94-97-98_2-**99**-100_3-101_2-102-104-105_3-106-108 — Id. del capo alle narici: 21_2-23_3-24_5-25-**(25,50)**-26_6-27-29_2-30 — Altezza del capo a metà della regiono timpanica: 43-44_2-46-47-48-$\mathbf{49}_3$-50-52_5-53_6-55 — Id. alle narici: 22-23_2-24_2-25_2-26_7-$\mathbf{27}_3$-28-29-30_2-32 — Lungh. obliqua del capo: 101-104-106_3-107-108-109-111-112-114-**115,50**-116-117-118-120_2-122-124-136 — Diametro interorbitale: 25-26_4-28-29_4-30_4-31_2-32_3-33_2-36 — Distanza dall'apice del muso alle narici: 0_{10}-2_3-3_3-4_2-5-**(6,50)**-10-11 — Id. dalle narici all'occhio: 23-24-25-26_7-27-$\mathbf{28}_3$-29-30_3-31_2-32-33 — Id. dall'occhio al timpano: 0_{20}-2_2 — Diam. mass. trasv. dell'occhio: 35-37_2-38-39_2-40_2-**(41)**-42_5-43_3-45-46_2-47_3 — Id. min. del timpano: 18_2-20_3-21_2-

22_3-$\mathbf{23}_6$-24-25_3-26_2-28 — Id. massimo: 20_3-21_2-23_5-**(24,50)**-25_5-26_3-27_2-28-29 — Lunghezza delle parotidi: 55-58-59_2-60-61-62-63_4-64-66-**(67.50)**-68-69_2-70-71-72-78-80 — Larghezza id.: 16-18-19_2-20_3-21_5-22_2-23-24_2-25-26_5 — Lunghezza del braccio: 103-106_4-107-109_2-110_2-111_2-112-113-114-115_2-118-120-122 — Id. dell'avambraccio: 61-69-70_2-72_3-73_3-**(73,50)**-74-75-77-78_3-80-82-86 — Id. della mano: 77-79_4-80_2-84-85_3-**(85,50)**-87-88_2-89_2-90-91-92_2-94_2 — Id. del 1° dito della mano: 33_2-37-39-40-42_5-43-45-$\mathbf{46}_2$-47_2-48-49-50-51-52-53-59 — Id. del 2° dito: 26_2-29_2-30-31_3-32_4-33_5-**(33,50)**-34_2-35-36-41 — Id. del 3° dito: 37-39_2-40_3-42_5-44-**(44,50)**-46-47_5-48_2-49-52 — Id. del 4° dito: 21-23_2-24-25-26_6-$\mathbf{27}_2$-28_2-29_4-31-32-33 — Diametro massimo del tubercolo palmare mediano: 17-18_4-19_6-$\mathbf{20}_5$-21_3-22-23_2 — Id. dell'interno: 9-10-11_3-12_4-$\mathbf{13}_4$-14_2-16_5-19 — Lungh. della coscia: 120-122-127_2-131-132_2-134-**(135.50)**-137-138_2-140_2-141_3-142-143-144-146-147-151 — Id. della gamba: 120_2-122_3-124_2-126_2-127_4-**(128,50)**-130_3-131_3-133_2-137 — Id. del piede: 197-201_4-202-203_2-204-206-**(206,50)**-207_2-209_2-211_3-212-214-216_3 — Id. del 1° dito del piede: 31-32_2-33_2-34_2-35_4-36-37_3-**(38,50)**-39_2-40_2-42-43-46 — Id. del 2° dito: 51-52-53-54-56_3-57_2-58_4-59-60_3-**(61,50)**-64-65_2-66-72 — Id. del 3° dito: 85_2-86-87-88-89-90_4-92_2-93-94_3-96-98-101-**(103,50)**-105-122 — Id. del 4° dito: 120-122-124-125-126-130_3-131_4-132_2-134_3-136-138-144_3 — Id. del 5° dito: 79-80_2-81-82_2-84-85_3-86_3-87-88-89_2-90_2-92_3-105 — Id. del tubercolo metatarsale interno: 12_3-13_8-14_4-16_4-17_2-**(18)**-24 — Id. dell'esterno: 3-5_2-6_3-7_3-8-**(8.50)**-9_2-10_3-11_2-12_2-13_2-14 — Distanza dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale: 23-26_3-30_3-**(30,50)**-31_2-32_5-33_5-36_3 — Id. dall'apice del 2° dito: 34-37_3-39-40_3-41-$\mathbf{42}_4$-43_2-44-46_3-47-48-50 — Id. dall'apice del 3° dito: 52-53-57_2-58_3-59_2-60_2-61-**62**-63_3-64_2-66-67-72 — Id. dall'apice del 4° dito: 11-16_4-17-**(17,50)**-18-19_2-20_6-21_2-22_2-23_2-24 — Lungh. della ripiegatura tarsea: 42_2-44-46-47_2-49_2-50_2-51_2-**52**-53_3-56-58-59_2-60-62.

Bufo viridis.

Classi estreme.

Individui giovani	Siria	Torino	Siria	Sassari
Lunghezza base (espressa in millimetri)	11-20	20-40	30-50	30-50
Lunghezza del capo	131-138	115-137	81-115	96-123
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	123-133	115-144	122-133	108-134
Id. a metà degli occhi	98-114	97-120	81-147	90-115
Id. alle narici	33-34	25-34	24-31	23-29
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	45-65	49-64	40-48	42-51
Id. alle narici	29-38	24-34	24-31	23-31
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	133-148	116-144	109-126	108-134
Diametro interorbitale	38-57	25-42	25-36	26-41
Distanza dall'apice del muso alle narici .	—	3-17	3-8	0-17
Id. dalle narici all'occhio	38-49	25-40	25-31	23-36
Id. dall'occhio al timpano	—	0-7	2-7	0-7
Diametro massimo trasversale dell'occhio	56-57	40-60	41-54	39-53
Id. minimo del timpano	—	7-17 inv. 7	8-16	8-14
Id. massimo del timpano	—	7-17 id.	9-16	8-14
Lunghezza massima delle parotidi . . .	—	62-86	65-94	66-94
Larghezza id. id.	—	24-40	33-54	24-45
Lunghezza del braccio	98-114	72-133	106-128	108-130
Id. dell'avambraccio	73-83	72-93	70-90	72-102
Id. della mano	73-98	74-108	70-98	82-102
Id. del 1° dito	esempl. con lungh. base eguale a mill. 19 —38	31-58	33-49	39-49
Id. del 2° dito	—34	31-43	27-41	25-41
Id. del 3° dito	—57	40-58	40-49	41-53
Id. del 4° dito	—38	25-40	24-41	24-34
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	—19	7-17	16-20	12-22
Id. id. id. id. interno .	—19	4-17	8-17	6-14
Lunghezza della coscia	124-148	115-158	118-149	120-151
Id. della gamba	111-133	106-144	125-135	120-134
Id. del piede	183-213	180-245	184-227	192-229
Id. del 1° dito	esemplare con lungh. base eguale a mill. 19 38	33-51	33-41	31-42
Id. del 2° dito	57	48-77	49-70	48-65
Id. del 3° dito	95	80-108	81-110	72-102
Id. del 4° dito	133	115-158	126-149	120-149
Id. del 5° dito	95	80-101	81-98	77-102
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	19	12-22	14-20	12-22
Id. id. id. esterno	8	3-8	4-16	7-16
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	38	24-40	25-37	27-41
Id. id. id. 2° dito	57	39-58	35-51	42-55
Id. id. id. 3° dito	76	62-90	53-72	60-79
Id. id. id. 4° dito	28	15-36	16-26	17-26
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	57	42-72	44-65	42-59

Bufo viridis.

Classi estreme.

Individui giovani	Catania	Taranto	Ancona
Lunghezza base (espressa in millimetri)	30-50	38-43	53-59
Lunghezza del capo	114-131	114-123	106-122
Largh. del capo agli angoli dei mascellari .	111-142	123-134	118-136
Id. a metà degli occhi	92-114	95-109	93-109
Id. alle narici	23-34	25-28	23-27
Alt. del capo a metà della regione timpanica	45-55	44-54	46-50
Id. alle narici	23-34	25-28	23-27
Lungh. obl. del capo dall'angolo masc. al muso	113-133	114-126	110-129
Diametro interorbitale	23-43	26-33	24-27
Distanza dall'apice del muso alle narici . .	3-9	13-19	9-20
Id. dalle narici all'occhio	23-34	24-28	24-27
Id. dall'occhio al timpano	0-11 (invis. 2)	0-2	0-7
Diametro massimo trasversale dell'occhio .	37-47	44-50	43-50
Id. minimo del timpano	9-16 (invis. 2)	5-13	12-14
Id. massimo del timpano	9-16 (id.)	5-13	12-14
Lunghezza massima delle parotidi	70-86	70-85	67-85
Larghezza id. id.	28-45	28-45	33-43
Lunghezza del braccio	101-133	114-134	122-143
Id. dell'avambraccio	65-95	79-92	85-102
Id. della mano	77-98	79-85	79-95
Id. del 1° dito della mano	33-47	28-44	34-48
Id. 2° dito id.	28-39	24-38	31-37
Id. 3° dito id.	43-51	38-47	39-48
Id. 4° dito id.	23-41	25-28	27-34
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	11-23	17-19	19-21
Id. id. id. interno	4-16	8-9	6-17
Lunghezza della coscia	98-147	123-134	128-143
Id. della gamba	90-142	114-126	122-143
Id. del piede	173-235	189-211	207-238
Id. del 1° dito del piede	33-49	28-42	31-44
Id. 2° dito id.	56-69	53-60	61-68
Id. 3° dito id.	90-106	85-95	92-105
Id. 4° dito id.	128-157	123-142	128-154
Id. 5° dito id.	79-110	85-92	85-102
Lunghezza del tubercolo metatarsale interno	15-23	14-20	27-37
Id. id. id. esterno	4-12	5-9	18-20
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale . .	21-34	26-36	27-37
Id. id. del 2° dito	38-54	44-50	40-50
Id. id. del 3° dito	60-79	61-72	61-68
Id. id. del 4° dito	15-26	18-21	12-20
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	33-56	38-57	43-54

Bufo viridis.

Classi estreme.

Maschi in amore	Givoletto	Moncalieri	Ancona	Lago Trasimeno	Campobasso
Lunghezza del capo	96-118	93-124	104-115	108-116	99-124
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	107-133	111-139	116-126	116-134	112-128
Id. a metà degli occhi	90-114	87-120	92-118	89-100	81-103
Id. alle narici	23-44	23-32	23-26	23-29	21-25
Alt. del capo a metà della regione timpanica	38-55	37-51	42-48	40-53	36-48
Id. alle narici	23-35	20-31	23-27	24-29	20-29
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	94-120	105-129	111-118	100-122	100-133
Diametro interorbitale	23-38	23-35	22-26	21-30	21-30
Distanza dall'apice del muso alle narici .	6-19	3-21	11-18	6-17	3-21
Id. dalle narici all'occhio	17-35	23-32	21-26	21-29	19-29
Id. dall'occhio al timpano	0-6	0-3	0-6	0-6	0-5
Diametro massimo trasversale dell'occhio	30-47	35-50	39-44	38-44	34-44
Id. minimo del timpano	11-21	11-22	11-19	12-17	11-17
Id. massimo del timpano	11-24	12-22	11-19	12-18	13-17
Lunghezza massima delle parotidi . . .	57-90	63-90	79-89	72-89	70-92
Larghezza id.	21-39	24-39	38-44	34-44	27-43
Lunghezza del braccio	110-152	111-145	126-148	108-139	107-138
Id. dell'avambraccio	71-114	79-109	87-101	89-99	83-100
Id. della mano	79-111	82-104	83-97	83-79	80-93
Id. del 1° dito	33-48	35-50	35-40	36-46	38-48
Id. del 2° dito	27-42	24-45	30-42	27-36	28-38
Id. del 3° dito	34-55	34-51	41-48	33-46	33-46
Id. del 4° dito	23-39	23-35	24-29	25-35	23-30
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	17-24	13-22	18-23	18-25	17-25
Id. id. id. id. interno .	9-21	11-22	8-17	9-17	14-22
Lunghezza della coscia	104-171	130-166	120-148	126-143	118-142
Id. della gamba	120-152	118-148	126-138	122-134	118-137
Id. del piede	212-288	209-249	224-242	211-242	217-252
Id. del 1° dito	29-49	30-50	33-45	33-46	32-43
Id. del 2° dito	53-93	53-78	59-73	61-69	59-71
Id. del 3° dito	77-115	77-124	89-113	94-109	89-133
Id. del 4° dito	134-166	124-171	142-164	139-160	136-166
Id. del 5° dito	69-107	79-112	89-107	83-103	86-106
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	16-25	12-22	27-37	16-23	15-20
Id. id. id. esterno	6-19	3-14	16-23	8-16	10-19
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	25-48	26-41	27-37	26-35	28-41
Id. id. id. 2° dito	37-57	33-60	41-56	39-48	43-57
Id. id. id. 3° dito	55-77	51-79	59-73	55-70	59-74
Id. id. id. 4° dito	6-20	6-22	11-23	11-18	10-23
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	44-69	42-71	49-63	50-57	47-67

Bufo viridis.

Classi estreme.

Maschi in amore	Taranto	Milazzo	Catania	Messina	Sassari
Lunghezza del capo	108-112	107-116	111-132	98-118	92-128
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	114-124	126-134	101-122	114-132	111-139
Id. a metà degli occhi	90-102	92-110	87-103	84-102	83-111
Id. alle narici	22-28	24-30	21-28	21-27	19-28
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	42-50	39-50	39-49	42-51	39-55
Id. alle narici	22-26	24-28	21-28	21-28	18-30
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	95-120	107-118	102-123	98-114	97-133
Diametro interorbitale	25-31	26-29	24-33	21-33	22-35
Distanza dall'apice del muso alle narici .	3-21	20-13	0-8	0-14	0-20
Id. dalle narici all'occhio	21-25	24-25	24-31	21-30	19-28
Id. dall'occhio al timpano	0-3	0-3	0-5	0-5	0-5
Diametro massimo trasversale dell'occhio	39-43	35-41	36-44	34-47	35-46
Id. minimo del timpano	12-16	15-17	11-21	13-19	10-22
Id. massimo del timpano	12-16	15-17	11-21	14-19	13-22
Lunghezza massima delle parotidi . . .	69-112	72-85	71-94	75-89	70-92
Larghezza id.	26-43	34-38	31-46	30-39	32-51
Lunghezza del braccio	122-133	122-129	120-139	122-143	115-149
Id. dell'avambraccio	85-99	87-100	69-101	87-106	85-106
Id. della mano	83-90	87-98	74-98	85-97	75-99
Id. del 1° dito	31-48	38-46	36-45	37-47	32-49
Id. del 2° dito	31-33	29-36	26-38	28-35	25-41
Id. del 3° dito	37-43	40-45	36-49	37-49	36-49
Id. del 4° dito	22-34	20-29	25-36	29-35	22-36
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	19-22	19-26	16-27	16-24	15-25
Id. id. id. id. interno .	11-18	9-15	5-24	3-15	3-20
Lunghezza della coscia	127-144	126-149	123-159	123-153	120-160
Id. della gamba	122-132	122-144	123-147	126-143	112-154
Id. del piede	216-233	209-236	206-252	222-249	209-258
Id. del 1° dito	32-43	34-41	32-46	34-47	28-46
Id. del 2° dito	53-69	58-70	59-86	64-77	51-71
Id. del 3° dito	89-116	93-113	95-122	99-116	80-116
Id. del 4° dito	143-153	145-159	138-172	143-171	136-170
Id. del 5° dito	90-99	89-100	87-112	89-112	84-112
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	15-19	19-21	15-23	14-22	15-23
Id. id. id. esterno	5-9	2-9	8-16	5-15	2-19
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	26-39	29-36	25-39	29-37	24-41
Id. id. id. 2° dito	33-43	34-46	35-56	37-47	26-58
Id. id. id. 3° dito	61-69	58-70	53-76	58-75	50-88
Id. id. id. 4° dito	5-8	5-12	10-22	10-23	5-24
Lungh. della ripiegatura tarsea	37-60	52-60	49-69	47-58	42-62

Bufo viridis.

Classi estreme.

Maschi in amore	Corfù	Candia	Siria	Tiflis
Lunghezza del capo	92-111	95-106	96-120	107-126
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	115-138	113-122	113-129	123-138
Id. a metà degli occhi	92-110	93-101	83-111	97-108
Id. alle narici	23-30	24-26	21-30	21-30
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	38-47	42-46	37-48	43-54
Id. alle narici	23-30	24-26	19-31	25-30
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	104-122	101-112	102-120	105-124
Diametro interorbitale	23-32	25-26	22-30	26-30
Distanza dall'apice del muso alle narici .	6-15	7-15	3-17	5-23
Id. dalle narici all'occhio	23-31	21-26	19-30	23-30
Id. dall'occhio al timpano	0-3	3-3	0-4	2-6
Diametro massimo trasversale dell'occhio	30-43	37-41	36-44	39-43
Id. minimo del timpano	11-19	15-20	12-17	11-18
Id. massimo del timpano	11-22	18-25	12-20	11-18
Lunghezza massima delle parotidi . . .	68-84	69-77	62-85	75-102
Larghezza id.	23-38	29-35	29-44	36-49
Lunghezza del braccio	102-139	123-137	118-138	118-148
Id. dell'avambraccio	81-102	95-101	84-102	88-109
Id. della mano	84-102	88-98	82-102	83-105
Id. del 1° dito	34-45	37-41	30-44	33-47
Id. del 2° dito	30-42	30-35	25-38	27-35
Id. del 3° dito	39-54	37-41	36-48	35-48
Id. del 4° dito	26-36	25-35	24-33	23-32
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	16-23	20-25	19-26	21-27
Id. id. id. id. interno .	11-18	19-21	10-23	12-21
Lunghezza della coscia	131-162	148-153	133-158	132-150
Id. della gamba	123-146	134-148	124-144	123-141
Id. del piede	214-264	236-243	209-245	207-252
Id. del 1° dito	33-47	35-44	34-44	27-39
Id. del 2° dito	59-73	59-72	58-73	59-64
Id. del 3° dito	91-120	94-113	93-110	94-107
Id. del 4° dito	134-168	118-159	133-163	140-161
Id. del 5° dito	90-108	89-103	89-110	89-102
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	15-23	15-20	14-24	18-24
Id. id. id. esterno	8-14	5-13	5-14	4-18
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	27-42	33-41	28-38	26-41
Id. id. id. 2° dito	39-53	39-51	31-53	44-48
Id. id. id. 3° dito	54-78	62-66	55-74	55-70
Id. id. id. 4° dito	10-18	5-18	9-25	7-24
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	45-62	58-62	47-66	47-60

Bufo viridis.

CLASSI ESTREME.

Femmine in amore	Givoletto	Moncalieri	Lago Trasimeno	Campobasso
Lunghezza del capo	95-118	94-116	98-116	97-108
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	114-132	109-132	110-122	116-131
Id. a metà degli occhi	90-112	86-102	86-95	83-94
Id. alle narici	21-30	20-34	21-26	20-23
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	42-55	36-52	42-51	39-47
Id. alle narici	21-33	20-34	21-28	21-28
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	95-116	98-118	94-120	98-113
Diametro interorbitale	20-33	22-34	21-31	25-28
Distanza dall'apice del muso alle narici .	3-13	0-8	3-11	5-9
Id. dalle narici all'occhio	20-33	21-31	21-26	22-23
Id. dall'occhio al timpano	0-3	0-6	2-6	0-5
Diam. massimo trasversale dell'occhio .	34-47	34-46	37-42	35-39
Id. minimo del timpano	11-19	11-21	10-18	12-16
Id. massimo del timpano	11-20	11-21	10-18	12-16
Lunghezza massima delle parotidi . . .	54-88	63-82	68-77	70-84
Larghezza id.	26-39	22-36	31-42	33-42
Lunghezza del braccio	111-144	97-124	104-120	113-122
Id. dell'avambraccio	78-118	74-89	79-90	80-94
Id. della mano	82-100	76-90	74-85	80-89
Id. del 1° dito	29-55	35-51	37-43	39-47
Id. del 2° dito	31-41	27-38	31-38	28-37
Id. del 3° dito	36-52	33-51	37-43	39-45
Id. del 4° dito	26-37	24-34	23-28	28-30
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	15-24	14-21	18-23	18-20
Id. id. id. id. interno .	9-17	5-17	5-16	9-14
Lunghezza della coscia	118-151	116-143	113-129	122-143
Id. della gamba	116-136	108-131	113-120	112-125
Id. del piede	195-231	194-238	193-212	203-217
Id. del 1° dito	31-46	31-47	37-41	28-39
Id. del 2° dito	46-70	48-72	52-63	55-64
Id. del 3° dito	69-118	78-106	78-94	89-104
Id. del 4° dito	126-156	126-168	120-139	129-148
Id. del 5° dito	72-97	78-99	78-89	83-94
Id. del tubercolo metatarsale interno . .	11-21	15-23	16-23	14-23
Id. id. id. esterno . .	6-17	3-14	6-14	11-15
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	26-38	26-38	28-33	28-35
Id. id. id. 2° dito	39-55	35-52	37-50	37-45
Id. id. id. 3° dito	55-78	53-72	51-63	56-66
Id. id. id. 4° dito	13-27	10-27	13-21	9-20
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	39-66	46-61	42-51	45-56

Bufo viridis.

Classi estreme.

Femmine in amore	Taranto	Milazzo	Catania	Messina
Lunghezza del capo	101-115	101-115	105-117	101-111
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	120-127	127-136	117-124	122-142
Id. a metà degli occhi	85-96	89-101	86-100	89-111
Id. alle narici	25-28	22-30	22-23	22-26
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	45-51	40-51	39-46	41-47
Id. alle narici	25	22-26	22-30	22-26
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	110-112	107-120	112-133	106-119
Diametro interorbitale	25-28	26-30	21-28	23-33
Distanza dall'apice del muso alle narici .	5-10	0-10	0-3	0-9
Id. dalle narici all'occhio	23-25	22-30	21-28	23-36
Id. dall'occhio al timpano	2-5	0-3	0-6	0-4
Diametro massimo trasversale dell'occhio	40-41	36-45	37-39	34-40
Id. minimo del timpano	13-15	14-18	12-17	13-18
Id. massimo del timpano	13-15	14-18	12-17	14-21
Lunghezza massima delle parotidi . . .	75-86	73-89	75-83	79-90
Larghezza id.	38-51	31-42	39-49	32-40
Lunghezza del braccio	122-125	115-125	104-117	110-130
Id. dell'avambraccio	85-96	75-87	76-83	81-95
Id. della mano	85-91	63-91	81-83	84-95
Id. del 1° dito	38-41	36-48	39-44	38-49
Id. del 2° dito	30-33	31-37	33-41	31-41
Id. del 3° dito	41-43	38-47	37-46	42-52
Id. del 4° dito	28-30	25-32	25-33	28-37
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	20-23	16-26	19-22	18-23
Id. id. id. id. interno .	5-10	5-11	8-19	5-11
Lunghezza della coscia	135-142	115-139	124-137	126-153
Id. della gamba	123-127	102-125	112-131	112-133
Id. del piede	200-218	191-235	203-218	201-234
Id. del 1° dito	40-41	32-42	28-34	35-42
Id. del 2° dito	60-66	58-68	55-61	56-65
Id. del 3° dito	90-96	90-101	87-97	89-106
Id. del 4° dito	130-137	129-144	132-139	131-156
Id. del 5° dito	85-91	89-96	81-87	84-101
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	18-20	16-21	15-17	16-29
Id. id. id. esterno	6-10	5-11	6-14	5-15
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	30-33	27-35	28-34	26-35
Id. id. id. 2° dito	35	40-45	39-44	35-48
Id. id. id. 3° dito	61-65	62-68	55-68	51-76
Id. id. id. 4° dito	13-15	11-21	15-22	13-19
Lungh. della ripiegatura tarsea	50-51	42-60	46-58	51-61

Bufo viridis.

Classi estreme.

Femmine in amore	Sassari	Corfù	Siria	Candia
Lunghezza del capo	98-126	86-115	87-110	93-108
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	120-142	108-137	92-126	112-123
Id. a metà degli occhi	87-118	86-115	82-97	90-100
Id. alle narici	17-30	20-30	20-26	21-28
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	44-54	35-51	39-46	40-46
Id. alle narici	22-30	21-29	21-29	22-28
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	98-120	105-144	90-112	100-116
Diametro interorbitale	22-33	22-35	19-26	24-31
Distanza dall'apice del muso alle narici .	0-18	0-14	0-12	0-14
Id. dalle narici all'occhio	19-30	23-29	19-26	22-28
Id. dall'occhio al timpano	0-9	0-4	0-7	2-8
Diametro massimo trasversale dell'occhio	34-47	34-47	34-42	38-44
Id. minimo del timpano	5-22	13-21	12-17	10-17
Id. massimo del timpano	7-22	13-21	12-18	13-21
Lunghezza massima delle parotidi . . .	69-96	67-92	69-83	71-82
Larghezza id.	35-49	23-43	30-46	25-41
Lunghezza del braccio	109-140	97-125	104-123	111-128
Id. dell'avambraccio	82-102	74-101	74-88	84-95
Id. della mano	77-96	84-97	75-89	82-90
Id. del 1° dito	39-50	35-50	34-44	35-44
Id. del 2° dito	31-40	27-41	26-36	31-39
Id. del 3° dito	30-49	43-51	32-44	39-51
Id. del 4° dito	26-36	28-43	26-29	28-36
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	18-23	14-21	17-22	16-24
Id. id. id. id. interno .	5-17	6-14	7-18	8-18
Lunghezza della coscia	119-153	125-164	117-146	122-139
Id. della gamba	112-137	115-138	111-139	118-139
Id. del piede	202-240	197-242	178-219	195-216
Id. del 1° dito	31-42	31-48	31-42	33-42
Id. del 2° dito	51-66	50-70	56-68	51-66
Id. del 3° dito	82-104	84-108	86-100	83-100
Id. del 4° dito	119-156	132-159	106-189	123-144
Id. del 5° dito	80-96	84-107	79-99	81-94
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	16-24	14-22	17-23	15-25
Id. id. id. esterno	4-16	6-14	8-14	5-17
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	26-41	25-42	26-34	26-35
Id. id. id. 2° dito	39-54	35-52	39-48	38-55
Id. id. id. 3° dito	55-83	58-75	52-68	51-66
Id. id. id. 4° dito	13-24	14-27	13-22	10-22
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	39-63	46-61	35-57	43-57

Bufo viridis.

Maschi in amore di Givoletto.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	23	102	0,0968	0,1129	0,7903	0,22
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	27	120	0,1129	0,2419	0,6452	0,22
Id. a metà degli occhi	25	102	0,0645	0,5968	0,3387	0,24
Id. alle narici	22	33,50	0	0,6935	0,3065	0,63
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	18	46,50	0	0,5323	0,4677	0,37
Id. alle narici	15	28	0,2097	0,3548	0,4355	0,50
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	27	107	0,0645	0,2581	0,6774	0,24
Diametro interorbitale	16	30.50	0	0,5968	0,4032	0,49
Distanza dall'apice del muso alle narici .	14	12,50	0	0,5000	0,5000	1,04
Id. dalle narici all'occhio	19	26	0,0645	0,2419	0,6935	0,72
Id. dall'occhio al timpano	15	7	0	0.9839	0.0161	2.00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	18	38,50	0	0,3548	0,6452	0,44
Id. minimo del timpano	11	16	0,0323	0,6452	0,3226	0,63
Id. massimo del timpano	14	17,50	0	0.5385	0,4615	0,75
Lunghezza massima delle parotidi . . .	34	73,50	0	0,6038	0,3962	0,45
Larghezza id. id.	19	30	0,0755	0,2264	0.6981	0,60
Lunghezza del braccio	43	131	0,0323	0,5323	0.4355	0,32
Id. dell'avambraccio	44	92,50	0	0,4194	0.5806	0,46
Id. della mano	33	95	0,0484	0,5806	0.2258	0.34
Id. del 1° dito	16	40.50	0	0,6613	0,3387	0.37
Id. del 2° dito	16	34,50	0	0.7581	0,2419	0,43
Id. del 3° dito	22	44,50	0	0,6129	0,3871	0,47
Id. del 4° dito	17	31	0,0806	0,6613	0,2581	0,52
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	8	20,50	0	0,6129	0,3871	0,34
Id. id. id. id. interno .	14	15.50	0	0.3226	0,6774	0,84
Lunghezza della coscia	68	137,50	0	0,3226	0.6774	0,48
Id. della gamba	33	136	0,0161	0,7258	0.2581	0,23
Id. del piede	77	250	0	0,9672	0,0328	0.30
Id. del 1° dito	21	39	0,1129	0,5968	0.2903	0,51
Id. del 2° dito	41	73	0,0161	0,9516	0,0323	0,55
Id. del 3° dito	39	96	0,0323	0,1935	0.7742	0.40
Id. del 4° dito	33	150	0.0806	0,5000	0.4194	0,21
Id. del 5° dito	39	88	0,0484	0,2258	0,7258	0,13
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	10	20,50	0	0,7419	0.2581	0,44
Id. id. id. esterno	14	12.50	0	0.4194	0,5806	1,04
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	24	36.50	0	0,7742	0,2258	0,63
Id. id. id. 2° dito . .	21	47	0,0806	0,5323	0,2258	0,43
Id. id. id. 3° dito	23	66	0.0161	0,4677	0,5161	0,33
Id. id. id. 4° dito . . .	15	13	0,0968	0,4677	0.4355	1,08
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	26	56,50	0	0,7419	0.2581	0,44

Bufo viridis.

Maschi in amore di Moncalieri.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	32	108,50	0	0,3333	0,6667	0,29
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	29	125	0,0256	0,3718	0,6026	0.22
Id. a metà degli occhi	34	103,50	0	0,6538	0,3462	0,32
Id. alle narici	10	27,50	0	0,6667	0,3333	0,32
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	16	44	0,1795	0,1538	0,5641	0.34
Id. alle narici	12	25,50	0	0,5256	0,4744	0,43
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	26	117	0,0128	0,6795	0,3077	0,21
Diametro interorbitale	13	29	0,0769	0.4487	0,4744	0,41
Distanza dall'apice del muso alle narici .	19	12	0.2179	0,2821	0,5000	1,50
Id. dalle narici all'occhio	10	27,50	0	0.5256	0,4744	0,32
Id. dall'occhio al timpano	4	1,50	0	0,8590	0,1410	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio.	16	42,50	0	0,7179	0,2821	0,35
Id. minimo del timpano	12	16,50	0	0,5513	0,4487	0,67
Id. massimo del timpano	11	17	0,1282	0,4487	0,4231	0,59
Lunghezza massima delle parotidi . . .	28	76.50	0	0,6410	0,3590	0,35
Larghezza id. id.	16	31,50	0	0,6410	0,3590	0,49
Lunghezza del braccio	35	128	0,0383	0,5000	0,4615	0,26
Id. dell'avambraccio	31	94	0,0641	0,6026	0,3333	0,32
Id. della mano	23	93	0,0769	0,6923	0,2308	0.24
Id. del 1° dito della mano	16	42,50	0	0,6026	0,3974	0,31
Id. 2° dito id.	22	34,50	0	0,5128	0,4872	0,61
Id. 3° dito id.	18	42,50	0	0,4615	0,5256	0,40
Id. 4° dito id.	13	29	0,0897	0,3846	0,5256	0,43
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	10	17,50	0	0,1667	0.8333	0,52
Id. id. id. interno	12	16,50	0	0,3333	0,6667	0,67
Lunghezza della coscia	37	148	0,0513	0,5897	0,3590	0.24
Id. della gamba	31	133	0,0513	0,3974	0,5513	0.22
Id. del piede	41	229	0,0128	0,1667	0,6923	0,17
Id. del 1° dito del piede	21	40	0	0,4359	0,5641	0,50
Id. 2° dito id.	26	65,50	0	0,4359	0,5641	0,38
Id. 3° dito id.	48	100,50	0	0.1923	0,8077	0,46
Id. 4° dito id.	51	149	0,0385	0,2821	0,6795	0,33
Id. 5° dito id.	34	95,50	0	0,2179	0,7821	0,35
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	11	17	0,1154	0,1026	0,7821	0,59
Id. id. id. esterno	12	8,50	0	0,6282	0,3718	1.28
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	19	35	0,1026	0.5128	0,3846	0,51
Id. id. del 2° dito	28	46,50	0	0,6795	0,3205	0,58
Id. id. del 3° dito	29	65	0,0897	0,4103	0,5000	0,43
Id. id. del 4° dito	17	14	0,0256	0.6795	0,2949	1,14
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	30	56,50	0	0,4487	0,5513	0.51

Bufo viridis.

Maschi in amore di Catania.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	22	121,50	0	0,4118	0,5882	0,17
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	22	111,50	0	0,8235	0,1765	0,19
Id. a metà degli occhi	17	95	0,0588	0,3529	0,5882	0,17
Id. alle narici	8	24,50	0	0,1176	0,8824	0,28
Alt. del capo a metà della regione timpanica	11	44	0,2353	0,5294	0,2353	0,23
Id. alle narici	8	24,50	0	0,2941	0,7059	0,28
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	22	112,50	0	0,4705	0,5294	0,18
Diametro interorbitale	10	28,50	0	0,7647	0,2353	0,31
Distanza dall'apice del muso alle narici .	9	4	0	0,7647	0,2353	2,00
Id. dalle narici all'occhio	8	27,50	0	0,7647	0,2353	0,25
Id. dall'occhio al timpano	6	2,50	0	0,7647	0,2353	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	9	40	0	0,5882	0,4118	0,20
Id. minimo del timpano	11	16	0,4118	0,2941	0,2941	0,63
Id. massimo del timpano	11	16	0,3529	0,1765	0,4705	0,63
Lunghezza massima delle parotidi . . .	24	82,50	0	0,8235	0,1765	0,28
Larghezza id.	16	38,50	0	0,6471	0,3529	0,39
Lunghezza del braccio	20	129,50	0	0,6471	0,3529	0,14
Id. dell'avambraccio	33	85	0	0,0588	0,9412	0,38
Id. della mano	25	86	0,1176	0,1765	0,7059	0,28
Id. del 1° dito	10	40,50	0	0,6250	0,4000	0,22
Id. del 2° dito	13	32	0,1333	0,3333	0,6000	0,38
Id. del 3° dito	14	42,50	0	0,5882	0,4118	0,31
Id. del 4° dito	12	30,50	0	0,2941	0,7647	0,36
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	12	21,50	0	0,4118	0,5882	0,51
Id. id. id. id. interno .	20	14,50	0	0,4118	0,5882	1,31
Lunghezza della coscia	37	141	0	0,4118	0,5882	0,25
Id. della gamba	25	135	0	0,5882	0,4118	0,10
Id. del piede	47	229	0,0588	0,2941	0,6471	0,20
Id. del 1° dito	15	39	0,0588	0,6471	0,2941	0,36
Id. del 2° dito	28	72,50	0	0,8235	0,1765	0,37
Id. del 3° dito	28	108,50	0	0,5294	0,4705	0,24
Id. del 4° dito	35	155	0,0588	0,7059	0,2353	0,21
Id. del 5° dito	26	99,50	0	0,7647	0,2353	0,25
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	8	32	0,2353	0,1176	0,6471	0,22
Id. id. id. esterno	9	12	0	0,6471	0,3529	0,67
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	15	32	0,2353	0,4118	0,3529	0,44
Id. id. id. 2° dito	22	45,50	0	0,8235	0,1765	0,46
Id. id. id. 3° dito	24	64,50	0	0,3529	0,6471	0,35
Id. id. id. 4° dito	13	16	0,2941	0,5294	0,1765	0,75
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	21	59	0,0588	0,6471	0,2941	0,34

Bufo viridis.

Maschi in amore di Sassari.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	37	110	0,1053	0,5789	0,3158	0,33
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	29	125	0,0877	0,4561	0,4561	0,22
Id. a metà degli occhi	29	97	0,0702	0,5088	0,4211	0,29
Id. alle narici	10	23,50	0	0,4912	0,5088	0,38
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	17	47	0,1053	0,2982	0,5965	0,34
Id. alle narici	13	24	0,0702	0,1754	0,7544	0,50
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	37	115	0,0526	0,8246	0,1228	0,31
Diametro interorbitale	14	28,50	0	0,7018	0,2982	0,46
Distanza dall'apice del muso alle narici .	21	10	0,0526	0,3333	0,6140	2,00
Id. dalle narici all'occhio	10	23,50	0	0,5965	0,4035	0,38
Id. dall'occhio al timpano	6	2,50	0	0,8070	0,1930	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	12	40,50	0	0,6667	0,3333	0,27
Id. minimo del timpano	13	16	0,0877	0,6842	0,2281	0,75
Id. massimo del timpano	9	17	0,1930	0,3509	0,4561	0,47
Lunghezza massima delle parotidi . . .	23	81	0,0351	0,5965	0,3684	0,27
Larghezza id. id.	20	41,50	0	0,6667	0,3333	0,45
Lunghezza del braccio	35	132	0,526	0,4561	0,4912	0,26
Id. dell'avambraccio	22	95,50	0	0,4737	0,5263	0,22
Id. della mano	25	87	0,1053	0,4035	0,4912	0,28
Id. del 1° dito	18	40,50	0	0,4386	0,5614	0,42
Id. del 2° dito	17	33	0,0877	0,4561	0,4561	0,48
Id. del 3° dito	14	42,50	0	0,5614	0,4386	0,31
Id. del 4° dito	15	29	0,1579	0,4737	0,3684	0,48
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	11	20	0,0877	0,2105	0,7018	0,50
Id. id. id. id. interno .	18	11,50	0	0,2105	0,7895	0,47
Lunghezza della coscia	41	140	0,526	0,2105	0,7368	0,28
Id. della gamba	33	133	0,1053	0,4737	0,4211	0,24
Id. del piede	50	233,50	0	0,4737	0,5263	0,21
Id. del 1° dito	19	37	0,526	0,4211	0,5263	0,49
Id. del 2° dito	21	61	0,1228	0,3158	0,5614	0,33
Id. del 3° dito	37	98	0,0702	0,3509	0,5789	0,37
Id. del 4° dito	35	153	0,0175	0,6140	0,3684	0,22
Id. del 5° dito	29	98	0,0351	0,7544	0,2105	0,29
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	9	19	0,1228	0,3333	0,5439	0,42
Id. id. id. esterno	22	10,50	0	0,8772	0,1228	2,00
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	18	32,50	0	0,4386	0,5614	0,52
Id. id. id. 2° dito	33	42	0,1228	0,1579	0,7193	0,76
Id. id. id. 3° dito	39	69	0,0577	0,6923	0,2500	0,55
Id. id. id. 4° dito	10	14,50	0	0,5439	0,4561	0,68
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	21	52	0,0526	0,3158	0,6316	0,38

Bufo viridis.

Maschi in amore di Corfù.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D - d}{\frac{1}{2}(D + d)}$
Lunghezza del capo	20	101,50	0	0,3182	0,6818	0,18
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	24	126,50	0	0,8636	0,1364	0,18
Id. a metà degli occhi	19	101	0,0455	0,4545	0,5000	0,17
Id. alle narici	9	26,50	0	0,3182	0,6818	0,30
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	10	42,50	0	0,7273	0,2727	0,21
Id. alle narici	9	26,50	0	0,4545	0,5455	0,30
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	19	113	0	0,5455	0,4545	0,16
Diametro interorbitale	10	27,50	0	0,5000	0,5000	0,32
Distanza dall'apice del muso alle narici .	10	10,50	0	0,4545	0,5455	0,86
Id. dalle narici all'occhio	9	27	0,1364	0,3182	0,5455	0,30
Id. dall'occhio al timpano	4	1,50	0	0,5909	0,4091	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	14	36,50	0	0,1818	0,8182	0,36
Id. minimo del timpano	9	15	0,0909	0,0909	0,8182	0,53
Id. massimo del timpano	12	16,50	0	0,2727	0,7273	0,67
Lunghezza massima delle parotidi . . .	17	76	0,0909	0,3636	0,5455	0,21
Larghezza id. id.	16	30,50	0	0,5000	0,5000	0,49
Lunghezza del braccio	38	120,50	0	0,5455	0,4545	0,30
Id. dell'avambraccio	22	91,50	0	0,4091	0,5909	0,23
Id. della mano	19	93	0,0909	0,4545	0,4545	0,19
Id. del 1° dito della mano	12	39,50	0	0,5455	0,4545	0,29
Id. 2° dito id.	13	36	0,2273	0,5000	0,2273	0,33
Id. 3° dito id.	16	46,50	0	0,4545	0,5455	0,32
Id. 4° dito id.	11	31	0,0455	0,3636	0,5909	0,32
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	8	19,50	0	0,8636	0,1364	0,36
Id. id. id. interno	8	14,50	0	0,4091	0,5909	0,48
Lunghezza della coscia	32	146,50	0	0,5455	0,4545	0,21
Id. della gamba	24	134,50	0	0,3636	0,6364	0,16
Id. del piede	51	239	0	0,5455	0,4091	0,21
Id. del 1° dito del piede	15	40	0,0455	0,6818	0,2273	0,35
Id. 2° dito id.	15	66	0,2273	0,3636	0,3636	0,21
Id. 3° dito id.	30	105,50	0	0,4545	0,5455	0,28
Id. 4° dito id.	35	151	0,0952	0,3333	0,5714	0,22
Id. 5° dito id.	19	99	0,0476	0,5238	0,4286	0,18
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	9	19	0,0455	0,8636	0,0909	0,42
Id. id. id. esterno	7	11	0,1364	0,4545	0,4091	0,55
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	16	34,50	0	0,4762	0,5238	0,43
Id. id. del 2° dito	15	46	0,0952	0,5238	0,3810	0,30
Id. id. del 3° dito	25	66	0,1905	0,4286	0,3810	0,36
Id. id. del 4° dito	9	14	0,0476	0,5238	0,4286	0,57
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	18	53,50	0	0,4545	0,5455	0,31

Bufo viridis.

Maschi in amore di Siria.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	25	108	0	0,6250	0,3750	0,21
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	17	121	0	0,5000	0,5000	0,13
Id. a metà degli occhi	29	97	0,1250	0,5625	0,3125	0,29
Id. alle narici	20	25,50	0	0,7500	0,2500	0,74
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	12	42,50	0	0,5000	0,5000	0,24
Id. alle narici	13	25	0,0625	0,3750	0,5625	0,48
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	19	111	0,1875	0,6250	0,1875	0,17
Diametro interorbitale	9	26	0,1250	0,3750	0,5000	0,31
Distanza dall'apice del muso alle narici .	15	10	0	0,3125	0,6875	1,40
Id. dalle narici all'occhio	12	24,50	0	0,3750	0,6250	0,44
Id. dall'occhio al timpano	5	2	0,3125	0,4375	0,2500	2,00
Diam. massimo trasversale dell'occhio .	9	40	0,0625	0,5625	0,3750	0,20
Id. minimo del timpano	6	14,50	0	0,4375	0,5625	0,34
Id. massimo del timpano	9	16	0,2500	0,3750	0,3750	0,50
Lunghezza massima delle parotidi . . .	24	73,50	0	0,2500	0,7500	0,31
Larghezza id.	16	36,50	0	0,7500	0,2500	0,41
Lunghezza del braccio	21	128	0	0,6875	0,3125	0,15
Id. dell'avambraccio	19	93	0,0625	0,3750	0,5625	0,19
Id. della mano	20	92,50	0	0,3125	0,6875	0,20
Id. del 1° dito	15	37	0,1250	0,3750	0,5000	0,88
Id. del 2° dito	13	31,50	0	0,5000	0,5000	0,37
Id. del 3° dito	13	42	0,2500	0,4375	0,3125	0,29
Id. del 4° dito	10	28,50	0	0,6250	0,3750	0,32
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	8	22,50	0	0,5625	0,4375	0,31
Id. id. id. id. interno .	14	16,50	0	0,3750	0,6250	0,29
Lunghezza della coscia	26	145,50	0	0,6250	0,3750	0,17
Id. della gamba	21	134	0	0,6250	0,3750	0,14
Id. del piede	37	227	0,0625	0,4375	0,5000	0,15
Id. del 1° dito	11	39	0,1250	0,5625	0,3125	0,26
Id. del 2° dito	16	65,50	0	0,5000	0,5000	0,22
Id. del 3° dito	18	101,50	0	0,3125	0,6875	0,16
Id. del 4° dito	31	148	0,0625	0,3750	0,5625	0,20
Id. del 5° dito	22	99,50	0	0,5000	0,5000	0,21
Id. del tubercolo metatarsale interno . .	11	19	0,2500	0,2500	0,5000	0,53
Id. id. id. esterno . .	10	9,50	0	0,5625	0,4375	0,98
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	11	33	0,0625	0,4375	0,5000	0,30
Id. id. id. 2° dito	23	42	0,1875	0,1250	0,6875	0,52
Id. id. id. 3° dito	20	64,50	0	0,5625	0,4375	0,29
Id. id. id. 4° dito	17	17	0,2500	0,2500	0,5000	0,94
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	20	56,50	0	0,5000	0,5000	0,33

Bufo viridis.

Femmine in amore di Givoletto.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	24	106,50	0	0,6129	0,3871	0,22
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	19	123	0	0,8065	0,1935	0,15
Id. a metà degli occhi	23	101	0,1290	0.6129	0,2581	0,22
Id. alle narici	10	25,50	0	0,3871	0,6129	0,35
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	14	48,50	0	0,1935	0.8065	0,27
Id. alle narici	13	27	0,1613	0,4839	0,3548	0,44
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	22	105,50	0	0.2258	0,7742	0,19
Diametro interorbitale	14	26,50	0	0,4839	0,5161	0,49
Distanza dall'apice del muso alle narici .	11	8	0	0,7742	0,2258	1,25
Id. dalle narici all'occhio	14	26,50	0	0,5806	0,4194	0,49
Id. dall'occhio al timpano	4	1,50	0	0,6129	0,3871	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	14	40,50	0	0,6451	0,3548	0,32
Id. minimo del timpano	9	15	0,1290	0,4516	0,4194	0,53
Id. massimo del timpano	10	15,50	0	0,3548	0,6451	0,58
Lunghezza massima delle parotidi . . .	35	71	0,0645	0,3548	0,5806	0,48
Larghezza id. id.	14	32,50	0	0,4839	0,5161	0,40
Lunghezza del braccio	34	127,50	0	0,8065	0,1935	0,25
Id. dell'avambraccio	41	98	0,0645	0,8710	0,0645	0,41
Id. della mano	19	91	0,0645	0,7097	0,2258	0,20
Id. del 1° dito	27	42	0,0645	0,4516	0,4839	0,62
Id. del 2° dito	11	36	0,1667	0,4667	0,3667	0,28
Id. del 3° dito	17	44	0,0323	0,5484	0,4194	0,36
Id. del 4° dito	12	31,50	0	0,6667	0,3333	0,34
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	10	19,50	0	0,5161	0,4839	0,46
Id. id. id. id. interno .	9	13	0,1613	0,6451	0,1935	0,62
Lunghezza della coscia	34	134,50	0	0,6129	0,3871	0,24
Id. della gamba	21	126	0,0645	0,5484	0,3871	0,16
Id. del piede	37	213	0	0.4516	0,5484	0,18
Id. del 1° dito	16	38,50	0	0.4839	0,5161	0,39
Id. del 2° dito	25	58	0,1290	0,3548	0,5161	0,41
Id. del 3° dito	50	93,50	0	0,6129	0,3871	0,51
Id. del 4° dito	31	141	0	0,7742	0,2258	0,21
Id. del 5° dito	26	84,50	0	0,3226	0,6774	0,29
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	11	16	0,1935	0,0323	0,7742	0,63
Id. id. id. esterno	12	11,50	0	0,5161	0,4839	0,96
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	13	32	0,0323	0,5161	0,4516	0,38
Id. id. id. 2° dito	17	47	0,0645	0,5484	0,3871	0,34
Id. id. id. 3° dito . . .	24	66,50	0	0,6129	0,3871	0,34
Id. id. id. 4° dito	20	20	0,0968	0,5806	0,3226	0,95
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	28	52,50	0	0,5806	0,4194	0,51

Bufo viridis.

Femmine in amore di Moncalieri.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	23	105	0,0769	0,6154	0,3077	0,20
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	24	120,50	0	0.4872	0.5128	0.19
Id. a metà degli occhi	17	94	0,0769	0,4359	0,4872	0,17
Id. alle narici	15	27	0,0769	0,8462	0,0769	0,52
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	17	44	0,0513	0,4615	0,4872	0.36
Id. alle narici	15	27	0,1026	0,8462	0,0513	0,52
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	21	108	0,0769	0,4103	0,5128	0,19
Diametro interorbitale	13	28	0,0256	0,6154	0,3590	0,43
Distanza dall'apice del muso alle narici .	9	4	0	0,7949	0,2051	2,00
Id. dalle narici all'occhio	11	26	0,2051	0,3846	0,4103	0,38
Id. dall'occhio al timpano	7	3	0,1282	0,8205	0,0769	2.00
Diametro massimo trasversale dell'occhio.	13	40	0,0256	0,6410	0,3333	0,30
Id. minimo del timpano	11	16	0.2821	0,4359	0,2821	0,63
Id. massimo del timpano	11	16	0,3333	0,3846	0,2821	0,63
Lunghezza massima delle parotidi . . .	20	72.50	0	0,4872	0.5128	0,25
Larghezza id. id.	15	29	0,1282	0,1795	0,6923	0,48
Lunghezza del braccio	28	110,50	0	0,3846	0,6154	0,24
Id. dell'avambraccio	16	81,50	0	0,5385	0,4615	0.18
Id. della mano	15	83	0,0513	0,4615	0,4872	0,17
Id. del 1° dito della mano	17	43	0.1282	0,5897	0.2821	0,37
Id. 2° dito id.	12	32,50	0	0.2308	0,7692	0,34
Id. 3° dito id.	19	42	0.2051	0,4103	0,3846	0,43
Id. 4° dito id.	11	29	0,1282	0,3846	0.4872	0,34
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	13	17,50	0,1026	0,5385	0.3590	0,68
Id. id. id. interno	8	11	0	0,4872	0,5128	0,64
Lunghezza della coscia	28	129,50	0	0,4615	0,5385	0,21
Id. della gamba	24	119,50	0	0,5128	0,4872	0,19
Id. del piede	45	216	0,1282	0,6410	0,2308	0,21
Id. del 1° dito del piede	17	39	0,1282	0,3333	0,5385	0,41
Id. 2° dito id.	25	60	0,0513	0,3846	0,5641	0,40
Id. 3° dito id.	29	92	0,0513	0.2308	0,7179	0.30
Id. 4° dito id.	43	147	0,0513	0,8718	0,0769	0,29
Id. 5° dito id.	22	88,50	0	0,4103	0,5897	0,24
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	9	19	0,1026	0,4103	0,4872	0,42
Id. id. id. esterno	12	8,50	0	0,4615	0,5385	1,13
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	13	32	0.1026	0.4615	0,4359	0,38
Id. id. del 2° dito	18	43,50	0	0,4615	0,5385	0,39
Id. id. del 3° dito	20	62,50	0	0,5385	0,4615	0,30
Id. id. del 4° dito	18	18,50	0	0.6667	0,3333	0,92
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	16	53,50	0	0,3333	0,6667	0,28

Bufo viridis.

Femmine in amore di Sassari.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	29	112	0,0500	0,5500	0,4000	0,25
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	23	131	0,0500	0,4500	0,5000	0,17
Id. a metà degli occhi	22	102,50	0	0,8500	0,1500	0,20
Id. alle narici	15	23	0,1500	0,2000	0,6500	0,61
Alt. del capo a metà della regione timpanica	31	49,50	0	0,5000	0,5000	0,62
Id. alle narici	9	26	0,2000	0,2000	0,6000	0,31
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	23	109	0,1000	0,1500	0,7500	0,20
Diametro interorbitale	12	27,50	0	0,4000	0,6000	0,40
Distanza dall'apice del muso alle narici .	19	9,50	0	0,7500	0,2500	1,90
Id. dalle narici all'occhio	12	24,50	0	0,4500	0,5500	0,44
Id. dall'occhio al timpano	10	4,50	0	0,9000	0,1000	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	14	40,50	0	0,6000	0,4000	0,32
Id. minimo del timpano	18	13,50	0	0,5000	0,5000	1,26
Id. massimo del timpano	16	14,50	0	0,2000	0,8000	1,03
Lunghezza massima delle parotidi . . .	28	82,50	0	0,4500	0,5500	0,33
Larghezza id.	15	42	0,0500	0,5500	0,4000	0,33
Lunghezza del braccio	32	124,50	0	0,4500	0,5500	0,25
Id. dell'avambraccio	21	92	0	0,6000	0,4000	0,22
Id. della mano	20	86,50	0	0,3000	0,7000	0,22
Id. del 1° dito	12	44,50	0	0,7500	0,2500	0,24
Id. del 2° dito	10	35,50	0	0,5500	0,4500	0,26
Id. del 3° dito	20	39,50	0	0,2000	0,8000	0,41
Id. del 4° dito	11	31	0,1500	0,6500	0,2000	0,32
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	6	20,50	0	0,6000	0,4000	0,24
Id. id. id. id. interno .	13	11	0,1500	0,2000	0,6500	1,09
Lunghezza della coscia	35	136	0,0500	0,3500	0,6000	0,26
Id. della gamba	26	124,50	0	0,4000	0,6000	0,21
Id. del piede	39	221	0,0500	0,4000	0,5500	0,17
Id. del 1° dito	12	36,50	0	0,4500	0,5500	0,30
Id. del 2° dito	16	58,50	0	0,4500	0,5500	0,25
Id. del 3° dito	23	93	0,1000	0,3500	0,5500	0,24
Id. del 4° dito	38	137,50	0	0,3500	0,6500	0,26
Id. del 5° dito	17	89	0,0500	0,4000	0,5500	0,18
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	9	20	0,1500	0,5500	0,3000	0,40
Id. id. id. esterno	13	10	0,0500	0,7500	0,2000	1,20
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	16	33,50	0	0,6500	0,3500	0,44
Id. id. id. 2° dito	16	46,50	0	0,6500	0,3500	0,32
Id. id. id. 3° dito	29	69	0,0500	0,8000	0,1500	0,41
Id. id. id. 4° dito	12	18,50	0	0,5500	0,4500	0,59
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	25	51	0,1000	0,2500	0,6500	0,49

Bufo viridis.

Femmine in amore di Candia.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	16	100,50	0	0,5455	0,4545	0,15
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	12	117,50	0	0,5455	0,4545	0,09
Id. a metà degli occhi	11	95	0,0909	0,4545	0,4545	0,11
Id. alle narici	8	24,50	0	0,6364	0,3636	0,28
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	7	43	0,1818	0,4545	0,3636	0,14
Id. alle narici	7	25	0,2727	0,2727	0,4545	0,24
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	17	108	0,0909	0,7273	0,0909	0,48
Diametro interorbitale	8	27,50	0	0,6364	0,3636	0,28
Distanza dall'apice del muso alle narici .	15	7	0	0,7273	0,2727	2,00
Id. dalle narici all'occhio	7	25	0,1818	0,2727	0,5455	0,24
Id. dall'occhio al timpano	7	5	0,2727	0,6364	0,0909	1,20
Diametro massimo trasversale dell'occhio	7	41	0,3636	0,2727	0,3636	0,15
Id. minimo del timpano	10	13,50	0	0,3636	0,6364	0,68
Id. massimo del timpano	9	17	0,2727	0,4545	0,2727	0,47
Lunghezza massima delle parotidi . . .	12	76,50	0	0,4545	0,5455	0,14
Larghezza id. id.	17	33	0,0909	0,4545	0,4545	0,48
Lunghezza del braccio	18	119,50	0	0,6364	0,3636	0,14
Id. dell'avambraccio	12	89,50	0	0,4545	0,5455	0,12
Id. della mano	9	86	0,0909	0,5455	0,3636	0,10
Id. del 1° dito	10	39,50	0	0,3636	0,6364	0,23
Id. del 2° dito	9	35	0,0909	0,6364	0,2727	0,23
Id. del 3° dito	13	45	0	0,5455	0,4545	0,27
Id. del 4° dito	9	32	0	0,5455	0,4545	0,25
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	9	20	0,1818	0,3636	0,4545	0,40
Id. id. id. id. interno .	11	13	0	0,7273	0,2727	0,77
Lunghezza della coscia	18	130,50	0	0,3636	0,6364	0,13
Id. della gamba	22	128,50	0	0,9091	0,0909	0,16
Id. del piede	22	205,50	0	0,7273	0,2727	0,12
Id. del 1° dito	10	37,50	0	0,6364	0,3636	0,24
Id. del 2° dito	16	58,50	0	0,5455	0,4545	0,26
Id. del 3° dito	18	91,50	0	0,3636	0,6364	0,18
Id. del 4° dito	22	133,50	0	0,6364	0,3636	0,15
Id. del 5° dito	14	87,50	0	0,6364	0,3636	0,15
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	11	20	0,0909	0,5455	0,3636	0,50
Id. id. id. esterno	13	11	0,1818	0,5455	0,2727	1,09
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	10	30,50	0	0,5455	0,4545	0,29
Id. id. id. 2° dito	18	46,50	0	0,9091	0,0909	0,36
Id. id. id. 3° dito	16	58,50	0	0,3636	0,6364	0,26
Id. id. id. 4° dito	13	16	0,0909	0,5455	0,3636	0.75
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	15	50	0.0909	0,3636	0,5455	0,28

Bufo viridis.

Femmine in amore di Corfù.

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	30	100,50	0	0,2308	0,7692	0,28
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	30	122,50	0	0,2154	0,7846	0,24
Id. a metà degli occhi	30	100,50	0	0,5000	0,5000	0,28
Id. alle narici	11	25	0,1154	0,2308	0,6538	0,40
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	17	43	0,1538	0,5000	0,3462	0,37
Id. alle narici	9	25	0,2308	0,3462	0,4231	0,36
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	40	124,50	0	0,9615	0,0769	0,31
Diametro interorbitale	15	29	0,1923	0,7308	0,0769	0,40
Distanza dall'apice del muso alle narici .	15	7,50	0	0,3846	0,6154	1,86
Id. dalle narici all'occhio	7	26	0,1154	0,4615	0,4231	0,23
Id. dall'occhio al timpano	5	2	0,0769	0,6923	0,2308	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	14	40,50	0	0,5000	0,5000	0,32
Id. minimo del timpano.	9	17	0,2308	0,5000	0,2692	0,47
Id. massimo del timpano	9	17	0,1923	0,3462	0,4615	0,47
Lunghezza massima delle parotidi . . .	24	80,50	0	0,6154	0,3846	0,28
Larghezza id. id.	21	33	0,0769	0,6538	0,2692	0,60
Lunghezza del braccio	29	111	0,0769	0,4231	0,5000	0,25
Id. dell'avambraccio	28	87,50	0	0,3462	0,6154	0,31
Id. della mano	14	90,50	0	0,6154	0,3846	0,14
Id. del 1° dito della mano	16	42,50	0	0,4231	0,5769	0,35
Id. 2° dito id.	15	35	0,2000	0,2400	0,5600	0,40
Id. 3° dito id.	9	47	0,0800	0,6000	0,3200	0,17
Id. 4° dito id.	16	35,50	0	0,8400	0,1600	0,42
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	8	17,50	0	0,3846	0,6154	0,40
Id. id. id. interno	9	10	0,2308	0,4615	0,3077	0,80
Lunghezza della coscia	40	144,50	0	0,6923	0,3077	0,27
Id. della gamba	24	126,50	0	0,3077	0,6923	0,18
Id. del piede	46	219,50	0	0,4615	0,5385	0,21
Id. del 1° dito del piede	18	39,50	0	0,8077	0,1923	0,43
Id. 2° dito id.	21	60	0	0,4615	0,5385	0,33
Id. 3° dito id.	25	96	0,0769	0,4231	0,5000	0,25
Id. 4° dito id.	28	145,50	0	0,8462	0,1538	0,18
Id. 5° dito id.	24	95,50	0	0,6667	0,3333	0,24
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	9	18	0,1154	0,5000	0,3846	0,44
Id. id. id. esterno	9	10	0,1538	0,4615	0,2308	0,80
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	18	33,50	0	0,5385	0,4615	0,51
Id. id. del 2° dito	18	43,50	0	0,2308	0,7692	0,39
Id. id. del 3° dito	18	66,50	0	0,3846	0,6154	0,25
Id. id. del 4° dito	14	20,50	0	0,7692	0,2308	0,63
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	16	53,50	0	0,5769	0,4231	0,28

Bufo viridis.

Individui giovani del contorno di Torino (lunghezza base da 20 a 40 millimetri).

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	23	126	0,0333	0,5667	0,4000	0,17
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	30	129,50	0	0,4000	0,6000	0,22
Id. a metà degli occhi	24	108,50	0	0,6000	0,4000	0,21
Id. alle narici	10	29,50	0	0,4667	0,5333	0,31
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	16	56,50	0	0,6667	0,3333	0,26
Id. alle narici	11	29	0,2000	0,5667	0,2333	0,34
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	29	130	0,0333	0,6000	0,3667	0,21
Diametro interorbitale	18	33,50	0	0,5000	0,5000	0,51
Distanza dall'apice del muso alle narici .	15	10	0	0,7000	0,3000	1,50
Id. dalle narici all'occhio	16	32,50	0	0,5667	0,4333	0,45
Id. dall'occhio al timpano	8	3,50	0	0,9333	0,0667	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	21	50	0,1667	0,4667	0,3667	0,40
Id. minimo del timpano	11	12	0,2174	0,2609	0,5217	0,83
Id. massimo del timpano	11	12	0,2174	0,2609	0,5217	0,83
Lunghezza massima delle parotidi . . .	25	74	0,1429	0,4286	0,4286	0,32
Larghezza id.	17	32	0	0,6429	0,4571	0,50
Lunghezza del braccio	41	113	0,0667	0,5667	0,3667	0,35
Id. dell'avambraccio	22	82,50	0	0,4667	0,5333	0,25
Id. della mano	35	91	0	0,8000	0,2000	0,37
Id. del 1° dito	28	44,50	0	0,6429	0,3571	0,60
Id. del 2° dito	13	37	0,0714	0,7143	0,2143	0,32
Id. del 3° dito	19	49	0,0357	0,4286	0,5357	0,38
Id. del 4° dito	16	32,50	0	0,6071	0,3929	0,45
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	11	12	0,0667	0,2000	0,7333	0,83
Id. id. id. id. interno .	14	10,50	0	0,9000	0,1000	1,20
Lunghezza della coscia	44	136,50	0	0,7333	0,2667	0,31
Id. della gamba	39	125	0,0333	0,5667	0,4000	0,30
Id. del piede	66	212,50	0	0.5667	0,4333	0,30
Id. del 1° dito	19	42	0,0333	0,4333	0.5333	0,43
Id. del 2° dito	30	62,50	0	0,7667	0,2333	0.46
Id. del 3° dito	29	94	0,0333	0,6333	0,3333	0.30
Id. del 4° dito	44	136,50	0	0,6000	0.4000	0,31
Id. del 5° dito	22	90,50	0	0,7667	0,2333	0,23
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	11	17	0,0667	0,7000	0,2333	0,59
Id. id. id. esterno	6	5,50	0	0,4138	0,5862	0,99
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	17	32	0	0,5000	0,5000	0,16
Id. id. id. 2° dito	20	48,50	0	0,6667	0,3333	0.39
Id. id. id. 3° dito	28	76,50	0	0,5667	0,4333	0,35
Id. id. id. 4° dito	22	25,50	0	0,5333	0,4667	0,82
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	31	57	0	0,8000	0,2000	0,53

Bufo viridis.

Individui giovani di Catania (lunghezza base da 30 a 50 millimetri).

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	18	122,50	0	0,4545	0,5455	0,14
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	32	126,50	0	0,7273	0,2727	0,24
Id. a metà degli occhi	23	103	0	0,5455	0,4545	0,21
Id. alle narici	13	28,50	0	0,8182	0,0909	0,42
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	11	50	0	0,7273	0,2727	0,20
Id. alle narici	12	28,50	0	0,3636	0,6364	0,38
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	21	123	0,0909	0,3636	0,5453	0,16
Diametro interorbitale	21	33	0,0909	0,5455	0,3636	0,61
Distanza dall'apice del muso alle narici .	7	6	0,1818	0,5455	0,2727	1,00
Id. dalle narici all'occhio	12	28,50	0	0,4545	0,5455	0,38
Id. dall'occhio al timpano	12	5,50	0	0,7667	0,2222	2,00
Diametro massimo trasvorsale dell'occhio	11	42	0,0909	0,4545	0,3636	0,24
Id. minimo del timpano	8	12,50	0	0,6667	0,3333	0,56
Id. massimo del timpano	8	12,50	0	0,6687	0,3333	0,56
Lunghezza massima delle parotidi . . .	17	78	0,0909	0,3636	0,5455	0,21
Larghezza id.	18	36,50	0	0,5455	0,4545	0,47
Lunghezza del braccio	33	117	0,0909	0,4545	0,4545	0,27
Id. dell'avambraccio	31	80	0	0,4545	0,5455	0,38
Id. della mano	22	87,50	0	0,2727	0,7273	0,24
Id. del 1° dito	15	40	0	0,6364	0,3636	0,35
Id. del 2° dito	12	33,50	0	0,1818	0,8182	0,33
Id. del 3° dito	9	17	0,1818	0,4545	0,3636	0,17
Id. del 4° dito	19	32	0	0,7273	0,2727	0,56
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	13	17	0,1818	0,4545	0,3636	0,71
Id. id. id. id. interno .	13	10	0	0,5455	0,4545	1,30
Lunghezza della coscia	50	122,50	0	0,2727	0,7273	0,40
Id. della gamba	53	116	0	0,1818	0,8182	0,44
Id. del piede	63	204	0,0909	0,2727	0,6364	0,30
Id. del 1° dito	17	41	0	0,5455	0,4545	0,39
Id. del 2° dito	14	62,50	0	0,5455	0,4545	0,21
Id. del 3° dito	17	98	0,0909	0,5455	0,3636	0,16
Id. del 4° dito	30	142,50	0	0,7273	0,2727	0,20
Id. del 5° dito	32	94,50	0	0,6364	0,3636	0,33
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	9	19	0,1818	0,3636	0,4545	0,42
Id. id. id. esterno	9	8	0	0,3636	0,6364	1,00
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	14	27,50	0	0,1818	0,8182	0,17
Id. id. id. 2° dito . .	17	46	0,0909	0,4545	0,4545	0,35
Id. id. id. 3° dito .	20	69,50	0	0,5455	0,4545	0,27
Id. id. id. 4° dito .	12	20,50	0	0,3636	0,6364	0,53
Lungh. della ripiegatura tarsea .	24	44,50	0	0,1818	0,8182	0,51

Bufo viridis.

Individui giovani di Sassari (lunghezza base da 30 a 50 millimetri).

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	28	104,50	0	0,2000	0,8000	0.25
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	27	121	0	0,2000	0,8000	0,21
Id. a metà degli occhi	26	102,50	0	0,5000	0,5000	0,24
Id. alle narici	7	26	0,3000	0,6000	0,1000	0,23
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	10	46,50	0	0,2000	0,8000	0,19
Id. alle narici	9	27	0,1000	0,4000	0,5000	0,30
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	27	121	0	0,5000	0,4000	0,21
Diametro interorbitale	16	33,50	0	0,7000	0,3000	0,45
Distanza dall'apice del muso alle narici .	19	9	0	0,8000	0,2000	2,00
Id. dalle narici all'occhio	14	29,50	0	0,6000	0,4000	0,44
Id. dall'occhio al timpano	8	4	0,3000	0,6000	0,1000	1,75
Diam. massimo trasversale dell'occhio .	15	46	0,1000	0,3000	0,6000	0,30
Id. minimo del timpano	7	11	0	0,5000	0,5000	0,55
Id. massimo del timpano	7	11	0	0,5000	0,5000	0,55
Lunghezza massima delle parotidi . . .	29	80	0	0,3000	0,7000	0,35
Larghezza id.	22	34,50	0	0,3000	0,7000	0,61
Lunghezza del braccio	23	119	0	0,1000	0,9000	0,19
Id. dell'avambraccio	31	87	0	0,3000	0,7000	0,34
Id. della mano	21	92	0,1002	0,5000	0,4000	0,22
Id. del 1° dito	14	42,50	0	0,3000	0,7000	0,30
Id. del 2° dito	17	33	0,1000	0,3000	0.7000	0,48
Id. del 3° dito	13	47	0,2000	0,5000	0,3000	0,26
Id. del 4° dito	11	29	0,1000	0,2000	0.7000	0,34
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	11	17	0,3000	0,4000	0,3000	0,59
Id. id. id. id. interno .	9	10	0,1000	0,7000	0,2000	0,80
Lunghezza della coscia	32	135,50	0	0,4000	0,6000	0,23
Id. della gamba	15	127	0	0,4000	0,6000	0,11
Id. del piede	38	210,50	0	0,3000	0,7000	0,12
Id. del 1° dito	12	36,50	0	0,7000	0,3000	0,30
Id. del 2° dito	18	56,50	0	0,7000	0,3000	0,30
Id. del 3° dito	31	87	0	0,3000	0,7000	0,34
Id. del 4° dito	30	134,50	0	0,4000	0,6000	0,22
Id. del 5° dito	26	89,50	0	0,4000	0,6000	0,28
Id. del tubercolo metatarsale interno . .	11	17	0,2000	0,3000	0,5000	0,59
Id. id. id. esterno . .	10	11,50	0	0,9000	0,1000	0,78
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	15	34	0,1000	0,7000	0,2000	0,41
Id. id. id. 2° dito	14	48,50	0	0,3000	0,7000	0,26
Id. id. id. 3° dito	20	69,50	0	0,6000	0,4000	0,27
Id. id. id. 4° dito	10	21,50	0	0,4000	0,6000	0,41
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	12	50,50	0	0,6000	0,4000	0,22

Bufo viridis.

Individui giovani di Siria (lunghezza base da 30 a 50 millimetri).

	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	40	100,50	0	0,1000	0,9000	0,38
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	12	127,50	0	0,8000	0,2000	0,09
Id. a metà degli occhi	66	114	0	0,7000	0,3000	0,57
Id. alle narici	8	27,50	0	0,9000	0,1000	0,25
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	9	44	0	0,5000	0,5000	0,20
Id. alle narici	8	27,50	0	0,8000	0,2000	0,25
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	17	117,50	0	0,4444	0,5556	0,13
Diametro interorbitale	12	30,50	0	0,3333	0,6667	0,36
Distanza dall'apice del muso alle narici .	6	5,50	0	0,7667	0,2222	0,91
Id. dalle narici all'occhio	9	29	0	0,4444	0,5556	0,28
Id. dall'occhio al timpano	8	3,50	0	0,6667	0,3333	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	14	47,50	0	0,7667	0,2222	0,27
Id. minimo del timpano	9	12	0,1111	0,2222	0,6667	0,67
Id. massimo del timpano	8	12,50	0	0,2222	0,7667	0,56
Lunghezza massima delle parotidi . . .	30	79,50	0	0,4444	0,5556	0,37
Larghezza id.	22	43,50	0	0,6667	0,3333	0,48
Lunghezza del braccio	23	117	0	0,6667	0,3333	0,18
Id. dell'avambraccio	21	80	0	0,1111	0,8889	0,25
Id. della mano	29	84	0	0,3333	0,6667	0,33
Id. del 1° dito	17	41	0,2222	0,2222	0,5556	0,39
Id. del 2° dito	15	34	0,2222	0,3333	0,4444	0,41
Id. del 3° dito	10	44,50	0	0,4444	0,5556	0,20
Id. del 4° dito	18	32,50	0	0,7667	0,2222	0,52
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	5	18	0,3333	0,4444	0,2222	0,22
Id. id. id. id. interno .	10	12,50	0	0,5556	0,4444	0,72
Lunghezza della coscia	32	133,50	0	0,4444	0,5556	0,23
Id. della gamba	13	129	0,2000	0,4000	0,4000	0,10
Id. del piede	44	205,50	0	0,3000	0,7000	0,21
Id. del 1° dito	9	37	0	0,7667	0,2222	0,22
Id. del 2° dito	22	59,50	0	0,7667	0,2222	0,35
Id. del 3° dito	30	90,50	0	0,6667	0,3333	0,32
Id. del 4° dito	24	137,50	0	0,5556	0,4444	0,17
Id. del 5° dito	18	89,50	0	0,5556	0,4444	0,19
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	7	17	0	0,2222	0,7667	0,35
Id. id. id. esterno	13	10	0	0,5556	0,4444	1,25
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	13	31	0	0,6667	0,3333	0,39
Id. id. id. 2° dito	17	43	0,1111	0,2222	0,6667	0,37
Id. id. id. 3° dito . . .	20	62,50	0	0,3333	0,6667	0,30
Id. id. id. 4° dito	11	21	0	0,6667	0,3333	0,48
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	22	54,50	0	0,6667	0,3333	0,34

Bufo mauritanicus.

Maschi in amore	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	83-110	28	96,50	0,27
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	103-150	48	126,50	0,37
Id. a metà degli occhi	75-100	26	87,50	0,29
Id. alle narici	19-31	13	25	0,48
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	42-56	15	49	0,29
Id. alle narici	22-30	9	26	0,31
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	87-126	40	106,50	0,36
Diametro interorbitale	24-38	15	31	0,45
Distanza dall'apice del muso alle narici .	6-27	12	16,50	0,67
Id. dalle narici all'occhio	17-34	12	25,50	0,43
Id. dall'occhio al timpano	3-12	10	7,50	1,20
Diametro massimo trasversale dell'occhio	32-45	14	38,50	0,34
Id. minimo del timpano	12-17	6	14,50	0,34
Id. massimo del timpano	14-23	10	18,50	0,48
Lunghezza massima delle parotidi . . .	63-93	31	78	0,38
Larghezza id. id.	27-49	23	38	0,58
Lunghezza del braccio	99-139	41	119	0,33
Id. dell'avambraccio	72-112	41	92	0,43
Id. della mano	75-96	22	85,50	0,24
Id. del 1° dito	34-46	13	40	0,30
Id. del 2° dito	21-39	19	30	0,60
Id. del 3° dito	32-46	15	39	0,36
Id. del 4° dito	21-33	13	27	0,44
Diam. mass. tubercolo palmare mediano .	18-29	12	23,50	0,46
Id. id. id. id. interno .	12-22	11	17	0,59
Lunghezza della coscia	120-166	47	143	0,32
Id. della gamba	120-153	34	136,50	0.24
Id. del piede	189-247	59	218,50	0,26
Id. del 1° dito	30-46	17	38	0,42
Id. del 2° dito	58-75	18	66,50	0,45
Id. del 3° dito	77-116	40	96,50	0,40
Id. del 4° dito	117-153	37	135	0,26
Id. del 5° dito	80-104	25	92	0,26
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	14-24	11	19	0,53
Id. id. id. esterno	8-15	8	11,50	0,61
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	24-43	20	33,50	0,56
Id. id. id. 2° dito	26-55	30	40,50	0,71
Id. id. id. 3° dito	41-79	39	60	0,63
Id. id. id. 4° dito	13-29	17	21	0,76
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	44-58	15	51	0,27

Bufo mauritanicus.

Femmine in amore	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	82-106	25	94	0,26
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	108-141	34	124,50	0,26
Id. a metà degli occhi	77-98	22	87,50	0,24
Id. alle narici	19-26	8	22,50	0,31
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	42-55	14	48,50	0,27
Id. alle narici	20-33	14	26,50	0,49
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	86-117	32	101,50	0,30
Diametro interorbitale	24-38	15	31	0,45
Distanza dall'apice del muso alle narici .	0-21	20	11,50	1.65
Id. dalle narici all'occhio	20-28	9	24	0.33
Id. dall'occhio al timpano	2-11	10	6,50	1,38
Diametro massimo trasversale dell'occhio	27-46	20	36.50	0,55
Id. minimo del timpano	10-20	11	15	0,68
Id. massimo del timpano	13-24	12	18,50	0.59
Lunghezza massima delle parotidi . . .	61-94	34	77,50	0,42
Larghezza id.	30-55	26	42.50	0.58
Lunghezza del braccio	94-132	39	113	0,33
Id. dell'avambraccio	69-101	33	85	0,38
Id. della mano	74-102	29	88	0,32
Id. del 1° dito	29-51	23	40	0,55
Id. del 2° dito	22-40	19	31	0,58
Id. del 3° dito	34-48	15	41	0,34
Id. del 4° dito	19-30	12	24,50	0,44
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	20-30	11	25	0,40
Id. id. id. id. interno .	10-20	11	15	0.67
Lunghezza della coscia	119-169	51	144	0.34
Id. della gamba	114-150	37	132	0,27
Id. del piede	183-241	59	212	0,27
Id. del 1° dito	32-45	14	38,50	0,34
Id. del 2° dito	47-68	22	57.50	0,36
Id. del 3° dito	80-109	30	94.50	0,31
Id. del 4° dito	114-146	33	130	0,24
Id. del 5° dito	72-99	18	85.50	0,19
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	16-25	10	20,50	0,43
Id. id. id. esterno	9-18	10	13,50	0,67
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	21-37	17	29	0,55
Id. id. id. 2° dito	28-49	22	38,50	0,54
Id. id. id. 3° dito	39-75	37	57	0,63
Id. id. id. 4° dito	16-27	12	21,50	0,51
Lungh. della ripiegatura tarsea	34-55	22	44,50	0,47

Bufo mauritanicus.

Giovani (Lunghezza 69-82)	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	102-110	9	106	0,07
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	125-135	11	130	0,08
Id. a metà degli occhi	97-105	9	101	0,07
Id. alle narici	23-28	6	25,50	0,19
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	54-57	4	55,50	0,05
Id. alle narici	27-32	6	29,50	0,17
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	104-119	16	111,50	0,34
Diametro interorbitale	36-40	5	38	0,11
Distanza dall'apice del muso alle narici .	2-9	8	5,50	1,27
Id. dalle narici all'occhio	25-31	7	28	0,21
Id. dall'occhio al timpano	5-10	6	7,50	0,67
Diam. massimo trasversale dell'occhio .	37-46	10	41,50	0,22
Id. minimo del timpano	12-16	5	14	0,29
Id. massimo del timpano	14-21	8	17,50	0,40
Lunghezza massima delle parotidi . . .	78-102	25	90	0,27
Larghezza id.	37-61	25	49	0,49
Lunghezza del braccio	126-136	11	131	0,76
Id. dell'avambraccio	78-97	10	87,50	0,10
Id. della mano	88-95	8	91,50	0,08
Id. del 1° dito	44-51	8	47,50	0,14
Id. del 2° dito	32-37	6	34,50	0,14
Id. del 3° dito	42-52	11	47	0,21
Id. del 4° dito	25-28	4	26,50	0,11
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	23-28	6	25,50	0,19
Id. id. id. id. interno .	15-18	4	16,50	0,18
Lunghezza della coscia	141-160	20	150,50	0,12
Id. della gamba	141-155	15	148	0,09
Id. del piede	213-240	28	226,50	0,12
Id. del 1° dito	35-42	8	38,50	0,18
Id. del 2° dito	53-68	16	60,50	0,24
Id. del 3° dito	92-102	11	97	0,10
Id. del 4° dito	132-149	18	141	0,12
Id. del 5° dito	88-94	7	91	0,07
Id. del tubercolo metatarsale interno . .	18-23	6	20,50	0,24
Id. id. id. esterno . .	10-15	6	12,50	0,40
[illegible] dall'apice del 1° dito a metà del mar- [illegible] della membrana interdigit.	26-37	12	31,50	0,34
[illegible] dito	46-55	10	50.50	0,17
[illegible] dito	60-75	16	67,50	0,22
[illegible] dito	18-25	8	21,50	0,32
[illegible]gatura tarsea . .	40-60	21	50	0,40

Bufo regularis.

Maschi in amore (lungh. dall'apice del muso all'apertura cloacale m. 0,010 a m. 0,030.

	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	97-130	34	113,50	0	0,4483	0,5517	0,29
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	118-138	21	128	0,1379	0,5862	0,2759	0.16
Id. a metà degli occhi	89-109	21	99	0,0345	0.3103	0,6552	0,20
Id. alle narici	19-31	13	25	0,1034	0,3793	0,5172	0.48
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	46-60	15	53	0,1034	0,6897	0,2069	0,26
Id. alle narici	22-31	10	26,50	0	0,4827	0,5172	0,35
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	106-126	21	116	0,0345	0.3448	0,6207	0,17
Diametro interorbitale	26-39	14	32,50	0	0,7241	0,2759	0,40
Distanza dall'apice del muso alle narici .	0-13	14	6.50	0	0,4827	0.5172	2,00
Id. dalle narici all'occhio	21-36	16	28,50	0	0,5862	0,4138	0,53
Id. dall'occhio al timpano	0-8	9	4	0.1379	0,7931	0,0345	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	35-54	20	44.50	0	0,4483	0,5517	0,43
Id. minimo del timpano	19-32	14	25.50	0	0,6897	0.3107	0,51
Id. massimo del timpano	20-32	13	26	0.2414	0,3793	0,3793	0,46
Lunghezza massima delle parotidi . . .	55-83	29	69	0,0690	0.5517	0,3793	0,41
Larghezza id. id.	19-32	14	25.50	0	0,5517	0,4483	0,51
Lunghezza del braccio	105-130	26	117,50	0	0,7586	0,2414	0,21
Id. dell'avambraccio	72-90	19	81	0,0345	0,6552	0,3103	0,22
Id. della mano	77-100	24	88,50	0	0,5862	0,4138	0,25
Id. del 1° dito	35-51	17	43	0,0345	0,4827	0,4827	0.37
Id. del 2° dito	21-39	19	30	0,0690	0,3793	0.5517	0,63
Id. del 3° dito	36-54	19	45	0.1034	0,3793	0,5172	0,40
Id. del 4° dito	21-35	15	28	0,0690	0,5517	0.3793	0,50
Diametro mass. tubercolo palmare mediano	15-23	9	19	0,1724	0,1724	0.6552	0,42
Id. id. id. id. interno .	9-19	11	14	0,2414	0,4138	0,3448	0,71
Lunghezza della coscia	124-145	22	134,50	0	0.5172	0.4827	0,15
Id. della gamba	120-144	25	122	0,0345	0,6552	0,3103	0,19
Id. del piede	197-237	41	217	0	0,8276	0,1724	0,18
Id. del 1° dito	31-43	13	37	0	0,5517	0,4483	0,32
Id. del 2° dito	47-71	25	59	0,1034	0,3793	0,5172	0,41
Id. del 3° dito	83-111	29	97	0,0690	0,5172	0,4138	0,29
Id. del 4° dito	123-146	24	134,50	0	0,5172	0,4827	0,17
Id. del 5° dito	75-98	24	86,50	0	0,5517	0,4483	0,26
Lungh. del tubercolo metatarsale interno	10-17	8	13,50	0	0,2414	0,7580	0,51
Id. id. id. esterno	3-16	14	9,50	0	0.3793	0,6207	0,14
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	23-40	18	31,50	0	0,4138	0,5862	0,54
Id. id. id. 2° dito	36-54	19	45	0,1034	0,4827	0,4138	0,40
Id. id. id. 3° dito	52-77	26	64,50	0	0,7931	0,2069	0,38
Id. id. id. 4° dito	14-30	17	22	0,0345	0,6897	0.2759	0,73
Lunghezza della ripiegatura tarsea . .	45-62	18	53,50	0	0,5862	0,4138	0,31

Bufo regularis.

Femmine in amore (lungh. dall'apice del muso all'apertura cloacale m. 0,010 a m. 0,030).

	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	100-122	23	111	0,1364	0,5455	0,3182	0,19
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	118-138	21	128	0,0455	0,7273	0.2273	0,15
Id. a metà degli occhi	90-108	19	99	0,0455	0,4091	0,5455	0,18
Id. alle narici	21-30	10	25,50	0	0,5455	0,4545	0.35
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	43-55	13	49	0,1364	0,2722	0,5909	0,24
Id. alle narici	22-32	11	27	0,1364	0,6364	0,2273	0,37
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	101-130	30	115,50	0	0,6364	0,3636	0,25
Diametro interorbitale	25-36	12	30,50	0	0,6364	0,3636	0,36
Distanza dall'apice del muso alle narici .	0-11	12	5,50	0	0,9091	0,0909	2,00
Id. dalle narici all'occhio	23-33	11	28	0,1364	0,5000	0,3636	0,36
Id. dall'occhio al timpano	0-2	3	1	0	0,9091	0,0909	2,00
Diametro massimo trasversale dell'occhio	35-47	13	41	0	0,3636	0,6364	0,29
Id. minimo del timpano.	18-28	11	23	0,2273	0,4545	0,3182	0,43
Id. massimo del timpano	20-29	10	24,50	0	0,4555	0,5455	0,20
Lunghezza massima delle parotidi . . .	55-80	26	67,50	0	0,6364	0,3636	0.37
Larghezza id. id.	16-26	11	21	0,1818	0,3182	0,5000	0,48
Lunghezza del braccio	98-122	25	110	0,0909	0,4545	0,4545	0,22
Id. dell'avambraccio	61-86	26	73,50	0	0,4545	0,5455	0.34
Id. della mano	77-94	18	85,50	0	0,5000	0,5000	0.19
Id. del 1° dito della mano	33-59	27	46	0,0909	0,5000	0,4091	0,57
Id. 2° dito id.	26-41	16	33,50	0	0,7727	0,2273	0,44
Id. 3° dito id.	37-52	16	44,50	0	0,5455	0,4545	0,33
Id. 4° dito id.	21-33	13	27	0,0909	0,5000	0,4091	0,44
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	17-23	7	20	0,2273	0,5000	0,2727	0,30
Id. id. id. interno	9-17	9	13	0,1818	0,4091	0,4091	0,62
Lunghezza della coscia	120-151	32	135,50	0	0,3636	0,6364	0,23
Id. della gamba	120-137	18	128,50	0	0,5909	0,4091	0,13
Id. del piede	197-216	20	206,50	0	0,4545	0,5455	0,09
Id. del 1° dito del piede	31-46	16	38,50	0	0,6818	0,3182	0,39
Id. 2° dito id.	51-72	22	61,50	0	0,7727	0,2273	0,34
Id. 3° dito id.	85-122	38	103,50	0	0,9091	0,0909	0,36
Id. 4° dito id.	120-144	25	132	0,0909	0,5455	0,3636	0,18
Id. 5° dito id.	79-105	27	92	0,0909	0,8636	0,0455	0,28
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	12-24	13	18	0	0,9545	0,0455	0,67
Id. id. id. esterno	3-14	12	8,50	0	0,4545	0,5455	0,13
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigit.	23-38	16	30,50	0	0,3182	0,6818	0,49
Id. id. del 2° dito	34-50	17	42	0,1818	0,4091	0,4091	0,38
Id. id. del 3° dito	52-72	21	62	0,0455	0,5909	0,3636	0,32
Id. id. del 4° dito	11-24	14	17,50	0	0,2727	0,7273	0,74
Lunghezza della ripiegatura tarsea . . .	42-62	21	52	0,0455	0,5455	0,4091	0,38

Bufo regularis.

Individui giovani (lungh. dall'apice del muso all'apertura cloacale m. 0,010 a m. 0,030).

	Classi estreme	Indice di variabilità	Media	F = M	F < M	F > M	$\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$
Lunghezza del capo	120-144	25	132	0,1538	0,4038	0,4423	0,18
Largh. del capo agli angoli dei mascellari	120-154	35	137	0	0.7115	0,2885	0,24
Id. a metà degli occhi	90-120	31	105	0	0,6731	0,3269	0,28
Id. alle narici	25-42	18	33,50	0	0,4423	0,5577	0,51
Alt. del capo a metà della reg. timpanica	47-64	18	55,50	0	0,4231	0,5769	0,31
Id. alle narici	34-42	9	38	0,0577	0,4615	0,4409	0,21
Lungh. obl. del capo dall'ang. masc. al muso	126-154	29	140	0,0192	0,1423	0,5385	0,20
Diametro interorbitale	34-51	19	42,50	0	0,7308	0,2692	0,42
Distanza dall'apice del muso alle narici .	0-9	10	4.50	0	0.4667	0,5333	2,00
Id. dalle narici all'occhio	23-42	20	32,50	0	0,3269	0,6731	0,58
Id. dall'occhio al timpano	0-0	—	—	—	—	—	—
Diametro massimo trasversale dell'occhio.	42-68	27	55	0,0769	0.6731	0,2500	0,47
Id. minimo del timpano	iuv.-23	—	21.50	—	—	—	—
Id. massimo del timpano	iuv.-23	—	21,50	—	—	—	—
Lunghezza massima delle parotidi . . .	—	—	—	—	—	—	—
Larghezza id. id.	—	—	—	—	—	—	—
Lunghezza del braccio	96-127	32	111,50	0	0,2692	0,7308	0,27
Id. dell'avambraccio	64-95	32	79,50	0	0,2692	0,7308	0,39
Id. della mano	85-108	24	96,50	0	0,5577	0,4123	0,24
Id. del 1° dito della mano	36-45	10	40,50	0	0,2115	0,7885	0,22
Id. 2° dito id.	26-40	15	33	0,1346	0.2692	0,5962	0,42
Id. 3° dito id.	45-60	16	52,50	0	0,5000	0,5000	0,28
Id. 4° dito id.	24-36	13	30	0,0577	0,7885	0,1538	0.40
Diam. mass. del tubercolo palmare mediano	16-24	9	20	0.2500	0,4615	0.2885	0.40
Id. id. id. interno	9-16	8	12,50	0	0,3269	0.6731	0.56
Lunghezza della coscia	131-156	26	143,50	0	0,6538	0,3462	0.17
Id. della gamba	120-144	25	132	0.0192	0,5385	0,4423	0.18
Id. del piede	200-246	17	223	0	0.7045	0,2955	0,21
Id. del 1° dito del piede	39-54	16	46,50	0	0,5192	0.4408	0,32
Id. 2° dito id.	51-68	18	59.50	0	0,3077	0,6923	0,29
Id. 3° dito id.	80-104	25	92	0	0,7115	0,2885	0.26
Id. 4° dito id.	117-148	32	132,50	0	0,2500	0,7500	0,24
Id. 5° dito id.	72-96	25	84	0	0,3269	0,6731	0,29
Lungh. del tubercolo metatarsale interno .	11-24	14	17,50	0	0,6358	0,3462	0,74
Id. id. id. esterno	5-10	6	7,50	0	0,2885	0,7115	0,67
Dist. dall'apice del 1° dito a metà del margine libero della membrana interdigitale	21-42	21	31,50	0	0,5000	0,4408	0,63
Id. id. del 2° dito	36-53	18	44,50	0	0,2500	0,7500	0,38
Id. id. del 3° dito	54-76	23	65	0	0,5577	0,4123	0,34
Id. id. del 4° dito	18-27	10	22,50	0	0,4000	0,6200	0,40
Lunghezza della ripiegatura tarsale . . .	51-78	28	69,50	0	0,7885	0,2115	0,31

Nota aggiunta.

Per lo studio della variabilità delle parti dello stesso animale, volendosi confrontare fra loro parti di dimensioni molto diverse, è d'uopo fare le considerazioni seguenti che mi vengono suggerite dal dr. Umberto Perazzo, assistente alla Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva, il quale ha testè compiuto nel laboratorio del Museo Zoologico di Torino una serie di ricerche intorno alla " Variazione dell'*Hydrophilus piceus* (Linn.) „.

L'indice di variabilità dipende in modo essenziale dalle dimensioni della parte a cui si riferisce; ora il confronto di tali indici, quando le dimensioni delle parti sono notevolmente diverse, non dice direttamente quali delle due siano effettivamente più variabili rispetto ad una misura base.

Si possono però facilmente dedurre dagli indici stessi numeri suscettibili di confronto assumendo i loro rapporti alle corrispondenti classi medie (ottenute cioè come medie aritmetiche fra le classi estreme). Nel caso nostro in cui le classi contigue differiscono per un 360$^{\text{esimo}}$ basterebbe fare il rapporto $\frac{A}{M}$ in cui A è l'indice di variabilità e M è la media. Il dr. Perazzo chiama tali numeri " coefficienti di variabilità relativa alla misura base „, e propone pel loro calcolo la formola seguente: $\frac{D-d}{\frac{1}{2}(D+d)}$ la quale è applicabile in ogni caso, sia in quello in cui le classi contigue delle serie differiscono per un 360$^{\text{esimo}}$ sia in quelli in cui si considerano contigue due classi differenti fra loro per metà o per un quarto ecc. di 360$^{\text{esimo}}$.

Nella formola sopradetta D è il valore massimo avuto dal rapporto di una data dimensione alla misura base (espresso in 360$^{\text{esimi}}$ di essa e dedotto, ad esempio, mediante il coefficiente somatico) e d è il valore minimo.

Sia ad esempio la serie:

90-97-102-103-104-105-106-107-108-110,

si avrà:

$$\frac{110-90}{\frac{1}{2}(110+90)} = \frac{20}{100} = 0{,}20.$$

Negli specchietti uniti a questo lavoro ho indicato anche i valori dei coefficienti di variabilità relativa, calcolati nel modo sopradetto, per ogni indice di variabilità.

FONDAMENTI DELLA METRICA PROJETTIVA

MEMORIA

DI

BEPPO LEVI

A PIACENZA

Approvata nell'Adunanza del 17 Aprile 1904.

INTRODUZIONE

Le tre geometrie d'Euclide, di Lobacefski e di Riemann si considerano ordinariamente come tre rami di un medesimo tronco: e come tali si presentano di fatto così dal punto di vista analitico del Riemann, dello Helmholtz, del Lie, come dal punto di vista projettivo di Cayley e Klein. Ma le ricerche analitiche sui fondamenti della geometria hanno come primo presupposto la rappresentabilità dello spazio mediante coordinate: si fa in esse, per esser precisi, una geometria di numeri; ora è ben vero che lo spazio nostro può riferirsi ad un sistema di coordinate, ma a ciò si giunge nel modo più ovvio poggiandosi precisamente sopra ipotesi che non si verificano ugualmente nelle tre geometrie (¹). Non altrimenti le ricerche che s'innestano alla geometria projettiva restano, quali le considerava il Cayley, applicazioni della teoria delle coniche e delle quadriche, piuttosto che studi sui fondamenti della geometria, almeno finchè la geometria projettiva non si poggia su basi proprie, indipendenti da ogni concetto tolto ad una particolar metrica.

E per due vie diverse si cercò di fatti di liberare dalle ipotesi proprie alla geometria euclidea la costruzione della geometria projettiva. Nell'una, seguìta di preferenza dai geometri italiani, si abbandonò ogni riguardo alle ordinarie intuizioni spaziali e si volle unicamente costituire la geometria projettiva in organismo logico. Nell'altra, seguìta di preferenza dai geometri tedeschi, si cercò di esprimere in forma di postulati alcuni fatti primordiali, che si suppongono riconosciuti sperimentalmente in una limitata regione dello spazio, e di dare per tal modo alla geometria projettiva e alla metrica una base comune, sulla quale si potessero poi costruire indifferente-

(¹) Si deve ricordare a questo proposito una nota del prof. Enriques, *Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni*, " Rend. Palermo ", XII, 1898. Da un semplice esame di questo lavoro si riconosce come le ipotesi adottate dall'A. contraddicano precisamente alla geometria iperbolica, almeno finchè con opportune convenzioni non sia convenientemente completato lo spazio.

mente le tre geometrie sorelle; l'opera fondamentale in questo indirizzo furono le *Vorlesungen* del Pasch (¹).

Nel primo indirizzo la geometria metrica è ancora lo studio di un gruppo arbitrario di proprietà delle coniche; nel secondo invece le ricerche fatte fin qui non possono dirsi totalmente esaurienti. Se infatti si considerano i postulati mediante i quali il Pasch (che prima d'ogni altro li enunciò esplicitamente) cercò di mostrare come la metrica si coordini alla geometria projettiva secondo le vedute del Klein, si dovrà osservare che, contro l'opinione dell'A., essi escludono precisamente una delle tre possibilità: quella della geometria ellittica (²). Non è difficile, invero, colmare tal lacuna, quando non si impongano limitazioni al modo onde si risolve la questione. Ma che ciò sia fatto esplicitamente non è a mia conoscenza; e più ancora resta aperto il campo alle investigazioni, ove si limiti il numero e la natura delle nozioni e delle proposizioni primitive — il che, come tosto si avrà occasione di ripetere, è fra i desideri di una perfetta costruzione logica.

A tal ricerca s'ispira il capitolo I del presente lavoro. Si enuncia in esso un sistema di postulati che sono validi ugualmente per le tre geometrie nominate non solo, ma per tutta una classe di metriche rispetto a una quadrica o conica assoluta, tra cui le geometrie poste recentemente in evidenza dal sig. Dehn (³) e la metrica del campo esterno ad una quadrica. Inoltre, indipendentemente da ciò, tali postulati rappresentano, pel loro minor contenuto, un progresso su quelli proposti fin qui da altri autori (⁴).

Nel capitolo II, appoggiandosi ai fatti metrici stabiliti nel capitolo precedente, si gettano le basi della geometria projettiva e si mostra la dipendenza della metrica da essa. È degno di nota come ne risulti la rappresentazione per coordinate dello spazio projettivo e la geometria analitica, e di conseguenza tutta la geometria projettiva nelle sue parti essenziali, indipendentemente da ogni nozione circa la potenza dell'aggregato dei punti (⁵), e circa l'ordine degli elementi in una forma di prima specie; nozioni estranee effettivamente alla geometria projettiva generale, giacchè è noto che i suoi teoremi fondamentali sono validi ugualmente nello spazio (numerabile) di punti razionali e nello spazio di punti immaginarî (in cui non è definito l'ordine).

(¹) V. anche SCHUR, *Einführung der idealen Elemente u. s. w.*, "Math. Ann. „, 39, e *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, "Math. Ann. „, 55.

(²) Il Pasch ammette (II Grundsatz) che un segmento si possa sempre prolungare di una ugual lunghezza ed afferma esplicitamente (p. 115, 4) che in figure congruenti a punti proprii corrispondono punti proprii. Questa ipotesi, unita al postulato d'Archimede (IV Grundsatz, p. 105) e alle sue conseguenze projettive, nel caso che l'involuzione assoluta sopra la retta sia ellittica, porta alla conclusione che il punto coniugato di un punto proprio è anch'esso proprio. Il che contraddice agli altri postulati.

(³) *Die Legendre'schen Sätze ü. die Winkelsumme im Dreieck*, "Math. Ann. „, 53.

(⁴) V. in particolare SCHUR, l. c., "Math. Ann. „, 55, e PIERI, *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* ("Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino „, serie II, vol. XLIX), i cui postulati hanno coi nostri maggiori contatti. Oltre all'esclusione della nozione di ordine, di cui si parla nelle linee seguenti, noto in particolare i postulati della retta: il relativo post. VIII del Pieri esclude contemporaneamente la geometria ellittica e lo spazio a più di tre dimensioni (cfr. l. c., p. 10 e 26). Nè l'una nè l'altra esclusione nei postulati presenti, mentre poi quanto resta generalmente valido del post. VIII del Pieri è stabilito per deduzione nei nⁱ 9 e seg.

(⁵) Riguardo alla potenza dell'aggregato dei punti necessari alla geometria projettiva, cfr. il n° 21.

Nel capitolo III si dimostra dapprima, per mezzo di esempi, l'indipendenza ordinata del maggior numero dei postulati ammessi nel cap. I e si discute poi della capacità dei postulati medesimi in confronto del teorema di Pascal, della determinazione del campo dei punti da attribuirsi allo spazio metrico e della determinazione della geometria metrica.

Rimando il lettore all'indice inserito alla fine del presente lavoro, per completare questa notizia riassuntiva del contenuto.

Il presente sistema si svolge intorno alle idee primitive di *punto* e di *congruenza di due coppie di punti*. Una tal riduzione dei concetti primitivi non è, per sè, una novità nella storia della geometria, nè nelle ricerche di questi ultimi anni (¹); nè io vorrei esagerarne l'importanza, come mi pare si faccia talora, in confronto, per es., alla riduzione attuata dal signor Pieri per la geometria Euclidea o Lobacefskiana ai concetti primitivi di *punto* e di *moto*: non si può infatti evitare di considerare, insieme colla congruenza di coppie, delle corrispondenze che mutino determinati sistemi di punti in sistemi congruenti (²), perchè è nell'oggetto medesimo della geometria metrica che, date talune congruenze fra coppie di punti di due sistemi, si possa senz'altro affermare la congruenza di tutte le loro coppie omologhe di punti (³). A parte queste modalità, la riduzione dei concetti primitivi ai più semplici e meno numerosi ha per iscopo di precisare nel modo migliore l'analisi dei postulati; essa equivale alla decomposizione di un sistema di equazioni logiche — i postulati di un dato sistema deduttivo — in due parti, di cui l'una, risolta rispetto al massimo numero possibile di incognite (concetti che si definiscono), si muta in un sistema di definizioni, l'altra, rimasta implicita, costituisce i postulati proprî della teoria. Si viene così a diminuire l'arbitrarietà dell'attribuzione di significati agli enti intorno a cui questa s'aggira.

Nella scelta dei postulati ho procurato che essi esprimessero proprietà contenute nella nostra *abituale* concezione geometrica e fossero, quanto possibile, *ordinatamente indipendenti*.

La scuola dei logici non chiede generalmente ai postulati altro che siano *indecomponibili* e fra loro *indipendenti*, e distingue fra *indipendenza ordinata* ed *assoluta*,

---

(¹) Ricordo fra i tentativi antichi di definire gli enti geometrici mediante la nozione di distanza, quelli del Leibniz e del Bolyai: fra le costruzioni recenti quella del Veronese (*Elementi di Geometria*), ove però intervengono anche come nozioni primitive la retta e il segmento; e i sistemi di definizioni pubblicati dai sig.ⁱ Peano (“ Atti della R. Accad. di Torino „, 1902) e Padoa (“ Periodico di matematica „, 1904). Anche il sig. Kagan ha esposto nei “ Jahresberichte d. d. Math. Verein. „, 11, 1902 (*Ein System von Postulaten welche die euclidische Geometrie definieren*; vedi anche un'appendice nel vol. 12 dello stesso periodico) un sistema di postulati in cui non compaiono, come rappresentanti idee primitive, altre parole che punto e distanza, ma la distanza del sig. Kagan è senz'altro un numero, onde la soppressione di altri concetti primitivi è piuttosto simulata che effettuata.

(²) Cfr. il post. IX e il § 2 del Cap. III.

(³) Così il postulato dell'uguaglianza dei triangoli nel sistema dello Hilbert non riuscirebbe a definire la congruenza delle figure piane se non fosse unito ai postulati della congruenza fra segmenti (e fra angoli) i quali non esprimono solo una relazione fra le coppie costituite dagli estremi di questi, ma bensì l'esistenza di una corrispondenza (realizzata dal movimento) fra i punti di segmenti congruenti (e fra i raggi di angoli congruenti). La qual corrispondenza il detto postulato permette di estendere a figure piane qualsiansi. Si noterà qui che la nozione di congruenza di figure che ne risulta è eccessivamente complessa di nozioni primitive diverse.

tendendo a questa come ad aspirazione ultima. Ma pare a me che queste distinzioni siano ben poco determinate e traggano più che altro dalla forma verbale che i postulati assumono. Si dice infatti che si decompone un postulato A quando si enunciano due proposizioni A' e A'' di cui A sia il prodotto logico. Se ora nella classe logica cui appartengono gli elementi di cui tratta il postulato A (enti, relazioni: relazioni binarie, ternarie, ...) ne esiste un'infinità che non soddisfano ad A, onde A limita in essa una classe minore E, si potranno pensare infinite proposizioni delimitanti classi E' in cui E sia contenuta e tali quindi che A possa risultare dal prodotto logico di esse e di altre proposizioni: onde il postulato indecomponibile è un'illusione, almeno finchè non si enunci esplicitamente un principio limitatore di questa indefinita decomponibilità.

Parimenti, quando i postulati $A, B, C, \ldots$ siano ordinatamente indipendenti, saranno assolutamente indipendenti le proposizioni: A, $B \cup - A$, $C \cup - A \cup - B$, ... equivalenti, nel loro insieme, al sistema proposto ([1]); onde con una semplice trasformazione logica si può ritener risoluto il problema della indipendenza assoluta, tosto che sia risoluto quello della indipendenza ordinata. Ben è vero che proposizioni della forma accennata ripugnano ordinariamente, ma non sarebbe nuovissimo il caso di un simile enunciato, almeno fra i teoremi, e d'altronde non è difficile spesso trasformare le proposizioni in modo da dissimularne la grottesca composizione e da raggiungere la forma categorica, ch'è fra gli incoscienti desiderî comuni: in ogni modo, se anche talora meno facile, la questione è condotta a una trasformazione verbale e quasi abbandonata, per una maggior determinazione, al gusto del ricercatore ([2]).

([1]) Siano $A, B, C, D, \ldots$ proposizioni fra loro assolutamente indipendenti, cosicchè ciascuna di esse non sia deducibile dalle rimanenti per moltiplicazione logica. Sia M una proposizione da esse ordinatamente indipendente, cioè che non consegua dal loro insieme, senza che si escluda che una delle $A, B, C, \ldots$ sia conseguenza delle rimanenti e della M. Si consideri la proposizione $M \cup -(ABCD\ldots) = M \cup - A \cup - B \cup - C \cup - D \cup \ldots$ Il prodotto logico $ABD\ldots(M \cup - A \cup - B \cup - C \cup - D \cup \ldots)$ si sviluppa in $(MABD\ldots) \cup (ABD\ldots - C)$. Ora, per ipotesi, C non è conseguenza di $ABD\ldots$, quindi la classe definita da $ABD\ldots - C$ non è nulla; d'altronde, per definizione, essa non è contenuta in quella definita da C, onde nemmeno sarà contenuta in quella definita da C la classe definita da $ABD\ldots[M \cup -(ABCD\ldots)]$. Così la proposizione $M \cup -(ABCD\ldots)$, come M, non è conseguenza delle proposizioni precedenti, e ciascuna di esse — (qui si è mostrato per la C) — non è conseguenza di questa e delle altre. Ma $ABCD\ldots[M \cup -(ABCD\ldots)] = MABCD\ldots$, vale a dire che il sistema costituito dalla M e dalle proposizioni $A\,B\,C\,D\ldots$ è equivalente al sistema formato da queste proposizioni e dalla $M \cup (ABCD\ldots)$. — Si supponga ora che $A, B, C, D, \ldots$ siano solo ordinatamente indipendenti: il risultato precedente ci mostra che saranno indipendenti assolutamente A e $B \cup - A$, poi queste proposizioni e la $C \cup - A \cup -(B \cup - A) = C \cup - A \cup (- B \cap A) = (C \cup - A \cup - B) \cap (C \cup - A \cup A) = C \cup - A \cup - B$, poi queste e la $D \cup - A \cup -(B \cup - A) \cup -(C \cup - A \cup - B)$, che un calcolo analogo permette di scrivere $D \cup - A \cup - B \cup - C$, e così via, secondo è enunciato nel testo; e il sistema di queste proposizioni è equivalente al dato.

([2]) Posso offrire qui alcuni esempi di tali trasformazioni: il post. IV del sistema che io qui presento è conseguenza dei postulati VII e VIII; ma i tre postulati sono ordinatamente indipendenti; ora basterà nelle ipotesi di VII aggiungere, per es., che la coppia *ef* sia diversa dalla *dc* (oppure sia diversa dalla *dc* la *ab*) perchè la deduzione sia impossibilitata, ma il sistema totale sia equivalente al primitivo. Così, per tacere di altri postulati la cui trasformazione è anche troppo evidente, basterà che al postulato XVII si sostituisca: “ Se *abc* sono tre punti non allineati, e *d* è un punto “ tale che $\mathfrak{r}(bc) = \mathfrak{r}(db)$, tutto il piano $\mathfrak{p}(abd)$ è contenuto nel piano $\mathfrak{p}(abc)$ „ perchè il nuovo postulato equivalga ad affermare la somma logica del post. XVII e della negazione del post. XV. — Un altro esempio può trarre occasione da una ricerca del sig. Hilbert (*Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*, “ Proc. of the London Math. Soc. „, XXXV). Egli dimostra infatti che il teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele non è conse-

Un certo maggior lume pare offrire la scuola degli empiristi, in tutte le sue sfumature — da quelli che considerano i postulati come un risultato sperimentale, a quelli che li considerano semplicemente come un artificio *comodo* per la spiegazione di fatti sperimentalmente acquisiti. — Nemmeno a tale concezione io saprei sottoscrivere senza riserva. Come noi percepiamo unicamente attraverso i nostri sensi, e della capacità di essi è affetto ogni nostro acquisto sperimentale, così è inconcepibile una interpretazione dell'esperienza che non sia appoggiata ad un sustrato qualsiasi precedente ad essa. E la geometria è in massima parte da identificarsi con questo sustrato; e per spiegarci la formazione di esso noi possiamo riposarci col Kant nella supposizione di un'*intuizione*, ma non ci è negato di scendere a una critica più profonda di leggi generali del nostro pensiero, le quali forse non possono escludere un notevole contributo dell'autorità e dell'errore ([1]).

I postulati adottati nella presente ricerca sono, per comodità del lettore, elencati alla fine del lavoro.

Piacenza, Marzo 1904.

---

guenza del postulato d'Archimede; che dal detto teorema non possa conseguire il post. d'Archimede è d'altronde evidente. Il sig. Hilbert aggiunge allora il postulato del *contenuto limitato* (*Axiome der Nachbarschaft*), mediante il quale si può completare la deduzione del teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base. Ora si osservi che, date due proposizioni fra loro assolutamente indipendenti A e B, se ne può dedurre una $C=(AB)\smile -B$ indipendente da B e tale A non sia conseguenza di C, ma sia conseguenza di B e C, e tale inoltre che B non è conseguenza di C ed A; cosicchè un sistema equivalente al sistema A, B è fornito dal sistema C, B od anche dal sistema C, A, B. Per riconoscere l'esattezza di queste affermazioni, basta effettuare i prodotti delle nostre proposizioni a due a due e confrontarli colla proposizione residua. Applicando le osservazioni del testo si può anche dedurre un sistema di tre proposizioni assolutamente indipendenti cioè le $(AB)\smile -B$, $A\smile(B-A)$, $B\smile -A$. Il postulato del contenuto limitato dello Hilbert ha appunto le funzioni della proposizione C. Ma una proposizione che occupi lo stesso posto si può ottenere trasformando la proposizione C dalla sua definizione medesima: $(AB)\smile -B$. Sia A il teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, B il postulato d'Archimede: si enuncerà dapprima: " Se in un triangolo isoscele " avviene che esista un multiplo dei suoi lati, superiore ad ogni segmento assegnato, gli angoli " alla base del triangolo sono uguali „. Ma da questa forma, di composizione troppo evidente, si passerà tosto ad una, forse verbalmente più soddisfacente, dicendo: " Rendendo sufficientemente " piccoli i lati di un triangolo isoscele si può fare in modo che la differenza dei suoi angoli alla " base risulti piccola quanto si vuole „, riuscendo così ad una forma che pare anche trarre dall'esperienza esterna.

([1]) Queste leggi generali possono forse raccogliersi intorno alla semplicità e all'analogia, semplicità che va però intesa nella tendenza ad alterare il meno possibile ordini di cognizioni e interpretazioni di fatti precedentemente acquisiti. Ma nella estrema arbitrarietà della scelta delle interpretazioni possibili pei fatti nuovi, non si devon forse dimenticare le ammissioni quasi casuali che ogni giorno si fanno — almeno provvisoriamente, per fermare le idee e fino a prova contraria — in ogni ricerca scientifica; le quali ammissioni si perpetuano poi per l'autorità del maestro sullo scolaro finchè da esse non derivino contraddizioni inconciliabili: e ciò che noi chiamiamo intuizione non è spesso altro che una idea imposta prima dall'autorità, assorbita poi per abitudine e indissolubilmente legata alle altre nozioni concomitanti. La riscossa che è talora compiuta da spiriti critici e ribelli all'autorità, è una delle migliori prove in appoggio di questa tesi: per questi spiriti, addestrati al perpetuo dubbio alla scuola della filosofia scientifica, si forma quella intuizione flessibile e continuamente mutevole che permette la facile variabilità dei postulati fondamentali di certi campi scientifici nei quali s'aggira soltanto il pensiero dei dotti. Mi si permetta di collegar qui due fatti noti: nel testo euclideo l'assioma V (il noto postulato d'Euclide) ha la forma esplicita di proposizione inversa di un'altra indipendente da esso, e d'altra parte la scuola Pitagorica ammetteva il più spesso implicitamente le proposizioni inverse, — e ciò avviene d'altronde tuttodì ad ogni mente poco addestrata all'analisi.

CAPITOLO I.

I POSTULATI DELLA METRICA PROJETTIVA.

§ 1. — Punto - Congruenza.

1. Enti primitivi: loro postulati esistenziali. — ***Post.*** **I, II. — Si ammette l'esistenza di una classe di enti —** *punti* **— costituita da più di un elemento, e tale che è definita una relazione fra coppie di punti detta** *congruenza.*

Se $abcd$ sono quattro punti, la congruenza delle coppie ab, cd si afferma mediante la scrittura $ab \equiv cd$.

Def. — L'aggregato di tutti i punti si chiama *spazio.*

2. Proprietà fondamentali della congruenza di coppie di punti. — ***Post.*** III. — **Da** $ab \equiv cd$ **segue** $cd \equiv ab$.

Post. IV. — **Da** $ab \equiv cd$ **segue pure** $ba \equiv dc$.

Post. V e VI. — **La coppia che si ottiene nominando due volte uno stesso punto è congruente ad ogni coppia analoga, e non è congruente ad alcuna coppia costituita da due punti distinti** (1).

Post. VII. — **Da** $ab \equiv cd$, $cd \equiv ef$ **segue** $ab \equiv ef$.

Post. VIII. — **Sussiste la congruenza** $ab \equiv ba$.

3. La congruenza fra sistemi di punti. — *Def.* 1. Se $abcd...$, $a'b'c'd'...$ sono due sistemi di punti fra i quali sia stabilito un riferimento, indicato qui col rappresentare punti corrispondenti colla stessa lettera senza e con apice, si dirà che *i due sistemi* abcd..., a'b'c'd'... *sono congruenti* (in simboli $abcd... \equiv a'b'c'd'...$) *se sono verificate le congruenze*

$$ab \equiv a'b',\ ac \equiv a'c',\ ad \equiv a'd',\ ...,\ bc \equiv b'c',\ ...$$

Tr. " Se $abcd... \equiv a'b'c'd'...$: 1° sarà pure $a'b'c'd'... \equiv abcd...$ (III); 2° saranno " ancora congruenti i sistemi che si ottengono operando una permutazione qualunque " sui punti del primo sistema e la permutazione analoga sui punti del secondo (IV); " 3° se sono distinti i punti del primo sistema, lo stesso avviene dei punti del se- " condo (VI); 4° se è inoltre $a'b'c'd'... \equiv a''b''c''d''...$ sarà pure $abcd... \equiv a''b''c''d''$ „ (VII).

Post. IX. — **Se due sistemi di punti sono congruenti, ad ogni sistema di punti contenente l'un d'essi è congruente un sistema di punti contenente l'altro, per modo che i punti dei due sistemi dati si corrispondono nella nuova congruenza come si corrispondevano nella primitiva** (cfr. n. 29).

Def. 2. — Il teorema precedente e il post. IX permettono di affermare che, assegnati due sistemi congruenti di punti, esistono trasformazioni biunivoche che

(1) La proprietà enunciata col post. V non ha altro scopo che di completare la nozione di " coppia di punti coincidenti „, richiesta per poter enunciare la proprietà VI.

mutano i punti dell'un sistema nei punti omologhi dell'altro, e mutano ogni altro punto che si voglia pensare aggiunto al primo sistema in un punto determinato, per ciascuna di queste trasformazioni, per modo che ogni coppia di punti è trasformata in una coppia congruente. *Tali trasformazioni si chiameranno* CONGRUENZE (¹); e se si ha $abc... \equiv a'b'c'...$ ognuna di tali trasformazioni la quale muti i punti $abc...$ rispettivamente in $a'b'c'...$ si dirà determinata dalla congruenza $abc... \equiv a'b'c'...$

Se e ed e' sono due punti non appartenenti rispettivamente ai sistemi $abc...$, $a'b'c'...$, e se esiste *una* congruenza che trasformi e in e', determinata dalla relazione $abc... \equiv a'b'c'...$, si dirà sovente, per brevità, che *la* o *una congruenza* abc... ≡ a'b'c'... *muta* e *in* e'. È da notare che può talvolta usarsi l'articolo determinato se anche la relazione $abc... \equiv a'b'c'...$ non determina univocamente la trasformazione di ogni punto che si possa pensare aggiunto al primo sistema in un altro punto, purchè sia univocamente determinata la trasformazione dei punti che si considerano.

Il precedente teorema enuncia per queste trasformazioni l'invertibilità (1°), e la componibilità per prodotto (4°): useremo per queste operazioni sulle congruenze il comune simbolismo per le operazioni sulle trasformazioni; se una congruenza μ trasforma un punto a in a', un sistema S in S', scriveremo $\mu a = a'$, $\mu S = S'$.

§ 2. — La catena e la retta.

4. Punti medi di una coppia - Simmetrici di un punto rispetto ad un altro. — Dai post. VIII e IX segue che, qualunque siano i punti $a\,b\,c$, esiste un punto c' tale che $abc \equiv bac'$. Noi ammetteremo che

Post. **X e XI. — Qualunque siano i punti a, b, esistono punti tali che, detto c uno di essi,**

1° È $abc \equiv bac$;

2° Non esiste alcun punto d distinto da a tale che $abc \equiv bdc$.

Tr. 1. " Nemmeno esiste un punto e, diverso da b, tale che $abc \equiv eac$ ". Se infatti tal punto esistesse, ogni congruenza che trasformi abc in bac (X e n° 3) farebbe corrispondere ad $e \neq b$ un punto $e' \neq a$, tale che $ace \equiv bce'$ e quindi $abc \equiv e'bc$ ovvero $bac \equiv be'c$ e, in forza del post. X e del teor. del n° 3, $abc \equiv be'c$ contro il post. XI.

Def. 1. — Ogni punto c soddisfacente alle condizioni dei post. X e XI si dirà *punto medio della coppia* a, b. In simboli si scriverà $c \epsilon b|a$, $c \epsilon a|b$.

Def. 2. — Si dirà pure che b *è simmetrico di* a *rispetto a* c ed a simmetrico di b rispetto a c. In simboli $b \epsilon a/_c$, $a \epsilon b/_c$.

Tr. 2. " Se una congruenza tien fermo il punto a e un punto c medio della " coppia ab, terrà fermo anche b ". Se infatti tal congruenza potesse portare b nella posizione $b' \neq b$, sarebbe $abc \equiv ab'c$ ossia (X e n° 3) $bac \equiv ab'c$, $abc \equiv b'ac$ contro il teor. 1.

Tr. 3. " Se $abc \equiv def$ e $c \epsilon a|b$, ne segue che $f \epsilon d|e$ ". Infatti: 1° Da $abc \equiv def$,

(¹) La lieve traslazione che così subisce il significato della parola " congruenza " mi pare senza danno: essa concorda con locuzioni comuni e non mancano esempi di altre traslazioni simili. Il testo del discorso sarà sempre sufficiente ad evitare ogni equivoco.

$abc \equiv bac$ segue $bac \equiv edf \equiv abc \equiv def$; 2° Se esistesse un $d' \neq d$ tale che $def \equiv ed'f$, esisterebbe pure un $a' \neq a$ (trasformato di d' per una congruenza che porta def in abc) tale che $abc \equiv ba'c$, contro il post. XI. La stessa proposizione può enunciarsi, a causa del post. IX, " Se $ab \equiv cd$ il sistema costituito da a, b e da tutti i $a|b$, $a/_b$, $b/_a$ (1) è " congruente al sistema costituito da c, d e da tutti i $c|d$, $c/_d$, $d/_c$ ".

5. La catena di una coppia di punti. — *Def.* Si dirà *catena della coppia* ab *di punti distinti* l'aggregato dei punti a, b, dei loro punti medi, dei simmetrici — qualora esistano — di a rispetto a b e di b rispetto ad a, e di tutti i punti che si ottengono da coppie di punti appartenenti alla catena medesima mediante determinazione di loro punti medi e di simmetrici dell'un punto della coppia rispetto all'altro.

La catena della coppia ab *si rappresenterà con* (ab).

Poichè ogni coppia possiede punti medi (X e XI), ogni catena contiene almeno tre punti.

Tr. 1. " La catena (ab) è individuata dalla coppia ab, coincide colla catena (ba), " e — se c e d sono due punti qualunque di (ab) — la catena (cd) è interamente " contenuta nella catena (ab) ".

La prima parte di questa proposizione può anche enunciarsi:

Tr. 2. " Ogni congruenza che non sposti i punti a e b trasforma in se stessa la " catena (ab) (naturalmente senza che debbano restar fissi perciò tutti i punti di " questa) ".

Il teor. 3 del n° 4 dà ancora:

Tr. 3. " Da $ab \equiv cd$ segue $(ab) \equiv (cd)$ " vale a dire " una congruenza trasforma " una catena in una catena ".

6. Le congruenze sulla catena. — ***Post.* XII. — Se abc appartengono ad una stessa catena e se $ab \equiv bc$, c è un simmetrico di a rispetto a b.**

Def. 1. — *Un punto* a *si dirà aderente ad un punto* b se esiste un simmetrico di a rispetto a b (2).

Tr. 1. — " Se il punto a è aderente a b, anche il punto b è aderente ad a ". Risulta dal teor. 3 del n° 4 quando si ricordi che $ba \equiv ab$ (VIII).

Def. 2. — Occorrendo di esprimere in modo simmetrico rispetto ai due punti a e b che a è aderente a b e b ad a, si dirà che a *e* b *sono coerenti.*

Tr. 2. — " Se a e b sono punti coerenti esistono congruenze che trasformano in " se stessa la catena (ab), portano a in b e non lasciano fermo alcun punto della " catena (ab) ".

Sia infatti $c \in a/_b$; sarà $abc \equiv cba$ (X); d'altra parte $cb \equiv bc$ (VIII). Il prodotto delle due congruenze (n° 3) converte ab in bc e quindi (ab) in (bc) (n° 5 t. 3): d'altra parte c appartiene ad (ab) e a a (bc) (poichè $a \in c/_b$); quindi le due catene (ab) e (bc) coin-

(1) La proposizione è evidentemente condizionata all'esistenza dei $a/_b$, $b/_a$, che nulla permette di affermare: ma essa afferma che se esistono $a/_b$ e $b/_a$, esistono pure $c/_d$ e $d/_c$.

(2) Qualunque siano a e b, ogni a/b è aderente ad a: se quindi si volessero introdurre le nozioni relative all'ordinamento dei punti, si dovrebbe concludere che sopra ogni catena (e in seguito poi sulle varietà maggiori) i punti " abbastanza prossimi " al punto a sono aderenti ad a secondo la definizione del testo. Valga questa osservazione a giustificare la scelta del nome.

cidono (5 t. 1), cioè la nominata congruenza converte in se stessa (ab). Nessun punto di (ab) potrà restar fermo per questa congruenza, perchè, se x fosse un tal punto, sarebbe $abx \equiv bcx$ e quindi $ax \equiv bx \equiv cx$. In forza del post. XII, b dovrebbe essere un $a/_x$ il che la congruenza $abx \equiv bcx$ esclude (post. XI).

Tr. 3. — " Ogni congruenza che porti a in b e b in un altro punto della " catena (ab) diverso da a, converte la catena in se stessa e porta il punto b in " un $a/_b$ e un $b/_a$ in a ". Infatti, detti b' il punto in cui b è portato dalla congruenza e a_1 quello che da essa è portato in a, si ha $ab \equiv bb'$, $a_1a \equiv ab$. Quindi, poichè per ipotesi b' appartiene ad (ab), $b' \epsilon a/_b$ (XII). Allora il ragionamento del teor. precedente mostra che la congruenza converte in se stessa la catena (ab) e lo stesso avviene della congruenza inversa. Allora $a_1 \epsilon b/_a$.

L'ipotesi che b sia portato dalla congruenza in un punto della catena diverso da a conduce quindi ad affermare l'esistenza di $a/_b$ e di $b/_a$. " Se dunque i punti a e b " non sono coerenti, ogni congruenza che converta in se stessa la catena (ab) e porti " a in b dovrà portare b in a ".

***Post.* XIII. — Non esistono due diversi simmetrici d'uno stesso punto a rispetto a un dato punto b.** In simboli, se $c \epsilon a/_b$, $c' \epsilon a/_b$ è $c = c'$. D'or innanzi la relazione $c \epsilon a/_b$ si potrà dunque scrivere $c = a/_b$.

Tr. 4. — " Se a e b sono punti coerenti, ogni congruenza che porti a in b e " qualche $a|b$ in un altro punto di (ab), porta b in $a/_b$; ed ogni congruenza che scambi " oppure tenga fermi a e b, tien fermi tutti i punti medi della coppia ab ".

Se infatti $c \epsilon a|b$, ed una congruenza porta a in b, c in un punto $c' \neq c$ appartenente ad (ab) e b in b', è $abc \equiv bb'c'$; e quindi (4 t. 3) $b' = b/_{c'}$. b' appartiene ad (ab); dunque la congruenza muta in se stessa la catena (ab) (t. 3). È inoltre $c'b \equiv ca \equiv cb$; quindi (XII e XIII) $c' = c/_b$; e tutte le congruenze che portano a in b e spostano c portandolo in un altro punto della catena, convertono c e b negli stessi punti. Ora una di esse fu considerata nei teor. 2 e 3 e porta b in $a/_b$; lo stesso avviene quindi di ogni altra.

Poichè ora $a/_b$ è, per definizione, diverso da a, se una congruenza dovrà scambiare a e b, non potrà muovere alcun $a|b$.

Se infine una congruenza tien fermi a e b, essa non potrà muovere alcun $a|b$, perchè, facendola seguire da una congruenza che scambi a e b (VIII) si otterrebbe una congruenza prodotto che scambia a e b e sposta qualche $a|b$.

Dal teor. 4 segue che:

Tr. 5. — " Ogni congruenza che tenga fermo un punto medio della coppia ab " di punti coerenti e converta la catena (ab) in se stessa, tien pure fermi tutti i punti " medi della coppia ab " perchè tal congruenza dovrà tener fissi ovvero scambiare i punti a e b (XII e XIII).

Tr. 6. — " Se a e b sono punti non coerenti, la coppia ab ha almeno due punti " medi, e precisamente ad ogni punto medio della coppia ne è associato un altro, sim- " metrico del primo rispetto a ciascun punto della coppia. Ogni congruenza che converta " la catena in se stessa e porti a in b, scambia questi due punti, e se tien fermo un " loro punto medio, tien pur fermo il suo associato; se lo muove, lo scambia con questo ". Sia infatti $c \epsilon a|b$: i punti a e c sono coerenti e quindi esiste (t. 2) una congruenza u tale che $ua = c$, $uc = b$ e, se si pone $ub = b'$, sarà $b' = c/_b$ poichè $b = a/_c$. Se allora si applica nuovamente la congruenza μ, si ha $\mu^2a=\mu c=b$, $\mu^2c=\mu b=b'$, $\mu^2b=\mu b'=\mu c/_{\mu b}=b/_{b'}$. Essendo $\mu^2a=b$, un corollario del teor. 3 ci mostra che μ^2b non può differire da a. Quindi $b/_{b'}=a$, cioè $b'\epsilon a|b$; inoltre si è trovato $b'=c/_b$; infine si ha $b=a/_{b'}$, e quindi $b'=\mu b=\mu a/_{\mu b'}=c/_a$.

Se ora una congruenza tien fermo c e sposta a e b, convertendo in se stessa la catena, scambierà a e b e convertirà $b'=c/_a$ in $c/_b=b'$. Se una congruenza converte in se stessa la catena e porta a in b spostando c, lo porterà in un punto c' tale che $c'b\equiv ca\equiv cb$. Allora $c'=c/_b$ (XII e XIII) cioè $c'=b'$. La congruenza convertirà inoltre b in a (t. 3) e $b'=c/_a$ in $b'/_b=c$.

Si è trovato incidentalmente $\mu ab=cb'$; quindi $ab\equiv cb'$, cioè:

Tr. 7. — “ Se a e b non sono coerenti, la coppia ab è congruente a ciascuna “ delle coppie di suoi punti medi simmetrici rispetto alla coppia: tutte queste coppie “ sono dunque congruenti fra loro „.

Tr. 8. — “ Se c e c' sono due punti medi di una coppia ab di punti non coe- “ renti, e sono fra loro simmetrici rispetto alla coppia ab, esiste nella catena (ab) “ una coppia di punti coerenti di cui essi sono punti medi „. Se infatti $d\epsilon c|a$, d sarà aderente ad a ed esisterà (t. 2) una congruenza μ che trasforma in sè la catena $(ad)=(ab)$, porta a in d e non lascia fermo alcun punto della catena. Sarà (t. 3) $\mu d=c$ e quindi $\mu c=\mu a/_{\mu d}=d/_c$. Se si pone $\mu c=d'$ sarà dunque $c\epsilon d|d'$; inoltre $\mu ac=dd'$ onde $dd'\equiv ac$: siccome a e c sono coerenti, sono pure coerenti d e d'. Infine la congruenza definita da $cd\equiv cd'$ converte in sè la catena e tien fermo c; quindi (t. 6) tiene pure fermo c'; è cioè $c'd\equiv c'd'$ e $c'\epsilon d|d'$.

Tr. 9. — “ Ogni congruenza che tenga fermi due punti coerenti a, b, tien pure “ fermi tutti i punti della loro catena „. Sia difatti μ una tal congruenza e sia $c\epsilon a|b$: sarà $\mu c=c$ (t. 4). Sia ora m un punto della catena (ab) il quale, se possibile, si sposti per μ e sia $\mu m=m'$. Sarà $am\equiv am'$, $bm\equiv bm'$, $cm\equiv cm'$. Sia poi ν una congruenza che scambi a e b; sarà $\nu c=c$ (t. 4), ma νm dovrà essere diverso da m, altrimenti $am\equiv bm$, onde $m\epsilon a|b$ (XII) e quindi $\mu m=m$ (t. 4). Se si pone $\nu m=m''$, m'' apparterrà ancora ad (ab) (5 t. 3) e sarà $m''c\equiv cm$ e quindi $m''=m/_c=m'$. Allora $ma\equiv m'b$, $mb\equiv m'a$, onde, per le congruenze precedenti, $ma\equiv mb$, cioè di nuovo $m\epsilon a|b$, il che, nell'ipotesi che $\mu m\neq m$, contraddice al teor. 4.

7. La retta e le congruenze su di essa. — La catena di una coppia di punti rappresenta, per gran parte delle sue proprietà, la retta congiungente i due punti. Fondamentale fra le altre è la proprietà enunciata nel precedente teorema: ma esso non dice che non esistano altri punti fissi per quella congruenza per cui non sono spostati i punti della catena; di più non è escluso che la catena determinata da due punti d'una catena data non sia una parte soltanto di questa catena (cfr. nº 5) (¹), ed in tal caso tali altri punti fissi debbono esistere se non si vuol contraddire ad una proprietà fondamentale della retta. Porremo perciò la seguente

(¹) Gli esempî sono ovvii: siano 1, 2, 3, ..., 9 i vertici di un ennagono regolare inscritto in un cerchio: si chiamino congruenti due coppie di essi quando gli archi (minori della semicirconferenza) determinati da esse sono uguali e spazio sia l'insieme di questi 9 punti: i postulati precedenti sono soddisfatti: ogni coppia ha *un* punto medio e ogni punto *un* simmetrico rispetto a un altro. La catena (1.2) comprende tutto lo spazio: la catena (1.4) è costituita dai soli punti 1, 4, 7.

Def. 1. — Chiamasi *retta della catena* (ab) o semplicemente *retta* o *congiungente della coppia* ab l'aggregato di tutti i punti che non sono mossi da nessuna congruenza cho lasci fissi tutti i punti della catena (ab).

La retta della coppia ab si rappresonterà con $\mathrm{r}(ab)$. Evidentemonte la catena di una coppia qualunque di punti coerenti appartenenti ad $\mathrm{r}(ab)$ è contenuta nella rotta. Noi ammetteremo cho

***Post.* XIV. — Se ogni congruenza che lasci fermi tutti i punti della catena (ab) lascia pur fermi tutti i punti d'un'altra catena (cd), reciprocamente ogni congruenza che non muova nessun punto di (cd) lascierà fermi tutti i punti di (ab).**

***Post.* XV. — La catena di due punti qualunque d'una retta appartiene alla retta.**

Segue tosto dal post. XIV che " la retta d'una catena è identica colla retta " d'un'altra sua catena qualunque „ e da questa osservazione e dal post. XV che " la congiungente due punti è identica colla congiungente due suoi punti qualunque „. Segue pure:

Tr. 1. " Ogni congruenza trasforma una rotta in una retta „ (IX e XIV).

Tr. 2. " Tutte le congruenze che lasciano fermi duo punti coeronti d'una retta " lasciano fermi tutti i punti della retta „ (XV, 6 t. 9, XIV).

Tr. 3. " Se abc sono tre punti di una retta e se $ac \equiv bc$, sarà $a = b|_c$ ovvero " a e b coincidono „. Si supponga infatti, in primo luogo, che b e c siano coerenti. Ogni congruenza che tenga fermi b e c tieno fermi tutti i punti della retta (t. 2), fra gli altri a. Se dunque a è distinto da b, sono soddisfatte le due condizioni: 1° $abc \equiv bac$; 2° non esiste un punto d tale che $abc \equiv dbc$: quindi $c \epsilon a|b$ (n° 4). Se poi b e c non sono coeronti, sia $b' \epsilon b|c$; esiste un punto a' tale che $aa'c \equiv bb'c$ (IX) ed è $a' \epsilon ac$ (4 t. 3). Allora $a'c \equiv b'c$ e b' e c sono coerenti: so $a'=b'$, $a=c/_{a'}=c|_{b'}=b$; se poi $a' \neq b'$, risulta dalla dimostraziono precedente che $a' = b'|_c$: a' e b' costituiscono quindi una coppia di punti medî di b e c, simmetrici rispetto a questi punti (6 t. 6) e $a = c/_{a'} = b$.

Tr. 4. " Tutte le congruenze che tengon fermo uno stesso punto d'una rotta e " trasformano la retta in se stessa spostandone qualcho punto, tengono fermo ogni " punto della retta non aderente a quello e trasformano ogni altro punto della retta " nel suo simmotrico rispotto a tutti questi punti fissi. Tutte queste congruonze sono " quindi identiche fra loro rispetto alla trasformazione della retta „. Esse non possono di fatto muovere un punto della retta non aderente al punto fisso, altrimenti quel punto avrebbe simmetrico rispetto a questo (t. 3), contro l'ipotesi; nè possono tener fermo un punto aderente ad un punto fisso, altrimenti rosterebbo fissa tutta la retta (t. 2).

In generale tutto le proprietà della catona riscontrate nei n[i] prec. appartengono pure alla retta.

Def. 2. — Chiameremo *ribaltamento di una retta* intorno ad un suo punto la corrispondenza determinata sulla retta da quelle congruenze cho tengono fermo quel punto e spostano qualcho altro punto dolla rotta. Se a è il punto fisso si rappresenterà il ribaltamento con ρ_a.

Def. 3. — Chiameremo *cardine* l'insieme dei punti di una retta che rimangono fissi per uno stesso ribaltamento della retta.

Tr. 5. " L'insieme di un punto e di tutti i punti di una retta per esso, ad " esso non aderenti, costituisce un cardine. L'insieme dei punti medî di una coppia " di punti coerenti è un cardine; a due a due questi punti non sono coerenti „ (t. 4).

Tr. 6. " Tutti i cardini d'una stessa retta sono fra loro congruenti; dati due " cardini d'una retta esiste cioè una congruenza che trasforma l'uno nell'altro scam- " biando fra loro due punti arbitrariamente assegnati l'uno dell'uno, l'altro dell'altro " cardine „. Tal congruenza è infatti il ribaltamento della retta intorno a un qualunque punto medio della coppia di punti assegnata.

Tr. 7. " Se ad una retta appartiene una coppia di punti non coerenti, ogni sua " coppia di punti ha almeno due punti medî „. Infatti la coppia di punti non coerenti ha almeno due punti medî (6 t. 6), e questi sono pure medî di una coppia di punti coerenti (6 t. 8) e appartengono quindi a un cardine (t. 5); basta allora ricordare il teor. prec.

Tr. 8. " L'insieme dei punti medî d'una coppia di punti non coerenti è costituito " al più da due cardini „. Siano infatti a e b due punti non coerenti e sia $m \epsilon a|b$. Il ribaltamento ρ_m scambia fra loro a e b e scambia un qualunque $a|m$ con un determinato $b|m$ (simmetrico del primo rispetto ad m); questi due punti sono coerenti e il ribaltamento terrà fermo ogni loro punto medio. L'insieme di questi punti medî costituisce un cardine cui m appartiene e di cui tutti i punti sono $a|b$. — Supponiamo che esista un $a|b$ non appartenente a questo cardine e sia n. ρ_m porta n in un altro $a|b$ e sia n': sarà $na \equiv n'b$ e poichè $na \equiv nb$, $n' = n/_b$; e parimenti $n' = n/_a$. Cioè: " Il ribaltamento intorno a un $a|b$ porta ogni altro $a|b$ che con esso non appar- " tenga ad uno stesso cardine in un altro $a|b$ simmetrico del primo rispetto ad a e a b " (il punto associato al primo del n° 6, teor. 6) „. Sia, se possibile, p un $a|b$ che non appartenga nè con m nè con n ad uno stesso cardine. Il prodotto dei due ribaltamenti ρ_m, ρ_n riporta in se stessi a, b, p e trasforma m ed n rispettivamente in $m/_a$ ed $n/_a$; assurdo perchè, a e p essendo coerenti, ogni congruenza che li tenga fissi deve tener fisso ogni altro punto della retta.

Si osservi che $n' = n/_m$; e parimenti, se $m' = m/_a = m/_b$, sarà $m' = m/_n = m/_{n'}$; cioè

Tr. 9. " Se due punti non coerenti (appartenenti quindi a un cardine) posseg- " gono due cardini di punti medî, a ogni punto di ciascuno di questi cardini è associato " un punto dello stesso cardine, simmetrico di esso tanto rispetto ai punti del cardine " cui appartengono i punti dati quanto rispetto ai punti dell'altro cardine; si ha " così una terna di cardini tali che i punti di ciascuno di essi si associano in coppie " di cui gli altri due cardini costituiscono l'insieme dei punti medî „ (1).

(1) Lo studio del piano escluderà, nel § seguente, che una coppia di punti non coerenti possa possedere più cardini di punti medî, e fisserà a 2 il massimo numero di punti che possono costituire un cardine (10 t. 10). L'ipotesi che una stessa coppia di punti non coerenti possa possedere due cardini di punti medî dà luogo a una quantità di conseguenze di notevole simmetria: dati due cardini d'una terna di cui al teor. 9 il terzo è perfettamente determinato da essi, come coppia di cardini di punti medî di convenienti sue coppie: reciprocamente a due cardini arbitrarî di punti medî di coppie di punti d'uno stesso cardine è sempre associato un cardine ben determinato che forma con essi una terna. Rileviamo anche i teor. 12 e 13 segg. — Ciononondimeno ci manca ogni esempio

Tr. 10. " Se una congruenza trasforma in sè una retta, spostandone ogni punto " (cfr. 6 t. 2), il prodotto di essa e di un ribaltamento della retta intorno a un suo " punto a è un ribaltamento della retta intorno ai punti medî della coppia costi- " tuita da a e dal punto che quella congruenza porta in a „. Sia infatti a_1 questo punto e sia $b \epsilon a' a_1$ e b' il suo trasformato per quella congruenza; sarà $a_1 b \equiv ab \equiv ab'$; quindi $b' = b'_{/a}$. Se dunque dopo la congruenza si opera il ρ_a, b' sarà riportato in b.

Tr. 11. " La trasformazione che la congruenza considerata nel teor. prec. opera " sulla retta è determinata da una coppia di punti corrispondenti a_1, a „. Infatti, poichè il ribaltamento è una congruenza involutoria (sulla retta) il teor. prec. mostra tal trasformazione come il prodotto di quelle operate dal ribaltamento intorno al cardine $a_1|a$ e da ρ^a.

Def. 3. — Si chiama *scorrimento della retta* la trasformazione determinata sopra la retta da una qualunque congruenza che la trasformi in se stessa spostandone ogni punto.

Tr. 12. " Se due punti non coerenti si trasformano l'uno nell'altro per uno scor- " rimento della loro retta, la loro coppia, ed ogni coppia della stessa retta hanno un " solo cardine „. Se infatti $a_1 a$ è la coppia considerata, il teor. 10 mostra che esiste un ribaltamento che tiene fermi insieme tutti i punti medi della coppia: essi costituiscono quindi un sol cardine.

Tr. 13. " Il prodotto dei ribaltamenti di una retta intorno a due suoi punti è " l'identità se questi appartengono allo stesso cardine, è un ribaltamento se essi " appartengono a cardini distinti di una stessa coppia di punti non coerenti, è uno " scorrimento in ogni altro caso „.

§ 3. — Il piano.

8. Proprietà di appartenenza. ***Post.* XVI. — Esistono punti non appartenenti ad una retta.** Segue:

Tr. 1. " Esistono più rette, e due rette distinte non possono avere a comune " più di un punto „.

Def. — Se abc sono tre punti non allineati, dicesi *piano dei punti* abc l'aggregato dei punti che appartengono alle rette che congiungono il punto a coi punti della retta $\mathfrak{r}(bc)$, il punto b coi punti della retta $\mathfrak{r}(ac)$, il punto c coi punti della retta $\mathfrak{r}(ab)$ (¹). Il piano dei punti abc si rappresenterà con $\mathfrak{p}(abc)$.

Ammetteremo il

***Post.* XVII. — Se abc sono tre punti non allineati, e d è un punto della $\mathfrak{r}(bc)$ diverso da b, tutto il piano $\mathfrak{p}(abd)$ è contenuto nel piano $\mathfrak{p}(abc)$** (²).

Rimando al citato lavoro del Pieri per le conseguenze che se ne deducono circa la determinazione di un piano mediante tre suoi punti non allineati e circa l'appartenersi di rette e piani (§ 1, P. 24-27, p. 13-14).

---

concreto in cui siano soddisfatti tutti i precedenti postulati e si verifichi l'esistenza di due cardini d'una stessa coppia di punti; la quale esistenza non abbiamo per contro potuto escludere deduttivamente.

(¹) Cfr. Pieri, *Della geometria elementare*, ecc. P 20, p. 12. — Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, " Math. Ann. „, 55, p. 268. — Pasch, l. c., p. 25.

(²) Cfr. Pieri, l. c., post. IX, p. 13.

9. Una congruenza non può tener fisse due rette concorrenti. *Def.* 1. — Si dirà che *un punto* a *è aderente ad una retta* r quando è aderente a qualche punto di *r* senza appartenere ad *r*.

Post. XVIII. — **Se** *r* **è una retta di un piano π, esistono congruenze che tengono fermo ogni punto di** *r* **e trasformano π in se stesso spostandone qualche punto.**

Def. 2. — Ogni congruenza che soddisfi al post. XVIII si dirà un *ribaltamento del piano* π *intorno ad* r. La nuova posizione di un punto *a* del piano, che la congruenza sposti, si dirà *simmetrica di* a *rispetto ad* r.

Dimostrerò ora che un ribaltamento di un piano intorno ad una sua retta non può lasciar fermo alcun punto del piano aderente a questa. È perciò necessario premettere alcune considerazioni preliminari; s'intenderà in questo n° e nei due seguenti che si parla unicamente di enti appartenenti ad uno stesso piano.

Lemma 1. — " Se un ribaltamento di un piano intorno ad una sua retta *r* lascia " fermo un punto del piano aderente ad *r*, lascia ferma qualche retta concorrente " con *r* „. Infatti su *r* esiste un punto aderente al punto fisso considerato (*Def.* 1): il ribaltamento non sposta nè l'uno nè l'altro; quindi lascia fissi tutti i punti della loro retta.

Lemma 2. — " Se una congruenza lascia fermi tutti i punti di due rette, le " rette che congiungono i punti dell'una coi punti dell'altra non possono a due a due " avere comuni punti che la congruenza sposti „. La congruenza converte infatti ciascuna di queste rette in se stessa. Se due di esse avessero a comune un punto mobile, dovrebbero aver comune il punto trasformato e quindi coincidere.

Lemma 3. — " Se una congruenza lascia fermi tutti i punti di due rette con- " correnti, e se esistono — nel piano delle due rette — rette pel punto comune che " si trasformino in se stesse senza tener fermi tutti i loro punti, queste incontre- " ranno ciascuna congiungente due punti delle rette fisse, e la congruenza lascia " fermi i punti d'intersezione „.

Siano $\mathfrak{r}(ab)$ e $\mathfrak{r}(ac)$ le due rette fisse, $\mathfrak{r}(am)$ una retta del piano che — per ipotesi — si trasformi in se stessa, e si supponga chè essa incontri $\mathfrak{r}(bc)$. Se il punto d'incontro fosse mosso dalla congruenza, sarebbe trasportato in un altro punto di $\mathfrak{r}(bc)$ e contemporaneamente in un altro punto di $\mathfrak{r}(am)$; cioè $\mathfrak{r}(bc)$ e $\mathfrak{r}(am)$ avrebbero due punti comuni e coinciderebbero, mentre $\mathfrak{r}(bc)$ non passa per *a*. — Ciò posto $\mathfrak{r}(bc)$ incontrerà certamente $\mathfrak{r}(am)$: perchè, si consideri il piano come $\mathfrak{p}(abc)$: se $\mathfrak{r}(am)$ non incontrasse $\mathfrak{r}(bc)$, ogni suo punto dovrebbe stare sulle rette che da *b* e da *c* projettano rispettivamente $\mathfrak{r}(ac)$ e $\mathfrak{r}(ab)$, e quindi — pel precedente ragionamento — dovrebbero tutti esser fissi per la congruenza considerata: la $\mathfrak{r}(am)$ sarebbe cioè retta di punti fissi, contro l'ipotesi.

Lemma 4. — " Sempre nell'ipotesi di una congruenza che tenga fermi tutti i " punti di due rette concorrenti, ciascuna retta del loro piano, passante pel loro punto " comune, che la congruenza non trasformi in sè, incontra tutte le congiungenti i " punti delle due rette fisse, fatta al più eccezione per una di queste congiungenti " per ciascun punto delle rette fisse „. Siano sempre $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ le due rette di punti fissi, $\mathfrak{r}(am)$ la retta considerata, che la congruenza sposta. Intanto esistono congiungenti *b* con punti di $\mathfrak{r}(ac)$ o *c* con punti di $\mathfrak{r}(ab)$ che incontrano questa retta (basta per accertarsene considerare il piano come $\mathfrak{p}(abc)$). Con una conveniente scelta di b e di c sulle $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ si può dunque supporre che $\mathfrak{r}(bc)$ incontri $\mathfrak{r}(am)$. Il punto d'incontro sarà spostato dalla congruenza, poichè $\mathfrak{r}(am)$ è spostata. Siano d ed e due altri punti rispettivamente di $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$, distinti entrambi da a, b e c, e si consideri il piano come $\mathfrak{p}(ade)$: o $\mathfrak{r}(am)$ sarà la congiungente a con un punto di $\mathfrak{r}(de)$, nel qual caso essa incontra $\mathfrak{r}(de)$ — ovvero i suoi punti staranno tutti su congiungenti d ed e rispettivamente con punti di $\mathfrak{r}(ac)$ e di $\mathfrak{r}(ab)$. Ma il punto che $\mathfrak{r}(am)$ ha su $\mathfrak{r}(bc)$ non può esser di tal fatta, perchè, essendo mobile, non può stare su alcun'altra retta congiungente punti di $\mathfrak{r}(ab)$ o di $\mathfrak{r}(ac)$ (*Lemma* 2). $\mathfrak{r}(am)$ deve dunque incontrare $\mathfrak{r}(de)$. — Si noti che, scelto arbitrariamente $d \neq b$ su $\mathfrak{r}(ab)$, e è un punto arbitrario di $\mathfrak{r}(ac)$, purchè diverso da c; dunque $\mathfrak{r}(am)$ incontra ciascuna congiungente d con punti di $\mathfrak{r}(ac)$, fatta al più eccezione per la $\mathfrak{r}(dc)$. Riguardo a questa possibile eccezione si deve aggiungere:

Lemma 5. — " Sempre nelle ipotesi del lemma precedente, se delle rette $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ " una almeno contiene più di tre punti, ogni retta del piano, passante pel punto a, " che la congruenza sposti, incontrerà tutte le congiungenti i punti di $\mathfrak{r}(ab)$ con " quelli di $\mathfrak{r}(ac)$ ". Perchè la dimostrazione precedente cadeva in difetto solo quando si trattava di mostrare che dalla $\mathfrak{r}(am)$ fossero incontrate le $\mathfrak{r}(dc)$, $\mathfrak{r}(be)$. Ma se esiste, p. es., su $\mathfrak{r}(ab)$ un punto f distinto da a, b, d, si proverà allo stesso modo che $\mathfrak{r}(am)$ deve incontrare $\mathfrak{r}(fe)$ e quindi, cambiando nella precedente dimostrazione b in f, c in e, e in c, si concluderà che anche $\mathfrak{r}(dc)$ è incontrata da $\mathfrak{r}(am)$; o cambiandovi allora b in d e d in b, si avrà che anche $\mathfrak{r}(be)$ è incontrata da $\mathfrak{r}(am)$.

Osserviamo che ogni retta contiene almeno tre punti, perchè almeno tre punti contiene ogni catena; si ha allora il

Lemma 6. — " Se per un punto a del piano passano due rette $\mathfrak{r}(abd)$, $\mathfrak{r}(ace)$ " costituite ciascuna da tre soli punti, le rette $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(be)$, $\mathfrak{r}(dc)$, $\mathfrak{r}(de)$ sono tutte incon- " trate da ciascuna retta per a che contenga più di tre punti; e fra le coppie di " rette $\mathfrak{r}(bc)\,\mathfrak{r}(de)$, $\mathfrak{r}(be)\,\mathfrak{r}(dc)$, almeno una è incontrata da tutte le rette per a, fatta al " più eccezione per una " (¹). Si consideri infatti il piano come $\mathfrak{p}(abc)$. I punti del piano staranno tutti su $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(be)$, $\mathfrak{r}(cd)$ e sulle projettanti da a punti di $\mathfrak{r}(bc)$; se dunque una retta per a contiene più di tre punti, deve forzatamente incontrare $\mathfrak{r}(bc)$. Considerando d'altra parte il piano come $\mathfrak{p}(adc)$ o $\mathfrak{p}(abe)$ o $\mathfrak{p}(ade)$ si riconosce similmente che le rette per a di più di tre punti incontrano $\mathfrak{r}(dc)$, $\mathfrak{r}(be)$, $\mathfrak{r}(de)$. — Una retta per a che contenga tre soli punti potrà invece non incontrare alcune di queste rette, ma se essa taglia $\mathfrak{r}(bc)$ dovrà incontrare $\mathfrak{r}(de)$; si consideri infatti il piano come $\mathfrak{p}(ade)$: i punti di $\mathfrak{r}(bc)$ non possono appartenere a questo piano che in quanto stanno su rette projettanti da a punti di $\mathfrak{r}(de)$ (in particolare, uno di essi può eventualmente appartenere a $\mathfrak{r}(de)$): la retta proposta dovrà dunque essere una tal projettante Se eventualmente la retta proposta passasse pel punto comune — supposto che esista — a $\mathfrak{r}(bc)$ e a $\mathfrak{r}(de)$, basterebbe considerare il piano come $\mathfrak{p}(abe)$ per concludere che il suo terzo punto dovrebbe appartenere a $\mathfrak{r}(be)$; ed allora si concluderebbe come or ora che essa deve tagliare $\mathfrak{r}(cd)$ in un punto che, data l'esistenza di tre soli punti sulla retta, non potrebbe differire da quello. — Tolto questo caso, dunque,

(¹) Cfr. n. 31.

con una conveniente attribuzione dei nomi b, c, d, e, si può ritenere che un punto della retta è a, un altro sta su $\mathfrak{r}(bc)$, il terzo su $\mathfrak{r}(de)$.

Si supponga ora che una retta $\mathfrak{r}(amn)$ non contenga che tre punti e precisamente m ed n stiano rispettivamente su $\mathfrak{r}(bc)$ e su $\mathfrak{r}(de)$: si consideri il piano come $\mathfrak{p}(abm)$: i punti del piano staranno sulle $\mathfrak{r}(bm) = \mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(bn)$, $\mathfrak{r}(dm)$ e sulle projettanti da a punti di $\mathfrak{r}(bc)$: poichè $\mathfrak{r}(bn)$ e $\mathfrak{r}(dm)$ non possono avere con $\mathfrak{r}(be)$ e $\mathfrak{r}(dc)$ altri punti comuni che b e d, ed eventualmente i punti h e k d'intersezione rispettivamente di $\mathfrak{r}(be)$ con $\mathfrak{r}(dm)$ e di $\mathfrak{r}(dc)$ con $\mathfrak{r}(bn)$, da questo piano sarebbero escluse le rette che incontrassero $\mathfrak{r}(be)$ e $\mathfrak{r}(dc)$ fuori di h e k e non incontrassero $\mathfrak{r}(bc)$, assurdo (n° 8): tutte queste rette debbono dunque incontrare $\mathfrak{r}(bc)$ e quindi $\mathfrak{r}(de)$; infine non fanno eccezione nemmeno le $\mathfrak{r}(ah)$, $\mathfrak{r}(ak)$, se esse sono distinte, perchè non potrebbero esse possedere un terzo punto senza incontrare $\mathfrak{r}(bc)$ (si consideri sempre il piano come $\mathfrak{p}(abm)$).

L'eccezione non si elimina senz'altro se si suppongono h e k allineati con a e si suppone che $\mathfrak{r}(ahk)$ non contenga altri punti. Però in tale ipotesi basta ripetere il medesimo ragionamento su $\mathfrak{p}(abh)$ per concludere che ogni retta per a diversa da $\mathfrak{r}(amn)$ e da $\mathfrak{r}(ahk)$ incontrerebbe le quattro rette $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(be)$, $\mathfrak{r}(cd)$, $\mathfrak{r}(de)$ e conterrebbe con ciò più di tre punti. " Basta affermare l'esistenza di due rette per a costituite da soli " tre punti, diverse da $\mathfrak{r}(ab)$ e da $\mathfrak{r}(ac)$ ed aventi i loro punti diversi da a sulla stessa " coppia di rette $\mathfrak{r}(bc)$ $\mathfrak{r}(de)$ o $\mathfrak{r}(be)$ $\mathfrak{r}(dc)$ perchè sia esclusa anche l'esistenza di quella " retta eccezionale e si possa asserire che tutte le rette per a nel piano incontrano " quella medesima coppia di rette „.

Tr. 1. " Un ribaltamento di un piano intorno ad una sua retta r non può lasciar " fermo alcun punto aderente ad r „.

Pel lemma 1 questa proposizione equivale a dire che quel ribaltamento non può lasciar fermi tutti i punti di una retta concorrente con r. Noi supporremo appunto che per uno stesso ribaltamento μ siano rette di punti fissi due rette $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ concorrenti in un punto a e mostreremo l'assurdo di questa ipotesi.

Osserviamo anzitutto che per a passa certamente qualche retta i cui punti non sono tutti fissi per μ: tale è ogni retta che congiunga a con un punto mobile per μ; ma di più si potrà supporre che non siano trasformate in se stesse tutte le rette per a. Infatti μ trasforma $\mathfrak{r}(bc)$ in se stessa; se non lascia fissi tutti i suoi punti, ogni retta congiungente a con un punto mobile di $\mathfrak{r}(bc)$ è trasformata da μ in un'*altra* retta per a; se invece $\mathfrak{r}(bc)$ si suppone retta di punti fissi per μ, si osservi che ogni punto che sia congiunto così ad a come a b da rette che μ trasforma in sè, resta fisso per μ; se dunque qualche punto del piano si sposta per μ, almeno per uno dei punti a, b passano rette che μ non trasforma in se stesse. Siccome tanto a quanto b sono punti di concorso di due rette di punti fissi per μ, si potrà chiamare a quello per cui passa qualche retta che μ non trasforma in se stessa. — Ciò posto distinguiamo due ipotesi:

1ª ipotesi. " Si suppone che per a passino due sole rette di punti fissi e che " di esse una almeno contenga più di tre punti, ovvero che ne passino quante si " vogliano e due almeno di esse contengano più di tre punti „. Siano $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ le due rette fisse nel 1° caso, le due rette fisse di più di tre punti nel 2°. Tutte le congiungenti punti di queste due rette incontrano ciascuna retta per a che non sia per μ retta di punti fissi (lemmi 3, 4, 5). Si può ritenere che fra queste congiungenti ve ne siano di quelle i cui punti siano spostati da μ, ciò equivalendo ad ammettere, come si mostrò potersi fare, che passino per a rette che μ sposti. Ma allora, poichè tutte queste rette mobili incontrano ciascuna di quelle congiungenti, ciascuna di tali congiungenti possiede punti mobili per μ, e μ induce su ciascuna un ribaltamento intorno ai suoi punti fissi su $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$. Consideriamo in particolare $\mathfrak{r}(bc)$: b e c non saranno fra loro coerenti. Sia $m \in b/c$; m è aderente a b e a c e sarà spostato da μ e portato in $m' = m/_b = m/_c$ (cfr. 6 t. 6 e passim); $\mathfrak{r}(am)$ è quindi spostata da μ ed incontra perciò (a cagion dell'ipotesi) tutte le congiungenti punti di $\mathfrak{r}(ab)$ con punti di $\mathfrak{r}(ac)$. Sia ν un ribaltamento del piano intorno a $\mathfrak{r}(am)$; esso dovrà spostare il punto b: nell'ipotesi contraria resterebbero infatti fissi per ν tutti i punti di $\mathfrak{r}(bc)$ (poichè b è aderente ad m); le rette $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ si trasformerebbero in se stesse per ν, e siccome ν non può trasformare le congiungenti punti di queste due rette (le quali tutte incontrano $\mathfrak{r}(am)$) in *altre* simili congiungenti che seghino $\mathfrak{r}(am)$ negli stessi punti (lemma 2), tutti i punti di $\mathfrak{r}(ab)$ e di $\mathfrak{r}(ac)$ resterebbero fissi per ν. Tal conclusione è assurda perchè, siccome $\mathfrak{r}(bc)$ contiene almeno 4 punti: b, c, m, m', tutte le congiungenti punti di $\mathfrak{r}(am)$ e di $\mathfrak{r}(bc)$, in particolare $\mathfrak{r}(ab)$, debbono incontrare le rette per m, mobili per ν: tali rette mobili passanti per m sarebbero dunque escluse. Lo stesso avverrebbe considerando le rette per b: ora, che non tutte le rette per due diversi punti fissi possano trasformarsi in se stesse per uno stesso ribaltamento, fu osservato già nelle linee precedenti.

Ritenuto dunque che ν sposta b e $\mathfrak{r}(ab)$, osserveremo ancora che una almeno delle rette $\nu\,\mathfrak{r}(ab)$, $\nu\,\mathfrak{r}(ac)$ sarà retta di punti fissi per μ. Difatti, se ν trasforma $\mathfrak{r}(bc)$ in se stessa, scambia fra loro b e c e quindi $\mathfrak{r}(ab)$ e $\mathfrak{r}(ac)$; se poi ν e quindi il ribaltamento inverso $\bar{\nu}$ non mutano $\mathfrak{r}(bc)$ in se stessa, la retta $\bar{\nu}\,\mathfrak{r}(bc)$, avendo a comune con $\mathfrak{r}(bc)$ il punto m, mobile per μ, non potrà incontrare entrambe le $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ (lemma 2): quindi non entrambe le $\nu\,\mathfrak{r}(ab)$, $\nu\,\mathfrak{r}(ac)$ incontrano $\mathfrak{r}(bc)$ ed una almeno di esse è retta di punti fissi (lemmi 3, 4, 5). Sia questa la $\nu\,\mathfrak{r}(ab)$ e sia $\nu b = c'$; si noti che questa retta, non incontrando $\mathfrak{r}(bc)$, sarà certo distinta da $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$: allora per a passano più di due rette di punti fissi ed è quindi esclusa la prima parte dell'ipotesi. Conservando allora solo la seconda parte, la retta $\mathfrak{r}(ab)$, e quindi la $\nu\,\mathfrak{r}(ab)$ possiederà più di tre punti; $\mathfrak{r}(bc')$, congiungendo punti di due rette fisse di più di tre punti concorrenti in a, incontrerà $\mathfrak{r}(am)$ in un punto n, che ν lascia fermo. Quindi $\mathfrak{r}(bc')$ sarà convertita in se stessa da ν: chiamando dunque, al bisogno, m il punto n, c il punto c', si può ritenere che ν induce un ribaltamento su $\mathfrak{r}(bc)$ e scambia quindi fra loro $\mathfrak{r}(ab)$ e $\mathfrak{r}(ac)$. Sia d un punto di $\mathfrak{r}(ab)$ diverso da a e da b e sia $e = \nu d$: e apparterrà a $\mathfrak{r}(ac)$. Sarà $\nu\,\mathfrak{r}(be) = \mathfrak{r}(cd)$. Allora, siccome $\mathfrak{r}(be)$ e $\mathfrak{r}(cd)$ incontrano $\mathfrak{r}(am)$, dovranno passare per lo stesso punto di questa retta contro il lemma 2.

2ª ipotesi. " Si suppone che il ribaltamento μ tenga fisse due rette $\mathfrak{r}(abd)$, $\mathfrak{r}(ace)$ " passanti per a, costituite ciascuna da tre soli punti ".

a) Escluderemo anzitutto la possibilità del caso eccezionale del lemma 6, quando l'ipotesi enunciata dovesse verificarsi. Si ricordi perciò un'osservazione preliminare per la quale esistono rette per a che μ sposta. Se una tal retta contiene tre soli punti, la sua trasformata possiederà ancora tre soli punti, e, poichè $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(be)$, $\mathfrak{r}(dc)$, $\mathfrak{r}(de)$ son trasformate da μ in se stesse, quelle due fra queste rette su cui stanno i due punti diversi da a della prima (lemma 6) contengono pure quelli della seconda, onde il caso eccezionale è escluso per un'osservazione finale del lemma 6. — Se poi quella retta mobile contiene più di 3 punti, taglia ciascuna delle 4 rette nominate (lemma 6); ciascuna di esse possiede quindi punti mobili per μ, e μ vi induce un ribaltamento; ciascuna possiede, ancora perciò, più di tre punti. Sia $m \epsilon b|c$, $n \epsilon b|m$; m ed n sono aderenti a b e c; sia $\mu n = n'$; siano ν e ν' due ribaltamenti intorno a $\mathfrak{r}(an)$, $\mathfrak{r}(an')$; essi spostano certamente b e c, poichè si suppone che quelle rette contengano più di tre punti; altrimenti avrebbero anche $\mathfrak{r}(bc) = \mathfrak{r}(bn) = \mathfrak{r}(bn')$ come retta di punti fissi e si troverebbero nella prima ipotesi. E poichè non è $b = c/_n$, quei due punti non possono scambiarsi per detti ribaltamenti. Si osservi che si può assumere (¹) $\nu' = \mu\nu\mu^{-1}$; se allora si suppone che ν e ν' trasformino $\mathfrak{r}(bc)$ in se stessa, si riottengono due rette per a [$\mathfrak{r}(am)$ e $\mu\mathfrak{r}(am)$ trasformate di $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ per ν o ν'] di tre soli punti, diverse da $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$, e appoggiate a $\mathfrak{r}(bc)$: si applica di nuovo l' osservazione finale del lemma 6. Se invece si suppone che $\nu\mathfrak{r}(bc) \neq \mathfrak{r}(bc)$ sarà $\nu\mathfrak{r}(bc) \neq \nu'\mathfrak{r}(bc)$, perchè le due rette passano l'una per n, l'altra per n' e, se coincidessero, dovrebbero coincidere con $\mathfrak{r}(bc)$. Uno almeno dei due punti b e c è dunque trasformato in punti diversi da ν e da ν': sia b e si ponga $\nu b = b_1$, $\nu' b = b_1' \neq b_1$; sarà $\mu\nu\mu^{-1}b = \mu b_1 = b_1'$; dunque b_1 è spostato da μ; inoltre ciascuna delle rette $\mathfrak{r}(ab_1)$, $\mathfrak{r}(ab_1')$ è diversa dalle $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$. Poichè $\mathfrak{r}(ab_1)$ possiede tre soli punti, b_1 sta su una delle rette $\mathfrak{r}(dc)$, $\mathfrak{r}(de)$, $\mathfrak{r}(be)$ (pel lemma 6 e perchè $\mathfrak{r}(b_1 n) \neq \mathfrak{r}(bn)$); queste si trasformano in sè per μ, dunque b_1' sta sulla medesima retta e così $\mathfrak{r}(ab_1') \neq \mathfrak{r}(ab_1)$ e si determina ancora una quaterna di rette di tre punti per a, appoggiate tutte ad una stessa delle quattro rette che congiungono i punti b, d ai punti c, e, onde si esclude come sopra il caso eccezionale.

b) Fra le due coppie di rette $\mathfrak{r}(bc)\,\mathfrak{r}(de)$, $\mathfrak{r}(be)\,\mathfrak{r}(dc)$ una è dunque caratterizzata dal fatto che ad essa si appoggiano tutte le rette di soli tre punti passanti per a (rette che il precedente ragionamento mostra essere almeno 4). Sia $\mathfrak{r}(bc)\,\mathfrak{r}(de)$; essa sarà incontrata da *tutte* le rette per a (lemma 6). Ogni ribaltamento intorno ad una retta per a trasforma questa coppia in se stessa, e quindi in se stessa ciascuna delle due rette, a meno che quella retta passi per l'eventuale punto i comune alle due rette, nel qual caso potrebbe scambiarle. Ma tal punto i non esiste; infatti, qualora esistesse, un ribaltamento intorno alla congiungente a con un punto di $\mathfrak{r}(bc)$ aderente ad i dovrebbe tener fisse le due rette $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(de)$, il che, possedendo queste più di 3 punti, contraddice alle conclusioni ottenute nella 1ª ipotesi.

c) Dimostrerò infine che per a passano rette contenenti più di tre punti. — Ogni ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(bc)$ sposta a. Nella contraria ipotesi tal ribaltamento dovrebbe infatti tener fissi b, c, d, e e trasformare in se stesse $\mathfrak{r}(be)$ (e parimenti $\mathfrak{r}(de)$, $\mathfrak{r}(dc)$) e le rette per a (le quali tutte incontrano $\mathfrak{r}(bc)$). I punti di $\mathfrak{r}(be)$ starebbero così ciascuno su due rette che si trasformano in sè ($\mathfrak{r}(be)$ e la retta che li congiunge ad a) e sarebbero fissi. Se allora $\mathfrak{r}(be)$ si suppone di più di tre punti, il ribaltamento considerato si trova nella 1ª ipotesi, che si mostrò assurda. Se $\mathfrak{r}(be)$ si suppone di tre soli punti b, e, f, si consideri il piano come $\mathfrak{p}(abe)$: esso conterrà i soli punti a, b, d, c, e, f, e i punti delle rette $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(de)$, $\mathfrak{r}(af)$. Di tutti questi punti già si sa che essi sono fissi pel ribaltamento, meno che pei punti della $\mathfrak{r}(af)$. Ma ogni

(¹) Diciamo " si può assumere " perchè non è fin qui escluso che possano esistere più ribaltamenti del piano intorno ad una stessa retta.

retta che congiunga uno di questi punti con b deve possedere almeno un terzo punto, che non potrà stare altrove che su $\mathfrak{r}(de)$; sarà quindi fisso; così anche quella congiungente si trasforma in se pel ribaltamento e son perciò fissi anche i punti di $\mathfrak{r}(af)$. Il ribaltamento non esiste.

Sia dunque ρ un ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(bc)$, ρa non può essere contemporaneamente d od e; scambiando all'occorrenza i nomi b e c, d ed e, si può dunque supporre $\rho a \neq d$, $\rho d \neq a$. Si ponga $\rho a = a'$, $\rho d = d'$, $\mathfrak{r}(a'bd')$, trasformata di $\mathfrak{r}(abd)$, sarà retta di 3 soli punti passante per b. Ciascuna delle rette $\mathfrak{r}(aa')$, $\mathfrak{r}(ad')$ è dunque incontrata da ogni retta per b che possegga più di tre punti (lemma 6), in particolare da $\mathfrak{r}(bc)$.

Uno almeno dei punti a', d' non sta su $\mathfrak{r}(de)$, altrimenti non potrebbe $\mathfrak{r}(a'd')$ passare per b; sia esso a'. *La retta* $\mathfrak{r}(aa')$ dovendo segare $\mathfrak{r}(bc)$ e quindi $\mathfrak{r}(de)$ (lemma 6) *conterrà più di 3 punti.*

Sia p il punto d'intersezione di $\mathfrak{r}(aa')$, $\mathfrak{r}(bc)$ e sia $q\epsilon b|p$. Un ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(aq)$ trasforma in sè la $\mathfrak{r}(bc)$ (b)) e la ribalta quindi intorno a q, scambiando b e p, $\mathfrak{r}(ab)$ e $\mathfrak{r}(ap)$. Ora ciò contraddice all'ipotesi che $\mathfrak{r}(ab)$ non possegga più di tre punti mentre $\mathfrak{r}(ap) = \mathfrak{r}(aa')$ possiede almeno quattro punti.

Tr. 2. — " Una congruenza non può muovere qualche punto di un piano e lasciar " fissi tre suoi punti non allineati di cui uno sia aderente agli altri due ". Perchè lascierebbe fisse le due rette che congiungono quel punto a questi.

Tr. 3. — " Se una congruenza trasforma una retta r ed un punto a ad essa " aderente nella retta r' e nel punto a', trasforma ogni simmetrico di a rispetto ad r " in un simmetrico di a' rispetto ad r' ".

10. I ribaltamenti del piano. — ***Post.*** XIX. — **Un punto non ha più di un simmetrico rispetto ad una retta.** — *Nei riguardi della sola trasformazione del piano* (¹) " tutti i ribaltamenti di un piano intorno ad una stessa sua retta sono " fra loro identici ".

Def. 1. — Se r è una retta del piano che si considera, si indicherà con ρ_r la trasformazione del piano determinata da ogni ribaltamento intorno ad r. Non altrimenti, la si indicherà con ρ_{ab} se la retta è individuata come $\mathfrak{r}(ab)$.

Tr. 1. — " Se $\rho_r a = a'$, sarà $\rho_r a' = a$ e ρ_r trasforma la retta $\mathfrak{r}(aa')$ in se stessa ". Ogni ribaltamento trasforma cioè il piano involutoriamente.

Def. 2. — Si esprimerà che la retta s è trasformata in se stessa da ρ_r, ma non è per ρ_r retta di punti fissi, dicendo che s è perpendicolare ad r; in simboli si scriverà $s \perp r$.

Tr. 2. — " Se s è una retta perpendicolare ad r, si ha $\rho_s = \rho_r \rho_s \rho_r$ ". Ribaltamenti intorno a rette perpendicolari sono, cioè, commutabili. Infatti, se a è un punto di s e se $a' = \rho_r a$, sarà $\rho_s a' = a'$, $\rho_r a' = a$; quindi $\rho_r \rho_s \rho_r a = a$; d'altra parte la trasformazione $\rho_r \rho_s \rho_r$ non è l'identità, perchè se b è un punto aderente ad s e $b' = \rho_r b$, anche b' sarà aderente ad s ed allora $\rho_s b' \neq b'$ e $\rho_r \rho_s \rho_r b = \rho_r \rho_s b' \neq b$.

Tr. 3. — " Sempre nell'ipotesi che $s \perp r$, se a, b, a', b' sono punti del piano tali " che $a' = \rho_s a$, $b = \rho_r a$, $b' = \rho_r a'$, sarà $b' = \rho_s b$ ". Perchè $\rho_r \rho_s \rho_r b = b'$.

(¹) E tutto quanto si dirà in questo e nel seguente numero sarà sempre inteso *nei riguardi della sola trasformazione del piano.*

Tr. 4. — " Nella stessa ipotesi rispetto alle rette r ed s, se a è un punto fisso " per ρ_r, anche $\rho_s a$ sarà punto fisso per ρ_r „. Perchè allora $\rho_r\rho_s\rho_r a = \rho_r\rho_s a$ e, pel teor. 2, — $\rho_s a$.

Lemma 1. — " Se la retta s è perpendicolare alla r e la incontra in un punto, sarà pure $r \perp s$ „. Infatti ρ_s converte r in una retta di punti fissi per ρ_r (t. 4), la quale passa pel punto comune a r e s; ma ρ_r non può tener fisse due rette concorrenti (9 t. 1); quindi $\rho_s r = r$; d'altra parte r non è retta di punti fissi per ρ_s, poichè incontra s; dunque $r \perp s$.

Lemma 2. — " Se la retta s è perpendicolare alla r e la incontra in un punto o, " ogni altra retta per o perpendicolare ad r sarà pure perpendicolare ad s „. Si supponga che t sia una perpendicolare ad r nel punto o: ρ_s e ρ_t convertono ciascuna r in una retta di punti fissi per ρ_r (t. 4) la quale dovrebbe passare per o, fisso in ciascuno di questi ribaltamenti; ma non esistono due rette concorrenti fisse per uno stesso ribaltamento (9 t. 1); quindi $\rho_s r = r$, $\rho_t r = r$; e poichè in queste trasformazioni di r il punto o resta fisso, i due ribaltamenti ρ_s, ρ_t determinano su r lo stesso ribaltamento. $\rho_s\rho_t$ lascia quindi fissi i punti di r, mentre sposta i punti di t e di s (giacchè ρ_s non può lasciar fissi i punti di t e ρ_t non quelli di s (9 t. 1)); così $\rho_s\rho_t = \rho_r$. Siccome $\rho_r t = t$ sarà $\rho_s\rho_t t = \rho_r t = t$; cioè $t \perp s$.

Lemma 3. — " È assurda l'ipotesi che tre rette differenti siano perpendicolari " in uno stesso punto ad una stessa retta „. Perchè se s, t, u fossero tre perpendicolari ad r che le incontrasse tutte in o, in forza del lemma 2, $\rho_s\rho_t$ terrebbe fissi tutti i punti di r e di u, mentre sposterebbe punti di s e di t; assurdo (9 t. 1).

Tr. 5. — " Il ribaltamento intorno ad una retta non può tener fisso più di un " punto non appartenente alla retta „. Sia r la retta, f, g due punti non appartenenti ad r e fissi per ρ_r. Poichè r ha almeno tre punti, esistono almeno tre congiungenti f con punti di r. g sarà spostato dal ribaltamento intorno ad una almeno di esse. Se infatti esse sono tutte distinte da $\mathfrak{r}(fg)$ e se il ribaltamento attorno a ciascuna di esse lasciasse fisso g, a ciascuna di queste rette $\mathfrak{r}(fg)$ sarebbe perpendicolare; e poichè tutte incontrano $\mathfrak{r}(fg)$, ciascuna sarebbe perpendicolare a $\mathfrak{r}(fg)$ (lemma 1) e ciò è mostrato assurdo dal lemma 3.

Se poi una di quelle rette è $\mathfrak{r}(fg)$ medesima, $\mathfrak{r}(fg)$ incontra r ed una di quelle rette si può sempre supporre passare per un punto di r aderente a questo punto d'intersezione. Il ribaltamento intorno ad essa converte questa intersezione in un altro punto di r e quindi $\mathfrak{r}(fg)$ in un'altra retta per f e g in un altro punto.

Ciascuna di quelle rette è $\perp r$, e perciò il ribaltamento intorno ad essa porta g in un altro punto g' fisso per ρ_r (t. 4). Se ora r ha più di tre punti, un suo punto è certamente fuori delle $\mathfrak{r}(fg)$, $\mathfrak{r}(fg')$, $\mathfrak{r}(gg')$ ed i tre punti f, g, g' son projettati da esso secondo tre perpendicolari distinte alla r contro il lemma 3. Se poi r ha tre soli punti h, k, l e si ammette che pei primi due, h e k, passino le $\mathfrak{r}(fg)$, $\mathfrak{r}(fg')$ e che i punti g e g' si corrispondano pel ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(fl)$, la retta $\mathfrak{r}(gg')$ non può passare per l; altrimenti, poichè l è fisso per ρ_{fl} che scambia g e g', sarebbe $l \epsilon g|g'$ e quindi g aderente ad l e ad r, contro l'ipotesi che g sia fisso per ρ_r (9 t. 1). Anche allora quindi le rette che da l projettano f, g, g' sarebbero distinte $\perp r$, il che il lemma 3 esclude.

Tr. 6. — “ Se $s \perp r$ sarà pure $r \perp s$ „. Si operi infatti ρ_s. La retta $\rho_s r$ è retta di punti fissi per ρ_r (t. 4); il teor. 5 esclude allora che essa possa essere distinta da r.

Tr. 7. — “ Due rette concorrenti non possono avere due perpendicolari comuni „. Infatti il ribaltamento intorno a ognuna di tali perpendicolari dovrebbe muovere l'altra (t. 5) e mutare ciascuna di quelle rette in se stessa e dovrebbe quindi tener fisso il punto di concorso e indurre su ciascuna di quelle rette il ribaltamento intorno ad esso. Il prodotto dei due ribaltamenti dovrebbe tener fisse quelle due rette e spostare gli assi dei due ribaltamenti contro il teor. 1 del n° 9.

Tr. 8. — “ Se ad una retta r esiste una perpendicolare che la incontri: 1° qua-
“ lunque sia la retta $s \perp r$ i due ribaltamenti ρ_r, ρ_s hanno almeno un punto fisso
“ comune; 2° ρ_r determina sulla retta s un ribaltamento, e parimenti ρ_s sulla r „.

1° Siccome fuori di r e di s rispettivamente esiste al più un punto fisso sia per ρ_r sia per ρ_s, esiste certamente un punto a che è spostato da ρ_r e da ρ_s. Posto $\rho_s a = a'$, $\rho_r a = b$, $\rho_r a' = \rho_s b = b'$ (t. 3), si può supporre inoltre che i tre punti $a\,b\,b'$ non siano allineati: infatti, se t è la retta $\perp r$ che per ipotesi incontra r in un punto o: o si verifica che non è $t \perp s$, — e si soddisferà detta condizione prendendo a su t —, ovvero si verifica che $t \perp s$, — ed allora $\rho_r \rho_s = \rho_t$ e un'altra perpendicolare qualunque ad r non potrà essere $\perp s$, altrimenti sarebbe convertita in se stessa da ρ_t e sarebbe cioè anche $\perp t$, contro il t. 7: basterà allora assumere a fuori di t perchè $a\,b\,b'$ non siano allineati. — Si consideri allora il piano $\mathfrak{p}(abb')$. Il punto a' si troverà: o su una congiungente a con punti di $\mathfrak{r}(bb')$, o su una congiungente b con punti di $\mathfrak{r}(ab')$, o su una congiungente b' con punti di $\mathfrak{r}(ab)$. Nel 1° caso s'incontrano le $\mathfrak{r}(aa')$, $\mathfrak{r}(bb')$, e poichè ρ_s converte in se stessa ciascuna di queste rette, e ρ_r le scambia, ρ_r e ρ_s ne lasciano fisso il punto comune; nel 2° caso s'incontrano $\mathfrak{r}(a'b)$ e $\mathfrak{r}(ab')$ che così ρ_r come ρ_s scambiano lasciandone fisso il punto comune; nel 3° caso resterà fisso il punto comune a $\mathfrak{r}(a'b')$, $\mathfrak{r}(ab)$, come si vede ragionando come nel 1° caso, previo lo scambio di ρ_r e ρ_s.

2° Se r ed s s'incontrano, è evidente che ρ_r determina su s il ribaltamento intorno al punto comune.

Se r ed s non s'incontrano, ogni punto fisso comune a ρ_s e ρ_r sarà esterno ad una almeno delle due rette. Si consideri uno di questi punti fissi: se appartiene a s è di nuovo immediato che ρ_r induce su s un ribaltamento. Si supponga quindi che un tal punto fisso comune sia f e non appartenga ad s. Siano a, a' due punti di s scambiati da ρ_r (necessariamente non coerenti nell'ipotesi che s non subisca un ribaltamento). Sia $m \epsilon a|a'$ e sia $m' = m/_a = m/_{a'}$ (6 t. 6): sarà $m' = \rho_r m$, se m non è fisso per ρ_r. Si consideri la congruenza $\rho_{fm}\rho_{fa}\rho_r$. ρ_r porta $aa'm$ in $a'am'$ e scambia $\mathfrak{r}(fa)$ e $\mathfrak{r}(fa')$. Inoltre, siccome ρ_s converte in se stesse le rette per f e per un punto della s medesima, le $\mathfrak{r}(fm)$, $\mathfrak{r}(fa)$, $\mathfrak{r}(fa')$ sono $\perp s$. Allora ρ_{fa} porta $a'am'$ in $a'am$ (t. 6), tien fissa $\mathfrak{r}(fa)$ e ribalta $\mathfrak{r}(fa')$ intorno ad f. Infine ρ_{fm} porta $a'am$ di nuovo in $aa'm$ e scambia $\mathfrak{r}(fa)$ e $\mathfrak{r}(fa')$. Segno che $\rho_{fm}\rho_{fa}\rho_r$ lascia fissa s, e converte in se stesse $\mathfrak{r}(fa)$, $\mathfrak{r}(fa')$. Ora può supporsi che ρ_{fm} riportando $\mathfrak{r}(fa)$ in $\mathfrak{r}(fa')$ e viceversa stabilisca fra i loro punti la stessa corrispondenza che ρ_r ovvero stabilisca la corrispondenza prodotto di questa e del ribaltamento di una di esse rette intorno ad f. Nella prima ipotesi $\rho_{fm}\rho_{fa}\rho_r$ ribalta $\mathfrak{r}(fa)$ e tien fissa $\mathfrak{r}(fa')$, nella seconda tien fissa $\mathfrak{r}(fa)$ e ribalta $\mathfrak{r}(fa')$: nell'una e nell'altra tiene fissa s e un'altra retta; si contraddice così al teor. 1 del n° 9. Onde l'assurdo dell'ipotesi che s non si ribalti. Si vede così che: " Se s non incontra r esiste certo un punto fisso per ρ_r fuori di r (su s) — ed uno solo a cagione del teor. 5 „.

In tutto il ragionamento fatto in 2° si possono evidentemente scambiare r ed s.

Tr. 9. — " Per un punto di una retta r non passano due perpendicolari alla " retta medesima „. Sia o un punto di r per cui passino, per assurdo, due rette s, t entrambe $\perp r$. Sarà $t \perp s$ (lemma 2). Notiamo che ci troviamo nelle ipotesi contemplate nel prec. teor. È $\rho_t = \rho_r \rho_s$ e il punto fisso comune a ρ_r, ρ_s è quindi ancora fisso per ρ_t: e siccome per esso passa una delle $\mathfrak{r}(aa')$, $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ab')$ (t. 8-1°) e d'altronde $a' = \rho_s a$, $b = \rho_r a$, $b' = \rho_r a' = \rho_t a$, passa per quel punto fisso una retta — che si può sempre ritenere distinta da r, s, t — perpendicolare a una di queste rette. Questo punto non può dunque essere o (lemmi 2 e 3). Sia allora distinto da o: esso sarà fuori di due almeno delle rette r, s, t, ma non potrà essere fuori di tutte tre perchè la retta che lo congiunge ad o sarebbe allora perpendicolare a ciascuna di queste, contro il lemma 3. Sia dunque p e stia su r. Sia n un punto di s e sia m un punto di $\mathfrak{r}(pn)$ aderente a p (¹). $\rho_s m$ è un punto di $\mathfrak{r}(pn)$ diverso da m. Sia $\rho_r \rho_s m = m'$; sarà $m' = \rho_t m$. m' non starà più in $\mathfrak{r}(pn)$; altrimenti dovrebbe essere $m' = m$ contro il teor. 5. $\mathfrak{r}(mm')$ ha dunque un punto fisso per ρ_t (t. 8) diverso da p, appartenente quindi a t (t. 5), e diverso da o se non si vuole che per o passino tre perpendicolari a t (lemma 3). Sia q e sia $n' = n/_o$ il punto d'intersezione di s con $\mathfrak{r}(pm')$: $\mathfrak{r}(pq)$ e $\mathfrak{r}(mm')$ sono $\perp t$ e passano entrambe per q; quindi $\mathfrak{r}(pq) \perp \mathfrak{r}(mm')$ (lemma 2); onde ρ_{pq} scambia m e m', $\mathfrak{r}(pm)$ e $\mathfrak{r}(pm')$, n ed n'. E cioè $\mathfrak{r}(pq) \perp s$. Le due rette s e t avrebbero due perpendicolari comuni: r e $\mathfrak{r}(pq)$, contro il teor. 7.

Tr. 10. — " Se r è una retta del piano, ed esiste un punto f, non appartenente " ad r e fisso per ρ_r: — 1° Per ogni punto di r passa una ed una sola perpendi- " colare ad r. — 2° Ogni perpendicolare ad r passa per f ed ogni retta per f è ri- " baltata in se stessa da ρ_r ed è quindi $\perp r$. — 3° Ogni coppia di punti coerenti di " una retta per f ha due soli punti medi, se la retta incontra r, uno solo se non " incontra r. Su queste rette un cardine è quindi costituito al più da due punti, e " una coppia di punti non coerenti ha un solo cardine di punti medi „.

[Questo teorema completa e in certo modo inverte il teor. 8].

1° Sono $\perp r$ le congiungenti f coi punti di r: per ogni punto di r ne passa quindi una, ed altre $\perp r$ non passano per r in forza del teor. prec. — 2° Qualunque sia m, se $\rho_r m = m'$, $\mathfrak{r}(mm')$ passa per f: infatti essa deve avere almeno un punto fisso per ρ_r (t. 8) e se un tal punto non è f, deve stare su r (t. 5), e la retta che lo congiunge con f è $\perp r$ e non può differire dalla $\mathfrak{r}(mm')$ medesima (1°). Ogni retta per f è allora ribaltata da ρ_r perchè deve coincidere colla congiungente un suo punto qualunque col suo trasformato per ρ_r. — 3° ρ_r non tien fissi che f e i punti di r: quindi ogni coppia di punti coerenti simmetrici rispetto ad r ha due soli punti medi, se la sua retta incontra r, uno solo (f) se non la incontra: lo stesso avviene allora per ogni coppia di punti coerenti della retta (7 t. 5 e 6). Se sopra una retta un cardine è

(¹) Dal teor. 5 segue d'altronde che ogni punto di $\mathfrak{r}(pn)$ diverso da p e da n è aderente a ciascuno di questi punti.

costituito da un solo punto, non esistono sulla retta coppie di punti non coerenti: se è costituito da due punti a, a', la coppia aa' non può avere più di un cardine di punti medi: abbia infatti, se possibile, i due cardini mm', nn'; sia $p \epsilon m | n$, p' il punto non aderente a p: il ribaltamento della retta intorno al cardine pp' scambia i due cardini mm', nn'. Si ricordi ora (7 t. 9 e 8) che mm', aa' è la coppia dei cardini di punti medi di nn', e nn', aa' quella dei punti medi di mm'; quel ribaltamento scambia queste due coppie di cardini e converte quindi in se stesso il cardine aa' (cfr. n° 7 t. 9 e la nota relativa); e poichè a e a' sono aderenti a p e p', non li lascia fissi. La coppia aa' avrebbe così tre cardini di punti medi contro il teor. 8 del n° 7.

Tr. 11. — “ Ad ogni retta del piano esistono perpendicolari che l'incontrano „. Sia infatti r una retta del piano, s una retta ad essa perpendicolare. Può supporsi che s incontri r: la proposizione non ha allora più bisogno di prova; — ovvero che s non incontri r ma che ρ_s determini su r un ribaltamento: allora su r e fuori di s esiste un punto fisso comune ai due ribaltamenti ρ_r, ρ_s; il teor. 8-2° mostra allora che anche ρ_r induce su s un ribaltamento [1] ed esiste quindi su s, fuori di r un punto fisso per ρ_r, onde esistono rette $\perp r$ che la incontrano (t. 10); — ovvero può supporsi che ρ_s determini su r uno scorrimento che scambi fra loro punti a due a due non coerenti (6 t. 6). Sia a un punto di r: si può sempre ritenere di aver scelto come retta s una che passi per un punto p aderente ad a; sia a' il punto in cui a è portato da ρ_s, $b \epsilon a | a'$, $b' = b|_a = b|_{a'} = \rho_s b$. È $ab \equiv ab'$, $pb \equiv pb'$; quindi $pab \equiv pab'$. La congruenza che converte pab in pab' (IX) converte in sè $\mathfrak{p}(pab)$; e siccome p ed a sono coerenti, ha la retta $\mathfrak{r}(pa)$ come retta di punti fissi; questa congruenza è dunque un ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(pa)$ e converte d'altronde $\mathfrak{r}(bb') = r$ in se stessa. Così $\mathfrak{r}(pa) \perp r$ ed anche in questo caso è provata la tesi.

Questa proposizione, unita al teor. 8, permette di enunciare

Tr. 12. — “ Ogni ribaltamento del piano induce un ribaltamento su ogni per-“ pendicolare all'asse del ribaltamento „.

E unita al teor. 10 dà il

Tr. 13. — “ Su una retta esiste al più un punto non aderente a un suo punto “ qualunque: ogni cardine è costituito al più da due punti: ogni coppia di punti, “ coerenti o non, ha un solo cardine di punti medi „.

Tr. 14. — “ Ogni congruenza che tenga fisso un punto o e converta in se stessa “ una retta r aderente ad esso, converte in sè il piano $\mathfrak{p}(or)$ determinandovi un ri-“ baltamento intorno alla $\perp r$ per o „. Sia infatti t la $\perp r$ da o. Sia μ la trasformazione determinata nel piano dalla congruenza considerata; poichè $\mu r = r$, $\mu o = o$ sarà $\mu t = t$; d'altronde $\mu^{-1}\rho_r\mu = \rho_r$; quindi il punto fisso per ρ_r che t possiede (t. 12) è pur fisso per μ. Esso deve infatti esser convertito da μ in un punto fisso per ρ_r e non può quindi essere spostato (t. 5) se non appartiene ad r; ed anche in tale ipotesi, essendo comune a t e a r che μ converte in se stesso, è fisso per μ. Questo punto è inoltre aderente a o che ρ_r sposta. Quindi t è retta di punti fissi per μ: $\mu = \rho_t$.

---

[1] L'ipotesi della 2ª parte del teor. 8 era unicamente che esistesse un punto fisso comune ai due ribaltamenti ρ_r, ρ_s.

11. Ribaltamenti e rotazioni del piano. — *Tr.* 1. — “ Se $s \perp r$ e se r ed s “ non s'incontrano, il prodotto $\rho_r\rho_s$ è un ribaltamento. Se invece r ed s s'incontrano, “ il prodotto $\rho_r\rho_s$ è una congruenza che ribalta attorno al punto comune ogni retta “ passante per questo punto e appartenente al piano „. — 1° Se le due rette r ed s non s'incontrano, ciascuna di esse contiene un punto fisso pel ribaltamento intorno all'altra (10 t. 12). La congiungente questi due punti è convertita in se stessa da $\rho_r\rho_s$, e così ρ_r come ρ_s vi determinano il ribaltamento intorno al cardine costituito da quei due punti fissi: essa è quindi per $\rho_r\rho_s$ retta di punti fissi. $\rho_r\rho_s$ è il ribaltamento intorno ad essa. — 2° Se le due rette r ed s hanno a comune il punto o, potrà ancora avvenire che ciascuna di esse contenga un altro punto fisso pel ribaltamento intorno all'altra; $\rho_r\rho_s$ è allora ancora il ribaltamento dianzi determinato, ma questo ribaltamento tiene fisso il punto o e la tesi non differisce allora da quella del teor. 10-2° del n° prec.

Indipendentemente però da ogni ipotesi circa l'esistenza di quei punti fissi, valgono le seguenti considerazioni: Poichè i ribaltamenti sono congruenze involutorie, e sono fra loro commutabili nel prodotto quelli intorno a rette perpendicolari (10 t. 2), la trasformazione $\rho_r\rho_s$ è involutoria. Sia a un punto del piano aderente ad o. La congruenza $\rho_r\rho_s$ lo sposterà certamente, altrimenti per esso passerebbe una retta perpendicolare a r e a s: il ribaltamento intorno ad essa convertirebbe in se stesse r ed s e terrebbe fisso o ad essa aderente, contro il t. 1 del n° 9. Sia dunque $\rho_r\rho_s a = a'$: la retta $\mathfrak{r}(aa')$ è convertita in se stessa dalla trasformazione. Nell'ipotesi che essa non passi per o, $\rho_r\rho_s$ sarebbe il ribaltamento intorno alla $\perp \mathfrak{r}(aa')$ da o (10 t. 14) e i punti di questa perpendicolare, aderenti ad o sarebbero fissi per $\rho_r\rho_s$, il che già si mostrò impossibile. Dunque $\mathfrak{r}(aa')$ passa per o e subisce il ribaltamento intorno ad o secondo la tesi.

Inversamente:

Tr. 2. — “ Se $a\, b\, c$ sono punti non allineati, e se esiste una congruenza che tien “ fisso a e converte b e c in $b/_a$, $c/_a$, sul piano $\mathfrak{p}(abc)$ esiste una coppia di rette per- “ pendicolari passanti per a „.

Sia μ la congruenza di cui si suppone l'esistenza. μ ribalta $\mathfrak{r}(ab)$ ed $\mathfrak{r}(ac)$ intorno ad a: il suo quadrato tien fisse queste due rette e quindi tutto il piano: la congruenza μ è cioè involutoria. Si vede allora che $\mu\rho_{ab}\mu = \rho_{ab}$ perchè tien fissa $\mathfrak{r}(ab)$ e sposta qualche punto; se quindi $\mu c = c'$, $\rho_{ab}c' = d$ sarà $\mu d = \rho_{ab}c = d'$. Se fosse $d = c$, sarebbe $\mathfrak{r}(cc') \perp \mathfrak{r}(ab)$ e poichè $\mathfrak{r}(cc')$ passa per a l'esistenza della coppia di perpendicolari per a sarebbe provata. Se $d \neq c$, si consideri $\mathfrak{r}(cd)$: $\rho_{ab}\mu$ muta $\mathfrak{r}(cd)$ in se stessa scambiando i punti c e d; e poichè a è aderente a c, si riduce al ribaltamento intorno alla retta $t \perp \mathfrak{r}(cd)$ per a (10 t. 14). Dunque $\rho_{ab}\mu = \rho_t$: ma $\rho_{ab}\mu$ ribalta $\mathfrak{r}(ab)$ intorno ad a; quindi $t \perp \mathfrak{r}(ab)$.

Combinando questo teorema col precedente si ha che “ se esiste una con- “ gruenza che tien fisso a e converte b e c nei loro simmetrici rispetto ad a, esiste “ una congruenza che converte in se stesso $\mathfrak{p}(abc)$, lasciando fisso a e portando ogni “ altro punto del piano, aderente ad a, nel suo simmetrico rispetto ad a „. Riguardo alla trasformazione del piano $\mathfrak{p}(abc)$ le due congruenze coincidono, cioè:

Tr. 3. — “ Ogni congruenza che lasci fisso un punto a e converta due punti “ aderenti ad a e non allineati con esso nei loro simmetrici rispetto ad a, conver-

" tirà ogni punto del piano dei tre punti, aderente ad a nel suo simmetrico rispetto " ad a „. Infatti il prodotto della congruenza data per quella di cui, secondo la precedente osservazione, questa determina l'esistenza, tien fisso $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(ac)$ e quindi tutto il piano $\mathfrak{p}(abc)$.

Def. — La trasformazione determinata in un piano da una congruenza che tenga fisso un punto a e ribalti ogni retta del piano, passante per a, si dice *semirotazione del piano* intorno ad a, o *simmetria nel piano* rispetto ad a.

Tr. 4. — " Se per un punto — in un piano — passa una coppia di rette perpendicolari, ad ogni retta per quel punto, in quel piano, esiste la perpendicolare in " quel punto „. Sia a il punto per cui passano due rette r ed s perpendicolari fra loro: pel teor. 1 esiste una semirotazione del piano intorno ad a. Se allora si riprendono le considerazioni del teor. 2, si vede che come retta $\mathfrak{r}(ab)$ vi si può assumere una retta qualunque per a nel piano.

Tr. 5. — " Su ogni piano contenente una coppia di punti non coerenti e per " ciascuno di questi punti passa una coppia di rette perpendicolari „. Siano a e b due punti non coerenti, r una retta per b aderente ad a. Si ribalti il piano $\mathfrak{p}(ar)$ intorno ad r e sia $\rho_r a = a'$. La retta $\mathfrak{r}(a'b)$ contiene la coppia di punti non coerenti $a'b$; quindi per ogni suo punto possiede il punto non aderente. — Se a resta fisso per $\rho_{a'b}$, è $\mathfrak{r}(ab) \perp \mathfrak{r}(a'b)$ (10 t. 10): per b passa intanto una coppia di rette perpendicolari; ma volendosi mostrare che in ogni caso una tal coppia di rette passa per a, si osservi che, mutando la r, muterà pure la $\mathfrak{r}(a'b)$ [1] e poichè per b non possono passare due $\perp \mathfrak{r}(ab)$, si potrà sempre supporre a mosso da $\rho_{a'b}$. — Sia $\rho_{a'b} a = a''$; è $\mathfrak{r}(a'b) \perp \mathfrak{r}(aa'')$ e poichè $\mathfrak{r}(a'b)$ possiede coppie di punti non coerenti, ogni sua coppia di punti simmetrici rispetto a $\mathfrak{r}(aa'')$ possiede due punti medî, l'uno su $\mathfrak{r}(aa'')$, l'altro non aderente ad essa e fisso per $\rho_{aa''}$. La retta per a e per questo punto è $\perp \mathfrak{r}(aa'')$.

Tr. 6. — " Se in un piano esistono due punti non coerenti, ad ogni retta del " piano ed in ogni suo punto esiste nel piano la perpendicolare „. Siano a e b due punti non coerenti sul piano considerato. Si è mostrato che in a esiste una coppia di rette perpendicolari: esiste quindi la $\perp \mathfrak{r}(ab)$ in a (t. 4); sia r. Il punto b resta fisso per ρ_r. Sia allora c un altro punto qualunque del piano: se c appartiene ad r, si ha già $\mathfrak{r}(bc) \perp r$ (10 t. 10); se c non appartiene ad r è ancora $\mathfrak{r}(bc) \perp r$ e debbono distinguersi due casi: o $\mathfrak{r}(bc)$ incontra r in un punto d; b e d non sono coerenti e su $\mathfrak{r}(bc)$ esiste un punto non aderente a c; per c passa allora una coppia di rette perpendicolari secondo il teor. 5, — ovvero $\mathfrak{r}(bc)$ non incontra r; su r esiste allora un punto f fisso per ρ_{bc} (10 t. 12) non aderente a $\mathfrak{r}(bc)$ e $\mathfrak{r}(fc) \perp \mathfrak{r}(bc)$ (10 t. 10). — Allora, a norma del teorema 4, ad ogni retta per c esiste nel piano la perpendicolare.

Tr. 7. — " Se un punto a ha un punto non aderente b, su ogni piano per a e b " esiste una retta di punti non aderenti ad a, e questa retta è il luogo dei punti " del piano che godono di questa proprietà „. In un piano per a e b si consideri

(1) a' e b non sono coerenti; quindi, se non mutasse la $\mathfrak{r}(a'b)$, resterebbe invariato a'. I ribaltamenti intorno alle diverse r indurrebbero sulla $\mathfrak{r}(aa')$ lo stesso ribaltamento intorno ai $a|a'$. Ora esistono al più due rette r per cui possa determinarsi sulla $\mathfrak{r}(aa')$ lo stesso ribaltamento: la congiungente b con un $a|a'$ e la perpendicolare a questa in b (ammesso che tal perpendicolare esista)

infatti la $\perp \mathfrak{r}(ab)$ in b e sia r. ρ_r ribalta $\mathfrak{r}(ab)$ intorno al cardine ab; quindi a è fisso per ρ, e non aderente ad alcun punto di r. Sia ora c un punto del piano non aderente ad a: ρ_r ribalta $\mathfrak{r}(ac)$ intorno ad a (10 t. 10): quindi tien fisso c: ma non possono esistere altri punti del piano fissi per ρ_r che a e i punti di r (10 t. 5); dunque c appartiene ad r.

La retta r è determinata come congiungente due punti qualunque del piano, non aderenti ad a; dunque " se due punti di una retta non sono aderenti ad un terzo " punto, tutta la retta non è aderente a questo punto ".

Tr. 8. — " Se un punto a ha in un piano per esso una retta non aderente, una " semirotazione intorno ad a coincide con un ribaltamento intorno a questa retta. " All'infuori di questa retta la semirotazione non può convertire in se stesse altre " rette che quelle per a ". La semirotazione ribalta intorno ad a le rette che congiungono a coi punti della retta considerata; poichè essi non sono aderenti ad a, restano fissi per la semirotazione. Se poi una retta è convertita in se stessa dalla semirotazione, non può esser retta di punti fissi se è aderente ad a, e allora, perchè due punti corrispondenti sono allineati con a, deve passare per a.

Tenendo conto del teor. 5 del n° prec. si avrà che

Tr. 9. — " Non esistono in un piano due punti non aderenti ad una stessa " retta ".

Tr. 10. — " Se una congruenza converte in se stesso un piano e scambia due " suoi punti fra loro coerenti è un ribaltamento od una semirotazione del piano ". Siano infatti a e a' i due punti coerenti che la congruenza scambia, e $m \varepsilon a|a'$. Si chiami μ la congruenza; essa terrà fermo m. Se ora si sapesse che la trasformazione del piano è involutoria, la proposizione sarebbe evidente, perchè, se c e c' sono due punti corrispondenti aderenti ad m, la $\mathfrak{r}(cc')$ si trasformerebbe in se stessa. Allora: o $\mathfrak{r}(cc')$ passa per m e subisce il ribaltamento intorno ad m, nel qual caso si avrebbe la semirotazione intorno ad m (t. 3); — ovvero $\mathfrak{r}(cc')$ non passa per m e si avrebbe il ribaltamento intorno alla $\perp \mathfrak{r}(cc')$ per m (10 t. 14). Si noti che questa retta sarebbe $\perp \mathfrak{r}(aa')$ in m.

Si supponga dunque che, se possibile, la trasformazione del piano non sia involutoria. Allora μ^2 tien fissa $\mathfrak{r}(aa')$ e non è l'identità; quindi $\mu^2 = \rho_{aa'}$. Si ponga $\mu c = c'$, $\mu c' = \rho_{aa'} c = d$, $\mu \rho_{aa'} c = \mu^3 c = \rho_{aa'} \mu c = \mu d = \rho_{aa'} c' = d'$ (sarà $\mu d' = \mu^2 \rho_{aa'} c = \rho^2_{aa'} c = c$); e si consideri il piano come $\mathfrak{p}(cc'd)$. (Si osservi che a tre a tre i punti considerati non saranno allineati; se lo fossero, p. es. $cc'd$, sarebbe $\mu \mathfrak{r}(cc'd) = \mathfrak{r}(c'dd')$, e cioè sulla stessa retta starebbe d'; la retta $\mathfrak{r}(cd)$ sarebbe convertita in se stessa da μ, e l'esistenza di una tal retta fu il solo fatto che nelle linee precedenti si applicò, nell'ipotesi dell'involutorietà della corrispondenza). Almeno una delle coppie di rette $\mathfrak{r}(cc')$ $\mathfrak{r}(dd')$, $\mathfrak{r}(cd)$ $\mathfrak{r}(c'd')$, $\mathfrak{r}(c'd)$ $\mathfrak{r}(cd')$, dovrà risultare di rette concorrenti: — Concorrano anzitutto le rette $\mathfrak{r}(cc')$, $\mathfrak{r}(dd')$: si ha $\rho_{aa'} \mathfrak{r}(cc') = \mathfrak{r}(dd')$: il punto di concorso è dunque fisso per $\rho_{aa'}$; inoltre $\mu \mathfrak{r}(cc') = \mathfrak{r}(c'd)$, $\mu \mathfrak{r}(dd') = \mathfrak{r}(d'c)$; concorrono dunque anche $\mathfrak{r}(c'd)$, $\mathfrak{r}(cd')$ ed il loro punto di concorso è pure fisso per $\rho_{aa'}$ (perchè $\rho_{aa'} \mu = \mu^3 = \mu \rho_{aa'}$). Siano k e k' i due punti di concorso, che non possono coincidere perchè non sono allineati $cc'd$. Essi dovranno appartenere alla $\mathfrak{r}(aa')$ (10 t. 5) e sarà $\mu k = k'$ $\mu k' = k$ onde $ck' \equiv c'k$, $c'k' \equiv d'k' \equiv ck$ onde $cc'k \equiv c'ck'$. Ma $cc'k$ sono allineati; dovrebbero quindi esserlo $c'ck'$, cioè dovrebbe essere $\mathfrak{r}(cc') = \mathfrak{r}(aa')$: ora c fu scelto fuori della $\mathfrak{r}(aa')$.

— Concorrano invece le $\mathfrak{r}(cd)$, $\mathfrak{r}(c'd')$: esse sono $\perp\mathfrak{r}(aa')$: il loro punto di concorso (sia l) non sarà aderente a $\mathfrak{r}(aa')$, e sarà $\mathfrak{r}(lm)\perp\mathfrak{r}(aa')$: allora $\rho_{lm}\mu = \rho_{aa'}$ e $\mu = \rho_{lm}\rho_{aa'}$; μ sarebbe la semirotazione intorno ad m (t. 1).

Coi teoremi dimostrati in questo o nel precedente n° si pongono i fondamenti della teoria dei movimenti nel piano. Però quasi tutti i teoremi del presente n° sono affetti da un elemento ipotetico il quale prende alternativamente la forma dell'esistenza della semirotazione intorno a un punto, o di una coppia di rette perpendicolari in questo punto, appartenenti al piano, o di una coppia di punti non coerenti, o semplicemente, nell'ultimo teorema di una trasformazione per congruenza del piano in sè, la quale scambi due punti assegnati. L'esistenza della coppia di rette perpendicolari in ogni punto si farà dipendere nel § successivo dai postulati dello spazio: ma l'ultimo teorema mostra come, inversamente, *basterebbe ammettere che il piano non sia contenuto in uno spazio maggiore perchè la proposizione divenisse senz'altro dimostrabile.* Difatti, in tale ipotesi, ogni congruenza trasformerebbe il piano in sè, e i post. VIII e IX affermano che una coppia qualunque di punti si può invertire mediante una congruenza. Sia allora dato nel piano un punto qualunque m e siano a e a' due punti fra loro coerenti e simmetrici rispetto ad m: la congruenza che scambia a e a' sarebbe, secondo il precedente teorema, la semirotazione intorno ad m ovvero il ribaltamento intorno alla $\perp\mathfrak{r}(aa')$ nel punto m. In ogni caso sarebbe stabilita l'esistenza di questa perpendicolare (cfr. t. 2 e 4).

§ 4. — Lo spazio.

Post. XX. — **Esiste un punto fuori di un piano.**

Post. XXI. — **Se due piani hanno a comune un punto, hanno pure a comune qualche altro punto.** Evidentemente le proposizioni del n° 8 permettono immediatamente di dare a questo postulato la forma: **Se due piani hanno a comune un punto, hanno pure a comune una retta per esso.**

Il primo postulato enuncia l'esistenza di quattro punti non complanari. Da esso e dai postulati precedenti risulta poi l'esistenza di altri punti: ma del numero o della potenza dell'aggregato dei punti richiesti non intendiamo di occuparci qui.

12. Rette e piani perpendicolari - Semirotazioni intorno a una retta. — *Tr.* 1. — " Non esiste alcuna congruenza che tenga fissi quattro punti non complanari di cui uno sia aderente agli altri tre, spostando qualche altro punto ". Siano infatti $abcd$ i quattro punti che si suppongono fissi per una congruenza μ; sia d aderente agli altri tre punti; la congruenza μ dovrà lasciar fissi tutti i punti dei piani $\mathfrak{p}(bcd)$ $\mathfrak{p}(abd)$ $\mathfrak{p}(acd)$ (9 t. 2). Sia ora m un altro punto qualunque; per m, d e per un punto di $\mathfrak{p}(bcd)$ non appartenente a $\mathfrak{r}(bd)$ nè a $\mathfrak{r}(cd)$ passa un piano che taglia $\mathfrak{p}(bcd)$ secondo una retta per d non appartenente ad alcuno degli altri due piani, o uno qualunque di questi secondo un'altra retta per d (XXI). μ lascia fissi i punti di queste due rette, quindi tutti i punti del piano considerato e fra essi m.

Il teorema fu enunciato nella forma che ci sarà utile in seguito: ma all'ipotesi che uno dei punti sia aderente agli altri tre si potrebbe sostituire quella più generale che uno dei punti sia aderente a due rimanenti ed il quarto ad uno almeno di questi tre. Se infatti d è aderente ad a e b, la congruenza μ tiene fisso $\mathfrak{p}(abd)$: se poi c è aderente per es. ad a resterà anche fisso $\mathfrak{p}(cda)$, e ciò basta per la precedente dimostrazione.

Tr. 2. — " Se una congruenza tiene fissi tutti i punti di un piano, è involu- " toria „. — Sia μ la congruenza considerata: π il piano fisso; sia a un punto spostato da μ e sia $\mu a = a'$; sia m un punto di π non appartenente a $\mathfrak{r}(aa')$. Il piano $\mathfrak{p}(aa'm)$ taglia π secondo una retta r per m che μ tien fissa. μ ribalta dunque $\mathfrak{p}(aa'm)$ intorno ad r e la corrispondenza fra i punti a e a' è quindi reciproca.

Sia n un punto di π fuori di r: la retta $\mathfrak{r}(an)$ non ha comuni con $\mathfrak{p}(ar)$ altri punti che a; $\mu\mathfrak{r}(an) = \mathfrak{r}(a'n)$ è dunque distinta da $\mathfrak{r}(an)$ e ogni suo punto diverso da n è mosso da μ. Sia b un tal punto $\neq a$ e sia $\mu b = b'$; il piano $\mathfrak{p}(bb'm)$ è convertito in se stesso da μ; quindi μ ribalta intorno ad m l'intersezione (XXI) dei piani $\mathfrak{p}(aa'm)$ $\mathfrak{p}(bb'm)$, la quale è così $\perp r$. Per m non passano altre rette che la congruenza ribalti perchè un piano per una tal retta e per un punto qualunque di π sarebbe ribaltato dalla congruenza, la quale così ribalterebbe pure l'intersezione di questo piano con $\mathfrak{p}(aa'm)$; su $\mathfrak{p}(aa'm)$ esisterebbero cioè due rette per m e $\perp r$ contro il teor. 9 del n° 10. Poichè m è qualunque su π si potrà dunque enunciare il

Tr. 3. — " Per ogni punto del piano fisso passerà una retta che dalla supposta " congruenza sarà convertita in se stessa (ribaltata intorno a quel punto). E le rette " di tal proprietà passanti pei punti di una retta del piano fisso apparterranno ad " un piano che la congruenza ribalta intorno a questa retta: in questo piano esse " saranno tutte perpendicolari ad essa „.

Def. 1. — *Un punto* si dice *aderente ad un piano* quando non appartiene al piano ed è aderente a qualche punto del piano; si dirà anche che *il piano è aderente al punto.*

Tr. 4. — " Se una congruenza tien fissi tutti i punti di un piano, sposta ogni " punto aderente al piano e tien fisso ogni punto non aderente al piano medesimo „. Sia μ la supposta congruenza, π il piano fisso, a un punto aderente a π, m un punto di π aderente ad a, n e p due punti di π non allineati con m ed aderenti ad m; se la congruenza tenesse fisso a, terrebbe fermi i 4 punti $amnp$ e quindi ogni altro punto (t. 1). — Sia ora a un punto che si sposti per μ e sia $\mu a = a'$. Sia m un punto di π fuori di $\mathfrak{r}(aa')$; il piano $\mathfrak{p}(aa'm)$ è ribaltato da μ intorno alla sua intersezione con π; e il punto a sarà aderente a questa retta, poichè se a non le fosse aderente, alla retta non sarebbe aderente nemmeno a'; ora, pel teorema 9 del n. 11, sul piano non possono esistere due punti non aderenti alla medesima retta. Il punto a è dunque aderente a π.

Tr. 5. — " Non esistono due diverse congruenze che tengano fissi tutti i punti " di un piano „. Siano μ e ν due congruenze che tengano fissi tutti i punti di un piano π; esse sposteranno tutti i punti aderenti a π; sia a un punto mobile, $\mu a = a'$, $\nu a = a''$. Se una almeno delle rette $\mathfrak{r}(aa')$, $\mathfrak{r}(aa'')$ incontra π il piano $\mathfrak{p}(aa'a'')$ è ribaltato dalle due congruenze intorno alla sua intersezione con π: quindi $a' = a''$. Se le due rette non incontrano π, sia p un punto qualunque di π : $\mathfrak{p}(aa'p)$ e $\mathfrak{p}(aa''p)$ essendo ribaltati rispettivamente dalle due congruenze, i punti $a|a' = f$, $a|a'' = g$ saranno fissi rispettivamente per μ e per ν; non saranno dunque aderenti a π (t. 4) e saranno fissi per entrambe le congruenze. Se $f=g$, $a/_f = a' = a''$; conformemente alla tesi; l'ipotesi $f \neq g$ è assurda: sia infatti m un punto di π: il piano $\mathfrak{p}(fgm)$ segherebbe π secondo una retta cui non sarebbero aderenti due punti, contro il teor. 9 del n° 11.

Tr. 6. — " Se una congruenza ribalta il piano fisso della congruenza supposta " nei teoremi precedenti intorno ad una sua retta t, o ribalta pure il piano per t di " cui al teor. 3, ovvero lo tien fisso „. Sia infatti ν la congruenza nominata; $\nu^{-1}\mu\nu$ tien fissi i punti di π e non differisce quindi da μ (t. 5): una retta che μ converta in se stessa è quindi trasformata da ν in un'altra retta che μ converte in se stessa; e se essa incontra t dovrà dunque esser trasformata in sè stessa. Il piano di t e d'una tal retta è dunque convertito in se stesso da ν.

Tr. 7. — " Esiste una congruenza che tien fissa una retta t e ribalta intorno " a t due piani passanti per t „. Sia infatti π un piano per t; esiste una congruenza ν che ribalta π intorno a t (XVIII); questa congruenza è involutoria su π (10 t. 1); si può supporre che sia o non involutoria per i punti non appartenenti a π. Nella seconda ipotesi ν^2 tien fisso π, ma non tutti i punti dello spazio; quindi è la congruenza μ dei teor[i] prec[i]. La prima ipotesi poi può dar luogo a due casi: o che si supponga che ν tenga fisso un piano per t, ovvero che sposti ogni piano.

1° Si supponga dunque l'esistenza di una congruenza che tien fisso un piano π per t. A questo sarà coniugato dal teor. 6 un altro piano per t e un'altra congruenza che lo converte in se stesso, ribaltando π intorno a t. Se la nuova congruenza non tien fisso quel piano, sarà essa la congruenza affermata nel teorema: se essa lo tien fisso sarà tale il prodotto delle due congruenze.

2° Non si supponga l'esistenza di una congruenza che tenga fisso un piano per t. La congruenza ν che ribalta π intorno a t, dovendo essere involutoria, ribalta ogni piano per t, ed è la congruenza di cui si afferma l'esistenza.

Tr. 8. — " La congruenza di cui il teor. prec. afferma l'esistenza è involutoria. " Per ogni punto della retta t passa un piano ed uno solo che la congruenza trasforma " in se stesso, inducendovi una semirotazione intorno a quel punto. Ogni piano per " la retta t subisce il ribaltamento intorno a t „.

1° Siano difatti π e σ i due piani per t che si sa essere ribaltati dalla congruenza; il quadrato della nostra congruenza li terrà fissi; quindi (t. 4) deve ridursi all'identità: la congruenza è involutoria.

2° Sia a un punto arbitrario di t e sia m un punto di π che la congruenza sposti e tale che la $\perp t$ per esso non passi per a. Sia m' il trasformato di m e sia n un punto mobile fuori di π. Il piano $\mathfrak{p}(amn)$ sarà convertito in un piano $\mathfrak{p}(am'n')$, diverso da $\mathfrak{p}(amn)$ (che non passa per m'): i due piani si tagliano secondo una retta r per a che la congruenza trasforma in se stessa. Per ipotesi $\mathfrak{p}(amn)$ non passa per t: dunque $r \neq t$; inoltre r non può esser retta di punti fissi per la congruenza, altrimenti sarebbe piano di punti fissi $\mathfrak{p}(rt)$: per ogni retta di $\mathfrak{p}(rt)$, per es. r, passerebbe un piano convertito in se stesso dalla congruenza (t. 3) che segherebbe π e σ secondo due rette ribaltate dalla congruenza, per lo stesso punto a, contro il teor. 3. La congruenza considerata ribalta dunque r. Parimenti $\mathfrak{p}(amn')$, $\mathfrak{p}(am'n)$ si segano secondo una retta s per a che la congruenza ribalta, e $s \neq r$ e $s \neq t$ perchè $\mathfrak{p}(amn') \neq \mathfrak{p}(amn)$ e $\mathfrak{p}(am'n) \neq \mathfrak{p}(m't)$. La congruenza determina dunque una semirotazione in $\mathfrak{p}(rs)$ intorno ad a (11 t. 3).

3° Ogni piano τ per t taglia $\mathfrak{p}(rs)$ secondo una retta che la congruenza ribalta intorno ad a. La congruenza ribalta dunque τ intorno a t.

4° Nessun piano per a diverso da $\mathfrak{p}(rs)$ e dai piani per t può essere convertito in sè dalla congruenza perchè le intersezioni di un piano per a che la congruenza converta in sè e che non passi per t con $\mathfrak{p}(rt)$ e con $\mathfrak{p}(st)$ sono rette per a che la congruenza converte in sè, e non differiscono quindi da r e da s rispettivamente.

Poichè tutte le congruenze che ribaltano un piano intorno a una sua retta t sono identiche fra loro rispetto alla trasformazione del piano, la congruenza studiata nei teor[i] 7 ed 8 è completamente definita dalla retta fissa t. Ha quindi luogo ad esser stabilita la seguente

Def. 2. — La congruenza che ribalta ogni piano per t intorno a t si dirà *semirotazione intorno a* t. t si dirà l'*asse di rotazione.*

Tr. 9. — " In ogni piano ed in ogni punto di ogni sua retta esiste la perpen- " dicolare a questa retta medesima „. È l'intersezione del piano dato con quello su cui la semirotazione intorno alla retta data determina la semirotazione attorno al punto dato.

Tr. 10. — " Se esiste un punto non aderente a una retta t, esiste tutta una " retta di punti non aderenti a t. Essa resta fissa per la semirotazione intorno a t " e fuori di essa non esistono altri punti non aderenti a t „. Se h è un punto non aderente a t, la semirotazione, ribaltando intorno a t il piano $\mathfrak{p}(ht)$, tien fisso h (11 t. 8); le $\perp t$ in questo piano passano per h (10 t. 10); per h passa quindi ogni piano su cui la semirotazione intorno a t determina una semirotazione. L'intersezione di due di questi piani è una retta per h, e sopra ciascuno di questi piani è convertita in sè dalla semirotazione senza passare pel punto fisso di questa. Essa è dunque retta di punti fissi e non è aderente a detto punto (11 t. 8) e non è aderente ad alcun punto di t perchè ogni piano per essa e per un punto qualunque di t subisce la semirotazione intorno a questo punto. — Se fuori di questa retta esistesse un punto non aderente a t, esisterebbe al pari una retta per esso tutta di punti non aderenti a t e per ogni punto di t passerebbero due piani (l'uno per l'una, l'altro per l'altra retta) non passanti per t e convertiti in sè dalla congruenza, contro il teor. 8.

Tr. 11. — " Per ogni punto aderente a t passa uno e un sol piano non conte- " nente t, che la semirotazione intorno a t converte in se stesso „. Sia a un punto aderente a t: in $\mathfrak{p}(at)$ sia r la $\perp t$ per a: se essa incontra t in un punto m, il piano di cui si afferma l'esistenza è quello per m su cui la congruenza induce la semirotazione intorno ad m. Se r non incontra t, contiene un punto h non aderente a t; per h passa una retta t_1 di punti fissi per la congruenza; $\mathfrak{p}(at_1)$ è il piano di cui si afferma l'esistenza: esso subisce il ribaltamento intorno a t_1. La semirotazione intorno a t coincide allora colla semirotazione intorno a t_1. — Un altro piano per a che la semirotazione converta in se stesso sega il precedente secondo una retta che la congruenza trasforma in sè, cioè secondo la r; esso passa quindi per m o pel punto che r ha su t_1 e non può perciò (t. 8-4°) differire da $\mathfrak{p}(at)$.

Def. 3. — Il piano unico che passa per un punto a aderente a t od appartenente a t e che, senza passare per t, è convertito in sè dalla semirotazione intorno a t si dirà *piano perpendicolare a* t *pel punto* a. *La retta* si dirà *perpendicolare al piano.* La nuova relazione di perpendicolarità si rappresenterà ancora con $\perp$.

I teoremi 8 e 11 dànno luogo al

Tr. 12. — “ Per un punto aderente ad una retta od appartenente alla retta “ passa uno o un sol piano perpendicolare alla retta. Esso contiene tutte le perpendi- “ colari alla retta pei punti del piano. Condizione necessaria o sufficiente perchè un “ piano sia perpendicolare a una retta è che a questa siano perpendicolari due sue “ rette senza che il piano passi per essa „.

Tr. 13. — “ Ad un piano ed in un suo punto esiste una ed una sola perpendi- “ colare „. È l'intersezione di due piani perpendicolari in quel punto a due rette passanti pel punto medesimo, sul piano dato.

13. Simmetria rispetto a un punto. — *Tr.* 1. — “ Assegnato un punto arbi- “ trario o, la corrispondenza che si ottiene riferendo ad ogni punto aderente ad o il “ suo simmetrico rispetto ad o è una congruenza „.

Siano a e b due punti arbitrari, e sia $a' = a'_o$, $b' = b_{|o}$. Se abo sono allineati, la coppia ab è portata in $a'b'$ dal ribaltamento della retta $\mathfrak{r}(ab)$ attorno ad o; quindi $ab \equiv a'b'$: se abo non sono allineati, a' e b' appartengono a $\mathfrak{p}(abo)$ e la coppia ab è portata in $a'b'$ dalla semirotazione del piano intorno ad o; ancora $ab \equiv a'b'$.

Def. — La congruenza definita nel teorema precedente si dirà una *simmetria rispetto ad* o.

Come per teoremi analoghi precedenti si prova che

Tr. 2. — “ La simmetria rispetto ad un punto o sposta ogni punto aderente “ ad o e tien fisso ogni punto non aderente ad o. Se un tal punto esiste, esiste tutto “ un piano di punti non aderenti ad o, ed ogni punto non aderente ad o appartiene “ a questo piano „.

14. Simmetria rispetto a un piano. — *Tr.* 1. — “ Assegnato un piano arbi- “ trario, esiste una congruenza che tien fermi tutti i suoi punti e sposta qualche altro “ punto „. Tale è il prodotto di una simmetria rispetto a un punto o del piano e di una semirotazione intorno alla perpendicolare in o al piano (12 t. 13).

Def. — La congruenza nominata si dice *simmetria rispetto a quel piano fisso.*

I teoremi del n. 12 permettono di enunciare il

Tr. 2. — “ La simmetria rispetto a un piano è individuata da questo piano; “ essa è una corrispondenza involutoria che ribalta tutte le perpendicolari al piano; “ tutte le perpendicolari al piano nei punti d'una retta sono complanari. La simmetria “ sposta ogni punto aderente al piano. Esiste al più un punto non aderente al piano. “ e questo in tal caso è fisso per la simmetria. Tutte e sole le perpendicolari al piano “ passano per questo punto. Per ogni punto aderente al piano passa una ed una sola “ perpendicolare al piano „.

Ogni altra proprietà relativa a rette e piani perpendicolari si dimostra ora, con procedimenti noti.

15. — Non è nel nostro disegno di proseguire nello studio delle trasformazioni metriche fin qui definite e dei loro prodotti. Ci volgeremo invece a mostrare come, sulla base dei postulati metrici ammessi, si possa stabilire la geometria projettiva o come ne risulti la definizione della nostra metrica, siccome una metrica projettiva rispetto a una quadrica; ma risulterà altresì che i postulati ammessi non sono capaci ancora di separare fra loro le tre metriche fondamentali ellittica, parabolica e iperbolica, nè da altre metriche sorelle (1); e risulteranno evidenti i postulati che ancora sono necessarî per individuare queste metriche medesime.

Ma i postulati precedenti permettono in generale di assicurare l'intersezione di rette e di piani solo quando essi appartengono ad una stessa stella: ci occorre, per proseguire, di poter affermare altre intersezioni e noi lo faremo col

Post. XXII. — **Dato un piano ρ e più rette non perpendicolari a ρ ed uscenti da un suo punto, esiste un piano $\perp\rho$ che incontra tutte queste rette, senza passare per quel punto.**

L'applicazione di questo postulato è d'altronde ristrettissima e si limiterà a sistemi di non più di 10 rette (2). Esso serve a far dipendere dai precedenti postulati metrici il teorema di Desargues nella stella (3), e potrebbe quindi sostituirsi col teorema di Desargues medesimo.

---

(1) Alcune fra l'altre furono messe recentemente in evidenza dal signor Dehn " Math. Ann. ", 53.

(2) Qualora si trattasse di 2 sole rette il post. è verificato evidentemente dal piano $\perp\rho$ per una retta che le incontri entrambe.

(3) Altra applicazione se ne fa qui, pel teorema di Pascal, al n. 20; ma essa è inessenziale, come mostrano le considerazioni del Cap. III, § 3.

CAPITOLO II.

IL COMPLETAMENTO DELLO SPAZIO E LA GEOMETRIA PROJETTIVA.

§ 1. — Il completamento dello spazio.

16. Il teorema di Desargues. — *Tr.* 1. — " Se in un piano π due triangoli " abc, $a'b'c'$ sono riferiti in modo che le coppie di lati omologhi s'incontrino in punti " d'una retta r e le congiungenti due coppie di vertici omologhi siano $\perp r$, anche la " congiungente i rimanenti due vertici sarà $\perp r$ ". Siano corrispondenti i vertici omonimi dei due triangoli. Siano m, n, p i punti comuni, per ipotesi, a $\mathfrak{r}(ab)$, $\mathfrak{r}(a'b')$, r; $\mathfrak{r}(bc)$, $\mathfrak{r}(b'c')$, r; $\mathfrak{r}(ca)$, $\mathfrak{r}(c'a')$, r. Infine sia, per ipotesi, $\mathfrak{r}(aa')\perp r$, $\mathfrak{r}(bb')\perp r$: Si mostrerà che $\mathfrak{r}(cc')\perp r$. — Sia σ un piano diverso da π per r e sia $a''b''c''$ il triangolo simmetrico di abc rispetto a σ. $\mathfrak{r}(a''b'')$, $\mathfrak{r}(b''c'')$, $\mathfrak{r}(c''a'')$ passeranno rispettivamente per mnp e $\mathfrak{p}(aa'a'')$, $\mathfrak{p}(bb'b'')$ saranno $\perp r$ e $\mathfrak{r}(cc'')\perp\sigma$. Saranno dunque complanari i punti $a'b'$ $a''b''$ e così $b'c'$ $b''c''$, $c'a'$ $c''a''$. Sia σ' il piano per r, $\perp\mathfrak{r}(a''a')$. I piani $\mathfrak{p}(a'b'\,a''b'')$, $\mathfrak{p}(bb'b'')$ sono $\perp\sigma'$; quindi $\mathfrak{r}(b'b'')\perp\sigma'$ ed allora i piani $\mathfrak{p}(c'a'c''a'')$, $\mathfrak{p}(b'c'b''c'')$, passanti rispettivamente per $\mathfrak{r}(a'a'')$, $\mathfrak{r}(b'b'')$, sono $\perp\sigma'$ e così $\mathfrak{r}(c'c'')\perp\sigma'$. Il piano $\mathfrak{p}(cc'c'')$, contenendo due rette, l'una $\perp\sigma$, l'altra $\perp\sigma'$ è perpendicolare alla loro intersezione r e quindi $\mathfrak{r}(cc')\perp r$.

Tr. 2. — " Se in una stella Ω due trispigoli sono riferiti in modo che le coppie " di facce omologhe s'incontrino in rette di un piano ρ, i piani delle tre coppie di " spigoli omologhi passano per una stessa retta ". Siano abc, $a'b'c'$ i due trispigoli e siano omologhi gli spigoli omonimi; siano mnp le intersezioni dei piani $\mathfrak{p}(ab)$ $\mathfrak{p}(a'b')$, $\mathfrak{p}(bc)$ $\mathfrak{p}(b'c')$, $\mathfrak{p}(ca)$ $\mathfrak{p}(c'a')$ ed appartengano, per ipotesi, a ρ; sia r l'intersezione dei piani $\mathfrak{p}(aa')$, $\mathfrak{p}(bb')$:

a) Supponiamo in primo luogo $r\perp\rho$; saranno $\perp\rho$ i piani $\mathfrak{p}(aa')$ $\mathfrak{p}(bb')$ e si dovrà dimostrare che $\mathfrak{p}(cc')\perp\rho$. Si seghi la figura con un piano $\pi\perp\rho$ che incontri le rette $abc\,a'b'c'\,mnp$ (XXII); la figura piana risultante sarà quella del teor. prec.: l'intersezione di $\mathfrak{p}(cc')$ con π sarà $\perp$ all'intersezione di π e ρ (congiungente le intersezioni di π con m, n, p) onde $\mathfrak{p}(cc')\perp\rho$.

b) Supponiamo poi r non $\perp\rho$ e non appartenente a ρ. Si seghi la figura con un piano $\perp\rho$, che incontri le rette $a\,b\,c\;\;a'b'c'\;\;m\,n\,p\,r$ nei punti $A\,B\,C\;\;A'B'C'\;\;M\,N\,P\,R$ (XXII). Per la retta $\mathfrak{r}(MNP)$ e pel punto R si conducano un piano ρ_1 e una retta r_1 fra loro perpendicolari: Se s'incontrano in un punto Ω_1, si proietti da Ω_1 la figura $ABC\,A'B'C'\,MNPR$; si avrà nella stella Ω_1 la configurazione considerata nel caso *a)*: il piano $\mathfrak{p}(\Omega_1 CC')$, passerà dunque per r_1, $\mathfrak{r}(CC')$ per R, e quindi $\mathfrak{p}(cc')$ per $\mathfrak{r}(\Omega R)=r$. — Se r_1 non incontra ρ_1, esisterà in essa un punto S non aderente a ρ_1: sia π il piano $\perp r_1$ in S; esso sarà pure $\perp\rho_1$ (14 t. 2) e non esisterà punto non aderente a π. Le $\perp\pi$ dai vari punti dello spazio lo incontreranno tutte; in particolare quelle condotte da $ABC\,A'B'C'\,MNP$: siano $A_1B_1C_1\;A'_1B'_1C'_1\;M_1N_1P_1$ i piedi su π di queste perpendicolari; essi costituiranno di nuovo la configurazione del teor. 1 (perchè $\mathfrak{p}(r_1AA') = \mathfrak{p}(r_1A_1A'_1) \perp \rho_1$ e a π, onde $\mathfrak{r}(A_1A'_1) \perp \mathfrak{r}(M_1N_1P_1)$ intersezione di π e ρ e così via). Così $\mathfrak{r}(C_1C'_1) \perp \mathfrak{r}(M_1N_1P_1)$ e quindi $\mathfrak{r}(C_1C'_1)$ passa pel punto S non aderente a $\mathfrak{r}(M_1N_1P_1)$ e sono per conseguenza collineari anche $CC'R$: $\mathfrak{p}(cc')$ passa per r.

c) Supponiamo infine che l'intersezione dei piani $\mathfrak{p}(aa')$ $\mathfrak{p}(bb')$ appartenga a ρ. Basterà osservare che, se si suppone che $\mathfrak{p}(cc')$ non passi per detta intersezione, l'intersezione di $\mathfrak{p}(aa')$, $\mathfrak{p}(cc')$ non appartiene più a ρ; ed allora i risultati dei casi *a)* e *b)* mostrano che per questa intersezione dovrebbe passare $\mathfrak{p}(bb')$; non potrebbe dunque incontrare $\mathfrak{p}(aa')$ su ρ.

17. La geometria analitica. — Il sig. Hilbert ha mostrato (¹) come, sul fondamento del solo teorema di Desargues, si possa fondare una rappresentazione per coordinate degli elementi della varietà lineare a due dimensioni. Riassumerò in questo numero quanto dovrà servirci del procedimento e delle conclusioni del sig. Hilbert, trasportati dal piano alla stella; tralascierò tutte quelle dimostrazioni che possono leggersi, *mutatis mutandis*, nel citato lavoro dello Hilbert.

In una stella Ω sia fissato un piano ω (d'altronde arbitrario) ed un raggio $o \perp \omega$, e siano ξ e η due piani fissi per o. Per le applicazioni successive converrà che i piani ξ, η siano simmetrici rispetto a un piano σ per o. Siano 1_ξ, 1_η due raggi fissi rispettivamente su ξ ed η. Converrà ancora, per le seguenti applicazioni, che 1_ξ e 1_η siano simmetrici rispetto a σ; si chiami e l'intersezione di ω col piano $\mathfrak{p}(1_\xi 1_\eta)$; sarà allora $e \perp \sigma$. Se a_ξ e a_η sono due raggi di ξ e η rispettivamente, si dirà $a_\xi = a_\eta$ (²) se a_ξ, a_η sono complanari con e; nel caso della nominata simmetria a_ξ e a_η saranno simmetrici rispetto a σ. Siano ancora ω_ξ e ω_η le rette d'intersezione di ω rispettivamente con ξ ed η, cosicchè $\omega_\xi = \omega_\eta$.

Siano a_ξ e b_ξ due raggi di ξ, $a_\eta = a_\xi$; sia r l'intersezione dei piani $\mathfrak{p}(a_\eta \omega_\xi)$, $\mathfrak{p}(b_\xi \omega_\eta)$ e sia c_ξ l'intersezione di ξ e $\mathfrak{p}(re)$; si dirà c_ξ la somma di a_ξ e b_ξ:

$$c_\xi = a_\xi + b_\xi.$$

Si ha:

$$a_\xi + b_\xi = b_\xi + a_\xi = a_\eta + b_\eta \text{ (³)}.$$

L'addizione così definita si può invertire univocamente per modo che ne risulti definita la differenza fra due raggi c_ξ ed a_ξ, purchè i due raggi non coincidano entrambi con ω_ξ. Si verifica agevolmente che $o + a_\xi = a_\xi$ e quindi $a_\xi - a_\xi = o$. Converrà quindi chiamare il raggio o, raggio 0. Ad ogni raggio a_ξ corrisponderà un raggio $-a_\xi = o - a_\xi$. Quando ξ ed η siano simmetrici rispetto a σ, a_ξ e $-a_\xi$ si

---

(¹) *Grundlagen der Geometrie.* " Festschrift zur Feier d. Enthüllung d. Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen " - Leipzig, Teubner 1899 (2ᵗᵉ Auflage, 1903).

(²) Lo Hilbert parla d'uguaglianza, di somma, ecc. di segmenti. Noi non possiamo usare una terminologia analoga, poichè non abbiamo ancora discorso dell'ordinamento degli elementi d'una forma di prima specie. D'altronde le operazioni definite si riferiscono precisamente solo all'estremo mobile del segmento.

(³) Le due uguaglianze sono due forme d'una stessa; lo Hilbert non scrive la seconda, come non scrive quella analoga per la moltiplicazione. Nella scelta di ξ ed η simmetrici rispetto a σ, l'uguaglianza si dimostra per simmetria, senza ulteriore ricorso al teorema di Desargues.

corrispondono per una semirotazione intorno ad o (come si mostra facilmente osservando che la semirotazione intorno ad o si compone mediante la simmetria rispetto a σ e quella rispetto al piano $\perp \sigma$ per o).

Occorre rilevare la doppia univocità dell'addizione, per cui sommando o sottraendo a uno stesso raggio che non sia ω_ξ (o ω_η) raggi diversi si ottengono risultati diversi.

L'addizione definita gode pure della proprietà associativa:

$$(a_\xi + b_\xi) + c_\xi = a_\xi + (b_\xi + c_\xi)$$

e quindi della proprietà commutativa applicata a un numero qualunque di addendi.

Il piano $\mathfrak{p}(a_\eta 1_\xi)$ seghi ω secondo la retta r e $\mathfrak{p}(b_\xi r)$ seghi η in c_η; $c_\xi = c_\eta$ si dirà il prodotto di a_ξ, b_ξ:

$$c_\xi = c_\eta = a_\xi b_\xi.$$

Per simmetria rispetto a σ (o mediante il teorema di Desargues) si mostra che $a_\xi b_\xi = a_\eta b_\eta$; non si può però dimostrare la proprietà commutativa della moltiplicazione ([1]), la quale, nel nostro sistema geometrico, risulterà dagli ulteriori sviluppi; la moltiplicazione gode invece, sul fondamento del solo teorema di Desargues, della proprietà associativa:

$$a_\xi(b_\xi c_\xi) = (a_\xi b_\xi) c_\xi$$

e delle due proprietà distributive rispetto all'addizione:

$$a_\xi(b_\xi + c_\xi) = a_\xi b_\xi + a_\xi c_\xi$$

$$(b_\xi + c_\xi) a_\xi = b_\xi a_\xi + c_\xi a_\xi.$$

Infine risulta immediatamente dalla definizione:

$$1_\xi a_\xi = a_\xi 1_\xi = a_\xi, \quad a_\xi o = o\, a_\xi = o, \quad a_\xi \omega_\xi = \omega_\xi a_\xi = \omega_\xi.$$

Risulta pure che la moltiplicazione è operazione univoca che ammette due inverse, che si propongono di determinare l'una il fattore a destra, l'altra il fattore a sinistra, anch'esse univoche se il prodotto e il fattore dati non sono entrambi o o $\omega_\xi = \omega_\eta$: chiameremo divisioni queste due operazioni e porremo:

$$x_\xi = {}^{a_\xi}/_{b_\xi} \text{ quando } a_\xi = x_\xi b_\xi, \qquad y_\xi = {}_{b_\xi}|^{a_\xi} \text{ quando } a_\xi = b_\xi y_\xi.$$

Si chiameranno coordinate di un raggio r di Ω le intersezioni di ξ ed η rispettivamente coi piani $\mathfrak{p}(r\omega_\eta)$, $\mathfrak{p}(r\omega_\xi)$; le coordinate sono univocamente determinate dal raggio, se questo non è ω_ξ o ω_η, o lo determinano univocamente se esse non sono rispettivamente ω_ξ, ω_η, cioè se il raggio non sta sul piano ω.

([1]) Cfr. l. c., § 33.

Il sig. Hilbert dimostra che tutti e soli i raggi di un piano di Ω, non appartenenti a ω, soddisfanno a un'equazione lineare della forma

$$ax + by + c = 0$$

dove $a\,b\,c$ sono tre raggi fissi di ξ o di η diversi da ω_ξ, ω_η e x, y le due coordinate, sul piano ξ e su η rispettivamente, del raggio variabile. Quest'equazione è l'*equazione del piano* nel sistema di coordinate prescelte.

18. — I calcoli seguenti saranno semplificati se alle coordinate sopra definite si sostituiscono le

$$z = 1/x \qquad t = y/x \text{ (}^1\text{)};$$

si potrà fissare che z e t rappresentino due raggi di ξ; quando si debba indicare che le coordinate appartengono ad un determinato raggio si applicherà il nome di questo raggio come indice: pei raggi di ω sarà $z = 0$, ma t prenderà un valore variabile in corrispondenza biunivoca col raggio, cosicchè saranno ora rappresentati biunivocamente tutti i raggi, tolti quelli di η. L'equazione del piano prende la forma $a + bt + cz = 0$, o, cambiando il significato di a, b, c,

$$az + bt + c = 0 \tag{1}$$

Sia ora π un piano $\perp o$ non passante per Ω ed aderente a Ω e sia Ω′ il punto simmetrico di Ω rispetto a π. Si riferisca la stella Ω′ ad un sistema di coordinate, simmetrico rispetto a π di quello stabilito in Ω; siano cioè piani di riferimento ξ′, η′ i piani ξ ed η medesimi, piano ω′ il simmetrico di ω rispetto a π, e in generale si indichino colla stessa lettera coll'apice gli elementi simmetrici di quelli di Ω rispetto a π. Se $\overline{z'}_{s'}$, $\overline{t'}_{s'}$ sono le coordinate del raggio s', analoghe in Ω′ alle z_r, t_r di r in Ω, rappresenterò con $z'_{s'}$, $t'_{s'}$ i raggi di Ω in ξ simmetrici di $\overline{z'}_{s'}$, $\overline{t'}_{s'}$ rispetto a π: essendo r e r' simmetrici rispetto a π, sarà evidentemente $z'_{r'} = z_r$, $t'_{r'} = t_r$.

Si osservi che l'equazione di un piano di Ω passante per o è $t = c$, ove c è un raggio fisso: questo piano sarà simmetrico di se stesso rispetto a π; esso potrà quindi essere considerato come piano di Ω′ ed avrà in Ω′ un'equazione della stessa forma $\overline{t'} = \overline{c'}$. Se ora r è una retta di questo piano uscente da Ω, sarà $t_r = c$: la sua simmetrica r' apparterrà allo stesso piano e sarà quindi $\overline{t'}_{r'} = \overline{c'}$; per l'osservazione precedente sarà dunque, per tutte le rette per Ω′ in questo piano $t' = t = c$. Il ragionamento si può invertire, cosicchè potrà affermarsi che:

" Condizione necessaria e sufficiente perchè due rette r ed s' di Ω e Ω′ rispet-
" tivamente siano complanari è che $t'_{s'} = t_r$ ".

Se p è un punto qualunque dello spazio, esso determina i raggi $\mathfrak{r}(\Omega p) = r$, $\mathfrak{r}(\Omega' p) = s'$ complanari, e ne è determinato. " Si potranno dunque assumere a rappresentanti del " punto (*coordinate del punto*) i tre raggi z_r, $z'_{s'}$, $t_r = t'_{s'}$. Il punto ne sarà univocamente " determinato purchè non appartenga al piano η ".

---

(1) Si sono soppressi qui e nel seguito gli indici ξ, η, il che permettono di fare le uguaglianze $a_\xi + b_\xi = a_\eta + b_\eta$, $a_\xi\, b_\xi = a_\eta\, b_\eta$.

Se l è una retta qualunque non incontrante o, essa determina due piani distinti $\mathfrak{p}(\Omega l)$, $\mathfrak{p}(\Omega' l)$, e ne è individuata. Si potranno assumere a rappresentanti della retta le equazioni dei due piani; e si può imporre alle variabili t e t', nelle due equazioni, di essere costantemente uguali; allora le soluzioni comuni alle due equazioni, *che rappresentino un punto,* rappresenteranno un punto della retta. " Le due *equazioni della* " *retta* assumeranno la forma:

$$az + bt + c = 0 \qquad dz' + et + f = 0 \tag{2}$$

" dove a e $d \neq 0$ ". La rappresentazione si estende da sè al caso che una delle costanti a o d sia nulla; risulterà allora determinato t indipendentemente da z o z' e conseguentemente una di queste variabili sarà ancora determinata indipendentemente dall'altra, mentre questa sarà completamente arbitraria. Si avrà cioè una retta per Ω o per Ω'. Se invece si supponesse $a = d = 0$, non si rappresenterebbe che la retta o, ovvero i due piani coinciderebbero.

Se delle due equazioni che rappresentano una retta si fa una combinazione lineare, si può disporre del parametro di questa combinazione in modo che l'equazione lineare risultante sia soddisfatta quando alle variabili si diano i valori delle coordinate di un punto assegnato. Viceversa, data un'equazione lineare fra le variabili z, z', t:

$$\alpha z + \delta z' + \beta t + \gamma = 0 \tag{3}$$

e l'equazione (1) d'un piano di Ω (ove si supponga $a \neq 0$, per modo che il piano non passi per o), si può formarne una combinazione lineare in cui sia nullo il coefficiente di z e che rappresenti quindi un piano di Ω', e *se questo piano, insieme con* (1), *determina una retta,* tutti i punti di questa retta soddisferanno all'equazione (3). Se dunque le coordinate di due punti soddisfanno la (3), vi soddisferanno pure tutti i punti della loro congiungente, le cui equazioni sono costituite dall'equazione (1) del piano che da Ω projetta quei due punti e dall'equazione che si ottiene eliminando z fra (1) e (3). [Non va dimenticata qui la restrizione che si suppone $a \neq 0$, cioè quei due punti non complanari con Ω e Ω'. Su questo caso ritorneremo tosto. — Qualora si supponesse $a = 0$ si potrebbe ancora, formalmente, eliminare la z fra la (3) e la (1), ma si riotterrebbe generalmente la (1) e si cadrebbe nel caso d'indeterminazione già citato a proposito del sistema (2) — a meno che fosse anche $\alpha = 0$ oppure $\delta = 0$, nel qual caso (3) e (1) (con $a = 0$) formerebbero senz' altro un sistema (2) e rappresenterebbero una retta per Ω' o per Ω].

Ciò posto si consideri un piano $\mathfrak{p}(mnp)$ non passante per o; fra i tre punti m, n, p si potrà sceglierne due m, n, la cui congiungente non incontri o e si rappresenti quindi con un sistema (2), e si potrà formare delle equazioni di questo una combinazione lineare (3) che sia soddisfatta anche da p. Se allora anche $\mathfrak{r}(mp)$ e $\mathfrak{r}(np)$ non stanno in piani per o, i punti di queste medesime rette soddisfanno la (3) e così ancora i punti delle rette che congiungono m, n, p rispettivamente con punti di $\mathfrak{r}(np)$, $\mathfrak{r}(mp)$, $\mathfrak{r}(mn)$ — almeno finchè queste congiungenti non sono complanari con o. — L'eccezione circa queste rette si rimuove subito osservando che, quando $m\, n\, p$ non appartengano ad un piano per o, si può sempre (in quanto non servono ad altro che alla determinazione del piano) mutarli in altri tali che un punto il quale appartenesse al piano in quanto appartiene ad una sua retta per m, n o p complanare con o, sia assegnato al piano medesimo da una retta in differenti condizioni. Dunque " tutti " i punti di un piano non passante per o soddisfanno ad una stessa equazione della " forma (3) „. D'altra parte si è già visto che " anche i punti di un piano per o soddisfanno ad una determinata equazione della forma (3) con $\alpha = \delta = 0$ „.

Reciprocamente " se quattro punti $mnpq$ soddisfanno una stessa equazione (3) " sono complanari „. [Si debbono supporre i quattro punti a 3 a 3 non allineati, altrimenti la proposizione diviene illusoria]. Si supponga infatti che $\mathfrak{p}(mnp)$ non passi per Ω; i piani $\mathfrak{p}(mnp)$ e $\mathfrak{p}(\Omega pq)$, avendo a comune il punto p, si segano secondo una retta, la quale dovrà rappresentarsi nella forma (2) tosto che, come può supporsi [1], $\mathfrak{p}(\Omega pq)$ non passi per o; e questa retta dovrà soddisfare tanto all'equazione della forma (3) cui soddisfanno i punti di $\mathfrak{p}(mnp)$, quanto a quella della forma (1) del piano $\mathfrak{p}(\Omega pq)$. Ma i coefficienti di (3) sono determinati dalle coordinate di $m\,n\,p$ (o almeno ne son determinati i rapporti [2]) e l'equazione del piano $\mathfrak{p}(mnp)$ non differisce quindi dall'equazione (3) cui, per ipotesi, soddisfanno i quattro punti m, n, p, q: così è completamente determinato un sistema della forma (2) equivalente al sistema (3) (1) e contenente fra i punti che lo soddisfanno tutti quelli dell'intersezione di $\mathfrak{p}(mnp)$, $\mathfrak{p}(\Omega pq)$. Quel sistema della forma (2) rappresenta $\mathfrak{r}(pq)$; dunque l'intersezione di quei due piani è contenuta in $\mathfrak{r}(pq)$ e coincide così con essa. Vale a dire che q appartiene a $\mathfrak{p}(mnp)$.

---

(1) Infatti come punto p si può prendere uno qualunque dei punti rappresentati come m, n, p: è allora chiaro che se tutti appartenessero a $\mathfrak{p}(oq)$, anche $\mathfrak{p}(mnp)$ passerebbe per o, anzi coinciderebbe con $\mathfrak{p}(oq)$; e risulta incidentalmente dimostrato che anche allora i 4 punti sono complanari.

(2) Perchè non supponiamo alla moltiplicazione la proprietà commutativa, non sarà forse inutile esporre uno dei calcoli che permettono quest'affermazione ed altre che seguiranno, come altre simili, sebbene più semplici, furono fatte già. L'equazione (3) debba essere soddisfatta dai punti m, n, p di coordinate $(z_1 z_1' t_1)$ $(z_2 z_2' t_2)$ $(z_3 z_3' t_3)$. Si indichino con $(3_1)(3_2)(3_3)$ le equazioni che si ottengono sostituendo in (3) a $(z z' t)$ rispettivamente questi valori; sottraendo (3_2) e (3_3) da (3_1) si ha:

$$\alpha(z_1 - z_2) + \delta(z_1' - z'_2) + \beta(t_1 - t_3) = 0 \qquad \alpha(z_1 - z_3) + \delta(z_1' - z_3') + \beta(t_1 - t_3) = 0$$

onde

$$\alpha + \delta\, {}^{z_1'-z_2'}/_{z_1-z_2} + \beta\, {}^{t_1-t_2}/_{z_1-z_2} = 0 \qquad \alpha + \delta\, {}^{z_1'-z_3'}/_{z_1-z_3} + \beta\, {}^{t_1-t_3}/_{z_1-z_3} = 0 \tag{I}$$

e sottraendo

$$\delta\left({}^{z_1'-z_2'}/_{z_1-z_2} - {}^{z_1'-z_3'}/_{z_1-z_3}\right) + \beta\left({}^{t_1-t_2}{}_{z_1-z_2} - {}^{t_1-t_3}/_{z_1-z_3}\right) = 0$$

ossia, sottraendo dai due membri il 2° termine e dividendo davanti per β e di dietro per ${}^{z_1'-z_2'}/_{z_1-z_2} - {}^{z_1'-z_3'}/_{z_1-z_3}$,

$$\beta\,|\,{}^{\delta} = \left({}^{t_1-t_3}/_{z_1-z_3} - {}^{t_1-t_2}/_{z_1-z_2}\right) \Big/ \left({}^{z_1'-z_2'}/_{z_1-z_2} - {}^{z_1'-z_3'}/_{z_1-z_3}\right).$$

Da una delle (I), per es. la 1ª, dividendo dinnanzi per β si ha poi

$$\beta\,|\,{}^{\alpha} + \beta\,|\,{}^{\delta}\, {}^{z_1'-z_2'}/_{z_1-z_2} + {}^{t_1-t_2}/_{z_1-z_2} = 0$$

da cui si ricava $\beta\,|\,{}^{\alpha}$; e finalmente, dividendo davanti per β i due membri della (3_1), si ricaverà $\beta/^{\gamma}$.

Risulta così anche posto in evidenza che i rapporti dei coefficienti che, come si disse, sono determinati, sono quelli ottenuti per divisione a sinistra; ed infatti l'equazione (3) si muta in un'altra equivalente per moltiplicazione a sinistra di tutti i termini per uno stesso fattore.

Se $\mathfrak{p}(mnp)$ passasse per Ω, l'equazione (3) corrispondente assumerebbe la forma (1) ed allora il raggio $\mathfrak{r}(\Omega q)$ dovrebbe appartenere senz'altro a questo piano per quanto fu detto a proposito di quella prima equazione (o della equivalente del precedente numero).

" Ogni equazione della forma (3) che sia soddisfatta da tre punti mnp non alli-" neati potrà dunque chiamarsi *l'equazione del piano* $\mathfrak{p}(mnp)$ ". Date le equazioni di due piani distinti che passino per una stessa retta rappresentabile nella forma (2) si possono ottenere le equazioni di questa forma che rappresentano la retta per combinazione lineare di quelle dei due piani — come già l'equazione di un piano qualunque per la retta fu ottenuta per combinazione lineare di quelle del sistema (2).

Si ottiene così una rappresentazione più generale della retta mediante le equazioni di due piani per essa, e questa rappresentazione si estende alle rette — che finora erano state escluse — complanari con o; se infatti due piani si intersecano secondo una retta complanare con o, i punti di questa dovranno soddisfare le loro equazioni ed ogni combinazione lineare di esse: reciprocamente se le equazioni di tre piani sono tali che una di esse non è combinazione lineare delle altre due si può, con un facile calcolo determinare un unico sistema di valori per le coordinate e pei loro rapporti ottenuti per divisione a destra, che le soddisfa tutte tre e ogni loro combinazione lineare: se questi valori non rappresentano un punto i tre piani non s'incontrano; s'incontrano in caso contrario, ma non potranno mai avere comune una retta.

Una lacuna presenta ancora la precedente rappresentazione per coordinate dei punti del nostro spazio, ed è relativa ai punti del piano η (cfr. il principio del presente numero), fu essa che ci obbligò, nelle linee precedenti, a parlare dei rapporti delle coordinate; essa si elimina in modo notorio, sia definendo il punto mediante le equazioni di tre piani per esso, linearmente indipendenti, e tutte le loro combinazioni lineari, sia mediante l'uso di coordinate omogenee; si giungerà agevolmente a queste ultime introducendo nuovamente la coordinata x che al principio del numero si è eliminata, e le equazioni da sostituirsi alle (1), (2), (3) si otterranno applicando a destra del termine indipendente dalle variabili la nuova variabile x, come già per divisione a destra questa coordinata si era eliminata.

Si dovranno considerare come identici sistemi di coordinate che si ottengano l'uno dall'altro per moltiplicazione a destra di tutte le coordinate di un sistema per uno stesso raggio.

19. Completamento dello spazio projettivo. — I risultati precedenti ci mettono in grado di definire un campo di *punti ideali*, o preferibilmente *punti projettivi*, che comprende come caso particolare la varietà dei punti cui si riferiscono i nostri postulati metrici: campo nel quale è assicurata l'intersezione di piani e rette.

Chiameremo *punto projettivo* l'insieme di quattro raggi della stella Ω nel piano ξ, non tutti coincidenti con ω_ξ e dove si considerino come identiche quaterne diverse in cui i raggi omologhi differiscano solo per la moltiplicazione a destra per uno stesso fattore. Si potranno rappresentare generalmente questi raggi con $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ e si chiameranno le coordinate omogenee del punto, mentre si chiameranno coordinate non omogenee i tre rapporti $z = x_1/x_4$, $z' = x_2/x_4$, $t = x_3/x_4$. Se questi raggi sono, secondo il preced. n°, le coordinate di un punto del nostro spazio fondamentale si dirà che questo punto e il nominato punto projettivo coincidono.

Si dirà *piano projettivo* l'insieme dei punti projettivi le cui coordinate non omogenee soddisfanno ad una equazione della forma (3) e a tutte quelle che dalla medesima si ottengono moltiplicando a sinistra tutti i coefficienti per uno stesso fattore (ovvero le cui coordinate omogenee soddisfanno all'equazione (3) resa omogenea mercè la moltiplicazione a destra per x_4).

Si dirà *retta projettiva* l'insieme di punti projettivi comuni a due piani projettivi distinti (e a tutti quelli che si deducono mediante combinazione lineare delle loro equazioni).

Due punti projettivi determinano una retta projettiva, tre punti projettivi non appartenenti alla stessa retta projettiva, un piano projettivo; due piani projettivi si tagliano secondo una retta, tre piani projettivi non passanti per la stessa retta hanno comune un punto projettivo. — Punti dello spazio fondamentale allineati o complanari nel senso del Cap. I sono pure punti projettivi d'una stessa retta projettiva o d'uno stesso piano projettivo; e reciprocamente, punti dello spazio fondamentale che, in quanto punti projettivi, appartengano ad una stessa retta o piano projettivi sono allineati o complanari. — Se tre piani hanno comune un punto dello spazio fondamentale, e, in quanto piani projettivi, hanno comune una retta projettiva, avranno comune una retta di punti dello spazio fondamentale, contenuta in detta retta projettiva (perchè due di quei piani, avendo comune un punto, avranno una retta comune, e questa sarà contenuta in quella retta projettiva e quindi comune ai tre piani).

Il nostro *spazio projettivo* così costruito godrà senz'altro di tutte le note proprietà di cui si fa uso nella geometria projettiva, riguardo all'incidenza di punti, rette e piani (*Verknüpfungsaxiome* secondo lo Hilbert).

§ 2. — La geometria projettiva e la metrica.

20. Il teorema di Pappo-Pascal. — Noi siamo ora in grado di dimostrare senza difficoltà il teorema di Pascal per la coppia di rette: completato infatti lo spazio come nel precedente §, non esiste più alcuna limitazione al trasporto delle proprietà grafiche per projezione, e basterà quindi dimostrare il teorema per una particolar coppia di rette. Si può allora trasportare al caso nostro la dimostrazione insegnata dal sig. Schur nei Math. Ann. 51 (1). Riassumerò molto brevemente quella dimostrazione dando rilievo alle poche osservazioni complementari che qui occorrono: nel seguito (Cap. III, n. 33) riotterrò lo stesso risultato per tutt'altra via, la quale mi pare anche degna di nota.

Occorre premettere che il prodotto di due simmetrie rispetto a piani per una stessa retta non è una simmetria, il prodotto di tre simmetrie rispetto a piani per una retta è una simmetria rispetto a un piano per quella retta medesima. Sia r la retta per cui passano i piani di simmetria $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$: siano $\Sigma_1\, \Sigma_2\, \Sigma_3$ le tre simmetrie;

(1) *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie.*

se $\Sigma_2\sigma_1 = \sigma_1''$ sarà $\Sigma_2\Sigma_1\sigma_1 = \sigma_1''$, e $\Sigma_2\Sigma_1$ e Σ_2 stabiliscono la stessa corrispondenza fra i punti dei piani σ_1, σ_1''; ma esiste una sola simmetria che scambia due dati punti o tien fissa una retta data aderente ad essi: così, se $\Sigma_2\Sigma_1$ fosse una simmetria, coinciderebbe con Σ_2, σ_2 dovrebbe essere per Σ_1 piano di punti fissi e quindi $\sigma_2 = \sigma_1$, $\Sigma_2 = \Sigma_1$; ma allora $\Sigma_2\Sigma_1$ sarebbe l'identità. Sia poi P un punto di σ_1 aderente ad r e sia $\Sigma_3\Sigma_2 P = P'$; P o P' stanno in uno stesso piano $\perp r$; se questo piano incontra r, sia O il punto d'incontro e sia $M \epsilon PP'$; si ha $MOP = MOP'$ e la congruenza così definita sul piano (n. 3) è un ribaltamento intorno a $\mathfrak{r}(MO)$, se M è aderente a O; se M non è aderente a O, scambierà P e P' il ribaltamento intorno alla $\perp \mathfrak{r}(MO)$ in O. Questo ribaltamonto del piano può sempre ottenersi mediante una simmetria rispetto al piano determinato da r e dall'asse del ribaltamento. Il prodotto di $\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1$ per questa simmetria ha il piano $\mathfrak{p}(rP)$ come piano di punti fissi: se esso non è l'identità, è una simmetria rispetto a questo piano. Ora lo stesso deve dirsi del prodotto di $\Sigma_3\Sigma_2$ per la medesima simmetria. Se il primo prodotto non fosse l'identità, lo sarebbe il secondo e $\Sigma_3\Sigma_2$ sarebbo una simmetria, contro le precedenti conclusioni; così sarà una simmetria $\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1$. — La dimostraziono si svolge con maggior semplicità se sul piano $\perp r$ per P o P' esiste una retta r_1 non aderente ad r, il che è certamente il caso se questo piano non incontra r. Infatti ciascuna simmetria, Σ_1, Σ_2, Σ_3, induce su r_1 un ribaltamento e quindi il loro prodotto ancora un ribaltamento (7 t. 13 e 10), onde immediatamente si vede cho il prodotto delle tre simmetrie è la simmetria rispetto al piano che unisce r con uno dei punti fissi in questo ribaltamento o rispetto al piano per r perpendicolare a questo.

Premesse queste osservazioni, siano $A_1A_3A_5$ tre punti projettivi di nna retta projettiva, $A_2A_4A_6$ tre punti d'una retta projettiva giacente con questa in uno stesso piano projettivo. I 6 punti saranno projettati da Ω secondo rette (dello spazio fondamentale). Le due rette sostegni dell'esagono possono sempre, per projezione, immaginarsi trasportate su due piani per Ω, simmetrici rispetto a un piano σ, per es. sui due piani ξ, η del n° 17. Si seghi allora la figura mediante un piano $\perp \sigma$, non passante per Ω e che tagli in punti dello spazio fondamentale le 6 rette nominate (XXII); si otterrà un nuovo esagono $a_1a_3a_5$, $a_2a_4a_6$ a cui si potrà ora senza ulteriori modificazioni applicare la dimostrazione del sig. Schur: siano g e g' le duo rette sostegno dell'esagono e sia r una retta di σ non perpendicolare al loro piano. Siano $g_1'g_3'g_5'$ le simmetriche di g rispetto ai piani $\mathfrak{p}(ra_1)$, $\mathfrak{p}(ra_3)$, $\mathfrak{p}(ra_5)$; $g_2\, g_4\, g_6$ le simmetriche di g' rispetto a $\mathfrak{p}(ra_2)$, $\mathfrak{p}(ra_4)$, $\mathfrak{p}(ra_6)$. Le precedenti osservazioni circa ai prodotti di simmetrie mostrano che ciascuna retta con apice è complanare con ciascuna retta senza apice, ma rette con o rette senz'apice non saranno complanari fra loro perchè il loro piano dovrebbe essere $\mathfrak{p}(gg')$. Ciascuna retta $\mathfrak{r}(a_ia_l)$ (i dispari, l pari) sta sul $\mathfrak{p}(g_ig_l')$.

Si considerino i seguenti punti projettivi:

D_1 intersezione di	$\mathfrak{r}(a_1a_2)$, $\mathfrak{r}(a_4a_5)$	F_1 intersezione di	$g_3'g_6$
D_2 „ „	$\mathfrak{r}(a_5a_6)$, $\mathfrak{r}(a_2a_3)$	F_2 „ „	$g_1'g_4$
D_3 „ „	$\mathfrak{r}(a_6a_1)$, $\mathfrak{r}(a_3a_4)$	F_3 „ „	$g_5'g_2$.

e le rette projettive:

$$d_1 = \mathfrak{r}(F_2F_3) = \text{intersezione di } \mathfrak{p}(g_1'g_2),\ \mathfrak{p}(g_4g_5')$$
$$d_2 = \mathfrak{r}(F_3F_1) = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mathfrak{p}(g_5'g_6),\ \mathfrak{p}(g_2g_3')$$
$$d_3 = \mathfrak{r}(F_1F_2) = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mathfrak{p}(g_6g_1'),\ \mathfrak{p}(g_3'g_4)$$

D_1, D_2, D_3 stanno, come si vede dal quadro precedente, su d_1, d_2, d_3 rispettivamente e quindi sul piano projettivo $\mathfrak{p}(F_1 F_2 F_3)$, e perciò sulla retta projettiva intersezione di questo piano con $\mathfrak{p}(gg')$.

21. La geometria projettiva. — Il sig. Schur, nolla citata memoria, mostra come, sulla base del teorema di Pascal e di quello di Desargues si possa dimostrare il teorema fondamentale di Staudt e istituire quindi l'intera geometria projettiva. Per altra parte il sig. Hilbert giunge allo stesso risultato, per via analitica, dimostrando la proprietà commutativa della moltiplicazione, definita al n° 17, mediante il teorema di Pascal. Io non m' intratterrò quindi ulteriormente sopra questo argomento.

Mi piace invece di rilevare come il concetto di ordine degli elementi di una forma di prima specie non abbia avuto fin qui alcuna parte nella istituzione della nostra geometria e non abbia più alcuna ragiono di averne in seguito, in tutto lo sviluppo della geometria projettiva, giacchè è interamente stabilita la rappresentazione per coordinate e la geometria analitica.

È essenziale notare che, per questa costruzione della geometria projettiva, non è necessario che a espressioni aritmeticamente irreduttibili fra loro nel campo di numeri definito al n° 17 — (così, imitando lo Hilbert, sarà conveniente chiamare d'or innanzi l'insieme degli elementi su cui si opera colle regole aritmetiche del n° 17) — corrispondano raggi diversi dei piani coordinati, pur tenendo conto della proprietà commutativa della moltiplicazione ora introdotta; bensì è necessario soltanto che a raggi diversi corrispondano numeri o espressioni fra loro aritmeticamente irreduttibili.

Per chiarire ci riferiremo alle espressioni — numeri — generate dalle operazioni definite al n° 17, che, per comodità, trasporteremo dalla stella al piano projettivo. Sono fissati nel piano due assi ξ, η: il loro punto d'incontro si chiama 0; sui due assi inoltre sono fissati due punti ω_ξ, ω_η. Ad ogni punto di ciascuno degli assi si fa corrispondere un elemento aritmetico — numero — e il punto medesimo si rappresenta collo stesso simbolo di questo numero affetto dall'indice ξ o η secondochè si trova sull'uno o sull'altro asse. Si attribuisce uno stesso numero a punti dei due assi allineati con uno stesso punto Π sulla retta $\mathfrak{r}(\omega_\xi \omega_\eta)$ e fuori degli assi: per la definizione della moltiplicazione occorre inoltre che fra i numeri del nostro campo se ne distingua uno da chiamarsi 1 (e quindi 1_ξ e 1_η i punti corrispondenti sugli assi ξ, η) per cui, qualunque sia il numero a, $a \cdot 1 = a$. Se, conservando le comuni convenzioni aritmetiche, si pone $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3, \ldots\ldots, a \cdot a = a^2, \ldots\ldots$ si mostra che, mediante le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione definite al n° 17 (tenendo conto, per quest'ultima, che la proprietà commutativa della moltiplicazione elimina anche la differenza fra divisione a destra e a sinistra), si possono costruire tutti i punti degli assi, corrispondenti agli elementi del campo di razionalità che ha per base il sistema dei numeri corrispondenti a quanti si vogliano punti fissati arbitrariamente sugli assi. Ora si può supporre che due elementi di questo campo, fra loro aritmeticamente irreduttibili, rappresentino tali successioni di operazioni che conducano allo stesso punto finale. La differenza fra questi due elementi rappresenterà allora lo 0. L'insieme di tutti gli elementi rappresentanti lo 0 costituisce ovidentemente un modulo (*Zahlenmodul*) con coefficienti appartenenti al campo di razionalità sopra nominato; e rappresentano uno stesso punto tutte le espressioni di questo campo di razionalità, congrue fra loro rispetto a quel modulo. Il prodotto di due punti p, q non sarà mai lo 0 se non è 0 almeno uno di essi, come si vede considerando direttamente l'operazione di moltiplicazione definita al n° 17. In particolare, se il campo di razionalità considerato è il campo naturale generato dall'elemento 1, gli elementi rappresentanti lo 0 saranno tutti quelli della forma $\frac{h}{k}n$ dove n è un numero primo e k non è divisibile per n.

È evidente come si possa verificare una geometria quale quella qui accennata. Si consideri, per es., il piano numerico costituito da tutte le coppie (xy) di numeri razionali, e si chiami punto l'insieme di tutte le coppie le cui coordinate omologhe differiscono fra loro per numeri della forma $\frac{h}{k}n$, dove n è un numero primo fisso e k non è divisibile per n; si chiamino altresì punti gli aggregati di tali coppie in cui una almeno delle coordinate ha il denominatore multiplo di n ed in cui i rapporti fra le coordinate — prese nello stesso ordine — contengono tutti ancora n a denominatore oppure differiscono fra loro per numeri della forma $\frac{h}{k}n$ sopra nominata. Vi si chiami retta: 1° ogni aggregato di questi punti le cui coordinate non hanno al denominatore il fattor n e che fanno prendere ad uno stesso trinomio $ax+by+c$ $\left(a, b, c\right.$ razionali e con denominatore non divisibile per n; a, b non entrambi della forma $\left.\frac{h}{k}n\right)$ valori della forma $\frac{h}{k}n$, più il punto le cui coordinate hanno al denominatore il fattore n ed hanno un rapporto che differisce da $-\frac{b}{a}$ per un numero della forma $\frac{h}{k}n$; — 2° l'aggregato dei punti di cui almeno una coordinata ha per denominatore un multiplo di n.

Si otterrà così un piano di punti in cui si verifica la geometria projettiva nel modo sopra detto (¹).

Se in particolare si fa $n=2$, si otterrà un piano projettivo in cui si verifica il teorema di Desargues e quello di Pascal e si può quindi costruire simbolicamente la geometria projettiva e immerger questo piano in uno spazio projettivo a tre dimensioni (²); ma nella qual geometria projettiva il quarto armonico dopo tre elementi dati coincide con uno di questi tre (³).

L'esempio offerto dal sig. Fano (⁴) per dimostrare l'indipendenza della proposizione: " il quarto armonico dopo tre elementi dati è distinto da ciascuno di essi „

(¹) Cfr. n. 31.

(²) Cfr. Hilbert, l. c., § 29.

(³) Se quindi il piano projettivo è costruito, come sopra si disse, sul piano numerico costituito dalle coppie di numeri razionali (xy), la retta non contiene più di tre punti; ma un campo projettivo analogo si ottiene ancora se si allarga il detto piano numerico, allargando il campo di razionalità cui debbono appartenere x, y: dovranno allora rappresentare lo 0 i multipli di 2, con fattore di multiplicità un elemento qualunque di questo nuovo campo di razionalità.

(⁴) *Sui postulati fondamentali della geometria projettiva.* " Giornale di Battaglini „, XXX-1891.

dai postulati di appartenenza (*Verknüpfung* secondo il sig. Hilbert) è una realizzazione geometrica di questa costruzione analitica. Le presenti considerazioni mostrano appunto il posto che quel postulato occupa nello sviluppo della geometria projettiva; in mancanza di esso molte proposizioni non diverrebbero erronee, ma illusorie.

È chiaro che su queste osservazioni generali intorno alla geometria projettiva non sono senza influenza i postulati metrici del Cap. I. Così l'esistenza delle perpendicolari, in un piano, ad una sua retta esclude immediatamente il caso dianzi trattato che non esista la quaterna armonica di punti distinti: basti osservare che il teorema di Desargues nella forma del teor. 1 del n° 16 si traduce projettivamente in ciò che le perpendicolari ad una stessa retta concorrono in un punto, che può essere reale o projettivo; la quaterna formata da due punti simmetrici rispetto a una retta r, dal punto d'incontro (reale o projettivo) della loro congiungente colla r medesima e dal punto di concorso delle $\perp r$ è certamente di punti distinti. e considerazioni notissime mostrano che essa è una quaterna armonica. Poichè tutte le quaterne armoniche sono fra loro projettive, resta provato in generale che non esistono quaterne armoniche che si contraggano in tre soli punti distinti.

All'opposto, seguendo passo passo le considerazioni che si faranno ai n[i] 31 e 34, è facile vedere come non si cada in contraddizione coi nostri postulati fissando il numero n del precedente discorso a 3 e si possa così ottenere una metrica in cui ogni retta possiede tre soli punti (reali) distinti.

22. Le metriche projettive. — Istituita la geometria projettiva, si stabilisce, con ragionamenti noti, la dipendenza da essa della geometria metrica definita nel Cap. I (¹). Limitandoci ad accennare brevemente del piano, ricorderemo l'osservazione delle linee precedenti, le perpendicolari ad una retta concorrere in un punto che si potrà dire, secondo una locuzione comune, il *polo assoluto* di quella retta. Il ribaltamento intorno ad una retta è allora una omologia armonica che ha per asse la retta e per centro il suo polo assoluto. Il polo assoluto di una retta è interamente determinato da due perpendicolari a questa. Se allora due rette hanno due perpendicolari comuni — (hanno lo stesso polo assoluto) — tutte le perpendicolari all'una sono perpendicolari all'altra; e il loro punto di concorso è polo assoluto di tutte queste perpendicolari comuni, e il loro comune polo è pure polo di ogni retta per questo punto di concorso. Se al contrario due rette hanno una sola perpendicolare comune, a due a due le perpendicolari a questa non hanno altre perpendicolari comuni: i poli assoluti di tutte queste rette sono distinti fra loro. — Generalmente si dirà perpendicolare ad una retta anche una retta projettiva che passi pel polo assoluto di quella.

Se due rette m, n s'incontrano in un punto O che non sia polo assoluto di tutte le perpendicolari a una di esse, i loro poli assoluti sono distinti, perchè si è mostrato che se due rette hanno lo stesso polo tutte le perpendicolari a ciascuna di esse hanno per polo assoluto il loro punto di concorso. La congiungente i due poli è perpendicolare comune alle due rette; e nessun'altra perpendicolare comune le due rette pos-

(¹) Cfr. Pasch, l. c., §§ 19, 20. La differenza essenziale fra le presenti considerazioni e quelle del Pasch sta in ciò che noi non ammettiamo tutte le rette congruenti fra loro (cfr. il *Grundsatz*, II, p. 104 del Pasch e anche p. 147 linee 5-6).

sono avere. — Supponiamo che le due rette m e n siano perpendicolari: il prodotto dei ribaltamenti intorno a m e n (semirotazione intorno ad O, se O è reale — v. 11 t. 1) converte in sè quella retta e ne tien fermi tutti i punti (cfr. 11 t. 1), quindi si potrà chiamare ribaltamento intorno ad essa, anche se la retta non è reale.

Sia r un'altra retta qualunque per O; il ribaltamento intorno ad essa converte m ed n in altre due rette per O fra loro perpendicolari e il prodotto dei ribaltamenti intorno alle rette trasformate non potrà differire dalla precedente congruenza (come si vede distinguendo i due casi di O reale — 11 t. 3 — e O non reale — la retta dei poli è reale: 11 t. 1 —); quindi il ribaltamento intorno ad r converte in sè la retta o dei poli di m ed n, ed il polo di r sta su quella retta: sia R. La congiungente R con O è perpendicolare comune a r e o; quindi il suo polo è il punto d'intersezione (reale o projettivo) di r e o: sia $r' \equiv \mathrm{r}(RO)$ e R' il suo polo, intersezione di r e o. Il punto R' non potrà esser polo di altre $\perp r$: se infatti r_1 fosse un'altra perpendicolare a r col medesimo polo R' si potrebbe ragionare su r e r_1 come or ora su m ed n e concludere che o è anche perpendicolare a tutte le rette per il punto O_1 d'incontro di r e r_1; ma R' sarebbe allora polo di tutte le perpendicolari ad r, e così o sarebbe perpendicolare ad ogni retta del piano (incontrante r in un punto qualunque — reale o projettivo — fuori della o medesima). Ma allora i poli di tutte le perpendicolari a m (o ad n) starebbero su o o coinciderebbero col suo punto d'incontro con m (od n) medesima, contro l'ipotesi. Adunque raccogliendo:

" Se sopra una retta un punto è polo assoluto di due perpendicolari a questa " retta, esso è polo assoluto di ogni perpendicolare alla retta medesima, e tutte le per- " pendicolari ad una medesima retta — qualunque — del piano hanno lo stesso polo.

" I punti del piano che sono poli assoluti di tutte le rette per uno stesso punto " appartengono ad una stessa retta, reale o projettiva, perpendicolare comune a tutte " quelle rette. Questa retta è unica e mai reale nel caso sopra citato; in ogni altro " caso varia univocamente col punto considerato e, quand'anche essa sia projettiva, " questo punto deve considerarsi come il suo polo assoluto ".

Se r è una retta qualunque del piano, r' una sua perpendicolare, che la incontri in O, R' il polo assoluto di questa (su r), O e R' possono chiamarsi *punti associati* (1).
" Corrispondentemente ai due casi distinti nel precedente enunciato, può supporsi che " uno stesso punto sia associato a tutti i punti della retta ovvero ad un unico: se " avviene il primo caso su una retta del piano, lo stesso avviene sopra ogni altra, " fatta eccezione per la perpendicolare comune a tutte le rette del piano: se avviene " il secondo caso su una retta del piano non perpendicolare ad ogni altra, o su due " diverse rette projettive (vale a dire sopra rette di cui una non possa essere la sud- " detta retta eccezionale) si verificherà pure il secondo caso sopra ogni altra retta: " il gruppo costituito da due punti, dal loro punto medio e dal punto associato a " questo è armonico ".

Si ha così la distinzione fra le metriche a polarità assoluta degenere (paraboliche) e a polarità assoluta non degenere. Esse potranno poi essere la metrica di Euclide, di Lobacefski o di Riemann, ovvero le metriche poste recentemente in evi-

(1) *Verknüpfte* secondo il Pasch.

denza dal sig. Dehn, ovvero altre di cui sarà discorso tra poco, ed altre ancora, a seconda dei nuovi postulati che si vorranno aggiungere.

Per ciascuna di esse occorrerà certamente ritornare sui singoli postulati per verificarne l'applicabilità, ma le teorie note delle nominate geometrie permettono di lasciare al lettore questo facile còmpito. Ci limiteremo ad un'osservazione che colpisce in particolare la geometria Riemanniana.

Quando si costruiscono le metriche projettive nel modo più uniforme, assegnando fin da principio una conica o quadrica assolute, e intendendo che le rette metriche debbono essere contenute nelle rette projettive dello spazio, posto così a base della definizione medesima della metrica, ne risulta una definizione della congruenza come trasformazione projettiva che muta in sè l'assoluto, e non si ricerca particolarmente la dipendenza di questa trasformazione da singole congruenze di coppie di punti. Di qui una lieve divergenza dalla nozione di congruenza fra sistemi introdotta al n. 3, la quale si dimostra bensì priva di importanza per le geometrie iperbolica e parabolica, ma non ugualmente per la geometria ellittica. Due cerchi del piano ellittico possono invero avere 4 punti comuni: se a, b sono i centri dei due cerchi, $c\,c'c''c'''$ i 4 punti comuni ad essi, questi si distinguono in due coppie che chiameremo $cc', c''c'''$, per modo che le terne abc, abc' si convertono l'una nell'altra per una congruenza, nel nuovo significato (la simmetria rispetto alla retta ab), e così pure le terne abc'', abc'''; ma non così una delle prime terne in una delle seconde, quantunque sussistano le congruenze, per es., $ab \equiv ab,\ ac \equiv ac''.\ bc \equiv bc''$.

A queste osservazioni ci rannoderemo tosto col n. 29, ove uno studio più profondo del post. IX, porterà ad escludere anche queste ultime contraddizioni colla geometria ellittica ed altre più generali.

CAPITOLO III.

SAGGIO SULL'INDIPENDENZA E SULLA CAPACITÀ DEI POSTULATI.

§ 1. — Sull'indipendenza dei postulati I-XXI.

23. — In questo § dimostrerò mediante esempî l'indipendenza ordinata della massima parte dei postulati ammessi nel Cap. I. Condiziono logica primordiale a cui deve soddisfare un qualsiasi sistema di postulati è che con esso non si enuncino proprietà di enti di cui non si sia dichiarata l'esistenza: i postulati che enunciano questa esistenza sono allora, per lor natura, indipendenti dai rimanenti. e tale indipendenza non potrà esser maggiormente chiarita da qualsiasi esempio. Sono così senz'altro messi fuori di discussione i postulati: I — esistenziale della classe dei punti —, II — esistenziale di una relazione fra coppie di punti —, XVI — che enuncia l'esistenza di un punto fuori d'una retta —, XX — che enuncia l'esistenza di un punto fuori d'un piano —.

24. I POSTULATI GENERALI DELLA CONGRUENZA (III-IX). — Finchè si afferma (II) che la congruenza è una relazione fra le coppie di punti, non si distingue tal relazione da alcun'altra tra coppie qualsiansi di elementi, onde certamente sarà ordinatamente indipendente dagli altri il primo postulato che ne assegni una qualsiasi proprietà, qui il post. III.

A mostrare l'indipendenza ordinata dei rimanenti postulati della congruenza, valgano i seguenti esempî:

Post. IV. — Si interpreti " punto " in " numero intero e positivo " e si dica " $ab \equiv cd$ " quando " $a^b = c^d$ "; sarà bensì $c^d = a^b$ (III), ma sarà generalmente $b^a \neq d^c$.

Post. V. — Si interpreti " punto " in " numero intero e positivo " e si dica " $ab \equiv cd$ " quando $a \times b = c \times d$; saranno soddisfatti i postulati III, IV, non il V.

Post. VI. — Si interpreti " punto " in " punto euclideo " e si dica " $ab \equiv cd$ " quando " per le coppio ab, cd passano due rette parallele ": saranno soddisfatti i post. III-V, non il VI.

Post. VII. — Si intorpreti " punto " in " punto euclideo " e si dica " $ab \equiv cd$ " quando " qualunque retta contenente una delle coppie è perpendicolare a qualche " retta contenente l'altra "; saranno soddisfatti i primi 6 postulati. non il VII.

Post. VIII. — Non sarà soddisfatto, ma saranno verificati tutti i precedenti quando si interpreti " punto " in " numero con segno " e la relazione " $ab \equiv cd$ " nella relazione " $a - b = c - d$ ".

Post. IX. — L'indipendenza di questo postulato dai precedenti dipende essenzialmente da ciò, che in esso per la prima volta si considerano sistemi di più di due punti. Si limiti il campo di punti da chiamarsi spazio, interpretando la congruenza fra coppie, per es., nell'ordinario senso euclideo, e in infiniti modi si potrà negare tal postulato, rimanendo verificati i precedenti: nel modo più semplice. si chiami spazio l'aggregato dei punti interni a un contorno chiuso qualsiasi. — Va notato che i postulati VIII e IX si combinano per esprimere la proprietà transitiva della congruenza.

25. I postulati del punto medio d'una coppia. — ***Post.*** X. — Si interpreti " punto " in " vertice di un dato rettangolo $abcd$ ", " congruenza fra due coppie " nell'ordinaria " congruenza euclidea "; non sarà verificato il post. X, bensì tutti i precedenti.

Post. XI. — Sia " punto " l'elemento d'una classe qualsiasi, che contenga almeno 4 elementi; si chiamino fra loro congruenti tutte le coppie di punti distinti; e fra loro congruenti, ma non alle prime, tutte le coppie di punti identici; sarà verificato ciascuno dei post. I-X, non l'XI°.

26. I postulati della catena. — ***Post.*** XII. — In uno spazio euclideo sia fissata una giacitura π, e si dicano congruenti le coppie che determinano segmenti uguali e ugualmente inclinati a detta giacitura. È immediato che i postulati della congruenza di coppie (III-VIII) sono verificati.

Se $ab \equiv a'b'$ la coppia ab si trasforma nella coppia $a'b'$ mediante una traslazione, una rotazione intorno a una retta $\perp \pi$ e, può darsi, una simmetria rispetto a un punto. Per effetto di queste trasformazioni, ogni sistema di punti cd ... si trasforma in un sistema di punti $c'd'$... tale che $abcd ... \equiv a'b'c'd'$... Per stabilire però la completa validità del post. IX occorre analizzare se, con queste sole trasformazioni, un sistema di punti si muti in ogni sistema congruente ad esso. Ciò equivale a chiedere se esistano sistemi congruenti aventi punti omologhi comuni, e come si passi dall'uno all'altro.

Se abc sono tre punti qualunque, esiste in generale uno e un solo punto c' tale che $abc \equiv abc'$: i due triangoli sono simmetrici rispetto al piano passante per ab e $\perp \pi$. Eccezioni si hanno: 1° quando $ab \perp \pi$; i punti c' tali che $abc \equiv abc'$ sono tutti i punti di una circonferenza di asse ab. — 2° quando il triangolo abc sta in un piano $\perp \pi$, e ab non è parallelo a π, e quando abc sono allineati; il punto c viene a mancare. — 3° quando il triangolo abc sta in un piano $\perp \pi$ ed $ab \| \pi$; esiste ed è unico il punto c', ma c e c' sono simmetrici rispetto ad ab; — 4° quando $ab \| \pi$ e il piano abc non è $\perp \pi$ nè $\| \pi$; i punti c' sono 3, cioè il simmetrico di c rispetto al piano $\perp \pi$ per ab e i simmetrici di c e di questo punto rispetto alla retta ab (o rispetto al piano $\| \pi$ per ab) [se il piano abc fosse $\| \pi$ si rientrerebbe nel caso generale].

Si vede così che, quando esiste un punto c tale che $abc \equiv abc'$, la prima figura si porta nella seconda mediante una simmetria rispetto a un piano $\perp \pi$, o rispetto a un piano $\| \pi$, o a una retta $\| \pi$ (prodotto questa delle due prime simmetrie); e tutte queste trasformazioni mutano ancora ogni sistema di punti de ... in un sistema $d'e'$... tale che, secondo la nostra definizione, $abcde ... \equiv abc'd'e'$.... Onde si ottiene che il post. IX è verificato per ogni ampliamento di un sistema di tre punti.

Se $abcd$ sono quattro punti. non esiste, in generale, un punto d' tale che $abcd \equiv abcd'$, perchè d e d' dovrebbero essere simmetrici rispetto ai piani $\perp \pi$ per ab, ac, bc; un punto d' esisterà se il piano abc è $\perp \pi$ e d non sta in esso, e sarà il simmetrico di d rispetto a questo piano; esisteranno inoltre punti d' se abc sono allineati, negli stessi casi e nello stesso modo che esistono punti d' tali che $abd' \equiv abd$. Onde ancora si verifica il post. IX pei sistemi che derivano da un ampliamento di una quaterna di punti. E ripetendo convenientemente lo stosso ragionamento, si conclude senza difficoltà per induziono por ogni sistema di punti.

Il post. X è verificato dal punto medio della coppia nel senso euclideo, e dai punti della perpendicolare in questo punto ad ab nel piano parallelo alla giacitura π; inoltre se $ab \perp \pi$, ovvero $ab \| \pi$ verificheranno pure il post. X tutti i punti del piano perpendicolare al segmento ab nel suo punto medio. Però non da tutti questi punti sarà soddisfatto il post. XI, perchè, se c è uno di questi punti e il piano abc non è $\perp \pi$, si chiami d il simmetrico di a rispetto al piano $\perp \pi$ per bc, sarà $abc \equiv dbc \equiv bdc$: quindi i punti che, rispetto ad una data coppia ab si possono assumere como punti c per soddisfare ai post. X e XI, sono: il punto medio del segmento ab se questo è obliquo a π, i punti della $\perp \pi$ per questo punto medio se ab π, finalmente tutti i punti del piano $\perp ab$ nel suo punto medio se $ab \perp \pi$.

La catena di una coppia di punti la cui congiungente euclidea sia $\perp \pi$ è dunque tutto lo spazio, ma in essa non è verificato il post. XII, perchè, se b è un punto della retta parallela alla giacitura π e perpendicolare ad un segmento ac obliquo a π nel suo punto medio, è $ab \equiv bc$, senza che b sia punto medio fra a e c.

Post. XIII. — Se però si costruisce la metrica analoga alla precedente sul piano euclideo, anzichè nello spazio (assumendo quindi come congruenti le coppie che determinano segmenti uguali e ugualmente inclinati ad una direzione fissa p) si riconoscerà tosto che anche il post. XII risulta soddisfatto. Non esiste, infatti, allora alcun punto $m' \neq m$ tale che $abm \equiv abm'$, a meno che il segmento ab non sia perpendicolare o parallelo a p. Se ora $ab \equiv bc$ e se $ab \perp$ o $\| p$, tale sarà pure bc e i tre punti abc saranno allineati onde $c \epsilon a/b$: se poi $ab \equiv bc$ ed ab è obliquo a p, non esiste, come si osservò, un punto c' tale che $acb \equiv ac'b$, onde ancora $c \epsilon a/b$.

Ma, assegnata la coppia ab, saranno simmetrici di a rispetto a b i tre vertici residui del rettangolo avente un vertice in a, il centro in b e due lati paralleli (e due perpendicolari) a p. Non sarà dunque verificato il post. XIII.

27. Il postulato XVII del piano. — Si ricordi che due figure uguali di un piano euclideo si sovrappongono quando si portano l'uno sull'altro due loro triangoli omologhi abc, $a'b'c'$. E questa sovrapposizione può ottenersi medianto la traslazione $a'a$, alla quale, se b' ne è portato nel punto $b'' \neq b$, si farà seguire una simmetria rispetto alla congiungente a col punto medio di bb'' se $a\,b\,b''$ non sono allineati, ovvero una simmetria rispetto ad a se $a\,b\,b''$ sono allineati. Se, dopo ciò, la posizione c''' di c' non coincide con c, basterà operare ancora la simmetria rispetto alla ab.

Ciò posto, si immagini il piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane di cui siano X ed Y gli assi, e vi si considerino tutti i punti le cui coordinate sono numeri razionali i cui denominatori hanno per fattori primi solo somme di due quadrati (fra gli altri fattori possano quindi contenere tutte le potenze di $2 = 1^2 + 1^2$). Fra questi punti esiste evidentemente il punto medio di ogni coppia di punti del campo, e il simmetrico di un punto qualunque rispetto a un altro $\Big[$ perchè se $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ sono due punti, il loro punto medio è $\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{2}, \frac{\beta + \beta_1}{2}\right)$ e il simmetrico del piano rispetto al secondo, $(2\alpha_1 - \alpha, 2\beta_1 - \beta)$; a meno di fattori 2 i denominatori di queste coordi-

nate non posseggono quindi altri fattori che quelli dei denominatori di α, β, α_1, β_1].
Inoltre il simmetrico del punto $(\xi\eta)$ rispetto alla retta dei punti $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ è

$$\left(\xi+2\frac{(\beta-\beta_1)[\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]}{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2},\ \eta-2\frac{(\alpha-\alpha_1)[\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]}{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}\right).$$

Il denominatore del termine $\frac{(\beta-\beta_1)[\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]}{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}$, prima della riduzione ai minimi termini, ha per fattori i denominatori di $\beta-\beta_1$, di $\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)$ e una somma di quadrati dei numeratori di $\alpha-\alpha_1$ e di $\beta-\beta_1$ previamente ridotti allo stesso denominatore. Ciascuno dei primi fattori porterà nel denominatore soli fattori primi somme di due quadrati. Quanto all' ultimo occorre ricordare che una somma di due quadrati ha per soli fattori primi somme di due quadrati, oltre i fattori che fossero comuni ai due addendi. Ma si supponga che sia m il fattor comune ai numeratori di $\alpha-\alpha_1$ e di $\beta-\beta_1$ (solo fattore che si debba ritrovare comune ai due numeratori dopo riduzione delle due espressioni al loro minimo comun denominatore) e sia m' il prodotto degli eventuali suoi fattori primi non somme di due quadrati. Ciascun denominatore di $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \ldots$ sarà primo con m'. Si ponga $\alpha-\alpha_1=m'\frac{\lambda}{\nu}$, $\beta-\beta_1=m'\frac{\kappa}{\rho}$; risulta $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=m'\left(\frac{\lambda}{\nu}\beta_1-\frac{\kappa}{\rho}\alpha_1\right)$ e ciascuno dei numeratori di $\alpha-\alpha_1$, $\beta-\beta_1$, $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ conterrà il fattor m'. Così la riduzione ai minimi termini della frazione totale considerata condurrà a ridurre il fattore m'^2 proveniente nel denominatore dall'espressione $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2$, col fattore medesimo m'^2 che nel numeratore di $(\beta-\beta_1)[\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]$ necessariamente si presenta.

Le stesse osservaz. si ripetono per l'altra frazione $\frac{(\alpha-\alpha_1)[\eta(\alpha-\alpha_1)-\xi(\beta-\beta_1)-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]}{(\alpha-\alpha_1)^2+(\beta-\beta_1)^2}$; onde si vede che il campo di punti considerato contiene il simmetrico di ogni suo punto rispetto ad ogni sua retta: la precedente osservazione relativa all'esistenza dei punti medî e simmetrici rispetto a due punti dati, dimostra ch'esso contiene il simmetrico di un suo punto qualunque rispetto a ogni suo punto; e poichè la traslazione si effettua analiticamente per semplice somma e differenza di coordinate, si rileverà in modo analogo che ogni traslazione che porti un punto del campo in un altro, trasforma tutti i punti del campo in punti del campo medesimo: " Il campo " considerato è chiuso rispetto all'insieme delle traslazioni e delle simmetrie che tras- " formano un suo punto in un altro suo punto e, riguardo alle simmetrie, che hanno " per asse o per centro una retta o un punto del campo ".

Si chiami *spazio* della nostra geometria il campo ora definito, e vi si definisca la congruenza al modo euclideo: le precedenti osservazioni circa le trasformazioni di uguaglianza nel piano euclideo mostrano che in esso saranno verificati tutti i postulati ammessi fino al XVI incluso.

Ora, secondo la definizione adottata pel piano (n° 8), il punto (1, 1) appartiene al piano $\mathfrak{p}((00)\ (07)\ (70))$, perchè sta sulla projettante dal punto (00) il punto $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ della $\mathfrak{r}((07)\ (70))$; ma non appartiene a $\mathfrak{p}\left((00)\ \left(0\ \frac{5}{2}\right)\ (70)\right)$, perchè le rette (euclidee) che projettano il punto $(1, 1)$ dai punti $(0, 0)$, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $(7, 0)$ segano rispettivamente le rette euclidee che contengono $r\left(\left(0\,\frac{5}{2}\right)(70)\right)$, $r\left((00)(70)\right)$, $r\left((00)\left(0\,\frac{5}{2}\right)\right)$ nei punti $\left(\frac{35}{19}, \frac{35}{19}\right)$, $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{7}{6}\right)$ che non appartengono al nostro campo.

28. Il postulato XXI dello spazio. — L'indipendenza di questo postulato dai precedenti è evidente quando solo si osservi che esso ha la particolar funzione di limitare a 3 il numero delle dimensioni dello spazio. — Riguardo a questo postulato non è forse fuor di luogo l'osservare un certo qual suo carattere diverso dai rimanenti: essi riguardano generalmente soltanto proprietà della congruenza, questo afferma l'esistenza di una determinata intersezione: termine di passaggio fra l'uno e l'altro genere di postulati è il post. XVI (e il XXII). Sarebbe possibile ridurre il contenuto di questo postulato alla forma medesima dei post. XVI, XVII, XVIII, sostituendo ad esso i tre seguenti:

Post. XXI'. — **Se** *abcd* **sono quattro punti qualunque non complanari, ogni altro punto appartiene ad una almeno delle rette che da ciascuno di questi punti projettano i punti del piano dei rimanenti tre.**

Post. XXI'' e XXI'''. — **Esiste una ed una sola congruenza che tien fissi tutti i punti di un piano qualunque π e sposta qualche punto dello spazio.**

Dal post. XXI' si deduce infatti — valendosi all'uopo della proposizione analoga già dimostrata pel piano — che la congruenza postulata in XXI'' non può lasciar fissi punti aderenti a π. D'altronde XXI''' dimostra che la congruenza medesima è involutoria, e permette quindi di definire rette e piani perpendicolari a π e di dimostrare, per la simmetria relativa a π, le proprietà analoghe a quelle stabilite nel n° 10 per la simmetria piana. Se due piani σ e τ hanno a comune un punto P si scelga un punto M qualunque aderente a π, e da esso si conducano le perpendicolari a σ e τ: la perpendicolare da P al loro piano è comune ai due piani dati.

§ 2. — Riduzione del postulato IX della congruenza fra sistemi. Conseguenze.

29. — Riduzione del postulato IX. — Il postulato IX (il quale non differisce dal Grundsatz VIII del Pasch) ha un ufficio essenziale che fu rilevato già nell'introduzione. D'altra parte fu osservato alla fine del n° 22 che, lasciando a questo postulato una illimitata validità, ne risultano ancora contraddizioni, sian pure lievi, alla metrica Riemanniana. Ragioni queste perchè s'imponga la domanda se non sia possibile di diminuirne la capacità, ricorrendo anche al sussidio dei postulati successivi.

Osserveremo perciò che due uffici notevolmente distinti compie il post. IX nel sistema delle nostre deduzioni. Per una parte esso conduce nel n. 3 alla definizione della trasformazione per congruenza, e ricompare nei ragionamenti seguenti ogni volta che si afferma l'esistenza di una tal trasformazione. Per altra parte, applicato nel suo più esteso significato, esso permette di dedurre l'esistenza della trasformazione per congruenza da un numero limitato di congruenze fra coppie di punti.

La prima applicazione è chiaramente inessenziale: basterà definire fino da principio CONGRUENZA *una trasformazione univoca di un sistema di punti in un altro sistema di punti, tale che coppie di punti corrispondenti siano congruenti e che, esteso il primo sistema coll'aggiunzione di un punto, si possa analogamente estendere il secondo per modo che esista una trasformazione fra i sistemi estesi, che goda delle medesime proprietà, ed in cui i primi due sistemi si corrispondano come nella trasformazione primitiva.* E si dovrà soltanto mantener sospesa ogni affermazione circa l'esistenza di tali trasformazioni.

Nel n° 4 si dovrà ancora intendere che i segni $\equiv$ nei post. X e XI abbiano il significato definito nel n° 3, riserbando ai post. XI e IX′ (che tosto si enuncerà) di dar loro forza di affermazione d'una trasformazione. Invece tale affermazione dovrà intendersi espressa col post. XVIII.

I luoghi fondamentali in cui si applica il postulato nel 2° modo sono:

1° Ogni qual volta — segnatamente nel § 2 del Cap. I — dalla congruenza di due coppie si deduce l'esistenza di una trasformazione per congruenza che porta l'una sull'altra. Casi tipici sono il t. 3 del n° 4, nella sua forma finale, e il t. 3 del n° 5.

2° Il teor. 11 del n° 10 e il teor. 10 del n° 11 ove ricorre per dimostrare l'esistenza di perpendicolari ad una retta che l'incontrino;

3° Il n° 20 ove si applica a dimostrare che il prodotto di tre simmetrie rispetto a piani per una retta è una simmetria.

Come sia possibile svincolarsi da quest'ultima dimostrazione sarà mostrato nel n° 33; così l'esistenza della perpendicolare di cui al n° 11 t. 10 fu, sotto altre ipotesi, dimostrata come conseguenza dei postulati dello spazio col teor. 9 del n° 12. Anzi questo teorema ci dice di più che in ogni punto di una retta, in ogni piano per essa, esiste la perpendicolare. Allora il teor. 10 del n° 11 risulta anch'esso immediato, poichè: se μ è una congruenza che converte in sè un piano π scambiando i due suoi punti coerenti a, a', sia $m \epsilon a/a'$ e sia r la $\perp \mathfrak{r}(aa')$ in m; il prodotto $\mu\rho_r$ tiene fissi a e a' e quindi tutti i punti della $\mathfrak{r}(aa')$; adunque, o $\mu\rho_r$ è l'identità e $\rho_r = \mu_r$, ovvero $\mu\rho_r = \rho_{aa'}$ e $\mu = \rho_{aa'}\rho_r$, cioè μ è la semirotazione del piano intorno ad m.

Così, *mediante i postulati dello spazio*, si può ridurre il campo d'applicazione del post. IX al 1° caso osservato, cioè a quanto è espresso dal

***Post.* IX′. — Se due coppie di punti sono congruenti, esiste una trasformazione per congruenza che porta la prima coppia nella seconda.**

30. SULLE METRICHE PROJETTIVE. — Si elimina così ogni limitazione al riconoscimento della geometria ellittica nel campo definito dai nostri postulati (cfr. le osservazioni finali del n° 22), e, per quanto riguarda il postulato IX, al riconoscimento in esso di una qualunque metrica projettiva rispetto a una quadrica o a una conica assoluta. È essenziale pel seguito aggiungere alcune considerazioni al riguardo, e per semplicità limiteremo il nostro esame alla metrica sopra un piano.

Si chiami spazio l'insieme dei punti di un piano esterni ad una data conica non degenere di punti reali, e si consideri in esso la metrica projettiva rispetto a quella conica come assoluto. La metrica che così resta definita sulle rette del piano (intendendosi qui per " retta „ la " retta del piano projettivo „ posto a base della definizione della metrica) è iperbolica sulle rette che tagliano la conica, ellittica su quelle che non la tagliano. Ma completamente eccezionali sono le tangenti alla conica. Su di queste tutti i segmenti sono congrui, esiste cioè una omografia per cui la conica è invariante ed in cui due punti assegnati su una tangente si trasformano in altri due punti assegnati su un'altra tangente. Risultano di qui rilevantissime eccezioni alle nozioni di punti medî e di simmetrici: di più rispetto alle tangenti mancano le simmetrie: ogni trasformazione projettiva che trasformi la conica in sè ed abbia una tangente come retta di punti fissi è l'identità.

I postulati della nostra metrica escludono così la metrica projettiva all'esterno di una conica (o all'esterno d'una quadrica ellittica, o da una parte di una quadrica rigata) se, con conveniente limitazione del campo, non si escludono le tangenti alla conica (o quadrica) medesima. Di ciò ci occuperemo nel § 4.

§ 3. — Il teorema di Desargues e il teorema di Pappo-Pascal.

Nel presente § porteremo principalmente la nostra attenzione sopra i legami fra i postulati del piano e le sue proprietà d'immersione in uno spazio superiore. Risulterà, da quanto andremo dicendo, la indipendenza ordinata dei postulati metrici del piano in unione al teorema di Desargues, del teorema di Pappo-Pascal e dei postulati *metrici* dello spazio. Nel n° 31 si mostrerà cioè che è possibile un piano in cui siano verificati i postulati I-XIX, ed in cui abbiano interpretazione i teoremi di Desargues e di Pascal, senza che detto piano possa immaginarsi immerso in uno spazio in cui si verifichino i postulati metrici; e dal n° 32 risulterà poi che, anche ammesso il teorema di Desargues, il teorema di Pappo-Pascal non può dimostrarsi col solo aiuto dei postulati I-XIX. Le condizioni per la dimostrabilità di questo teorema saranno studiate nel n° 33.

31. — Un piano metrico di nove punti e un piano projettivo di tredici. — Un esempio notevole di un piano soddisfacente ai post. I-XIX è fornito dalla configurazione dei 9 flessi di una cubica piana e delle loro 12 rette. Siano $a_1a_2a_3b_1b_2b_3c_1c_2c_3$ questi nove punti e si ordinino sulle 12 rette:

$a_1a_2a_3$	$a_1b_2c_3$	$a_1b_3c_2$
$b_1b_2b_3$	$b_1a_2c_3$	$b_1a_3c_2$
$c_1c_2c_3$	$c_1b_2a_3$	$c_1b_3a_2$
$a_1b_1c_1$	$a_2b_2c_2$	$a_3b_3c_3$

Si pongano, per definizione, le congruenze [1]

[1] Si è disposto, con questa definizione, che siano congrue coppie di una stessa terna e fra loro terne diverse per modo che ogni punto appartenga a due e due sole terne congruenti e che le coppie di vertici d'un triangolo non appartengano a tre terne congruenti. Perciò, fissata arbitrariamente una terna $a_1a_2a_3$, si è stabilito che siano congrue ad essa tre terne pei suoi tre punti e non aventi punti comuni: $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$; e congrue ancora le terne che, con $a_1a_2a_3$ hanno la stessa proprietà rispetto ad una qualunque di queste tre; quindi le terne $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$.

$$a_1a_2 \equiv a_2a_3 \equiv a_3a_1 \equiv a_1b_2 \equiv b_2c_3 \equiv c_3a_1 \equiv b_1a_3 \equiv a_3c_2 \equiv c_2b_1 \equiv b_1b_2 \equiv b_2b_3 \equiv b_3b_1 \equiv c_1a_2 \equiv$$
$$\equiv a_2b_3 \equiv b_3c_1 \equiv c_1c_2 \equiv c_2c_3 \equiv c_3c_1.$$

$$a_1b_1 \equiv b_1c_1 \equiv c_1a_1 \equiv a_2b_2 \equiv b_2c_2 \equiv c_2a_2 \equiv a_3b_3 \equiv b_3c_3 \equiv c_3a_3 \equiv a_1b_3 \equiv b_3c_2 \equiv c_2a_1 \equiv b_1c_3 \equiv$$
$$\equiv c_3a_2 \equiv a_2b_1 \equiv c_1a_3 \equiv a_3b_2 \equiv b_2c_1.$$

Coppie dei due gruppi differenti siano incongrue fra loro.

In questa metrica il punto medio di una coppia di punti coincide col simmetrico di uno qualunque di essi rispetto all'altro, ed i tre punti completano una catena: la retta della catena coincide colla catena medesima. Le rette si distinguono in due sistemi:

$$a_1a_2a_3\ ,\ b_1b_2b_3\ ,\ c_1c_2c_3\ ,\ a_1b_2c_3\ ,\ b_1c_2a_3\ ,\ c_1a_2b_3$$

e

$$a_1b_1c_1\ ,\ a_2b_2c_2\ ,\ a_3b_3c_3\ ,\ a_1b_3c_2\ ,\ b_1c_3a_2\ ,\ c_1a_3b_2\ ;$$

rette d'un medesimo sistema sono congruenti fra loro, rette di sistemi differenti incongrue. Per ogni punto passano due rette dell'un sistema e due dell'altro.

In ogni triangolo due lati appartengono ad un medesimo sistema, il terzo appartiene all'altro sistema. — Ogni ribaltamento intorno ad una retta ribalta in sè la retta congruente ad essa per ciascuno dei suoi punti scambiandone i due punti residui; le altre due rette per lo stesso punto projettano ciascuna un punto di un'altra di queste rette ribaltate e quindi sono scambiate dal ribaltamento. Così nel ribaltamento intorno a $\mathrm{r}(a_1b_1c_1)$ si scambiano i punti delle coppie

$$a_2c_3\ ,\qquad b_2a_3\ ,\qquad c_2b_3$$

e si trasformano in se stesse le rette

$$a_2c_3b_1\qquad b_2a_3c_1\qquad c_2b_3a_1$$

mentre si scambiano

$$a_1b_2c_3 \text{ e } a_1a_3a_2\quad ,\quad b_1b_2b_3 \text{ e } b_1a_3c_2\quad ,\quad c_1c_2c_3 \text{ e } c_1b_3a_2$$

e si scambiano pure

$$a_2b_2c_2 \text{ e } c_3a_3b_3$$

le quali però non incontrano l'asse del ribaltamento.

In questo piano è impossibile la configurazione dei triangoli omologici, la quale contiene 10 punti, ma diviene possibile previo un conveniente completamento del piano; si ottiene tale completamento considerando come concorrenti in un punto ideale le rette di ciascuna delle terne

$$\begin{array}{ccccc} a_1b_1c_1 & , & a_2b_2c_2 & , & a_3b_3c_3 \\ a_1b_3c_2 & , & b_1c_3a_2 & , & c_1a_3b_2 \\ a_1a_2a_3 & , & b_1b_2b_3 & , & c_1c_2c_3 \\ a_1b_2c_3 & , & b_1c_2a_3 & , & c_1a_2b_3 \end{array}$$

Chiameremo quei quattro punti rispettivamente d_4, d, d_4', d'; si dirà che essi stanno in una retta ideale (retta all'infinito): le rette della prima terna sono perpendicolari alle rette della seconda, quelle della terza alle rette della quarta.

Una configurazione quale quella definita non si può notoriamente ottenere sopra all'ordinario piano projettivo reale; essa non può nemmeno aversi nel piano immaginario, perchè le condizioni di collinearità ora stabilite, insieme con quelle precedenti relative alla configurazione semplice dei 9 flessi d'una cubica obbligherebbero, per es., ciascuno dei punti $b_1 b_2 b_3$ ad essere il coniugato armonico di d_4' rispetto agli altri due.

Ma essa può realizzarsi in un piano projettivo del tipo definito al n° 21, ove si ponga $n = 3$.

È ciò che mostra sufficientemente l'unita figura.

$a_1 = 0, 0; 0, 3; \ldots$

$b_1 = 0, -2; 0, 1; \ldots$

$c_1 = 0, -1; 0, 2; \ldots$

$a_2 = 1, 1; \ldots$

$b_2 = 1, \frac{1}{2}; 1, 2; \ldots$

$c_2 = 1, 0; 1, \frac{3}{2}; \ldots$

$a_3 = 2, 2: \ldots$

$b_3 = 2, 0; 2, 3; \ldots$

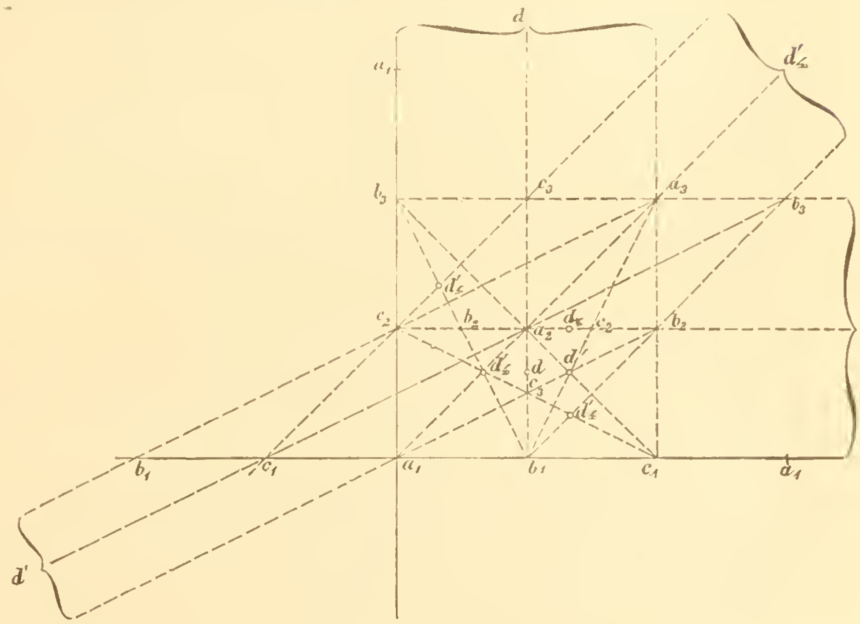
$c_3 = \frac{1}{2}, 1; 2, 1; \ldots$

$d = \frac{2}{3}, 1: x, 0 \ldots$

$_4 = 0, x; 1\ \frac{4}{3}; \ldots$

$d' = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \ldots$

$d_4' = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{1}{3}; \ldots$



Si riconosce così che il nostro piano può ancora immergersi in un conveniente spazio projettivo in cui siano verificati i postulati XX, XXI — lo spazio costruito colle coordinate projettive al n° 21, per $n = 3$ —, ma *non si può in questo spazio separare un gruppo di punti che definiscano uno spazio metrico nel quale il nostro piano sia contenuto.* In ogni piano di questo spazio e per ogni suo punto passano infatti 4 sole rette le quali (quando piano e punto appartenessero allo spazio metrico) dovrebbero distribuirsi in due coppie di rette perpendicolari (¹). Il ribaltamento intorno ad una qualunque retta di una coppia dovrebbe scambiare quelle dell'altra coppia — ciò che realmente avviene sul nostro piano di 9 punti —: quindi le rette perpendicolari sarebbero congrue fra loro. Se allora esistesse lo spazio metrico contenente il nostro piano, la perpendicolare a questo in un suo punto, per es. a_1, sarebbe congruente a

(¹) In un piano soddisfacente ai postulati I—XIX il quale non sia immerso in uno spazio maggiore, oppure sia immerso in uno in cui siano soddisfatti i postulati XX, XXI, passano per ogni suo punto almeno quattro rette. Infatti la definizione di piano e il post. XVII hanno per conseguenza che per ogni punto del piano passano almeno tre rette. Ma a ciascuna di queste rette esiste in quel punto e in quel piano la perpendicolare (n. 11 osservazioni finali e n. 12 t. 9); la relazione di perpendicolarità essendo reciproca (n. 10 t. 6), se le rette per un punto nel piano sono in numero finito, tal numero è pari: dunque se > 3, almeno $= 4$.

tutte le rette del nostro piano per quel punto, e queste sarebbero tutte congruenti fra loro, mentre è condizione essenziale pel verificarsi dei postulati X, XI che ciò non sia (e non è nella nostra definizione della congruenza).

Si è mostrata così la possibilità di un piano metrico in cui siano soddisfatti i postulati I-XIX e (previo completamento di esso piano mediante convenienti punti ideali) i teoremi di Desargues e di Pascal, senza che esso sia immergibile in uno spazio in cui siano verificati i postulati metrici.

Si rilevi come dai precedenti sviluppi risulti pure un saggio delle nuove proprietà grafiche che possono verificarsi in spazi projettivi quali furono definiti al n° 21.

Il piano metrico studiato provvede pure un esempio del caso d'eccezione riscontrato al lemma 6, del n° 9: Pel punto a_1 passano le rette di tre punti $\mathrm{r}(a_1b_2c_3)$ $\mathrm{r}(a_1b_3c_2)$ ed inoltre le altre due $\mathrm{r}(a_1b_1c_1)$ $\mathrm{r}(a_1a_2a_3)$: i due punti della prima di queste diversi da a_1 stanno sulla coppia di rette $\mathrm{r}(b_2b_3)$ $\mathrm{r}(c_2c_3)$, i due punti della seconda diversi da a_1 sulla coppia $\mathrm{r}(b_2c_2)$, $\mathrm{r}(b_3c_3)$.

Si noti infine come da questo esempio risulti la compatibilità dei post. I-XIX per semplice enumerazione dei casi in cui essi possono applicarsi (essendo finito il numero degli enti cui essi si riferiscono), indipendentemente da ogni considerazione aritmetica [1].

32. Geometria piana parabolica non-pascaliana. — Si consideri un sistema di numeri Desarguiani, non-Pascaliani, quale fu costruito dal sig. Hilbert [2] e che, facendosi qui astrazione dalle proprietà di ordinamento, possiamo enunciare brevemente così:

Si chiamino numeri tutte le funzioni costruite mediante due variabili t, s e gli elementi di un campo di razionalità dato R, colle operazioni aritmetiche fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione a destra e a sinistra) e colla convenzione che valga la relazione $ts = -st$ (in luogo di $ts = st$), mentre goda della proprietà commutativa il prodotto di una qualunque delle variabili s, t per ogni elemento del campo R, e la moltiplicazione entro il campo R medesimo. Si chiami Ω il campo numerico così costruito; in esso non vale, per definizione, la proprietà commutativa della moltiplicazione. — Se un campo numerico analogo si costruisce, dopo aver ampliato il campo R (naturalmente mediante l'aggiunzione di elementi che non siano t od s), il nuovo campo Ω' conterrà evidentemente Ω.

Noi potremo assumere come campo di razionalità R il campo di razionalità naturale, come campo ampliato R' quello che ha per base $(1, \sqrt{\alpha})$ dove α è un numero non quadrato. Ogni numero di Ω' sarà allora la somma di un numero di Ω e del prodotto di un numero di Ω per $\sqrt{\alpha}$. La proprietà distributiva della moltiplicazione, la sua commutatività rispetto ai numeri di R' e la commutabilità dei termini d'una somma rendono la cosa evidente finchè alla formazione del numero considerato non intervengano che le tre prime operazioni. Quando intervenga anche la divisione, si osservi che basterà considerare i numeri della forma $\frac{1}{n}$, dove n è un'espressione in-

---

[1] Si confrontino le considerazioni del sig. Hilbert nei *Mathematische Probleme*, " Gött. Nachr. ", 1900 e " Comptes rendus du 2me congrès intern. des math ", 1900.

[2] L. c., § 33.

tera (¹): la quale potrà quindi contenere $\sqrt{\alpha}$ solo quando è della forma $\sqrt{\alpha}a$ o $a + \sqrt{\alpha}b$, dove a e b sono numeri di Ω. Ora si ha

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,a} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha a}; \quad \frac{1}{a+\sqrt{\alpha}\,b} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}\,{}_a/^b} = \frac{1}{a}\,\frac{1-\sqrt{\alpha}\,{}_a/^b}{1-\alpha\left({}_a/^b\right)^2}\ (^2).$$

Nell'una e nell'altra espressione il denominatore è liberato dal radicale $\sqrt{\alpha}$.

Mediante il campo Ω' si costruisca un piano numerico Π' chiamando punti le coppie di numeri di Ω' e i numeri di Ω' medesimi (punti all'∞); in Π' sarà contenuto un piano numerico Π costruito allo stesso modo mediante i numeri di Ω. Si chiamino rette projettive in Π gli aggregati di punti che soddisfanno all'equazione $ax + by + c = 0$ dove $a\,b\,c$ sono numeri di Ω cui si aggiunga il punto all'infinito rappresentato da $-{}_a/^b$: si dica pure retta all'infinito l'insieme dei punti all'∞. Nel piano Π vale allora il teorema di Desargues e su ogni sua retta si può definire una metrica parabolica, chiamando medio fra due punti il coniugato armonico del punto all'infinito della retta rispetto alla coppia: ribaltamento della retta intorno a un suo punto, la corrispondenza stabilita dalla involuzione che ha per punti doppî questo punto e il punto all'infinito.

Per estendere la definizione della congruenza a tutto il piano si fissino sulla retta all'infinito due punti di Π' le cui coordinate siano numeri di Ω', non di Ω, che si desumano l'uno dall'altro mediante lo scambio di $\sqrt{\alpha}$ e $-\sqrt{\alpha}$. Il coniugato armonico di un punto all'infinito di Π rispetto a quei due punti (*punti assoluti*) apparterrà ancora a Π. Si dirà associato ad una retta di Π il coniugato armonico del punto all'infinito della retta rispetto ai due punti assoluti; ribaltamento del piano intorno a una retta l'omologia armonica che ha per asse la retta e per centro il punto ad essa associato.

Si assuma come piano (spazio) metrico il piano Π in cui si astragga dai punti all'infinito, vi si definisca congruenza ogni prodotto di ribaltamenti intorno a una retta sopra definiti; basta riprendere le osservazioni iniziali del n° 27 per riconoscere che saranno verificati tutti i nostri postulati I-XIX della congruenza sulla retta e nel piano. — Ma non sarà verificato il teorema di Pappo-Pascal, poichè non vale la proprietà commutativa della moltiplicazione nel campo numerico cui appartengono le coordinate (³).

(¹) Si può cioè considerare una sola specie di divisione, riconducendo la differenza fra le due operazioni sempre nella forma del differente ordine dei fattori di un prodotto. Si ha infatti $a/_b = a\,.\,{}^1/_b$, ${}_b/^a = {}_b/^1\,a$. D'altra parte si ha ${}_a/^a = 1$; applicando allora al rapporto ${}_a/^a$ la precedente decomposizione, si ha ${}_a/^1\,.\,a = 1$ e quindi ${}_a/^1 = {}^1/_a$: l'unico rapporto si potrà rappresentare con $\frac{1}{a}$ e si avrà in generale: $a/_b = a\,\frac{1}{b}$, ${}_b/^a = \frac{1}{b}\,a$.

(²) La riduzione del denominatore alla forma $1 + \sqrt{\alpha}m$ mediante divisione per a è resa indispensabile dalla non commutabilità dei fattori di un prodotto: si ha infatti, in generale,

$$(m+n)(m-n) = m^2 - mn + nm - n^2;$$

i due termini medî si eliminano se $mn = nm$; in particolare se $m = 1$.

(³) Cfr. Hilbert, l. c.

Si mostra così sotto un aspetto ben diverso da quanto sia avvenuto nel n° 28, l'ufficio dei postulati dello spazio: là essi si riconoscevano come determinanti il numero delle dimensioni, qui si vede come essi compiano un effettivo ufficio metrico. Il sig. Schur aveva appunto mostrato, come abbiamo ricordato al n° 20, che si può dedurre dalla considerazione dello spazio una dimostrazione metrica del teorema di Pascal: d'altra parte dalle ricerche dei signori Hilbert e Schoenflies ([1]) risulta che, se veramente lo spazio deve intervenire in questa dimostrazione, ciò deve avvenire pei suoi postulati metrici: e che sia realmente necessaria la considerazione dello spazio è mostrato dal precedente esempio.

Nè ciò contraddice alla dimostrazione data dallo Hilbert, mediante la sola geometria piana euclidea, del teorema di Pascal: il sig. Hilbert fa uso perciò dell'uguaglianza inversa delle figure piane e della congruenza di tutte le rette fra loro: egli medesimo ha dimostrato poi ([2]) che negata l'uguaglianza inversa delle figure piane, si nega pure il teorema di Pascal. Nella nostra geometria si afferma ancora l'uguaglianza inversa delle figure piane (ribaltamento), si nega invece la congruenza di tutte le rette del piano l'una coll'altra, ed ancora perciò viene a cadere il teorema di Pascal.

33. Deduzione del teorema di Pascal dall'esistenza di una polarità. — Le cose accadono però molto diversamente se si esclude la metrica parabolica; se cioè si suppone che due diverse perpendicolari ad una stessa retta non abbiano lo stesso polo assoluto (v. n° 22 ([3])). Si è infatti mostrato al n° 22 che, fatta questa ipotesi per due determinate perpendicolari ad una retta, ne segue che essa è verificata per ogni retta per modo che risulta stabilita una corrispondenza biunivoca involutoria fra le rette del piano e i loro poli assoluti: noi proveremo che, ammesso in una forma di 2ª specie (piano) il teorema di Desargues, e quindi la rappresentazione per coordinate indicata ai nⁱ 17-18, l'affermazione dell'esistenza di una polarità equivale all'affermazione della proprietà commutativa della moltiplicazione, e quindi al teorema di Pappo-Pascal.

Sia difatti (ξ, η) un elemento (punto) qualunque del piano, (x, y) il punto mobile sulla retta polare di (ξ, η). L'equazione di questa retta sarà

$$a(\xi\eta)x + b(\xi\eta)y + c(\xi\eta) = 0 \tag{1}$$

dove $a(\xi\eta)$, $b(\xi\eta)$, $c(\xi\eta)$ sono funzioni da determinarsi di ξ, η. Se si fissano arbitrariamente i valori di x, y, l'equazione (1) dovrà essere soddisfatta da tutti e soli i punti (ξ,η) della polare di (xy). Si potrà dunque assumere come funzione $c(\xi\eta)$ il primo membro dell'equazione della polare di $(0, 0)$; se, per semplicità, si assume come triangolo di riferimento un triangolo autopolare, si porrà quindi

$$c(\xi\eta) = c, \text{ costante.} \tag{2}$$

([1]) Schoenflies, *Ueber den Pascalschen Schnittpunktsatz*, " Phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. „, 1903.

([2]) *Ueber den Satz v. d. Gleichheit d. Basiswinkel im gleichschenkliges Dreieck*, " Proc. of the London Math. Society „, 35, 1903.

([3]) Il n. 22 segue, nell'ordine naturale dell'esposizione, alla dimostrazione del teorema di Pascal: ma è evidente come le considerazioni cui qui ci riferiamo siano da esso indipendenti.

Parimenti, ponendo $x = \omega (= \infty)$, $y = 0$, si ottiene $a(\xi\eta) = 0$ come equazione della polare di $(\omega 0)$; sarà quindi

$$a(\xi\eta) = \rho\xi \tag{3}$$

dove ρ è una funzione di ξ, η che non si annulla mai quando $\xi \neq 0$.

E indicando parimenti con σ una funzione di ξ, η che non si annulla mai quando $\eta \neq 0$, si avrà, in modo analogo dalla posizione $x = 0$ $y = \omega$,

$$b(\xi\eta) = \sigma\eta. \tag{4}$$

Ciò posto osserviamo che dalla uguaglianza $1a = a1 = a$ e dalla doppia proprietà distributiva della moltiplicazione (nº 17) segue $(n + 1)a = na + 1.a = na + a.1$ e quindi, se si ammette che $na = an$, $(n + 1)a = a(n + 1)$: la moltiplicazione di un numero qualunque per un numero intero naturale (che si ottenga cioè per semplice addizione dal numero 1) gode dunque della proprietà commutativa: in particolare questa moltiplicazione ha una sola operazione inversa, onde si definiscono in modo unico i numeri razionali (del campo naturale); e nel prodotto di un numero qualunque per un numero razionale i fattori sono ancora commutabili.

Si immaginino allora sostituite in (1) le espressioni (2), (3), (4), e si pensino attribuiti a x, y valori razionali: la (1) potrà scriversi

$$\rho x\xi + \sigma y\eta + c = 0.$$

Essa dovrà essere equivalente all'equazione della polare di (xy), sia:

$$\xi + k\eta + l = 0;$$

quindi

$$\rho x k = \sigma y \qquad\qquad \rho x l = c.$$

La seconda di queste equazioni mostra che ρ è tal funzione di ξ, η che assume lo stesso valore $\frac{1}{x}.c/l$ per tutti i punti della polare di uno stesso punto (xy) a coordinate razionali. Se, d'altra parte, in (1), senza supporre la razionalità di x, si pone $y = 0$, si ha

$$\rho\xi x + c = 0 \qquad \text{onde} \qquad \rho\xi = -c/x;$$

l'equazione della polare di un qualunque punto $(x0)$ è della forma $\xi =$ cost. e questa costante può essere qualunque; essa potrà dunque essere equivalente ad un'equazione della forma $\rho\xi = -c/x$ solo se ρ è funzione della sola ξ. Il precedente risultato dice poi che questa funzione prende lo stesso valore in tutti i punti della polare di un punto (xy) a coordinate razionali; ora se $x \neq 0$, su questa polare esistono $(\xi\eta)$ per valori arbitrarî di ξ: ρ *è dunque una costante*.

Similmente, scambiando x ed y, si concluderà che anche σ *è una costante* e l'equazione della polarità diviene

$$a\xi x + b\eta y + c = 0 \tag{5}$$

dove a, b, c sono costanti. Ponendo in questa equazione successivamente $y = 0$ e $x = 0$ si hanno le equazioni delle involuzioni di punti reciproci che la polarità determina sugli assi coordinati:

$$\xi x = -c/a = k \qquad\qquad \eta y = -c/b = h.$$

Affinchè queste corrispondenze siano involutorie è necessario che, qualunque siano x, y,

$$^{k}/x = x/^{k} \qquad\qquad ^{h}/y = y/^{h}.$$

Poichè $^{1}/x = x/^{1} = \frac{1}{x}$, $^{1}/y = y/^{1} = \frac{1}{y}$ sono arbitrarî, h e k debbono dunque essere commutabili nel prodotto con qualunque altro numero. Lo stesso avviene allora per $-\frac{1}{h}$ e $-\frac{1}{k}$: si chiamino m, n; l'equazione (5) diviene

$$n\xi x + m\eta y + 1 = 0. \tag{6}$$

La condizione d'involutorietà impone che, in conseguenza di questa equazione, sia soddisfatta la

$$nx\xi + my\eta + 1 = 0$$

o, per la trasponibilità dei fattori m, n in ogni prodotto, la

$$x \,.\, n\xi + y \,.\, m\eta + 1 = 0. \tag{7}$$

Ora, per una scelta conveniente di ξ, η l'equazione (6) rappresenta ogni retta $ax + by + 1 = 0$; la (7) mostra che la stessa equazione può scriversi $xa + yb + 1 = 0$. Si faccia a razionale, p. es. $a = 1$; dovranno essere equivalenti le due equazioni

$$by = -x - 1 \qquad\qquad yb = -x - 1.$$

Ma x può scegliersi arbitrariamente in modo che $-x - 1$ rappresenti ogni prodotto by, dunque generalmente

$$by = yb.$$

Questa dimostrazione si applica evidentemente al caso parabolico solo quando, la considerazione dello spazio a 3 dimensioni abbia dato luogo alla geometria della stella ove rette e piani perpendicolari determinano precisamente una polarità. Quindi un esempio analogo a quello del numero precedente non si potrebbe tentare nello spazio. — Mostra inoltre un certo eccesso di considerazioni metriche nella dimostrazione del sig. Schur: in questa infatti si fa essenzialmente uso del fatto che la mediana divide il triangolo isoscele in due triangoli uguali (uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele); ora ciò è bensì contenuto nel teorema medesimo di Pascal, ma nella presente dimostrazione non ne è fatto uso esplicito.

Nasce altresì che in una geometria iperbolica o ellittica vale certamente il teorema dell'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele tosto che si conosce il teorema di Desargues.

§ 4. — **Una metrica projettiva generale.**

34. Geometria non parabolica. — Conseguenza del teorema di Desargues è che lo spazio projettivo che si ottiene completando lo spazio metrico (n° 19) contiene tutti i punti le cui coordinate sono funzioni razionali di quelle di un qualsiasi sistema di punti di questo spazio medesimo. Il punto projettivo del n° 19 si può dunque assimilare generalmente all'insieme dei rapporti $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ di quattro numeri arbitrarî di un determinato campo di razionalità Ω. A differenza di quanto si disse al n° 19, non si deve più distinguere qui fra rapporti a destra e rapporti a sinistra, ammettendosi la proprietà commutativa della moltiplicazione. Si richiamino le definizioni di piano e retta projettivi stabilite al n° 19.

Le osservazioni del n° 22 e del n. 30 mostrano che la più generale metrica non parabolica soddisfacente ai nostri postulati (sostituito essendo il post. IX' al post. IX) è la metrica projettiva rispetto a una quadrica presa come *assoluto*. Questa quadrica non potrà essere degenere, perchè tutte le coppie di punti appartenenti a due rette passanti pel vertice del cono quadrico assoluto [1], qualora un tal caso si supponesse, sarebbero congrue fra loro e questa metrica contraddirebbe già ai post. X, XI. D'altra parte già si osservò al n° 30 che deve escludersi che una tangente alla quadrica possa possedere più di un punto reale (dello spazio metrico). Infine sopra ciascuna retta il punto associato a un punto dato è funzione razionale di questo e di due punti simmetrici rispetto ad essi; l'equazione complessiva dei punti uniti dell'involuzione dei punti associati, e quindi l'equazione della quadrica hanno così coefficienti appartenenti al campo di razionalità Ω.

In questo numero studieremo più da vicino su di un esempio molto generale le ulteriori condizioni imposte alla quadrica assoluta in relazione collo spazio metrico.

Limiteremo l'esposizione al piano, il che non avrà altro effetto che di semplificare alquanto la scrittura; l'estensione allo spazio sarà evidente, come si avrà cura di rilevare.

Nel piano projettivo sia fissata la conica assoluta

$$x^2 + y^2 = tz^2 \tag{1}$$

[per semplicità si adottano lettere diverse per le coordinate, al luogo degli indici usati precedentemente].

Se $a' = (x'y'z')$, $a'' = (x''y''z'')$ sono due punti qualunque, le coordinate del punto di $\mathrm{r}(a'a'')$ coniugato di a'' rispetto alla conica (1) (punto associato ad a'' sulla $\mathrm{r}(a'a'')$) appartiene al campo di razionalità $\Re(x'y'z'x''y''z''t)$; il punto a''' coniugato armonico di a' rispetto ad a'' e al suo associato $(a''' = a' / \!\!\!\!\; \cdot)$ apparterrà quindi ancora al campo di razionalità $\Re(x'y'z'x''y''z''t)$. Reciprocamente, dati $a'a''a'''$, è individuato il coniugato armonico di a'' rispetto alla coppia $a'a'''$ e fra le coniche della forma (1) ve n'ha una sola rispetto alla quale a'' e questo punto siano coniugati, ovvero sono tutte (e allora la coordinata z di uno di questi punti è 0). Nel primo caso t è funzione razionale delle coordinate di $a'a''a'''$; il secondo si esclude perchè esso può verificarsi solo per particolari posizioni dei tre punti. Concludiamo: " Mediante la costruzione " del simmetrico di un punto rispetto a un altro si generano punti le cui coordinate " appartengono al campo di razionalità generato dalle coordinate dei punti dati e " dal numero t, per modo inoltre che questo campo di razionalità è identico col campo " di razionalità generato dai tre punti ".

---

[1] Che pel vertice del cono passino rette projettive che contengono rette metriche è evidente ove si pensi che passano pel vertice le perpendicolari a un piano generico.

I due punti b_1, b_2, coniugati armonici comuni ad a', a'' e ai due punti d'intersezione della retta $r(a'a'')$ colla conica (1) hanno per coordinate $(\lambda x' + \mu x'', \lambda y' + \mu y'', \lambda z' + \mu z'')$ dove

$$\lambda = \pm \sqrt{(x'^2 + y'^2 - tz'^2)(x''^2 + y''^2 - tz''^2)}$$

$$\mu = x'^2 + y'^2 - tz'^2.$$

Esse appartengono quindi al campo di razionalità

$$\Re(x'\,y'\,z'\,x''\,y''\,z''\,t\sqrt{(x'^2 + y'^2 - tz'^2)(x''^2 + y''^2 - tz''^2)}).$$

Almeno uno di questi punti è da definirsi come punto medio della coppia $a'a''$.

Del pari la polare di un punto $a' = (x'y'z')$ rispetto alla conica (1) ha i suoi coefficienti nel campo di razionalità $\Re(x'y'z't)$ e reciprocamente le coordinate del polo d'una retta di coefficienti $a\,b\,c$ appartengono al campo di razionalità $\Re(abct)$. Così, se si definiscono ribaltamenti le omologie armoniche che hanno centro e asse coniugati rispetto alla conica, l'asse e il centro d'omologia nel ribaltamento che scambia a' e a'' sono pure nel campo di razionalità

$$\Re(x'y'z'x''y''z''t\sqrt{(x'^2 + y'^2 - tz'^2)(x''^2 + y''^2 - tz''^2)})$$

e il trasformato di un punto $a''' = (x'''y'''z''')$ appartiene al campo generato dal predetto e da queste coordinate.

Ciò posto, fissato un campo di razionalità fondamentale R, lo si allarghi mediante l'aggiunzione di un elemento t, positivo, non appartenente, nè esso nè le sue potenze, al campo medesimo: per es. sia t un parametro; lo si allarghi ancora mediante l'aggiunzione di tutti i radicali della forma $\sqrt{Q}$ dove Q è un'espressione della forma

$$\left[\sum_i \xi_i^2 + t^2 \sum_j \eta_j^2 + \ldots\right] - t\left[\sum_s \theta_s^2 + t^2 \sum_r \varphi_r^2 + \ldots\right]$$

dove $\xi_i, \eta_j, \ldots, \theta_s, \varphi_r, \ldots$ sono funzioni intere del campo R, di t e di altri radicali della stessa forma, e tale inoltre che ogni radicando Q contenga sempre termini indipendenti da ogni altro radicale (termini razionali in t) e che fra questi, quello di grado minimo in t sia positivo o negativo secondochè ha grado pari o dispari. Occorre notare — ed è essenziale perchè coi radicali $\sqrt{Q}$ si possa costruire un campo di razionalità — che il prodotto di due di questi radicali è un radicale della stessa forma. Infatti un tal prodotto è della forma $\sqrt{P}$ dove

$$P = \left[\left(\sum_i \xi_i^2 + t^2 \sum_l \eta_l^2 + \ldots\right) - t\left(\sum_s \theta_s^2 + t^2 \sum_r \varphi_r^2 + \ldots\right)\right] \cdot \left[\left(\sum_i \xi'^2_i + t^2 \sum_l \eta'^2_l + \ldots\right) - t\left(\sum_s \theta'^2_s + t^2 \sum_r \varphi'^2_r + \ldots\right)\right] =$$

$$= \left(\sum \xi_\iota^{*2} + t^2 \sum_\lambda \eta_\lambda^{*2} + \ldots\right) - t\left(\sum_\sigma \theta_\sigma^{*2} + t^2 \sum_\rho \varphi_\rho^{*2} + \ldots\right)$$

e dove ξ_ι^* rappresenta ogni prodotto della forma $\xi_i \xi_j'$, η_λ^* ogni prodotto delle forme $\xi_i \eta_l'$, $\xi_i' \eta_l$, $\theta_s \theta_t'$, ecc. Ciascuna delle espressioni ξ_ι^*, η_λ^*, ... sarà allora la somma di un polinomio nel campo di razionalità $\Re(R, t)$ e di termini affetti da radicali della forma di quelli ammessi nelle ξ_i, η_l, ..., e prodotti di questi radicali.

L'addendo polinomio di ξ_ι^* produce in ξ_ι^{*2} come termine d'ordine minimo in t uno d'ordine pari e coefficiente positivo. I termini affetti da radicali si possono supporre ridotti in precedenza in ξ_ι^* ponendo ciascuno di questi in evidenza nella somma di tutti i termini che hanno a fattore lo stesso radicale, e raccogliendo così questa somma in un termine unico. Allora tali termini potranno produrre in ξ_ι^{*2} termini indipendenti da radicali α solo mediante i loro quadrati, e se si ammette verificato pei radicali contenuti nelle espressioni ξ_ι, ξ_ι' che i loro prodotti a due a due sono ancora della forma $\sqrt{Q}$, tali quadrati produrranno termini d'ordine minimo con coefficiente positivo o negativo secondochè il loro ordine in t è pari o dispari. Si può così ritenere dimostrato che i termini polinomi nelle espressioni ξ_ι^{*2} soddisfanno alle condizioni imposte ai termini polinomi dei radicali $\sqrt{Q}$. Le stesse osservazioni si ripeteranno per le espressioni $\eta_\lambda^{*2}, \ldots$; si conclude che i termini indipendenti da radicali in P, d'ordine minimo in t non possono fra loro ridursi (perchè in tutti i termini di P hanno lo stesso segno) e sono positivi o negativi secondochè il loro ordine è pari o dispari. Si deve notare che nessuna eccezione può presentarsi qualora anche $\xi_\iota^*, \eta_\lambda^*, \ldots$ non possedessero termini indipendenti da radicali, perchè per ipotesi ξ_ι, ξ_ι', ... contengono sempre, nei loro radicali, una parte polinomia — indipendente cioè da ulteriori radici —; lo stesso avviene dunque pei loro prodotti e l'elevazione a quadrato avrà per effetto di produrre in $\xi_\iota^{*2}, \ldots$ termini polinomi derivanti da questi.

Si chiami K il campo di razionalità ora definito; si chiami S l'insieme dei punti le cui coordinate xyz appartengono al campo K. Le cose dette precedentemente mostrano che tutte le trasformazioni di una metrica projettiva rispetto alla conica (1) come assoluto, trasformano tutto S in se stesso tosto che trasformino in punti di S tanti altri punti di S quanti sono necessari a determinarle: le simmetrie rispetto a un punto assegnato trasformano infatti in sè il campo di razionalità su cui operano; quelle invece che debbono scambiare due punti assegnati allargano questo campo mediante l'aggiunzione di un radicale della forma

$$\sqrt{(x'^2+y'^2-tz'^2)(x''^2+y''^2-tz''^2)} =$$

$$= \sqrt{[(x'^2x''^2+y'^2y''^2+x'^2y''^2+x''^2y'^2)+t^2z'^2z''^2]-t(z'^2x''^2+z'^2y''^2+z''^2x'^2+z''^2y'^2)}$$

e questo radicale è della forma $\sqrt{Q}$. per le considerazioni medesime fatte riguardo al prodotto di due radicali della forma $\sqrt{Q}$.

La conica (1) non possiede punti in S. Da (1) si ricava infatti $x = \pm\sqrt{tz^2 - y^2}$: si suppongano y e z espressioni intere appartenenti al campo K: sempre per le considerazioni fatte riguardo alla precedente espressione P si concluderà che in y^2 e in z^2 non può mancare ogni termine razionale: ed ancora il loro termine razionale d'ordine minimo è positivo o negativo secondochè il suo ordine è pari o dispari.

Nell'espressione $tz^2 - y^2$ un termine razionale d'ordine minimo in t non può dunque mancare e sarà negativo o positivo secondochè è d'ordine pari o dispari. $\sqrt{tz^2 - y^2}$ non può dunque essere un polinomio, nè un radicale della forma $\sqrt{Q}$: x non appartiene allora al campo K.

Se ora a è un punto di S, i coefficienti dell'equazione della sua polare rispetto a (1) appartengono a K: non potranno allora appartenere a K i coefficienti delle equazioni delle tangenti da a alla conica (1), altrimenti apparterrebbero ad S i loro punti di contatto, intersezioni colla detta polare; quelle tangenti non contengono dunque punti di S altri che a.

Il campo S ora definito ci dà modo di esemplificare in modi diversi la generale metrica projettiva soddisfacente ai nostri postulati. Si ritenga infatti t un parametro, e non si definisca in modo alcuno un ordine negli elementi di K per modo che non ci sia luogo a distinguere fra punti esterni ed interni ad (1): si potrà assumere S come il nostro spazio metrico e si otterrà una geometria assimilabile alla ordinaria *geometria ellittica* (1).

Si fissi invece che R sia un campo di razionalità ordinato e, per es., lo si determini nel campo naturale: si assuma per t, anzichè un parametro, un numero trascendente e accanto agli elementi di K si consideri il loro valore come elementi del continuo numerico. Si chiami $\overline{K}$ l'insieme degli elementi di K il cui valor numerico è reale e si pensino gli elementi di $\overline{K}$ ordinati secondo questo valore medesimo. I fatti noti nella geometria analitica permetteranno di distinguere i punti reali di S in esterni ed interni alla conica (1) e di affermare che se due punti appartengono alla stessa parte, il simmetrico dell'uno rispetto all'altro è reale ed appartiene a quella parte e almeno uno dei loro punti medî è nelle stesse condizioni.

Si può allora determinare il nostro piano metrico nell'interno della conica (1): si avrà una forma di *metrica iperbolica in cui non esistono le parallele proprie da un punto ad una retta (limiti fra le rette secanti e le non secanti).*

Si può infine determinare il nostro piano metrico nell'esterno della conica (1): si avrà una metrica in cui le rette non sono tutte congruenti fra loro: per ogni punto passano rette su cui si verifica la metrica ellittica, altre su cui si verifica la metrica iperbolica: dato un angolo non esiste sempre un triangolo isoscele che lo abbia come angolo al vertice.

In ciascuno di questi piani metrici l'aggregato dei punti è numerabile: è evidente però che non è questa condizione essenziale delle metriche considerate. Basta infatti, per ottenere metriche analoghe agenti sopra un piano con un'infinità non numerabile di punti, estendere, per es., il campo R all'insieme di tutti i numeri reali e, indicata con t una variabile, considerare tutte le funzioni di t sviluppate in serie di potenze (intere o fratte) crescenti della t, e distinguere i numeri di $\overline{K}$ in reali e immaginari a seconda che sono tutti reali oppur no i coefficienti degli sviluppi corrispondenti, e ordinare infine i numeri reali di $\overline{K}$ per modo che si dica a precedere b quando la differenza delle serie corrispondenti $(a - b)$ incomincia con un termine positivo o negativo.

---

(1) Si noti che questo piano si dovrà però sempre supporre immerso in uno spazio di 3 dimensioni; in esso avviene cioè che su ogni retta per un punto esiste un punto non aderente a questo, ad ogni retta esiste un punto non aderente. Sia allora abc un triangolo i cui vertici siano a due a due non coerenti: sarà $abc \equiv bac$ (poichè abc si porta in bac mediante il ribaltamento intorno alla congiungente c con un a/b) e non esiste nel piano alcun punto $d \neq a$ tale che $abc \equiv bdc$. Quindi, se il piano non fosse immerso in uno spazio, sarebbe $a = b/_c$ contro l'ipotesi che b e c non siano coerenti. Ma se il piano è immerso in uno spazio di 3 dimensioni, si potrà assumere come punto d, soddisfacente alla congruenza $abc \equiv bdc$, ogni punto della retta non aderente a $\mathfrak{r}(bc)$ (t. 10 n. 12).

35. — Nessuna difficoltà ad estendere allo spazio le osservazioni sviluppate pel piano del numero precedente. Basterà porre a fondamento della metrica, anzichè la conica (1) una quadrica assoluta:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = tx_4^2$$

ovvero

$$x_1^2 + x_2^2 = t(x_3^2 + x_4^2)$$

ove t rappresenti, come prima, un elemento positivo, non quadrato e non appartenente nè esso nè le sue potenze ad un certo campo di razionalità fondamentale R (¹).

36. Metrica parabolica. — Le precedenti considerazioni non si applicano in alcun modo alla metrica parabolica. Ma per essa nulla è da aggiungere a quanto già fu detto al nº 22 e all'esempio di costruzione d'una metrica parabolica piana offerta al nº 32. Si otterrà una metrica parabolica nello spazio a tre dimensioni fissando nello spazio projettivo un piano all'infinito e definendo nel modo noto, mediante esso, le simmetrie rispetto a punti e piani. Su questo piano all'infinito dovrà all'uopo esser definita una polarità assoluta in cui siano coniugati i punti e le rette all'infinito di rette e piani perpendicolari. Solo si dovrà osservare che la conica fondamentale di questa polarità non può contenere punti all'infinito di rette reali (metriche) perchè nessuna retta appartiene ad un piano ad essa perpendicolare; ricordando che ciascuna retta projettiva pei punti reali Ω, Ω' del nº 17 contiene una retta reale, si conclude che quella conica non può contenere nemmeno punti all'infinito di rette projettive ottenute per completamento dello spazio secondo il n. 19.

Se $x_4 = 0$ è l'equazione del piano all'infinito, l'equazione della conica assoluta sarà quindi una qualunque equazione omogenea di 2º grado nelle x_1, x_2, x_3 a coefficienti appartenenti al campo di razionalità definito dai punti reali (perchè essa è interamente definita dalla polarità di piani e rette perpendicolari in una stella) ma non soddisfattibile per alcun sistema di rapporti $(x_1 : x_2 : x_3)$ appartenenti a quel campo. — Tali, per es., nel campo di razionalità naturale, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 = 0$.

(¹) Evidentemente considerazioni analoghe si possono ripetere introducendo nei coefficienti maggior numero di parametri che fungano come il presente parametro t, e questo deve considerarsi come il più semplice esempio di una serie. È da notarsi che, rappresentata la conica o la quadrica con somme e differenze di quadrati, quadrati di segni diversi debbono avere a coefficienti parametri diversi. Non potrebbe, per es., servire all'uopo la quadrica $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = tx_4^2$. Infatti essa può scriversi $x_1^2 - x_3^2 = tx_4^2 - x_2^2$, onde si vede che appartengono alla quadrica i punti di intersezione dei piani $\frac{x_2}{x_4} = \eta$ $\frac{x_1}{x_4} + \frac{x_3}{x_4} = \lambda$, $\frac{x_1}{x_4} - \frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{\lambda}(t - \eta^2)$, dove λ ed η sono parametri arbitrari. Il piano $\frac{x_2}{x_4} = \eta$ può essere il piano polare di qualunque punto della retta $x_1 = x_3 = 0$. Per ogni punto di questa retta passano quindi tangenti alla quadrica i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità dei punti metrici.

§ 5. — I punti richiesti dallo spazio metrico.

37. — Una questione s'impone dall'insieme delle cose dette innanzi: In qual misura possono essere esclusi dallo spazio metrico punti dello spazio projettivo minimo che lo contiene?

È noto che lo spazio euclideo contiene tutti i punti del corrispondente spazio projettivo, all'esclusione del piano all'infinito e che l'ordinario spazio ellittico contiene tutti i punti projettivi, l'iperbolico i soli punti interni ad una quadrica. Ma il sig. Dehn [1] ha mostrato che, escluso il postulato d'Archimede, assai maggiori limitazioni si possono portare allo spazio metrico in confronto di quello projettivo, potendosi escludere dal primo, su ogni retta, tutti i punti che, rispetto al loro ordine projettivo sono abbastanza avanzati. Il Dehn costruisce cioè la sua metrica piana sopra un piano numerico in cui le coordinate dei punti sono funzioni analitiche (anzi una classe limitata di funzioni analitiche) di un parametro t e, se a e b sono due di queste funzioni, stabilisce che $a > b$ quando $a - b$ è positivo per valori abbastanza elevati di t. Egli limita poi il suo campo metrico a punti le cui coordinate hanno rispetto a t ordine d'infinità non superiore ad un certo limite (che egli fissa in due esempi nei valori 0 e -1).

Noi incominceremo coll'approfondire le conseguenze geometriche della definizione di " punto del piano metrico " adottata per tal modo dal sig. Dehn. Cercheremo poi di riconoscere fino a qual segno si possono invertire i risultati ottenuti: se con ciò non esauriremo la questione, spero che almeno intorno ad essa porteremo un notevole lume.

Sia $ax + by + c = 0$ l'equazione d'una retta projettiva passante pel punto $(x_0 y_0)$ del piano metrico e sia $(\xi_0 \eta_0)$ una soluzione qualunque dell'equazione $a\xi + b\eta = 0$; moltiplicando ξ_0 e η_0 per una stessa conveniente potenza (positiva o negativa) di t, sia t^ν, si può disporre in modo che gli ordini d'infinità di $\xi_0 t^\nu$, $\eta_0 t^\nu$ siano minori di un qualsiasi ordine assegnato: dal punto $(x_0 y_0)$ si deduce così il punto $(x_0 + \xi_0 t^\nu$, $y_0 + \eta_0 t^\nu)$ che ancora appartiene così alla retta data come il piano metrico. Concludiamo: " ogni retta projettiva passante per un punto del piano metrico è sostegno " di una retta di punti di esso piano ". D'altra parte è evidente che tal retta possiede certamente punti projettivi non appartenenti al piano metrico. Ora è facile rilevare che — almeno nei casi ellittico e parabolico — " appartengono al piano metrico tutti i punti della retta che si deducono colle sole operazioni di projezione " e sezione da due punti reali (metrici) M, N della retta e da un suo punto ideale P " (a coordinate reali, ma esterno al piano metrico) e da due punti projettivi arbitrariamente scelti, purchè allineati con uno di quei primi tre ".

Occorre premettere che, in conseguenza del teorema di Desargues (o dell'esistenza dello spazio a tre dimensioni) i punti or nominati sono completamente definiti sulla retta, indipendentemente dalla scelta dei due punti projettivi ausiliari: essi sono tutti quei punti cui si attribuiscono ascisse razionali (nel campo naturale di razio-

---

[1] *Die Legendre'schen Sätze ü. die Winkelsumme im Dreiecke,* " Math. Ann. ", 54 ".

nalità) in un sistema di coordinate projettive in cui si assegnino ai tre punti dati i numeri 0, 1, ∞.

Ora è chiaro che tutti questi punti apparterranno al piano metrico se tali erano effettivamente le ascisse dei tre punti (supposti sull'asse della x) nella loro definizione come elementi del piano numerico e se, per conseguenza, l'ordine in t ammesso nelle coordinate dei punti del piano metrico era ≥ 0. Ma si supponga che le ascisse dei tre punti M, N, P siano m, n, p e che essi appartengano alla retta $ax+by+c=0$. Si faccia la doppia trasformazione di coordinate

$$x = x' \qquad y = \frac{1}{b}(y' - ax' - c)$$

$$x' = \frac{(m-n)pu + m(n-p)}{(m-n)u + (n-p)} \qquad y' = \frac{v}{(m-n)u + (n-p)};$$

asse delle ascisse (u) sarà divenuta la retta $ax + by + c = 0$, e i tre punti dati vi avranno le ascisse $u = 0, 1, \infty$. Sia ora k l'ordine massimo in t delle coordinate (x, y) dei punti reali; gli ordini di m, n saranno $\leq k$, quello di $p > k$. Ne segue immediatamente che per ogni valore di u di ordine 0 in t, x' (e quindi x) è in t d'ordine $\leq k$. Quanto al valor di y, si ricordi che i nostri punti appartengono alla retta $ax+by+c=0$ onde

$$-y = \frac{(ap+c)(m-n)u + (am+c)(n-p)}{b[(m-n)u + (n-p)]}$$

e si ricordi inoltre che debbono avere in t ordini $\leq k$ i numeri

$$\frac{am+c}{b}, \qquad \frac{an+c}{b},$$

valori di $-y$ per $x = m$ e per $x = n$; è quindi pure di ordine $\leq k$ la loro differenza

$$\frac{a(m-n)}{b}$$

e di ordine $\leq 2k$ il numero $\frac{c(m-n)}{b}$, differenza dei prodotti per m e per n rispettivamente delle prime due frazioni.

Si vede allora che hanno ordini $\leq k$ gli addendi

$$\frac{a(m-n)}{b} \cdot \frac{p}{(m-n)u + (n-p)}, \quad \frac{c(m-n)}{b[(m-n)u + (n-p)]}, \quad \frac{am+c}{b} \cdot \frac{n-p}{(m-n)u + (n-p)}$$

di cui si compone $-y$, tosto che u ha valore di ordine 0 in t: onde y medesimo avrà in t ordine $\leq k$.

Nel caso iperbolico una parte di questi punti può evidentemente essere esclusa dal piano metrico per essere esterna alla conica assoluta. Ma, pur escludendo questo caso, questi punti del piano metrico sopra definito sono tutti effettivamente richiesti dai nostri postulati? Noi ci occuperemo del solo caso parabolico e mostreremo che a questa domanda si deve — in tal caso — rispondere:

" Si consideri, come poc'anzi, stabilito sulla retta un sistema di coordinate projet-
" tive in cui si chiamino 0, 1 due punti reali e ∞ il *punto all'infinito della retta* (¹).

(¹) Polo assoluto delle perpendicolari alla retta.

" La condizione che la retta appartenga ad un piano metrico definito dai nostri " postulati ha per conseguenza che *appartengono necessariamente ad essa, come punti* " *reali, tutti i punti razionali, fatta eccezione per quelli che sono rappresentati da fra-* " *zioni irreduttibili il cui denominatore sia multiplo di una determinata potenza di un* " *numero primo fisso (per tutto il piano) della forma* $4n+3$ *(non somma di due quadrati).* " *Se però uno di questi punti è reale, sono reali anche tutti gli altri* „.

Si riferisca il piano ad un sistema di coordinate projettive di cui gli assi siano l'uno ξ la retta data, l'altro η la perpendicolare a questa in uno 0 dei punti reali (del piano metrico) dati, cosicchè a questo punto apparterranno le coordinate $(0, 0)$. All'altro punto dato sulla ξ apparterranno le coordinate $(1, 0)$ e le coordinate $(\infty, 0)$ al punto all'infinito della retta. Sull'asse η si fissi poi un punto reale arbitrario che si chiamerà $(0, 1)$ e si chiami $(0, \infty)$ il punto all'infinito. Mediante determinazione di punti medî e di simmetrici si costruiscano su ciascuno degli assi i punti che hanno rispettivamente per ascisse e ordinate tutti i numeri interi e i fratti aventi per denominatore una potenza di 2; saranno tutti punti reali del piano.

Osserviamo che, in una geometria parabolica, la perpendicolare da un punto ad una retta incontra sempre la retta medesima. Il nostro piano conterrà dunque, come punti reali, tutti quelli che hanno per coordinate i detti numeri; e reciprocamente gli assi ξ, η contengono come punti reali i punti che hanno rispettivamente per ascissa e per ordinata l'ascissa e l'ordinata di un qualunque punto reale (xy) del piano.

Si considerino i punti: $O=(0, 0)$, $A=(a, a')$, $B=(0, b)$, $K=(h, k)$ e siano tutti punti reali del piano. Le rette $\mathfrak{r}(AK)$, $\mathfrak{r}(BK)$, $\mathfrak{r}(OK)$ incontrano rispettivamente le rette η, $\mathfrak{r}(OA)$, $\mathfrak{r}(AB)$ nei punti projettivi

$$\left(0, \frac{ak-a'h}{a-h}\right), \quad \left(\frac{abh}{ab+a'h-ak}, \frac{a'hb}{ab+a'h-ak}\right), \quad \left(\frac{abh}{bh-a'h+ak}, \frac{abk}{bh-a'h+ak}\right).$$

Il post. XVII impone che uno almeno di questi punti sia reale. Se ora si fa $a'=0$ e $h=k=a$, questi punti diventano $(0, \infty)$, $\left(\frac{ab}{b-a}, 0\right)$, $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$. Il primo di questi punti non è reale: un'osservazione precedente mostra allora che sull'asse ξ esiste, come punto reale, almeno uno dei punti di ascissa $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{ab}{b-a}$.

Sia m un numero intero: si ponga $a=2$, $b=\lambda m-2$; sarà $\frac{ab}{a+b}=\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m}$, $\frac{ab}{b-a}=\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m-4}$. Sull'asse ξ esiste allora almeno uno dei punti di ascisse $\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m}$, $\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m-4}$.

Dall'esistenza del punto di ascissa $\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m}$ risulta ora successivamente l'esistenza dei punti di ascisse $\frac{\lambda m-2}{\lambda m}$, $1-\frac{\lambda m-2}{\lambda m}=\frac{2}{\lambda m}$ (simmetrico del precedente rispetto al punto $\frac{1}{2}$) e infine $\frac{1}{\lambda m}$ da cui si otterranno ancora, per successive costruzioni di simmetrici il punto $\frac{1}{m}$ e tutti i punti le cui ascisse sono numeri razionali di denominatore m.

Se invece si nega l'esistenza del punto $\frac{1}{m}$ e quindi quella del punto $\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m}$ qualunque sia λ, dovrà, per ogni valore di λ, esistere sull'asse ξ il punto di ascissa $\frac{2(\lambda m-2)}{\lambda m-4}$ e quindi, per un ragionamento identico al precedente, il punto $\frac{1}{\lambda m-4}$.

Se esistono i punti $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$, con p e q primi fra loro, esiste pure il punto $\frac{\alpha q+\beta p}{pq}$, medio fra $\frac{2\alpha}{p}$ e $\frac{2\beta}{q}$ e cioè, per una conveniente scelta di α e β, il punto $\frac{1}{pq}$. Si conclude che, se non esiste il punto $\frac{1}{M}$, M ammette almeno un fattore m, potenza di un numero primo, e tale che non esiste il punto $\frac{1}{m}$.

Sia $m=\mu^{\varepsilon}$ (μ primo), e sia n un numero qualunque non divisibile per μ; potrà sempre risolversi in numeri interi l'equazione $\lambda m-\nu n=4$, nelle incognite λ e ν. Così si potrà supporre che $\frac{1}{\lambda m-4}=\frac{1}{\nu n}$. Dall' esistenza del punto di ascissa $\frac{1}{\nu n}$ segue, per successive costruzioni di simmetrici, l'esistenza del punto di ascissa $\frac{1}{n}$ e quindi di tutti i punti la cui ascissa è un numero razionale con denominatore n.

Se inoltre μ^{ε} è la minima potenza di μ tale che non esiste il punto $\frac{1}{\mu^{\varepsilon}}$, e se $n'=\mu^{\alpha}n$ ($\alpha<\varepsilon$, n non divisibile per μ), dall'esistenza dei punti $\frac{1}{\mu^{\alpha}}$, $\frac{1}{n}$ segue, come si disse, l'esistenza del punto $\frac{1}{n'}=\frac{1}{\mu^{\alpha}n}$.

Sull'asse ξ esistono quindi, come punti reali, tutti i punti projettivi le cui ascisse sono numeri razionali, fatta al più eccezione per quelli il cui denominatore è multiplo di un numero determinato m, *potenza di un numero primo.*

Possiamo aggiungere di più che, qualunque siano q ed m, se manca il punto $\frac{q}{m}$, dovrà mancare pure il punto $\frac{1}{m}$, da cui (e dal punto O) quello si otterrebbe per successive costruzioni di simmetrici; e che, reciprocamente, *se il punto* $\frac{1}{\mathrm{m}}$ *non è reale non potrà esserlo nemmeno il punto* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$, *ove la frazione* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$ *sia irreduttibile.* Infatti, se non esiste il punto $\frac{1}{m}$, non esisterà nemmeno il punto $\lambda-\frac{1}{m}=\frac{\lambda m-1}{m}$, di cui il primo sarebbe simmetrico rispetto al punto $\frac{\lambda}{2}$ (λ intero). Ora possono sempre determinarsi gli interi λ e ν tali che $\lambda m-\nu q=1$ (m e q sono primi fra loro); si può quindi dire che, per un ν conveniente, non esiste il punto $\frac{\nu q}{m}$, la cui esistenza seguirebbe invece dall'ipotesi che $\frac{q}{m}$ sia un punto reale.

Se ora si ripete il ragionamento del n° 27, si vede che il gruppo dei movimenti euclidei trasforma in sè ogni piano numerico le cui coordinate siano numeri razionali aventi per denominatore numeri i cui fattori primi siano tutti somme di due quadrati (1) e un sistema qualunque di ulteriori numeri primi assegnati arbitraria-

(1) Si verificherà agevolmente sull'espressione del simmetrico di un punto rispetto a una retta che, al contrario, si generano per movimenti e simmetrie, punti le cui coordinate hanno per denominatori multipli di somme qualsiansi di due quadrati.

mente, e questi con esponenti non superiori ad altrettanti esponenti assegnati. Così *i punti le cui coordinate sono numeri razionali con denominatore multiplo di una data potenza di un numero primo* CHE NON SIA SOMMA DI DUE QUADRATI *possono essere assegnati al piano dal post. XVII, non mai dai postulati metrici; gli altri invece gli sono imposti da questi postulati.*

Si consideri allora un triangolo qualunque $A'B'O'$ e un punto K' del piano; mediante movimenti si possono trasformare in un triangolo ABO e in un punto K, quali quelli da cui si partì poc'anzi, per modo che O sia l'origine delle coordinate e B appartenga all'asse η e, per la precedente considerazione, i punti projettivi in cui s'intersecano le coppie di rette $\mathfrak{r}(A'K')\,\mathfrak{r}(B'K')$, $\mathfrak{r}(B'K')\,\mathfrak{r}(O'A')$, $\mathfrak{r}(O'K')\,\mathfrak{r}(A'B')$ avranno coordinate i cui denominatori non conterranno altri fattori primi che somme di quadrati e altri fattori primi con esponente non superiore a quello con cui compaiono nei denominatori delle coordinate di $ABKA'B'K'O'$ e dei punti d'intersezione delle coppie $\mathfrak{r}(AK)\,\mathfrak{r}(OB)$, $\mathfrak{r}(BK)\,\mathfrak{r}(OA)$, $\mathfrak{r}(OK)\,\mathfrak{r}(AB)$. Per accertare se sia possibile un piano metrico tale che le coordinate dei suoi punti reali non abbiano mai per denominatori multipli di una potenza assegnata di un numero primo μ non somma di due quadrati, basterà quindi riconoscere se, tali essendo le coordinate dei punti ABK, almeno una delle suddette intersezioni non abbia mai per coordinate numeri razionali della detta forma.

Si noti che le coordinate $aa'bhk$ possono supporsi numeri interi: sotto altra forma, se esse si moltiplicano per il loro m. c. m., per lo stesso numero si moltiplicano le coordinate delle intersezioni di cui qui si discorre, e, per una precedente osservazione, le nuove coordinate rappresenteranno o non rappresenteranno punti reali insieme colle primitive.

I denominatori di queste coordinate sono, come fu trovato poco sopra,

$$a - h, \qquad ab + a'h - ak, \qquad bh - a'h + ak.$$

Si supponga che esse siano multiple di m, e precisamente sia μ^{φ} la massima potenza di m che è loro fattor comune. Saranno multipli di μ^{φ}:

$$a - h \qquad (a + h)b \qquad ab + a'h + ak.$$

Poichè μ è primo, φ dovrà spezzarsi in due numeri positivi φ' e φ'' tali che $a + h$ è multiplo di $\mu^{\varphi'}$, b multiplo di $\mu^{\varphi''}$: a e h saranno essi stessi multipli di $\mu^{\varphi'}$: si ponga:

$$a = \alpha\mu^{\varphi'} \qquad b = \beta\mu^{\varphi''} \qquad h = \chi\mu^{\varphi'}.$$

Sarà ab multiplo di μ^{φ} e quindi anche multiplo di μ^{φ} $a'h - ak = (ab + a'h - ak) - ab$: si ponga ancora:

$$a'h - ak = \kappa\mu^{\varphi}.$$

Sostituendo questi valori nei numeratori delle coordinate considerate si ottiene:

$$ak - a'h = -\kappa\mu^{\varphi}, \quad abh = \alpha\beta\chi\mu^{\varphi+\varphi'}, \quad abk = \alpha\beta k\mu^{\varphi}, \quad a'bh = a'\beta\chi\mu^{\varphi}.$$

Tutti posseggono quindi μ come fattore, almeno alla potenza φ: dopo riduzione ai minimi termini, almeno una delle coppie:

$$0, \frac{ak - a'h}{a - h}; \quad \frac{abh}{ab + a'h - ak}, \quad \frac{a'bh}{ab + a'h - ak}; \quad \frac{abh}{bh + ak - a'h}, \quad \frac{abk}{bh + ak - a'h}$$

è quindi costituita da frazioni il cui denominatore non è multiplo del numero m: tale coppia fornisce quindi le coordinate di un punto reale, se anche si esclude che il denominatore di tali coordinate sia multiplo di m.

38. — Il ragionamento si estende con tutta semplicità allo spazio, ma le conclusioni sono allora ben diverse, ottenendosi allora che senza alcuna eccezione, quando la retta considerata si immagina immersa in uno spazio metrico parabolico soddisfacente ai nostri postulati, *appartengono ad essa come punti reali tutti i punti rappresentati da numeri razionali in un sistema di coordinate projettive in cui* 0, 1, ∞ *rappresentano due suoi punti reali, e* ∞ *il suo punto all'infinito*. Basterà osservare di nuovo che, riferito lo spazio ad un sistema di coordinate projettive rettangolari i cui assi passino pel punto indicato con 0 e siano rette reali, le coordinate d'ogni punto reale dello spazio rappresentano sugli assi punti reali.

Se ora si ripetono nel caso dello spazio i ragionamenti del n. 27, si riconosce che, per effetto dei postulati metrici (esistenza delle simmetrie), lo spazio è obbligato a possedere punti le cui coordinate abbiano denominatori di cui sono fattori numeri qualsiansi somme di tre quadrati primi fra loro. Si ricordi che ogni numero della forma $8n+3$ è somma di tre quadrati; assegnato arbitrariamente un numero primo $m \neq 2$ è sempre possibile risolvere la congruenza $\mu m \equiv 3 \pmod{8}$, e se μ_0 è una soluzione, tutte le altre sono della forma $\mu_0 + 8\tau$ (dove τ è un intero arbitrario); fra esse non ve n'è sempre di quelle non divisibili per m: sia μ_1 una di queste e sia $\mu_1 = \rho^2\sigma$, dove ρ^2 è il massimo suo divisore quadrato; $\mu_1 m = \rho^2 \sigma m$ sarà somma di tre quadrati e quindi ancora σm, e i tre termini di σm saranno primi fra loro. Fra i punti reali della retta considerata ne esistono dunque di tali la cui coordinata abbia per denominatore un multiplo di σm. Si confronti coll'enunciato del n° prec. e si concluderà che, qualunque sia il numero primo m, non potrà essere il numero eccezionale ivi nominato (¹).

§ 6. — Separazione delle metriche classiche.

39. — Dopo aver discusso nei §§ precedenti il significato dei postulati ammessi, possiamo facilmente enunciare quegli altri postulati che permettono di separare dalle metriche projettive generali da essi definite, le metriche classiche:

A) Postulato d'omogeneità — " Se a e b sono due rette che s'incontrino in " un punto O, esiste almeno una coppia di punti A, B, l'uno sopra una retta, l'altro " sull'altra, tali che $OA \equiv OB$ ".

Fra le metriche ad assoluto non degenere, questo postulato esclude quelle rispetto all'esterno d'una conica, nel piano, — rispetto all'esterno d'una quadrica ellittica o rispetto ad una quadrica rigata, nello spazio. — Esso non è d'altronde senza effetto anche per la metrica parabolica: si è infatti osservato come la metrica parabolica piana possa soddisfare a tutti i nostri postulati senza ammettere l'invertibilità dell'angolo (32). Che lo spazio non aggiunga nulla a questo proposito è evidente, appena

(¹) Lo svolgimento di questa estensione allo spazio è dovuto a mio fratello Eugenio, che mi fu aiuto intelligente nella revisione delle bozze.

si osservi che in infiniti modi si può disporre che sul piano all'infinito si abbia una coppia di punti razionali rispetto alla quale non esistano due punti coniugati armonici razionali, reciproci rispetto alla conica assoluta (cfr. n° 36): tali rispetto alla conica $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ i punti (1 0 1), (2 0 1).

B) Postulati dell'ordine. — Hanno per effetto di permettere la definizione del segmento, dell'angolo, del triangolo, e di permettere in conseguenza di rispondere in ogni caso alle domande circa l'intersezione di rette e di piani. Essi debbono distinguersi in due gruppi:

B, 1) *Postulati dell'ordine sulla retta*: esprimono semplicemente una proprietà della retta inerente alla potenza dell'aggregato dei suoi punti: essi ci dicono che tale aggregato è ordinabile e si sa che ogni aggregato avente la potenza di un aggregato ordinabile è ordinabile: non è però in alcun modo assegnata la potenza dell'aggregato, perchè esiste tutta una serie di potenze diverse di aggregati ordinati (¹).

B, 2) *Postulati dell'ordine nel piano e nello spazio*: " Ogni retta divide il piano " (ogni piano divide lo spazio) in due regioni tali che alla retta (al piano) appartiene " un punto di ogni segmento i cui estremi stiano in differenti regioni; e ogni segmento " che contenga un punto della retta (o del piano) senza esservi interamente conte- " nuto ha i suoi estremi in regioni differenti ". Questi postulati invece esprimono vere proprietà geometriche dello spazio considerato, che non possono introdursi per definizione, data la potenza dell'aggregato dei punti. Basti infatti osservare che segue di qui che la coppia dei coniugati armonici rispetto a due punti dati separa questi due punti, e, se si considerano i gruppi armonici $aa'xy$, $bb'xy$, $cc'xy$, ... e si suppone che i punti $abc \dots xy$ si succedano nell'ordine scritto, i rimanenti formano con essi la successione $abc \dots x \dots c'b'a'y$; due coppie armoniche fra loro non hanno allora una coppia armonica comune, proprietà che è bensì verificata nell'ordinaria retta projettiva di punti reali, ma può essere esclusa in una metrica soddisfacente ai postulati nostri, la quale contenga convenienti punti immaginari (²).

C) Postulato d'Archimede.

ELENCO DEI POSTULATI.

I-II. — Esiste una classe di enti — *punti* — costituita da più di un elemento, tale che è definita una relazione fra coppie di punti detta *congruenza* (rappresentata in $\equiv$) (n° 1).

III. — Da $ab \equiv cd$ segue $cd \equiv ab$ (n° 2).

IV. — Da $ab \equiv cd$ segue $ba \equiv dc$ (n° 2).

(¹) Ricorderò la prima e la seconda potenza, la potenza del continuo, quella dell'aggregato delle crescenze delle funzioni d'una variabile (maggiore di quella del continuo); un'antica presunzione del sig. Cantor, non mai provata, ma non ancora definitivamente disdetta vorrebbe anzi che negli aggregati ordinati si incontrassero tutte le possibili potenze.

(²) Basterà, per es., costruire una geometria parabolica come al n. 32, scegliendo il campo di razionalità in modo che contenga le ascisse dei due punti immaginari coniugati armonici comuni alle due coppie.

V-VI. — La coppia che si ottiene nominando due volte uno stesso punto è congruente ad ogni coppia analoga e non è congruente ad alcuna coppia costituita da due punti distinti (n° 2).

VII. — Da $ab \equiv cd$, $cd \equiv ef$, segue $ab \equiv ef$ (n° 2).

VIII. — Sussiste la congruenza $ab \equiv ba$ (n° 2).

IX. — Se due sistemi di punti sono congruenti (Def. 1, n° 3), ad ogni sistema di punti contenente uno di essi è congruente un sistema di punti contenente l'altro per modo che i punti dei due sistemi dati si corrispondono nella nuova congruenza come si corrispondevano nella primitiva (n° 3).

[IX'. — Se due coppie di punti sono congruenti esiste una trasformazione per congruenza che porta la prima coppia nella seconda (n° 29)].

X. — Qualunque siano i punti a e b esistono punti c tali che $abc \equiv bac$ (n° 4).

XI. — Fra i punti c del postulato precedente ne esistono di quelli tali che, comunque si scelga $d \neq a$, non è mai $abc \equiv bdc$ (n° 4).

XII. — Se abc appartengono ad una stessa catena (Def. n° 5), e se $ab \equiv bc$, c è un simmetrico di a rispetto a b (Def. 2, n° 4) (n° 6).

XIII. — Non esistono due diversi simmetrici d'uno stesso punto a rispetto a un dato punto b (n° 6).

XIV. — Se ogni congruenza (Def. 2, n° 3) che lasci fermi tutti i punti della catena (ab) lascia pur fermi tutti i punti d'un altra catena (cd), reciprocamente ogni congruenza che non muova nessun punto di (cd), lascierà fermi tutti i punti di (ab) (n° 7).

XV. — La catena di due punti qualunque d'una retta (Def. 1, n° 7) appartiene alla retta (n° 7).

XVI. — Esistono punti non appartenenti a una retta (n° 8).

XVII. — Se abc sono tre punti non allineati e d è un punto della $\mathfrak{r}(bc)$ diverso da b, tutto il piano (Def. n° 8) $\mathfrak{p}(abd)$ è contenuto nel piano $\mathfrak{p}(abc)$ (n° 8).

XVIII. — Se r è una retta di un piano π, esistono congruenze che tengono fermo ogni punto di r e trasformano π in se stesso spostandone qualche punto (n° 9).

XIX. — Un punto non ha più di un simmetrico rispetto a una retta (Def. 2, n° 9) (n° 10).

XX. — Esiste un punto fuori d'un piano (Cap. I, § 4).

XXI. — Se due piani hanno a comune un punto hanno pure a comune qualche altro punto (Cap. I, § 4).

[XXI'. — Se $abcd$ sono quattro punti qualunque non complanari, ogni altro punto appartiene ad una almeno delle rette che da ciascuno di questi punti projettano i punti del piano dei rimanenti tre (n. 28).

XXI'' e XXI'''. — Esiste una ed una sola congruenza che tien fissi tutti i punti di un piano qualunque π e sposta ogni altro punto (n. 28)].

XXII. — Dato un piano ρ e più rette non perpendicolari a ρ (Def. 3, n° 12) ed uscenti da un suo punto, esiste un piano perpendicolare a ρ che incontra tutte queste rette senza passare per quel punto (n° 15).

INDICE

LE

LETTERE DI ULISSE ALDROVANDI

A

FRANCESCO I E FERDINANDO I
Granduchi di Toscana

E A

FRANCESCO MARIA II
Duca di Urbino

TRATTE DALL'ARCHIVIO DI STATO DI FIRENZE

E ILLUSTRATE DA

ORESTE MATTIROLO

Approvata nell'adunanza del 17 Aprile 1904.

La corrispondenza epistolare di Ulisse Aldrovandi (1) con Francesco I, Ferdinando I Granduchi di Toscana, e Francesco Maria II della Rovere, Duca di Urbino, conservata nell'Archivio di Stato di Firenze (2), risulta composta di 55 lettere (3), le quali, se anche non si possono giudicare tutte importanti, formano in complesso un documento prezioso per chi si accinga a studi aldrovandiani, o intenda ricercare l'indole e le tendenze degli scienziati italiani del XVI secolo, tra i quali per la universalità del sapere meritatamente eccelse Ulisse Aldrovandi, onore della scienza, sulla quale esercitò l'influenza di maestro e di precursore illuminato.

Le lettere di Aldrovandi ai nominati personaggi, i quali unitamente a due Pontefici, Gregorio XIII e Sisto V (4), a Cardinali e Vescovi (5), concorsero generosamente in vario tempo e in varie guise ad aiutarne l'opera (6): mentre da una parte

(1) Ulisse Aldrovandi nacque in Bologna addì 11 settembre 1522 e vi morì il 4 maggio 1605.

(2) Ringrazio la Direzione dell'Archivio di Stato di Firenze e in particolar modo il Cav. Gherardi per avermi, con ogni gentilezza, nell'anno 1900, agevolata la ricerca di questi documenti nell'Archivio Mediceo e nell'Archivio di Urbino. Un cenno intorno alla corrispondenza aldrovandiana coi Granduchi di Toscana fu fatto dall'Autore al Congresso Internazionale di Scienze storiche, tenutosi in Roma nell'aprile dell'anno 1903.

(3) Fra queste 55 lettere, quelle segnate ai numeri 31, 32, 35, 40, 45, 47 e 48 furono dall'Aldrovandi indirizzate al Cav. Belisario Vinta da Volterra il noto Segretario della Corte Medicea, perchè fossero da lui fatte conoscere ai suoi Signori, epperò fanno corpo colle altre. Noto poi che le 12 lettere che seguono in Appendice sono di pugno del Dottore Giulio Cuppellino agente del Duca di Urbino — e che trattando esse di cose relative alla stampa delle opere aldrovandiane patrocinata e sostenuta coi sussidî del Duca di Urbino si credette utile riferirle.

(4) Gregorio XIII, 1572. Sisto V, 1585.

(5) Questi furono: Gabriele Paleotti e Alessandro Peretti, Cardinali. — G. Battista Campeggi, Camillo Alfonso Paleotti, Vescovi.

(6) Per quanto ha rapporto alle opere e alla ponderosa bibliografia relativa a Ulisse Aldrovandi il lettore troverà ampie citazioni di testi, specialmente nelle opere seguenti: Fantuzzi, *Memorie della*

valgono a scolpire il carattere dell'uomo, a rivelarne l'intimo pensiero e gli ideali altissimi; a spiegare in modo netto e preciso il concetto direttivo dell'immane ciclo delle grandiosissime sue imprese; servono dall'altra come testimonianze di una quantità di fatti; come ricordi di lavoratori modesti e benemeriti, il cui nome altrimenti sarebbe rimasto ignorato; immagini vive e preziose della vita e del sentimento di un'epoca che fu per la scienza epoca di transizione insieme e di progresso.

Le lettere che io presento, costituiscono nuovo titolo di gloria per il sommo bolognese; sono le prove del valore morale e del nobile carattere di questo uomo tanto ammirato dai contemporanei; che assorto nelle meditazioni della scienza, dedicò tutto se stesso ad un lavoro continuo, indefesso; visse di niente altro curante che dello studio e della gloria che ne deriva; misurando l'estimazione che gli altri dovevano a lui, dalle fatiche durate per conseguirla, e dalle opere che lasciava; *quelle invero grandissime e queste numerosissime e diversissime di materia* (1).

Non credo opportuno ritornare in questa occasione sopra un argomento già da me ampiamente discusso (2), cercando cioè di dimostrare col sussidio di questi nuovi documenti, come ben altrimenti voglia essere giudicato Aldrovandi, da quello che avvenne in progresso di tempo per l'ignoranza delle principali opere sue; perocchè, è un fatto, che perdutasi nelle menti dei successori l'impressione viva della influenza esercitata dalla sua scuola, fu l'Aldrovandi dai successori appena ricordato come un commentatore, un credulo erudito, mentre era stato un ardito innovatore, un precursore illuminato e più di tutto un ottimo osservatore (3).

L'indole dei tempi levò a fama mondiale il nome di Aldrovandi per la sua sconfinata erudizione (4), cosicchè di lui, per naturale conseguenza di questo errato giudizio, rimase nei posteri radicato il concetto, che egli fosse stato maestro di erudizione inutile; che le sue opere null'altro fossero che una raccolta di tutte le opinioni, di tutte le favole, delle superstizioni, delle poetiche leggende, dei miracoli, che si riferiscono alle produzioni naturali; e così avvenne, che nessuno più pensò di ricercare la vera indole e il valore dello scienziato nelle numerosissime opere di lui, rimaste sepolte negli scaffali delle biblioteche, dove però seppero rintracciarle i tristi che ne usarono per abbellirsi senza fatiche del lavoro altrui (5).

Io, che per quanto ha riguardo alla botanica ho iniziato questo lavoro (6), ho

---

Vita di Ulisse Aldrovandi. Bologna, 1774. — Id., *Scrittori bolognesi*, Vol. I, 1781. — Mattirolo O., *L'opera botanica di Ulisse Aldrovandi*. Bologna, 1897. Edita a cura del Municipio di Bologna, inaugurandosi la sala destinata alle raccolte botaniche di U. Aldrovandi, nell'Istituto botanico della R. Università di Bologna. Dicembre 1897.

Trattarono di Aldrovandi, della sua vita e delle sue opere moltissimi autori, tra i quali ricorderemo: Bayle, Mazzucchelli, Monti C., Cuvier, Castelli, Mazzetti, Saint Lager, Camus, Saccardo, Capellini, ecc. ed altri come Montalbani, Haller, Sprengel, Seguier, Meyer, Pritzel, Sachs, ecc., dei quali si trovano le indicazioni nei lavori sopra citati, essendo impossibile in questo scritto citare tutte le fonti.

(1) V. Fantuzzi, loc. cit., pag. 65.

(2) V. Mattirolo, loc. cit.

(3) V. *ivi*, pagg. 30 a 75.

(4) V. loc. cit., Fantuzzi.

(5) V. Mattirolo, pag. 64.

(6) Id.

potuto, sebbene ancora lontanamente, misurare e valutare i meriti eccelsi di questo sommo, che fu ritenuto superasse per il valore dell'ingegno tutti gli uomini dell'età sua!; ho potuto dimostrare che la Scuola botanica italiana, che per Ulisse Aldrovandi e Andrea Cesalpino fa capo al loro comune maestro Luca Ghini, fu l'ambiente predestinato, nel quale col diretto studio della natura, aiutato dalla conoscenza delle antiche sorgenti del sapere, si andò formando lo spirito moderno della scienza botanica.

Chè, se fu precursore l'Aldrovandi nei concetti che dovevano informare lo studio della botanica, ugualmente e necessariamente deve ritenersi sia stato tale in quelli che hanno rapporto alle altre scienze naturali; ed io mi auguro che, per maggior gloria d'Italia, la dimostrazione dell'azione efficacemente innovatrice esercitata dalla scuola aldrovandiana sulle scienze naturali, già data per la geologia (1) e la botanica, possa da qualche studioso della storia della zoologia, esserci concessa prima del 4 maggio 1905, giorno nel quale la dotta Bologna commemorerà solennemente il terzo centenario della morte del suo illustre figliolo. Vorrei che gli scienziati italiani moderni scegliessero quel giorno per dimostrare al mondo come essi sanno conoscere e venerare quei sommi che come Aldrovandi, vanto di un' epoca, onorarono la patria, precorsero i tempi, e guidati dalla ragione e dalla osservazione, seppero indirizzare le menti alla conquista della verità scientifica!

Le lettere che io mi onoro di pubblicare sono documenti interessanti, indispensabili per lo studio dell' uomo e dell' epoca in cui egli visse, perocchè l' uomo e lo scienziato vi si rivelano con tutti i pregi e con tutti i difetti dell'epoca.

Il primo, cortigiano, un po' gonfio e manierato nei modi di esprimersi, facile alle lodi esagerate; il secondo affascinato dal vecchio spirito di cultura, animato ancora dai pregiudizi e dalle sottilità medioevali, di null'altro curante che di soddisfare la sua sete di raccogliere e di conoscere le più rare produzioni della natura, di possederle per il suo Museo e di tramandare ai posteri i risultati delle immani fatiche dell'ingegno suo.

Ma chi, facendo astrazione da questi difetti, si fa serenamente a leggere le epistole aldrovandiane, rimane deliziosamente affascinato dal profumo della ingenua naturalezza colla quale egli sa esprimere i sentimenti suoi ; dà sfogo alla sua naturale passione, implora ad ogni momento soccorsi nuovi pur di riescire a superare le difficoltà inerenti al ragguardevolissimo onere di spese d'ogni genere che gli derivavano dall'opera dei pittori, degli intagliatori, dei copisti, dei raccoglitori e da quella ingente delle spedizioni, della corrispondenza estesissima, per le quali egli, oltre all'aver speso tutto il suo, profondeva tutto quanto ricavava per stipendio dal Senato di Bologna (2).

---

(1) Dei meriti di Aldrovandi, come continuatore e sostenitore delle idee di Lionardo e di Fracastoro si occuparono insigni scienziati. Il Senatore G. Capellini, volle nel Museo geologico bolognese dedicata alla memoria di Aldrovandi una *Tribuna*, dove raccolse gli scritti, i materiali, le silografie aldrovandiane riferentisi alla Geologia.

(2) Intorno alla valutazione delle ingentissime spese sostenute dall'Aldrovandi per il suo celeberrimo Museo, di cui ancora cospicui materiali si conservano oggi nell'Istituto botanico e nell'Istituto geologico della R. Università di Bologna, v. Fantuzzi e Mattirolo, loc. cit.

I soccorsi destinati alla pubblicazione delle opere sue, egli (quasi presago dell'obblio che l'avvenire serbava ai manoscritti suoi) implorava ancora nel 1604, un anno prima della morte, con parole commoventi: *E già* (scriveva egli al Duca di Urbino, addì 16 marzo), *l'havrei, poco meno, stampato tutto* (parlando del lavoro *De Insectis*), *se non fosse stata tanta penuria di carta che pure un foglio non s'ha potuto avere, con mio grandissimo danno, in questa età d'82 anni, la quale molta prestezza e non tardanza ricerca!* E così al cav. Belisario Vinta alcuni anni prima si rivolgeva, implorando l'aiuto del Duca: *crederei di far troppo gran mancamento se, fin che io ho tempo, non procurassi di non lasciar perdere tante mie fatiche; et non potendo io da me farlo, non chiedessi l'aiuto da chi meglio di ogni altro Principe di Cristianità può darmelo. L'opere son molte et tutte (il che sia detto senza jattanza) ripiene di singolare eruditione, utili e curiose, et vaghe et non indegne che 'l Gran Duca Ferdinando de' Medici, a imitatione de progenitori suoi, porga loro la potente mano, acciò non perano* (1).

E tutte queste esortazioni, tutto il naturale supremo desiderio di veder pubblicate le opere sue, scaturiscono onestamente ingenui quasi in ogni lettera e si ritrovano epicamente compendiati nelle pagine grandiose del suo testamento (16 nov. 1603) riferito, *per extenso*, nella citata opera di Fantuzzi (pag. 67 e seg.).

Due altre volte ancora e per altri motivi richiese Aldrovandi l'aiuto dei Granduchi di Toscana; e tutte due le volte, come risulta evidente dalla corrispondenza, per compiere opere che elogiano la nobiltà del suo carattere.

Nell'anno 1578 e nel 1585 per richiedere Francesco I della sua potente intromissione presso il Pontefice Gregorio XIII, acciò non venisse, *per l'honore et dignità della Casa Aldrovanda*, defraudata questa della carica nel *Quarantado del Reggimento di Bologna*, dopochè per la durata di anni 140 detta carica aveva nobilitato i membri della sua famiglia!

Nell'anno 1603, nell'intento di aiutare il giovane Alessandro Pietramala (v. lettera), povero cittadino di S. Sepolcro nel Granducato di Toscana, perito nelle lettere e nelle scienze naturali, suo assistente, onde ottenergli dal legittimo sovrano Ferdinando I, il permesso di addottorarsi in Bologna sotto gli auspicî di esso Aldrovandi " *gratis et amore* ", senza perdere con ciò, più tardi, il diritto di esercitare in patria.

Da quanto emerge adunque dalle lettere, risulta che se Aldrovandi implorò soccorsi dai potenti suoi mecenati, li implorò per ideali altissimi che stanno all'infuori di qualunque personale interesse.

L'amore per gli oggetti o le produzioni naturali, straordinarie o varie; la smania febbrile di arricchirne il Museo, erompono ad ogni momento; onde è che quasi in ognuna delle epistole (astrazione fatta di quelle per la nascita di un putto ducale; per le condoglianze in occasione della morte dell'infelicissima Giovanna d'Austria; per congratulazioni nell'immediato e sciagurato matrimonio di Francesco I con Bianca Capello; e infine per l'assunzione al trono di Ferdinando I), troviamo raccomandazioni, preghiere, caldissime supplicazioni rivolte ad ottenere dai potenti protettori, pitture, disegni di produzioni naturali di ogni sorta, di piante, di animali, vasi, semi, piante,

(1) Lettera 32ª. Bologna, aprile 1588.

animali vivi o preparati,..... ogni cosa insomma rara, o mostruosa, o comunque stranamente foggiata, quale in quei tempi di nuove scoperte, i viaggiatori potevano riportare in Europa, in special modo dalle Indie.

E di tutto Aldrovandi si interessa; di tutto fa ricerca attivissima! ricorrendo anche ad artifizi, pur di averne copia per il suo Museo. Così scriveva il 1° aprile 1586 a Francesco I:

Monsignor Segha *Vescovo di Piacenza, mi disse che haveva veduto appresso la Maestà del* Re Filippo *un libro di varie piante, animali et altre cose indiane nove, dipinte; cosa veramente regale; perciò se piacesse a V. A. Serenissima per il Signor suo Ambasciatore di Spagna trarne ritratto di qualche figura degna, penso che non le potrieno farsi esser discari...*, e tutto ciò per ottenerne in seguito le copie dal pittore Granducale!, e tanto si accende, il povero vecchio, dal desiderio di vedere le cose accumulate nei Musei e nei giardini del Granduca, che così gli scrive: *Il ragguagliarmi poi che Ella fa d'haver raccolte tante varie cose rare et peregrine, come d'animali aquatili et terrestri dell'Indie et d'altri luoghi, mi ha così acceso di desiderio di vederle per servirmene alle historie mie, che sarà forza un dì, piacendo a dio, mi trasferisca a vederle!* (1).

Nel Museo aldrovandiano, " *admirabilem Universi mercatum* ", celebrato in versi e in prosa, in greco, in latino ed in volgare, ammirato come una delle meraviglie dell'epoca, dove " *mundi patet ampia suppellex* ", tutti i rami delle naturali discipline erano ugualmente rappresentati. Le descrizioni, i cataloghi che ne rimangono (2), l'Elenco dei personaggi che lo visitarono, non che i materiali residui che ancora ci pervennero, stanno a testimoniare l'opera immensa compiuta da quella prodigiosa attività di ricerca che ebbe alcunchè di febbrile durante tutta la lunga vita di Aldrovandi.

Nelle lettere aldrovandiane qua e colà si incontrano dati riferentisi alle raccolte destinate al Museo, ai disegni eccellenti che ancora oggi fortunatamente in gran parte si conservano; alle pitture o meglio alle miniature di Lorenzo Bennini fiorentino, di Cornelio Swinto da Francoforte, e in parte anche dal celebre veronese Jacopo Ligozzi allievo di Paolo Caliari, pittore del Granduca, che dedicò l'ingegno e la straordinaria maestria del pennello a rappresentare colla più penetrante verità di particolari i vegetali e gli animali (3); alle piante essiccate e agglutinate negli

---

(1) Lettera 14 aprile 1586.

(2) Vedi a questo riguardo i lavori citati e gli Elenchi interessantissimi per le indicazioni di dati e di nomi conservati nella Biblioteca di Bologna fra i manoscritti Aldrovandiani, ai numeri 41 e 110 — *Catalogus virorum qui visitarunt Musæum nostrum et manu propria subscripserunt in meis libris Musœi secundum ordinum, dignitatum studiorum et professionum.* — Intorno a questi cataloghi, in numero di 5, vedi Mattirolo, loc. cit., pag. 72 et seg.

(3) Fu anche merito particolare di Ulisse Aldrovandi quello di aver iniziata tutta una Scuola di artisti egregi, indirizzandoli ad un genere speciale di arte, della quale il Ligozzi Jacopo può dirsi il *principe*. Tanta è la precisione del disegno, la virtuosità della esecuzione, la perfezione mimetica raggiunta da questi artisti, che i Commissari della Repubblica francese incaricati da Napoleone I di scegliere in Bologna i capilavori da inviarsi a Parigi (5 luglio 1796) non esitarono a ritenere i loro lavori degni di accompagnare la sublime Santa Cecilia di Raffaello a Parigi, colla quale poi fortunatamente fecero ritorno in Italia nell'anno 1815, dopo il Trattato di Vienna.

Intorno ai lavori di Jacopo Ligozzi e del suo nipote Bartolomeo, emuli e forse superiori ai noti Olandesi: Giovanni Brueghel, Daniele Seghers, Giovanni Davide di Heem, Giovanni Van Huysum, Rachele Ruysch, che furono ritenuti insuperabili nell'arte di rappresentare i fiori, spero in breve di

Erbarii che per buona ventura pervennero insino a noi (1); ai semi, agli animali, e a tutte le altre produzioni naturali che facevano bella mostra nel Museo aldrovandiano. Così, ad esempio, dalla *Nota* annessa alla lettera aprile 1588, rilevasi, che a quell'epoca le figure degli *animali peregrini* riprodotte *al vero* erano radunate in sedici volumi in numero di *tre* mila; che le piante essiccate e *agglutinate* erano in numero di *sette* mila e che di esse *quattro* mila erano dipinte al naturale; le prime raccolte in quindici volumi (2), quali attualmente si conservano ancora nella Sala dedicata alle raccolte aldrovandiane nei locali del R. Istituto botanico di Bologna (3); e che parimenti sommavano a quattromila le *pietre*, i *marmòri*, le *gemme*, i *sassi*, i *metalli mezzi*, i *minerali et i succi concreti, come eletro, zolfo, bitume, canphora ed altri.*

Per la storia dei Musei in genere, e in particolare di quello famoso ideato e messo insieme da Ulisse Aldrovandi, sono adunque da ritenersi queste lettere di peculiare interesse.

Degne di menzione sono pure le Epistole segnate coi numeri XXXVI a XXXIX, che si riferiscono alla richiesta di alcuni uccelli, di cui Aldrovandi aveva bisogno per completarne la descrizione anatomica. Ricercando egli *per bellezza et perfettion maggiore* dell'opera sua, *per intagliarla et disporla et precisamente descriverla con l'historia sua* nel suo libro, *uno apparato alle parti anatomiche* dell'Aquila e dell'Avoltoio, si rivolge al Granduca, scrivendogli che: *desideraria il avoltoio, il quale fra più di settecento uccelli* che aveva *tutti intagliati in pero, siccome l'aquila, mai* gli era *capitato alle mani*, e che *riceverà da questo frutto non poco ogni studioso*, come spera, *l'opera sua ornamento e l'autore del dono gratia singolare.* Aggiungendo inoltre nella chiusa della lettera 27 novembre 1591, che gli *sarebbe molto necessario d'haver il vero animale vivo o morto, per cavarne la verità dalle tenebre et uscire dalle favole descritte da l'antichi! Io ricorro,* scrive Aldrovandi, *a V. Alt. Ser.*^{ma} *siccome fece* Aristotile *ad* Alessandro Magno, *quando compose l'historia d'animali, perchè queste piante et animali peregrini, non si possono conseguire se non per mezzo di grandissimi principi siccome è S. A. Serenissima.....*

Parole che dimostrano l'importanza che l'Aldrovandi attribuiva all'osservazione diretta e diligente della natura, siccome appare luminosamente anche dalla lettera XXX, nella quale sono minutamente descritti i particolari anatomici relativi alla lingua delle specie *de' Pici,* da lui sezionata e studiata.

L'osservazione diretta, attenta e minuziosa della natura formò la base degli studî tassonomici e organografici che l'Aldrovandi riassunse poi, per quanto ha riguardo ai vegetali, nelle 1700 Tavole sinottiche che compongono la *Syntaxis plantarum*, dove,

---

poter presentare uno studio esteso, avendo avuto agio di fare le ricerche opportune nei Musei di Bologna e di Firenze e nelle Biblioteche, dove meritatamente si conservano come preziosi cimelî; per dimostrare come anche in questa arte speciale l'Italia fu maestra al mondo. V. anche Mattirolo, loc. cit., pag. 77 e seg.

(1) Vedi a questo riguardo Mattirolo, loc. cit., e le opere di St-Lager, Camus, Caruel, Saccardo, ivi ricordate.

(2) Vedi O. Mattirolo, *Illustrazione del primo volume dell'Erbario di Ulisse Aldrovandi.* " Malpighia ". Anno 1899. Genova.

(3) Vedi O. Mattirolo, *La nuova " Sala Aldrovandi " nell'Istituto botanico della R. Università di Bologna.* " Malpighia ". Genova. 1898.

come ho dimostrato (1), si ammirano con un senso di stupefazione i principi fondamentali di quel sistema di classificazione, che sotto il nome di *sistema sessuale di Linneo*, doveva duecento anni dopo conquistare il mondo!

Nella lettera XXXII Aldrovandi ci offre, riassunto in lingua volgare, tutto il piano dei suoi lavori (2), spiega il concetto scientifico a cui erano informate le sue opere; ne indica le proporzioni, ne dimostra l'utilità per raccomandarne la pubblicazione (3).

Questa lettera costituisce il documento più prezioso di tutto il carteggio, perchè ci fornisce il modo di abbracciare col pensiero tutta l'immensità dell'opera di questo fortissimo ingegno enciclopedico, che fu ad un tempo celeberrimo naturalista, medico insigne, filosofo, matematico, astronomo, storico, ed erudito valentissimo!

Interessanti per molti riguardi sono pure per la storia delle scienze nostre i varî accenni ai nomi di naturalisti contemporanei suoi. Così, troviamo nelle lettere in più luoghi ricordati: Giuseppe Casabona, semplicista del Granduca, noto generalmente sotto il nome di *Benincasa*, fiammingo, di bellissima fama come botanico, viaggiatore, coltivatore e importatore di piante esotiche in Toscana; il celeberrimo Clusius (De l'Écluse) — il notissimo Gerolamo Mercuriale — Lorenzo Bennini (o Bonini), fiorentino, pittore abilissimo nel ritrarre gli oggetti naturali, come piante ed animali..... Messer Giovannantonio Confredi genovese, Dottore del Collegio di Bologna, che Aldrovandi giudica così valoroso botanico, da raccomandarne al Granduca Ferdinando I la elezione alla Cattedra dei Semplici di Pisa (1602), allora vacante, rilevando un dato storico ignoto agli illustratori delle cronache dell'Orto pisano.

Altri nomi chiari, quali quelli di messer Giuliano Griffoni, nipote di Aldrovandi, camerlengo del Papa; del Senatore Giovanni Aldrovandi, ambasciatore di S. S.; del Cardinale Paleotti, di Tommaso Natali Laguseo, filosofo, medico e canonico di Cracovia, ecc., figurano pure qua e là nella raccolta delle epistole, dalle quali pure emergono curiose osservazioni.

Così ricorderò che Aldrovandi (6 aprile 1599), rivolgendosi al Granduca Ferdinando, al quale aveva inviato in dono un esemplare della sua *Ornithologia*, lo supplica perchè voglia accordargli per dieci anni la *gratia del privilegio* — dicendo che *se bene nel primo tomo* egli non avesse *inserito il privilegio, basterà* che egli lo abbia appresso di sè, *come si costuma da alcuni altri*. Indicazione questa, che io ritengo possa avere qualche importanza per gli studiosi della antica legislatura relativa alla proprietà letteraria; come possono averne per la storia delle edizioni aldrovandiane le lettere del Dottore Giulio Cupellino, agente del Duca di Urbino, relativamente alle sue relazioni coll'editore bolognese Gerolamo Tamburino, le quali figurano in appendice alla raccolta presente.

---

(1) V. Mattirolo, loc. cit. Da quanto ivi è riferito, colla scorta di documenti, risulta che la classificazione Linneana dei vegetali deve essere considerata nulla più che *una felicissima sintesi delle osservazioni dei predecessori di Linneo*, fra i quali deve essere per primo annoverato Aldrovandi.

(2)..... *c'est que l'antiquité ne nous fournit point d'exemple d'un dessein aussi étendu et aussi laborieux que celui de notre Ulysse à l'égard de l'Histoire Naturelle*, disse M. Bayle nel suo Dizionario.

(3) *E se oltre alle mie deboli forze havessi qualche aiuto, verrebbe a luce alcuna delle mie opre, che così è necessario stieno sepolte!* scrive egli ancora nell'età di 80 anni (Lettera 23 sett. 1602).

Di minore interesse è la corrispondenza col Duca di Urbino, compendiata in 7 lettere, in gran parte dedicate a ringraziamenti per gli aiuti che il Duca generosamente gli concedeva, anche nell'intento di possedere copia dei libri che fosse *miniata coi colori naturali et con gran diligenza* dai pittori di Aldrovandi, siccome è ampiamente riferito nelle lettere del Cupellino; nelle quali è pure menzionato un Dottore Giovanni Corneli, morto improvvisamente nel dicembre del 1619, il quale non è altri che il prediletto allievo di Aldrovandi, Giovanni Cornelio Uterverio. Questi dopo la morte del maestro successogli nelle cariche (1605-1619), curò per alcuni anni la stampa delle opere di Aldrovandi, continuatasi poi dall'Ambrosini e purtroppo dal Montalbano (1).

Termino il presente scritto, che deve servire di introduzione e commento alla corrispondenza di Aldrovandi coi Medici e col Duca di Urbino, dichiarando, che non ho creduto opportuno accompagnare le lettere con note illustrative (fatta eccezione di alcune da me ritenute indispensabili); imperocchè nulla avrei potuto, nè saputo aggiungere alla chiarezza del testo e ben poco ho potuto ricavare dalle opere stesse di Aldrodandi e da quelle dei contemporanei suoi in merito a certi nomi strani usati in dette lettere per designare oggetti naturali, che poi sono stati altrimenti indicati dallo stesso Aldrovandi nelle sue opere.

La maggior parte però dei nomi che si incontrano non hanno bisogno di spiegazioni e specialmente quelli che indicano gli animali, si possono con facilità comprendere da chicchessia.

Trattandosi poi di personaggi sul merito dei quali la Storia ha giudicato inappellabilmente e severamente, mi compiaccio far rilevare come possano essere considerati quali *titoli di merito,* tanto il favore da essi concesso all'Aldrovandi, quanto l'amore da loro dimostrato per le scienze naturali, alle quali anche gli ultimi discendenti della famiglia Medicea, pure così degeneri dagli avi, seppero rendere importanti servigi, accumulando materiali, collezioni classiche e libri rarissimi di scienza, i cui residui, rispettati dalle vicende del tempo, formano oggi ancora uno dei pregi che rendono storicamente importanti i Musei di Storia Naturale che si ammirano nella città di Firenze.

A Francesco I e a Ferdinando I l'Italia va in gran parte debitrice di quel brillante movimento orticolo manifestatosi in Firenze sulla fine del XVI secolo, di cui tanta traccia rimane nel mondo; perocchè da Firenze si sparsero ovunque le nuove colture, le varietà più rispondenti ai capricci della moda, alle esigenze del lusso, ottenute coltivando le più rare specie delle piante importate dai più lontani paesi (2).

La protezione illuminata accordata già da Cosimo I a Luca Ghini; poi da Francesco I a Luigi Leoni, a Domenico Boschi, a Giuseppe Casabona, al sommo Andrea

(1) V. Fantuzzi, *Opere stampate di Aldrovandi*, pag. 106 e Mattirolo, loc. cit., pag. 40 e seg. per quanto riguarda gli errori di Montalbano!

(2) V. Le innumerevoli opere dei Targioni, quelle del Micheli, del Lastra, *i volumi* dell'Accademia dei Georgofili ..... — e principalmente — A. Targioni Tozzetti, *Cenni storici sulla introduzione di varie piante nell'agricoltura ed orticultura toscana*. Ristampa. Firenze, 1896. — G. Targioni Tozzetti, *Notizie sulla storia delle Scienze fisiche in Toscana*, Firenze, 1852. — O. Mattirolo, *Il Calendario di Flora per Firenze, secondo il manoscritto dell'anno 1592 di Frate A. Del Riccio.* " Bollettino Soc. Ort. Toscana ,, 1900. — O. Mattirolo, *Cenni cronologici sugli Orti botanici di Firenze*. Pubbl. del R. Istituto di Studi Sup. Firenze, 1899.

Cesalpino; da Ferdinando I continuata al Casabona, data al padre Francesco Malocchi e da entrambi generosamente concessa a Ulisse Aldrovandi; nonchè i risultati ottenuti mercè l'attivissimo commercio da essi mantenuto coi più *rari semplicisti* dell' epoca, che resero allora Firenze *prima* nel culto di Flora, non dovranno mai essere dimenticati dallo storico nel giudicare questi uomini.

TAVOLA CRONOLOGICA

DELLE

LETTERE DI ULISSE ALDROVANDI (1)

A Francesco I	Lettere	N. 3	Anno	1577	
" "	"	" 5	"	1578	
" "	"	" 1	"	1580	
" "	"	" 1	"	1581	
" "	"	" 3	"	1583	
" "	"	" 7	"	1585	
" "	"	" 8	"	1586	
" "	"	" 2	"	1587	
A Ferdinando I	"	" 1	"	1587	
(e Cav. Vinta)	"	" 2	"	1588	
" "	"	" 2	"	1590	
" "	"	" 4	"	1591	
" "	"	" 1	"	1599	
" "	"	" 1	"	1600	
" "	"	" 1	"	1601	
" "	"	" 1	"	1602	
" "	"	" 4	"	1603	
" "	"	" 1	"	1604	
Al Duca d'Urbino	"	" 1	"	1599	
" "	"	" 1	"	1601	
" "	"	" 1	"	1602	
" "	"	" 2	"	1603	
" "	"	" 2	"	1604	N. 55
Del D. G. Cuppellino al Duca d'Urbino . . .	"	" 1	"	1599	
" " "	"	" 1	"	1610	
" " "	"	" 1	"	1611	
" " "	"	" 1	"	1613	
" " "	"	" 1	"	1614	
" " "	"	" 1	"	1616	
" " "	"	" 1	"	1619	
" " "	"	" 3	"	1620	
" " "	"	" 2	"	1621	N. 12.

(1) Va ricordato che *quattro* di queste lettere furono già pubblicate da Giuseppe Palagi bibliotecario, nell'occasione delle Nozze Aldrovandi-Marsano avvenute in Bologna. La pubblicazione (in folio), di *50* esemplari, fu fatta in Firenze coi tipi dei Succ. Le Monnier nell'anno 1873. Le quattro lettere sono quelle datate: 8 Settembre 1578 - 4 Giugno 1585 - 10 Dicembre 1585 - 26 Luglio 1587.

Lettere di Ulisse Aldrovandi a Francesco I [1] dei Medici Granduca di Toscana (1577-1587).

[*R. Archivio di Stato di Firenze, Mediceo, Cart.° di Francesco I - Filza n° 698*, 168].

Ser.^{mo} Sig.^{re} Sig.^{re} et P.rone mio Col.^{mo}

Ancorchè l'osservanza et devota servitù ch'ho sempre portata a V. A. Ser.^{ma} et alla Ser.^{ma} Casa sua, possa haverle fatto fede et testimonianza della molta allegrezza et gran contento che ho preso della bella gratia fattali da N. S. Iddio, in haverli dato il Putto maschio, nondimeno m'è parso significargliela per il mezzo di questa mia; si come con ogni reverenza faccio, rallegrandomene grandemente con V. A. Ser.^{ma}, pregandoli ogni dì maggior contentezza et prosperità; con che, inchinandomele, le baso le mani. Et N. S. Iddio ogni suo desiderio conduca a lieto fine, ecc.

Da Roma li XXIV di maggio 1577

Di V. A. Ser.^{ma}

Humilissimo et Devotissimo Ser^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} il Sig.^{re} Gran Duca di Toscana,
Sig.^{re} et P.rone mio Colendissimo, a Fiorenza.

Filza n° 702, 71.

Sereniss.^{mo} Sig.^{or} mio sempre Colend.^{mo}.

Doppo la partita mia di Fiorenza a Bologna, sono stati tanti li travagli et fastidii che ho havuto per l'acerba et immatura morte del mio unico figliuolo, d'età di XVII anni, qual per l'età sua era ben fondato nelle lettere humane; di modo che per questi dispiaceri sono stato distratto di fare quello che era debito mio con S. A. a cui infinitamente mi trovo obligato. Hor venendo costì a Fiorenza il presente latore messer GIULIANO *(Griffoni)* mio Nipote, per godere l'honorate feste di S. A. che si celebrarano per il Santiss.^{mo} Battesimo del Sereniss.^{mo} suo figliuolo nato; donde non ho voluto mancare con questa occasione di cométterli che faccia riverenza a S. A. a nome mio con iscusarmi anchora appresso di quella del mio haver differito di scrivergli; et in segno della mia servitù et buon animo che ho verso lei, le mando una scatoletta con XXV cose naturali inchiuse, le qual forse potrebbe essere che le fossero grate, per non haver io veduto appresso quella consimili. Fra otto o dieci giorni gli ne mandarò un altra per mezzo del Sig.^{or} GIOVANNI ALDROVANDI, Senatore Ambasciadore a N. S. Et prego S. A. d'accettar il mio buon animo, perchè io dubito, come si suol dire, di non mandar acqua al mare. Et si persuada al certo che di tutte le cose che potrò, et mi pareranno degne di S. A. ne farò partecipe. Et essendo stato il mio Pittore quasi tutto questo tempo fuor di Bologna, et parte amalato, non ho potuto far depingerli il Dracone et Riverso pesse dell'India per mandarglile. Et acciò habbia maggior lume di queste cose che io le mando, ho scritto un breve Catalogo, separato dalla lettera, secondo il numero de scartozzini, quali responderano al Catalogo. Et così farò nell'altre che le mandarò per l'avvenire. Appresso di questa scatola li mando quattro figure

(1) Francesco I (II° Granduca di Toscana) n. 25 marzo 1541 - m. 9 ottobre 1587.

di quattro piante Indiane molto belle e rare, quali sono da otto anni che hebbi di Portagalo, et le feci dipingere nelle mie historie da questi originali, da quali S. A. potrà farne far pittura dal suo eccellente Pittore, il qual per il suo disegno le potrà aiutare et farle più belle et più perfette. Et S. A. si servi questi originali appresso di sè, perch'io n'ho fatto fare il trassonto di quelli nelle mie historie. Appresso di questo desideraria un favor singolar da S. A. la pittura di quei doi serpenti, cioè del Ceraste et Ammodite che mi donò vivi, perchè non havendo potuto haver il mio Pittore, non li ho potuto far dipingere; et uno di quelli è morto, qual ancora si sia magrito per essersi nutrito di suo flemma, non havendo mai mangiato. Lo fo essicare per mettere nel mio Museo. Desiderarei anchora per memoria di S. A. un vasetto di porcellana di sua inventione et un bicchiere di cristallo di montagna. Et non essendo questo per altro, con ogni riverenza basciando a S. A. le honorande mani, le desidero ogni maggior felicità. Di Bologna alli XIX di settembre 1577.

Dell'Altezza Vostra

Humiliss.^{mo} et devotiss.^{mo} Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana.

Filza n° 703, 308.

Sereniss.^{mo} Principe Sig.^{or} mio Colend.^{mo}.

Avendo io promesso a V. A. di mandarle alcune altre cose naturali per mezzo del sig.^{or} GIOVANNI ALDROVANDI, eletto Ambasciatore dal Clariss.^{mo} et Ill.^{re} Senato nostro a N. S.; però non ho voluto mancare di sodisfare a quanto era debitore, supplicando V. A. ad accettare, secondo l'occasione che si offerisce di presente, questo piccolo segno della mia servitù; alla picciolezza del quale la prego che si degni di supplire con parte dell'infinita humanità sua. Et acciò che meglio ella possa confrontare la mia opinione, ho scritto separatamente un Catalogo brevissimo, con i numeri respondenti alli scartozzini dove sono inchiuse le cose mandate: nel medesimo modo che io feci nelle altre che le mandai questi giorni passati, seguendo il numero dal XXVI insin alli LVI. Di più ancora ho aggionto a questo Indice quel medesimo che mandai a V. A. per mezzo di messer GIULIANO GRIFFONI mio nepote, havendo scritto ogni cosa in questo libretto in quarto, acciò che più comodamente le possa leggere et confrontare, secondo le verrà l'occasione. Et non mi occorrendo altro a dire per ora, bascio con ogni riverenza le mani a V. A. pregandola a conservarmi nel numero de' suoi minimi servitori; supplicando il Signore Iddio che le dia lunghissima et felicissima vita, per consolatione di tutti quelli che l'amano di cuore. Di Bologna, alli II di ottobre 1577.

De l'Altezza Vostra

Humiliss.^{mo} et divotiss.^{mo} Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Principe il Gran Duca di Toscana, Sig.^{or} mio Colendissimo.

Filza n° 710, 240.

Sereniss.^{mo} Gran Duca Sig.^{re} e P.rone mio Colendissimo.

Se io non conoscessi V. A. Ser.^{ma} esser dotata e di prudenza e sapienza grande, nel vero mi sforzarei hora di persuaderle in qualche modo a comportare con l'animo quieto e pacato il dolore et affanno causato in lei dall'acerba et inaspettata morte della Ser.^{ma} Gran Duchessa, già ottima Consorte di V. A. Ser.^{ma}. Ma sendo io certo che lei con incomparabile fortezza e constanza d'animo soporterà questo così acerbo e crudo colpo, per esser ella munita et armata di quelle belle e rare doti dell'animo che per tal caso le possono allegerire il conceputo dolore, altro non le dirò, se non che pigliando ogni cosa dalla benedetta mano del Signore Iddio, del tutto si conformi con la volontà di Sua Divina Maiestade; tenendo per fermo che noi più presto nell'animo rallegrar ci dobbiamo che contristarci; sendo noi certi che S. A. haverà commutata la terrena nella celeste patria, sendo ella stata lucentissimo specchio al mondo di bontà, di costumi e di virtù christiana; circa il che si può dire che S. A. non ha avuto all'età nostra pari, non che superiore. Ma forse è meglio di questo per hora tacere, perchè qui non è luogo di numerare le lodi sue. Onde si come crediamo che S. A. adesso godi felicemente i frutti delle sue santissime virtù che ebbe in terra, così dovemo pregare l'alta Maestà del Grande Iddio che vogli per sua misericordia far degni noi di rivederla un giorno in Cielo a laude e gloria del Suo Santissimo Nome. E con questo fine, e con quella maggior riverenza che io debbo, bascio le mani di V. A. Serenissima, desiderando che ella mi conservi nel numero de' suoi minimi et aff.^{mi} Servitori. Di Bologna il dì 21 d'Aprile MDLXXVIII.

Di V. A. Serenissima

Humiliss.^{mo} et devotiss.^{mo} Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Gran Duca di Toscana, Sig.^{r} mio Colendissimo, Fiorenza.

Filza n° 712, 286.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} mio Colendissimo,

Ritrovandosi hora il Sig.^{re} GIOVANNI ALDROVANDO mio zio, Imbasciatore di Bologna a N. S., infermato a morte, mi è parso perciò ricorrere a V. A. Sereniss.^{ma} come a mio singolarissimo Signore, supplicandola con ogni affetto a volermi favorire d'una sua a S. B. (1) con pregarla che si contenti impiegare la dignità del Quarantado nella persona mia; essendo tal dignità stata per cento e quarant'anni continui nella casa nostra. Potrà anco l'A. V. accrescere l'obligo mio con raccomandare l'istesso mio desiderio al Sig.^{or} MARCHESE BONCOMPAGNO, che mi voglia favorire appresso S. S.^{tà} ad intercession pure di V. A. Et perchè so di che maniera suole favorire gli suoi servidori affettionatissimi, come io le sono, non mi stenderò più a longo in pregarla; le dirò solo che di quanto mi verrà sempre d'honore et utile, tutto riconoscerò dalla molta benignità di V. A. Sereniss.^{ma} alla quale vivo per sempre servidore obbligatiss.^{mo}. Et qui basciandole con ogni riverenza l'honoratiss.^{me} mani, le prego dal Signore Iddio longa et felicissima vita.

Di Bologna a dì 13 di giugno 1578.

Di V. A. Serenissima

Humilissimo et Deditissimo Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Granduca di Toscana Signor mio Colendissimo.

Filza n° 713, 493.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} mio Colend.^{mo}

Dalle lettere di V. A. et dal Commendatore di Santo Spirto, mio fratello, ho molto bene inteso l'amorevole et molto efficace offitio che a V. A. è piaciuto di fare a benefitio mio, e con N. S.^{re} e con il Sig.^{re} MARCHESE BUONCOMPAGNO. Et se bene non è seguito l'effetto, non essendo venuto il caso; non è per questo che io non vivi all'A. V. obligatissimo, tanto quanto huomo che viva. Et tanto più che mi resta speranza si grande di poter conseguire all'occasione questo et maggiore cosa assai, mediante il molto favore dell'A. V.; quale promessomi da lei per l'avvenire, non per merito mio ma per sua infinita bontà, sarà molto bene messo in opera all'occasione da me. Et insieme con tutta la Casa mia di così segnalato favore et obligo che le dovemo, pregarò sempre per il felicissimo stato dell'A. V. alla quale con quella più riverenza che devo, humilmente le bascio le mane.

Di Bologna il primo di luglio 1578.

Di V. A. Sereniss.^{ma}

Humiliss.^{mo} et obligatiss.^{mo}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Granduca di Toscana, Sig.^{re} mio Colendiss.^{mo}, Fiorenza.

---

(1) S. B. = Senato bolognese.

Filza n° 725, 589.

Sereniss.^{mo} Gran Duca Sig.^{or} mio Col.^{mo}

L'esser io forse l'ultimo fra tanti suoi servitori deditissimi a congratularmi con V. A. Sereniss.^{ma} del suo felicissimo matrimonio, non è stato causato d'altro, se non che di giorno in giorno desiderava in propria persona di fare questo uffitio; ma essendomi sopragiunti certi negotii publici, importanti, non ho potuto fare quanto era debito mio, il che m'ha portato non poco dispiacere. Ma forsi havrò questo di più de gl'altri, che l'avere io ritardato insin ad hora fare quanto ricercava la servitù mia, operarà che la mia allegrezza sarà in qualche consideratione appresso V. A. dove prima saria stata oscurata dal colmo delle congratulationi di tanti Principi et Signori Illustrissimi.

Resta adunque che questa mia faccia quell'uffitio che a me non è stato permesso. Sono certissimo che non senza gran misterio dell'eterno Iddio, che ordina et dispone il tutto, sia venuto V. A. a questo legame del Santissimo matrimonio, del quale infinitamente mi rallegro, et ne piglio quella consolatione che deve un suo divotissimo Servitore come io le sono.

Et non essendo questo per altro, con quella maggior riverenza che debbo, bascio le honorate mani a V. A. Sereniss.^{ma} supplicando il Signore Iddio, che le dia longa et felicissima vita.

Di Bologna alli 4 di luglio MDLXXV[III]

Di V. A. Sereniss.^{ma}

Humiliss.^{mo} et divotiss.^{mo} Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana Sig.^{re} mio Colend.^{mo}

Filza n° 715, 226.

Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana Sig.^{or} mio Colendissimo

Con l'occasione del ritorno del signor CONDE POLIDORO CASTELLI a Fiorenza, non ho voluto mancare, Sereniss.^{mo} Gran Duca, di far riverenza a V. A. et insieme mandarle per il sudetto Sig.^{r} Conte sei figure, cioè quattro d'animali et due di piante peregrine; depinte al vivo dal mio pittore; et tal qual sono si degnarà accettarle et goderle per la servitù che li porto. Et acciò V. A. possa havere più particolarmente cognitione di queste cose che hora le mando, ho descritto separatamente in questo libretto un piccolo discorso sopra quelle. Et al primo numero è il Riverso di forma d'Anguilla, al secondo l'altro Riverso, quale è tutto spinoso, al terzo è il Coracino del Nilo, al quarto è il Serpente da dieci piedi mostrifico. La prima pianta è 'l fiore del Tigre, la seconda è la Corona Imperiale. Supplico V. A. che mi faccia favore di farmi havere la pittura del Ceraste et del Hammodite serpenti, che l'anno passato fece dipingere al suo pittore, acciò le possa porre nelle mie historie; perchè io non potè far dipingere quelli che mi donò l'A. V. non havendo potuto havere il mio pittore avanti moressero. Mi serà ancora carissimo haver un vaso di Porcellana et di Cristallo fatti di sua inventione. Questi giorni passati ho havuto da Polonia le figure dell'Uro, del Turo et dell'Alce, che sono animali bellissimi, depinti al vivo; e se V. A. ne vorrà la copia la farò fare molto volentieri. Et se per mezzo suo se potesse havere di Polonia la pittura di sei sorti di Topi salvatichi et del Varo, de' quali le mando il memoriale in questa inchiuso, con i suoi nomi proprii, mi sarà gratissimo: et credo che ancora a lei sarà caro di haverle tra le sue pitture. Et non mi occorrendo hora altro, bascio con ogni riverenza le mani a V. A. Sereniss.^{ma}, pregando il Signore Iddio a darle ogni prosperità et contento. Di Bologna, alli 8 di settembre 1578.

Di V. A. Sereniss.^{ma}

Humiliss.^{mo} et deditiss.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana.

Filza n° 715, 227.

Catalogus quorundam animalium, quorum icones ad vivum depictas e Polonia Ulysses Aldrovandus desiderat.

Mus ponticus seu varius, vulgo *Armelino* vel *varo*, cui rutulus color mistus sit cinere. Poloni Murium sylvestrium, qui in pretio habentur ad vestimenta presertim nobilium, quatuor precipua genera observant; quorum picturas appeto scilicet:

I. Popieliza (*sic*) grisei coloris est.

II. Gronosthay animal albissimum in fine caude nigricat.

III. Novogrodel ab oppido eiusdem nominis dictum albicat quidem, sed ita ut sit intermixtum aliquid grisei.

IIII. Vuenvork castanes colore clare; haec genera omnia parva differunt coloribus, capitis forma et victu quod alia in terra, alia in arboribus degunt.

Secundum quidem genus non aliud quam *Hermolinum* vulgo dictum esse apparet.

Primum et tertium ad Variorum sive Ponticorum, murium genus refero, quartum sciurum significat sed nos eum habemus, si diversus est a nostro Italico, mittatur.

Mustella, *Zebelino*, vulgo, mas, et femina, presertim si in sexu sit discrimen.

Filza n° 742, 284.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} et Pron.^{e} mio Col.^{mo}

Tanto è grande la cortesia et benignità che l'A. V. si degna usare ogni giorno verso di me, suo minimo servitore, che in vero non saprei trovare parole con le quali potesse debbitamente ringratiarla. Nondimeno con quella più gran riverenza che posso ringratio per questa mia l'A. V. Ser.^{ma} delle figure de serpi et uccelli Indiani, che sono benissimo dipinti al vivo. Però mi sono state gratissime et l'ho fatto subito legare con l'altre mie figure. Ringratio parimente V. A. Ser.^{ma} della lettera scritta al R.^{mo} Arcivescovo di Fiorenza, suo Ambasciatore a Roma, a mio favore per conto del Quarantado; la qual con buona occasione presentarà Mons.^{re} Commendatore mio fratello al prefato suo Ambasciatore, acciò faccia officio per noi favorevole con N. S. con ogni occasione che potesse avvenire.

Il mio pittore è stato ammalato insin a morte d'una grave caduta, come potrà intendere dal presente suo simplicista. Però non ho potuto fare quel tanto che io desiderava di mandarle qualche cosa straniera; ma hora incomincia a star bene, et subito potrà depingere non mancarò di mandarle qualche figure che crederò piaceranno all'A. V. Ser.^{ma} alla quale mi trovo obligatissimo Ser.^{re}. Et con ogni riverenza le bascio le mani et le prego dal Signore Iddio feliciss.^{mo} successo in tutte le sue imprese.

Di Bologna il p.° di decembre MDLXXX.

Di V. A. Ser.^{ma}

Humil.^{mo} Ser.^{re}

Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana, Sig.^{re} et Pron.^{e} Col.^{mo}.

Filza n° 745, 243.

Ser.^{mo} Gran Duca S.^{or} mio Col.^{mo}

Hancor ch'io sappia quanto sia copiosa V. A. Ser.^{ma} di molte cose naturali, nondimeno con l'occasione di messer Giuliano Griffoni, mio nepote, il quale se ne passa a Roma, mando a V. A. Ser.^{ma} sei figure varie, tre di piante et altre tante d'animali, le quali forsi le potranno esser care. E se pur non seranno così a suo gusto, le potrà far di nuovo depingerle dal suo diligente pittore. Et perchè V. A. Ser.ma habbia più minuta notitia delle sudette figure, le mando un puoco di discorso sopra di esse separatamente. Nè restandomi altro che dirli, con maggiore humiltà che debbo le bacio le mani, raccordandomeli suo obligatiss.mo Ser.re.

Di Bologna il dì XIII di marzo 1581.

Di V. A. Ser.ma

Humiliss.mo et devotiss.mo Ser.re

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.mo Gran Duca di Toscana, Sig.re et Pro.e mio Col.mo.

Filza n° 760, 555.

Sereniss.mo Pron.e mio Col.mo

Ho desiderato molte et molte volte di saper le piante che nel Giardino dell'A. V. Ser.ma si ritrovano, tutto per poterla servir in cosa che le fosse cara, et per molte volte che n'habbia scritto a m. GIOSEFFO (1) suo giardinero, mai ne ho havuto gratia. Dove ho risoluto supplicarne con questa mia V. A. Ser.ma a contentarsi di porgermene lei stessa occasione, essendo che altro non desidero che di servirla. Mi posso assai ben credere che 'l suo Giardino sia copiosissimo, dove dubito che mandandole io qualche cosa, non sia poi fuora di proposito, et che quella se le ritrovi. Tuttavia ho voluto mandarle per questo mio huomo a posta certe cose a ventura; le quali se le saranno di gusto mi sarà cariss.mo et se non, saranno almeno cagione che quella si risolverà a mandarmi nota di tutto quello che nel Giardino di V. A. Ser.ma si ritrova, a causa che per l'avenire io non incorra più in questo errore. Et ciò lo dovrà fare, perchè se bene non mi troverò io cosa nel mio giardino per lei, sarò almeno buono da procacciarne, et da indrizzar l'A. V. Ser.ma di dove lei potrà cavare cose rarissime, le quali a me sono in progresso di tempo morte. Et queste sono, alla somma che ne ho havuto, da 7000 m, le quali sono appresso di me parte depinte, parte essicate et agglutinate ne libri. Delle quali potrà V. A. per mezo di miei Cataloghi haverne notitia, et le metterà assieme in pochissimo tempo, per la gran potenza che lei tiene in tutte le parti del mondo, cosa che a me ci è corsa un etade. Si risolverà dunche V. A. Ser.ma di servirsi di me in tutto quello vederami buono. Et se anco manderà il suo m. GIOSEFFO o altro qua nel mio giardino, sia certa che pur che ci sia cosa a proposito suo, che ne sarà patrona di quelle che saranno etiam uniche, non che del resto, et mi reputarò favoritissimo se mi commanderà. Et con ogni riverenza le bacio la mano.

Di Bologna alli 26 d'aprile 1583.

Di V. A. Ser.ma

Obligatiss.mo et Humiliss.mo Serv.re

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.mo Gran Duca di Toscana Sig.re et Pron.e mio Col.mo.

Ivi a 556.

Catalogo delle piante mandate dal Dottor Aldrovandi.

Scilla over Squilla, venuta da Cephalonia, la quale, come ancora si può vedere dalla sua base, era quattro volte più grande che hora si vede.

Chamairis Lutea caerulea.

Argentina.

Rhodia radix.

Ranunculus Illyricus.

Trinitas flore albo purpureo.

Clematis Daphnoides Flore candido, rubro, purpureo.

(1) Giuseppe Casabona. V. pag. seguente.

Dictamnum Cretense verum.
Thalictrum minimum.
Calamentum Aquaticum.
Calamentum Anglicum, variegatum albo et viridi.
Caryophyllum Ungaricum.
Thlaspi Orientale parvum.
Anemone Mediolanensis.
Bulbus Eriophoros.
Thlaspi contra morsum canis rabidi.
Salvia minima.
Carduus Eriophoros.
Titymalus dendroides.
Cithisus verus.
Tanacetum Anglicum.
Digitalis maior.
Archangelica flo. albo.

Filza n° 763, 246.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} e Pron.^{e} mio Col.^{mo}

Andando a Roma messer Giuliano Griffoni, mio nipote, con l'Ill.^{mo} Cardinal Guastavillano, suo Signore, mi è parso debito di servitore di basciar la mano a V. A. Sereniss.^{ma} con questa mia, et inviarle insieme queste poche sementi, che mi sono state mandate questi giorni di Fiandra e di Spagna: le quali prego voler accettare per sua benignità, quantunque non ci sia forsi cosa ch'ella non habbia; sendo il suo Giardino di tante cose rare pieno, che toglie a suoi servitori divotissimi, qual io le sono, il modo di poterle servir in cosa alcuna.

Nè per questo mancherò di far sempre parte a V. A. Sereniss.^{ma} di tutte le cose rare che mi capitarrano alle mani, essendo desiderosissimo di mostrar di continuo qualche segno della servitù che le porto. Fra tanto pregarò l'Altissimo Iddio ad effettuarle tutti gli suoi sublimi e santi pensieri. Di Bologna alli 21 settembre 1583

Di V. A. Sereniss.^{ma}

Obligatiss.^{mo} Servitore
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana ecc.

Filza n° 764, 92.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} et Pron.^{e} Col.^{mo}

Havendomi scritto M. Gioseppe di Casabuona che desideraria haver una pianta o due di Vidalpa doppia del fior purpureo, ho aspettato tempo opportuno di mandarle. Così parendomi hora stagione atta a trapiantare, mando a V. A. Sereniss.^{ma} una pianta di questa Vidalpa doppia, che facilmente si può dividere in tre piante, in una scatola per il suo Corriero, acciò resti manco in viaggio. Se altro desiderarà, non mancherò mai di servir l'A. V. in tutto quello che potrò. Però la supplico che ella si degni commandarmi, che da questo riceverò infinita consolatione, non cercando io altro che di poter mostrare a V. A. la servitù et obligo infinito che le tengo. Et le prego da Dio N. S. lunga et felice vita.

Di Bologna alli 28 di novembre 1583

D. V. A. Ser.^{ma}

humiliss.^{mo} et obligatiss.^{mo} Serv.^{re}
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Seren.^{mo} Gran Duca di Toscana Sig.^{re} et Pron.^{e} Col.^{mo}.

Filza n° 772, 657.

Sereniss.^{mo} Sig.^{re} et Pron.^{e} mio Col.^{mo}

Essendomi a questi giorni stato mandate da Costantinopoli e da Vienna dal Clusio alcuni semi, ho voluto inviarle subito a V. A. sperando che lei con la sua solita benignità si degnerà accettarli tal qual sono. Mi rincresce bene che siano così pochi et non così rari come io desiderarei mandarli per il suo regio giardino; ma acceterà il mio buon animo, che sempre è prontissimo per servirla.

Et con questo baciando con ogni debita reverenza le mani a V. A. Sereniss.^{ma} le prego da Dio ogni felicità.

Di Bologna alli 16 d'aprile 1585

Di V. A. Sereniss.^{ma}

Umiliss.^{mo} et obligatiss.^{mo} Serv.^{re}

Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Sereniss.^{mo} Gran Duca di Toscana, Sig.^{re} et Pron.^{e} mio Col.^{mo}.

Filza n° 774, 33.

Ser.^{mo} S.^{re} mio Colend.^{mo}

Tanta e tale è la magnanimità e benignità Sua, Ser.^{mo} S.^{or} mio, che viene in me tal volta superato et vinto ogni rispetto di fastidire una tanta Altezza et disoccuparla da suoi reali et alti pensieri, sicome ora faccio con questa mia a lei humilmente inchinandomi.

La Santiss.^{a} memoria di Papa Gregorio, morto il S.^{re} Giovanni Aldrovando senatore, mio zio, levò (et forse non le fugge da la memoria) di casa nostra il Quarantado, et lo diede al Bonfiglio, suo Tesoriero, a cui prima l'havea promesso. Hora temendosi che non sia per restarsene privo, perciò il risguardo che io ho a l'honore et dignità di Casa nostra, che mi preme assai, et li suoi, già di molto rilievo, pronti et cortesi favori in tal occasione fattomi, et le proferte di nuovo, son stati duoi sproni, con che sino a lei subito ho mosso questa mia, humilmente et caldamente pregando V. A. Ser.^{ma} si degni scriverne in raccomandatione mia al Ill.^{mo} S.^{or} suo Imbasciatore con quella caldezza che ha fatto altre volte in questo negotio (di che se bene non è seguito l'effetto, tutta via come se l'havessi conseguito le ne tengo quel'istesso obligo), et in mat.^{a} che essendo privato il Bonfiglio del Quarantado, operi con Sua Beatitudine, di commission di V. A. che sia rintegrata di quello la Casa Aldrovanda, et particolarmente la persona mia. Appresso supplico V. A. Ser.^{ma} favorirmi di mandarmi la sua, diritiva a me, che io la farò poi a l'occasione presentare all'Ill.mo S.^{re} Suo Imbasciatore, per mezzo del S.^{or} Giuliano Griffone mio nepote, Camarlingo di N. S.^{re}. Il che tutto sarà riposto a perpetua memoria ne l'animo mio con gli altri oblighi che ho infiniti a V. A. Ser.^{ma}, a la quale il S.^{re} Iddio doni quei contenti che essa desidera, et io con ogni debita riverenza baciole le mani.

Di Bologna a dì 4 giugno 1585

D. V. A. Ser.^{ma}

humil.^{mo} et obligat.^{mo} Ser.^{re}

Ulisse Aldrovando.

(fuori) Al Ser.^{mo} S.^{or} mio Colen.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 774, 64.

Ser.^{mo} S.^{or} mio Col.^{mo}

Ho ricevuto le lettere di V. A. Ser.^{ma} con l'inclusa all'Ill.^{mo} S.^{or} Ambasciatore suo, e come indubitatamente aspettate, così indubitatamente et oltra modo care et dilettissime, di che non so, come vorrei, nè posso, a pieno ringratiarla. Solo con gli oblighi infiniti mi restarà, Ser.^{mo} S.^{or} mio, questo vivo desiderio, bramando che si representa occasione che si degni farmi un minimo cenno di suo commandamento, che questo reputarò somma gratia.

Di quà le dò di novo come in Bologna si trovano due Gazzelle, maschio et femina, con l'hinnulo di sei giorni, et un Porco Indiano, il quale ha sopra il dorso un forame con che urina, oltre il suo loco naturale, ma questo credo che sia mostrifico, tutti quatro vivi, in mano d'uno che dice che se ne viene a presentarli a V. A. Ser.^ma^ Io li ho fatto dipingere al mio pittore, per che mi piacevano assai, nè mai vidi simili animali. Non occorrendome altro che darle di quà di novo, a V. A. Ser.^ma^ con ogni riverenza bacio le mani, pregandole dal S.^re^ Iddio longa et vera felicità.

Di Bologna, a dì 11 giugno 1585

Di V. A. Ser.^ma^

Humiliss.^mo^ et obligatiss.^mo^ Ser.^re^

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^mo^ S.^re^ et pron. mio Col.^mo^ il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 775, 115.

Ser.^mo^ Sig.^re^ mio Colendiss.^mo^

Passaranno forsi li ordini del dovero le mie domande appresso V. Altezza Ser.^ma^, tornando così presto a molestarla; questo lo confesso Ser.^mo^ S.^ore^, ma me lo fa trapassare quella fidanza che ella tuttavia ne dà a suoi servi de la sua gentilezza et officiosa natura, che di grande meritamente rispetto a la potenza sua se le deve dar titolo, ma di grandissimo rispetto alla sua magnanimità et amorevolezza.

Questi mi han mosso a tornarla a supplicarla, che occorrendomi il ricordo immediato a la S.^tà^ di N. S. per restituire, come già le piacque intender, a la nostra Casa il Quarantado, toltosi da la bona memoria di papa Gregorio et dato al BONFIGLIO, et intendendo di quà le sue dignità esser per decadere, et i varii competitori che per diversi mezzi a questo scopo si adoprano; la torno a ripregare humilissimamente per la sicurtà che altre volte m'ha dato in simil occasione, che si degni scriver, con quella efficacia che le parerà, una sua dirrittiva a N. S. in raccommandatione de la Casa Aldrovanda et particularmente de la persona mia, in occasione de la privation del Quarantado del BONFIGLIO, che ne sia restituito; et non le spiaccia mandarla a me, che la faccia presentare a S. B.^ne^ (1) per poterla anco ringratiar et non mi mostrar in tutto ingrato a quei tanti et così grandi favori che ella si degna di fare ad un suo sì humile Servitore, il quale non cessarà mai di annunciar la sua grandeza et gentiezza, et pregar il S.^re^ Dio che le dia quei contenti che ella desidera. Et con ogni riverenza humilmente le bascio le Sereniss.^e^ mani.

Di Bologna, a dì 22 luglio 1585.

Di V. Alt.^a^ Ser.^ma^

humiliss.^o^ Ser.^re^

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.^mo^ Sig.^re^ et Pron.^e^ mio Colendiss.^mo^ il Gran Duca di Toscana, Fiorenza.

Filza n° 776, 249.

Ser.mo S.^or^ mio Col.^mo^

L'auttorità incomparabile che, conforme a la grandezza sua, tiene V. A. Ser.^ma^ et li competitori, quali col desiderio di quella dignità, che con qualche ragione hora cerco io, con diversi mezzi, et potenti, s'addoprano in simil negotio, m'havevano spronato a ripregarla di quanto ho fatto, et la speranza di eseguire da la sua gentilezza quanto io desidero n'è stata la cagione. Ma poi che conosco a pieno da la sua risposta de XXVI del passato quanto bene et caldamente

(1) S. B. = Senato bolognese.

sia stato favorito da V. A. et sia per essere a l'occasione per l'Ill.^{mo} S.^{or} suo Ambasciatore (ancorchè non ne dubitassi punto), la prego, se si alto ponno arrivare le preghiere mie, che si degni perdonare a la mia troppo baldanza, chè per me non speravo mai trovar favori se non al fonte de' favori, qual'è V. A. Ser.^{ma} Et se per sua innata magnanimità l'è piaciuto fare, oltre ogni mio merito, tanto quanto ha fatto per me, piaccia anchora a quella di perdonarmi se con troppo rischio l'ho fastidita; et se la torno a ringratiare non se ne maravigli, per che quanto più la ringratio, tanto più conosco che mi resta da ringratiarla et offerirmele prontissimo ad ogni minimo suo cenno, ancor che vaglia et possa poco, se di quà desidera per me cosa alcuna. Piaccia al S.^{re} Iddio di farla compiutamente felice, il qual ne pregarò con ogni affetto di cuore, et a V. A. baccio le Ser.^{me} mani.

Di Bologna a dì 4 agosto MDLXXXV.

Di V. A. Ser.^{ma}

Humil.° et oblig.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Sereniss.° S.^{re} et pron. mio Colend.^{mo} il Gran Duca di Toscana, Fiorenza.

Filza n° 778, 654.

Ser.^{mo} S.^{re} et pron.^{e} mio Col.^{mo}

In tal guisa si compiace V. A. Ser.^{ma} di favorire et aggradire i virtuosi et servi suoi, che mi fa hora ardito movermi a trarla da suoi generosi pensieri, et humilmente come devo, supplicarla d'una gratia, che volendo il Senato nostro augmentare hora i premii ai i Lettori del studio di Bologna per l'accrescimento a la Gabella di cinque mila scudi, io che a più segni ho conosciuto Ser.^{mo} Principe qual bona impressione habbia concetta già di me, et provato l'autorità de suoi cenni quanto importi, et isprimentato la sua incomparabile gentilezza; hora pigliando in tal occasione questa baldanza, humilmente la prego che faccia conoscere questo in favor mio, con una efficacissima et al solito suo, cortesissima lettera a l'Ill.^{mo} Legato di Bologna et a l'Ill.^{re} Senato nostro, ponendogli in consideratione le gravi fatiche, spese et studii già per 33 anni impiegati ne i corsi di tutta la filosofia d'ARISTOTELE et historie philosofice de le piante, animali et fossili, de quali, piacendo al S.^{r} Dio, darò qualche saggio presto al mondo con un opera *De Admirandis naturae et artis totius universi,* a che con grande attentione con tre scrittori et uno intagliatore vo dando compimento. Ho già fatto intagliare in legno quel passero indiano che V. A. Ser.^{ma} mi communicò et le ne mandarò il dissegno subito che sarà stampato. So che il troppo pregarla manifestaria che pensass'io l'esser difficile ottener gratie da lei, però fugendo quel che in effetto è opposito a la sua magnanimità, solo la supplicarò che operi che la persona mia, secondo i meriti sia riconosciuta; essendo questa mia lettura tanto necessaria et utile a studiosi, como il Ser.^{mo} COSMO, bona memoria, suo padre, et essa, l'hanno mostrato nel Studio di Pisa. Il tempo che insta de la speditione di questo augmento forse mi fa parere importuno, ma mi scuserà appo lei il zelo del honor mio, et la gran fidanza che m'ha fatto pigliare la gentilezza sua per l'adietro, con gran contento, da me provata; da la quale sperando quanto posso sperare da qual si voglia principe del mondo, gliene resto ancora con quei oblighi che per me maggiori si possono. Et a V. A. Ser.^{ma} con ogni debita riverenza bascio le Sereniss.° mani, pregandole dal S.^{re} Iddio quella contentezza che essa desidera.

Di Bologna dì 10 decembre 1585

Di V. A. Ser.^{ma}

Ser.^{re} obligatiss.° et humiliss.^{mo}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. mio Colendiss.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 778, 656.

Ser.mo Sig. mio Col.mo

Era bene opinione che si dovessero prolungare assai li augmenti de Lettori, ma hora, dicono alcuni, che la dilatione non sia così lunga come si pensava, et forsi risorgerà fuori a l'improviso; si che Ser.mo Sig.re quando venissero ben hora le sue da me tanto aspettate, non patiriano tepidezza alcuna, poi che le sue parole sono di tal valore che (quantunque di molti giorni scritte) sempre son fresche; havendo per sua proprietà, naturale virtù di rinfrescare le volontà altrui a sempre servirla et ubidirla. Tuttavia V. A. Ser.ma potrà commettere che siano indirizzate a me, che io le porgerò poi a l'occasione.

Il Passero Indiano fatto da me intagliare per un saggio a un Venetiano, hora habitante in Bologna, fa ritorno nelle sue virtuosissime mani; il quale essendo cosa da lei ben conosciuta et domestica, pigliarà ardire di tacitamente far fede de l'osservanza et servitù mia con V. A. Ser.ma et dei molti oblighi in che, con favorirmi, ella mi pone. Così la supplico a mantenere in lei quella bona volontà che verso di me. Et riverentemente le bascio le serenissime mani.

Di Bologna a dì 19 Xbre 1585

Humiliss.mo et oblig.mo Ser.re
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.mo Sig.re et pron. mio Colendiss.mo il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 779, 338.

Ser.mo mio S.re Colend.mo

Ho ricevuto le due lettere di V. A. Ser.ma, l'una all'Ill.mo Legato, et l'altra al Reggimento nostro, per le quale io direi d'esserle di più stretto nodo d'obligatione legato, se però gli oblighi infiniti ch'io le tengo per li benefici ricevuti per lo passato, potessero ricevere accrescimento veruno. Parimente ne renderei quelle gratie a V. A. Ser.ma che la mia mente va giudicando convenirsi, se la penna potesse arrivare a sì gran concetto. Ma poscia che nè l'uno, nè l'altro è possibile, riverirò almeno V. A. Ser.ma et osserverolla divotamente co 'l cuore sin c'havrò vita, come ho fatto anco sin hora. Appresentai la sua all'Ill.mo Legato, dal quale riportai gratiosa risposta; ma quella del Reggimento tratterrò sin che s'habbia da Roma alcuna risolutione. La cosa ancora pende, ne se ne ha certezza veruna. Tuttavia avvengane ciò che si voglia, ho conosciuto l'affettione che V. A. Ser.ma (la molta sua mercè) mi porta, et ardirò di conoscerla ancora nell'occasione. Con che le bascio humilmente le Ser.me mani.

Di Bologna a vi di gennaio MDLXXXVI
Di V. A. Ser.ma

Divotiss.o Ser.re
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.mo mio Sig.re et Pron. Colend.mo il Gran Duca di Toscana, Firenze.

Filza n° 780, 711.

Ser.mo Sig.re et pron. mio Col.mo

Essendomi stato mandato li giorni passati alcuni semi di Guanabano, ho preso animo di tentare se per mia bona sorte, non fussero ancora capitati a le mani di S. Alt.a Ser.ma, et così farliene parte come hora faccio; humilmente supplicandola accettarli con la sua solita benignità, chè se non le saranno novi, accetti almeno l'animo et desiderio mio, che ogni giorno più si van innovando in servirla et riverirla. Il Guanabano (1) è arbore grande, nel tronco è simile al Pino, ha le foglie grandi oblunghe, il suo frutto rapresenta un melone di colore dorato, ma coperto d'una verde lanugine, d'odore soave, di sapore dolce, cioè la polpa interna del frutto,

(1) V. Aldrovandi, *Dendrologia,* 582-583. Bauhin, Lib. XI, p. 439.

in mezzo al quale si trovano i suoi semi, come S. A. Ser.^{ma} vede, faseolaccei, o per dir meglio simili a grani di ceci bianchi, nasce in Aethiopia, estingue la sete et l'ardore de le febri.

Mons.^{e} Seghia, Vescovo di Piasenza, mi disse che haveva veduto appresso la Maestà del Re Fillippo un libro di varie piante, animali, et altre cose indiane nove, dipinto; cosa veramente regale; perciò se piacesse a V. A. Ser.^{ma} per il Sig.^{r} suo Ambasciadore di Spagna, trarne rittratto di qualche figura degna, penso che non le potriano fursi esser discari. Non occorrendomi altro, con ogni riverenza la supplico a farmi qualche volta degno de' suoi commandamenti, et baciandole humilmente le mane, le prego dal S.^{re} Dio vera felicità.

Di Bologna, al p.^{o} d'Aprile 1586

Di V. A. Ser.^{ma}

Humiliss.^{o} et Devotiss.^{o} Servo
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et Pron. mio Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 780, 549.

Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. Col.^{mo}

M'è stato sommamente caro d'intender per la sua delli 7 di questo che 'l seme del Guanabano, che è la Baba de l'India, mandatole, non le sia capitato indarno. La coltivatione del qual intesa dall'A. V. m'è stato di piacere. Et perchè l'altro giorno mi furono inviati da varii paesi certi altri semi, m'è parso di farliene partecipe. Li quali se prima non le saranno capitati alle mani, se ne servirà. Et questi sono *Anonymos, Leontopetalon, Seseli Peloponense, Molochia aegytiaca, seu Corchorus Plinii, Bamia aegytiaca, Melilotus verus, Abrus Persarum, Astivida Cretensium, seu Poteron. Salisia Apulorum.* So che V. A. Ser.^{ma} ha hauto per avanti il *Leontopetalon*, ma perchè di rado sogliono i semi suoi venire a perfettione, l'ho voluto hora accompagnar con gli altri. Le rendo poi infinite gratie di quanto è piaciuto a lei mandarmi, ch'invero humanità troppo grande è stata quella de l'A. V. Ser.^{ma} con me suo humiliss.^{o} et obligatiss.^{o} servitore. Il seme picciolo qual fa sì bella vista nei quadretti, come ella dice, non è altro che 'l *Sesban d'Arabia*, qual havendolo io hauto pochi giorni sono, pensai mandarne a l'A. V., ma da lei sono stato prevenuto. Il fagiuolo indiano m'è stato carissimo, per esser già molt'anni ch'io n'ero privo, che havendolo sementato d'aprile, mi fiorì di settembre, et fece i fiori et le silique, ma li semi non abbonirono; et d'una altra sorte pur n'hebbi, che faceva il fior rosso a fiocche come il bianco, che l'uno e l'altro ho dipinti nelle mie historie de le piante. Il bianco è descritto da Carlo Clusio sotto nome di *Phaseolus Bresilianus alter,* et il rosso è congenere a quello. Il ragguagliarmi poi che ella fa d'haver raccolte tante varie cose rare et peregrine, come d'animali aquatili e terrestri dell'Indie et d'altri luoghi, m'ha così acceso di desiderio di vederle per servirmene all'historie mie, che sarà forza un dì, piacendo a Dio, mi transferisca a vederle, sperando d'esser favorito dall'A. V. Ser.^{ma} non meno di quello che ha fatto per il passato. E con questo baciandole humilmente le Ser.^{me} mani, le prego dal S.^{e} Iddio ogni felicità.

Di Bologna a 14 d'aprile 1586

Di V. A. Ser.^{ma}

Servitore Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. mio Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 781, 447.

Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. Colend.^{mo}

Quanto mi siano state care le cose mandatemi da V. Alt.^{a} Sereniss.^{a} non ho parole da poterlo esprimerlo, non che forze da ricambiarla. Le ne rendo dunque con l'animo quelle gratie che per me si ponno maggiori; facendole sapere che parte delle dette cose sono state da me commesse a la terra, parte ne riserbo nel mio Museo a perpetua memoria di lei; et così fo sempre di tutte le cose da lei mandatemi, nelle quali come in uno specchio rimiro et riverisco di lontano V. Alt.ª sicome faccio hora, basciandolle humilissima~~mente~~ le serenissime mani et pregandole da Dio vera felicità.

Di Bologna a dì 5 maggio 1586

Di V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ

Servit.ʳᵉ Humilissimo

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ Sig.ʳᵉ et pron. mio sempre Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana, Firenze.

Filza nº 781, 157.

Ser.ᵐᵒ S.ʳᵉ et Pron. Col.ᵐᵒ

Mando a V. A. Ser.ᵐᵃ trenta semi, che due giorni sono ho ricceuti, parte de quali mi sono stati inviati dal Cairo da un medico di quei paesi, parte mi vengono d'Ungaria da CAROLO CLUSIO, i quali veramente è un pezzo ch'erano aspettati da me, ma per cagion de sospetti della peste, si sono trattenuti sin hora; onde non le ho potuto far parte più a tempo, com' era desiderio mio. Con tutto ciò perchè son semi di quest'anno, spero che nascerano, se V. A. Ser.ᵐᵃ li farà seminar quanto prima. I nomi di essi vengono scritti sopra le carte ove sono involti. Et oltre a ciò mandole una breve informatione di quelle del Cairo nella guisa che mi manda quel Medico. Non ho dubbio che ella altre volte li havrà hauti o tutti o qualche parte, nondimeno so che havrà riguardo al bon animo mio, il quale ad altro non è intento che a servire a V. A. Ser.ᵐᵃ a cui humiliss.ᵗᵉ m'inchino, pregandole dal sommo Dio vera felicità.

Di Bologna, a dì 18 maggio 1586

Di V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ

Servitore humilissimo

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ Sig.ʳᵉ et Pron. mio Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana.

Filza nº 781, 128.

Ser.ᵐᵒ Sig.ʳᵉ mio sempre Col.ᵐᵒ

Venendo a Fiorenza con l'Ill.ᵐᵒ Arciv.º di Leopoli, legato del Invitt.ᵐᵒ Re di Polonia a S.ª S.ª il magnifico S.ᵒʳ TOMASO NATALI LAGUSEO, filosofo et medico ecc.ᵐᵒ, Canonico di Cracovia, homo di molta dottrina et isperienza, tra tutte le sue honorate virtù scrutatore di medaglie antiche, et molto servitore di V. A. Ser.ᵐᵃ, ho dissegnato che questa mia sia, per mezzo suo, per farle riverenza et per raccomandarle la persona sua; et quantunque io sappia che di sua natura abbraccia et raccoglie i virtuosi, nondimeno venendomi fatto questo, lo riceverò nel numero di tanti altri et segnalati favori che m'ha fatto; se bene il gentil huomo molto s'affida nelle mie raccomandationi, mercè del nome ch'io ho d'esserle tanto in gratia, con tutto ciò essendo egli accompagnato di molte virtù, non accade ch'io mi spenda molto in raccomandarlo a V. A. Ser.ᵐᵃ Et con questo fine humilmente le bacio le Ser.ᵐᵉ mani con pregarle dal S.ᵒʳ Dio quei contenti che essa desidera.

Di Bologna a dì 25 maggio 1586

Di V. A. Ser.ᵐᵃ

Ser.ʳᵉ humiliss.ᵐᵒ

ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ Sig.ʳᵉ et pron. mio sempre Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 783, 300.

Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. Col.^{mo}

Havendo inteso da messer GIOSEPPE suo che nel Giardino di V. A. Ser.^{ma} sopra i volti è fiorita una bellissima pianta, adornata di molti e vaghi fiori, sotto nome di fasolini piccioli, ma che la pianta non ha forma di fasoli, perciò desideraria che V. A. Ser.^{ma} si degnasse di commettere che me ne fusse mandato un ramo fiorito, acciò che ne potessi far giudicio et memoria nelle mie Historie.

Essendosi mosso hora l'Ill.^{mo} Legato col Senato nostro a riformare il Studio di Bologna et stabilita la riforma, la quale hora è in gran fervore, si spera che si esseguiranno l'augmenti già diferiti; et perchè all'hora provai la sua Reale benignità, col scrivere in favor mio all'Ill.^{mo} SALVIATI, all'hora Legato, et a li SS^{ri} Quaranta del Reggimento, ma perchè il negotio non caminò, nè perciò occorrendo porger la sua al Senato, la serbai appresso di me. Hora che si rinova il parlamento, et trovandomi la lettera, ho pensato se non bene rimandarla, supplicandola humilmente che le piaccia rinfrescar questa et scriverne all'Ill.^{mo} Legato presente, et con quelli affetti che suole usare per li suoi aff.^{mi} Ser.^{ri}, come mi persuado d'esser' io, et quali sempre ho conosciuti in favore mio: havendo consideratione a la gran spesa che portano questi studi delle cose naturali nel investigarle, scriverle, nel farle dipingere et intagliare, oltre a le mie fatiche nel Leger publicamente per anni 34. Che questo accrescerà gli oblighi che in gran numero ho con V. Alt. Ser.^{ma}, dalla quale con gran devotione attendo che mi comandi: et con ogni riverenza humilmente le bacio le mani, pregandoli dal S.^{or} Iddio effetto a suoi alti desiderii.

Di Bologna, a dì 23 settembre 1586

Di V. Alt. Ser.^{ma}

Devotissimo et Humilissimo Servo
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. sempre Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 783, 635.

Ser.^{mo} S.^{or} et pron.^{e} mio Colend.^{mo}

Ho ricevuto le lettere di V. A. Ser.^{ma}, una delle quale ho dato all'Ill.^{mo} Legato nostro, dal quale ne ho riportato bonissima intentione, l'altra al Senato nostro me riserbo a presentarla a suo tempo; et del una et l'altra la ringratio quanto devo, essendo l'obligo mio verso di lei infinito.

Ho visto poi il fiore del fasiolino del Isola di Pauggio che a parer mio è congenere a l'Orabo, comunemente detto, per esser simile di foglie, fiori et silique. M'è stato carissimo il vederlo del che ne batio humilmente a V. A. Ser.^{ma} le mane, et li prego da Dio ogni suo maggior contento.

Di Bologna, il dì VI Ottobre 86

D. V. A. Ser.^{ma}

Devotissimo et Humilissimo S.^{or}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{or} et p.ne mio Colend.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 786, 342.

Ser.^{mo} S.^{r} mio sempre Col.^{mo}

Messer GIULIANO GRIFFONI, mio nepote, con questo suo passaggio a Firenze per andare a Roma, mi porge occasione di dover per suo mezzo far riverenza a l'Alt. V. Ser.^{ma} si come io fo, con ogni devoto affetto, con questa mia. E mi è parso ancor bene accompagnarlo con alcuni semi havuti di Fiandra e d'altri luoghi, quali ho giudicato più rari fra quello che ponno le mie debole forze, et che la fortuna di questi passati tempi ha tolerato. Hovvi ancor posto alcuni semi di Guanabano, se per sorte si fosse perso il suo; la qual pianta crebbe in Bologna a un gentilhuomo a l'altezza di dui cubiti; e mi doglio certo che n'habbi hauto tanti pochi di questi semi, che non n'habbi potuto far, pari al desiderio, coppia maggior a quella. Degnisi dunque V. A. Ser.^{ma} accettarli con la sua solita hilarità, riguardando al bon animo et devotione mia verso di lei; e la voglio supplicare a farmi degno de' suoi commandamenti alcuna volta, che lo ripputarò per il maggior acquisto che possa fare al mondo.

Et con ogni debita humiltà di nuovo le bacio le mani a V. Alt.^{a} Ser.^{ma} pregandole da Dio N. S. lunga e vera felicità.

Di Bologna a dì 3 aprile MDLXXXVII

Di V. Alt.^{a} Ser.^{ma}

Humiliss. et Devotissimo Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et pr.one mio sempre Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 788, 273.

Ser.^{mo} S.^{re} mio Col.^{mo}

Quel precioso tesoro de la gratia di V. Alt.^{a} Ser.^{ma} il qual conservo nella mente et memoria mia, tanto mi par grande rispetto al basso et humile soggetto che la gode, che vorria sempre esser con qualche mezzo di inclinatione avanti a V. Alt.^{a} Ser.^{ma} per meritarne almeno qualche particella; ma dubitarei non ritrovarsi in me cosa che fosse sufficiente a la sua grandezza, se lei con le sue dolci maniere di magnanimità non l'ampliasse et facesse degna. Confidatomi dunque in questo, vengho hora con l'occasione del presente latore maestro LORENZO BONINI suo suddito, pittore et dessegnatore, che fece venir costì per designarmi da 500 uccelli, che io in molti anni haveva raccolti in pittura, vengho hora dico con questa mia humilmente a baciarle le mani a V. Alt.^{a} Ser.^{ma} et insieme farle vedere un saggio di tre ucelli in carta e raso, intagliati in pero dal mio intagliatore, come V. Alt.^{a} Ser.^{ma} potrà vedere, l'uno de' quali sarà la Gallina Indiana, ucello notissimo, il 2° dal rostro lungo è il Scheniolo d'ARISTOTELE che traduce il GAZA Junco da alcuni chiamato passer di canna; si diletta ire a le acque nutrendosi d'alcuni vermetti, che pronti nascono lungo le ripe de fiumi. È minor del tordo, move di continuo la coda, si gode possar sopra le canne et giunchi, et perchè ancor piglia nutrimento da alcune herbe acquatili, li ho posto il pepe acquatico. L'altro è molto simile a questo nel colore, si chiama Cavazua; ho pensato piu volte che questo sia specie di Pico martio minore verde, non descritto da gli antichi, per havere i piedi con due dita dinanzi et due dietro, e 'l becco è assai acuto per poter più facilmente trivellare gli arbori, ancor che 'l rostro sia breve. *Dryocolaptes i. percussor quercuum* è chiamato da ARISTOTELE. Ho veduto una cosa mirabile nella specie de Pici, si come ancora nel Torcicollo e nella Cersia che hanno una lingua lunga come un nervetto, la qual tirando fuori si vien stendendo più di quatro dita, e poi la tira a se, che cibandosi questi uccelli di formiche et altri animaletti, nascosti et generati fra le corteccie de gli arbori, cavano fuori detta lingua, et subito riempiendosi d'essi, la ritira in bocca et se ne ciba, ma mi è parso una cosa notabile che havendo fatto anatomia del capo de l'uno e de l'altro l'ho ritrovato dui nervetti dentro il collo, et hanno ligamento con la lingua. Di più si vede nella sommità della lingua un aculeo assai lungo e sotile che se ne serve per uccidere gli animaletti che piglia; et questo ho fatto dipingere nella anatomia degli uccelli come si vedrà nell'opera mia, che per il desiderio di farla compita et ornata vengho a supplicar humilmente V. Alt.^{a} Ser.^{ma} che quando capitasse qualche cosa in materia d'uccelli o di qualche altro animale, perchè intendo che le sono capitati tre Alci, si voglia degnare in qualunque maniera le piaccia farne degna questa historia nostra; tanto più mi movo quanto so che come fra le sue reggie e magnanime doti regna ancora un desiderio di dare tuttavia utile al mondo per mezzo della cognitione delle cose naturali, si come io ne faccio fede in questo et in molti luoghi.

Piaccia dunque a V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ far grata accoglienza non a la cosa, ma a l'animo tutto rivolto a ubidirla, et riverirla, et servirla del suo devotissimo Aldrovandi. Pregando continuamente il S.ᵒʳ Dio che prosperi la vita sua, et dia tutti quei contenti che essa desidera.

Di Bologna a dì 26 luglio 1587

Di V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ

Humilissimo et devotissimo S.ʳᵉ

Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ S.ᵉ et p.ron mio sempre Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana.

Lettere di Ulisse Aldrovandi a Ferdinando I dei Medici (1) Granduca di Toscana (2).
(1587 - Giugno 1604)

Filza nº 792, 276.

Molto Ill.ᵐᵒ mio S.ʳᵉ Oss.ᵐᵒ,

La infinita benignità del Ser.ᵐᵒ Sig.ʳ Gran Duca presente, che ha mostrato verso di me hora, in effettuare il desiderio del Gran Duca suo fratello di glorioso et eterno riccordo, et l'amorevolezza con che V. S. me l'ha inviato hora a suo nome, m'ingombrano così l'animo di letitia, di speranza et d'obligo, che non son pur sufficiente a ridirlo. Ma lasciando andare l'innata cortesia et valore di V. S., molt'altre volte da me connosciuta et sempremai stimata, mi lascio dire che ho preso tanta speranza in questo Gran Principe, che la mia servitù non le sia men cara quanta era nel Ser.ᵐᵒ fratello, tanto maggiormente che intendo lui doversi dilettare di cose naturali, come è veramente cognitione degna di Principe. Però le rispondo con una mia con ringratiar S. Alt. del dono et della gratia sua che mi concede; havendole già sono da otto giorni mostrato l'allegrezza con un altra mia, che già havrà hauta. Et voglio anco pregare V. S. Ill.ʳᵉ che a l'occasione si degni pormeli in gratia, che io so bene che non meno d'autorità dovrà esser con l'Alt.ª d'ora che della passata, e me ne da segno i meriti et l'infinita cortesia e 'l valor suo, molto stimato et amato da ogni persona. L'obligo poi ch'io l'ho, pensa lei quale le debba havere; si degna però lei porre in essecutione questa mia voluntà che ho di servirla, che gratissima ventura mi sarà. Et con ogni affetto di cuore me le offero et raccomando.

Di Bologna a dì 10 novembre 1587,

Di V. S. Molto Ill.ʳᵉ

Servitore aff.ᵐᵒ

Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Molto Ill.ᵉ S.ʳᵒ et pron. mio sempre osservandissimo il S.ʳ Cavaglier Vinta; Fiorenza.

Filza nº 814, 270.

Molto Ill.ʳᵉ mio S.ʳᵉ Oss.ᵐᵒ,

Anchora che il dolore ch'io ricevei per la morte del Ser.ᵐᵒ Gran Duca Francesco, che sia in cielo, fosse grandissimo, come può imaginarsi V. S. che sa la devotissima servitù ch'io tenevo seco; nondimeno la felice successione del Ser.ᵐᵒ fratello lo temperò in modo che punto non restò impedito l'animo mio, che non sentisse di essa quell'allegrezza et consolatione che può

---

(1) Ferdinando I (IIIº Granduca di Toscana) n. 10 Luglio 1549, m. 3 Febbraio 1609.

(2) Alcune di esse sono dirette al Segretario cav. Belisario Vinta da Volterra.

haverne sentita ogni suo minimo servitore, perchè oltre che io già portavo un affetto di devotione infinita a S. Alt.ª per la benignità grande che mi mostrò quando in Roma le feci riverenza, subito giudicai che questo Principe dovesse esser amatore della sua gloria, et d'animo non inferiore a le forze che Dio le ha dato. Però augumentandosi in me quella speranza che havevo che il Gran Duca Francesco m'aiutasse un giorno a dar principio di metter in luce le mie opere, crederei di far troppo gran mancamento se, fin ch'io ho tempo, non procurassi di non lasciar perdere tante mie fatiche; et non potendo io da me farlo, non chiedessi l'aiuto da chi meglio d'ogni altro Principe di Cristianità può darmelo. Tuttavia ho risoluto di pregar prima V. S. confidentemente che voglia scrivermene il parer suo, essend'io certo che in questo nissun altro potria darmelo più prudente o più amorevole, et promettendomi ancora che ella, come virtuosa et cortese che è, si compiacerà di favorir l'honesto desiderio mio quanto le sarà possibile. L'opere, come V. S. vedrà per l'inclusa nota che le ne mando, son molte et tutte (il che sia detto senza iattanza) ripiene di singolare eruditione, utili e curiose, et vaghe, et non indegne che 'l Gran Duca Ferdinando de' Medici, a imitatione de progenitori suoi, porga loro la potente mano acciò non perano. Io intanto aspettarò d'intendere intorno a questo particolare quanto mi sarà consigliato da V. S. molto Ill.re, alla quale per fine bacio con ogni affetto le mani, et prego dal S.r Iddio ogni felicità.

Di Bologna a dì . . . aprile 1588,

Di V. S. M.° Ill.e

Servitore aff.mo

Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al molto Ill.re S.re et pron. mio sempre oss.mo il S.r Cavagliere Belisario Vinta.

Filza 814. Ivi da c. 272 a 276.

Breve Nota delle opere fatte dà Ulisse Aldrovandi.

De animalibus omnium generum.

Prima representarò a V. S. un opera fatta con studio et fatica di quarant'anni, dico degli animali d'aria, d'acqua, di terra et di sotto terra. Et (per lasciar di quei d'aria a dirne particolarmente altrove) in questi servo un ordine che è questo. Trattando degli acquatici dal più perfetto genere comincio, cioè de Ceti che respirano come balene, et cetacei come cani marini, et poi de pesci come storione e sgombro, et de molti cusì chiamati, come loligini et sepie, et de crustacei come gammari, et de testacei come tante sorti di conchigli; et tutti questi generi riceveranno divisioni sino alle più speciali differenze. In simil maniera a quei di terra, et prima da quadrupedi, come elefante e Rhinoceronte, bipedi come huomo et ucelo. Ma l'huomo, come signore di tutti gli animali, a tutti si preporrà; e l'ucello fra li animali d'aria particolarmente si trattarà. Vengo poi a' serpenti come vipere e ceraste; et insetti come eruche et scarabei et infiniti altri che ha creato il grand'Iddio sopra la terra. Et questi principali generi si divideranno in sanguini et essangui, et gli sanguigni, o in solipedi, come il cavallo e l'asino, o bisulchi, come l'alce e 'l bue (intendo bisulco che ha l'ugna del piede bipartita), o digitati come leone e pardo. Li serpenti parimente o in sanguigni o essangui, o acquatili o terrestri, o venefici o benigni; et finalmente gl'insetti o vermi, o alati o pedati, i quali ancora soggiacciono a divisioni più proprie et interne. E tutte queste cose saranno divise et ordinate metodicamente et ampliate di molti animali peregrini et ornati colle sue figure al vivo, che mi trovo havere in sedeci volumi in n° di 3 mila, senza le piante, che sono al n° di 7 mila essicate al vivo in quindeci altri volumi, et quatromila dipinte al naturale. Parimente ho scritto *De Fossilibus*, come pietre, marmori, gemme, sassi, metalli, mezzi-minerali et succi concreti, come eletro, zolfo, bitume, camphora et altri, con l'istessa maniera dettale di sopra, che ascendono al n° di 4 mila cose di cui l'essempio loro s'è dato per manco tediarla.

De Admirandis Naturae et artis rebus.

È ridotta quest'opera in cinque volumi delle cose ammirande del mondo, dove cominciando da Dio autore della Natura, con conforme ordinanza descendo a i cieli, a gli elementi a parlarne, dove hanno dell'ammirando; et poi mi espongo intorno a misti imperfetti come stelle cadenti, fulgori, tuoni, pioggie che sono state prodigiose, venti impetuosi et apparitioni portentose, et simili, seguendo agli perfetti, cioè pietre, come la varia et stupenda virtù della calamita; succi concreti come del sucino, terre come della sarcofaga che rode la carne, marmi, gemme et altri che saria lungo.

Trapasso poi a misti perfetti animati, cioè piante e animali, come del tripolio pianta, che muta i fiori tre volte il giorno, del frasino, tanto odioso a serpi, della pianta Baaras di Soria et d'altri, et di quelle che si volgono al Sole, di quelle che lo fuggano, di quelle che si petrificano. Mi riduco poi a gli animali di tutti i luoghi et con l'usata ordinanza parlo del pesce echineide, che arresta le navi, et della torpedine che abbaglia i pescatori, del diavolo marino che inganna i pesci, con altri infiniti. Circa gli ucelli poi, come della natura del porfirione, dell'ardea ch'una muoia per dolore del adulterio compresso, l'altra per il coito; della loro amicitia, inimicitia, varia generatione, operationi et simili, dove porga meraviglia. A quadrupedi poi venendo, come del Crocodillo, del . . . . . (1), del Alce et altri che veramente stupirà la natura humana della grandezza di Dio, et maggiormente parlando poi anco degli insetti, come lucane, formiche et locuste.

Et venendo all'huomo, m'estendo sopra la sua mirabile natura et operationi, che sono inventioni di scienze et altre cose artificiali de' quali n'è gran campo, ponendo fra l'huomo e gli animali brutti il trattato de' mostri che sono a mia notitia pervenuti.

Pandechion Epistemonicon.

Questa è una somma di sessantaquatro volumi, così chiamata da me, cioè selva universale delle scienze, per mezzo di questa volendo sapere o comporre sopra qual si voglia cosa naturale o artificiale ivi trovarà a quel proposito quel che n'hanno scritto i poeti, i teologi, i legisti, i filosofi, gli istorici, come per esempio *maris salsedo, thermae ebur.* et altri ritrovaranno quello che n'hanno detto i scrittori che sono venuti a mia notitia, con molti documenti, varietà di luoghi et copia d'autorità di scrittori.

Thesaurus Bibliothecarum penes titulos.

Questa è una fatica ancora con gran lunghezza di tempo fatta da me e posta in ordine in dodeci volumi. L'utile che dà è che volendo uno scrivere, verbigratia: in *Cantica Canticorum*, in *Evangelia*, in *Exodum, Leviticum*, etc. In *Decretalibus* in *Pandectis*, così *de gestis Alexandri, Alfonsi Regis Aragoniae*, et per dirla di tutte le trattationi ch'hanno scritto huomini, vi si trovano li autori antichi et moderni che n'hanno fatto mentione, la qual fatica, utilità e commodo grandissimo darà a chi vuole scrivere.

Ve n'è un altra chiamata da me *Bibliotheca penes tabulas*, che chiama i luoghi nelli proprii fonti et indici delli autori che n'hanno parlato, che verrà ancora maggiore della superiore, quanto è maggior l'indice del titolo.

Bibliologia seu de Papyro historia.

Saranno questi dui volumi. La tessitura conterrà il modo del scrivere degli antichi, la varietà loro tanto nel esprimere i concetti, quanto nelle materie in che scrivevano, dove assai discorro sopra il papyro degli antichi, delle corteccie, degli alberi, delle carte delli moderni, della diversità de dialetti, della invention della stampa se è arte antica o nova.

(1) Parola incomprensibile.

Coronarum historia.

Vedrassi per questa un historia lunga, copiosa, et utile a litterati, chiamata da me *Stephanologia* delle antiche e moderne corone, del modo di coronare, dove verranno chiariti molti luoghi di scrittori oscuri, et aperti molti passi de poeti, trattandosi di tutte le sorti di corone et varietà che sono state usate da gli antichi.

De ritu sepeliendi apud diversas Nationes.

Il somigliante ho fatto in una laboriosa historia, in tre volumi ridotta, del modo di sepelire appresso ogni gente, se la sepoltura è antica, chi la trovo prima, del modo diverso del sepelire, de funerali, et pianti funebri, del condire et imbalsamare i cadaveri, delli epitaffi, delle pyramidi, obelischi, mausolei, che sarà s' io non m'inganno, molto copiosa, vaga et piena di varia eruditione.

Dracologia et Serpentum historia.

Questo è un libro ch'io feci *De Draconibus et Serpentibus* con l'occasione del Serpente che apparve sul territorio di Bologna, quando fu creato Papa Gregorio XIII di Santa Memoria. Ma discorro assai lungamente sopra la natura de' serpenti et draconi, se è finta o vera la lor nascita del uovo del gallo, et molte altre cose.

Historia de noctu lucentibus.

Parimente sopra tal soggetto feci un libro, dove parlo di piante et parti loro, et animali et parte loro, pesci, quadrupedi, et anchora delli inanimati, come gemme et altre che lucono la notte; et sempre si interpone varietà di sentenze et luoghi notabili di scrittori.

Commentaria in libros quinque Dioscoridis de Materia Medica.

Questi saranno cinque volumi intorno a' cinque libri di Dioscoride, ne quali non solamente ciascun capitolo, ma ciascuna parola et sentenza viene dilucidata; dove anco per le lunge osservationi nei semplici, fatte da me in trenta quattro anni, è adornata tutta questa historia di sette mila piante, poste sotto le sue specie, et considerate particolarmente con li avvertimenti di conoscere per le parole d'esso autore, in qual grado di qualità sia ciascuna pianta; cosa che è stato oscura, anzi negata da molti scrittori. Et perchè dovend' io leggere publicamente a scolari questa proffessione, doppo i publici corsi, straordinarii et ordinarii, della Filosofia Naturale fatti da me, condotto dal Senato a petition del Studio, a questa lettura ordinaria; per potermi più agiatamente valere delle mie fatiche, feci sopra l'istesso Dioscoride cinque volumi in compendio, di quello che nell'istessa materia ho trattato. Ma nella prima più esattamente tratto intorno le nomenclature greche, latine, hebraico et esterne, con l'introdutione de le opinioni aliene et rifutationi loro, ponendo con prove la vera, et insegno a chi essercita li medicamenti, qual sia quella pianta che veramente si debba pigliare in uso medicinali, et anco qual parte per eccellenza si deva intendere, nominando una pianta simplicemente. Oltre di ciò faccio *de venenis et bestys venenum eiaculantibus*, lunga consideratione.

De Philosophia Sacra seu Commentaria in Sacram Bibliam.

Questo è un elucidario sopra la Sacra Biblia di tutte le cose naturali che si trovano in quella, poste però saranno le cose in metodo divisivo, secondo le differenze loro, cioè le pietre con le pietre, i fiumi con i fiumi, gli arbori con gli arbori, gli animali colli animali, ma ciascuna cosa citata al suo luogo per poterla trovare in fonte; alla qual fatica esorta Santo Agostino in libro De dottrina Chistiana, come necessaria all' intelligenza de Santi e divini concetti, cercando io d'accompagnare con la verità della Sacra Scrittura la verità della natura loro.

Commentaria in HIPPOCRATEM.

Questa sarà una fatica importante a Medici per la prattica. Da questo monarcha della Medicina ho pigliato tutti i medicamenti simplici, et questi, secondo un mio particolare ordine, raccolti insieme, et posti prima in capitoli, et questi capitoli in ordine alfabetico. Et in quest'ordine ho servato metodi, e nelli metodi aggiunti i scholii loro, dove potrà il medico sappere non pure se HIPPOCRATE habbi fatto mentione per essempio del lauro, dell'hedera e della mirrha et altre cose naturali animate e inanimate, ma potrà sappere in quanti luoghi ne faccia mentione, a quanti mali esso l'adoprasse, et quali si debbono per noi intendere et usare; cosa non mai fatta da alcuno; da che si verrà a vedere li autori rari della Medicina, come AETIO, PAULO, CELSO, et si vedranno i furti loro cavati da HIPPOCRATE. È in tre volumi.

Animadversiones in PLINIUM *et* THEOPHRASTUM.

Sopra questi celebri scrittori, da me sempre sotto gli occhi tenuti, ho fatto Scholii et correttioni di luoghi che erano oscuri e mal'intesi.

Plantarum, animalium ac fossilium sinonymia.

In questo verranno registrate tutte le varietà di nomi usati a darsi variamente alle cose naturali; e ne formarò tre volumi, secondo la mia solita ordinanza.

Sintaxis rerum naturalium.

Tutte le cose da me connosciute ho posto ne suoi metodi divisivi, et distinte con l'ordine di natura compositivo, et ve n'è un altro della Pharmaceutica.

Observationes rerum naturalium quae in diversis totius orbis partibus nascuntur.

Dalla vigilanza che ho sempre usato in indagare et osservare le cose di natura, ho compilato una fatica, dove do notitia delle cose che nascono sin a i proprii et particulari luoghi di tutte le provincie del mondo, che sono venute a mia notitia, et intendo partirla in quatro volumi, uno delle cose d'Asia, nel 2° del Africa, nel 3° de Europa, nel 4° del Mondo nuovo; opera che potrà servire a chi vole far studii ed acquisti di cose naturali. Il simigliante de li giardini, per poter sappere ciò che nasca in ciascuna parte del mondo, come ne diedi un poco di saggio al Ser.mo Gran Duca Francesco di felice memoria delle cose che nascono nei paesi settentrionali.

Dittionarium Sacrum.

Questo sarà un Dittionario latino, hebreo, syro e chaldeo da servirsi nei libri della Sacra Scrittura, secondo la tradutione di S. GIROLAMO, et ridotto in tre volumi per ordine alfabetico, sopra le dittioni latine.

Isagoge universalis animalium.

In questo saranno generali considerationi sopra l'animali, cioè della loro origine, nobiltà, distintione, inclinatione, et altre operationi da doversi preporre all'historia dell'ucelli che son per cominciare, acciochè ordinatamente escano le cose mie.

De Avibus.

Hora a tante mie fatiche bramando dare il dessignato fine, ho molto pensato quale fra le altre debba esser la prima a porsi in luce, che più a gli animi dell'universale possa gradire, et mi son eletto questa *De avium natura*, prima perchè niuno fu mai in Italia che ne scrivesse, dipoi perchè l'historia sarà tanto universale, che non si troverà sorte di persona che non ne possa cavar frutto e diletto. Il soggetto sarà utile a filosofi, medici, e theologi per i luoghi che s'appriranno importanti et profittevoli. Et di più vi saranno da seicento settanta figure d'ucelli, intagliati politamente in legno, et da un dissegno reale e vago, accompagnato con qualche pianta, o parte d'animale, di che si compiace più la natura di ciascun ucello. L'ordine osservato, cominciando dal genere più perfetto, come de rapaci, perciò prima dell'Aquila e Falconi fra diurni, et fra rapaci notturni delle Nottole et Ulule. Seguiranno i planipedi che stanno nell'acque, come Anitre e Porfirioni; quelli che pascono semi e grani, come Perdice e Colombi; quelli che percottendo li alberi, vivono degli animaletti delle corteccie loro, come Pichi, Martii e Cnipologi, e dipoi degli uccelli peregrini, et finalmente de mostrifici; ne quali trattati, fra le differenze et le nature loro si farà luogo alle allegorie, alli augurii degli antichi, a gli emblemmi et a le imprese che cavar si ponno da essi, con sentenze di filosofi et autorità di poeti.

Lasciarò andare per hora dell' opere mie, scritte con occasione di legger publicamente, come i *Commentari sopra i Predicabili* di Porfirio, i *Predicamenti et Posteriori* d'Aristotile nella *Logica*. Nella *Filosofia Naturale De Physico auditu, De Celo, De Meteorologicis, De Sensu et Sensibile*. Nella *Filosofia Morale, Commentari sopra l'Etica* e la *Politica* d'Aristotele; inoltre sopra Vettruvio *dell'Architettura*, che intorno a queste ho speso molti e molti anni.

Mi è venuto anco per molte occasione di problemmi riportati, a me, fatto un florilegio di discorsi, latini e volgari, intorno a cose naturali e miste, come *de colori di pittura, Architettura*, di *feste naturali* et *spirituali* et altre opere, sino al numero di Cento, con quella industria et fatica a che ho sempre vegliato, non perdonando nè a spesa nè a fatica, nè a tempo, acciò le mie cose habbino da se perfettion nell'essere.

Filza n° 800, 422.

Sereniss.^{mo} Signore,

Non sarei mai stato tanto a far riverenza di nuovo a V. Alt.^{a} con lettere mie (perchè questo nè alla benignità sua verso di me si doveva, nè alla devotissima servitù mia con lei si conveniva) se mi fosse parso d'haverne buona occasione. Hora che è nata questa del passaggio che farà l'Ill.^{mo} S.^{or} Cardinale Paleotti, mio singolarissimo padrone, per Fiorenza, me le son fatto incontro et ho supplicata S. S.^{ria} Ill.^{ma} a non sdegnarsi di far parte a V. Alt. delle speranze et de pensieri ch'io tengo circa le fatiche et opere mie. Intorno a che non restando a me che dire altro, faccio qui fine, baciando con ogni humiltà le mani di V. Alt. et pregandole dal S.^{r} Dio felicissimo Stato.

Di Bologna a dì 17 ottobre 1588,

Di V. Alt.^{a} Ser.^{ma}

Humiliss.^{mo} Servo
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. mio sempre Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

[*Mediceo*].
Filza n° 814, *799*.

Ser.^{mo} Sig.^{re},

Se bene nell'universal contento che s'è sentito da tutte le bande per il felice nascimento del Ser.^{mo} Principe, primogenito di V. Alt.^{a}, ogni Signore n'havrà con lei fatto segno d'allegrezza, io humile et debolissimo soggetto non ho voluto o potuto contenermi che non ne facci dell'allegrezza mia anch'io — segno manifesto, per prova della devotissima affetione ch'io porto all'Alt.^{a} Sua. Son stato delli ultimi in vero, perchè io non ardiva fra tanti nobilissimi et compitissimi incontri di congratulationi di Signori, spargere la mia humile et bassa troppo all'Altezza Sua.

Supplico adunque quella che degni aggradir questo mio gaudio et tenermi nel numero de' suoi minimi servi, che a me restarà di pregar il S.^{r} Dio che poi che gli è piaciuto per consolatione

Sua et del Stato di Toscana darlielo, le lo conservi; et a esso il Padre con longezza d'anni, prosperità di vita e pienezza di contenti. Et per fine humilmente a V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ bacio le mani, et al Ser.ᵐᵒ Principe fo riverenza.

Di Bologna a dì 28 maggio 1590,

Di V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ

Devot.ᵐᵒ Servo
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ S.ʳᵉ et pron. mio sempre Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 817, 149.

Molto Ill.ʳᵉ mio Sig.ʳᵉ honorat.ᵐᵒ,

Resto molto obbligato a V. S. molto Ill.ʳᵉ dei favori che m'ha fatto in effettuare il desiderio mio et commune del Ser.ᵐᵒ suo et mio S.ʳᵉ col ricevere i ritratti de gli animali a me tanto cari, quanto veramente sono rari, et quanti devono venendo dalle mani di tal soggetto al qual serbo la risposta. Piacerà a V. S.ʳⁱᵃ fra tanto compire ancora con la stessa gentilezza sua al resto del desiderio mio, che è far fede a S. Alt.ª Ser.ᵐᵃ come io sia pieno di contento, essendo così humanamente apprezzato et con segni di immensa benignità di gratie sue ornato, et che non mancherò mai di adopprare tutte le forze mie in testimonio della devotiss.ª affetione che io le porto. Ma a V. S. poi voglio rendermi per affettionato servo, pregandola valersi di me, quando per commodo suo conoscesse che io potessi servirla. Et le bacio le mani di cuore.

Di Bologna a dì 3 luglio 1590,

Di V. S. molto Ill.ʳᵉ

Serv.ʳᵉ aff.ᵐᵒ
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al molto Ill.ʳᵉ S.ᵒʳ mio sempre osservand.ᵐᵒ. Il Sig.ʳᵉ Cavag.ʳᵉ Belisario Vinta, Fiorenza.

Filza n° 813, 82.

Ser.ᵐᵒ Sig.ʳᵉ et pron. mio sempre Col.ᵐᵒ

Havendo io hormai dato compimento all'historia dell'Aquili generale et particolare, ma ricercando per bellezza et perfettion sua maggiore, uno apparato delle parti anatomiche, per intagliarle et disporle et precisamente descriverle con l'historia sua nel mio libro, vengho hora con ogni riverenza a pregare V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ, et con ogni humiltà supplicarla che si degni far commettere che me ne sia mandata una o viva o morta; non potendo nè sappendo per ciò io rivolgermi ad altro Principe meglio che a lei, che è benignissimo et potentissimo. Ricceverà da questa frutto non poco ogni studioso, come spero; l'opera mia ornamento, e l'autore gratia singolare, accompagnandola con molte altre ricevute dalla benignità de Ser.ᵐⁱ Sig.ʳⁱ padre e fratello et di lei. Di ciò ne darò testimonio al mondo chiaro et celebre tanto quanto potrà la penna mia; pendendo però l'autorità di quella dal splendore del Ser.ᵐᵒ nome suo, più tosto che da ogni sapper mio. Subito che havrò l'ucello, il che bramo sommamente, et in lei sola confido, darò l'historia alla stampa, seguitando con gli altri rapaci; poi che altro non mi resta nè altro mi tratiene. Et per fine humilmente baciando le serenissime mani a V. Alt.ª le prego dal Sig.ʳᵉ Dio somma et perpetua felicità.

Di Bologna, a dì 9 genaro 1591

Di V. Alt.ª Ser.ᵐᵃ

Humiliss.ᵒ et obig.ᵐᵒ Ser.ʳᵉ
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.ᵐᵒ S.ʳᵉ et pron. mio sempre Col.ᵐᵒ il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 825, 380.

Ser.^{mo} Sig.^{re}

Hoggi ho ricevuto l'aquila dal Corriero, viva, ardita e ben conditionata, mandatami dalla dolce humanità di V.^{a} Alt. Ser.^{ma} mentre qual coccia con le valve del pensiero largamente aperte aspettavo la dolce et alma ruggiada di sua risposta e del nobilissimo ucello. Horsù l'uno e l'altro ho conseguito, e vuò pensando se maggiore è stata la benignità sua in mandarmela, o l'ardir mio in domandarnela: ma se nell'imperfettioni io sia tant'oltre, ch'io mi possi aguagliar alle sublimi doti di V.^{a} Alt.^{a} attenderò tacendo et corrigendo le diffettuose parte mie, ad ammirare et predicare le divine sue. Et fra tanto, non potendo io essere assai nelli oblighi, pregarò chi sentirà utile o diletto dalle fatiche mie, senta ancor gratia ed obligo del tutto a V.^{a} Alt.^{a} Ser.^{ma} per suggerir quello che le mie forze non ponno; et acciò, se la memoria mia restarà nei scritti eterna, resti ancor l'obligo eterno.

Così per fine hora humilmente a V.^{a} Alt.^{a} bacio le serenissime mani, et le prego da Dio N. S.^{re} vera et perpetua felicità. Di Bologna a dì 13 febraro 1591.

Di V. Alt.^{a} Ser.^{ma}

Humiliss.^{mo} et devot.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{r} mio et pron. sempre Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana, Pisa.

Filza n° 827, 441.

Ser.^{mo} Sig.^{re} et pron. mio Col.^{mo}

Risveglia hora la negligenza mia il Signore MERCURIALE, et mi da occasione di far riverenza a l'Alt. V.^{ra} Ser.^{mo} Signore, per mezzo suo, come di qua faccio col cuore et con humilissimo affetto, così non fossi indisposto delle forze del corpo, come con la presenza mi disponevo farle.

Vivo anco Ser.^{mo} S.^{re} nelle fatiche mie, se bene in questa staggione et in questa mia età dovrei temperarmi; et ogni giorno ch'io scrivo del mio Museo, che son per dare in luce, me riccordo de' tesori degli animali che essa così rari conserva in pittura; et hora sono entrato in speranza che sicome il S.^{re} MERCURIALE fu caggione ch'io seppi di questi belli e peregrini animali, debba anco esser caggione ch'io ne riceveva copia di qualcheduno, per la benignità infinita di V. Alt.^{a} et per il valore del mediatore. Et voglio che sia sicura che tanta benignità et magnanimità, mai sarà da me abusata; esempio presto ne darò nell'Aquila, se ben humile e basso, non però senza profonda affettione; con la quale hora humilmente me l'inchino. Et baciando le Ser.^{me} mani a V. Alt.^{a} prego il Signor Dio che consoli i desideri suoi.

Di Bologna, a dì 19 giugno 1591

Di V. Alt.^{a} Ser.^{ma}

Servitore aff.^{mo} et humilissimo
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} S.^{re} et pron. mio sempre Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 830, 293.

Serenissimo Signore,

Quanta consolatione et contento m'habbia recato le sette piante peregrine mandatemi da V. A. Ser.^{ma} per mezzo dell'Ecc.^{te} S.^{or} MERCURIALE, difficilmente colla penna potria esprimere, sì per essere rarissime, sì anco per essere venute dall'infinita cortesia di V. A. S. verso di me, servo minimo, mostrata; fra le quali ho conosciuto, per quanto posso fare giuditio (perchè erano senza nome) il Paliuro de TEOFRASTO, Ananas, Acaious, Guanabano, una sorte di Colocassia et altre, in summa tutte depinte al vivo et ben conditionate. L'onde conoscendo tanti beneficii di

V. A. Ser.ma verso di me usati, mi duole fuori di modo di non potere corrispondere con gl'effetti a tant'obligo, ch'io li tengo; rest'adonche a me di ringratiarla con tutt'il cuore de grandissimi favori fattimi, non già come debbo, ma come posso.

Hora invitato et eccitato dalla molta benignità sua, piglio ardire di nuovo pregarla et supplicarla con ogni humiltà, che si degna di comettere a Messer Giuseppe Casabona, suo semplicista tornato di Candia (il quale per essere stato in quella isola fertilissima di semplici un anno entiero, tengo per certo ch'averà portato molte belle cose) che mi mandasse le mostre delle piante nuove, le quali parerà a V. A. Ser.ma, o vero le figure, delle quali, quando haverò pigliato il trassomto, io le rimanderò subito in drieto fidelmente. Mando a V. A. Ser.ma la figura dell'aquila, mandatami da lei, col piede secondo la sua propria grandezza, la quale sarà collocata nel principio del primo libro dell'uccelli rapaci, ch'è *De Aquilis*, che sono sin a vinti sorte, insieme col sceleto (*sic*) della medema vera aquila et regale. Et per potere dare compimento a queste mie historie d'uccelli rapaci diurni, desideraria il avoltoio, il quale fra più di settecento uccelli e'ho tutt'intagliati in pèro, siccome l'aquila, mai m'è capitato alle mani. Et hora mi sarebbe molto necessario d'haver il vero animale vivo o morto, per cavarne la verità dalle tenebre et uscire dalle favole descritte d'esso dagl'antichi. Io ricorro a S. A. Ser.ma siccome fece Aristotele ad Alessandro Magno, quando compose l'historia d'animali, perchè queste piante et animali peregrini non si possono conseguire se non per mezzo di grandissimi Principi, siccome è S. A. Ser.ma la quale si vede ch'imitando quei Re magnanimi, manda con grandissime spese in lontanissimi paesi per arricchire et illustrare questa cognitione naturale, de che ne faranno perpetua memoria et renderanno eterno il suo excelso nome tutt'i studiosi, conoscendo d'esser obligatissimi a V. A. S.a della cui magnificenza io parimente ne sarò tromba nelle mie Historie. Et con questo fine basciando le mani di V. A. Ser.ma con ogni riverenza, li prego dal S.r Iddio il compimento de suoi altissimi desiderii.

Di Bologna, a dì 27 di novembre 1591

Di V. Alt.za Serenissima

Humilissimo ed obligatissimo Servitore

Ulisse Aldrovandi.

(*fuori*) Al Serenissimo Gran Duca di Toscana Pron. mio Colendissimo.

Filza n° 890, 451.

Molto Ill.re S.or mio Oss.mo

Anchor ch'io non habbia mai havuta occasione di poter dimostrare a V. S. M.to Ill.re l'affettione che sempre gli ho portata sino al tempo della felice memoria del Ser.mo Gran Duca Francesco; hora però non volendo perder questa, che mi porge il primo volume della mia Ornithologia c'ho fatto stampare; ho voluto mandarne uno a V. S. con l'Epigramma incluso, quale desidero ch'ella faccia legare dirimpetto al frontispicio del libro, per maggior segno dell'osservanza mia verso lei; et che l'uno e l'altro le serva per tener memoria di me. Voglio sperare che V. S. nel leggere trovarà forse qualche cosa di gusto, che se così sarà, l'haverò molto caro, si come anco che V. S. mi favorisca appresso il Ser.mo Gran Duca per la gratia del privilegio, di che supplico S. A. et che questa sia per dieci anni. Et se bene in questo primo tomo io non ho inserito il privilegio, basterà averlo appresso me, come si costuma da alcuni altri. Con tal favore mi reputerò grandemente honorato da S. A. Ser.ma nella cui protettione V. S. per sua cortesia si degnarà conservarmi, et se procurerà anco ch'io venga favorito di qualche bel parto di natura, secondochè son stato altre volte, per poter honorar tanto più l'altre due parti dell'Ornithologia che voglio stampare, ne restarò molto obligato a V. S. Il che desidero anco per havere occasione di mostrare al mondo la devotione mia verso S. A. Ser.ma; si come faccio de suoi Ser.mi Antecessori; la liberalità de' quali nel communicarmi molte cose rare, non taccio nell'opere mie per debito di gratitudine. Et per il medesimo rispeto V. S. può esser certa che me troverà sempre disposto a servir anco lei, alla quale per fine bacio le mani, et prego da Dio felice stato.

Di Bologna, lì 6 di aprile 1599

Di V. S. M.to Ill.re

Aff.mo et Devot.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Molto Ill.re Sg.or mio pron. Oss.mo il S.or Cavagliere Vinta, Secretario di S. A. S.

Filza n° 899, 469.

Ser.mo Si.re Patron mio Col.mo

Havendo io in questo tempo dato in luce la seconda parte della mia Ornithologia, ne mando a V. S. Ser.ma un esemplare per mezzo del Sig.re FABRITIO BONTEMPO. La supplico humilmente che si degni di riceverlo et di aggradire questo benchè piccolo testimonio dell'antica mia servitù con V. A. Ser.ma; escusandomi se rare volte ne ha demonstrationi da me, poichè lo faccio per non occuparla in leggere mie lettere fuor d'occasione. Bascio con ogni humiltà la veste di V. A. Ser.ma pregando il Sig.re Dio che la conservi lungamente.

Di Bologna, lì 16 d'ottobre 1600

Di V. A. Ser.ma

Humilissimo et Obligat.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.mo Sig.re Pron. mio sempre Col.mo il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 906, 642.

Ser.mo Sig.r mio Pron. Col.mo

Per mostrarmi quel divoto e grato servitore ch'io sono di V. A. Ser.ma procurerò al presente di sodisfare in parte all'obligo mio grande con lei, con il pregare il S.r Iddio che le conceda un buon Natale; e con l'annotiarglielo (*sic*), come faccio riverentemente, in questa mia, sarà tutta benignità di V. A. Ser.ma, s'ella si degnerà d'accettare la mia devotissima oblatione, secondoche io la supplico a fare. Non resterò d'avvisarla come al presente son intento a stampare l'historia degli Animali essangui Insetti, opra molto curiosa e dilettevole ad ogni ascoltatore di cose naturali, inserendo in quella circa ottocento figure non stampate da alcuno. A questi giorni passati mostrai il principio già stampato all'Ecc.mo S.r MERCURIALE, passando esso per Bologna. Doppo questa farò stampare il terzo volume degli Uccelli Aquatili e di quei che vivono circa l'acqua, e questo libro sarà il compimento dell'opra degli Uccelli, essendo l'ultimo tomo della nostra Ornithologia. Se fra tanto V. A. Ser.ma harà qualche Uccello straniero, pertinente a questi Uccelli, d'acqua, overo alcun insetto, mi favorirà di mandar la pittura, acciò io possi aricchire le sudette opre con l'auttorità di V. A. Ser.ma E non essendo questa per altro le bacio l'honorata veste, suplicandola a conservarmi nel numero de' suoi minimi servitori.

Di Bologna, il dì 18 di ottobre 1601

Di V. A. Ser.ma

Humilissimo e Devot.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Serenis.mo Sig.re mio Sig.re pron. sempre Col.mo il Sig.re Gran Duca di Toscana.

Filza n° 911, 177.

Ser.mo Sig.or mio Col.mo

Per la servitù c'ho sempre tenuta e tengo con V. A. Ser.ma procurerò con questa di sodisfare in qualche parte a debiti miei. E se bene per non darle incommodo e stata lunga l'intermissione di tempo con farle humilmente riverenza; con tuttociò per l'occasione che intendo vacare la Cathedra di Semplici di Pisa, non ho voluto restare di procurargli un giovane atto per tale impresa, del cui aiuto mi son servito dui anni per le mie compositioni in casa mia, dove ha havuta buona occasione d'imparare la cognitione di essi. Questo si chiama messer Giovanantonio Confredi, genovese, quale s'è dottorato nel Collegio nostro. E perchè intendo che anche la lettura non sia conferita, supplico V. A. Ser.^{ma} fare elettione di quello, qual giudico molto a proposito. E tutto il favore reputerò io e porrò fra gli altri molti oblighi. Hora è finita di stampare un opra *De Animalibus Insectis*, ad elettione del S.^{or} Duca d'Urbino; e di questa secondo il mio solito quanto prima le ne farò parte. E se oltre alle mie deboli forze havessi qualche aiuto, verrebbe a luce alcuna delle mie opre, che così è necessario stieno sepolte. Con che pregandole dal Sig.^{re} Iddio il colmo di felicità, con ogni humiltà e riverenza le bacio la mano.

Di Bologna, gli 23 di settembre 1602,

Di V. A. Ser.^{ma}

Affetionatissimo et Obligatiss.^{mo} Ser.^{re}
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} mio Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 917, 421.

Ser.^{mo} Sig.^{re} Pron. mio Col.^{mo}

Mando a V. A. Ser.^{ma} per messer Ambrosio Vignati la 3^{a} parte degli Uccelli da me nuovamente posta in luce, compimento di essi, la quale sarà presentata a V. A. dal Sig.^{r} Mercuriale: e se si degnerà gradirla con l'istessa benignità c'ha gradite l'altre mie fatiche, mi darà animo di mandar fuori qualch'altra, et in particolare una *De 4 generibus Animalium Exanguium*, che adesso ho in pronto, se bene le spese gravi e le facoltà mie deboli. E con questa occasione trovandomi io in casa un giovane chiamato messer Alessandro Pietramala, povero cittadino della città di San Sepolcro, privo già molto del tempo del suo padre, quale mi ha servito quattro o cinque anni nelle mie compositioni, et hora si vorrebbe dottorare, ma per non havere il modo di farlo in Pisa per la spesa, lo farei dottorare in Bologna *gratis et amore*; però per non mi privare di esso, che mi sarebbe di grand'impedimento alle mie Historie, per la prattica che egli ha, essendosi partito un altro mio giovane; supplico con ogni affetto V. A. Ser.^{ma} che mi vogli fare questa gratia particolare, che pigliando il grado quà, egli possi poi medicare per il suo stato, potendo anche V. A. servirsene per l'Academia di Pisa o altro, havendo egli buone lettere greche e latine con la cognitione delle piante et altre cose naturali; ed il favore che farà a questo riputerò fatto a me stesso e ne resterò obbligatissimo a V. A. Ser.^{ma} alla quale con augurarle dal Sig.^{or} Iddio ogni compito accrescimento di gloria, con ogni riverenza et humiltà bascio la veste.

Di Bologna, alli 5 d'agosto 1603

Di V. A. Ser.^{ma}

Humilissimo et Obbligatissimo Ser.^{re}
Ulisse Aldrovandi.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{r} e Pron. mio Col.^{mo} il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 919, 187.

Molto Ill.^{re} Sig.^{r} mio Oss.^{mo}

Si meraviglierà V. S. che per essere non poco tempo ch'io non l'ho riconosciuta con lettere, hora venga con questa a prevalermi dell'autorità sua. Non vorrei che mi tenesse per poco offitioso scrivendole solo quando habbia bisogno di lei, come ho certo adesso che mi s'appresenta un occasione di messer Alessandro Pietramala dal Borgo San Sepolcro, uno scrittore delle mie opre, povero giovane, ma virtuoso e di buonissima speranza; il quale essendo in procinto hora di dottorarsi, io gli faccio servitio che gli ho fatto havere il grado qua *gratis*, la qual commodità egli non potrebbe, com'io penso, havere in Pisa, se non col favore di S. A. Ser.ma; sì che, caro Sig.r Cavalliere, lo raccomando sì caldamente alla sua potente auttorità col G. D., che m'assicuro che sia egli per fare cotesta gratia della licenza di potersi addottorare in Bologna, godendo il privilegio come di Pisa, si degnerà V. S. per sua cortesia, come causa di questo bene, con occasione d'appresentare l'inclusa a S. A., quale tratta di questo negotio, e supplicarla con tutto il cuore di questa gratia, essendomegli anche raccomandato per prima, quando gli mandai l'opra mia 3a *De Avibus*, questi dì passati, della qual lettera non ho havuta risposta, il che m'imagino per i negotii. Il favore che farà a questo mio giovane presso al G. D. reputerò fatto a me stesso, et ambidui le ne terremo obbligo perpetuo, desiderosi che si porga occasione di renderle in qualche parte almeno il contracambio. Et io in particolare mi offero per quanto vaglio per amor suo. E facendo fine aspetto l'aviso della gratia in favore, togliendo qualche difficoltà in contrario, le parole di V. S. a cui di tutto cuore bascio la mano.

Di Bologna alli 12 Settembre 1603

Di V. S. Molto Illustre

Aff.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Molto Ill.re Sig.r mio Oss.mo il Sig.r Cavalliero Vinta.

Filza n° 919, 453.

Ser.mo Sig.r mio Pron. Osservandissimo,

Se col rendere somme gratie a V. A. Ser.ma del favore fattomi per il mio giovane non credessi d'offendere la sua benignissima natura, ardirei celebrarla, come che sia tale cui non si ritrovi eguale. Ma perchè già molto tempo fa ho conosciuta la sua liberalità verso di me, fuor d'ogni mio merito; però per non derogare alla sua grandezza, scarso di parole, pregherò il Sig.re Iddio che le conceda ogni maggiore gloria et essaltatione per cotesto felicissimo stato fra tutta l'Europa. Et il mio giovane PIETRAMALA, anzi minimo suddito dell'A. V., come ha ricevuta per singolarissima la gratia fattagli, così perchè si riconosce tanto obligato che non può disobligarsi in eterno, pregherà anch'egli il Sig.re che la remuneri, et si chiama felice vedendosi favorire da un tanto Prencipe; nè gli si può mai essere di maggior contento che un giorno le piaccia e voglia prevalersi di lui; non dico in medicina, che Dio la guardi da tal bisogno, ma per il suo Studio di Pisa o altro, perchè affaticandosi per ciò è sempre prontissimo ad ogni minimo cenno di V. A. E con questo inchinandomi riverente, et humilmente le bacio la veste, come anche egli, qual'è per tenere continovate servitù con lei e Sua Ser.ma Casa, supplica che si degni accettare questo offitio facendole riverenza con ogni humilissima sommessione.

Di Bologna, alli 27 d'ottobre 1603

Di V. A. Ser.ma

Divotissimo et Humiliss.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI

(fuori) Al Ser.mo Sig.r mio Pron. Oss.mo il Gran Duca di Toscana.

Filza n° 919, 455.

Ill.re Sig.re mio Osservandissimo,

Mi ritrovo tanto debitore alla cortesia sua che le giuro che non le potrò mai sodisfare col riscontro. So certo che non mi bisognava altro mezzo con S. A. Ser.ma per la potente sua auttorità, la quale sempre ho stimata di gran valore; e le dico che è obligo mio il ringratiarla sommamente. Ma bene mi sarà favore particolare quando vedrò che si prevaglia di me, desideroso di servire un suo pari, la cui gentilezza mi ha talmente astretto, che sempre sarò di V. S. Il mio giovane poi promette d'esserle perpetuamente Ser.re obbligatissimo e ne riconosce lei per primaria causa della gratia fattagli; bramando che un giorno venga occasione, acciò dipenda in tutto da quella Ser.ma Casa, perchè allora si riputerà felicissimo con riduplicati favori d'un tanto Prencipe; e non potendo egli mostrare l'affetto del core, le augura dal Signore il compimento de' suoi desiderii. Et io con pregarla che per amor mio lo pona fra il numero de Ser.ri suoi e di Sua Casa, le bacio la mano; il che fa ancora egli con ogni riverenza.

Di Bologna, alli 27 d'ottobre 1603

Di V. Signoria Illustre

Obligatissimo ed Affettionatissimo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) All'Ill.mo Sig.r mio Oss.mo Cavaliero Vinta.

Filza nº 923, 479.

Molto Ill.re Sig.re mio Oss.mo

Viene a Fiorenza per andare alla patria messer ALESSANDRO PIETRAMALA, il quale essendo a V. S. servitore molto obligato, desidera farle riverenza con darle insieme questa mia, con la quale la pregherò che vogli degnarsi di confirmarlo secondo la sua benignissima natura fra il numero de' suoi servitori, favorendolo presso al Gran Duca con la sua potente auttorità, la quale so quanto sia grande, se gli ocorresse cosa veruna non solo circa la gratia fattagli che ha ottenuta da S. A. per mezzo di V. S. et essendosi dottorato, io gli l'ho data che la porti seco, acciò se ne possi prevalere; ma anche in altri favori, de quali farà capo V. S. come potente. E tutto stimerò fatto a me stesso e le resterò con obligo. Con che pregandola a tenerlo in buona gratia di S. A. di cui egli si chiama Vassallo obligatissimo, e desidera sommamente di servirla negli studi delle cose naturali, di che n'ha buona cognitione, io con ogni riverenza le bacio la mano, e gli lo raccomando di cuore.

Di Bologna, lì 9 di giugno 1604

Di V. S. Molto Ill.re

Aff.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Molto Ill.re Sig.re mio Pron. Oss.mo il S.r Belisario Vinta.

Lettere di Ulisse Aldrovandi a S. A. Serenissima Francesco Maria II della Rovere Duca di Urbino [1] (1599-1601).

[*Archivio d'Urbino*, Classe *P.*a, Divisione *G.*, f.a 171].

Ser.mo S.or Pron. Col.mo

Mando a V. A. Ser.ma il libro ch'ella commise che si facesse colorire, e lo mando con tanto desiderio d'intendere che sia restata sodisfatta a pieno e dell'opera e di me stesso, che non pospongo questa ad alcuna altra cosa desiderabile. Si è ben tardato assai più di quel che haverei voluto nel far questo servitio, nondimeno la benignità di V. A. Ser.ma mi assicura che

1) Nato il 20 Febbraio 1548, morto il 20 Aprile 1631.

ne verrò scusato, poichè non è proceduto da poca solicitudine mia. Con questo bacio humilissimamente le mani di V. A. Ser.^{ma} e non men pronto che obligato a servirla sempre, mi raccomando in sua buona gratia:

Di Bologna, alli 22 di maggio 1599

Di V. A. Ser.^{ma}

Humilissimo et Obligatissimo Servitore
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} S.^{r} mio Pron. mio Col.^{mo} il Sig.^{r} Duca d'Urbino, Castel Durante.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.^{mo} Sig.^{r} mio Pron. Colendissimo.

La lettera di V. A. Ser.^{ma} in risposta della mia mi haveva dato prima saggio così grande della benignità sua verso me, che non l'espettavo maggiore (misurando più la mia che le singularissime qualità sue) quando il S.^{r} GIULIO CUPPOLINO mi ha portati cinquanta scudi di Pauli, facendomi intendere che questi sono stati rimessi per ordine di V. A. Ser.^{ma} acciò che io dia con essi ricognitione a chi ha colorito il libro, mandatole da me. Essendo io adunque ricompensato così soprabbondantemente da V. A. Ser.^{ma} di quel poco che ho fatto per debito della devotissima servitù mia con lei, vengo a restarle in maniera obligato che nel renderle humili gratie di questo dono, non posso lasciar di supplicarla a comandarmi in tutto quello che posso esser atto a servirla. Questo sarà uno de' più cari favori ch'io desideri di ricevere da V. A. Ser.^{ma} alla quale per fine basciando con ogni humiltà le mani, prego da Dio in colmo felicità.

Di Bologna, a dì 3 di gennaio 1601

Di V. A. Ser.^{ma}

Devotiss.^{o} et Obligatiss.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{r} mio Pron. Col.^{mo} il Sig.^{r} Duca d'Urbino.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.^{mo} Sig.^{or} mio Pron. Col.^{mo}

Io mando a V. A. Ser.^{ma} la mia Historia degl'Insetti, dedicata da me al suo gloriosissimo nome, così per sodisfare in qualche parte agli obblighi grandi c'ho seco, et al desiderio che già molti anni tenevo di lasciare doppo me alcun segno della mia divotione infinita verso lei, come anco per illustrare col suo splendore quest'opra che per se stessa sarebbe riuscita poco chiara. Si degnerà V. A. Ser.^{ma} di riceverla volentieri per benignità sua, e per venirle da un tanto suo humile servitore che non desidera altra cosa più che potere impiegare in suo servitio quel poco tempo di vita che gli resta; che io con questo le bacio humilmente le mani e le auguro continua felicità.

Di Bologna, gli 4 di settembre 1602

Di V. A. Ser.^{ma}

Humilissimo et Obligatiss.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) All'A. Ser.^{ma} del Sig.^{re} Duca d'Urbino P.rone mio Col.^{mo}.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.^{mo} Sig.^{r} mio P.rone Col.^{mo}

Confidandomi che V. A. Ser.^{ma} riceverà e vedrà con la solita sua benignità quest'altra opra mia, che è la 3^{a} parte degli Uccelli, c'ho fatta stampare nuovamente, non ho voluto lasciare di mandargliela per non mancare al debito della devotissima servitù mia con lei; et anche per non perdere un'occasione tale di ricordargliela e di farle humilissima riverenza sì come faccio, pregando con questo il Sig.r Iddio che accresca di felicità V. A. Ser.ma, alla buona gratia della quale humilmente mi raccomando, pronto sempre a suoi comandamenti, quali le piacesse farmi.

Di Bologna, alli 2 di settembre 1603

Di V. A. Ser.ma

Humilissimo et Obligatiss.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.mo Sig.or mio Pron. Col.mo il Duca d'Urbino.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.mo Sig.or mio P.rone

Per non mancare al debito mio non son già per restare di confermarmi per quel servitore obligato di V. A. Ser.ma qual le son stato e sono, massime con questa occasione che io secondo il solito facendole riverenza le avviso le buone feste del Natale, con augurargliele per conseguenza felicissime. E subito che il Pittore verrà a fine di miniare il 3° et ultimo Libro degl'Ucelli l'inviarò a V. A., e mi prometto che ella sia per gradire come ha fatte l'altre mie fatiche. E se havessi havuta la carta, fin hora sarebbe stampata la metà dell'opra. Dunque quanto prima che l'harò si metterà sotto il torchio. Con che pregandole dal Sig.re ogni felicità e grandezza, con ogni riverenza et humiltà le bacio la veste.

Di Bologna, alli 20 di Xbre 1603

Di V. A. Ser.ma

Humiliss.mo et Obligatiss.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.mo Sig.or mio P.rone Oss.mo il Sig.re Duca d'Urbino.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.mo Sig.or mio P.rone sempre Col.mo

Mando a V. A. Ser.ma la terza et ultima parte della mia *Ornithologia* con gli Animali miniati di suoi colori naturali con gran diligenza, che anche in parte è stato cagione che fin hora sia tardato di mandarla. Priego V. A. Ser.ma e la supplico con ogni humiltà che con quella medema gentilezza e con l'istessa benignità si degni accettarla con la quale mi ha favorito d'accettare le due prime, dandogli luogo in cotesta sua compitissima Libreria; che così mi darà animo d'incaminare più gagliardamente a dare fuori qualche altra delle molte mie fatiche, come hora ho in procinto di stampare un buono volume de 4 generi degli Animali Essangui, quale sarà per compimento dell'opra *de Insectis*, data in luce sotto la protettione della Ser.ma persona sua. E già l'havrei, poco meno, stampato tutto, se non fosse stata tanta penuria di carta, che pure un foglio non s'ha potuto havere con mio grandissimo danno in questa età d' 82 anni, la quale molta prestezza e non tardanza ricerca. Con che fine a V. A. Ser.ma humilmente inchinandomi bacio la veste. Di Bologna, alli 16 di marzo 1604.

Di V. A. Ser.ma

Humilissimo et Obligatiss.mo Ser.re
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.mo Sig.re e P.rone mio Col.mo il Sig.re Duca d'Urbino.

[*Urbino*, CS. f. 171].

Ser.mo Sig.re et P.rone Col.mo

Resto in questa gravissima età mia consolatissimo d'haver colle fatiche mie fatto cosa onde agl'elevati et giudiciosi ingegni, pari d'essa, si recchi dilettatione, come dalle cortesissime sue chiaramente comprendo. E veramente l'applauso di un sì dotto e benigno Principe mi fa prender speranza che altresì d'utilità sia per trarne il mondo, al cui commodo, spererò in breve, uscirà il quinto mio volume de quattro generi d'Animali Essangui, continoante all'altr'opere; tutto che per sin qui una carestia grande di carta c'habbia ritardati. Altro hor non mi resta che di pregar N. Signore che colle buone feste le doni il compimento d'ogni consolatione et la conservi a commun'utile di chiunque la serve e si mostra desideroso colle fatiche sue giovar al publico. E le faccio con ciò humilmente riverenza.

Di Bologna, li 22 Xbre 1604

Di V. A. Ser.^{ma}

Obligat.^{mo} et devotiss.^{mo} Ser.^{re}
ULISSE ALDROVANDI.

(fuori) Al Ser.^{mo} Sig.^{re} et P.rone Col.^{mo} il Duca d'Urbino, Urbino.

APPENDICE

Lettere del Dottor Giulio Cuppellino al Duca di Urbino (1599-1621).

[*Archivio d'Urbino, nel R. Archivio di Stato di Firenze, filza 171*].

Ser.^{mo} Sig.^{re} — Conforme a quel ch'io intesi esser mente di V. A. Ser.^{ma} feci dare principio a colorire uno de' libri stampati del Signor Dottore ALDROVANDO, intorno al qual si lavora con non poca satisfattione mia; et hora che l'Indice dell'opera è stato espedito, io ne mando un'altro in bianco all'A. V. con dire che nell'essecutione di questi suoi ordini ho trovato il detto Dottore molto pronto et anco straordinariamente desideroso di darle segni magiori d'una sua singolare devotione che le porta. Il Pittore poi non perde tempo; ma perchè in alcune cose haverà bisogno dell'opera et assistenza del Dottore medesimo, però non potrà egli finire il suo lavoro prima della meza quaresima. Tuttavia ciò doverà importar poco, pur che venga ben fatto il servitio di V. A., alla quale io ho voluto darne questo conto, aggiongendo che non posso sentir maggior contento di quel che ricevo con i suoi comandamenti. Et humilissimamente bascio le mani di V. A. Ser.^{ma} pregandole da Dio in colmo felicità.

Di Bologna li 6 di febbrajo 1599

Di V. A. Ser.^{ma}

Humilissimo et obligatissimo Ser.^{re}
GIULIO CUPPELLINO.

Ser.^{mo} Principe, — Più volte mi son dato a credere di potere avisare V. A. Ser.^{ma} che si fosse stabilito effettualmente di proseguire la stampa d'altre opere dell'ALDROVANDO, conforme all'ordine che tenevo di procurarlo; et in particulare sperai di far questo avanti la Pasqua passata, con tanto mio maggior desiderio, quanto che nell'istesso tempo le havrei anco annuntiate le buone feste. Non permesse l'incredibile lunghezza di questo negotio, che prima delli 14 del presente mese si venesse alla stipulatione della scrittura, che pur è seguita tra il Reggimento et me; et per tal causa ho differito io l'offitio, che faccio adesso di ricordarmi a V. A.

Ser.^{ma} servo di fede et devotione singolare, confidato nella sua gran benignità, che perciò non sarà manco gradito. Quanto poi alla tardanza interpostasi nel negotio, non voglio entrare in altro che in dire, per discolpa mia, et per la verità istessa, che in tanto tempo io non ho mai mancato in parte alcuna del debito mio; et V. Altezza mi creda, se ben testifico in causa propria. In mano del S.^{or} Abbate Brunetti mando copia della detta scrittura, et quelle di V. A. Ser.^{ma} bascio con ogni humiltà, pregando il S.^{or} Dio che lungamente la conservi nel suo felicissimo stato. Di Bologna li 24 di aprile 1610

Di V. A. Ser.^{ma}

Devotissimo et humilissimo Servitore
Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Principe, — Il Dottore Giovanni Cornelii, che mi ha detto di volere scrivere a V. A. Ser.^{ma} con l'occasione del Santissimo Natale, ha inanimato al medesimo me ancora, che non per altro che per somma et debita riverenza resto di farle più spesso riverenza. Da lui V. A. intenderà che si va innanti nello stampare l'opera de' Pesci, nella quale, sì come aviene per il più nelli principii delle cose, non s'è potuto sin hora far molta diligenza per mancamento d'operarii; nondimeno se ne son poi havuti da Fiorenza, e spero che in breve si tirrarà a fine, et che manco lunghezza s'haverà nelle altre. Io seguiterò di far la parte mia, che è di servire in questi affari all'intentione di V. A. Ser.^{ma} il più ch'io possa, il che tanto maggiormente, ho da procurare quanto che non ho l'occasione d'impiegarmi in altro, sì com'è et sarà sempre mio desiderio principale. Bacio con questo humilissimamente le mani di V. A. e prego il S.^{or} Dio che a lei et al Ser.^{mo} Principe conceda in queste S.^{me} Feste et sempre ogni felicità.

Di Bologna li 21 di dicembre 1611

Di V. A. Ser.^{ma}

Humiliss.^{mo} et dev.^{mo} Servo
Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Principe, — Mandando messer Girolamo Tamburini a V. A. Ser.^{ma} il libro ch'egli ha fatto stampare delli Pesci, ha voluto che anch'io scriva, parendogli forse d'autenticar meglio così la demostratione del devotissimo animo suo, et la prontezza che tiene di servirle, particolarmente nell'altre opere dell'Aldrovando, che dovrà stampare. Nella presente si è messo tempo assai, perchè oltre all'altre lunghezze ch'io avisai in materia della Dedicatoria, s'è aggiunta questa, che al Tamburino medesimo in ultimo è convenuto da se stesso farla, cosa che prima non haveva voluto presumere, se bene a me pare che lo poteva, come dalla propria epistola si vede. Con questo m'inchino humilissimamente a V. A. Ser.^{ma} et le prego in colmo felicità.

Di Bologna lì 9 di febraro 1613.

Di V. A. Ser.^{ma}

Humiliss.^{mo} et dev.^{mo} Servo
Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Principe,

Non havend'io in tutto l'anno da scrivere a V. A. Ser.^{ma} per altra occorrenza che per quella dell'opere da stamparsi dell'Aldrovando, et mancandomi anco spesso questa, sempre per colpa d'altri, non già mia, mi conduco alle volte a satisfare a tal mio debito con l'annontio delle buone feste. Però con questo solo vengo adesso a fare humile riverenza a V. A. poi che quanto a esse opere io non ho che dire, se non che quella de' quadrupedi, che sarà la prima a imprimersi, si trova bene all'ordine, non mancando più nè compositione, nè carattere; ma lo stampatore non s'è potuto anco tirare a dar principio. Costui non solo da me, ma per quanto vedo è sollecitato molto anco dalli altri che ci hanno interesse, dico per quanto vedo, perchè talhora non ho potuto fare di non haver sospetto che questa lunghezza non sia senz'arte, stante l'obligo che ci è d'haver a restituire il denaro, stampate che saranno cinque opere. Tuttavia il TAMBURINO libraro, al quale non poco importa che il suo non gli stia morto, m'afferma et m'assicura che dallo stampatore et non da altri viene il deffetto. Io non ho potuto nè dovuto tacer tutto questo a V. A. così per scarco mio, come per il desiderio grandissimo che tengo della sua buona gratia, nella quale raccomandandomi quanto più posso, humiliss.^{te} bacio le mani di V. A. Ser.^{ma} e priego per il suo felice stato.

Di Bologna, li 20 di decembre 1614

Di V. A. Ser.^{ma}

Servo humil.^{mo} et dev.^{mo}

GIULIO CUPPELLINO.

Ser.^{mo} Principe,

Doppo molti accidenti che hanno prolungata l'espeditione della parte prima delli quadrupedi, si manda pur questa sera a V. A. Ser.^{ma} et nell'istesso tempo che al Sig.^{re} CARLO MADRUZZO, a chi è dedicata. Con tale occasione io ho giudicato essermi lecito di scrivere et far riverenza all'A. V. la qual supplicarei a credere che nel sollecitare questa opera, non ho mai mancato del debito mio, se la prudenza et benignità sua lo permettessero. In queste confidato io, non aggiongerò altro ma pregando il S.^{or} Dio che la Ser.^{ma} persona e stati di V. A. feliciti, come i servi suoi desiderano, con ogni humiltà le bacio le mani.

Di Bologna, li 30 agosto 1616

Di V. A. Ser.^{ma}

Humiliss.^{o} et Devotiss.^{o} Servo

GIULIO CUPPELLINO.

Ser.^{mo} Sig.^{re} — L'occasione ch'io piglio di scrivere a V. A. Ser.^{ma} non è solo per augurarle, come faccio, compita felicità nel prossimo S.^{mo} Natale, ma per darle anco aviso della morte del dottore GIOVANNI CORNELI, seguita l'altro hieri, molto all'improviso. Non convengono veramente bene insieme questi due offitii, nondimeno io l'ho stimati convenienti all'humile servitù mia con V. A. massime conoscendo, che in altro son poco atto a essercitarla. La perdita di tal persona doverà dispiacer manco, quanto all'opere dell'ALDROVANDO suo precettore, ch'egli metteva in ordine, perchè spero che pur si continuerà di stamparne, così per l'interesse proprio del TAMBURINO, che ha questa impresa, come per essersi proferti di già in luoco del morto altri, che si giudicano buoni soggetti. Io non mancarò nella parte che a me tocca, et in particulare procurando che si finischi di stampare l'opera, che fra tre mesi doveva darsi fuora, se il dello Corneli non moriva.

Di quanto seguirà non lasciarò d'avisar V. A. che ha tanta parte nella publicatione di queste opere, et con ogni humiltà inchinandomi a farle riverenza, mi raccomando in gratia sua.

Di Bologna li 21 di dicembre 1619

Di V. A. Ser.^{ma}

Dev.^{mo} et obl.^{mo} Servo

GIULIO CUPPELLINO.

Ser.^{mo} Principe, — La commissione datami da V. A. Ser.^{ma} mi ha veramente allargato molto il campo, ch'io m'ero già pigliato di solecitare a nome suo la stampa dell'opere dell'ALDROVANDO, et particolarmente di questa, che si trova più che meza stampata. Onde con tanto maggior caldezza ho seguitato, et continuarò nel farne instanza. In questi gentilhomini si vede prontezza in dare a V. A. Ser.^{ma} così honesta et debita satisfatione, ma l'effetto viene ritardato dalla mossa di più soggetti che concorrono alla domanda dell'impresa. Tuttavia spero che il rispetto che si deve alli offitii dell'A. V. li farà risolvere in breve, massime instando ancora gagliardamente il Tamburino et lo stampatore per gl'interessi loro. Non posso dir altro addesso, se non render certa V. A. che oltre l'obligo generale ch'io tengo di obedire a ogni suo minimo cenno, conosco d'haverlo particolare in questo negotio, e premo in esso di non mancare al debito mio, sì come a suoi tempi andrò avisando. In tanto V. A. Ser.^{ma} si degni d'havermi nella sua gratia, da me in estremo desiderata. Et le faccio humilissima riverenza.

Di Bologna, l'ultimo di gennaro 1620

Di V. A. Ser.^{ma}

Humiliss.° Servo

Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Principe,

Alla buona dispositione che questi Signori Assonti del Reggimento hanno mostrato et mostrano tenere di servire V. A. Ser.^{ma} nella stampa dell'opere dell'Aldrovando, non veggo fin'hora che si corrisponda con gli effetti, et ciò procede più da private passioni che da publico benefitio, se ben questo è lo pretesto loro. Sono quattro et anco più quelli che domandano, et ciascuno ha li fautori suoi, a quali non mancano raggioni per contradirsi, di maniera che non conveniranno in un di questi così presto. Però io ho giudicato bene, et debito mio, il non tardar più a darne conto a V. A. Ser.^{ma}, et che anco non sia inconveniente l'aggiugnere che forse il rimedio più proprio a questo male sarebbe che l'Ill.^{mo} Legato ci mettesse la mano, meritandosi d'essere astretto, colui che da sè non fa quel che deve.

Questo Sig.^{re} con l'occasione delle giostre et barriera, che quì si faranno, ha invitato li Cardinali Pio, Bevilacqua, Serra e Rivarolo, li quali, se venessero, potrebbono quasi far concistoro, perchè con Leni, che s'aspetta, sariano sette. Bacio con questo humilissimamente le mani di V. A. che il S.^{or} Dio lungamente feliciti et conservi.

Di Bologna li 26 di febbraro 1620

Di V. A. Ser^{ma}

Humilissimo Servo

Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Principe, — Annontiar con lettere le buone feste a Patroni, non conviene a ogni sorta di servitori, massime a quelli che ne anco in altri son buoni a essercitare la servitù loro; nel numero de quali ritrovandomi pur io, forse havrei tralasciato un tale offitio, se dall'opera de Bisulci non prendevo animo. Con l'annontio adunque delle prossime feste del S.^{mo} Natale, io vengo a fare humilissima riverenza all'Altezza Vostra et a darle conto insieme che detta opera sarà finita et posta in luce avanti la prossima Pasqua di resurrettione; et credo poter affirmar questo, così perchè lo Scoccese fin a quaresima è quasi libero della sua pubblica lettura, et il Tamburino, del cui interesse si tratta, lo sollecita, come perchè sono stati gli accidenti et gli intoppi sin'hora tanti, che alcun'altro più non dev'essere rimasto da nascere. Io non mancarò di far la mia parte, acciò si verifichi quanto dico a V. Altezza, et nella sua gratia humilissimamente mi raccomando.

Di Bologna li 19 di decembre 1620

Dell'A. V. Ser.^{ma}

Humilissimo Servo

Giulio Cuppellino.

Ser.^{mo} Signore, — In essecutione dell'ordine datomi da V. A. Ser.^{ma} mi son informato che dell'altre opere delli Animali che restano dell'Aldrovando, ci sono due volumi ancora di quadrupedi, et uno de i serpenti. Oltre questi vi sono due opere l'una de i monstri, l'altra de i focili con le lor figure, intagliate per la maggior parte; le quali cinque opere sono le più pronte che ci sieno da poter stamparsi. Al presente si è intorno all'intagliare 2 mila piante, lasciate dall'Autore in dissegno, nè altro si fa, nè spero si faccia, mentre questi Signori non si resolvino nell'elettione di chi ha da succedere alla cura dello studio di esso Aldrovando, in luoco del Dottore alievo suo, morto. Si mostrano ben inclinati alla publicatione delle sue fatiche, sapendo massime di servire in ciò a V. Altezza; ma per carestia de soggetti secondo il bisogno, et non convenendo anco in tal particulare insieme alcuni di loro, il negotio dello stampare andarà in lungo. Faccio con questo riverenza humilmente a V. Altezza, la quale N. S.re Dio conservi felicissima.

Di Bologna li 7 di luglio 1621

Di V.ra Alt.za Ser.ma

Humiliss.o et dev.mo Servo

Giulio Cuppellino.

Ser.mo Signore, — Non perchè habbi da dir cosa che possa essere di satisfattione a V. A. Ser.ma in materia dell'opere dell'Aldrovando, ma per non mancare a quel che devo intorno a questo particolare io scrivo, et per dire che mentre stavo aspettando il ritorno d'alcuni di questi Signori Assonti sopra lo studio del detto Autore, per esseguire l'hordine havuto, è successa la morte del Tamburino; il quale accidente, se ben non ha da difficoltare più che tanto il proseguire la stampa d'èsse opere, tuttavia non darà ne anco aiuto alcuno. Ma perchè l'importanza di questo negotio è il ritrovar persona sufficiente a distenderle, come si devono, et come faceva l'Allievo morto dell'Aldrovando, però io insisterò principalmente in ciò che viene a essere tanto più difficile, quanto che oltre la sufficienza, bisogna che ci concorra la possibilità di far la fatica d'andare a star le hore in quello studio, che hora è nel palazzo publico, nè da esso si può cavare alcun libro. Continuarò adunque in questo le mie diligentie, massime quando saranno tornati alla Città questi Signori Assonti, che per la maggior parte sono fuore, confidando che prevalerà con loro quanto conviene per il rispetto et l'autorità dell'A. V. Ser.ma, alla quale humilmente m'inchino a far riverenza, e prego da Dio nostro Signore ogni felicità.

Di Bologna li 21 agosto 1621

Di Vostra Altezza Ser.ma

Humilissimo Servo

Giulio Cuppellino.

Ser.mo Sig.or Duca d'Urbino.

ELENCO dei nomi delle persone citate nelle Lettere di Aldrovandi.

ELENCO delle produzioni naturali citate nelle Lettere di Aldrovandi.

PIANTE

ANIMALI

MINERALI

SU LA STRUTTURA DEGLI ATOMI MATERIALI

MEMORIA

DI

ANTONIO GARBASSO

CON DUE TAVOLE

Approvata nell'adunanza del 1° Maggio 1904.

§ 1. **Posizione del Problema.** — Subito dopo i primi trionfi dell'analisi spettrale fu enunciata da più parti l'idea che il nuovo sensibilissimo mezzo di ricerca, come dava degli indizii sicuri su la composizione delle sostanze, che in un modo o nell'altro si rendevano luminose, potesse fornire ancora dei dati su la struttura intima dei corpi, e la forma e le proprietà degli atomi e delle molecole materiali.

Con tutto ciò, ripensando ai risultati di forse quarant'anni di ricerche, bisogna pure persuadersi che (mentre si è raccolta una serie meravigliosamente ricca di fatti bene accertati) su la natura dei sistemi, che dànno origine alle onde della luce, pochissime nozioni soddisfacenti abbiamo saputo ricavare dallo studio degli spettri luminosi.

Io sono profondamente convinto che la causa di codesto insuccesso risieda nella mancanza di una teoria dell'emissione della luce, generale e completa e fondata su basi analitiche sicure.

Per riparare a tale mancanza feci lo scorso anno un primo modesto tentativo in alcune ricerche, le quali furono accolte fra le pubblicazioni dell'Accademia (1); recentemente poi ho avuto l'opportunità di ritornare su l'argomento, e di svolgere certi calcoli in modo più completo e più rigoroso (2).

(1) A. Garbasso, *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce*, " Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino ", (2), LIII, 1903.

(2) A. Garbasso, *Su la teoria dell'analisi spettrale*, " Boltzmann-Festschrift ", Leipzig, J. A. Barth, 1904.

Mi propongo di mostrare adesso che, facendo uso dei concetti e degli sviluppi algebrici contenuti nelle mie memorie, e utilizzando le esperienze altrui e alcune ricerche originali non ancora pubblicate, si possono stabilire delle proposizioni semplici su la struttura degli atomi e delle molecole materiali.

Si vedrà come la teoria permetta di risolvere con qualche sicurezza certi problemi, che finora duravano dubbii o insoluti, e si vedrà pure la ragione, per la quale talune deduzioni e taluni tentativi non portarono e non porteranno per molto tempo a resultati soddisfacenti.

Onde fissare meglio le idee, e determinare il lato del problema, che mi sembra suscettibile di venire studiato con qualche vantaggio, ricorderò che nei lavori citati innanzi facevo vedere come gli atomi si *possano* rappresentare con *conduttori* o *sistemi di conduttori*, forniti di autoinduzioni e di capacità (1).

Di qui seguono subito per la natura di un dato complesso vibrante (atomo o molecola) due modelli diversi, i quali *a priori* sembrano ugualmente accettabili: possiamo pensare in realtà che il sistema si riduca ad un circuito unico o ammettere invece che risulti dalla riunione di parecchi conduttori.

Ora è facile stabilire che, così nell'una come nell'altra ipotesi, la struttura corrispondente ad uno spettro proposto non è mai determinata, e lo è tanto meno quanto più cresce il numero delle righe.

Inoltre la teoria, da sola, è impotente a decidere se il primo o il secondo modello sia da preferirsi.

In questi teoremi sta senza dubbio la ragione intima, alla quale accennavo poc'anzi, dell'incapacità dimostrata in tanti casi dall'analisi spettrale.

§ 2. Numero dei conduttori possibili ad n oscillazioni. — Limitandomi per ora al caso più semplice, che è quello di un circuito unico, mi propongo di far vedere che *se si domanda di costruire un conduttore, capace di emettere uno spettro di* n *righe, vi sono sempre pel problema* n *soluzioni distinte.*

Questo teorema si ottiene con tutta facilità.

Ho dimostrato, nella mia *Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce* (2), che in un conduttore fornito di p capacità e di m fili ogni carica ed ogni corrente sod-

(1) Questo non vuol dire certamente che gli atomi *debbano* essere formati in natura secondo lo schema da me proposto.

Anzi la teoria si potrebbe rifare, prendendo come punto di partenza l'ipotesi del Lorentz; quelli che io chiamo fili conduttori diventerebbero allora traiettorie di elettroni. Comunque, e qui sta il lato importante della quistione dal punto di vista pratico, la massima parte dei miei resultati continuerebbe sempre a sussistere.

Che se ho scelto il primo modello, in luogo del secondo, la cosa non fu senza buone ragioni. È più facile infatti imaginare e calcolare un conduttore complesso che un sistema di particelle vibranti, e sotto la forma da me stabilita la teoria si presta anche meglio alle verifiche sperimentali. Volendo *realizzare* il moto armonico di un elettrone, bisogna pure ricorrere all'oscillatore del Hertz. Infine, e da un punto di vista strettamente personale, lo studio sul processo luminoso era per me una conseguenza delle ricerche relative all'assorbimento, al colore, alla dispersione e alla rifrazione delle onde elettromagnetiche. Le quali ricerche tutte derivano ora, dai nuovi fenomeni della risonanza ottica, un interesse, che a principio era difficile prevedere.

(2) Memoria citata, § 2.

disfa ad un'equazione differenziale, lineare ed omogenea, a coefficienti costanti, dell'ordine:

$$\Upsilon = p + m - 1\,;$$

se si vuole che lo spettro della radiazione emessa abbia n righe bisognerà dunque fare:

$$n = \frac{\Upsilon}{2} = \frac{p + m - 1}{2}\,, \tag{*}$$

e però:

$$p + m = 2k + 1\,, \tag{**}$$

con k intero.

Ciò posto, si risponde manifestamente al quesito assumendo per p ed m una qualunque fra le coppie registrate nella tabella che segue:

p	m
2	$(2k+1) - 2$
3	$(2k+1) - 3$
4	$(2k+1) - 4$
. . .	. . . .
r	$(2k+1) - r$

L'ultima coppia si determina con la considerazione che il minimo numero possibile di fili è raggiunto quando la prima capacità si attacca direttamente alla seconda, la seconda alla terza, ecc., la penultima all'ultima.

In questo caso particolare il numero delle capacità supera di uno il numero dei fili; avremo dunque:

$$r = [(2k+1) - r] + 1,$$

vale a dire:

$$k = r - 1.$$

Ma le soluzioni possibili, che si deducono dalla tabella, sono tante quante sono le orizzontali, cioè:

$$r - 1,$$

o, per l'ultimo risultato:

$$k.$$

Osserveremo adesso che confrontando la (*) con la (**) si ottiene:

$$k = \frac{\Upsilon}{2} = n\,,$$

in perfetto accordo con ciò che si era annunciato.

Realmente vi è un solo conduttore possibile ad una oscillazione (Tav. I, *a*), ve ne sono due a due oscillazioni (Tav. I, *b*, *c*), tre a tre (Tav. I, *d*, *e*, *f*), quattro a quattro (Tav. I, *g*, *h*, *i*, *l*), cinque a cinque (Tav. I, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*), sei a sei (Tav. I, *r*, *s*, *t*, *u*, *v*, *z*), e così di seguito.

Per un atomo come è quello del ferro i modelli possibili (*zulässige Bilder* del Hertz) si contano dunque a migliaia.

Anzi l'indeterminazione è anche maggiore di ciò che si potrebbe ritenere a prima vista; i conduttori che non tengono nel loro gruppo l'ultimo posto, si possono infatti costruire secondo diagrammi differenti da quelli delle figure *a*, *b*, ... *z*. Ad esempio: per il conduttore *e* sono ancora possibili (senza che si cambi il numero dei suoi fili e delle sue capacità) i tre schemi e', e'', e''' (Tav. I) (1).

§ 3. **Numero dei sistemi corrispondenti ad uno spettro assegnato.** — Per un secondo teorema generale, da me stabilito (2), uno spettro di n righe si può ottenere, invece che da un conduttore unico, da un sistema di conduttori, quando si riuniscano insieme degli elementi capaci di emettere:

$$\alpha, \beta \ldots \omega$$

righe, di modo che risulti:

$$\alpha + \beta + \ldots + \omega = n.$$

Spettri di due, tre, quattro, cinque e sei righe corrispondono dunque ai sistemi qui appresso registrati (3).

---

(1) I conduttori che nel loro gruppo sono segnati come primi assumono pure le forme d', g', m', r' (Tav. I).

(2) Memoria citata, § 9.

(3) Il metodo, che si presenta più naturale per il calcolo del numero (N) dei sistemi ad n righe, è il seguente:

Si decomporrà il numero n in tutti i modi possibili in termini interi, così da ottenere tante relazioni della forma:

$$(*) \qquad n = \alpha + \beta + \ldots + \omega;$$

per ciascuna di queste relazioni si farà il prodotto:

$$\nu_\mu = \alpha \,.\, \beta \ldots \omega \,.$$

e si sommeranno da ultimo le ν, scrivendo:

$$N = \Sigma \nu_\mu \,.$$

Bisogna però notare che, per questa via, talune combinazioni si presentano più volte, e la cosa si verifica sempre quando una o più poste al secondo membro di una equazione (*) risultano uguali. L'unità fa eccezione. Il numero n' dei termini spurii si dovrà naturalmente sottrarre dal risultato definitivo; sicchè la formola esatta la dovremo scrivere:

$$N = \Sigma \nu_\mu - n'.$$

Per $n = 2$, ad esempio, si ha il solo svolgimento:

$$n = 1 + 1;$$

viene dunque:

$$\nu = 1,$$

ed:

$$N = 1.$$

Per $n = 3$ si ottiene:

$$n = 1 + 1 + 1,$$
$$= 1 + 2,$$

e di conseguenza:

$$\nu_1 = 1,$$
$$\nu_2 = 2,$$
$$N = \nu_1 + \nu_2 = 3.$$

2 righe . . . (aa);
3 righe . . . (aaa), (ab), (ac);

Per $n=4$ risulta:

$$\begin{aligned} n &= 1+1+1+1, \\ &= 1+1+2, \\ &= 1+3, \\ &= 2+2, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \Sigma\nu_\mu &= 10. \end{aligned}$$

Dall'ultimo termine bisogna però dedurre il numero delle combinazioni di due oggetti a due a due, cioè:

$$\binom{2}{2} = 1 = n';$$

e però si ottiene:

$$N = \Sigma\nu_\mu - n' = 10 - 1 = 9.$$

Per $n=5$ verrebbe:

$$\begin{aligned} n &= 1+1+1+1+1, \\ &= 1+1+1+2, \\ &= 1+1+3, \\ &= 1+4, \\ &= 1+2+2, \\ &= 2+3, \end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 6. \end{aligned}$$

Ma dal quinto termine bisogna nuovamente dedurre $\binom{2}{2}$, cioè uno, e però si ottiene:

$$N = \Sigma\nu_\mu - n' = 20 - 1 = 19.$$

Per $n=6$ finalmente bisogna scrivere:

$$\begin{aligned} n &= 1+1+1+1+1+1, \\ &= 1+1+1+1+2, \\ &= 1+1+1+3, \\ &= 1+1+4, \\ &= 1+1+2+2, \\ &= 1+5, \\ &= 1+2+3, \\ &= 2+2+2, \\ &= 2+4, \\ &= 3+3; \end{aligned}$$

risulta di qui:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 5, \\ \nu_7 &= 6, \\ \nu_8 &= 8, \\ \nu_9 &= 8, \\ \nu_{10} &= 9. \end{aligned}$$

4 righe . . . $(aaaa)$, (aab), (aac), (ad), (ae), (af), (bb), (bc), (cc) [1];

5 righe . . . $(aaaaa)$, $(aaab)$, $(aaac)$, (aad), (aae), (aaf), (ag), (ah), (ai), (al), (abb), (abc), (acc), (bd), (be), (bf), (cd), (ce), (cf);

6 righe . . . $(aaaaaa)$, $(aaaab)$, $(aaaac)$, $(aaad)$, $(aaae)$, $(aaaf)$, (aag), (aah), (aai), (aal), $(aabb)$, $(aabc)$, $(aacc)$, (am), (an), (ao), (ap), (aq), (abd), (abe), (abf), (acd), (ace), (acf), (bbb), (bbc), (bcc), (ccc), (dd), (ee), (ff), (de), (df), (ef), (bg), (bh), (bi), (bl), (cg), (ch), (ci), (cl).

Sicchè, riunendo le soluzioni (indipendenti) trovate per il caso del conduttore unico con quelle che incontriamo ora, si otterrà lo specchietto qui appresso:

Numero delle righe contenute nello spettro	Soluzioni del problema		
	Conduttore unico	Sistema di conduttori	Numero totale
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6
4	4	9	13
5	5	19	24
6	6	42	48

E però l'indeterminazione cresce, e cresce molto rapidamente, col numero delle righe che si vogliono emesse dal modello.

Riassumendo dunque sembra fatica vana, nella massima parte dei casi, il tentar di stabilire qualche resultato su la possibile struttura di atomi materiali, con *la semplice considerazione* degli spettri corrispondenti.

La cosa è tanto più vera per il fatto che un computo di costanti fa riconoscere

---

Si noti adesso che dal quinto termine bisogna togliere:

$$\binom{2}{2} = 1,$$

dall'ottavo:

$$4\binom{2}{2} = 4,$$

e dal decimo:

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Viene dunque:

$$n' = 1 + 4 + 3 = 8,$$

e da ultimo:

$$N = \Sigma \nu_{\mu} - n' = 50 - 8 = 42.$$

[1] I sistemi corrispondenti a spettri di due, tre e quattro righe sono rappresentati nelle ultime figure della tavola 1.

subito come il problema rimanga indoterminato, quando anche si assegnino i rapporti delle lunghezze d'onda [1].

§ 4. **Un possibile indirizzo dell'analisi spettrale.** — Una volta dimostrati i teoremi dei paragrafi precedenti, si vede subito quale sia la strada, che conviene battere, quando, da uno spettro osservato, si voglia ricavare qualche indizio su la natura del complesso vibrante.

Bisognerà anzitutto procurare di riconoscere se il sistema, che si considera, comprenda un solo conduttore o invece ne abbia parecchi, e ricercare in seguito la forma dei singoli elementi. Per questa via l'indeterminazione del problema risulta infatti sensibilmente diminuita.

Se, per esempio, lo spettro proposto ha sei righe, e, con qualche artifizio sperimentale, si riesce a stabilire che il sistema emittente contiene due conduttori a tre oscillazioni, la difficoltà di determinare la forma di ciascuno (e quindi dell'intero complesso) diventerà di gran lunga minore, che non sarebbe stata da principio. In luogo di *48* casi possibili ne resteranno infatti *3* soli superstiti per ogni elemento.

---

(1) Sia dato, per fare un caso semplice, un conduttore del tipo *b* (Tav. I) e si supponga che in esso i due fili e le tre capacità siano uguali fra loro.

I periodi saranno forniti senz'altro (Memoria citata, § 4) dalle formole:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}};$$

essi hanno dunque un rapporto bene determinato.

Malgrado questo lo stesso spettro si può anche ottenere, ad esempio, dal sistema (*aa*). Supposti uguali fra loro, anche nel caso presente, i fili e le capacità, verrà subito (Memoria citata, § 15):

$$T_1' = 2\pi\sqrt{\frac{(\lambda+\mu)\gamma}{2}},$$

$$T_2' = 2\pi\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)\gamma}{2}}.$$

La congruenza degli spettri si ottiene quando siano soddisfatte le condizioni:

$$2LC = (\lambda+\mu)\gamma,$$

e: (*)

$$\frac{2}{3}LC = (\lambda-\mu)\gamma,$$

dalle quali risulta anzitutto:

$$\frac{4}{3}LC = \lambda\gamma,$$

e:

$$\frac{2}{3}LC = \mu\gamma,$$

e, dividendo membro a membro:

(*a*) $$\mu = \frac{\lambda}{2}.$$

Portando poi questo valore in una qualunque delle (*) si ricava:

(*b*) $$\lambda\gamma = \frac{4}{3}LC.$$

Non solo dunque i vincoli imposti sono accettabili, ma vi è anzi un sistema semplicemente infinito di soluzioni.

§ 5. **Ricerche di Sir N. Lockyer: linee lunghe e linee brevi.** — Indagini nel senso indicato furono condotte già, se pure senza preconcetto teorico, da molti anni e da varii autori.

In primo luogo, per la data e per l'importanza, conviene citare le belle ricerche di Sir N. Lockyer su le *Linee lunghe e brevi* (¹).

Il Lockyer (²) osservava nelle sue esperienze delle scintille fra elettrodi metallici; e poneva davanti allo spettroscopio una lente, per modo che sopra la fenditura (allargata) si venisse a formare della scintilla una imagine reale.

In queste condizioni (³) " se i poli sono di due diversi elementi si produrranno " tre spettri distinti. Nella parte superiore apparirà una regione ricca del vapore " più basso, nella parte inferiore una regione ricca del vapore più alto, ed una frammezzo ricca nè dell'uno, nè dell'altro. Così abbiamo nello spettro come tre strati, " almeno: e cioè gli spettri del vapore superiore, del vapore inferiore, e della regione " centrale ".

" Si capisce a prima vista, che si produrrà una condizione di cose assai somi- " gliante se invece di una scintilla adopereremo un arco elettrico, nel quale il solo " vapore della sostanza resa incandescente occupi tutto l'intervallo fra i due poli. " Possiamo proiettare l'imagine di un tale arco (*orizzontale*) sopra una fessura ver- " ticale; la quale così ci darà lo spettro di una sezione ad essa perpendicolare....... " il vapore, che si trova lontano dal nucleo dell'arco, dà uno spettro assai più " semplice di quello, che si trova nel nucleo medesimo. Lo spettro del nucleo con- " siste di una grande quantità di linee, le quali vanno scemando di numero: finchè " quello delle regioni più laterali si riduce ad una linea sola (*sic*) ".

Quelle righe, che appartengono alla radiazione di diverse regioni della scintilla o dell'arco, appariscono naturalmente nello spettro *più lunghe* delle altre, che caratterizzano una sola regione in modo particolare.

Il Lockyer osserva in fine, e la cosa deriva con tutta naturalezza da ciò che precede, che le righe *lunghe* si mostrano più facilmente delle altre e in condizioni assai varie.

Da queste esperienze il nostro autore dedusse subito la verisimiglianza della *dissociazione dei così detti elementi*; ma concluse anche all'impossibilità di stabilire la cosa per via di esperienze.

Cito letteralmente (⁴).

" Si può certo ammettere che il calcio una volta formato, sia poi un elemento " o no, costituisce un ente distinto; e per conseguenza, se ci limitiamo a sperimen- " tare sopra di esso, non potremo mai decidere, ancorchè, in avvenire, se ne accer-

---

(¹) Sono riassunte, almeno in parte, negli *Studi di analisi spettrale*, dei quali esiste una traduzione italiana (Milano, F.lli Dumolard, 1878).

Prima del Lockyer lo Stokes (" Phil. Trans. ", CLII, 1862), osservando direttamente una scintilla elettrica, con lo spettroscopio privo di fenditura, aveva notato che le righe metalliche si distinguevano da quelle dell'aria, perchè apparivano solo a piccola distanza dalle punte degli elettrodi, mentre le altre attraversavano lo spettro in tutta la larghezza.

(²) L. c., Capitolo II, 42 e Capitolo V, 132.

(³) L. c., 46.

(⁴) L. c., 182.

“ tasse la dissociazione, se la temperatura produce una forma più semplice, una “ condizione più atomica della medesima cosa, oppure se la sostanza si decompone “ effettivamente in $X+Y$; e ciò perchè, nè X nè Y potranno mai variare di pro- “ porzione „.

Vale la pena di considerare un poco da vicino codesto ragionamento, perchè in realtà, sebbene appaia limpido e piano, esso è in disaccordo con i resultati più semplici e più sicuri della teoria.

Ho stabilito nella Memoria più volte citata (§ 18) che se si considera un sistema di a conduttori, e le caratteristiche di questi sono date sotto la forma:

$$\mathfrak{M}_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1 \,.\, 2 \dots a)$$

la caratteristica del sistema complessivo potrà scriversi simbolicamente:

$$\mathfrak{M}_1 \,.\, \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_a + \Sigma K_{\mu\nu,\mu'\nu'} M_{\mu\nu} M_{\mu'\nu'} = 0.$$

Se uno dei conduttori, per esempio il conduttore $\mathfrak{M}_\alpha$, venisse a separarsi dal sistema, si otterrebbe subito, come nuova caratteristica:

$$\mathfrak{M}_\alpha \left\{ \mathfrak{M}_1 \,.\, \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_{\alpha-1} \,.\, \mathfrak{M}_{\alpha+1} \dots \mathfrak{M}_a + \Sigma K_{\mu\nu,\mu'\nu'} M_{\mu\nu} M_{\mu'\nu'} \right\} = 0,$$

essendo adesso le μ, ν, μ', ν' soggette alla restrizione di non poter mai assumere i valori proprii dei fili contenuti nell'α-esimo conduttore.

A parole: per il solo fatto che l'elemento α è uscito dal sistema, *tutte* le righe dello spettro appariranno spostate.

Non è vero dunque che l'esperienza non sia in caso di decidere se il calcio o un altro metallo si dissocia nella scintilla elettrica; anzi le fotografie ottenute dal Lockyer, mostrando le linee (lunghe o brevi) perfettamente diritte, provano con tutta sicurezza che, nelle condizioni delle sue esperienze, la dissociazione *non* è avvenuta.

§ 6. **Ricerche di Sir N. Lockyer: linee basiche**. — Il Lockyer, dalle sue osservazioni su le linee lunghe e le linee brevi, volle dedurre anche un'altra conseguenza, che, quando fosse confermata, avrebbe un'importanza eccezionale.

Se, per esempio, studiando (¹) gli spettri del calcio e dello stronzio incontrava una stessa linea, ma lunga nel primo e breve nel secondo, questa veniva da lui attribuita ad una impurità (tracce di calcio), almeno nel caso in cui apparissero, con quelle dello stronzio, anche le righe più lunghe dello spettro del calcio.

Nel caso opposto restavano due soluzioni possibili. O la riga apparteneva ad un terzo elemento, o era veramente comune al *Ca* e allo *Sr*, derivando da una porzione, che si ritroverebbe in entrambi gli atomi.

Ma la prima ipotesi si poteva scartare facilmente col confronto degli altri spettri, e in particolare di quelli proprii dei corpi più affini.

Per questa via il Lockyer fu condotto a ritenere che esistono veramente nella natura delle righe, caratteristiche di più corpi ad un tempo. E le chiamò *linee basiche*.

(¹) H. Kayser, *Handbuch der Spektroscopie*, II, 264, 1902.

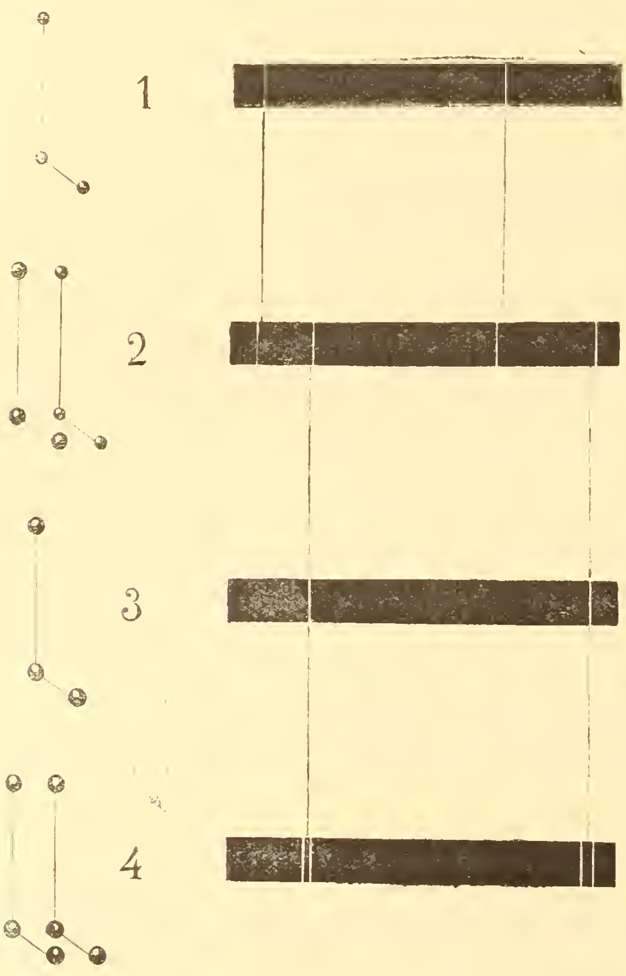
Mentre dunque dalle prime ricerche risultava, secondo il fisico inglese, la complessità degli atomi, da queste ultime egli dedusse la prova che in più atomi si può ripresentare il medesimo sistema vibrante.

Le ricerche ulteriori sembrano, ad ogni modo, avere dimostrato che non vi sono linee basiche [1]; e che le coincidenze osservate dal Lockyer erano dovute, in massima parte, alla piccola dispersione dei suoi apparecchi.

Non è il caso dunque di insistere troppo in proposito. Voglio osservare però che se, con mezzi estremamente delicati di ricerca, si potesse stabilire con tutta sicurezza la coincidenza di una o più linee in spettri di diversa origine, questo resultato sarebbe più contrario che favorevole all'ipotesi del Lockyer.

Perchè, quando uno stesso conduttore (per usare il termine della mia teoria) entrasse a far parte di sistemi differenti, le sue righe caratteristiche non potrebbero in nessun modo conservare la loro posizione.

§ 7. Ricerche di Sir N. Lockyer: dissociazione degli elementi nel sole. — Di ben maggiore peso si devono ritenere, per il nostro argomento, alcune osservazioni fatte dal Lockyer su gli spettri delle protuberanze [2].



Dalle quali osservazioni risulta che in codesti spettri, alle volte, certe righe o serie di righe appariscono spostate, mentre altre righe dello stesso metallo rimangono ferme, o, più spesso, si muovono in senso opposto.

La conclusione del Lockyer (accettata anche dal Kayser), che segua di qui la complessità e la dissociazione degli atomi elementari, è in perfetto accordo con la teoria.

Riporto a proposito, per maggiore chiarezza, una serie di figure, tolte da una mia Nota recente [3].

La prima e la terza di queste figure rappresentano due diversi conduttori con due gradi di libertà, e gli spettri relativi; la figura seconda corrisponde alla

(1) Si veda la bibliografia nel Kayser, l. c., 266.
(2) Kayser, l. c., 271.
(3) A. Garbasso, *Su la teoria dell'analisi spettrale*, " Boltzmann-Festschrift ", Leipz., J. A. Barth, 1904.

riunione di un conduttore *1* con un conduttore *3*; la figura quarta al sistema di due conduttori *3*.

Come si vede subito, lo spettro dell'atomo complesso (1, 3) ha quattro righe, che non coincidono esattamente con quelle dei componenti. Se dunque l'atomo, di cui si tratta, venisse a dissociarsi, il vapore (1 + 3) mostrerebbe certe linee spostate verso il rosso, e certe altre verso il violetto.

§ 8. **Le serie di Kayser e Runge.** — Le osservazioni del Lockyer, di cui ho parlato finora, rispondono in certo modo al primo problema dell'analisi spettrale, da me posto nel paragrafo quarto di questa Memoria; le ricerche di Kayser e Runge (¹) su gli spettri dei corpi semplici contengono, almeno implicitamente, un accenno alla soluzione del secondo problema. Di quello cioè che si riferisce alla struttura dei conduttori elementari dell'atomo.

Kayser e Runge hanno trovato, come è notissimo, che in molti spettri esistono delle serie di righe, definite da una formola del tipo:

$$\text{(A)} \qquad \lambda_n^{-1} = A + Bn^2 + Cn^4$$

dove A, B, C sono quantità costanti, e per n si deve porre la successione dei numeri interi a cominciare dal *3*.

È naturale di pensare che le righe collegate insieme in un modo tanto semplice derivino da un unico conduttore (²); e le esperienze di Kayser e Runge indicano anche una strada facile e piana, per sceverare uno dall'altro i diversi elementi costitutivi dell'atomo.

Gli autori citati osservano infatti a più riprese che talune serie appariscono *invertite* nello spettro, mentre altre non lo sono.

Poichè Kayser e Runge adoperavano come sorgente un arco voltaico, nel quale facevano evaporare i metalli studiati, se ne può dedurre senz'altro che *le diverse serie saranno diversamente distribuite nelle varie regioni dell'arco.*

Una riga infatti apparirà invertita se è emessa in uguale misura dalla parte centrale dell'arco e dal mantello. Sarà brillante se predomina nella prima regione, e manca nella seconda.

§ 9. **Ricerche di F. Lenard su lo spettro dei metalli alcalini nell'arco.** — Nasce da queste risultanze l'opportunità di studiare il comportamento dei metalli nell'arco voltaico; la cosa fu tentata infatti dal Lenard, sebbene in condizioni poco favorevoli, come si vedrà nel seguito, almeno dal punto di vista teorico.

Il Lenard (³) produceva l'arco fra due carboni, dei quali l'inferiore (positivo), foggiato a coppella, conteneva un sale del metallo in esame. Egli studiò in modo

(¹) Kayser, l. c., 503-573.

(²) Se non erro, la cosa fu avvertita la prima volta da me. Si confronti il § 20 della Memoria citata, nel quale è descritto uno speciale conduttore che, almeno in certi casi, fornisce degli spettri costrutti secondo la formola (A).

(³) P. Lenard, *Ueber den elektrischen Bogen und die Spektren der Metalle*, " Ann. der Physik ", (4), XI, 1903.

particolare gli spettri del sodio e del litio, e si valse del metodo classico del Lockyer, proiettando, in altri termini, su la fenditura allargata un'imagine reale dell'arco voltaico.

In questo modo ogni linea viene sostituita naturalmente da un'imagine colorata dell'arco, e si può riconoscere subito quali lunghezze d'onda spettino alle diverso regioni.

Nelle esperienze del Lenard il fenomeno luminoso è costituito da due *fiamme*, che si toccano per un punto del loro mantello. La forma caratteristica si svolge quando l'intensità va oltre ai 15 Amp., altrimenti la fiamma di sopra è piccolissima e serrata verso il carbone. In ogni caso le apparenze luminose sono meglio spiegate quanto più grande è la distanza degli elettrodi.

Sperimentando in questo modo si trova che le fiamme corrispondenti alle linee della serie principale (*Hauptserie*) sono le più lunghe, poi vengono quelle della prima *Nebenserie*, e da ultimo quelle della seconda.

Le esperienze rendono sempre più probabile la complessità degli atomi per il sodio e per il litio; resta però impregiudicato un problema della massima importanza.

Se in un dato punto dell'arco le linee appartenenti ad una serie speciale vengono a mancare, si possono dare della cosa *due* diverse interpretazioni. Può ritenersi in primo luogo che l'atomo sia dissociato, e che il conduttore corrispondente alle righe di cui si tratta non esista più in quella determinata regione. E si può pensare invece, con uguale diritto (fino a prova contraria), che la minore intensità sia dovuta ad uno scotimento di minore ampiezza, senza che cambi d'altra parte, in modo essenziale, la struttura dell'atomo.

Le due ipotesi portano, teoricamente, a conclusioni affatto distinte.

Perchè i periodi caratteristici di un sistema sono determinati con la definizione del sistema medesimo. Il numero e il luogo delle righe nello spettro dipendono, in altre parole, dalle equazioni differenziali o, meglio, dai loro coefficienti.

Invece l'ampiezza dei singoli moti, cioè l'intensità di ciascuna riga, è affare di condizioni iniziali, vale a dire di costanti di integrazione.

Se in un sistema di conduttori un elemento non viene eccitato, certe linee potranno mancare nello spettro, ma quelle che restano non si debbono muovere; se invece l'elemento si allontana, cambieranno le equazioni differenziali, e cambierà di conseguenza ogni periodo.

Ora il metodo sperimentale del Lenard, mentre fornisce, secondo la teoria da me esposta, degli indizii sicuri su l'esistenza dei conduttori costitutivi dell'atomo, non può insegnare nulla sul problema della dissociazione.

Perchè, quando il sistema che si studia fosse decomposto nell'arco, le righe superstiti in un dato punto dovrebbero subire bensì certi spostamenti, e ne verrebbe come conseguenza una deformazione di alcune fra le imagini colorate, che si osservano nello spettroscopio; ma quelle deformazioni, trattandosi di figure che vanno mutando con molta rapidità, non potrebbero certo constatarsi con sicurezza.

§ 10. **Forme e colori dell'arco voltaico fra elettrodi metallici.** — Io mi sono proposto dunque di riprendere, per altra via, lo studio degli spettri metallici ottenuti con l'arco, tenendo conto nel miglior modo dei resultati teorici.

La strada, che si presenta più naturale, quando si voglia decidere della natura delle radiazioni emesse dai varii punti dell'arco, consiste nel proiettare sopra la fenditura dello spettroscopio un'imagine dell'arco medesimo, spostandola poi successivamente da zona a zona.

Ma, perchè un esame di questo genere riesca possibile, sopra tutto se si vuole del fenomeno ottenere una registrazione fotografica, è necessario che l'arco sia relativamente tranquillo, e durevole, e di forma quasi costante.

L'impiego dei carboni a coppella e dei sali di metalli alcalini non è quindi raccomandabile, almeno per lo scopo nostro.

Del resto, usando i carboni come supporto, si introducono nello spettro delle bande, la cui eliminazione dai risultati finali esige un lavoro lungo e penoso; e d'altra parte il litio ed il sodio non sono nemmeno idonei, come sostanze di prova, per le loro caratteristiche spettrali.

Si sa infatti, dai lavori di Kayser e Runge, che negli spettri dei metalli alcalini la quasi totalità delle righe si può ordinare in serie, secondo la formola (A); ma io ho mostrato (come avvertivo più innanzi: paragrafo ottavo, in nota) che le serie si possono attribuire a conduttori estremamente semplici.

Ora appare invece ovvio, volendo ottenere dei fenomeni di scissione, di riferirsi a sistemi di circuiti complessi.

Per quest'ultimo motivo, e per eliminare le bande del carbonio, mi sono deciso a studiare degli archi, prodotti direttamente fra elettrodi metallici.

Prima di descrivere le esperienze da me fatte, dirò qualche cosa della forma e dei colori di questi archi, non avendo trovato quasi nulla in proposito, nemmeno nei libri speciali.

Mi sono servito sempre di una vecchia lanterna di Dubosq, sistema Foucault, alla quale avevo tolto il condensatore, sostituendolo con un semplice diaframma con foro circolare di due centimetri.

Davanti al foro collocai una lente convergente, che dava sopra uno schermo, posto a forse due metri di distanza, una imagine reale dell'arco, rovesciata e ingrandita quattro o cinque volte.

Queste esperienze che, almeno per alcuni metalli, sono estremamente facili, basterebbero già per dimostrare, ad esempio nella scuola, le enormi differenze che corrono fra le radiazioni emesse dai diversi tratti dell'arco.

La forma che si osserva è per solito (*Cu*, *Fe*, *Sn*, *Pb*) (¹) quella della figura 1, Tav. II, si possono cioè distinguere tre regioni particolari e, quasi sempre, bene limitate.

Vi è in primo luogo il tratto immediatamente vicino agli elettrodi, e che chiamerò nel seguito la *regione polare*; questa è la parte più brillante del fenomeno, e le sue tinte richiamano sempre la estremità più rifrangibile dello spettro.

Le regioni polari sono raccordate dall'*arco* propriamente detto. Il quale è pure assai intensamente luminoso, ma molto ricco, di solito, di onde lunghe.

Finalmente, intorno all'arco è avvolta a cartoccio una fiamma o *coda*, col vortice

---

(¹) Le osservazioni devono essere fatte sopra archi un po' lunghi.

nell'elettrodo inferiore (1). Questa emette, per regola, poca luce, di toni freddi, verdognoli o giallastri.

Vi sono però dei corpi, che dànno fenomeni assai diversi da quelli ora descritti.

Il cadmio e lo zinco intanto *non* formano un arco stabile; ma, quando si cerca di staccare gli elettrodi uno dall'altro, si vede partire da ciascuno una fiamma a due tinte, con coda leggerissima (fig. 2, Tav. II).

Le fiamme non sono raccordate, come quelle descritte dal Lenard, ma si tagliano anzi spesso sotto angoli acuti. A questa speciale struttura si deve senza dubbio l'instabilità del fenomeno (2).

Merita ancora una menzione il caso dell'alluminio (3), perchè nel suo arco i rapporti di luminosità fra la coda e le altre regioni risultano invertiti; la coda è invero il tratto più brillante del fenomeno (fig. 3, Tav. II).

Ho esaminato successivamente sette metalli: rame, ferro, alluminio, zinco, cadmio, stagno e piombo, e inoltre dei carboni impregnati (così detti *Effektkohlen*) della marca C. Conradty " *Noris* ". *Niederspannung* (4).

Raccolgo in breve i resultati ottenuti, avvertendo che la differenza di potenziale fu sempre di 110 Volt (continui).

" *Noris* ".

Resistenza in circuito	*Corrente*
5 Ohm.	13-15 Amp.

La regione polare è chiarissima, appena volgente al cilestro, l'arco è di un bel violetto; la coda, molto ampia e ricca, ha una tinta arancione. Il fenomeno appare straordinariamente tranquillo. e la lampada regola anche meglio che coi carboni ordinarii; a volte la coda rimane immobile e conserva la sua forma per parecchi minuti.

Rame.

Resistenza in circuito	*Corrente*
5 Ohm.	11-13 Amp.

La regione polare, assai brillante, ha quella speciale tinta azzurrognola, che si osserva portando un filo di rame umettato di acido nitrico nella fiamma di un becco Bunsen; l'arco invece stacca in un bel colore verde-pistacchio pallido. La coda, leggerissima, instabile, e a volte soffiata orizzontalmente, è rossastra.

(1) Le figure essendo prese dalle imagini reali, osservate su lo schermo, sono naturalmente capovolte.

(2) Si potrebbe pensare che questa, come più generale, sia, in condizioni opportune, la forma propria di tutti gli archi. Però, anche spingendo la corrente fino a 30 Amp., non mi è riuscito di ottenere nè dal rame nè dal ferro niente di simile.

(3) Il metallo da me impiegato conteneva molte impurità, e in particolare del calcio, come dedussi da un'analisi del sig. Rolla, laureando in Chimica, e verificai con lo spettroscopio.

(4) Secondo un'analisi che il Dr. Roncagliolo, primo assistente in questo Istituto di Chimica generale, ebbe la bontà di fare per me, l'anima dei carboni " Noris " contiene quasi esclusivamente del fluoruro di calcio. La cosa è confermata dai risultati spettroscopici (si confronti il § 11°).

Anche per il rame si ha una certa regolarità d'andamento. Ma l'ossido, che ricopre con una crosta nera gli elettrodi, appena la lampada cessa di funzionare impedisce molte volte all'arco di ristabilirsi.

Ferro.

Resistenza in circuito	*Corrente*
5 Ohm.	12-13 Amp.

Bell'arco celeste, con poli appena accennati, più luminosi, ma dello stesso tono. La coda è tranquilla, abbondantissima, di color giallo-cromo carico. La lampada funziona bene solamente se il polo positivo sta in basso; però, invertendo gli uffici degli elettrodi, il fenomeno non cambia di aspetto.

L'arco del ferro è, fra quelli metallici, il più tranquillo, tanto che potrebbe forse trovare qualche applicazione nella pratica.

Alluminio.

Resistenza in circuito	*Corrente*
5 Ohm.	13-14 Amp.

Arco e poli debolmente luminosi e violacei, bensì i poli volgono alle volte verso il carnicino; coda fissa, brillantissima, color verde-pavone [1].

L'ossido, che ricopre gli elettrodi, è anche più isolante di quello del rame, e impedisce il funzionamento regolare della lampada.

Ferro, rame e alluminio (e i primi due in particolare) consumano pochissimo.

Zinco.

Resistenza in circuito	*Corrente*
10 Ohm.	6-10 Amp.

La parte delle fiamme più vicina agli elettrodi è azzurra, la punta è porporina; ma l'aspetto del fenomeno è molto variabile. Da principio, quando gli elettrodi si staccano, il colore azzurro predomina; poi compare il porporino, cominciando dal mezzo. Se la distanza degli elettrodi cresce ancora tutto l'arco si tinge di porpora, e finisce per spegnersi.

A momenti compare intorno alle due fiamme un'aureola leggerissima, instabile, di color giallo-limone.

La bacchetta positiva si consuma rapidissimamente.

Cadmio.

Resistenza in circuito	*Corrente*
10 Ohm.	6-10 Amp.

Il fenomeno è simile in tutti i particolari a quello presentato dallo zinco. Solo le tinte variano, all'azzurro sostituendosi il verde e al porporino un color di mattone. Non vi è traccia d'aureola.

---

[1] La straordinaria ricchezza di raggi ultravioletti rende pericoloso per la vista l'arco dell'alluminio. Un mio allievo, che l'osservò a più riprese, senza occhiali, ne ebbe per due giorni una congiuntivite assai molesta.

L'arco è anche più instabile che per lo zinco, e il consumo (al polo positivo) è anche maggiore: nelle condizioni delle mie esperienze una bacchetta di un cm. di diametro e di parecchi cm. di lunghezza si svaporava in un mezzo minuto.

La forma caratteristica della fig. 2 (Tav. II) si osserva particolarmente bene se il polo positivo sta in alto, e il negativo in basso.

Stagno.

Resistenza in circuito	*Corrente*
10 Ohm.	7-8 Amp.

Anche per lo stagno la regione polare e l'arco mutano spesso di grandezza; le tinte del resto non le differenziano fortemente, passando in modo quasi insensibile da un color malva a un color di lavanda. L'arco è tumultuoso e instabile; la coda, che si svolge ad intervalli, ha un bel tono caldo, fra l'arancio e il rosso-rame.

Il consumo degli elettrodi non è grande.

Piombo.

Resistenza in circuito	*Corrente*
10 Ohm.	8-12 Amp.

Arco irregolare, instabile, e come per esplosioni successive, non dissimile da quello dello stagno; la coda, più leggera, ha anche una tinta più fredda.

L'elettrodo positivo consuma moltissimo, poco meno che nel caso del cadmio.

Riassumendo le osservazioni che precedono, risulta chiaramente come lo zinco e il cadmio, lo stagno e il piombo non siano adatti per una ricerca, nella quale si richiede una certa stabilità di apparenze. Mi sono dunque limitato nel seguito allo studio del rame, del ferro, dell'alluminio, e dei carboni " *Noris* „.

§ 11. **Spettri emessi dalle varie regioni dell'arco.** — Ho stabilito nel paragrafo quinto che il problema della dissociazione degli atomi si risolve solamente con lo studio delle posizioni caratteristiche per le singole righe; nel nono paragrafo poi ho fatto vedere che lo spettroscopio, usato col metodo di Lockyer, non può dare in proposito nessun indizio sicuro. Determina invece con molta agevolezza la esistenza e la varia eccitazione dei singoli conduttori.

Prima di accingermi alle ricerche definitive volli quindi esaminare con lo spettroscopio *obbiettivo* gli spettri del rame, del ferro, dell'alluminio e dei carboni " *Noris* „.

Non è necessario per questo impiegare una lente, e proiettare nel piano della fenditura una imagine reale dell'arco; ma si può procedere in un modo più semplice.

La lampada di Dubosq viene disposta nella sua custodia, e si allontanano tutti gli accessorii del portaluce, compreso il tubo destinato a reggere il condensatore; si colloca poi lo spettroscopio (1) a cinque o sei metri di distanza (sopra un tavolino a piattaforma girevole), e si priva per intero del suo collimatore.

(1) Era un grande spettrofotometro del Krüss con due prismi.

È molto facile, girando un poco la piattaforma del tavolo, disporre l'apparecchio sotto l'incidenza migliore; ogni riga appare in tale caso sostituita da una piccola imagine dell'arco.

In realtà si ritrovano per questa via, e in condizioni particolarmente facili e comode e adatte alle esperienze dimostrative, dei resultati analoghi a quelli del Lockyer e del Lenard.

Ricorderò alcuni esempii in modo speciale.

Per il ramo Kayser e Runge hanno stabilito l'esistenza di due serie di righe, corrispondenti alla formola (A), pure lasciando in disparte tutto il resto dello spettro. Si trova che le imagini appartenenti alle serie *sono prive di coda*, mentre tutte le altre ne sono fornite.

È caratteristico il comportamento delle tre righe brillantissime verdi (fig. 4, Tav. II): mentre le due di sinistra ($\lambda = 5218$ e $\lambda = 5153$), che costituiscono i secondi termini delle serie ($n = 4$), mancano della coda, la terza ($\lambda = 5106$) è provvista di una coda abbondantissima.

Sono pure senza coda le due righe $\lambda = 4063$ e $\lambda = 4023$, che rappresentano i terzi termini ($n = 5$) nelle serie.

In certi istanti la $\lambda = 5153$ e la $\lambda = 4023$ sembrano però leggermente allargate; sarebbe questo un argomento per ritenere, come risulta del resto da altri indizii, che le due serie *non* sono dovute allo stesso conduttore. Sicchè è più ragionevole parlare, come appunto ho fatto, di *due* serie distinte, piuttosto che di *una serie di coppie*.

Per il ferro non ho potuto ricavare nessun risultato sicuro, il mio spettroscopio avendo una dispersione troppo piccola, perchè le righe tanto fitte di questo metallo fornissero delle imagini abbastanza distinte.

L'alluminio da me impiegato mostra di nuovo alcuni fatti interessanti. Mi accontenterò di ricordare che le righe violette H_1 e H_2, presenti nel suo spettro, hanno una coda amplissima (fig. 5, Tav. II), mentre nessun' altra raggiunge, nemmeno da lontano, le loro dimensioni (1).

Finalmente i carboni " *Noris* „ possono servire anch' essi ad una bella esperienza dimostrativa; appaiono infatti nel loro spettro tre righe violette, a comportamento diverso, la mediana delle quali (è la riga $\lambda = 4226$ del calcio) ha il massimo splendore.

Or bene: mentre la prima, la meno rifrangibile, è ridotta nello spettroscopio obbiettivo a due tratti luminosi, corrispondenti alle regioni polari, e la terza presenta l'intero arco, la linea di mezzo è fornita di una coda abbondante.

Se si proiettano su la fenditura dello spettroscopio, rimesso in condizioni normali, le tre regioni, una dopo l'altra, si osservano, in perfetto accordo con ciò che precede, le apparenze delle figure 7, 8 e 9 (Tav. II). La riga mediana, presentandosi anche nella coda, che avvolge a cartoccio l'intero arco e la regione polare, si mostra in 7 invertita.

(1) L'alluminio di cui disponevo essendosi mostrato assai impuro, non lo impiegai nelle ultime esperienze. Il fatto che riporto nel testo fa vedere come l'esame allo spettroscopio, senza fenditura, riveli immediatamente la presenza di corpi estranei.

Ho raccolto su gli spettri or ora descritti una serie di dati interessanti, e mi propongo di pubblicarli in altro luogo. Ora preferisco passare alla descrizione delle esperienze e dei resultati fotografici, che, per lo speciale argomento di questo lavoro, offrono un interesse di gran lunga maggiore.

§ 12. **Posizione delle righe negli spettri delle diverse regioni.** — Per stabilire con esattezza la posizione relativa delle righe, negli spettri delle diverse regioni di un medesimo arco, ho preferito di fotografare direttamente il fenomeno.

Sopra ogni lastra furono prese *due* fotografie nel modo che segue.

Dell'arco si formava un'imagine reale (ingrandita 10 a 15 volte), che veniva a proiettarsi nel piano della doppia fenditura dello spettro-fotometro di Krüss; movendo la lente era facile condurre nella posizione voluta un tratto o l'altro dell'imagine.

Ciò posto si chiudeva una delle fenditure, lasciando l'altra aperta, e, subito davanti a questa, si collocava uno schermo di cartone bianco, con una piccola finestra. La finestra serviva, come si intende, per fissare la posizione dell'imagine.

Fatta una prima fotografia (¹) si chiudeva la fenditura adoperata innanzi, si apriva l'altra, esattamente allo stesso punto, e si spostava del tratto necessario, nel suo piano, lo schermo. Si riconduceva quindi su la finestra l'imagine, nella posizione voluta.

Delle prove che ottenni (e sommano ad un paio di dozzine) riproduco tre sole, nelle ultime figure della tavola II (²).

La tabella fornisce i dati delle esperienze relative.

	" Noris "	Rame	Ferro
Spettro superiore	Arco (Posa 4′)	Poli (Posa 4′)	Arco (Posa 4′)
" inferiore	Coda (Posa 15′)	Arco (Posa 4′)	Coda (Posa 15′)

Come si vede subito certe righe scompaiono, quando si passa da una ad un'altra regione dell'arco, *ma le righe superstiti rimangono ferme.*

Il risultato è simile a quello, che ho dedotto innanzi dalle esperienze del Lockyer su le scintille, e sembra indicare che le temperature, di cui possiamo disporre finora nei nostri laboratorii, non sono sufficienti per la dissociazione degli atomi materiali.

(¹) La macchina stava al posto del cannocchiale. Non è necessario avvertire che un diaframma, inserito fra schermo e fenditura, rimaneva abbassato finchè l'imagine non fosse a suo luogo; e si poteva far cadere d'un colpo, quando sopravvenisse qualche incidente a disturbare l'andamento normale dell'esperienza.

(²) Queste figure sono ricavate dalle negative con un processo fotomeccanico; non si fece naturalmente nessun ritocco.

§ 13. **Conclusioni.** — Raccogliendo adesso tutto ciò che ho esposto nei paragrafi precedenti mi sembra di poter stabilire che:

a) dallo spettro osservato non risulta, o non può risultare, in modo univoco, la struttura degli atomi (§§ 2 e 3);

b) piuttosto conviene cercare in primo luogo se l'atomo abbia per modello un conduttore unico o un sistema di conduttori (§ 4);

c) la seconda ipotesi è la più verisimile (§§ 5, 7, 8, 9 e 11);

d) le serie di Kayser e Runge corrispondono a particolari conduttori (§§ 9 e 11);

e) nella scintilla e nell'arco gli atomi *non* si dissociano, ma in diverse regioni i diversi conduttori sono variamente eccitati (§§ 5 e 12);

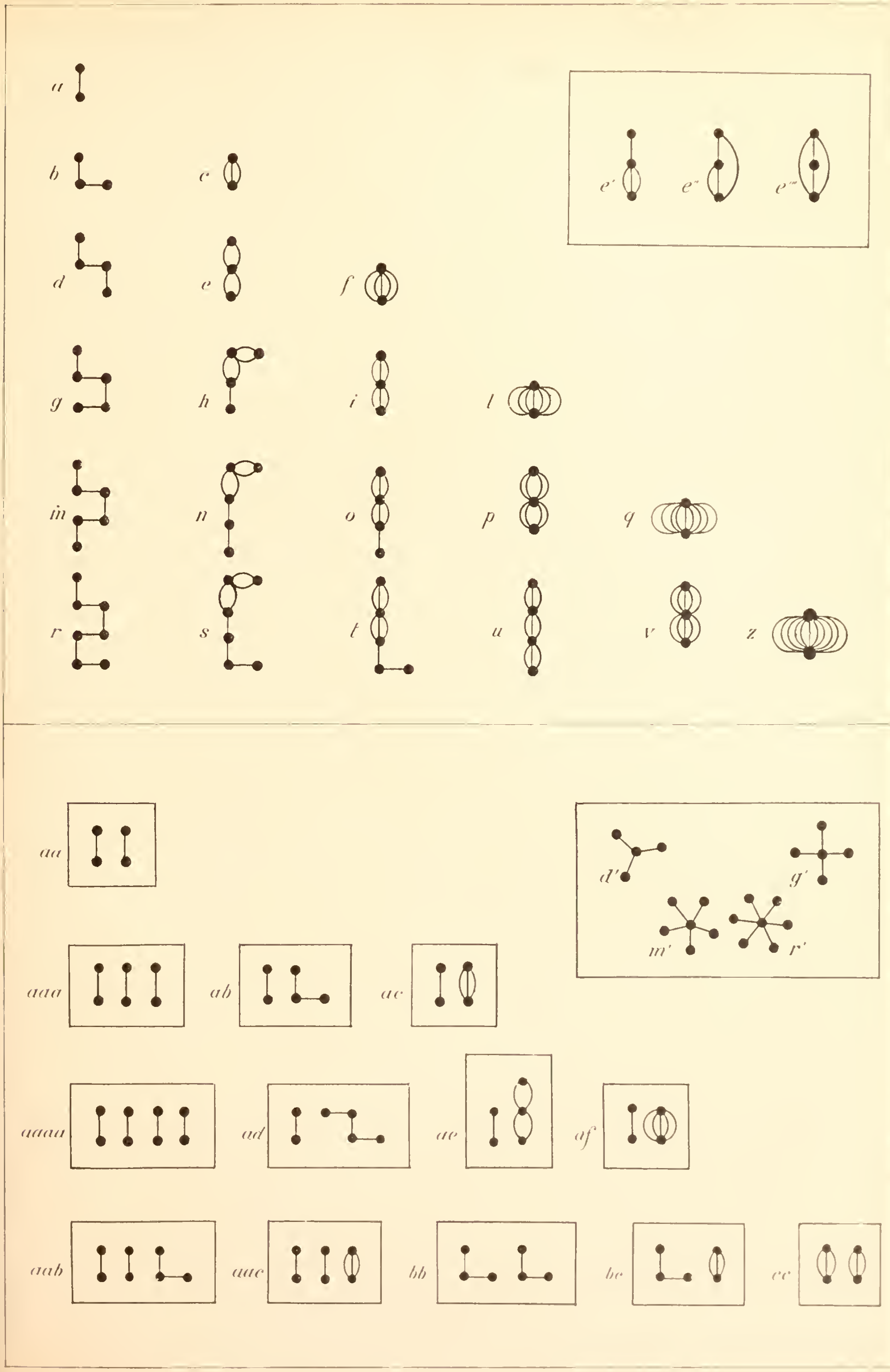
f) non esistono linee basiche, nel senso del Lockyer (§ 6);

g) gli atomi di alcuni metalli sono probabilmente dissociati nel sole.

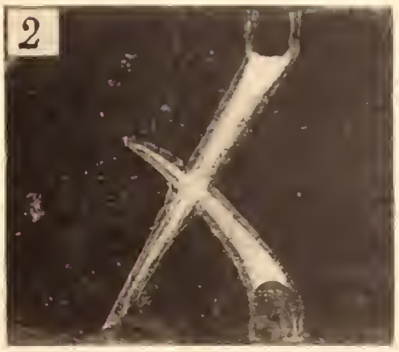
Richiamerò da ultimo ancora una volta che le serie di Kayser e Runge si possono ottenere da un modello molto semplice.

Genova, Istituto Fisico della R. Università, aprile 1904.

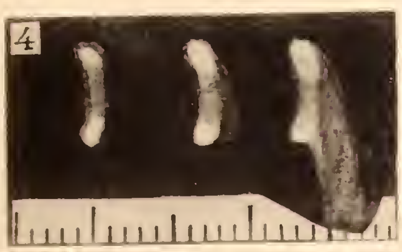
GARBASSO A. Struttura degli atomi - *Tav. I.*

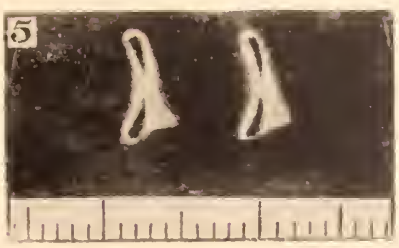


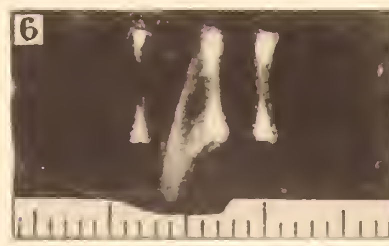

1


2


3


4

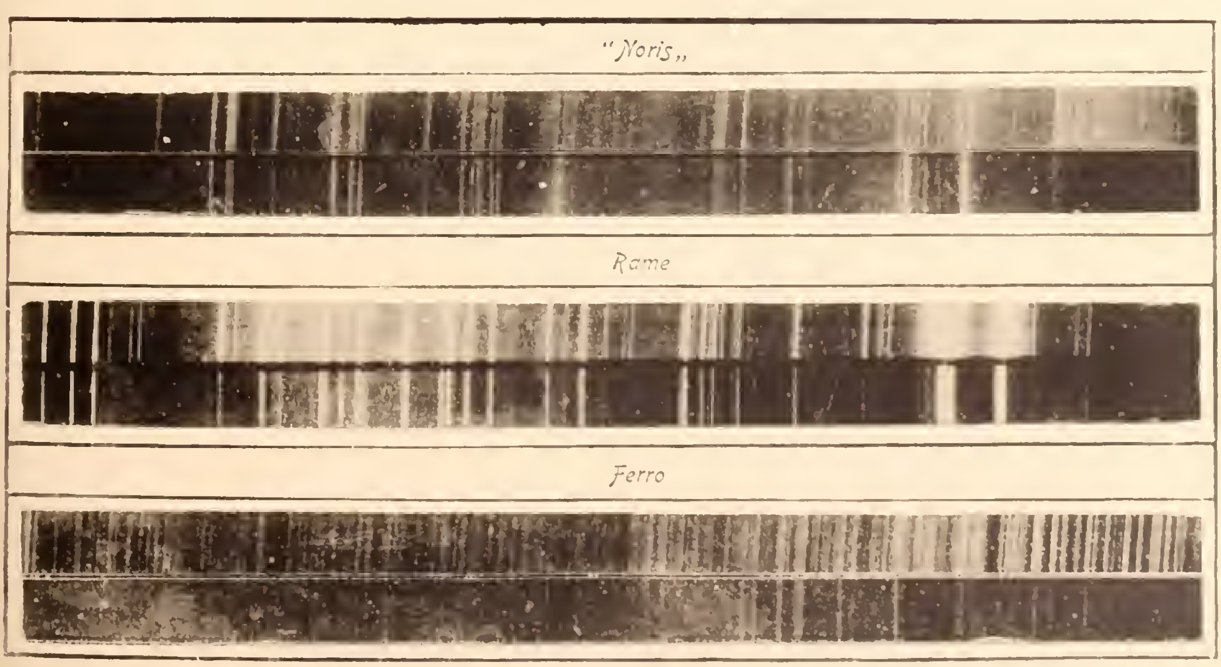

5


6


7


8


9


"Noris"
Rame
Ferro

OSSERVAZIONI ED ESPERIENZE

SUL RICUPERO E SUL RESTAURO

DEI

CODICI DANNEGGIATI DALL'INCENDIO

DELLA

BIBLIOTECA NAZIONALE DI TORINO

MEMORIA I

DEL SOCIO

ICILIO GUARESCHI

Approvata nell'Adunanza del 19 Giugno 1904.

INTRODUZIONE

È questa una Memoria che avrei volentieri intitolata: *La chimica applicata alle biblioteche*, se questo titolo non sembrasse troppo ampolloso e forse anche pretensioso.

Essa non ha certamente per iscopo di mostrare quel poco che posso aver fatto in vantaggio della nostra maggiore Biblioteca; sarebbe una meschina vanità, dalla quale spero di essere immune. Ha invece uno scopo ben più elevato, quello cioè di esporre e far conoscere quali possano essere, a mio avviso, i mezzi di soccorso che il chimico può portare in simili casi; i quali fortunatamente sono assai rari!

È bene premettere subito che buona parte, per non dire tutto, di quanto riguarda il salvataggio, il ricupero ed il restauro di codici, è di competenza del chimico; non è quindi vanità il parlarne. È di competenza del chimico, se non si vuole cadere nell'empirismo o, peggio, nel ciarlatanismo. Ecco perchè in questo lavoro non solamente si parla di salvataggio de' codici, ma principalmente del ricupero, cioè dello sfogliamento de' blocchi carbonizzati, dello spianamento dei fogli, ecc., e si dà un cenno anche del restauro.

Da qualche tempo nel mio laboratorio si erano anche incominciati alcuni lavori di restauro perchè in origine appena costituitasi la Commissione per il ricupero ed il riconoscimento dei codici danneggiati dall'incendio, si era stabilito di impiantare, come annesso alla Biblioteca, un laboratorio pel ricupero e pel restauro: laboratorio al quale, almeno in parte, sarebbe stato adibito il personale che aveva fatto una buona pratica nel mio laboratorio. Questa era l'idea dominante poco dopo il disastro dell'incendio. Così si avrebbe avuto un personale adatto, ed anche economicamente conveniente, che in tempo relativamente breve avrebbe potuto eseguire il ricupero e in parte anche il restauro delle opere principali. Ma.....

In questo lavoro di poco più che quattro mesi nel mio laboratorio non solo si sono messi in istato di perfetta conservazione tutti i codici e frammenti consegnati, ma se ne sono aperti, sfogliati, spianati ed in parte restaurati moltissimi, come potrà vedersi in questa Memoria.

La chimica in questo genere di lavori è la scienza che può arrecare maggiore sussidio. Sino dal 1815 H. Davy, a proposito delle sue ricerche sui papiri di Ercolano, scriveva queste memorabili parole:

" In questa comunicazione, mi farò un onore di esporre alla Società Reale un resoconto di quanto ho potuto fare a questo proposito: cioè, dapprima, un breve accenno ai miei primi esperimenti fatti in Inghilterra su frammenti di papiri, esperimenti che mi indussero a credere che la chimica può essere di considerevole aiuto nell'opera di svolgere i manoscritti: e in seguito, una descrizione dei rotoli trovati nel Museo di Napoli e di alcune esperienze analitiche fatte su di essi " (1).

Il 23 ottobre 1731 bruciò nel *British Museum*, la piccola ma preziosa biblioteca cottoniana (lasciata da Sir Robert Cotton). Dei 958 manoscritti preziosi ne furono distrutti completamente 114 e ne restarono guasti 98. Di questi alcuni furono subito restaurati e i codici pergamenacei alterati dal calore furono conservati per lunghi anni. Nel 1824 i signori Forshall e Madden, conservatori dei manoscritti al *British Museum*, riuscirono a sfogliare e restaurare anche questi 98 manoscritti da tanto tempo conservati (2).

Non ho però potuto trovare la descrizione di quei codici danneggiati, e dei modi tenuti per renderli ancora leggibili. Il fatto però che tutti i 98 furono restaurati indica che in complesso non erano profondamente alterati.

Ciò che ha rovinato specialmente i codici pergamenacei è stata l'azione dell'acqua gettata sui libri in via di combustione. Mentre nel caso del libro cartaceo il fuoco subito si spegne coll'acqua e se il libro è rapidamente asciugato può restare intatta la parte non bruciata, invece nel caso del libro in pergamena la parte non bruciata ma portata a temperatura anche solamente da 200° a 250° se si raffredda rapidamente con acqua rimane contratta in modo che più non si distende.

Essendochè questi libri in pergamena nelle grandi biblioteche sono sempre in quantità molto minore dei cartacei, e spesso, specialmente per le ricche miniature, sono preziosissimi, sarebbe bene tenerli con cura tutta speciale, non solamente in luoghi appartati e sicuri (però di facile accesso) ma anche messi in maniera che, dato il caso di incendio, lo si potesse spegnere senza bisogno di gettare acqua sui libri brucianti. Innanzi tutto si dovrebbe far uso di scaffali incombustibili; e questa sarebbe già una delle precipue cause per evitare l'incendio. Dato il caso di incendio questo dovrebbe spegnersi, anzichè coll'acqua, con gas incombustibili od in altri modi, come si fa nei luoghi ove sono raccolte materie molto infiammabili, quali i petrolì, ecc.

---

(1) *The collected Works*, VI, p. 161.

(2) V. Chilovi, *Per la Biblioteca di Torino*, " Nuova Antologia ", 1904, aprile, p. 697.

Ora si conoscono non pochi processi chimici coi quali si possono rendere incombustibili il legno, le tele, le tappezzerie, ecc. Già da molti anni ne' teatri, ne' bastimenti, ecc. molti oggetti sono resi incombustibili o almeno resistenti al fuoco con procedimenti chimici. Perchè non si è mai fatto nulla in questo senso nelle nostre Biblioteche, ove i vecchi scaffali in legno in parte tarlato sono facilissima preda del fuoco? Una delle sostanze che in molti casi potrebbe ed avrebbe potuto servire è l'*amianto*, il quale può usarsi sotto forma di fogli sottili come la carta, o di cartone o anche in pasta come pittura. L'amianto sotto forma di pasta molle per pittura si utilizza ora molto, specialmente in Inghilterra, su vasta scala: appena appena diminuisce la pieghevolezza e la flessibilità dei tessuti ai quali si applica. In Inghilterra le Compagnie di assicurazione contro gli incendi accondiscendono ad una riduzione del 38 % sui prezzi correnti, per le costruzioni in cui si impiega la pittura di amianto (1). Nei nostri laboratori di chimica facciamo molto uso dell'amianto. L'Italia è ricca di miniere di amianto (che è un silicato misto di magnesio, ferro, ecc); uno de' migliori è quello della Valtellina (2). Ottimo amianto abbiamo anche noi in Piemonte.

Tra noi purtroppo non si è mai pensato di applicare i metodi chimici per rendere refrattarie al fuoco le varie sostanze, nelle Biblioteche. La R. Marina e la Direzione generale delle Antichità e Belle Arti, hanno applicato da qualche tempo il processo di immunizzazione inventato da Alberto Issel (3).

Data l'enorme contrazione che subisce la pergamena per l'azione del calore e peggio per l'azione dell'acqua insieme, è possibile far tornare i fogli alle dimensioni di prima? In alcuni casi sì, in molti no. Sarà possibile quando la contrazione non è molto notevole, la temperatura subìta dalla pergamena non molto alta (circa 100° a 125°) e a condizione che quando era molto calda non abbia sentito l'azione dell'acqua; sarà invece impossibile quando si avranno le condizioni opposte alle precedenti.

Vedremo più avanti che quando la contrazione ha raggiunto un certo limite, non vi è più mezzo, almeno io così penso, per ricondurre il foglio alle dimensioni di prima.

Io ho fatto a questo proposito numerose serie di osservazioni ed esperienze, che qui non posso altro che brevemente accennare, riserbandomi di esporle con dati analitici in una seconda Memoria.

Prima di discorrere di queste osservazioni ed esperienze fatte sulle pergamene antiche e moderne sarà bene che io dia un cenno di ciò che si è fatto pel salvataggio e di ciò che potrebbe dirsi la *chimica delle pergamene*, tanto più che nei comuni trattati si trova ben poco o nulla a questo proposito.

Mi invogliai a scrivere su questo argomento importante quando mi accorsi che nella letteratura chimica non esistevano descrizioni dei processi seguiti da chimici in casi analoghi, come pure scarsissime notizie trovai sulle pergamene, sugli inchiostri e anche sui colori usati dagli antichi.

---

(1) Si vegga l'articolo Incombustibili Sostanze, nella mia *Nuova Enciclopedia di Chimica scientifica, tecnologica ed industriale*, 1903, vol. VII, pag. 1041.

(2) *Nuova Encicl. chimica*, III, p. 935.

(3) G. Biagi, *La morale dell'incendio di Torino* (" Nuova Antologia ", 16 marzo 1904). Delle giuste considerazioni si trovano in questo scritto.

Nessuno di coloro a cui ho chiesto se conoscessero altri casi precedenti simili al nostro, mi seppe dare notizie in proposito; nessuno seppe dirmi se e quali chimici hanno prestato l'opera loro in tali occasioni! Anche nella bibliografia chimica non ho trovato nulla. Nessuno di coloro, chimici e non chimici e anche di professione restauratori, che visitarono le sale del mio laboratorio ove si facevano i lavori, aveva mai lavorato o visto a lavorare su codici pergamenacei in parte bruciati o altrimenti danneggiati dal fuoco e dall'acqua.

Pensai allora che un lavoro come quello che ideavo di fare, basato su osservazioni ed esperienze mie, poteva riuscire utile assai in questa ed in altre purtroppo infauste circostanze. Mi ci invogliai pure quando vidi un grande chimico come Humphry Davy non sdegnare di occuparsi dello studio dei colori usati dagli antichi e dell'esame dei papiri trovati ad Ercolano (1).

È bene che io dica in quale senso intendo, e credo debbano intendersi, le parole salvataggio, ricupero e restauro.

Per *salvataggio* (parola proprio brutta, ma espressiva) si intendano quelle operazioni che valgono a salvare il materiale non completamente distrutto dall'incendio, disseccarlo, disinfettarlo se occorre, e ridurlo nello stato da potersi conservare anche lungo tempo.

Per *ricupero* si intendano quelle operazioni colle quali si trattano i codici o frammenti di codici carbonizzati o altrimenti danneggiati, in maniera da ricuperare i fogli e renderli leggibili.

Per *restauro* poi si deve intendere tutte quelle operazioni che valgono a ristabilire in buono stato i fogli o le miniature che non lo fossero e ridurli per quanto è possibile allo stato di prima.

Dividerò questa Memoria nei seguenti capitoli:

I. *Ricupero dei codici pergamenacei. — Materiale studiato.*

II. *Ricerche sulla pergamena moderna e antica.*

1) Cenno storico — composizione;

2) Uso della camera umida, spianamento dei fogli e prove con soluzioni saline — prove di restauro — descrizione di alcuni codici danneggiati e in gran parte ricuperati;

3) Ricerche sulla contrazione della pergamena per l'azione del calore e dell'acqua.

III. *Ricerche sui colori usati dagli antichi.*

Nella mia raccolta di documenti per la *Storia della Chimica,* più ampiamente riporterò le esperienze fatte sulla pergamena e sui colori; e forse anche sugli inchiostri.

---

(1) *Some experiments and observations on the colours used in painting by the ancients,* " Phil. Trans. „ 1815, e *Some observations and experiments on the Papyri found in the ruins of Herculaneum,* in " Phil. Trans. „, 1821, datato da Roma, 12 febbr. 1819. Questi due magnifici lavori trovansi riuniti in *The collected Works* of H. Davy, vol. VI, pag. 130 a 178.

I.

Ricupero dei codici pergamenacei. — Materiale studiato.

Ed anzi tutto, farò una breve storia di quanto si è fatto nel mio laboratorio per disseccare e disinfettare i codici e frammenti di codici, poi distaccare i fogli e spianarli, onde consegnarli poi per i lavori di restauro.

Le prime esperienze fatte riguardano il modo col quale poter distaccare i fogli dei codici in parte bruciati, senza, per quanto era possibile, alterare le miniature e le lettere colorate.

Il giorno 27 gennaio 1904 fui invitato da S. E. il Sotto-segretario di Stato per l'Istruzione Pubblica, onorevole Em. Pinchia, ad esaminare parte del materiale rimasto molto danneggiato dall'incendio della Biblioteca Nazionale di Torino, avvenuto nella notte dal 25 al 26 Gennaio, per vedere se era possibile ricuperarne almeno una parte, e nello stesso giorno fu costituita una speciale Commissione per il ricupero ed il riconoscimento dei codici danneggiati dall'incendio.

Nelle ore antimeridiane dello stesso giorno mi fu consegnato un frammento di codice carbonizzato, in pessimo stato, per fare, come suol dirsi, esperienze *in anima vili*; questo frammento fu poi riconosciuto per una specie di dizionario latino, molto abbreviato. Tolta colla lima o col raschiatoio la parte del carbone che poteva distaccarsi e visto nei primi tentativi che il libro non era alluminato, esso fu immerso nell'acqua tiepida a 30-35° e così lentamente poterono separarsi in circa 24 ore tutti i fogli, che si conservano ora ben spianati e leggibili.

Nello stesso giorno mi furono consegnati altri due frammenti di codici pergamenacei attaccati a due pezzi di tavole di legno in gran parte bruciate. I due frammenti, tutto all'intorno carbonizzati e duri come pietra, furono trattati come il precedente e lentamente si andarono staccando i fogli. Ma la difficoltà era grande, perchè in una parte del codice la pergamena era come gelatinizzata ed i fogli attaccati saldamente. Difficoltà questa, che era resa più grande dall'aver riconosciuto che uno di questi frammenti apparteneva ad un codice in pergamena fina con due o tre belle miniature conservate assai bene, e l'altro in pergamena più ordinaria aveva lettere assai ben miniate. Del primo i colori erano molto resistenti, del secondo meno. Il primo era un codice latino appartenuto a Casa Savoia. Mano a mano che i fogli si distaccavano, venivano asciugati fra carta e messi l'uno sull'altro, si lasciavano a sè cambiando di tratto in tratto la carta fra i fogli.

Feci varî tentativi con soluzioni diluite di acido acetico (1 %), di carbonato di sodio (0,5 a 1 %), di alcool diluito, ecc. per vedere se i fogli si staccavano meglio, ma non riuscii a miglior esito. In questi primi tre codici nè in molti altri, però, l'inchiostro non fu alterato. Ad ogni modo il lavoro di distacco era abbastanza avanzato perchè le pagine, fra cui anche le miniate, potessero essere vedute il giorno 29 da S. E. il Ministro della P. I., il quale riconobbe che il risultato era assai soddisfacente. In quello stesso giorno mi fu portato in Laboratorio un grosso blocco nero, lungo almeno 30 cm. e largo circa 16, che aveva l'aspetto di un pezzo di carbon fossile, arrotondato da ogni lato e nella parte superiore per un buon terzo completamente bruciato, al punto che, come poi si vide in seguito, tutti i primi fogli erano scomparsi, e molti altri non erano che un decimo della superficie delle altre pagine meno danneggiate. Questo blocco, accuratamente pulito, fu trattato come i primi, tanto più che da un saggio si vide non essere un libro miniato. La pergamena però era di qualità non ordinaria come pergamena, ma assai spessa, ed i fogli erano attaccati così che assai difficilmente si staccavano anche coll'acqua tiepida. Questo grosso codice fu riconosciuto per una bibbia spagnuola scritta con caratteri ebraici ed alcune annotazioni, ma il tutto di poca importanza, del che potè accertarsi il mio amico, Prof. Italo Pizzi, che di ebraico s'intende benissimo.

Il giorno 7 febbraio i fogli dei quattro frammenti accennati erano tutti staccati. Già nei giorni 5 e 6 si era notato un odore sgradevole che si sviluppava dai fogli della bibbia, alcuni dei quali si attaccavano alla carta sugante. La pergamena cominciava ad entrare in putrefazione. Così accadde anche degli altri fogli separati dagli altri ultimi due codici. Allora, feci immergere rapidamente tutti i fogli parte in soluzioni diluite di sublimato corrosivo, parte in acido tannico anch'esso molto diluito, ed altri furono fatti seccare sotto una delle cappe aspiranti del mio Laboratorio. Si arrestò così la putrefazione, ma una buona parte dei fogli erano corrosi o distrutti, tranne il frammento del primo codice che fu completamente salvato ed è ancora in buonissimo stato.

I dottori Francesco Nicola e Rinaldo Carretto fecero alcune preparazioni microscopiche, rinvenendo, naturalmente, i bacteri della putrefazione.

Questo disastro è da attribuirsi al fatto che le pergamene avevano dovuto stare lungo tempo in contatto coll'acqua ed essendo allora la temperatura del Laboratorio, causa la rottura del calorifero, quasi mai superiore a $+12^{\circ}$ i fogli disseccavano assai lentamente e di più si tenevano accumulati gli uni sugli altri, tenuti separati da fogli di carta sugante. Da ciò senza dubbio il rapido sviluppo dei batteri. Farò notare che la pergamena della bibbia ebraica, la prima ad alterarsi per putrefazione, era poco ricca di materie minerali e si comportava come le pergamene più antiche dei secoli X e XII; fatto sta che dopo, quando l'essiccamento si potè fare abbastanza rapidamente, non si svilupparono più i batteri in nessun modo.

I numerosi fogli distaccati mediante l'acqua tiepida erano stupendi, le poche miniature assai bene conservate se si eccettua la perdita di un poco di color azzurro. Di questi fogli ne sono rimasti intatti ben pochi; ora non vi sono che i residui corrosi e disfatti dai microbi. Fu un errore mio quello di mettere fra carta e sovrapposti l'uno sull'altro i fogli, i quali in questo modo non potevano disseccarsi che molto lentamente. Ma è errore scusabile dato il momento e le altre circostanze. Errore che però ha avuto il vantaggio di mettere in guardia contro il pericolo a cui era esposto tutto il numeroso materiale che si conservava umido nelle sale della biblioteca. Bisogna far conoscere anche gli errori e non cercare di nasconderli; la verità deve stare al disopra di ogni altra considerazione. Tanto più quando si può trarre buon profitto anche dagli errori.

Il giorno 4 febbraio avevo ricevuto un codice intero tutto carbonizzato esternamente e che da una fessura lasciava scorgere avere almeno il frontispizio alluminato.

Questo codice ora lungo 20-21 cm., largo circa 15-16 cm. e dello spessore di circa 13 cm. Fu fotografato. Nel timore che si danneggiasse colla completa immersione nell'acqua, pensai di cominciare il distacco dalla parte inferiore e dopo tolta parte almeno del carbone esterno colla lima e col raschiatoio, di immergerne, tenendo il blocco sospeso con un sostegno, solamente poche pagine nell'acqua tiepida. Così si riuscì a staccare bene l'ultima pagina con poca scrittura e le altre successive senza bagnare le rimanenti. Si riconobbe questo libro essere un bel romanzo francese del secolo XV di 250 pag. circa numerate in rosso.

Il distacco delle pagine cominciò il giorno dopo che ci accorgemmo del guasto degli altri codici e quindi le precauzioni aumentarono. I fogli appena staccati erano passati per circa 1 minuto in una soluzione acquosa al 0,20 % circa di tannino, poi asciugati con spugna fina, posti fra carta e messi su rete metallica sotto una cappa aspirante del Laboratorio. L'impiego di piccole spugne per asciugare la pagina è utilissimo: pensai a questo ripiego manuale per risparmiare la molta carta asciugante che si doveva adoperare. In queste condizioni tutti i fogli si asciugarono benissimo e nessuno di questi si guastò per putrefazione.

Il disinfettante e la aerazione agirono benissimo. Debbo però subito dire, ad onor del vero, che l'uso del tannino, impiegato allora pel timore di una completa distruzione, non è necessario. La metà dei fogli del grosso codice francese sopraccennato, che non furono trattati col tannino, ma direttamente asciugati su reti metalliche, sotto una cappa, si conservano tuttora benissimo e sono più bianchi e morbidi che non quelli trattati col tannino e colla formaldeide. Ma nel principio, trattandosi di saggi, di tentativi, l'uso di antisettici si imponeva.

Del resto, io non tenevo e non tengo alcun segreto su tutte le prove e tentativi che si facevano e si fanno nel mio Laboratorio, sia per conservare i pezzi in via di putrefazione, sia per staccare i fogli, per renderli morbidi o per spianarli. Il Laboratorio era ed è visitato dai miei colleghi di Torino e di fuori, da chimici e da non chimici e se qualcuno gentilmente mi ha suggerito qualche buona idea, in questo mio lavoro è ricordato: *unicuique suum.*

In questo frattempo, cioè negli ultimi giorni di gennaio e nei primi di febbraio, la maggior parte dei codici membranacei e cartacei erano stati traslocati dalle sale della biblioteca in una grande sala (N. VIII) a pianterreno dell'Università (e nell'antica fabbrica de' tabacchi), con poca luce e scarsa aerazione; e qui erano pure accatastati un immenso numero di frammenti di codici raccolti fra le macerie e ancora umidi o bagnati. L'aver lasciato per molti giorni in cattive condizioni questo materiale, fece sì che la putrefazione delle pergamene si sviluppò in modo straordinario.

Lo sviluppo dei microbi era da prevedersi, ma disgraziatamente mancavano locali adatti per potere effettuare una pronta e completa disseccazione del numeroso materiale avariato; erano momenti di grande confusione e di dolore. Il primo provvedimento da prendersi appena accaduto l'incendio si è quello di mettere il materiale danneggiato all'aria libera su reticolati metallici, o di legno, o di corda, in luogo asciutto e ventilato, in maniera che possa presto asciugarsi completamente. Anche la stagione nel caso nostro era sfavorevole.

Il giorno 7 febbraio la Commissione si recò nel mio Laboratorio per vedere i lavori fattisi su alcuni frammenti di codici. Fu qui che la Commissione per la prima volta potè vedere il guasto prodotto dai microorganismi della putrefazione sui fogli di pergamena che erano già stati distaccati per mezzo dell'acqua; come pure potè osservare che nei fogli disseccati completamente e stati previamente bagnati con soluzione diluita di tannino o di sublimato, si era arrestato il processo putrefattivo e ciò meglio col tannino che in soluzione diluitissima si andava applicando ai fogli di un codice intero. Ma, come si vedrà, questi antisettici non erano sempre necessarî.

Fu in questi primi giorni che si pensò seriamente a prevenire questo guasto sia coll'aerazione e disseccazione, sia coll'uso di qualche antisettico in soluzione diluitissima. Quando il P. Ehrle, accompagnato dalla Commissione, venne l'11 febbraio nel mio Laboratorio, trovò i fogli di un codice che allora si stavano staccando stesi all'aria e non in pacchi, come pure trovò sotto le cappe aspiranti una parte dei fogli, ad asciugarsi in presenza di formaldeide.

Egli restò molto impressionato dal fatto che si era facilmente sviluppata la putrefazione nelle pergamene; notò il modo col quale io lentamente facevo staccare i fogli con immersione parziale del pezzo, ma disse che avrebbe preferito la camera umida come usa in altri casi per codici non bruciati; anche, soggiunse egli, se se ne staccava un foglio solo ogni due o tre giorni. Il giorno dopo io presentai alla Commissione moltissimi fogli già staccati e asciutti; osservai che nei libri che hanno sofferto molto anche all'interno per l'azione del calore e dell'acqua, o del vapor d'acqua insieme, si notano specialmente, fra le altre, due cause della dilatazione od assottigliamento, oppure della contrazione della pergamena: l'una è l'aria interposta od occlusa fra i fogli, la quale quando questi sono rammolliti, li rigonfia; l'altra è l'infossamento profondo, ad ansa, di una parte della pergamena scritta; la parte rimasta a carattere molto più piccolo è come agglutinata o gelatinizzata ed è quindi più difficilmente distaccabile. Quando la pergamena ha subìto un certo grado di calore e per di più fu bagnata quando era ancora calda, si contrae molto e non può più riprendere le dimensioni di prima. Chi dice essere operazione facile quella del distacco dei fogli dimostra di non avere la minima idea di questi lavori e di non esser chimico.

Il fatto materiale in se stesso di essersi prodotta la putrefazione nelle pergamene umide non avrebbe molta importanza, essendo la pergamena formata di materia albuminoide e quindi putrescibile: ma assunse un alto grado di importanza quando, fatta questa osservazione su moltissimi fogli come si vide nel mio Laboratorio, spinse a trovar subito modo di disseccare più rapidamente i fogli e fece sì che la Commissione consigliò di fare subito la separazione di tutti i codici membranacei dai cartacei e di provvedere rapidamente al salvataggio dei codici e frammenti bagnati ancora, pur continuandosi nel mio Laboratorio il lavoro di distacco, trattandosi allora solamente di prove e tentativi, per trovare modo di procedere più in grande in seguito.

Ed infatti nel pomeriggio del giorno 13 la Commissione si riunì nella sala N. VIII e qui erano presenti: il P. Ehrle, il Rettore, i professori Cipolla, Stampini, Renier, Desanctis, Guareschi, il Bibliotecario e il vice-Bibliotecario. Tutti presero parte attiva al lavoro di cernita (che continuò sino a sera) dei codici più o meno danneggiati, di cui alcuni, anzi molti, erano già in via di putrefazione, insieme a cumuli di frammenti quasi tutti alterati. Alcuni erano addirittura disfatti dall'azione dei microbi. Visto lo stato delle cose, la Commissione mi invitò ad accettare tutta questa roba nel mio Laboratorio. Io esitai alquanto ad accettare, non per il lavoro, ma per la grande responsabilità di dover operare con un materiale così abbondante, ed avariato. Ma il P. Ehrle mi incoraggiò colle parole seguenti: " Se questa roba sta qui ancora poco tempo, non si salva più nulla; Ella invece può, operando prestamente, salvarne almeno una parte; responsabilità grave Ella non ha, perchè quando si fa quel che si può e si deve, bisogna restare contenti, non allarmarsi e non badare al resto ".

Allora di questo materiale guasto se ne riempirono due grosse ceste, che furono inviate al mio Laboratorio. Colà i codici ed i frammenti furono subito posti sotto cappe aspiranti, per asciugarli, procurando di dividerli con intromissione di pezzi di legno dolce (canapoli) per facilitare la circolazione dell'aria; metodo comodo ed economico che fu adottato in seguito con vantaggio anche nella Biblioteca, e procurando di arrestare la putrefazione trattando inoltre il detto materiale con poca aldeide formica gasosa. I codici e frammenti furono stesi su reticolati di filo di ferro, in modo che circolasse bene l'aria; metodo usato da me anche prima per asciugare i fogli che si staccavano dal codice francese accennato.

In questo come nei lavori precedenti, e dopo, fui efficacemente coadiuvato dai miei assistenti, e particolarmente dal Dottor Galeazzo Piccinini; e dal 1° inserviente Chiarle Giacomo.

Nel mattino dopo (14 febbraio) sono inviati al Laboratorio altri frammenti e frammentini quasi in poltiglia. Nello stesso mattino vengono nel mio Laboratorio il P. Ehrle ed il bibliotecario, i quali approvano in tutto le pronte disposizioni prese e mi fanno viva premura di accettare quasi tutto l'altro materiale guasto della sala N. VIII e parte di quello che era nella vecchia fabbrica dei Tabacchi in via Po, che andai poi a vedere nel pomeriggio.

Nello stesso giorno 14 febbraio furono mandate circa sei ceste con frammenti, ed il giorno successivo altre tre ceste con codici bruciati ed in parte danneggiati dai batteri. I minuti frammenti erano in istato tale che non potevansi prendere colle mani, ma si doveva fare uso di lunghe pinze in ferro. Il giorno 17 fu mandato un altro cesto con alcuni grossi codici.

Se ne riempirono così sei cappe aspiranti, e quelli meno danneggiati si misero su tavoli o reticolati all'aria, irrorandoli con formalina. Si trovò utile usare dei polverizzatori per far penetrare bene nell'interno la formalina.

La figura della Tavola I può dare una idea dello stato di una delle grandi camere del mio Laboratorio nel momento che si stavano prosciugando e disinfettando i codici sotto una delle cappe.

Alcuni pochissimi saggi sull'uso dell'alcool diluito come mezzo di lavaggio non diedero buoni risultati.

I reticolati metallici, ricoperti o no di carta sugante, si prestano benissimo. Le cappe anche senza accendere il gas, hanno un tiraggio sufficiente, e asciugano regolarmente i diversi pezzi; lentamente o rapidamente secondo che si lasciano chiusi od aperti i camini che servono per l'aspirazione.

Molti dei pezzi carbonizzati si possono almeno in parte raschiare o limare, ma colla massima cura, quando si è quasi certi di non portar via della scrittura, all'esterno per non togliere il carbone catramoso; e allora, quando non sono troppo secchi se ne possono staccare i fogli i quali però rimangono molto raggrinziti e che in seguito bisogna inumidire, stirare e spianare.

Molti codici bagnati, a largo formato, come alcuni ebraici, in causa del catrame, furono aperti con qualche difficoltà in diversi gruppi di fogli fra i quali si interponevano dei grossi canapoli che servivano bene alla circolazione dell'aria e nel tempo stesso si poteva con un piccolo polverizzatore far passare il vapore di formalina in quei punti ove lo si credeva utile. In questo modo anche nella stagione invernale i fogli asciugano più presto che non coll'interporre fra foglio e foglio della carta asciugante, che bisogna rinnovare spesso e si ha quindi una spesa enorme.

La formalina è soluzione acquosa al 40 $^0/_0$ di aldeide formica CH^2O. Pensai all'impiego di questa sostanza, perchè la formaldeide, che per se stessa è gasosa, agisce benissimo come disinfettante, non altera le miniature e si può far agire sul materiale da disinfettare senza bagnarlo tutto. La formaldeide agisce sulle materie albuminoidi dando dei composti stabili. Bisogna però non usarla in eccesso, perchè altrimenti la pergamena rimane dura. Ed invero un certo numero di fogli del codice francese accennato a pag. 7, che per timore della putrefazione furono trattati insieme col tannino, forse con un po' troppo di formaldeide, rimasero induriti e non più tanto facilmente spianabili. Tanto più che la formaldeide agisce anche sul tannino.

Questa aldeide ha un alto potere antisettico. Secondo Trillat ha un potere disinfettante doppio di quello del sublimato. K. Walter, Berlioz e Trillat (1) ne hanno studiata l'azione sul bianco d'ovo, sul siero del sangue, ecc. Soluzioni diluitissime possono servire per conservare le materie alimentari, quali il latte, la carne. Ha una gran forza di penetrazione; se, ad esempio, in un tubo contenente dei pezzetti di pelle, si fa passare una corrente di aria carica di formaldeide, l'aria che esce dall'altra parte del tubo non contiene affatto formaldeide. Le preziose proprietà microbicide della formaldeide furono soggetto di numerose esperienze di Trillat, Schleich, Gottstein, Blum, Vanderlinden, ecc.

In base a questi fatti era dunque giustificato l'uso della formaldeide ed i risultati infatti furono nel caso mio splendidi.

Molti dei codici danneggiati sembravano apparentemente secchi, ma aperti con precauzione, si trovavano bagnati e talora in via di alterazione nell'interno; allora si facevano disseccare trattandoli come fu detto più sopra.

Come ho detto più sopra, la pergamena in molti punti è come agglutinata, per cui è quasi impossibile staccare in quel punto i fogli senza rottura. Tentativi per sciogliere la parte agglutinante con benzene, alcool, ecc. non riuscirono. In molti casi è utile, indispensabile, levare il carbone esterno non solamente colla lima o col raschiatoio ma tagliando addirittura una porzione dell'orlo carbonizzato.

Nel caso di frammenti di codici troppo putrefatti, quasi colanti, e che non si sarebbero potuti essiccare presto, furono immersi in una soluzione alcoolica di fenolo, come il Prof. L. Camerano mi disse che egli usa per pezzi animali in via di putrefazione. Ottenni buoni risultati. Vi ho immerso per qualche tempo dei frammenti di codici che erano come dissi troppo putrefatti; la putrefazione si è arrestata e si sono potute

(1) C. R., T. 115, pag. 290.

salvare quelle parti che non erano corrotte. Usai prima alcool a 95 % e fenolo nella proporzione del 2 %: ma dopo trovai utile l'uso di alcool al 50 % con 2-3 % di fenolo.

Due o tre fogli di un frammento di codice nel quale si erano esaminati i batteri furono immersi in una soluzione acquosa all'1 % di solfofenato di zinco (29 febbr.). Pel confronto si lasciarono all'aria gli altri fogli. Il risultato fu buono. I fogli disinfettati si mantennero benissimo, negli altri la putrefazione continuò sino a che il pezzo non fu completamente disseccato. Non vi è gran vantaggio però sulla soluzione alcoolica di fenolo.

Ma in fondo si è visto che il *rimedio migliore* è la pronta aerazione e disseccazione all'aria e occorrendo in presenza di formalina. Ad esempio, sino dai primi di febbraio alcuni fogli di un codice francese furono lasciati disseccare semplicemente dopo lavatura con acqua ed asciugamento con spugna e su carta all'aria libera sotto le cappe. Essi sono ancora benissimo conservati, come gli altri trattati con disinfettanti.

I guasti osservati nei primi frammenti esaminati pe' primi saggi, erano senza dubbio dovuti al fatto che i fogli erano rimasti troppo tempo umidi, per averli dovuto tenere a lungo in contatto coll'acqua onde staccarli.

Il giorno 15 di febbraio venne nel mio Laboratorio per essere di aiuto in questo lungo e non facile lavoro la signora Serafino-Bonomi, preparatrice nel Museo Zoologico, la quale veramente prestò l'opera sua con intelligenza ed attività. Pochi giorni dopo, il 18 e 20 di febbraio, ebbero incarico di aiutare in questi lavori anche le signorine dottoresse Castagneri e Giani, per le quali pure non ho che parole di encomio.

La signora Serafino-Bonomi tentò l'uso della glicerina, ma inutilmente. Un pezzo frammentario di codice con pergamena durissima, quasi vetrificata in alcuni punti, fu immerso in soluzione al 30 % di glicerina. Dopo alcuni giorni i fogli si staccarono, furono lavati con acqua e seccati sotto cappa con vapori di formalina. Ma però rimasero trasparenti, quasi come carta oliata: non si leggono bene. I fogli non rimangono molli. Si è provato anche con glicerina più o meno concentrata, ma non si ebbero risultati tali da poter raccomandare il metodo. Nella Biblioteca vaticana si raccomanda, quando si tratta di stendere e lisciare i fogli, di usare con gran cautela, la glicerina: non so però se abbiano mai provato con pergamena alterata dal calore.

La glicerina concentrata o diluita potrà servire utilmente per rendere morbide le pelli fresche, ma non credo sia utile usarla per le pergamene, specialmente se alterate dal calore.

I frammenti e pezzi di fogli raccolti in parte fra le macerie e che in origine erano ridotti in parte quasi come poltiglia e che erano assolutamente irriconoscibili, quando furono ben disseccati e disinfettati come fu detto, vennero a poco per volta immersi nell'acqua per alcuni minuti o più, oppure tenuti nella camera umida, poi passati rapidamente in altra acqua sino a che questa non asportasse più materia nera e terrosa, poi si passavano, occorrendo, in soluzione alcoolica al 2 % di fenolo ed infine si facevano asciugare su reti metalliche sotto le cappe. Quando erano appena umidi si comprimevano alquanto su carta in modo che i fogli restavano abbastanza spianati.

In questo modo si potè ricuperare un gran numero di codici diversi e che a prima vista sembravano doversi gettar via.

Da questi frammenti, detti *delle macerie*, siamo così riusciti a separare un numero immenso di fogli, molti dei quali rotti in più parti, altri abbastanza bene conservati; tutti questi fogli e foglietti furono divisi in gruppi secondo le lingue: latina, greca, francese, italiana ed ebraica, poi si sono riuniti i fogli eguali e così con un lavoro lungo e metodico si è riusciti a ricostruire se non de' codici interi dei frammenti di codici sufficienti almeno per essere identificati. Così tra codici quasi interi o a grossi frammenti e questi ricuperati dai frammenti delle macerie ne ho avuto in laboratorio circa 250, dei quali circa 150 latini, 20 greci, 30 francesi, 34 ebraici e 8 italiani fra i quali il Pungilingua e un altro codice del Cavalca.

Si intende che si lavavano con acqua fredda o tiepida solamente quei frammenti staccati, sporchi, raccolti fra le macerie e che, per quanto era possibile accorgersi, non contenevano miniature. Anche di queste se ne sono ritrovate alcune abbastanza belle.

Una parte di questi frammenti, dai quali molto probabilmente non si potrebbero ricavare che dei frantumi di fogli più o meno leggibili, li ho conservati in istato ben secco.

Ho fatto fotografare un cumulo di questi frammenti disseccati, prima di trattarli con acqua.

Fra questi frammenti detti *delle macerie* si rinvennero dodici fogli di un codice greco importantissimo, dicesi, cioè un codice greco dei salmi in lettera onciale del sec. VIII, il cui complemento fu poi trovato fra i codici consegnati al laboratorio di materia medica. Furono trovati inoltre moltissimi fogli di un codice italiano bobbiense, del Cavalca, del sec. X, con palinsesti, e del quale feci fotografare un foglio prima e dopo l'operazione dello spianamento, come pure molti fogli di un codice francese molto importante, ancora inedito, *Roman de Floriamont*, del *Bovo d'Antona*, così pure del *Roman de la Rose*, del *Roman de Godefroy de Bouillon*, ed altri che non è qui il caso di enumerare.

II.

Ricerche sulle pergamene moderne e antiche.

1) *Cenno storico — Composizione.*

La pergamena propriamente detta ora si prepara quasi solamente colla pelle di montone o di pecora, da ciò anche il nome *ab antico* di *cartapecora*; era preparata anche colla pelle di capra, ma è più grossolana. La *pergamena vergine*, denominata in Inghilterra anche *vellum*, è più fina della precedente ed è preparata colla pelle di capretto o di agnello nati morti. Quella più fina detta velino si prepara colla pelle di giovani vitelli, meglio se nati morti. Le pelli di asino, di bue, di vitello, ecc., servono per fare la pergamena da usarsi per tamburi, timpani, ecc. La pergamena di pelle di porco serve per fare stacci, crivelli, ecc. La pergamena pei libri liturgici era un tempo quasi sempre preparata con pelle di porco (1).

1) Girardin, *Leçons de chimie élém. appl. aux arts ind.*, V, p. 26.

La pergamena viene ora ricoperta generalmente su una faccia con della creta, o con un apparecchio composto da colla di pelle di guanto e salda d'amido che la rende lucida e permette di poterci scriver sopra (1).

Io ne ho trovato nel commercio di quella che in una faccia era ricoperta da uno strato sottile di biacca ossia carbonato basico di piombo. Questa pergamena anneriva subito coll'acido solfidrico.

Già da molti secoli prima dell'èra nostra si usava la pelle degli animali per la scrittura. I Persiani usarono de' nastri di cuoio: gli Ebrei presentarono a Tolomeo una copia delle Sacre Scritture su pelli conciate.

La vera pergamena, quale si usa ancora, pare sia stata fabbricata per la prima volta a Pergamo, nel II secolo a. C.; da ciò il nome di *pergaminum* o *pergamina charta*. L'uso della pergamena per scrivere o disegnare sarebbe stato inventato da Eumene II re di Pergamo.

Secondo Varrone essendo nata grande discordia fra i sapienti di Pergamo e di Alessandria, questi, nella cui città principalmente fabbricavasi il papiro, impedirono che fosse inviato del papiro a Pergamo, ed allora gli scrittori di Pergamo dovettero necessariamente pensare a trovare un nuovo materiale per scrivere, e da ciò l'invenzione della pergamena o membrana di Pergamo preparata colle pelli degli animali.

Però secondo Erodoto e Diodoro pare siano stati i Joni ed i re di Persia, prima ancora di Eumene, i primi ad usare le pelli di animali per scrivere. Ad ogni modo, se que' di Pergamo non hanno proprio inventata la preparazione della membrana che prese il nome di membrana di Pergamo o pergamena, essi certamente l'hanno molto perfezionata e da quel tempo se ne diffuse l'uso.

Ai tempi di Plinio si usava già molto la pergamena in sostituzione del papiro o carta egiziana, che diventava sempre più rara e costosa; non erano però ancora conosciuti i processi di imbianchimento.

L'uso della pergamena si diffuse molto in Oriente e in Occidente, e specialmente in Germania. Se ne conoscevano tre qualità: bianca, gialla e porporina. Vi sono ancora de' libri interi, di chiesa, in pergamena porporina. In Germania ed in Inghilterra, ove non era conosciuta la carta d'Egitto o papiro, non si usava che pergamena.

In Inghilterra vi sono delle *carte reali* formate solamente da piccoli pezzi di pergamena e che portano il timbro reale; pezzi che erano grandi quanto una carta da giuoco; molti di questi pezzi si riunivano insieme, occorrendo, e se ne faceva un volume o un rotolo; coloro che incollavano i fogli si dicevano *glutinatores* (2). Gli antichi ebrei erano tanto abili nell'incollare i fogli di pergamena pe' loro libri sacri che non si scorgevano le giunture. Secondo Giuseppe fu un momento di ammirazione per Tolomeo Filadelfo quando i 70 vecchi ebrei inviati dal gran Sacerdote spiegarono in sua presenza i rotoli ove la legge di Dio era scritta in lettere d'oro (loc. cit.).

In principio si scriveva da una pagina sola: dopo il secolo X si cominciò, secondo alcuni, a scrivere dalle due parti. Il che non è esatto, perchè si conoscono manoscritti in pergamena scritti nelle due pagine e molto anteriori al secolo X.

---

(1) VILLAVECCHIA, *Dizionario di merciologia*.

(2) *Nouveau Traité de diplomatique*, tomo I (1750), pag. 480. Questo libro mi fu fatto conoscere dal sig. cav. Armando, che ringrazio. La breve parte storica dell'art. PARCHEMIN del Larousse è in gran parte presa da questo Trattato.

Secondo D. de Vaines (1) non si sarebbe scoperta nessuna carta o diploma in pergamena prima del secolo VI; prima di questo tempo la pergamena serviva per scrivere ed il papiro o carta d'Egitto per i diplomi. Pare che i più antichi manoscritti su pergamena non risalgano oltre il II secolo d. C., e che i più antichi atti scritti su pergamena non risalgano oltre il VII secolo. Il famoso documento detto *Papiro di Leyda* del III secolo è appunto un manoscritto su papiro. Ma dopo il V secolo il papiro non si usò quasi più. Quasi tutti i manoscritti dal V al XV secolo sono su pergamena; così pure dopo il secolo VIII tutti gli atti o carte sono su pergamena.

Scoperta la stampa, alcuni libri furono stampati su pergamena; ad esempio, le bibbie che Jean Faust portò a Parigi nel 1462 erano stampate su pergamena, ed egli le vendette come bibbie manoscritte al prezzo di 60 ducati d'oro (550 franchi) ogni copia (2). Tra i codici che ho nel mio laboratorio v'è un libro d'*Heures* a stampa su pergamena del secolo XVI molto bello, che era in pessimo stato ed ora è quasi tutto ricuperato e leggibile.

Fu tra il secolo III e IV che la pergamena ebbe il sopravvento sul papiro e questo definitivo successo, scrive il G. Lafaye, va di pari passo col trionfo del cristianesimo, perchè gli scrittori di opere ecclesiastiche dovettero preferire la pergamena al papiro, essendo più resistente, più durevole, e prestandosi meglio per opere di gran mole e per l'insegnamento.

Tra il III e V secolo si ricopiarono su pergamena molte opere antiche classiche, quale, ad esempio, *De Republica* di Cicerone, perchè i papiri erano in cattivo stato.

Vi fu un momento, verso il secolo VII, in cui la pergamena era molto rara e costava moltissimo, stante il grande consumo che se ne faceva: così che si cercò di utilizzare i fogli in pergamena già scritti, cancellandoli mediante raschiatura colla calce, ecc. e scrivendovi di nuovo sopra (*palinsesti*); questa è stata una delle cause per cui molti manoscritti preziosi andarono perduti. A. Mai, che aveva una straordinaria perizia nel leggere i palinsesti, trovò molti avanzi dei sei libri del *De Republica* di Cicerone (scritto nel III) in un palinsesto del X secolo. Nel Medio Evo e principalmente nei secoli XI, XII e XIII, per opera di monaci si cancellavano purtroppo opere importanti di autori profani per scrivervi specialmente libri sacri, preghiere, ecc. L'uso della pergamena raschiata era stato proibito per gli atti pubblici.

Tra i codici che sono nel mio laboratorio ve n'è uno bobbiense con palinsesti che ha manifesti segni di tentativi, veramente un po' grossolani, per poter renderli molto visibili e leggerli.

Il costo enorme della pergamena fu anche causa per la quale molti manoscritti sono in carattere finissimo e spesso abbreviato. I certosini di Parigi nell' XI secolo pregarono il conte di Nevers di riprendere il vasellame d'argento che loro avea donato e di sostituirlo con della pergamena (3).

Nel Medio Evo la pergamena si fabbricava generalmente nelle abbazie. A Parigi la grande fiera della pergamena si teneva a Saint-Denis, e si apriva il mercoledì della seconda settimana di giugno. L'Università e suoi adepti ed i *pergamenieri* del

(1) *Dictionnaire de diplomatie.*

(2) Peignot, *Essai sur l'histoire du parchemin et du vélin*, Paris. 1812. in Pouchet, *Histoire des sciences au moyen âge*, p. 628. Non ho ancora potuto consultare quest'opera del Peignot.

(3) Id. in Pouchet, loc. cit., pag. 109.

re avevano il privilegio di essere i primi acquirenti e di scegliere la pergamena migliore che loro occorreva. Questo privilegio durò sino al 1633. I pergamenieri erano costituiti in corporazione come gli alluminatori, i legatori, gli scrivani e i librai; erano esentati dalle tasse, dalle gabelle, ecc.

Dopo la rivoluzione francese l'uso della pergamena diventò ancora più raro.

Le più antiche notizie che io ho trovato intorno le pergamene usate per la pittura sono quelle che si trovano nell'opera di un anonimo: *Compositiones ad tingenda musiva, pelles et alia, ad deaurandum ferrum*, ecc., manoscritto dell'VIII secolo, trovato nella biblioteca dei Canonici di Lucca e pubblicato dal Muratori nelle sue *Antiquitates Italicae*, tomo II, *De artibus italicorum post inclinationem Romani imperii*, Dissertatio XXIV, p. 364-387, e commentato dal Berthelot nella sua opera: *La Chimie au moyen âge*, 1893, vol. I. L'ignoto autore nel capitolo *De Pergamina*, scrive:

" Pergamina quomodo fieri debet. Mitte illam in calcem, et jaceat ibi per dies
" tres. Et tende illam in cantiro. Et rade illam cum nobacula de ambas partes; et
" laxas desiccare. Deinde quodquod volueris scapilatura facere facere, fac, et post
" tingue cum coloribus ".

È interessante il fatto, che forse il più antico manoscritto che tratti di chimica applicata è questo di un autore italiano. Era pochissimo conosciuto prima della pubblicazione fatta dal Berthelot.

Come si vede, sino d'allora si usava la calce. E di questa infatti più o meno ne resta sempre nelle pergamene per la scrittura o per la pittura.

Teofilo, del secolo XII, che pare l'inventore della pittura ad olio, nel suo famoso libro *Diversarum artium schedula*, non tratta della fabbricazione della pergamena; accenna invece alla *pergamena greca* che dice fatta con cotone del legno (?), parla della fabbricazione dei colori come il *verde di Spagna*, la *cerussa*, il *cinabro*; insegna a preparare la colla (che deve servire a fissare i colori), colla pelle, colla pergamena, colla vescica, ecc.

La pergamena è una pelle resa resistente non già per mezzo di una vera concia, ma per mezzo di operazioni in gran parte meccaniche. Che non sia veramente conciata si desume già dal fatto che la pergamena non è imputrescibile come il cuoio (1).

Si conoscono poche analisi chimiche della pelle nel suo stato naturale.

Lo strato epidermico è costituito in massima parte di sostanza cornea, di *keratina*; non dà gelatina per ebollizione con acqua, e non contiene albumina solubile. L'acido nitrico l'ingiallisce ed il nitrato d'argento la colora in bruno riducendosi. Mulder (2) vi trovò:

$$\begin{aligned} C &= 50.28 \\ H &= 6.76 \\ N &= 17.21 \\ O &= 25.01 \\ S &= 0.74 \end{aligned}$$

oltre a 1 — 1.5 % di cenere.

(1) È erroneo il dire che " *sotto il nome di pergamene si intende una pelle la quale è resa imputrescibile non già per via di una concia, ecc.....* " (*Enciclop. Arti ed Industrie*, II, p. 832). La pergamena è invece putrescibile. È imputrescibile nelle condizioni ordinarie di secchezza.

(2) Hoppe-Seyler, *Physiol. Chem.*, 1877, I, p. 90; A. Gautier, *Chim. biol.*, 1897, III, p. 335

Secondo Müntz (1), la pelle di bue disseccata a 110-120° perde gr. 19 a 19.25 % di acqua ed ha allo stato secco la composizione seguente (media di 2 analisi):

C	=	51.43
H	=	6.64
N	=	18.16
O	=	23.04

Lo strato principale che è il sottostante, *derma* o *corion*, è costituito da sostanze diverse, di natura albuminoidea. Reimer (2) distingue nella pelle due sostanze; una, la sostanza fibrosa, tessuto congiuntivo, che ha la composizione seguente:

C	=	48.45
H	=	6.66
N	=	18.45
O	=	26.44

e che l'autore rappresenta colla formola $C^{30}H^{46}N^{10}O^{12}$; e l'altra, la sostanza cellulare o *coriina*, che ha la composizione:

C	=	45.91
H	=	6.57
N	=	17.82
O	=	29.61

e che l'autore rappresenta colla formula $C^{30}H^{50}N^{10}O^{15}$.

Secondo Reimer per ossidazione e idratazione, la sostanza fibrosa del tessuto congiuntivo si trasforma in *coriina*: $C^{30}H^{46}N^{10}O^{12} + O + 2H^2O = C^{30}H^{50}N^{10}O^{15}$.

Per quanto le analisi descritte concordino bene con le formule, noi diamo queste formole con tutta riserva.

Per ebollizione con acqua sotto pressione la pelle fornisce della gelatina, la quale per idrolisi dà pressochè gli stessi prodotti che gli albuminoidi, se si eccettui la tirosina (3).

Cramer (4) trovò per la fibroina e la gelatina o sericina, dalla seta, la composizione seguente, analoga a quella trovata da Reimer per la pelle:

		Fibroina	Sericina
C	=	48.39	44.32
H	=	6.51	6.18
N	=	18.40	18.30
O	=	26.70	31.20

Secondo Müntz (5) la pelle di bue completamente disseccata fornisce 0,6693 % di cenere, che ha la composizione seguente:

(1) *Ann. Chem.*, 1870 (4), t. 20, p. 315.
(2) *Dingler's polit. Journ.*, 205, p. 243; *Mem. scient.*, 1873, p. 599 e 688.
(3) *Z. f. physiol. Chem.*, 1902, p. 80.
(4) *J. pr. Chem.* (1), XCVI, p. 76.
(5) Loc. cit., p. 330.

Silice solubile nell'acido cloridrico .	0,0446
Calce	0,1736
Acido fosforico	0,0974
Ossido di ferro e allumina . . .	0,0930
Ossido di manganese . . .	non dosato
Cloruri alcalini	0,1380

La pelle di una giovenca conteneva ceneri = 0,467 %, di cui (ivi, p. 334):

Silice solubile in acido cloridrico .	0,0311
Calce	0,1212
Acido fosforico	0,0892
Allumina e ossido di ferro . . .	0,0704
Cloruri alcalini	0,1102

Analisi queste incomplete e che per di più in alcuni libri italiani sono riferite in modo affatto erroneo. L'autore non fa cenno della presenza o no del magnesio.

Anche Wienholt ha pubblicato alcune analisi del derma, non dà però la percentuale delle materie minerali (Lambling, *Chim. physiol. Encyclop. Fremy*, IX, p. 404).

Non sappiamo quali siano le modificazioni subìte chimicamente dalla pelle durante la trasformazione in pergamena.

Avendo un campione di pergamena bellissima, antica, del secolo XII, e che lasciava pochissima cenere, ho voluto analizzarla ed ho ottenuto i risultati seguenti:

Acqua a 100°	= 16.9 %
Acqua a 125°	= 17.68 "
Cenere sulla sostanza secca all'aria	= 1.01 "
Cenere sulla sostanza secca a 125°	= 1.21 "

La sostanza disseccata sottoposta all'analisi diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0,1575 fornirono 0,2859 di CO^2 e 0,0988 di H^2O.

II. Gr. 0,1286 fornirono 20.8 cm³ di N a 23° e 744 mm.

Da cui dedotte le ceneri:

$$C = 49.48$$
$$H = 6.81$$
$$N = 17.78$$
$$O = 25.93$$

Questa pergamena riscaldata, *rigonfia moltissimo* e dà un carbone *voluminosissimo* che poi brucia bene.

Composizione che si avvicina a quella trovata da Reimer per la sostanza fibrosa. In questa e nelle analisi precedenti di altri chimici non è tenuto conto dello zolfo, che certamente vi è. Basta scaldare la pergamena verso 200° per osservare lo sviluppo di ammoniaca, insieme ad acido solfidrico.

Tra le pergamene moderne ne ho trovato una che contiene una assai piccola quantità di cenere, circa 0,3 a 0.4 % sulla sostanza disseccata a 125°. Un dosamento di carbonio idrogeno ed azoto diede i seguenti risultati:

I. Gr. 1593 di sostanza diedero 0,2950 di CO^2 e 0,0980 di H^2O.

II. Gr. 0,1044 fornirono 16.6 cm³ di N a 24° e 725,2 mm.

Da cui, dedotte le ceneri:

$$
\begin{aligned}
C &= 50.50 \\
H &= \ \ 6.83 \\
N &= 17.48 \\
O &= 25.83
\end{aligned}
$$

Questa pergamena quando si scalda *rigonfia quasi niente* ed il carbone duro che si ottiene brucia abbastanza presto.

Le operazioni che si fanno subire alle pelli grezze, cioè pulite e depilate, sono: la *tiratura* su telaio, la *scarnatura*, la *sdossatura*, la *spolveratura* e la *essiccazione*. La spolveratura, che serve a facilitare la essiccazione e a ricoprire le parti grasse non ben elimate nelle precedenti operazioni, consiste nello spolverare la pelle con calce spenta (idrato di calcio $Ca(OH)^2$) o con *bianco di Spagna*, mediante uno strofinaccio. Le pergamene da servire per scrittura, pittura, ecc., si sottopongono inoltre alla *raschiatura* ed alla *pomiciatura*. La prima operazione si eseguisce con un ferro detto *ferro da scarnare*, ed ha per iscopo di rendere la pergamena più omogenea. La pomiciatura poi completa la fabbricazione della pergamena ed ha per iscopo di eguagliare e lisciare la pelle togliendole tutte le scabrosità lasciate dalla raschiatura. La faccia deve essere bianca e a grana fina (1).

La fabbricazione della pergamena ha subìto molte variazioni nel medio evo e dopo, secondo i luoghi e le epoche.

In generale fino al secolo X o XI i manoscritti sono fatti con pergamena bianca, molto liscia e fina. Dopo, se ne fabbricò di quella molto ordinaria, non omogenea, spesso non ben digrassata, di spessore disuguale, anche molto grossa come ora.

Non ho fatto delle analisi complete delle pergamene antiche e moderne, non era questo il caso, nè io avevo intenzione di farle. Mi sono limitato ad alcune determinazioni quantitative che mi potevano servire a fare qualche confronto. Ho determinato l'acqua e la perdita di peso in totale a varie temperature, e cioè a: 100-125-182.5-210° e anche 230°.5, notando quando incominciava lo sviluppo di ammoniaca e di acido solfidrico. Volli anche vedere quanta era l'acqua che la pergamena disseccata a 125-182.5-210° ricuperava stando all'aria. Determinai inoltre la percentuale delle ceneri e tenni nota del modo di comportarsi della pergamena quando si carbonizza e poi brucia.

Sino dapprincipio osservai che le pergamene molto antiche (secoli X-XII), scaldate su lamina di platino in generale rigonfiano molto più che non le pergamene dei secoli posteriori e delle pergamene moderne; il residuo carbonoso è molto più volu-

(1) Altre notizie si troveranno in: Monselice, *La Concieria*, in *Enc. Arti e Ind.*, vol. II; Voinetten de Lavelines, *Cuirs et Peaux*, 1894.

minoso, leggiero; dànno cenere bianchissima ed in quantità minore che non le pergamene de' secoli XIV e XV. Vi sono certe pergamene che rigonfiano talmente che il carbone leggiero occupa tutto il volume della cassula di platino entro cui si fa l'incenerimento; 0,6 gr. di sostanza in una cassula della capacità di circa 50 cm^3. Quasi tutte le pergamene moderne invece non rigonfiano quasi niente e lasciano un residuo carbonoso che non brucia tanto facilmente.

La pergamena che non ha sentito l'azione del calore ad un grado non molto alto contiene la quantità normale di acqua, cioè da 17 a 19.5 $^0/_0$, e la ricupera tutta stando all'aria.

Per giudicare se una pergamena è antica o no non si deve dar troppo peso al colore bruno sporco o nerastro; una pergamena nuova può essere scura ed una molto vecchia anche bianchissima. Molti de' codici che ho nel mio Laboratorio, e che sono de' secoli X e XII erano in pergamena bianchissima. Invece una bibbia spagnuola del XV° o XVI° era in pergamena grossa e brunastra anche nella parte non tocca dal fuoco.

L'analisi chimica dimostra che le pergamene molto antiche spesso contengono poca calce.

Le pergamene antiche che hanno sentito molto l'azione del calore, e peggio poi se sono come vetrificate, contengono relativamente molta cenere, anche perchè essendo state in parte decomposte la percentuale della cenere deve aumentare.

In un'altra pubblicazione riporterò i dati numerici delle numerose determinazioni che ho fatto. Qui mi limito a dare i risultati delle determinazioni fatte su alcune solamente delle pergamene antiche e moderne:

Pergamena	Acqua a 120°-125°	Ceneri dalla pergam. secca a 120°-125°	Modo di comportarsi pel riscaldamento
Secolo IX-X	18.46	2.2	rigonfia molto
Secolo XII	17.68	1.21	rigonfia moltissimo
Bibbia ebraica-spagnuola	18.35	2.48	rigonfia meno di XII
Codice francese sec. XIV	18.95	3.15	rigonfia molto, ma meno di XII
„ 2ª metà XV	17.7	6.1	rigonfia molto e brucia bene
Pergamene moderne			
Francese, di montone			
detta *lisse*	18.88	1.54	rigonfia poco; carbone che brucia difficilmente
detta *blanc*	18.1	3.31	rigonfia poco; brucia bene
Fina acq. a Torino . .	18.0	4.5	quasi non rigonfia; brucia bene
Ordin. „ „ . .	16.1	6.53	rigonfia poco
Di montone acq. a Torino	18.9	0.35	rigonfia pochissimo
Di vitello „ „	18.6	10.38	rigonfia bene: la cenere contiene *Piombo*

2) *Uso della camera umida*

Spianamento dei fogli — Prove con soluzioni saline — Prove di restauro.

Come ho già detto, alcune volte quando i codici non sono stati troppo alterati dall'azione del calore o meglio quando probabilmente non hanno sofferta l'azione dell'acqua fredda usata per spegnere l'incendio, se si toglie il carbone colla lima o col raschiatoio e si lasciano all'aria, si dividono quasi da sè in parti minori o gruppi di fogli, che poi a poco a poco si possono sfogliare usando molta cautela: è vero però che i fogli rimangono moltissimo raggrinziti, ma ad ogni modo si raggiunge lo scopo del distacco senza bagnare il codice. Ma nella maggior parte dei casi questo mezzo non basta e bisogna usare l'immersione graduale e parziale del codice nell'acqua tiepida, oppure usare la camera umida.

La camera umida in moltissimi casi serve bene per staccare i fogli dopo che fu tolta buona parte del carbone e catrame esterno colla lima o col raschiatoio. Coll'acqua calda che si mette dentro la stufa si può comodamente scaldare l'ambiente umido a 20°-25° e anche 30°. Io esperimentai subito anche questo mezzo raccomandato dal P. Ehrle; una camera umida, piccola, mi fu prestata gentilmente dal collega prof. Camerano sino dal 16 febbraio, e lo ringrazio vivamente. I risultati sono lenti, ma buoni, specialmente se si ha l'avvertenza di tagliare quelle parti del codice a largo margine ove la pergamena è troppo attaccata. L'azione della camera umida è più regolare ancora, ma lenta, se si mette nell'acqua molta sabbia, come mi raccomandò il prof. Camerano. Ma in seguito ho visto che nel caso nostro si poteva senz'altro usare anche solamente l'acqua calda. Nel marzo si cominciò a far uso anche di una grossa camera umida che prima in laboratorio serviva come ghiacciaia e questa serve benissimo; su cinque o sei piani a reticolato sta molto materiale che alternativamente si lavora. Grande cautela si abbia sempre di badar bene se in questo ambiente umido e caldo non si sviluppino batteri. In questo lungo periodo di lavoro non si è più visto nessun foglio di pergamena invaso dai microbi. Ho fatto fotografare anche questo apparecchio che ci servì tanto bene.

L'uso della camera umida che in principio pareva non tanto soddisfacente perchè l'applicai ad alcuni pezzi o frammenti già troppo alterati, diede invece in seguito ottimi risultati, e la seconda parte del codice francese del XV secolo fu dalla sig^a^ Serafino in parte sfogliata applicando già nel febbraio questo semplice apparecchio.

In certi casi poi è impossibile usare la camera umida e ciò per varie cause. O il codice, o frammento di codice, è troppo compatto e incatramato anche all'interno, e allora non si stacca o si stacca così lentamente che si corre pericolo dello sviluppo di batteri; oppure, come nel caso de' frammenti dalle macerie, il materiale è così sporco con carbone e terriccio che bisogna per forza pulirlo coll'acqua, badando volta per volta se si scorgono miniature, o se in qualche modo i fogli si alterano.

Coll'uso della camera umida si ottengono spesse volte molto allargati i fogli, quasi nello stato primitivo, come coll'uso dell'immersione diretta nell'acqua, ma altre volte ciò non riesce e i fogli non possono allargarsi tanto quanto si raggiunge invece coll'immersione nell'acqua.

Certo che per ogni codice bisogna fare qualche prova. Se l'inchiostro non soffre e il codice non è miniato, allora, dopo staccati i fogli, lasciando il pezzo nella camera umida, si immergono per pochi minuti nell'acqua pura e tiepida, poi si stendono e si spianano.

Codice latino (N. 31 del mio catalogo) carbonizzato all'esterno. — È in assai cattivo stato. È un frammento che ha la parte anteriore bruciata, come pure ai lati, ma nella parte posteriore si vede bene una pagina tutta contratta. Il frammento ha le misure seguenti:

Lunghezza alla linea centrale posteriore .	13,2	cm.
Larghezza del foglio in alto . . .	8-9	„
„ „ „ al centro . . .	8	„
Spessore del frammento	7	„ circa.

La fig. 2, Tav. I, rappresenta il pezzo di fronte e in parte di fianco; la fig. 3 rappresenta la pagina posteriore raggrinzata.

Messo il frammento in camera umida per staccare alcuni fogli, questi si staccano abbastanza bene, però gli ultimi no, e li conservo riuniti e disseccati. Nella camera umida i fogli non si dilatano molto; le dimensioni aumentano appena di qualche centimetro. Il foglio, fotografato, immergo nell'acqua a 25°-30° per pochi minuti, poi si distende. Misura:

Lunghezza	18	cm.
Larghezza	12,5	„

cioè la superficie del foglio che prima era di circa 112 cm² diventa circa 225 cm², vale a dire più che raddoppiata.

La fig. 4 rappresenta il foglio staccato e spianato. Come si vede, il risultato è ottimo. La piccola rottura che è quasi nel mezzo del foglio spianato trovavasi anche nello stesso foglio prima, come può scorgersi esaminando bene la fotografia.

I fogli spianati ed asciutti dei varî codici li comprimo poi in un piccolo strettoio fra due tavole di legno duro. Così si riducono a piccolo volume e in istato da poter essere legati.

I fogli del primo frammento di un codice latino abbreviato ricevuti il 27 gennaio e che occupavano un enorme volume, furono inumiditi in camera umida, stirati e pressati. Ora sono bellissimi, lisci e sono riuniti in un pacco dello spessore di circa 8 centimetri.

Quando si comprimono col torchio fra due tavole di legno bisogna che i fogli siano asciutti, o quasi.

Lo spianamento può essere fatto bene ed anche presto mediante stiramento dei fogli a mano e fissazione su tavolette di legno con striscie di cartoncino e punte piatte per disegno. Il foglio deve essere ancora umido, ma non molto. Tra il foglio e il legno si mette della carta asciugante.

La signora Serafino-Bonomi poi, in casi di fogli in parte molto contratti e che non possono uniformemente spianarsi causa larghe e profonde anse, trovò assai utile usare un ferro caldo, ma non molto, col quale, passando lievemente sulla parte del foglio rigonfiato, ma umido e ricoperto con pannolino umido, fa alquanto contrarre la parte dilatata e la rende uniforme al resto. Ho fatto fotografare alcuni fogli con larghe e profonde anse prima e dopo lo spianamento: qui non posso riprodurre molte figure.

I risultati che così si ottengono sono ottimi; in altro modo sarebbe impossibile avere una pagina liscia. Perchè, come si vedrà più avanti, quando la pergamena ha subìto una certa temperatura non si riesce più a dilatarla tanto quanto era prima, o almeno a rendere il foglio omogeneo.

Adoperando poi dei congegni meccanici come piccoli telai per lo stiramento e spianamento, come ideai di fare sin dal principio ed è facile immaginare, si capisce che i risultati saranno anche migliori, ma certamente più lenti; io però mi tengo soddisfatto dei risultati ottenuti nel mio laboratorio sino dai primi tentativi. Anche in questo lavoro le signorine Giani e Castagneri, e particolarmente la signora Serafino Bonomi, vi hanno acquistata tanta abilità che spianano e distendono molti fogli in poco tempo, tanto più ora nella stagione calda, che i fogli distesi asciugano dalla sera alla mattina.

Operando nel modo sovraindicato o coll'acqua sola o con soluzioni saline, si è potuto in questo breve tempo nel mio laboratorio spianare e distendere qualche migliaio di fogli.

Prove con soluzioni saline. — In questo frattempo ho fatto anche numerose esperienze con sostanze igroscopiche o deliquescenti per vedere se si poteva fare in modo che i fogli staccati restassero, dopo lavatura e spianamento, morbidi, pieghevoli e non duri e fragili.

A questo scopo si teneva per pochi minuti immerso il foglio nella soluzione salina, piuttosto diluita: circa 1 °/₀.

Il dott. P. Biginelli mi suggerì l'uso del *cloruro di zinco.* Fatte le esperienze di confronto con acqua sola e con cloruro di zinco all'1 °/₀, risultò che le pagine convenientemente trattate e spianate restano non molto morbide, ma forse un poco più morbide che non coll'acqua sola. Ad ogni modo il foglio rimane bello.

Tentai l'uso dell'*acetato di potassio neutro o lievissimamente alcalino.* Il risultato fu buono. I fogli si dilatano come coll'acqua sola, ma dopo asciugati rimangono bene spianati e alquanto morbidi, al punto che si possono leggere bene e si possono ripiegare senza che si rompano.

Ho fatto fotografare un foglio molto raggrinzato, con larghe anse agli orli, di un *codice latino* (N. 90 del mio catalogo provvisorio). Il foglio è poco colorato in una pagina e giallo-bruno dall'altra pagina. La pergamena è fragile, dura, non si piega senza rompersi, il carattere si legge male. Misura:

Lunghezza nella linea mediana . .	12,5-13 cm.
Larghezza	8-9.5 „
Cioè superficie, circa	117 cm^2.

Dopo immersione per circa 10 a 15 minuti in soluzione di acetato potassico all'1 % si distende su tavoletta; quando è asciutto all'aria misura:

Lunghezza	18-19 cm.
Larghezza	13,5-14,5 „
Cioè superficie	243 a 275 cm^2.

Come si vede, anche qui la superficie è più che raddoppiata.

Il foglio è quasi bianco, pieghevole senza rompersi ed il carattere si legge benissimo.

In questo modo ho pure trattato un frammento di *codice greco* (N. 108). I fogli sono raggrinzati, carbonizzati agli orli, di color giallo-bruno nelle due pagine, ma bene leggibile il carattere. Misura:

Lunghezza	13 cm. circa
Larghezza	9 „ „
Cioè superficie	117 cm^2.

Dopo immersione in soluzione di acetato potassico al 1 %, fissazione su tavoletta ed asciugamento all'aria, i fogli rimangono giallognoli con ancora qualche macchia, il carattere si legge benissimo, la pergamena è abbastanza morbida, pieghevole, mentre prima era friabile: dopo il trattamento misura:

Lunghezza	17 a 18 cm.
Larghezza	11,5 a 12 „
Cioè superficie	195 a 216 cm^2.

Due di questi fogli furono pure fotografati prima e dopo il trattamento.

Ho esperimentato anche coi cloruri di magnesio e di calcio in soluzione all'1,5 % circa: i fogli si allargano bene, si spianano bene e rimangono abbastanza morbidi. Meglio forse col cloruro di magnesio che col cloruro di calcio. Ma in complesso poco più vantaggioso che coll'acqua sola.

Visti questi risultati, pensai alla soluzione del sapone di potassa. Usai del buon sapone a base di potassa e che non aveva eccessiva reazione alcalina. La concentrazione più conveniente mi parve quella dell'1 % od anche un po' meno. I fogli dopo immersione per 10 minuti circa in detta soluzione, poi asciugati e spianati rimangono abbastanza morbidi e lisci, più che coll'acqua sola o con altre soluzioni saline. È questo secondo me il mezzo migliore da preferirsi ora. L'inchiostro quasi sempre non si altera. Bisogna adoperare la soluzione fatta di recente e quasi limpida: la stessa soluzione essendochè intorbida dopo l'immersione dei fogli, non deve usarsi per molti fogli: è bene rinnovarla.

Ho detto che nella camera umida talora i fogli si dilatano tanto quanto dopo immersione nell'acqua e che in molti altri casi no. Ricordo alcune delle numerose esperienze fatte.

Esperienza. — *Codice latino* N. 136. — I fogli di questo codice sono ingialliti, molto raggrinzati, in alcuni punti imbruniti dal catrame. Tentando di piegarli si rompono. Misurano:

Lunghezza, al centro	12,5 cm.
Larghezza, „	9,5 „
Superficie	118 cm².

Dopo immersione per dieci minuti in acqua, soluzione di cloruro di magnesio o di sapone, si hanno i risultati seguenti:

Con acqua sola:

Lunghezza	18,5 cm.
Larghezza	13,5 „
Superficie	249 cm².

Col cloruro di magnesio:

Lunghezza	18,5 cm.
Larghezza	13,0 „

Col sapone:

Lunghezza	18,5-19 cm.
Altezza	13-13,5 „
Superficie	249-256 cm².

Come si vede, la superficie del foglio che prima era di circa 118 cm², dopo trattamento con acqua e sapone arriva a più del doppio, cioè a circa 250 cm².

La fig. 5 rappresenta il foglio quale era quando era secco, e la fig. 6 quando fu spianato dopo il trattamento con sapone.

Si mettono alcuni fogli di questo codice nella camera umida per vedere se si allargano come coll'immersione. Dopo 24 ore si trova:

	15,5 × 12 cm.
dopo 48 ore:	18 × 12,5 „
dopo 72 ore:	18 × 12,5 „
dopo 4 giorni:	18 × 12,5 „

Dunque si allargano tanto quanto quelle messe direttamente nell'acqua o nelle soluzioni saline.

Risultati diversi invece ottenni con altri codici, come ad esempio col *codice latino* N. 124.

È un latino abbreviato. I fogli sono duri, raggrinzati. Misurano:

Lunghezza	15 cm.
Larghezza	12 „
Superficie	180 cm².

Dopo immersione in soluzione di sapone, asciugamento e distensione, le pagine sono belle, leggibili, abbastanza morbide e misurano:

Lunghezza	22,8 cm.
Larghezza	17 „
Superficie	387 cm².

Con soluzione di sapone detto neutro (1), cioè meno alcalino, si ha:

$$23 \text{ cm.} \times 16,5 = 379 \text{ cm}^2 \text{ circa.}$$

Alcune pagine di questo stesso codice furono messe in camera umida e dopo 48 ore, distese e spianate, misuravano:

$$18 \times 14 = 252 \text{ cm}^2.$$

e dopo 4 o 5 giorni misuravano ancora 18 × 14 e non più.

Come si vede, coll'acqua o col sapone e successiva distensione, senza l'uso di un telaio meccanico per distendere, i fogli raddoppiano e anche più la loro superficie: da 180 cm² circa diventano 387 a 390 cm²; colla sola camera umida, no.

Un altro *codice* (N. 95). — I fogli misurano:

$$13,5 \times 11,5 \text{ cm.}$$

Dopo immersione in acqua con sapone detto neutro, si ha:

$$20\text{-}21 \times 16\text{-}16,5 \text{ cm.}$$

Dopo 48 ore, e in camera umida, si ha solamente:

$$14,5 \times 12 \text{ cm. e non più.}$$

Ottimi risultati ottenni pure con un codice francese molto importante, quale è il *Roman de Floriamont del secolo XIV*, ancora inedito. Era in istato deplorevole, in parte nero anche nelle pagine, i fogli molto attaccati. I fogli di questo grosso frammento di codice erano bruno-neri, difficilmente distaccabili e misuravano:

Lunghezza	20-21 cm.
Larghezza	13-13,5 „
Superficie	260 a 283 cm².

Furono staccati lasciandoli in camera umida e diventarono:

Lunghezza	22,5 cm. circa
Larghezza	14 „ „
Superficie	315 cm² „

Rimasero bruni, non bene leggibili, anzi la maggior parte dei fogli non leggibili. Si immersero per 10 minuti circa in soluzione di sapone potassico all'1 $^0/_0$ e poi

(1) L'uso di questo sapone detto *neutro*, e che forse contiene ancora materia grassa non saponificata, non è da raccomandarsi perchè la pergamena rimane quasi come oliata, e si legge men bene.

Alla pag. 443 [21], *invece di:* fig. 2, Tav. I, *leggasi:* fig. 4, Tav. II: fig. 5 e fig. 6
Alla pag. 446 [24], *invece di:* fig. 5 e 6, *leggasi:* fig. 2 e 3
Alla pag. 450 [28], *invece di:* fig. 5 e 6, *leggasi:* fig. 2 e 3.

furono spianati. Il testo si legge benissimo, le pagine rimangono abbastanza pulite, anzi molte quasi bianche o biancastre; l'inchiostro non è affatto alterato, o quasi. I fogli misurano:

Lunghezza	28-29 cm.
Larghezza	16-17 „
Superficie	448 a 486 cm².

I fogli di questo codice importante, di cui pur troppo mancano i primi, sono perfettamente ricuperati. Solo che molti di essi, in causa delle rotture prodottesi in origine, dovranno essere restaurati.

Ho fatto fotografare uno di questi fogli che era molto raggrinzato e misurava:

Lunghezza	21 cm.
Larghezza	14 „
Superficie	294 cm².

Dopo trattamento conveniente, e solamente con acqua, il foglio misurava:

Lunghezza	30 cm.
Larghezza	19,5 „
Superficie	585 cm².

Il foglio così ottenuto è bellissimo, gli ornati che sono ne' margini, sono ben conservati; il colore azzurro che era alquanto sbiadito fu rinforzato e le lettere colorate sono bellissime. Nella parte inferiore a sinistra in basso vi era una rottura della pergamena, nella parte non scritta, che deturpava il foglio e che quando era raggrinzato non si vedeva. Allora si pensò di togliere la parte rotta, e sostituirla con un pezzo di pergamena simile; poi vi si fece dal signor dott. Torrese un frammento di fregio identico a quello che vi era prima. Questo foglio è così restaurato benissimo.

Buoni risultati pure con un *codice latino* (N. 45). — La pergamena di questo codice è sottile; i fogli in molti punti all'esterno sono come vetrificati; color bruno, in alcune pagine biancastro. Pergamena fragile ma più elastica. Carattere quasi illeggibile.

Lunghezza al centro	14,8 cm.
Larghezza „	10 „

Si lascia molti giorni in camera umida, poi si distaccano i fogli:

Lunghezza	15,5-16 cm.
Larghezza	10-10,5 „

Le pagine restano sporche, brune, non si distendono bene. Ne metto un foglio in acqua tiepida e si distende:

Lunghezza	17,5 cm.
Larghezza	14 „

Il foglio è abbastanza morbido, ma non come col sapone.

Questo codice ha delle lettere tutte colorate o in roseo o in verde. Quelle rosee resistono bene. Il verde invece è come agglutinante, corrode la pergamena; per cui, dopo il lavaggio, ove era il verde rimane un foro.

Splendido risultato ottenni con un *codice italiano bobbiense* (del Cavalca) del secolo X-XI e che ha segni di palimsesti. Questo codice, come tanti altri non è importante per la sostanza che contiene, ma per la paleografia. È un codice imperfetto, di cui si sono trovati molti frammenti e fogli sparsi fra le macerie. Un foglio misurava:

Lunghezza	13 cm. circa
Larghezza	6,8 „ „
Superficie	88 cm^2 „

Era molto raggrinzato e in molti punti bruno-sporco.

Dopo 36 ore in camera umida a 25° circa, si ha:

$$15 \times 8.$$

I fogli si staccano bene, ma anche dopo 4 e più giorni di camera umida, le dimensioni non aumentano.

Immersi i fogli in acqua tiepida, stirati e spianati, si trova:

$$20\text{-}20{,}5 \times 10\text{-}10{,}5,$$

cioè superficie = 200 a 215 cm^2. In questo caso dunque la superficie del foglio spianato è circa una volta e mezza maggiore di quanto era prima. L'inchiostro non si altera. Ho fatto fotografare il foglio prima e dopo lo spianamento.

In certi casi si hanno ottimi risultati solamente col *cloruro di zinco.*

Codice francese (N. 82). Forse del secolo XIV. — È un commento al giuoco degli scacchi che tratta di moralità. Il carattere è molto piccolo, contratto molto, e non facile a leggersi. I fogli misurano:

Lunghezza	13,5-14 cm.
Larghezza	7-8 „
Superficie	94 a 112 cm^2.

Immerso in soluzione di cloruro di zinco (1 %), poi asciutto e messo sotto presse:

$$16{,}5 \times 10{,}5$$

ed il carattere è bene leggibile.

In soluzione di sapone poi steso e spianato:

$$19 \times 11{,}5,$$

ma il carattere non si legge bene.

Dopo 24 ore in camera umida:

$$17 \times 9.$$

Il carattere non è ingrossato ma è leggibile.

Immersi altri fogli in cloruro di zinco, poi stesi e spianati, misurano:

$$20\text{-}21 \times 11 \text{ cm.} = 220 \text{ a } 230 \text{ cm}^2.$$

Il carattere è ingrossato molto ed è bene leggibile. La superficie anche in questo caso più che mai raddoppiata. Le righe che erano 4 a 4,8 cm. diventano 7 a 7,2 cm. La pergamena rimane abbastanza morbida e ben pulita.

Anche di questo codice ho fatto fotografare un foglio prima e dopo il trattamente con cloruro di zinco.

Ho fatto molte altre esperienze con altri frammenti di codici, che descriverò in altro lavoro.

Le sostanze da me esperimentate hanno dato in complesso buoni risultati: ciò non toglie che se ne potranno trovare delle migliori. Ho fatto qualche tentativo con soluzioni diluitissime di ipoclorito di sodio o di acqua di cloro, ma non ne sono rimasto soddisfatto.

In ogni singolo caso bisogna sempre agire con prudenza e fare qualche prova per vedere se l'inchiostro soffre. Rare volte mi è capitato di vedere a diminuire l'intensità di colorazione dell'inchiostro; ma qualche volta capita. Inchiostri poco buoni ho osservato in codici a grande formato e non molto antichi, come ad esempio un grosso *codice latino* (N. 10), forse del sec. XV, e anche dei codici riccamente illustrati e miniati, come ad esempio il *Guiron le courtois*. In questi casi non si deve assolutamente immergere i fogli nell'acqua e aver molta cautela anche colla camera umida, quando poi si distendano i fogli.

In certi casi quando anche nei codici con inchiostro buono, in qualche punto il carattere si è un poco scolorato, si può ravvivare col passare sulle lettere una soluzione diluita di tannino, mediante un sottilissimo pennello, in maniera da non toccare l'intervallo manoscritto delle righe.

Prove di restauro. — Nel mio laboratorio si sono fatte anche alcune prove di restauro e con ottimo risultato. Il restauro, che consiste essenzialmente nel togliere i difetti principali che si trovano nei fogli spianati, richiede abilità e pazienza e anche un certo senso artistico.

Regole generali non se ne possono dare ed il chimico deve nei singoli casi usufruire le sue cognizioni scientifiche e pratiche che crederà più opportune.

In certi casi il restauro può consistere, almeno in parte, nel far scomparire o diminuire certe macchie scure che si trovano sulla pergamena dei fogli stati alterati dall'acqua e dal catrame: il chimico può valersi secondo i casi o di una azione meccanica, se non vi è scrittura, quale la pomiciatura, oppure di soluzioni di sapone, che spesso non alterano affatto la scrittura e rendono più chiara la pergamena. La figura 5, relativamente alla figura 6, dimostra i vantaggi che se ne possono avere.

Ad esempio, se si deve aggiungere qualche pezzo di pergamena nei margini dei fogli è bene usare pergamena antica pressochè dello stesso aspetto della pergamena del foglio che si vuole restaurare; in questo modo l'illusione è completa. Se si deve ravvivare l'inchiostro, può usarsi il tannino, il solfuro di ammonio, od altro reattivo, secondo i casi.

Se si tratta di chiudere dei fori esistenti nei fogli si possono usare mezzi diversi.

Miscugli ad esempio di gelatina o colla di pesce (ittiocolla), con qualche sale metallico, e con un poco di formalina od altro antisettico conveniente.

La donna può in questi lavori raggiungere un grado di abilità, forse superiore a quella dell'uomo. Io ho potuto persuadermene nel breve tempo che ho dovuto occuparmi di queste cose.

Maggiori difficoltà si hanno quando si tratta di restaurare qualche disegno o figura, miniature, ecc. Può avvenire che durante il distacco si esporti qualche pezzo di pergamena di una miniatura, come accadde per una bella illustrazione del *Guiron le courtois*. La signora Serafino-Bonomi pensò di applicare nella parte posteriore un pezzetto di tulle a maglie non troppo larghe, poi fece aderire su questa con un pennello un poco di gelatina e su questa, quando era ben secca, la materia colorante verde, per cui tutto il disegno è quale era prima. Ma questa è la parte che più che al chimico spetta all'artista: e perciò questi saggi furono subito interrotti.

In quei punti ove la pergamena agli orli è bruciata od altrimenti mancante può essere sostituita con pezzi di altra pergamena simile. Trattandosi però di codici manoscritti che furono poi stampati, tante minuziose cure forse forse non sono nemmeno necessarie: importa invece salvare quanto più si può le miniature, e queste del *Guiron* sono in parte ben ricuperate.

Dall'esame di molti codici e frammenti mi risultò un altro fatto, ed è che quando il codice ha sentito molto l'azione del calore e specialmente nelle pagine ove sono le miniature, spesse volte la pergamena è tutta corrosa nella scrittura: ciò, naturalmente, dipende in gran parte dalla natura dell'inchiostro e molto probabilmente le profonde corrosioni preesistevano in gran parte anche prima dell'incendio. Tale è il caso di un bel codice: *De regimine principum*, molto alterato dal fuoco, e perforato a metà da un potente colpo di piccone.

Descrizione di alcuni codici danneggiati e in gran parte ricuperati. — Tra i codici che con le sovraricordate minuziose cure sono stati ricuperati e resi leggibili, se non in tutto, almeno in gran parte, posso ricordare i seguenti:

Rhabanus Maurus. De Laudibus sanctae crucis del secolo X. Era in istato deplorevole; i fogli sporchi, attaccati in modo che riescì assai difficile staccarli, la scrittura in molti punti era illeggibile. A poco a poco si riuscì a staccare quasi tutti i 45 grossi fogli lunghi circa 30 cm. e larghi 20 a 25 cm. e a renderli leggibili. Le fotografie che ho fatto fare dànno un'idea dello stato dei fogli prima e dopo il trattamento. Questo codice è stato ricuperato totalmente ed in buono stato. È importante specialmente perchè molto antico. Specialmente 20 a 25 fogli sono stati ottenuti in così buone condizioni che non hanno quasi più bisogno di alcun restauro.

Codice francese della biblioteca dei duchi di Borgogna. — Era un ammasso informe carbonizzato molto più ristretto in una parte che nell'altra e che in alcuni punti dimostrava di essere bagnato ancora e in via di alterazione. Lo si fece disseccare sotto cappa, poi raschiando il carbone, lo si potè dividere in due parti ed allora apparve come codice francese, assai bene miniato, a due colonne, di cui una quasi distrutta dal fuoco, specialmente in basso. Levata via la parte carbonosa e lasciato a sè dopo essere ben dissoccato, si potè separare a poco a poco in più frammenti, e così renderli ben conservabili per lavori ulteriori. È costituito di pergamena fina e magnificamente illustrato con figure ed ornamentazioni fatte con oro e con colori finissimi.

Questo bellissimo libro, traduzione francese del *Polistore* di Pietro Comestore, apparteneva alla biblioteca dei duchi di Borgogna, è del secolo XV; le finissime miniature sono del Lancellot Cardon, alcune delle quali ben conservate.

E quasi completamente distrutto nella parte inferiore e buona parte della colonna interna. Ha sentito l'azione del calore, specialmente in basso. Molte pagine in basso misurano ora 7-8 cm., mentre in alto 18 cm.; altre, 13 cm. in basso e 21 cm. in alto e anche 12 $\times$ 23. Le righe in basso misurano 4 cm. circa e in alto circa 8 cm.

È questo uno degli esempi migliori che dimostrano la grande contrazione subita dalla pergamena. Una delle miniature meglio ricuperate rappresenta Mosè sul monte Sinai in atto di ricevere le tavole dal Padre Eterno. Le ultime pagine di questo codice sono più ricche.

Molti fogli si sono potuti avere separati, spianati e in istato da leggerne più della metà.

Anche di questo codice furono fatte fotografare alcune pagine.

Guiron le courtois. — Di questo famoso romanzo cavalleresco, in grande formato, già appartenente anch'esso alla ricca biblioteca dei duchi di Borgogna, ne ho avuto un grosso blocco di 317 fogli. Questo grosso codice in pergamena di ottima qualità misura:

Altezza	38 cm. circa
Larghezza in alto . .	17 a 22 cm.
„ in basso . .	28 a 32 cm.

È a due colonne, assai bene illustrato con bellissime figure e fregi nei margini. I colori sono bellissimi.

Questo codice ha sofferto specialmente in alto e nelle colonne interne; in molti punti è impossibile la lettura o è distrutto il disegno. Le righe in alto misurano 6 cm. a sinistra e 7,4 a destra, e 9,5 a 9,8 in basso.

Staccato con molta prudenza in diverse parti tagliando una parte della pergamena carbonizzata o vetrificata agli orli, si sono potuti staccare i fogli nella camera umida. Non si poterono immergere i fogli nell'acqua, perchè l'inchiostro si altera. Ad ogni modo si è potuto far dilatare la parte contratta in alto in maniera che ora è in gran parte leggibile. I fogli distesi e spianati, sono ora in gran parte bellissimi e misurano:

Altezza totale . . .	40 a 42 cm.
Larghezza in alto . .	23,5 a 25 „
„ in basso .	32 „

Anche di questo codice furono fatte alcune belle fotografie.

Frammento di codice di Casa Savoia. — Questo fu uno de' primi esaminati. Era in forma di un parallelepipedo quasi nero, eccetto la prima pagina tutta sporca e poco leggibile. Era attaccato ad una tavoletta in legno in parte carbonizzata. Staccato il frammento, fu raschiato attorno per toglioro il carbone, poi messo in acqua fredda e poi tiepida a mai più di 40°. A poco a poco cominciò a dar segno di sfogliarsi, specialmente in alto, ma in altre parti rimaneva come una massa dura, i cui fogli parevano fusi insieme l'un coll'altro. Con molta cura e pazienza però si riuscì a poco a poco a staccare i fogli che mano a mano si staccavano si asciugavano fra carta sugante. In alcune pagine aveva lettere in oro od alcune pure miniature i cui colori resistevano bene all'azione dell'acqua. Le miniature erano fatte solamente con oro, rosso e azzurro. Verso la metà del frammento si trovò una bella pagina miniata, a cui però mancavano ai lati due pezzi dell'ornamentazione.

In questo tempo era in laboratorio un grosso frammento di una bibbia in pergamena, di qualità inferiore, la quale in breve tempo entrò in putrefazione: poco dopo anche i fogli del frammento del codice di Casa Savoia furono invasi dai microbi, i fogli si attaccarono alla carta e in gran parte si guastarono, per quanto rapidamente si immergessero in soluzione di sublimato corrosivo o di tannino.

Ho la fotografia di un foglio che rappresenta lo stato del foglio dopo invaso dai microbi. Di questo codice furono fotografate le miniature principali; in una di queste si vede la croce di Savoia.

Salterio in lettera onciale del secolo VIII, contrassegnato con sigla Y. — Nei primi giorni di marzo furono trovati ne' frammenti dalle macerie alcuni foglietti che attirarono l'attenzione per la forma delle lettore greche. Di questi foglietti se ne trovarono altri, in tutto dodici, che furono riconosciuti dal cav. Frati, come appartenenti al codice greco dei Salmi in lettera onciale del secolo VIII: una buona parte del medesimo codice fu poi ritrovata fra quelli consegnati al laboratorio di materia medica.

Questo codice dicesi essere molto importante. Non lo trovo però ricordato fra i più celebri codici del genere che sono enumerati da E. M. Thompson nell'art. *Palaeography* della *Encyclop. Britan.* e tradotto in italiano dal Fumagalli. Anche di questo furono fatte alcune fotografie.

Due grossi codici ebraici (N. 71-72). — Sono due grossi codici quasi completi che mi furono consegnati bagnati, sporchi in gran parte di terra e polvere nera ed in alcuni punti, dove era la legatura, danneggiati, ma non molto, dal fuoco; alcuni di questi fogli erano irriconoscibili. Furono prima asciugati tenendoli sotto cappa e frapponendo fra i fogli dei grossi canapoli che lasciavano passare l'aria. Le pagine più sporche furono con cura lavate con acqua e così si ridussero bene, perchè l'acqua non alterava la scrittura. Però è curioso il fatto che in alcune pagine la scrittura era quasi stata completamente staccata dall'umidità, prima che fossero portati in laboratorio.

La pergamena è di buona qualità, bianchissima, sottile, morbida, come vellutata.

Questo codice misura 39, 40, 41 cm. in altezza per 24, 29, 30, 30,5 di larghezza.

I fogli dopo essere stati disseccati all'aria o nelle cappe, furono a poco per volta messi nella camera umida a circa 25° e così poterono essere quasi completamente spianati. Non furono però ancora distesi, stante il gran lavoro che richiederebbero, ma è lavoro che può sempre farsi. Ora sono perfettamente leggibili, distaccati, abbastanza lisci e possono essere così conservati. Sono in totale circa N. 380 fogli. Sono due codici che trattano unicamente di preghiere (libri di preghiera detti Mahazor).

Grosso codice latino (N. 10). — Questo grosso codice non è molto alterato, per più di $^4/_5$ della superficie i fogli sono poco contratti, ma è molto contratta la parte superiore. I fogli in basso e nel centro misurano circa 22 cm., mentre in alto solamente 12-13 cm.; la lunghezza totale è di 33 cm. Le righe che in basso e al centro misurano 8 cm., in alto solamente 4 a 4,5 cm. La parte contratta in alto è durissima, ed i fogli si staccano assai difficilmente; questa parte contratta è giallastra, ed il carattere come pure i colori sono ben conservati.

A poco a poco si riuscì a dividere il grosso blocco in frammenti minori. Uno di questi metto in camera umida, ma senza gran vantaggio; la parte superiore in parte si distacca, ma si rompe anche con grande facilità. Non si dilata gran che. Allora immergo la parte contratta di due fogli nell'acqua a 25°-30°, e dopo distenzione su tavoletta rimane abbastanza distesa, ma molto meno di quanto si osserva in altri casi. Da 12 a 12,5 cm., quale era prima, diventa 14 a 16; le righe scritte che erano di 5,2 cm. si allungano a 6,5 ed anche 7 cm.; ma il carattere si legge male e rimane come unto, trasparente. Anche l'inchiostro è poco resistente; coll'acqua in parte scompare. Così pure i colori di molte lettere: il rosso e l'azzurro si distaccano molto presto. Credo perciò sia bene conservare quali sono ora i pezzi di questo codice ben disseccati.

Codice N. 56. — È un grosso codice latino i cui fogli misuravano 33-38 × 15-18 cm. In cattivo stato specialmente agli orli. Sono 197 fogli di cui 188 spianati ed anche restaurati ed ora misurano 40-41 × 18-19 cm., senza tener conto che quasi tutti dovettero essere tagliati nei margini. Le lettere ed altri disegni colorati sono ben conservati.

Codice N. 121. — È una parte dell'opera *De animalibus* di Alberto Magno. Fu uno dei primi frammenti portati in laboratorio in uno stato deplorevole.

Più estesamente di questi e di numerosi altri codici o frammenti ricuperati e spianati sarà detto in altra pubblicazione.

Certo, impiegando un tempo due o tre volte maggiore si sarebbe, forse, fatto il lavoro un po' meglio specialmente ora che il personale che eseguiva questi lavori ha acquistato una certa pratica; così ad ogni modo il risultato è buono. Può dirsi senza ombra di esagerazione che la maggior parte del *Rhabanus Maurus*, e specialmente 20 a 25 fogli (dei 45 in totale), quasi tutto il grosso codice latino (197 fogli, di cui 188 spianati) N. 56, parte del Guiron, molti fogli (circa 80) del Floriamont, molti codici greci e latini, due grossi codici ebraici di circa 350 fogli (libri di preghiera detti Mahazor), sono non solamente ricuperati ma restaurati, o quasi.

Quasi tutti i codici francesi, e molti degli ebraici, a me consegnati, furono identificati dagli egregi proff. Renier e Pizzi, i quali ebbero la cortesia di esaminarli nel mio laboratorio.

3) *Ricerche sulla contrazione della pergamena per l'azione del calore e dell'acqua.*

Uno de' fatti che subito saltano all'occhio quando si osserva un codice o frammento di codice in pergamena danneggiato dall'incendio è quasi sempre l'enorme contrazione de' fogli e quindi anche del carattere, per cui molte volte è resa impossibile la lettura. In alcuni casi, ad esempio, il foglio in basso misurava da 23 a 24 cm. e in alto 11-12 cm.; alcune righe dello stesso codice, quasi allo stato naturale (a due colonne) misuravano 8 a 9 cm. in basso e in alto appena 1 cm.

Ho fatto fotografare un foglio che rappresenta un codice latino contratto in alto e quasi allo stato naturale, o almeno poco contratto per $^{9}/_{10}$, in basso.

Ho già detto precedentemente che molti codici sono danneggiati solamente pel fatto che un estremo di essi è molto più contratto del rimanente. Ora questa contrazione quasi sempre è tale che sia colla camera umida, sia coll'immersione nell'acqua tiepida e per gli stiramenti e spianamenti non si riesce a ridurre le parti ad eguali dimensioni.

Ho voluto vedere quale era la temperatura alla quale la pergamena deve essere scaldata perchè stando all'aria o stirandola anche dopo inumidita, non riprenda più le dimensioni di prima. Ho voluto anche vedere se la pergamena, scaldata ad una data temperatura e poi immersa rapidamente in acqua fredda, si contraeva di più e permanentemente che non per la sola azione del calore, come era da prevedere.

A questo scopo ho sottoposti varî campioni di pergamena antica e moderna a temperature diverse, ma in condizioni perfettamente eguali, per vedere anche quale era il punto in cui cominciava la decomposizione con sviluppo di ammoniaca o di acido solfidrico.

Ho adoperato preferibilmente un apparecchietto analogo a quelli di Anschütz e di Roth per determinare il punto di fusione; io però l'ho modificato in maniera che può riuscire molto utile in tante altre ricerche di chimica, e molto comodo per mantenere per più ore una sostanza a temperatura perfettamente costante meglio che colle ordinarie stufe. Il principio in fondo è quello su cui è basato l'uso della stufa di Victor Meyer, ma essendo l'apparecchio in vetro, si può vedere quali sono le modificazioni che subisce la sostanza; inoltre essendo piccolo, se ne possono tenere pronti due o tre, o anche più, con liquidi a punto di ebollizione costante.

Il tubo di vetro scaldato dal vapore è poco inclinato. La sostanza si mette dentro un tubetto chiuso con tappo a smeriglio e che con filo di platino si può sospendere alla bilancia.

I liquidi adoperati per varie temperature sono:

Acqua	99°
Ligroino	118°-120°
Anilina	182°-183
Etere ossalico . .	182°,5
Etere benzoico . .	209°-210°
Timolo	230°,5.

L'apparecchio, del quale non posso dare qui la figura, è stato costruito dietro mio disegno dal sig. A. Zambelli. 50 a 100 cm³ di liquido bastano.

Un decimetro quadrato di pergamena fina francese di montone detta *lisse* fu scaldata a 100°-110°, si contrae, e misura 9,5 × 9,5. Stando all'aria, dopo 24-48 ore riprende l'estensione di prima 10 × 10. Se scaldo a 150°-160°, allora stando all'aria le dimensioni diventano come prima o quasi, cioè 9,9 × 10, però se si immerge ancora calda nell'acqua non misura più di 9,5 × 9,7.

Scaldo separatamente due decimetri quadrati della stessa pergamena detta *lisse* a circa 210°-220°; diventa rossastra e lasciato un campione all'aria rimane 9,2 $\times$ 9,3 anche dopo lungo tempo. L'altro campione, scaldato a 210°-220° e immerso ancora caldo nell'acqua fredda, non riprende più le dimensioni di prima, rimane (7,5-7,8-8,8) $\times$ 7,8 cm. La parte più ristretta, rosea, misura 7,5. Dopo 15 giorni le misure sono le stesse. Allora tengo immersi i due campioni nell'acqua tiepida per 10-15 minuti, poi asciugo e stendo come si fa pei fogli dei codici e trovo che l'uno rimane 8,5-9 $\times$ 8,8-9,3 e l'altro 7,5-8,5 $\times$ 8.

Ripeto l'esperienza scaldando la pergamena di montone francese detta *lisse* a 210°, tenendola entro tubo immerso nel vapore di etere benzoico. Esperimento successivamente con tre pezzi di 1 decimetro quadrato ognuno. Scaldo in ogni caso per circa 15 minuti. La pergamena si colora in rosso bruno, ma più in una pagina che nell'altra. Si sviluppa ammoniaca ed acido solfidrico.

1° Lascio all'aria. Misura 8,2-8,8 $\times$ 8,2. Dopo tre ore 8,4-8,8 $\times$ 8,3 cm.; dopo 36 ore non cambia; la pergamena è morbida discretamente. Si immerge in acqua tiepida a 21°-30°, e si distende, e non si riesce ad avere che 7,5-7,7 $\times$ 7,3. Rimane dunque molto contratta.

2° Opero come col primo e ancora caldo immergo rapidamente il pezzo nell'acqua a circa 15°; poco dopo misura 6,8-7,2 $\times$ 7,5 cm. Dopo alcune ore è ancora più contratto: 6-6,8-7,2 e dopo 36 ore 6-6,5 $\times$ 7,2. Si immerge in acqua a 21°-30° e si tenta di distendere così: anche dopo molti giorni rimane 7-7,2 $\times$ 7,3.

3° La pergamena è stata scaldata rapidamente per 10 minuti, poi gettata nell'acqua a 15°. Ancora umida misura 7,8-8 $\times$ 8-7,8 e dopo trattamento come più sopra non si riesce che a 7,6-8 $\times$ 7,8.

1 decim. quad. della stessa pergamena detta *lisse* scaldo per 15 minuti a 210°, poi l'immergo rapidamente in acqua quasi bollente. Ha color caffè scuro; si accartoccia molto. Ancora umido il pezzo misura: 6,2-6,5 $\times$ 6,5 cm.; dopo 36 ore è accartocciato e fragile; non può misurarsi bene, in lunghezza è 6 cm. Si mette in acqua a 21°-30° e si distende; non si riesce a più di 6-6,6 $\times$ 6,5 cm.

Un pezzo della stessa pergamena *lisse* che misura 9,8 $\times$ 7,6 scaldo a 182°,5 (in vapore di etere ossalico), poi immergo ancora caldo nell'acqua quasi bollente. È giallognolo, molto morbido quando è ancora umido e misura 6,2 $\times$ 4,6. È appena giallognola molto morbida quando è ancora umida. Poco colorata. Dopo 36 ore è un poco meno fragile della precedente, ma non può misurarsi, in lunghezza è 5,9 cm. Si mette in acqua a 25°-30°, e si distende; ottiensi 5-5,3 $\times$ 6,4 cm.

Pergamena moderna stata prima bagnata con acqua, poi lasciata asciugare all'aria. — Ho bagnato con acqua un decimetro quadrato di pergamena fina moderna, poi l'ho lasciata asciugare all'aria e successivamente scaldata a varie temperature.

a 125° . . . . 19,2.

Lasciata all'aria, ricupera tutta l'acqua perduta, 100 %.

Scaldo a 182°,5 in vapore di etere ossalico e trovo (dà pochissima ammoniaca e H^2S):

Perdita % = 21,08.

A 210° in vapore di etere benzoico:

Perdita % = 23,5.

Come si vede, la perdita di peso sino a 210° non è molto grande.

Lascio la sostanza all'aria e dopo due giorni ricupera 46,1 % dell'acqua perduta; dopo anche molti giorni non ricupera più nulla.

Quando la pergamena ha raggiunto un certo grado di calore la sua struttura è disorganizzata ed alle volte i fogli messi in acqua tiepida si dilatano, ma rimangono molto fragili, non elastici e non si possono distendere. Questo è il caso, ad esempio, di un codice ebraico, compatto, durissimo (N. 48 del mio catalogo). In questo come in altri casi simili la quantità di acqua è normale, a 125°, ma lasciata all'aria la pergamena non ricupera più tutta l'acqua perduta. La pergamena di questo codice a 125° perdette 18,54 % e lasciata poi all'aria non ricuperò più del 68.3 % dell'acqua perduta. A 182°,5 perdette 20,08 % e calcinata lasciò:

3,02 % di cenere sulla sostanza all'aria
3,70 % „ „ „ a 125°.

Questa pergamena rigonfia moltissimo, fa un voluminoso fungo quasi come XII°, che poi brucia bene.

Ho fatto numerosissime esperienze scaldando le pergamene antiche e moderne a temperature assai diverse, ma non ho sino ad ora avuto risultati che mi permettano di trarne qualche importante conclusione generale.

Anche dopo vari tentativi non sono riuscito a produrre la contrazione della pergamena in maniera che poi questa per immersione nell'acqua e spianamento possa raddoppiare la superficie che aveva quando era contratta. Nel caso del codice che sente l'azione del calore durante l'incendio è da tenere in considerazione anche la forte pressione in causa della quale divenne molto contratto e raggrinzito anche senza aver subìto una temperatura elevata.

Alle volte il blocco è bruciato tutto all'intorno e per la poca conducibilità della pergamena pel calore, la parte interna rimane quasi allo stato naturale, ma enormemente compressa, perciò quando poi si toglie il carbone, e si mette nella camera umida o nell'acqua, il suo volume aumenta di molto. Ma su questo argomento dovrò ritornare in seguito.

III.

Ricerche sui colori usati dagli antichi.

Se poi il codice contiene delle miniature, allora le precauzioni pel distacco e lo spianamento de' fogli debbono essere maggiori. Le miniature finissime resistono all'azione della camera umida ed anche dell'acqua; il color rosso, fino (cinabro vero), non si stacca. Il colore azzurro, quasi sempre a base di rame, invece si stacca più o meno facilmente. I colori di codici molto antichi (VIII-XIII secolo) si staccano piuttosto facilmente.

Dei due colori rossi: cinabro e minio, cioè HgS e Pb^3O^4, il più resistente al calore, come si sa, è il primo; esso non si altera nemmeno quando la pergamena è completamente bruciata, mentre il minio o è diventato nerastro o lascia del piombo ridotto. In alcuni fogli del *Rhabanus Maurus*, notai come la scrittura rossa in alcune parti fosse ridotta a color grigio metallico, dovuto precisamente a piombo ridotto. Riduzione che non è difficile riprodurre. Mescolando il minio con gomma arabica e poi scrivendo su pergamena si ha un color rosso che scaldato a 210° diventa prima bruno scuro poi d'aspetto metallico.

Le miniature ordinarie non solo non resistono all'acqua ma nemmeno alla camera umida. Ad esempio, le miniature del codice francese *Roman de la Rose*, perdono l'azzurro anche quando si staccano i fogli lasciandoli nella camera umida. In moltissimi casi il colore azzurro della miniatura è già stato in parte staccato dall'acqua quando si estinse l'incendio; dopo disseccamento il colore si trova diviso su le due pagine combacianti.

Molte delle miniature più importanti che trovansi in fogli molto alterati dal calore, come, ad esempio, il *codice dei duchi di Borgogna* e il *Guiron le courtois*, è bene conservarle quali sono senza cercare di distendere troppo la parte alterata, e non bagnarle con acqua: così possono ricuperarsi quasi tutte le principali miniature. La maggior parte del *Guiron* è così ricuperato, coi fogli ben spianati.

Ma di tutto ciò che riguarda i colori dirò *in extenso* nella mia *Raccolta di documenti per la storia della Chimica*. Riferirò allora anche le esperienze che ho fatto, e sul numeroso materiale storico che ho raccolto.

Non credo di aver detto molte cose nuove, ho solamente la speranza che queste mie osservazioni ed esperienze possano riuscire utili agli amatori de' libri, alle biblioteche. Il lavoro di ricupero e restauro è un lavoro molto lungo, che deve essere eseguito con metodo, e diretto, almeno nelle sue linee generali, da chi ha veramente cognizioni chimiche. Certo che i sacrifici che la Nazione deve fare devono essere in proporzione dell'importanza del materiale da ricuperare e da restaurare. E qui occorre tener conto del famoso: *cum grano salis*, affinchè questo genere di lavori non diventi pretesto a sfruttamento del pubblico denaro.

La gran maggioranza de' codici latini, greci ed ebraici che ho avuto per le mani, trattano di religione, o sono bibbie o libri di preghiera. Quasi nessuno di questi è miniato. Molti de' codici francesi invece sono miniati ed alcuni anzi riccamente e benissimo miniati.

Operando nel modo che fu sovra descritto in questa Memoria, sia adoperando la disseccazione e disinfezione, sia usando la camera umida, oppure l'acqua o le soluzioni saline, ecc., si è potuto in questi quattro mesi circa di lavoro, non solamente mettere in istato di non più alterarsi tutti i codici e frammenti di codici consegnati, ma se ne sono sfogliati e spianati ed in parte restaurati moltissimi. Sono ora più che 3000 i fogli fra grandi e piccoli stati ricuperati, spianati, e in parte distesi, ridotti in istato di essere letti. A ciò si aggiunga il tempo stato necessario pel distacco di alcune miniature.

Torino, R. Università, giugno 1904.

fig. 1

Grande sala N. xxvi dell'Istituto di Chimica farmaceutica, con cappa aspirante, dove furono fatti, in parte, i lavori di prosciugamento e di disinfezione dei Codici.

fig. 2

Codice latino n. 136: foglio prima del trattamento.

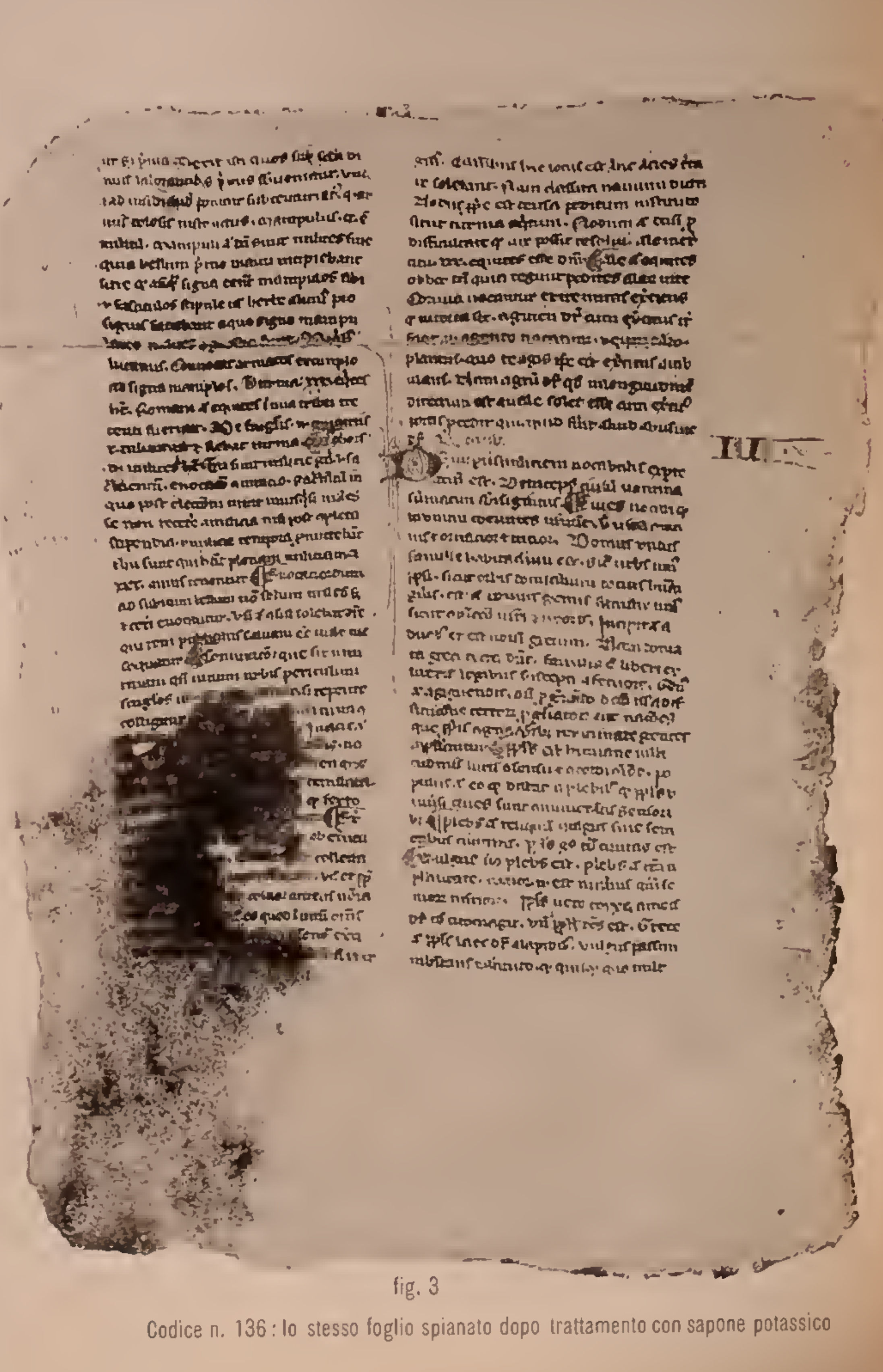


fig. 3

Codice n. 136: lo stesso foglio spianato dopo trattamento con sapone potassico

fig. 4

Codice n. 31 carbonizzato, visto di fronte e di fianco.

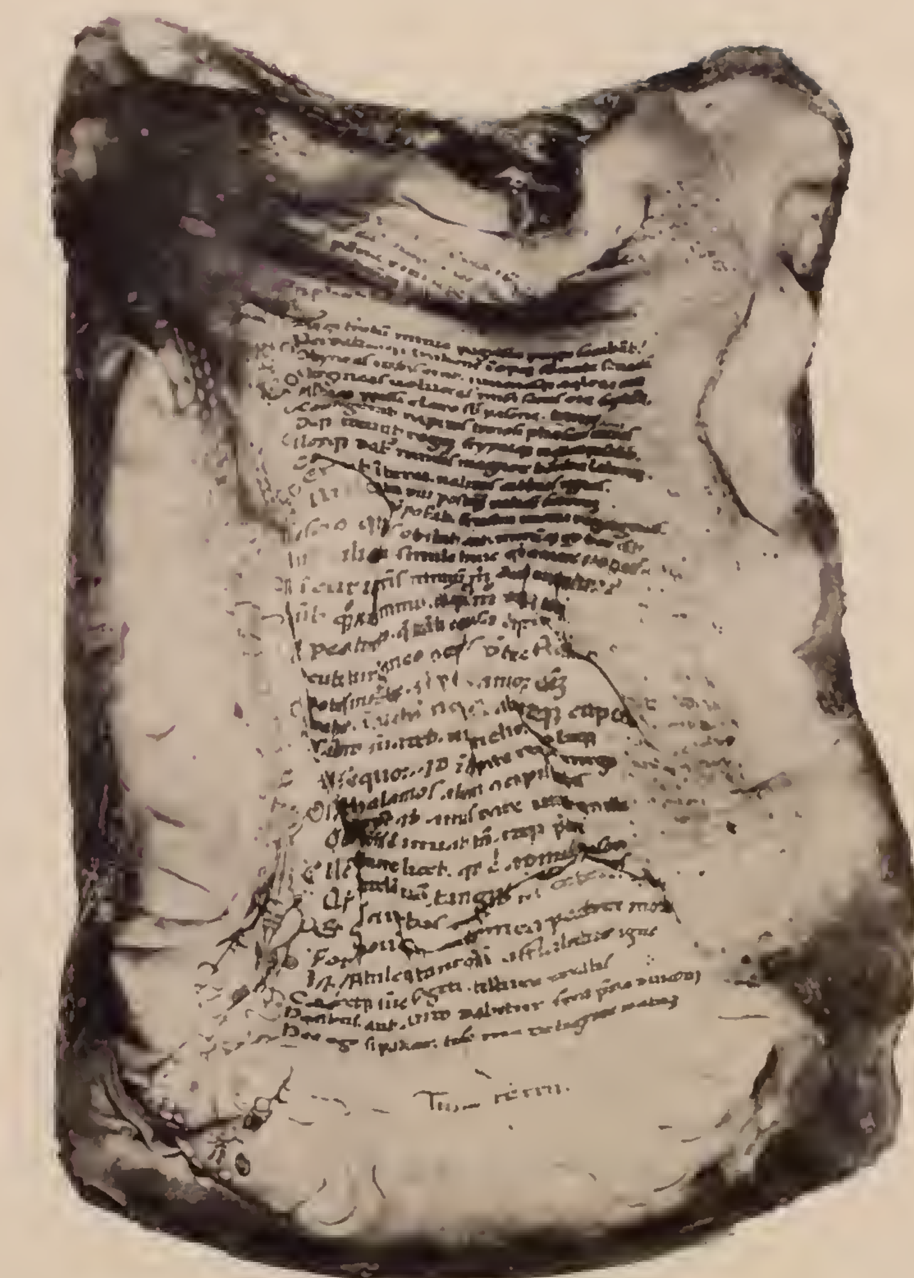


fig. 5

Codice n. 31, aperto: aspetto di una pagina interna

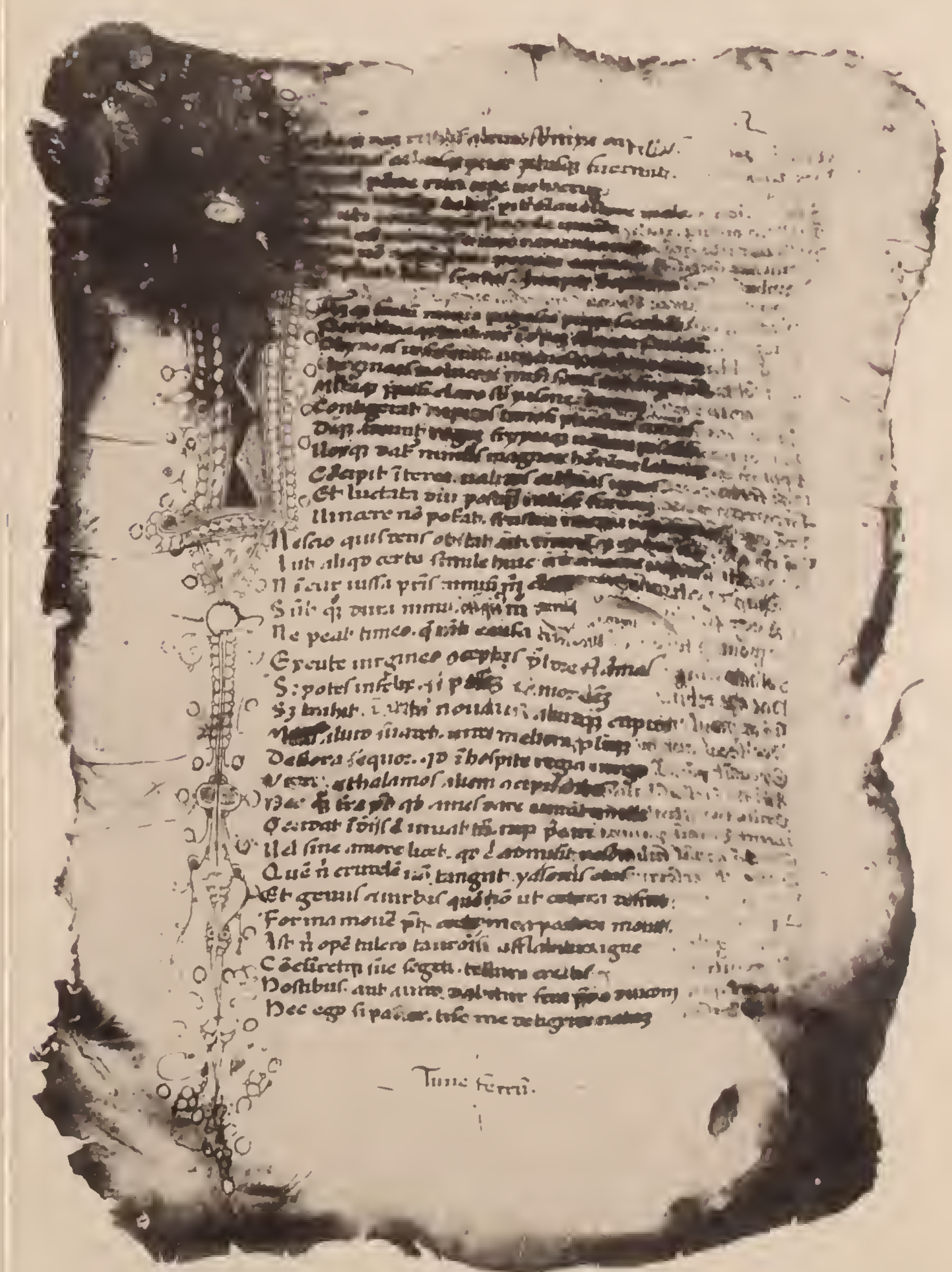


fig. 6

Codice n. 31 : foglio spianato che mostra la pagina rappresentata dalla figura precedente.

STAB. ELIOT. ING. MOLFESE. TORINO

FUNZIONE BIOLOGICA DEL CALCIO

PARTE TERZA

AZIONE COMPARATA DEI REATTIVI DECALCIFICANTI

RICERCHE SPERIMENTALI

DEL

Prof. LUIGI SABBATANI

Approvata nell'adunanza del 15 Maggio 1904.

I.

Colle pubblicazioni anteriori sulla funzione biologica del calcio dimostrai che tutti i reattivi, i quali sono capaci di produrre una diminuzione nella concentrazione jonica del calcio, per ciò stesso aggiunti al sangue ne provocano l'incoagulabilità, e dimostrai pure che i fenomeni tossici generali e locali, di eccitazione prima e di depressione poi, ed in fine la morte, provocata da alcuni di questi reattivi, dipende sempre da diminuzione nella concentrazione del Ca-jone contenuto normalmente nei protoplasmi. Inoltre, lo studio sull'azione antagonistica fra citrato e calcio e quello sul calcio-jone nella coagulazione del sangue mi condussero a stabilire che per la coagulazione del sangue e per la vita dei protoplasmi è indispensabile una determinata concentrazione di jone-calcio, la quale può in condizioni fisiologiche variare soltanto entro certi limiti, che probabilmente dipendono dalla natura del protoplasma e dal momento funzionale in cui si trova. Al di fuori di questi limiti si hanno subito manifestazioni tossiche, e per variazioni troppo forti presto s'arriva a dei valori critici, minimo e massimo, oltre i quali, così la coagulazione del sangue, come la vita dei protoplasmi è interamente sospesa, non però abolita, poichè riconducendo con mezzi adatti la concentrazione del Ca-jone entro i limiti fisiologici, la coagulabilità del sangue, ed anche la vitalità dei protoplasmi subito ritorna normale, se si interviene abbastanza presto. E poichè l'aumento della concentrazione del calcio-jone protoplasmatico è sempre accompagnato da fenomeni di depressione e la diminuzione è sempre accompagnata da fenomeni di eccitazione, assegnai al Ca-jone protoplasmatico una funzione biologica permanente moderatrice.

In appoggio di questa ipotesi ho creduto opportuno fare uno studio comparato dell'azione generale e tossica di tutti i reattivi decalcificanti, come già feci rispetto alla coagulazione del sangue, poichè mentre sarebbe assai difficile dimostrare direttamente l'esistenza del Ca-jone protoplasmatico e l'importanza biologica sua, una dimostrazione indiretta appare facile mercè lo studio delle modificazioni funzionali e tossiche prodotte da quelle sostanze le quali possono aumentare o diminuire la concentrazione del calcio-jone nell'organismo.

Sperimentando sopra individui unicellulari, e sopra vegetali ed animali molto semplici, si può variare la concentrazione del calcio che viene a diretto contatto di essi, usando liquidi di cultura adatti; ma sperimentando negli animali superiori, non pare si possa far variare sensibilmente e rapidamente la concentrazione del calcio-jone circolante, amministrando loro cogli alimenti dei sali di calcio, o nutrendoli con alimenti privi di calcio. Questi animali in loro stessi hanno sempre dei depositi enormi di calcio nell'endo od ecto scheletro, e poichè la concentrazione del Ca-jone nel sangue è la risultante di un equilibrio in parte di natura fisico-chimico fra i diversi sali, ed in parte fisiologico fra assorbimento ed eliminazione, aggiungendo o sottraendo calcio all'alimento potremmo ottenere tutt'al più delle variazioni lente nella concentrazione jonica del calcio, tanto lente, che facilmente sarebbero mascherate da fenomeni immancabili di compenso fisico-chimico e fisiologico. Nell'un caso probabilmente si avrebbe una eliminazione un po' più abbondante di calcio, una maggiore deposizione di sali calcarei nelle ossa, nell'altro caso probabilmente si avrebbe un ridisciogliersi di sali dalle ossa; ma intanto, proprio per questi fenomeni di compenso non si avrebbe mai una variazione abbastanza forte e rapida nella concentrazione del Ca-jone del sangue e dei citoplasmi da produrre disturbi funzionali. E notisi che, se pure a lungo andare una variazione forte si potesse ottenere, questa si produrrebbe tanto lentamente, che con sicurezza il protoplasma avrebbe tempo di adattarsi alla variata concentrazione del Ca-jone. Numerose esperienze fatte da me e da Delogu (1) dimostrano infatti che si ottengono facilmente nei cani fenomeni di abitudine al calcio, anche se amministrato per via endovenosa.

Per ottenere una variazione forte e brusca nella concentrazione del Ca-jone circolante e degli organi si deve quindi ricorrere a quegli stessi reattivi di cui si serve il chimico (sali di calcio o reattivi decalcificanti) ed iniettarli rapidamente nel sangue, o porli a diretto contatto di organi isolati, perchè amministrati per bocca, resterebbero inefficaci, o tutt'al più produrrebbero dei disturbi locali sul tubo digerente, come avviene per il solfato, fosfato, citrato e saponi di sodio, i quali provocano azione purgativa; in ogni caso poi per ottenere fenomeni tossici per via gastrica con questi sali, occorrono dosi di gran lunga maggiori che per via endovenosa.

Contro questo metodo sperimentale si potevano sollevare alcuni dubbî, relativi al modo d'agire del calcio e dei reattivi decalcificanti nell'organismo, dubbî che però non hanno serio fondamento. Per lo addietro si credette da alcuni che non si potessero fare impunemente delle iniezioni endovenose di cloruro di calcio, perchè, secondo essi, provocavano trombosi generalizzata (2); ma ora questo dubbio non ha più ragione

(1) Delogu G., *Sulla tossicità comparata del calcio*, " Arch. di Farmacologia e Terapeutica ,, vol. X, fasc. 7°-8° (1902).

(2) Dastre et Floresco W., *Trombose généralisée à la suite d'injections de chlorure de calcium*, " Compt. rend. Soc. de Biol. ,, 3 [10] (1896), 560.

d'essere, poichè come già Rabuteau (1) e Curci (2) sperimentando col calcio non facevano cenno di coaguli intravascolari, così nè Regoli (3), nè io, nè Delogu (4), in numerosissime esperienze sugli animali non li abbiamo mai osservati, se non in condizioni del tutto eccezionali, e facilmente spiegabili (Delogu); ed il cloruro di calcio è stato iniettato impunemente anche nelle vene dell'uomo con intento terapeutico da Silvestri (5) e da Roncoroni (6). Rispetto poi all'azione dei reattivi decalcificanti si può *a priori* ritenere che essi producano veramente una diminuzione nella concentrazione del Ca-jone nell'organismo, come fanno *in vitro*, perchè quantunque la presenza di colloidi ostacoli o dia un andamento anormale a molte reazioni (7), pur tuttavia non modifica affatto quelle precipitanti del calcio, ed i reattivi decalcificanti conservano intera l'attività loro anche nel liquido sanguigno, così come in acqua pura. Le osservazioni di De Bruyn mostrano che in un mezzo di gelatina le sostanze insolubili, che precipitano allo stato cristallino o diventano tali dopo alcun tempo, precipitano realmente e non formano soluzioni colloidali; fra queste egli ricorda l'ossalato di calcio, il fosfato ammonico magnesiaco, il solfato di bario; ed io stesso con esperienze dirette volli assicurarmi che in presenza di albumina d'ovo e di siero di sangue le reazioni fra cloruro calcico da un lato e carbonato, fosfato e metafosfato sodico dall'altro, si compiono bene e prontamente, quasi come in acqua pura. Solo notai alcune particolarità nella forma cristallina dei precipitati che si formano in presenza di albuminoidi, particolarità, che mentre nulla tolgono alla sensibilità delle reazioni, sono di speciale interesse per la biologia, quando si mettano in relazione colla deposizione di sali calcarei nello scheletro (8).

Onsum (9) del resto aveva già da tempo osservata la presenza di cristalli di ossalato calcico nei vasi sanguigni di animali avvelenati con ossalati, ciò fu confermato da altri; e quando due anni or sono io cercava di provocare nei mammiferi dei fenomeni di antagonismo fra ossalato e calcio, ebbi la formazione di ossalato calcico nei vasi, il che era poi causa di coagulazione intravascolare (10).

---

(1) Rabuteau et Ducondrey, *Sur les propriétés des sels de calcium*, " Compt. rend. ", T. 76 (1873), p. 349, 355.

(2) Curci A., *Sul meccanismo di azione dei comuni metalli alcalini ed alcalino-terrosi*, " Ann. di Chim. e Farm. ", vol. III, ser. IV (1886), p. 337-350.

(3) Regoli P., *Azione dei metalli alcalino-terrosi sulla eccitabilità elettrica della corteccia cerebrale*. " Bollettino della Società tra i cultori delle Sc. med. e nat. in Cagliari ", 1900, p. 151-156. — *Sull'uso del calcio come emostatico*, " Rivista critica di Clinica medica ", anno III (1902).

(4) Delogu G., loc. cit.

(5) Silvestri T., *Dell'azione emostatica delle iniezioni endovenose di cloruro di calcio*, " Gazzetta degli Ospedali e delle Cliniche ", 1902, N. 39.

(6) Le esperienze fatte da Roncoroni, alle quali assisteva io pure, credo sono tuttora inedite; le iniezioni endovenose di $CaCl^2$ nell'uomo non produssero alcun inconveniente nè immediato, nè lontano.

(7) Lobry A. C. De Bruyn, *L'état physique de substances insolubles dans l'eau, formées dans un milieu de gélatine*, " Rec. Trav. chim. Pays-Bas ", T. XIX (1900), p. 236-249.

(8) Di questi fatti mi occuperò, spero, in un prossimo lavoro assieme al collega Boeris, Professore di Mineralogia.

(9) Citato da Nothnagel H. e Rossbach M.-J., *Nuovi elementi di materia medica e terapeutica*, versione italiana. Napoli (1887), p. 358.

(10) Vedansi più avanti le esperienze coll'ossalato di sodio e cloruro calcico.

Conviene però ricordare che, per la piccola concentrazione del Ca^{++} nell'organismo e per la solubilità abbastanza alta di alcuni sali di calcio, come il solfato, il citrato ecc., i corrispondenti sali di sodio non potrebbero produrre alcun precipitato calcare nel sangue, o nei protoplasmi; l'azione decalcificante di questi reattivi si esplica solo o mercè fenomeni di retrocessione nella dissociazione elettrolitica, allorchè cresce molto la concentrazione di un dato anione (solforico), o per la formazione di molecole poco dissociabili rispetto al calcio (citrato). Solo così, riferendoci al jone-calcio, possiamo comprendere come tutti questi reattivi siano capaci di provocare nell'organismo dei fenomeni di decalcificazione. Certamente con nessuno di questi, e neppure a dosi altissime, si potrebbe mai produrre una decalcificazione totale; ma come nella analisi chimica quantitativa, così pure nell'esperimento fisiologico, col crescere della quantità di reattivo decalcificante iniettato, la concentrazione del Ca-jone fisiologico diminuisce sempre più, finchè per una determinata quantità di reattivo si raggiunge un valore così basso nella concentrazione del calcio-jone, che questo non è più sufficiente per la funzione sua normale nel sangue o nei citoplasmi. Dall'altro lato, iniettando nelle vene degli animali un sale solubile di calcio, la concentrazione del jone-calcio nei liquidi circolanti e protoplasmi aumenta, e seguitando ad iniettare calcio, presto si raggiunge un valore così alto nella concentrazione del Ca-jone, che è esso pure incompatibile colla funzione normale.

Per le considerazioni sopradette ho studiato ora l'azione generale e tossica comparata dei seguenti reattivi decalcificanti, facendo con ciascuno una lunga serie di esperienze; solo per ciò che riguarda i saponi, come già feci nella II parte delle presenti ricerche, mi sono limitato a riferire alcuni dati sperimentali ottenuti da altri, perchè non è mia intenzione addentrarmi ora nello studio dei saponi che, per i rapporti coi grassi, troppo lungi mi condurrebbe dallo scopo delle presenti ricerche.

1°. Fluoruro di sodio;
2°. Solfato di sodio;
3°. Metafosfato di sodio;
4°. Pirofosfato di sodio;
5°. Solfato bisodico;
6°. Carbonato sodico neutro;
7°. Carbonato sodico acido;
8°. Saponi di sodio;
9°. Ossalato di sodio;
10°. Citrato trisodico.

In questo studio ho cercato di mettere bene in evidenza le analogie, il modo d'agire e l'importanza che nel determinismo dei fenomeni tossici acquista il carattere di decalcificante per questi sali; e come nei lavori antecedenti, così anche ora, sperimento sempre di pari passo col calcio e coi reattivi decalcificanti, li inietto direttamente nelle vene, o li applico sopra organi isolati, a ciò che le variazioni di concentrazione del Ca-jone, che in questo modo si producono nei liquidi circolanti e nei protoplasmi, siano abbastanza forti e rapide; così evito che possano sorgere fenomeni di compenso fisico-chimico o fisiologico, oppure fenomeni di abitudine. Ho raccolti anche alcuni fatti di antagonismo fra il calcio da un lato ed i varî reattivi decalcificanti dall'altro, i quali, quantunque non siano così numerosi e belli come per il citrato trisodico, e ciò o perchè si formano precipitati, o perchè alcuni anioni hanno una tossicità loro speciale, o perchè in alcuni di questi sali, idrolizzandosi, l'azione resta complicata dalla formazione di OH^- od H^+ jone, tuttavia sono interessantissimi e li riferirò a suo luogo. Tenni poi conto speciale della influenza che la concentrazione delle soluzioni iniettate e la velocità delle iniezioni stesse hanno sopra le manifestazioni tossiche.

Con queste ricerche, mentre si porterà un nuovo contributo allo studio fisiologico dei sali in genere, si porranno in evidenza alcuni fatti molto interessanti per lo studio farmacologico di alcuni di essi (carbonati, meta- piro- ed orto-fosfati), e dal complesso di tutte le esperienze si trarranno nuovi e sicuri dati in appoggio della ipotesi sulla funzione moderatrice del calcio-jone protoplasmatico.

Adoperai sempre sali puri del commercio, o purificati da me stesso, alcuni anzi li preparai direttamente, ed ebbi cura che la tecnica, del resto semplicissima, restasse sempre la stessa per tutte le serie di esperienze a ciò i risultati fossero sicuramente paragonabili.

Per la bibliografia dei lavori farmacologici e fisiologici sopra i sali di calcio ed i reattivi decalcificanti, alle indicazioni che già riportai nella I e II parte di queste ricerche, altre ne aggiungerò a suo luogo; ma fin d'ora giova osservare, che mentre le ricerche sperimentali coi sali aventi azione decalcificante sono molto numerose, di poche solo potremo giovarci. La massima parte di esse furono fatte quando ancora non si sospettava che nel determinismo dell'azione tossica loro intervenisse il potere decalcificante; ma indipendentemente da ciò, spesso i risultati ottenuti da diversi sperimentatori o con diversi sali non sono affatto comparabili, perchè diverse erano le condizioni sperimentali, e spesso mancava un criterio direttivo chimico esatto, od una tecnica sperimentale rigorosa, quale il confronto della tossicità diversissima di sostanze, ora molto attive, come l'ossalato sodico, ora pochissimo attive, come il bicarbonato sodico, esigeva.

II.

1. *Fluoruro di sodio.*

L'azione dei fluoruri era stata studiata primieramente da Rabuteau (1), poi da Tappeiner, da Schulz (2), ed istologicamente da Pitotti (3). Tappeiner nei mammiferi e per via endovenosa od ipodermica a dose di gr. 0.15 per chilo corporeo osservava fra i varî sintomi convulsioni parziali o generali, aventi in alcuni animali

(1) Rabuteau, *Étude expérimentale sur les effets physiologiques des fluorures et des composés métalliques en général*, Paris, 1872.

(2) Tappeiner H., *Zur Kentniss der Wirkung des Fluornatriums*, " Arch. für ex. Path. u. Pharm. ", Bd. XXV (1889), S. 203-224. — Schulz U., *Untersuchungen über die Wirkung des Fluornatriums und der Fluorsäure*, " Arch. für ex. Path. und Pharm. ", Bd. XXV (1889), S. 328-346. — Tappeiner H., *Mittheilung über die Wirkungen des Fluornatrium*, " Arch. für ex. Path. u. Pharm. ", Bd. XXVII (1890).

(3) Pitotti G., *Dell'influenza che esercita il fluoruro di sodio sui vari organi e sugli elementi dei tessuti dell'organismo animale*, " Bullettino delle Sc. mediche di Bologna ", serie VII, vol. IV (1892).

carattere epilettico, la qual cosa perfettamente concorda con quello che vedremo accadere con tutti i reattivi decalcificanti, i quali sempre producono fenomeni di eccitazione generale intensi.

Le osservazioni di Tappeiner sono state poi confermate in tutto da Lazzaro (1), il quale notò per giunta che, quando l'avvelenamento procede lento, compare degenerazione grassa del cuore, del fegato e dei reni, ed in appresso avremo occasione di notare qualche cosa di analogo anche per altre sostanze di questo gruppo. Ma di tutte le esperienze del Tappeiner a noi specialmente interessano due fatte nei conigli per iniezione intravenosa:

Un coniglio di 1600 grammi con 0,12 di fluoruro sodico, iniettato nelle vene, presentò subito debolezza, dopo 10 minuti trisma, e dopo 3 ore era di nuovo normale.

Un altro coniglio di 1180 gr. con 0,20, ancora per via endovenosa, presentò dopo 5 minuti aumento della frequenza respiratoria da 65 a 114 al minuto, in appresso salivazione e dopo 15 minuti trisma, convulsioni generali e morte.

Siccome però nel confronto della dose minima letale dei reattivi decalcificanti io mi sono attenuto sempre a quella che provoca morte immediata dell'animale, così queste esperienze non potevano servire all'intento. e ne ho fatte appositamente alcune.

Esperienza 1ª (2 maggio 1903).

Coniglio m. di Chgr. 1,035. — Iniezione nella giugulare destra di cm^3 4,5 di soluzione al 5 % di fluoruro sodico, fatta in due minuti circa.

L'animale muore con poche scosse convulsive generali, non ben chiaro se dipendenti da asfissia o no.

Aperto subito il torace, le orecchie sono dilatate, i ventricoli fortemente contratti e rigidi.

Muore con gr. 0,225, gr. 0,217 per chilo, gr.-mol. 0,0051 per chilo.

Esperienza 2ª (2 maggio 1903).

Coniglio f. di Chgr. 1,100. — Iniezione nella giugulare destra con cm^3 38 di soluzione all'1 % di fluoruro sodico, fatta in 5'.

L'animale presenta moti convulsivi ripetuti, lunghi, generali a carattere tonico, quando il cuore pulsa ancora bene, poi muore.

Aperto subito il torace, si trova il cuore fermo, ineccitabile, col solo ventricolo sinistro contratto. Il sangue raccolto dal cuore coagula abbastanza presto, in 10' circa. La rigidità cadaverica compare pure prontamente.

Muore con gr. 0,38, con gr. 0,34 per chilo, con gr.-mol. per chilo corporeo 0,0082.

Esperienza 3ª (4 maggio 1903).

Coniglio di Chgr. 0,920. — Per la vena giugulare destra in 2' circa inietto cm^3 4,2 di soluzione al 5 % di fluoruro sodico.

L'animale, dopo ripetute scosse convulsive generali muore.

Aperto, si nota che i ventricoli sono fortemente contratti e rigidi.

Questo coniglio morì con gr. 0,21, gr. per chilo 0,23, gr.-mol. per chilo corporeo 0,0055.

---

(1) Lazzaro C., *Sull'azione dei fluoruri alcalini nell'organismo animale*, " Sicilia med. ", Torino-Palermo, 1891, III, 405-411.

Da tutte queste esperienze vediamo quindi che nei conigli e per via endovenosa:

con gr. 0,075 per chilo l'animale sopravvive (Tappeiner);
con gr. 0,169 per chilo l'animale muore dopo 20′ (Tappeiner);
con gr. 0,262 per chilo l'animale muore immediatamente (media delle tre esperienze mie).

Questa dose letale corrisponde a gr.-equivalenti 0,0062 per chilo d'animale.

Ricorderò poi che il fluoruro sodico, applicato direttamente sulla corteccia cerebrale, non ha dato mai un aumento deciso e chiaro dell'eccitabilità elettrica, e perciò credo che le manifestazioni fisiologiche prodotte da esso non dipendano esclusivamente dall'azione sua decalcificante, ma in parte anche dal fluor-jone, ed in questo concetto mi confermano varie considerazioni, fra cui il comportamento del fluoruro sulla coagulazione del sangue, il quale è, come già vedemmo altrove, un po' diverso da quello degli altri reattivi decalcificanti. Pur tuttavia la tossicità grande del fluoruro sodico dipende direttamente dall'azione decalcificante sua, come apparirà chiaro dal confronto fra il potere decalcificante, anticoagulante e tossico di tutti i reattivi che ora studiamo.

2. *Solfato di sodio.*

Il solfato di sodio, $Na^2SO^4 + 10H^2O = 322$, come reattivo precipitante del calcio è assai poco sensibile, e perciò anche ha una minima azione anticoagulante, come abbiamo visto trattando del Ca-jone nella coagulazione del sangue. Era quindi lecito prevedere che la tossicità sua, in quanto è un reattivo decalcificante, fosse assai piccola, e l'esperienza ha confermata pienamente la previsione. Di tutte le esperienze fatte per brevità ne riporto solo alcune, tenendo però conto esatto di tutte nella tabella riassuntiva a pag. 466.

Esperienza 4ª (14 dicembre 1902).

Cane f. di Chgr. 4,100.
17,1′. — Comincia una iniezione nella vena femorale destra con soluzione di solfato sodico al 15,2 $^0/_0$ (cristallizzato).
17,6′. — Si sono iniettati cm^3 100 e compaiono convulsioni a carattere nettamente tetanico, ma di breve durata. Appena slegato, l'animale subito cammina.
19,30′. — Rifiuta il mangiare.

(15 dicembre 1902).

Mangia poco, sta bene, ha emessa urina di reazione o neutra o leggermente alcalina.

Questo animale ha ricevuto in 5′ cm^3 100 di soluzione = gr. 15,2 = gr. per chilo corporeo 3,7.

Esperienza 5ª (30 dicembre 1902).

Cane f. di Chgr. 3,700.
11,22′. — } Iniezione nella femorale sinistra con una soluzione di solfato sodico al 15,2 $^0/_0$.
11,27′. — } Si iniettano cm^3 200.

Durante l'iniezione l'animale si agita e si lamenta, in ultimo presenta un accesso tetanico lunghissimo, con spasmo della glottide. Col lungo arresto di respiro compare poi cianosi intensa e rilassamento generale dell'animale; però a questo punto, praticando la respirazione artificiale colla compressione del torace, il cuore, che pulsava debolissimo, non si rianima, e poco dopo cessa ogni pulsazione.

Aperto subito il torace e l'addome, si trova il cuore fermo, ineccitabile, in forte diastole. Il sangue contenuto in esso e nei grossi vasi è perfettamente liquido, ma coagula prestissimo appena fuoriesce. Il fegato è fortemente congesto e scuro assai: presenta in varî punti delle chiazze emorragiche, è grandemente lacerabile, e durante la necroscopia una piccola lacerazione in esso fa uscire una grossa quantità di sangue. Estratto il fegato e spremutolo leggermente, sì che fuoriesca il sangue, appare di colore giallo intenso.

Questo animale ebbe in 5′ cm³ 200 di soluzione al 15,2 $^0/_0$ = gr. 30,4 = gr. 8,2 per chilo corporeo.

Esperienza 8ª (4 luglio 1903).

Coniglio f. di Chgr. 1,350.

17,18′. — } Iniezione nella giugulare destra di cm³ 114 di soluzione al 16 $^0/_0$ di solfato sodico
17,36′. — } cristallizzato.

Dapprima l'animale resta tranquillo, poi durante l'iniezione presenta scosse convulsive generali, indi scosse muscolari isolate e piccoli movimenti delle dita, che si fanno sempre più lievi, fino a che in uno stato di profonda depressione il respiro s'arresta e contemporaneamente le pulsazioni cardiache si affievoliscono fino a che più non si percepiscono. Durante l'iniezione si ha diuresi abbondante. Aperto subito il torace si trova che il cuore fa lievi pulsazioni. Il sangue interamente liquido coagula presto fuori dei vasi. Fegato congesto, lacerabilissimo.

Questo coniglio ebbe in 18′ cm³ 114 di soluzione = gr. 13,5 = gr. 0,75 per chilo corporeo.

I dati principali e l'esito di tutte le esperienze fatte col solfato sodico trovansi riuniti nella seguente tabella:

N. della esperienza	Animale	Peso in Chgr.	Iniezione di solfato ($Na^2SO^4 + 10H^2O$)						Esito dell'animale (1)	Dose letale media per chilo corporeo in grammi
			in minuti	con soluz. al $^0/_0$	in cm³	corrispondente a				
						grammi	grammi per chilo	grammi per chilo e minuto (velocità)		
4	cane	4,100	5	15,2	100	15,2	3,7	0,74	V	8,5
5	"	3,700	5	"	200	30,4	8,2	1,64	M	
6	"	4,400	16	"	272	39,2	8,9	0,55	M	
7	"	4,200	10	"	233	35,4	8,4	0,84	M	
8	coniglio	1,350	18	16	114	18,2	13,5	0,75	M	10,3
9	"	0,835	5	"	41	6,5	7,8	1,56	M	
10	"	1,010	9	"	69	11,0	10,9	1,21	M	
11	"	1,315	9	"	75	12,0	9,1	1,01	M	

Da questa si vede che il solfato sodico è veramente assai poco tossico, sì che ne occorrono gr. 8,5 per chilo corporeo nei cani, e gr. 10,3 nei conigli, onde produrre la morte immediata. Queste dosi, le quali corrispondono rispettivamente a

(1) In questa e nelle seguenti tabelle si indica con M che l'animale muore e con V che sopravvive.

gr. 3,7 ed a gr. 4,5 di sale anidro, concordano abbastanza bene con alcuni dati di Müntzer (1) (gr. 4,47). Nei cani la velocità della iniezione pare influisca poco sulla grandezza della dose minima totale; ma nei conigli ha una influenza manifesta e starebbe in relazione colla diuresi profusissima che in essi provoca l'iniezione di solfato sodico, diuresi colla quale si elimina rapidamente una grande quantità di solfato.

Riguardo ai sintomi si hanno qui fenomeni convulsivi, ma meno intensi che per gli altri sali di cui ci occuperemo, e ricordano piuttosto quelle contrazioni che si hanno con iniezioni endovenose di alte dosi di cloruro sodico, di quello che convulsioni nettamente tetaniche, nè ciò può fare meraviglia qualora si ricordi che il solfato sodico, come reattivo decalcificante, è assai poco sensibile, ed alle dosi altissime cui bisogna introdurlo, onde produrre la morte degli animali, indubbiamente entrano in scena fenomeni dipendenti da una tossicità fisica, per la concentrazione molecolare elevata che si porta nel sangue, fenomeni che vengono a complicare il quadro della intossicazione. Anzi, se la concentrazione molecolare non intervenisse, come già abbiamo dimostrato a proposito della incoagulabilità del sangue, ottenuta *in vitro* con questo sale, il solfato sodico non potrebbe produrre una diminuzione sensibile della concentrazione jonica del calcio nei tessuti, il che diventa possibile solo allorquando, per la concentrazione molecolare elevata del solfato, verosimilmente si provocano fatti di retrocessione nella dissociazione elettrolitica dei sali di calcio.

3. *Metafosfato di sodio.*

Dei caratteri chimici del metafosfato sodico $\left(PO\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow ONa\end{smallmatrix}\right)$ dissi già parlando dell'azione sua anticoagulante (2), ed ora basterà ricordare che in piccola quantità precipita il calcio, dando un metafosfato calcico insolubile, ma in eccesso ridiscioglie il precipitato calcare, ed il liquido limpido che ne risulta non dà più le reazioni sensibili, caratteristiche del calcio; si comporta allora come il citrato, il quale non precipita il calcio, ma ne impedisce le reazioni.

Da questo risulta quindi che il metafosfato sodico, a seconda della dose, può produrre una diminuzione nella concentrazione jonica del calcio in doppio modo: o precipitandolo come fa l'ossalato, o trasformandolo in joni complessi come farebbe il citrato trisodico; e ciò tanto in soluzioni acquose pure, che nel sangue *in vitro*, o nell'animale vivo per iniezioni endovenose, provocando in ogni caso una decalcificazione di interesse puramente chimico, fisiologico o farmacologico, a seconda dell'ambiente in cui si produce. E le manifestazioni fisiche e fisiologiche di questa decalcificazione, prodotta dal metafosfato, saranno quindi varie, a seconda della dose; ora somiglianti più a quelle date dall'ossalato sodico, ora a quelle date dal citrato.

Come per il citrato, saponi, ossalato ecc., anche per il metafosfato sodico la tossicità è assai diversa, a seconda che s'introduce per via gastrica, per via ipodermica,

---

(1) Müntzer E., *Zur Lehre von der Wirkung der Salze*, 7 Mittheilung. — *Die Allgemeinwirkung der Salze*, “ Arch. für ex. Pathol. u. Pharm. ,, Bd. 41 (1898), S. 74-96.

(2) Sabbatani L., *Funzione biologica del calcio*, Parte II, *Il calcio-ione nella coagulazione del sangue*, “ Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino ,, Serie II, tomo LII (1902), p. 213-257.

o per via endovenosa, tanto diversa che si sarebbe tentati a dire che queste sostanze sono per bocca quasi del tutto innocue, a confronto della tossicità grandissima che acquistano per iniezione endovenosa.

Gamgee (1) aveva constatata la tossicità dell'acido metafosforico nelle rane; Schulz (2) vide poi che il metafosfato sodico per iniezioni ipodermiche nei conigli alla dose di gr. 0,5 riesce innocuo, ma letale a gr. 1,0; vide che amministrato per via gastrica provoca infiammazione della mucosa, la quale si mostra coperta da ecchimosi bruno nere più o mene intense. Ma io dubito assai che ciò provenisse da qualche causa d'errore che è sfuggita forse alla osservazione di Schulz, poichè il metafosfato sodico non ha affatto azione irritante e caustica (Vedi Esp. 15) e può precipitare gli albuminoidi (Vedi Esp. 14) e fissare i tessuti (Vedi Esp. 16) solo a condizione che si trovi in presenza di una forte quantità di acido. Dubito che colla sonda Schulz producesse forse nello stomaco delle lesioni materiali e degli stravasi sanguigni, i quali per la presenza di un liquido ad azione anticoagulante energica, come è il metafosfato sodico, diventavano gravi, laddove in condizioni ordinarie sarebbero passati del tutto inosservati.

È nota l'azione precipitante dell'acido metafosforico o del metafosfato sodico in ambiente acido sugli albuminoidi (3) e mentre di questo fatto io doveva tener conto nell'interpretazione dei fenomeni tossici prodotti dal metafosfato, è evidente altresì che, avendosi in tutto l'organismo sempre un ambiente alcalino, tranne che nello stomaco e nelle vie urinarie dei carnivori, si poteva ritenere che, qualora nell'organismo avvenissero fatti di coagulazione o precipitazione di albuminoidi per opera del metafosfato, ciò fosse esclusivamente nello stomaco o nelle vie urinarie dei carnivori. Conveniva quindi stabilire se l'acidità normale di queste parti sia realmente bastevole per la reazione, ed è con questo intento che ho fatte le seguenti esperienze:

Esperienza 12ª (13 novembre 1903).

Un albume d'uovo viene sbattuto con quattro volumi d'acqua, quindi filtrato e su di esso si sperimenta l'azione precipitante del metafosfato in presenza di diversi acidi, usando però delle soluzioni acide abbastanza diluite, e tali che da sole non dànno alcun precipitato coll'albumina.

Si vide così che il metafosfato sodico cogli acidi cloridrico, nitrico, solforico, fosforico ed acetico precipita benissimo l'albumina.

Si vide che il solfato acido di sodio serve ancora benissimo, mentre poi il fosfato monosodico e l'acido carbonico non precipitano affatto l'albumina col metafosfato sodico.

Si vide in fine che, in presenza di fosfato monosodico occorre aggiungere molto più acido perchè la reazione avvenga.

Esperienza 13ª (13 novembre 1903).

Aggiungendo a dell'urina d'uomo o di cane normale e molto acida del metafosfato e dell'albumina d'uovo, non si ha alcun intorbidamento; questo si ha solo aggiungendo dell'acido. A parità di condizioni la reazione avviene più debole che in acqua pura; nell'urina occorre aggiungere più acido.

---

(1) Citato da Schulz.

(2) Schulz H., *Ueber die Giftigkeit der Phosphor-Sauerstoffverbindungen und über den Chemismus der Wirkung anorganischer Gifte*, " Arch. für ex. Pathol. und Pharm. ", Bd. 18 (1884), S. 174-208.

(3) Il precipitato è stato paragonato alle nucleine.

Esperienza 14^a (5 dicembre 1903).

A del siero di sangue di cane, diluito con 3 volumi d'acqua, aggiungeva del metafosfato sodico, poi delle quantità progressivamente crescenti di acido cloridrico, fino ad ottenere un lieve intorbidamento. Ripeteva poi questo saggio diverse volte, aggiungendo sempre più acqua, in modo che i reagenti si trovassero successivamente e sempre ad una concentrazione minore. Vidi così che la reazione col metafosfato ed acido cloridrico sulla siero-albumina compare quando il metafosfato e l'acido si trovano in un determinato rapporto, indipendente dalla diluzione. In un'altra serie di saggi, fatti in modo identico, determinava la quantità minima di acido che, per una quantità fissa di metafosfato, era sufficiente a dare il massimo di precipitazione dell'albuminoide; e vidi che ciò si ottiene quando i rapporti equivalenti fra metafosfato ed acido sono di 5 a 2; per poco che il metafosfato ecceda, il precipitato albuminoideo si ridiscioglie.

Esperienza 15^a (5 dicembre 1903).

Appena ucciso un coniglio colla puntura del bulbo, si apre lo stomaco, si vuota e si tocca ripetutamente la mucosa con un batuffolo di cotone bagnato con soluzione di metafosfato sodico $\frac{1}{4}$ N, ma non si osserva nessun cambiamento nella mucosa.

Bagnata poi in più parti con una soluzione di metafosfato, acidificata con acido cloridrico nei rapporti 5 a 2, come s'è visto nell'Esp. 14^a, la mucosa assumeva un aspetto bianco opalino. La soluzione era così preparata:

Di soluzione di metafosfato $\frac{1}{4}$ N cm^3 30
Di soluzione di HCl 3 $^0/_{00}$ cm^3 25.

Esperienza 16^a (5 dicembre 1903).

Si pongono pezzetti di muscoli delle pareti addominali, d'intestino, di polmone e di fegato in una soluzione di metafosfato sodico, acidificato come nella esperienza precedente.

I varî tessuti, più o meno presto, assumono un colorito biancastro, che compare prima dove più abbondante è il tessuto connettivo.

Passati poi nella serie degli alcool, inclusi, colorati, sezionati e montati dal Dott. Pasini, questi osservò che la soluzione acida suddetta di metafosfato è un buon fissatore.

Esperienza 17^a (6 dicembre 1903).

Cm^3 20 di sangue arterioso di cane, mescolati con cm^3 2 della soluzione acida di metafosfato sodico, usata nelle due esperienze precedenti, si conservarono indefinitamente liquidi, plasma incoloro, lattescente in alto, globuli rossi bene stratificati al fondo.

Esperienza 18^a (12 gennaio 1902).

Cavia m. di Chgr. 0,521. — Introdotti nello stomaco cm^3 15 di soluzione al 2,428 $^0/_0$ di metafosfato, l'animale non presentò nessun disturbo (gr. 0,70 per chilo).

Esperienza 19^a (12 dicembre 1903).

Coniglio m. di Chgr. 1,400.

16,10'. — Si introducono colla sonda nello stomaco cm^3 39 di solnzione $\frac{1}{4}$ N di metafosfato sodico.

(13 dicembre 1903).

9,30′. — L'animale non ha presentato alcun disturbo; ucciso colla puntura del bulbo, alla sezione non si riscontra nessuna lesione anatomica.

ESPERIENZA 20ª (11 gennaio 1902).

Cane f. di Chgr. 4,700. — Introdotti nello stomaco cm^3 40 di soluzione al 2,428 $^0/_0$ di metafosfato sodico, corrispondenti a gr. 0,97, a gr. 0,20 per chilo corporeo, l'animale stette sempre bene e non presentò il più piccolo disturbo.

Nell'urina non si conteneva nè albumina nè zucchero.

Da queste esperienze si vede che il metafosfato sodico dà precipitazione degli albuminoidi e fissazione dei tessuti solo quando trovasi in presenza di acidi forti (Esp. 12ª) e che l'acido carbonico ed il fosfato monosodico non sono sufficienti a ciò. Quindi nè l'acido carbonico, che il metafosfato sodico assorbito può incontrare nell'organismo, nè l'acidità dell'urina (Esp. 13ª), proveniente da fosfati primarî, possono far sì che il metafosfato dia luogo, o nei tessuti in genere, o nelle vie urinarie, a modificazioni funzionali dipendenti da precipitazione di albuminoidi. E notisi per giunta che verosimilmente nelle urine non passa neppure del metafosfato sodico (Esp. 36ª), e che se anche a dell'urina normalmente acidissima aggiungiamo ad arte del metafosfato e dell'albumina, a ciò si formi intorbidamento apprezzabile, conviene aggiungere più acido di quello che se si operasse in acqua pura (Esp. 13ª).

Da queste esperienze si vede inoltre che mentre l'acido cloridrico è adattatissimo a dare una buona reazione col metafosfato e gli albuminoidi, questa però avviene solo quando l'acido non è in troppo scarsa quantità; e che il rapporto equivalente fra metafosfato ed acido di 5 a 2 rappresenta la quantità minima di acido con cui si può ottenere il massimo di precipitazione albuminoidea. Quindi ben difficilmente nello stomaco, o per deficienza di acido gastrico, o per eccesso di metafosfato, rapidamente ingerito, potremo trovare quei rapporti favorevoli che del resto darebbero una lesione del tutto superficiale: ed in fatti nella cavia, nel coniglio ed anche nel cane, che pure ha una forte acidità gastrica, per introduzione di alte dosi di metafosfato nello stomaco non abbiamo osservato alcun disturbo funzionale, nè alcuna lesione anatomica.

In fine, se anche avvenisse assorbimento della soluzione acida di metafosfato, la quantità di essa sufficiente a dare l'azione caratteristica è così piccola, che tosto sarebbe ad esuberanza neutralizzata quella poca acidità della soluzione dagli alcali dell'organismo (Esp. 17ª).

Quindi riassumendo, non pare affatto credibile che nel determinismo delle manifestazioni generali e tossiche prodotte dal metafosfato sodico intervengano fenomeni di coagulazioni albuminoidee, neppure là dove, come nello stomaco e nelle vie urinarie dei carnivori, avendosi reazione acida, pareva la cosa più probabile.

Per lo studio dell'azione del metafosfato ho fatte numerose esperienze sulle rane, sulle cavie, conigli e cani, servendomi di iniezioni ipodermiche ed intraperitoneali nelle prime, e di iniezioni endovenose in tutti gli altri animali; ho poi fatte esperienze di applicazione diretta del metafosfato sulla corteccia cerebrale, sul midollo, sui nervi e sui muscoli, ed in fine ho fatti alcuni saggi di antagonismo fra metafosfato e calcio, analogamente a quello che già feci per il citrato. Di tutte queste esperienze però riporterò per esteso solo quelle che a me sembrano più interessanti:

Esperienza 21ª (15 gennaio 1902).

Rane del peso medio di gr. 30. — A cinque rane iniettai nel sacco linfatico dorsale rispettivamente cm^3 1 — 0,8 — 0,6 — 0,4 — 0,2 di soluzione al 2,428 °/₀ di metafosfato sodico.

Quella che n'ebbe cm^3 1, iniettata alle 17,19', alle 17,45' (dopo 26') si mostrava molto depressa; posta sul dorso si rialzava lentamente, con stento reagiva, debolmente, con movimenti tardi. Alle 17,57' (dopo 38') posta sul dorso non riusciva più a raddrizzarsi. Alle 18,8', posta sul dorso, non si raddrizza, ma stimolata reagisce discretamente, assai più di prima.

Quella che n'ebbe cm^3 0,8, iniettata alle 17,22', alle 18,8' (dopo 46') si mostrava molto depressa, nè altro di più presentò in appresso.

Quella che n'ebbe cm^3 0,6, iniettata alle 17,24', alle 18,10' (dopo 46') posta sul dorso era incapace di raddrizzarsi, reagiva fortemente agli stimoli, e spesso faceva contrazioni toniche generali di carattere tetanico. Alle 18,15' (dopo 51') si raddrizza bene quando viene posta sul dorso.

Quella che n'ebbe cm^3 0,4, iniettata alle 17,24', alle 18,8' (dopo 44') reagiva manifestamente in modo assai più vivace che in condizioni normali. Altro non si notò in appresso.

Quella che n'ebbe cm^3 0,2, iniettata alle ore 17,27', alle 18,8' (dopo 41') reagiva manifestamente con maggiore vivacità di quello che in condizioni normali.

(16 gennaio 1902).

Al mattino si trova che tutte queste rane stanno così bene, che non si sarebbero distinte da rane non tocche.

(25 gennaio 1902).

Dopo dieci giorni dall'iniezione stavano ancora perfettamente bene; uccise, alla sezione non presentavano nulla degno di nota.

Esperienza 22ª (17 gennaio 1902).

Rane del peso medio di gr. 30. — A cinque rane iniettai nella cavità addominale rispettivamente cm^3 1 — 1,2 — 1,4 — 1,6 — 1,8 di soluzione al 2,428 °/₀ di metafosfato sodico.

Quella che ebbe cm^3 1 dopo 8' si mostrava manifestamente un po' eccitata, ma poi dopo 35' reagiva assai meno vivacemente che in condizioni normali. Dopo 14 ore giaceva sdraiata sul dorso, ma dopo 16 ore si raddrizzò da sè, e stette poi sempre benissimo, sì che il 26 (dopo 9 giorni) si tralasciò l'osservazione.

Quella che ebbe cm^3 1,2, dopo 6' posta sul dorso non poteva più raddrizzarsi, ma stimolata reagiva fortemente; dopo 17'. stimolata, faceva contrazioni a carattere tetanico. Dopo 34' reagiva poi pochissimo, e dopo 14 ore si trovò morta.

Quella che ebbe cm^3 1,4 dopo 15' posta sul dorso non si raddrizzava più e reagiva debolmente; dopo 32' reagiva appena; ma poi dopo 14 ore si era del tutto ristabilita, e stette poi benissimo anche nei giorni successivi.

Quella che ebbe cm^3 1,6 dopo 15' si mostrava già molto depressa; dopo un'ora, posta sul dorso, non si raddrizzava più e reagiva pochissimo agli stimoli; 14 ore dopo stava immobile, giacente sul dorso, ma poi a poco a poco si ristabilì completamente e stette poi sempre benissimo, sì che il giorno 26 verso sera venne uccisa.

Quella che ebbe cm^3 1,8 dopo 14' si mostrava molto depressa; dopo un'ora, posta sul dorso si raddrizzava con stento e reagiva pochissimo agli stimoli. Dopo 14 ore stava sdraiata, supina, e stimolata rispondeva con contrazioni toniche generali. A poco a poco anche questa rana si ristabilì e stette poi sempre benissimo.

Esperienza 25ª (8 luglio 1903).

Cane f. di Chgr. 6,600.

18,58′. — } In tre riprese si iniettano cm³ 57 della solita soluzione di metafosfato; si hanno
19, 8′. — } dapprima violenti e ripetuti accessi convulsivi a carattere tetanico, alternati da periodi di quiete, si notano contrazioni di muscoli isolati, poi contrazioni fibrillari, indi depressione ed arresto di cuore mentre il respiro dura ancora per qualche tempo.

Il sangue raccolto dal cuore era interamente liquido e coagulava bene, quantunque un po' lentamente.

Questo animale morì con gr. 1,38 = gr. per chilo corporeo 0,21.

Esperienza 26ª (8 luglio 1903).

Coniglio di Chgr. 0,890.

16,29′. — }
16,33′. — } Iniettto nella giugulare destra cm³ 6,6 di soluzione al 2,428 % di metafosfato sodico.

Durante l'iniezione l'animale presenta scosse convulsive forti, generali, a carattere prevalentemente tonico; in appresso presenta contrazioni di muscoli isolati, poi tremiti fibrillari, indi verso la fine dell'iniezione il respiro s'arresta, ma il cuore pulsa sempre bene e validamente.

16,35′. — A poco a poco il respiro spontaneamente è ricomparso, ma l'animale è molto depresso e solo ad intervalli presenta lievi scosse convulsive.

16,40′. — Sta bene e cammina.

(9 luglio 1903).

Sta sempre bene.

Questo animale in 4′ ebbe cm³ 6,6 = gr. 0,16 = gr. per chilo corporeo 0,18.

Esperienza 27ª (8 luglio 1903).

Coniglio di Chgr. 1,299.

16,49′. — } Iniezione nella giugulare sinistra di cm³ 9,5 di soluzione al 2,428 % di meta-
16,53′ 30″. — } fosfato sodico.

Si hanno dapprima scosse convulsive a carattere tetanico, poi contrazioni isolate e tremiti, indi arresto del respiro, con che l'animale muore, mentre il cuore seguita a pulsare a lungo.

Il sangue raccolto dal cuore è interamente liquido e tale resta ancora dopo 24 ore.

Questo animale morì dopo aver ricevuti in 4′ ½ cm³ 9,5 = gr. 0,23 = gr. per chilo corporeo 0,17.

Esperienza 31ª (13 luglio 1903).

Coniglio di Chgr. 1,210. — Praticata la nefrectomia bilaterale con taglio lombare, immediatamente dopo si pratica una iniezione lentissima di metafosfato sodico per la vena giugulare destra.

16,51′. — }
17,32′. — } Iniezione di cm³ 10 di soluzione solita al 2,428 %.

Durante l'iniezione l'animale non ha presentato alcun disturbo.

18,41′. — (Dopo un'ora e 9′ dal termine della iniezione) viene ucciso con un colpo alla nuca e raccolto il sangue dal cuore. Si lascia coagulare per raccogliere il siero.

(14 luglio 1903).

Questo coniglio, cui erano stati asportati i reni, sopportò senza presentare alcun disturbo cm³ 10 di soluzione = gr. 0,243 = gr. per chilo corporeo 0,20 iniettati in 41'.

Esperienza 33ª (30 dicembre 1901).

Cavia f. di Chgr. 0,515. — Si inietta nella vena giugulare sinistra della soluzione solita di metafosfato.

10,52'. — Prima iniezione di cm³ 1,5. Compare una convulsione generale di carattere tetanico.
10,54'. — Seconda iniezione di cm³ 2,0. L'animale si mostra depresso, respiro superficiale, raro.
10,55'. — Terza iniezione di cm³ 1,5. Si ha arresto del respiro e del cuore.

Aperto il torace, il cuore è fermo, flaccido, ineccitabile. Il sangue raccolto dal cuore si conserva liquido, ancora dopo 7 ore.

Questo animale in 3' ebbe cm³ 5 = gr. 0,12 = gr. per chilo 0,23.

Nella seguente tabella trovansi riuniti i dati principali e l'esito di tutte le esperienze fatte sui mammiferi con iniezioni endovenose di metafosfato sodico al 2,428 %:

Esperienza	Animale	Peso in Chgr.	Iniezione di metafosfato in minuti	in cm³	in gr.	in gr. per chilo	in grammi per chilo e minuto (velocità)	Esito dell'animale
23	cane	4,900	5	2,8	0,68	0,14	0,028	M
24	„	6,700	2	29,5	0,72	0,11	0,055	M
25	„	6,600	10	57,0	1,38	0,21	0,021	M
26	coniglio	0,890	4	6,6	0,16	0,18	0,045	V
27	„	1,299	4 ½	9,5	0,23	0,17	0,038	M
28	„	0,925	2	7,0	0,17	0,18	0,090	M
29	„	1,510	2 ½	11,5	0,28	0,18	0,072	M
30	„	0,830	25	10,0	0,24	0,29	0,012	V
31	„	1,210	41	10,0	0,24	0,20	0,005	V
32	„	1,340	2	6,0	0,14	0,11	0,054	V
33	cavia	0,515	3	5,0	0,12	0,23	0,077	M
34	„	0,517	3	4,2	0,10	0,19	0,063	M
35	„	0,462	2	3,7	0,09	0.19	0,095	M

Da questi dati risulta che per via endovenosa la dose letale di metafosfato sodico per chilo corporeo è:

nel cane di gr. 0,15
nel coniglio „ „ 0,18
nella cavia „ „ 0,20

Se poi ordiniamo queste esperienze secondo la velocità della iniezione, disponendole in gruppi naturali, secondo l'animale adoperato, si vede che la tolleranza al metafosfato cresce quando l'iniezione procede lenta:

Esperienza	Velocità della iniezione	Cane		Coniglio		Cavia	
		gr. iniettati	esito	gr. iniettati	esito	gr. iniettati	esito
35	0,095	—	—	—	—	0,19	M
28	0,090	—	—	0,18	M	—	—
33	0,077	—	—	—	—	0,23	M
29	0,072	—	—	0,18	M	—	—
34	0,063	—	—	—	—	0,19	M
24	0,055	0,11	M	—	—	—	—
32	0,054	—	—	0,11	V	—	—
26	0,045	—	—	0,18	V	—	—
27	0,038	—	—	0,17	M	—	—
23	0,028	0,14	M	—	—	—	—
25	0,021	0,21	M	—	—	—	—
30	0,012	—	—	0,29	V	—	—
31	0,005	—	—	0,20	V	—	—

Schulz aveva osservato che un grammo di metafosfato, iniettato a dosi refratte nel tempo di alcuni giorni non dà alcun disturbo, e questo fatto, che è conforme a quello ora notato da noi, ci dimostra che la tossicità del metafosfato è legata ad una modificazione rapida dell'organismo, la quale si ottiene solo allorchè la concentrazione del metafosfato raggiunge un determinato valore, e non dipende affatto da modificazioni lente, paragonabili a quelle del fosforo.

Questa variazione della dose letale minima in rapporto colla velocità dell'iniezione è conforme a quella che abbiamo notato per altri sali, ma parmi sia meno spiccata che per il carbonato e per la soda. Si può quindi credere che il metafosfato sodico, iniettato nelle vene, venga eliminato, o trasformato in prodotti meno tossici, ma ciò assai meno prontamente che per il carbonato sodico. Appare poi più verosimile che il metafosfato si trasformi nell'organismo in prodotti innocui o meno tossici, di quello che si elimini rapidamente, poichè nell'urina di animali, che hanno assunto per bocca alte dosi di metafosfato, non se ne trova.

Esperienza 36ª (13 dicembre 1903).

Coniglio m. di Chgr. 1,250.

14,15′. — Si introducono nello stomaco colla sonda cm^3 30 di metafosfato $\frac{1}{4}$ N.

16,30′. — L'urina che ha emessa è limpidissima e lievissimamente alcalina. Dà coll'albumina ed HCl reazione negativa per il metafosfato.

16,38′. — L'urina emessa al momento è come per solito torbida, fortemente alcalina. Dà come sopra reazione negativa.

(14 dicembre 1903).

7,45′. — L'urina raccolta è torbida e dà reazione negativa di metafosfato. Appare in tutto normale, e non contiene neppure traccia di albumina.

10,5′. — Ucciso; alla sezione non si osserva alcuna lesione nè nello stomaco nè negli altri organi.

Certamente la tolleranza maggiore alle iniezioni lente non può essere attribuita ad una eliminaziono rapida per i reni, poichè nell'Esperienza 31, essendo stati asportati i reni, l'animale tollerò così bene l'iniezione di una dose alta di metafosfato sodico, iniettata lentamente, come nell' Esperienza 30, in cui i reni erano integri. D'altra parte i rapporti chimici che passano fra acido meta- piro- ed orto-fosforico inducono a credere che per un semplice processo di idratazione il metafosfato sodico possa trasformarsi nell'organismo in ortofosfato acido di sodio,

$$PO\begin{cases}O\\ \\ ONa\end{cases} + \begin{matrix}H\\ OH\end{matrix} = PO\begin{cases}OH\\ OH\\ ONa\end{cases},$$

il quale è sicuramente assai meno tossico del metafosfato, può ad alte dosi dare fenomeni riferibili alla acidità sua, come vedremo che fa il fosfato bisodico, allorchè per la presenza dell'acido carbonico si trasforma parzialmente in fosfato acido, ma non può dare fenomeni fisiologici gravi, riferibili a decalcificazione, poichè il fosfato monocalcico è solubilissimo, bene dissociato elettroliticamente, e serve benissimo per la coagulazione del sangue.

Come media di due esperienze ho trovato che la dose letale di fosfato monosodico è nel coniglio di gr. 1,64 per chilo corporeo (1), gr. 1,42 se si considera il sale anidro, mentre abbiamo visto sopra che per il metafosfato sodico la dose letale è nel coniglio di gr. 0,18. Abbiamo quindi che a produrre la morte del coniglio in 4' minuti occorrono in media per chilo d'animale gr.-molecola 0,00176 di metafosfato e gr.-molecola 0,01188 di ortofosfato monosodico; da ciò si comprende che, se il metafosfato si trasforma in fosfato primario e l'iniezione procede lenta, debbono diventare innocue quelle dosi che, rapidamente iniettate, riuscirebbero letali; ma da ciò pure si vede che la tossicità del metafosfato non può essere riferita ad una trasformazione sua in fosfato acido.

Per le cose che vedremo a suo luogo, circa le trasformazioni nell'organismo del fosfato bisodico in fosfato monosodico a contatto dell'acido carbonico, già *a priori* non pare neppure possibile che la tossicità del metafosfato dipenda da una trasformazione di esso nell'organismo in fosfato bisodico, ed i dati di fatto lo escludono recisamente; vedremo che la dose letale media del fosfato bisodico è nel coniglio di gr. 2,10 per chilo corporeo, il che in gr.-molecola corrisponde a 0,00586, dose questa mole-

---

(1) *Esperienza 37*ª. — 13 luglio 1903.

Coniglio di Chgr. 0,930.

10,55' – 11,00' Iniezione nella giugulare destra con soluzione al 10 % di fosfato monosodico ($NaH^2PO^4 + H^2O = 138$). Si ha dapprima affanno di respiro, poi convulsioni asfittiche ed arresto di cuore. — L'animale ebbe in 5' gr. 1,60 = gr. per chilo 1,72.

*Esperienza 38*ª. — 13 luglio 1903.

Coniglio di Chgr. 1,215.

11,13',30'' – 11,17',30'' Iniezione nella giugulare destra di cm³ 19 della soluzione sopradetta. — Stessi sintomi. — Il sangue raccolto dal cuore coagula bene.

Questo animale ebbe in 4' gr. 1,90 = gr. 1,56 per chilo corporeo.

colarmente più che tripla del metafosfato sufficiente a produrre la morte (grammimolecola 0,00176).

Riesce invece assai difficile stabilire se la tossicità del metafosfato possa dipendere o no, in parte od in tutto, da pirofosfato acido che, come prodotto primo di idratazione, può formarsi dal metafosfato. Trattando dell'azione del metafosfato sodico sul sangue *in vitro*, dimostrai che provoca incoagulabilità per sè stesso e non per prodotti suoi di idratazione: dimostrai che a contatto delle materie albuminoidi e del sangue *in vitro*, se subisce un processo di idratazione, ciò avviene molto lentamente; ma questo risultato sperimentale *in vitro* non esclude che nell'organismo vivo non possa avvenire il contrario, ed il dubbio diventa più grave quando si osserva che la tossicità del pirofosfato acido di sodio, rispetto a quella del metafosfato, stando ai rapporti molecolari loro di formazione, è più che doppia di quello che per il metafosfato:

$$2\,NaPO^3 + H^2O = Na^2H^2P^2O^7$$

$$2 \times 102 + 18 = 222.$$

La dose letale media per chilo corporeo di metafosfato nel coniglio, la quale è di gr. 0,18, se interamente si trasformasse nell'organismo in pirofosfato acido, corrisponderebbe a gr. 0,195 di questo, mentre fra poco vedremo che a produrre la morte nel coniglio di un chilo bastano soltanto gr. 0,087 di pirofosfato, ossia una dose minore della metà di quella che potrebbe originarsi dalla dose di metafosfato necessaria a produrre la morte.

È quindi pienamente giustificato il dubbio che la grande tossicità del metafosfato sodico dipenda non dal metafosfato stesso, ma da pirofosfato sodico che per processo di idratazione si può formare dal metafosfato, e questo dubbio, che si potè allontanare con sicurezza allorchè si studiava l'azione anticoagulante del metafosfato sul sangue *in vitro*, ora invece riesce alquanto difficile allontanarlo interamente.

Aveva pensato che si potesse risolvere questo dubbio tenendo conto da una parte dei dati chimici relativi alla velocità di idratazione degli acidi meta- e piro- fosforico e dall'altro della diversità di tolleranza che gli animali presentano alle iniezioni lente dei sali sodici relativi, considerando che quello che più velocemente si idrolizza meglio dovesse venire tollerato per iniezioni lente; ma le incertezze chimiche da un lato e le differenze poco spiccate che otteneva sugli animali non mi permisero di trarre da questi dati un giudizio discriminativo sicuro, molto più che i risultati delle esperienze chimiche sulla velocità di idratazione degli acidi liberi non possono essere valevoli anche per i sali, i quali assai meno si idratano, e le soluzioni loro si conservano assai meglio che quelle degli acidi.

Se però si considera l'istantaneità dell'azione generale del metafosfato iniettato direttamente nelle vene, e l'azione sua per applicazione diretta sulla corteccia, sul midollo, sui muscoli, sui nervi, converrebbe dire che la supposta trasformazione in pirofosfato sia istantanea e possa essere operata egualmente bene da diversi tessuti, le quali cose non sembrano probabili, e diventano anche meno probabili di fronte al comportamento del metafosfato sul sangue *in vitro*, nel qual caso l'azione decalcificante diretta del metafosfato non può più essere posta in dubbio.

Ma a questo punto possiamo osservare che se l'azione tossica del meta- e pirofosfato sodico dipende da una decalcificazione che essi stessi direttamente provocano sui protoplasmi, così come fanno sul sangue *in vitro*, è perfettamente logico che la tossicità del metafosfato sia molecolarmente un quarto circa di quella del pirofosfato, poichè mentre una molecola di metafosfato può fissare un equivalente di calcio, una molecola di pirofosfato ne può fissare quattro. Le dosi letali minime per chilo corporeo nel coniglio e per iniezioni nelle vene del meta- e piro-fosfato sodico, calcolate in gr.-equivalenti diventano eguali, il che dimostra come la tossicità loro sta in rapporto diretto della valenza chimica.

	Dose letale	
	in gr.	in gr. equivalenti
Metafosfato sodico . . .	0,180	0,0017
Pirofosfato sodico . . .	0,087	0,0015

La concordanza perfetta di questi dati sperimentali da sola basta ad allontanare i dubbî suesposti, circa il modo d'agire del metafosfato, il quale però è da ritenere sia di per sè stesso tossico, in quanto sottrae del Ca-jone ai protoplasmi, analogamente a quello che fanno gli altri reattivi decalcificanti.

Infatti, come il citrato trisodico, così pure il metafosfato sodico per applicazione diretta sulla corteccia, sul midollo ecc., dà fenomeni intensi di eccitazione; e fra il metafosfato ed il calcio si hanno fatti chiarissimi di antagonismo.

Esperienza 39ª (8 gennaio 1902).

Cane f. di Chgr. 4,500. — Sopra la corteccia cerebrale a destra applico della soluzione di metafosfato sodico al 2,43 % e saggio la eccitabilità elettrica.

10,30'. — Si ha movimento sensibile dell'arto anteriore sinistro coi rocchetti della slitta a mm. 145
10,40'. — " " " " 150
10,52'. — Dopo una prima applicazione di metafosfato per 10' " 150
11,3'. — Dopo una seconda applicazione " 175
11,16'. — Dopo una terza applicazione " 200
11,29'. — Dopo una quarta applicazione " 225
e presenta poi scosse epilettiche forti all'arto anteriore sinistro.
11,44'. — Dopo una quinta applicazione " 220
e come sopra presenta scosse epilettiche all'arto anteriore sinistro.

Esperienza 40ª (10 gennaio 1902).

Cane m. di Chgr. 7,400. — Sperimento sulla zona motrice di sinistra con una soluzione di metafosfato sodico al 2,43 %, avendo cura speciale in questa esperienza di non fare alcuna eccitazione elettrica.

Alle 13,49' comincio ad applicare la soluzione, e cambiando spesso il batuffoletto di cotone, seguito fino alle 14,30'. A questo momento scoppia un accesso epilettico spontaneo, grave e lungo, che comincia con scosse tonico-cloniche dell'arto superiore destro, si diffonde all'inferiore pure di destra, e passa quindi al muso ed al resto del corpo.

Dopo l'accesso l'animale resta abbattuto.

Alle 14,40', durando sempre l'applicazione del metafosfato, si hanno scosse epilettiche limitate all'arto anteriore destro, ma alle 14,48' scoppia un secondo accesso generale violento, più lungo del primo, e come quello si svolge dall'arto anteriore destro al posteriore destro, posteriore sinistro, anteriore sinistro, testa e collo. Termina con grande agitazione e grida dell'animale, che ha salivazione profusa.

Alle 14,50' si ha un terzo accesso.

Alle 15 si notano scosse epilettiche quasi continue all'arto anteriore destro.

Alle 15,2' si ha un quarto accesso epilettico generale.

Alle 15,7' quinto accesso più debole.

Alle 15,10' sesto accesso più forte.

Alle 15,16' settimo accesso.

Alle 15,28', lasciato libero l'animale, cammina malamente, fa pochi passi, poi cade, presentando un ottavo accesso epilettico generale. Dopo ciò resta depresso molto, ma poi si ristabilisce alquanto, ed alle 17,17' mangia con avidità.

Esperienza 41ª (22 marzo 1902).

Cane m. di Chgr. 6,500. — Scoperta la zona motrice di sinistra, senza fare alcun saggio di eccitabilità elettrica, vi applicai al modo solido un batuffoletto di cotone imbevuto di soluzione al 2,43 $^0/_0$ di metafosfato sodico: ciò dalle 17,45' alle 18,21', per 36'.

Comparvero allora accessi epilettici, che cominciavano con scosse all'arto anteriore destro e si generalizzavano poi come al solito rapidamente; si ripeterono gli accessi sempre più spesso, e negli intervalli si notavano scosse miocloniche continue, dapprima all'arto anteriore destro, di poi anche al posteriore destro; si ebbe in fine uno stato epilettogeno quasi continuo. Si uccise allora l'animale aprendo le carotidi, ed il Prof. Roncoroni l'usufruì per ricerche istologiche sulla corteccia.

Esperienza 42ª (7 gennaio 1902).

Cane m. di Chgr. 3,700. — Scoperta la corteccia cerebrale a sinistra, dopo riposo di $^1/_2$ ora vi applico della soluzione di metafosfato sodico al 2,43 $^0/_0$.

11,40'. — Si ha movimento dell'arto anteriore destro a mm. 135

11,50'. — Si ha movimento a „ 145

12, 2'. — Si ha movimento a „ 160

12,16'. — Si ha movimento a „ 155

12,30'. — Dopo una 1ª applicazione per 10' di metafosfato „ 160

12,42'. — Dopo una 2ª applicazione „ 185

12,55'. — Dopo una 3ª applicazione, appena si tocca la corteccia colla pinza elettrica, essendo i rocchetti a 185 mm., subito si ha un movimento violento e scosse epilettiche all'arto anteriore destro.

Diminuita l'intensità della corrente, si ha movimento evidente della zampa anche a mm. 240, ed avendo provata varie volte questa corrente, scoppia poi un accesso epilettico fortissimo, generale, assai lungo.

13,4'. — Applico sulla corteccia della soluzione di cloruro calcico al 2 $^0/_0$, ed ottengo che poco dopo scoppia un secondo accesso epilettico (13,8') pure fortissimo, ma fu l'ultimo. Dopo 10', da che s'era applicato il calcio, si aveva movimento evidente della zampa solo coi rocchetti a mm. 110.

Esperienza 43ª (8 gennaio 1902).

Cane f. di Chgr. 4,500. — Alle ore 15,35' colla puntura lombare introduco nel canale spinale cm^3 0,2 di soluzione all'1,214 $^0/_0$ di metafosfato sodico, ed ottengo istantaneamente tetano e rigidità in estensione fortissima e persistente degli arti posteriori e della coda.

Si ha poi tetano netto anche al treno anteriore, con opistotomo e trisma; quindi si notano scosse violenti ad accessi, ed i riflessi sono esageratissimi.

Alle 16 il tetano diminuisce, l'animale si mostra assai debole, specie nel treno posteriore, per cui non si regge affatto in piedi.

Alle 18 il cane si regge bene in piedi, cammina e mangia con avidità.

Il giorno dopo stava sempre benissimo.

Da tutto quello che abbiamo esposto fin qui appare evidente che l'azione tossica del metafosfato sodico non è affatto paragonabile a quella del fosforo, che non è minimamente legata all'azione coagulante dell'acido metafosforico sopra gli albuminoidi, che non dipende certo da prodotti di idratazione dell'acido metafosforico; ma dal metafosfato sodico per sè stesso.

Resta dimostrato che le modificazioni organiche prodotte dal metafosfato, le quali sono causa delle manifestazioni tossiche, sono certamente molto delicate e facilmente riparabili, e si ottengono soltanto per una introduzione rapida della sostanza.

Resta dimostrato che le manifestazioni di eccitazione generale e locale sulla corteccia, sul midollo ecc., in tutto paragonabili a quelle del citrato, dipendono da una diminuzione brusca nella concentrazione del Ca-jone protoplasmatico, prodotta dal metafosfato, poichè scompaiono con applicazioni di calcio.

4. *Pirofosfato di sodio.*

Schulz (1) trovò che con gr. 0,50 di pirofosfato tetrasodico ($Na^4P^2O^7$) per via ipodermica i conigli vengono a morte in 12 ore, e con gr. 1 in 3-4 ore; io, colle esperienze seguenti, dopo avere visto che l'azione generale del pirofosfato tetra- e bisodico è presso a poco la stessa, ho determinata la dose minima letale del pirofosfato bisodico per chilo corporeo e per iniezione endovenosa nei conigli. L'acidità di questo sale è paragonabile a quella del fosfato monosodico, è di poco momento, e riesce del tutto indifferente agli animali per le piccole dosi di pirofosfato sufficienti ad ucciderli.

Ho poi fatte alcune esperienze sul midollo spinale del cane per assicurarmi che veramente anche in questo modo il pirofosfato sodico si comporta come gli altri reattivi decalcificanti. Di tutte le esperienze fatte riporto poi per esteso solo quelle che a me sembrano più importanti.

Esperienza 44ª (29 aprile 1902).

Cane f. di Chgr. 2,300. — Nella vena femorale destra inietto della soluzione di pirofosfato neutro di sodio al 5,60 %.

Dopo iniezioni di cm^3 0,5 l'animale si lamenta fortemente. — Dopo cm^3 6,5 si ha tetano fortissimo.

Per un incidente sorto durante l'esperienza il resto dell'osservazione va perduta.

Sappiamo quindi da ciò che gr. 0,364 di pirofosfato tetrasodico (= gr. per chilo corporeo 0,16 = gr.-molecola per chilo corporeo 0,0006 = gr.-equivalenti per chilo 0,0024) dànno accesso convulsivo intenso a carattere nettamente tetanico.

(1) Loc. cit.

Esperienza 45ª (15 luglio 1903).

Coniglio di Chgr. 1,370.

15,24'. — } Inietto nella vena giugulare destra cm^3 3,4 di soluzione al 4 % di pirofosfato
15,25' 30" — } acido di sodio.

Durante l'iniezione l'animale presenta accessi convulsivi intensi a carattere tonico con opistono. Poi si ha arresto del cuore e quindi anche del respiro.

Aperto subito il torace, si trova il cuore fermo, ineccitabile; il sangue raccolto dal cuore è interamente liquido e tale resta anche dopo più di 24 ore.

Questo animale morì con gr. 0,136 = gr. per chilo corporeo 0,100, iniettati in 1' 1/2.

Esperienza 47ª (15 luglio 1903).

Coniglio di Chgr. 1,720.

16,11'30". — } Iniezione nella vena giugulare destra con cm^3 6 di soluzione al 2 % di piro-
16,16'15". — } fosfato acido.

Il coniglio muore con fenomeni identici a quelli descritti nella esperienza precedente.

Alla sezione, fatta subito, si trova il cuore fermo ed ineccitabile, il sangue liquido interamente, che però coagulava bene con grande lentezza.

Questo animale ebbe in 4' 3/4 gr. 0,120 = gr. per chilo corporeo 0,070.

Esperienza 50ª (4 aprile 1902).

Cane f. di Chgr. 3,000. — Scoperto il midollo lombare, lo bagnai mercè un pennellino di vaio con una soluzione al 5,6 % di pirofosfato sodico neutro; dapprima solo da un lato, ed ebbi tetano unilaterale, poi da ambo i lati ed ebbi tetano generale.

Esperienza 51ª (5 aprile 1902).

Cane m. di Chgr. 3,800. — Scoperto il midollo spinale ai lombi, lo bagno dal lato destro al modo solito, con una soluzione al 5,6 % di pirofosfato sodico acido; tosto dal lato destro compare una contrazione tonica fortissima e persistente, con incurvamento di tutto il tronco verso destra, a guisa d'un arco. Sollevato poi il midollo, e passando del liquido a sinistra, si ebbe un tetano netto, generale e fortissimo.

Da queste esperienze si vede che tanto col pirofosfato bisodico, che col tetrasodico, per iniezione endovenosa nel cane e nel coniglio, o per applicazione diretta sul midollo spinale, sempre si hanno intensissimi fenomeni di eccitazione, ai quali segue, come anche per gli altri reattivi decalcificanti, depressione e morte.

Per ciò poi che riguarda l'azione tossica, nella seguente tabella ho riuniti i dati delle esperienze fatte sui conigli:

Esperienza	Animale	Peso dell'animale in Chgr.	Iniezione di pirofosfato acido					Esito dell'animale
			in minuti	in cm^3	al %	in gr. per chilo	in gr. per chilo e min. (velocità)	
45	coniglio	1,370	1 1/2	3,4	4	0,100	0,066	M
46	"	1,510	1 1/2	2.1	4	0,068	0,045	M
47	"	1,720	4 3/4	6,0	2	0,070	0,014	M
48	"	1,360	31	9,3	2	0,136	0,004	M
49	"	1,480	4	4,5	2	0,060	0,015	M

Da ciò si vede che la dose letale media nel coniglio è di gr. 0,087 per chilo corporeo; e se si prescinde dalle esperienze 45 e 46, fatte con rapidità eccessiva, e con soluzioni troppo concentrate, data la tossicità grande del pirofosfato acido di sodio, si vede inoltre evidente l'influenza che la velocità della iniezione esercita sulla grandezza della dose letale:

Esperienza	velocità della iniezione	dose letale per chilo corporeo
48	0,004	0,136
47	0,014	0,070
49	0,015	0,060

E veramente le esperienze 45 e 46 furono fatte con eccessiva velocità, e s'ebbe la morte per azione diretta sul cuore, prima che il sale iniettato avesse tempo di diffondersi ai tessuti: prova ne sia che in queste due esperienze si notò arresto rapidissimo del cuore, il quale alla sezione, fatta subito, era ineccitabile meccanicamente, e che il sangue raccolto da esso era incoagulabile, il che ci attesta una decalcificazione intensa subita da esso, tale da renderlo incoagulabile, e quale non si avvera mai, non solo col pirofosfato, ma neppure con alcuno degli altri sali decalcificanti, allorchè si fa l'iniezione con lentezza sufficiente, a che possa aversi il passaggio del reattivo dal sangue ai tessuti, nel qual caso si immobilizza del Ca-jone dei tessuti in quantità tale, che è incompatibile colla vita, prima ancora che si sia immobilizzato tanto Ca-jone del sangue da renderlo incoagulabile.

È indubitato poi che la tossicità del pirofosfato bisodico dipende dal pirofosfato stesso e non da derivati suoi, metafosfato od ortofosfato, perocchè esso è il più tossico di tutti questi:

Quantità corrispondenti dei sali		dose tossica per chilo corporeo	$\frac{c}{b}$
a	*b*	*c*	*d*
$2NaPO^3$	= 204	gr. 0,18	0,0008
$Na^2H^2P^2O^7$	= 222	„ 0,08	0,0003
$2NaH^2PO^4$	= 240	„ 1,42	0,0059

5. *Fosfato bisodico.*

Il fosfato sodico ordinario, $Na^2HPO^4 + 12H^2O = 358$, è un eccellente reattivo precipitante del calcio, e quindi, allorchè viene aggiunto alle soluzioni acquose nei tubi da saggio del chimico, precipita il calcio e ne diminuisce la concentrazione jonica, aggiunto al sangue diminuisce ancora la concentrazione jonica del calcio esistente in esso (1), e ciò tanto più quanto maggiore è la quantità di fosfato aggiunto, sì che presto s'arriva ad un valore per il quale la concentrazione del Ca-jone è insufficiente alla coagulazione, ed allora il sangue resta indefinitamente liquido. Analogamente, allorchè s'inietta del fosfato bisodico nelle vene dell'animale, si provoca una diminuzione nella concentrazione del calcio-jone degli organi, diminuzione, che si fa sempre più grave col crescere della quantità di fosfato iniettata, e presto è causa di disturbi

(1) Cfr. *Funzione biologica del calcio*, Parte II, loc. cit.

funzionali, i quali, come vedremo, dipendono, almeno in parte, da deficienza di calcio-jone.

L'importanza grande che hanno i fosfati alcalini ed alcalino-terrosi nell'economia animale; i rapporti chimici e farmacologici che passano fra i varî acidi ossigenati del fosforo ed il fosforo stesso; le questioni fisio-patologiche relative alla degenerazione grassa che si produce nell'avvelenamento per fosforo; l'alcalinità del sangue e l'acidità dell'urina nei carnivori, strettamente legate alla presenza di sali alcalini primarî e secondarî dell'acido ortofosforico; le questioni chimiche e fisiologiche relative al lavoro del rene, che da un liquido alcalino elabora un secreto acido; la presenza ed importanza del fosforo in alcuni proteidi, sono questioni di una importanza grandissima, che io oso appena ricordare qui ora, questioni tutte che si rannettono intimamente al contegno dei fosfati nell'organismo.

Lo studio dell'azione decalcificante del fosfato bisodico appare quindi molto più interessante che per gli altri sali, ma presenta anche difficoltà speciali, dipendenti dai caratteri chimici suoi, poichè essendo il terzo atomo d'idrogene dell'acido fosforico pochissimo dissociabile, ed il secondo pure poco, in soluzione acquosa il sale bisodico subisce idrolisi parziale e reagisce alcalino sulle carte di tornasole.

Farmacologicamente viene considerato come un preparato alcalino, mentre chimicamente è un sale acido e l'acidità sua, come vedremo, si manifesta intensa nell'atto stesso in cui opera come decalcificante. Da ciò ne viene che la sintomatologia dell'avvelenamento per fosfato bisodico è molto più complessa, varia e difficile da interpretare, di quello che per la maggior parte degli altri sali di cui ci occupiamo attualmente.

Le esperienze che ho fatte con questo sale sono numerosissime, ma, come al solito, solo di poche riferirò la descrizione per esteso, riunendo poi in una tabella finale i dati principali e l'esito di tutte.

Esperienza 53ª (4 dicembre 1902).

Cane f. di Chgr. 8,700. — Si inietta nella vena femorale destra della soluzione di fosfato bisodico al 17 $^0/_0$, tiepida.

17,15'. — Comincia l'iniezione.

17,19'. — Arresto lungo di respiro, pause inspiratorie lunghissime.

17,20'. — Si sospende l'iniezione a cm^3 85 perchè compare tetano, specie ai muscoli della nuca e mandibola; le pupille sono dilatate; il respiro è arrestato; ma il cuore pulsa validamente. Si fa un po' di respirazione artificiale comprimendo il torace.

17,21'. — L'animale respira da sè.

17,23'. — Ripresa l'iniezione, subito si ha arresto di respiro.

17,24'. — Forte spasmo della glottide; torace fermo e rigido in inspirazione forzata; trisma intenso. Scompare poi il reflesso oculo-palpebrale, mentre il cuore pulsa ancora bene.

17,25'. — Seguitando sempre l'iniezione, l'animale pare si calmi; fa rari respiri con lunghi arresti in inspirazione.

17,27'. — Si termina l'iniezione a cm^3 167, e l'animale è del tutto rilasciato, la lingua è cianotica, presenta tremiti fibrillari diffusi, il respiro è arrestato; ma il cuore pulsa sempre validamente. Si fa la respirazione artificiale comprimendo il torace.

17,29'. — Si osserva che, quando colla respirazione artificiale scompare la cianosi, si ha trisma fortissimo, rigidità alla nuca ed ai muscoli toracici, lieve agli arti; poi tetano fortissimo, generale. Tralasciando la respirazione artificiale, che quasi non si può fare durante l'accesso tetanico, l'animale si fa di nuovo cianotico e si rilascia. Allora, facendo di bel nuovo la respirazione artificiale, collo scomparire della cianosi ricompare il tetano.

17,31'. — Respira da sè in uno stato lieve di cianosi.

17,32'. — Stimolato, ricompare un accesso tetanico lieve.

17,33'. — Respira da sè. Ha opistotono, e quando tenta di reggersi in piedi viene colto da contratture agli arti posteriori.

17,35'. — È calmo, profondamente depresso, ancora incapace a reggersi in piedi.

18,15'. — Improvvisamente è colto da accesso tetanico forte, dopo il quale presenta respiro affannoso (110 respiri al minuto).

18,40'. — È calmo, respira tranquillo, non ha più tetano, è incapace a reggersi in piedi, poichè al minimo sforzo viene colto da tetano: emette urina di reazione fortemente acida.

19,40'. — Si trova morto.

(5 dicembre 1903).

12,—'. — Alla necroscopia si nota: rigidità cadaverica forte; grumi di sangue nero in tutte le cavità del cuore e nei grossi vasi. L'urina contenuta in vescica è fortemente acida.

Questo animale ha ricevuto in 12' cm^3 167 di soluzione al 17 $^0/_0$ = gr. 28,39 = gr. per chilo 3,26.

Esperienza 54^a (5 dicembre 1902).

Cane m. di Chgr. 12,000. — Nella vena femorale destra si inietta della soluzione di fosfato bisodico usata nella esperienza precedente.

15,6'. — Comincia l'iniezione.

15,8'. — L'animale si agita, trema, ha respiro difficile, con lunghi arresti inspiratori.

15,10'. — L'animale è più calmo.

15,13'. — Si termina l'iniezione a cm^3 200, che è proceduta sempre in modo continuo e regolare. Il respiro s'arresta e si pratica la respirazione artificiale.

15,20'. — Ha le mascelle fortemente serrate, presenta movimenti fibrillari della lingua e respiro superficiale.

15,21'. — Compaiono accenni di convulsioni tetaniche. Lunghi arresti del respiro a torace in inspirazione forzata. L'animale è incapace a reggersi in piedi.

15,49'. — A poco a poco il respiro si fa regolare e calmo. L'animale si rizza, fa alcuni passi; ma cade barcollando.

16,10'. — Emette urina di reazione acida.

16,21'. — Ha respiro molto affannoso.

16,31'. — Temperatura rettale 39°. Si regge male in piedi.

16,45'. — È molto abbattuto; sta sdraiato sul fianco, incapace a reggersi.

17,—'. — Temperatura rettale 39°,2.

17,50'. — " " 39°,1.

19,30'. — " " 38°,7.

19,50'. — Emette abbondante urina di reazione acida.

20,50'. — Si trova morto (dopo 5 ore dalla fine dell'iniezione) e la rigidità cadaverica è già grande per tutto il corpo.

(6 dicembre 1902).

8,—'. — La rigidità cadaverica perdura. In tutti i grossi vasi e nelle cavità del cuore si riscontrano abbondanti grumi neri.

Questo animale ricevette in 7' cm^3 200 di soluzione al 17 $^0/_0$ = gr. 34 = gr. per chilo corporeo 2,8.

Esperienza 58ª (11 dicembre 1902).

Cane f. di Chgr. 4,900.

17,29'. — } Iniezione nella vena femorale destra di cm^3 64,8 di soluzione solita di fosfato
17,34'. — } bisodico (tiepida). Durante l'iniezione dapprima l'animale si agita, poi presenta una contrazione tetanica generale, intensa, lunga. Il respiro si arresta al comparire dell'accesso tetanico, e mentre questo dura, l'animale a poco a poco si fa intensamente cianotico. Allora soltanto la contrattura cede per dar luogo ad un rilassamento generale dell'animale; ma il respiro è sempre fermo.

17,36'. — Il cuore pulsa sempre validamente e si soccorre l'animale colla respirazione artificiale mercè la compressione del torace. Prontamente scompare la cianosi; ma mentre questa scompare, ritorna l'accesso tetanico.

17,40'. — Varie volte si è ripetuta questa alternativa di rilassamento generale coll'asfissia profonda e di tetano collo scomparire dell'asfissia, senza che l'animale potesse respirare da sè o per il rilassamento generale, o per la contrattura tetanica del torace e glottide. A poco a poco l'animale comincia poi a respirare da sè lievemente, facendo appena 14 respiri al minuto ed essendo le mucose assai cianotiche ed i muscoli un po' contratti, specialmente alla parte anteriore del corpo ed alla testa. Intanto l'animale sta sdraiato, immobile.

18,2'. — L'animale tenta rizzarsi.

18,7'. — Cammina un po' barcollante.

21,35'. — Rifiuta il cibo; ma del resto sta bene.

(12 dicembre 1902).

L'urina emessa ha reazione acida forte. Nei giorni successivi l'animale è stato sempre bene, solo mangiava un po' poco.

(15 dicembre 1902).

Pesa Chgr. 4,350.

(29 dicembre 1902).

Ucciso colla puntura del bulbo, alla sezione si vede che il fegato presenta in alcuni punti delle zone di degenerazione grassa, di varia grandezza, da un pisello ad una piccola nocciuola. Il resto del tessuto epatico appare normale.

Questo cane ebbe in 5' cm^3 64,8 di soluzione al 17 $^0/_0$ = gr. 11,016 = gr. per chilo corporeo 2,25.

Esperienza 59ª (15 dicembre 1902).

Cane m. di Chgr. 7,900.

16,34'. — } Si pratica una iniezione endovenosa di cm^3 116 della soluzione solita di fosfato
16,37'. — } bisodico tiepida.

16,40'. — Si regge in piedi abbastanza bene; ma presenta leggere contratture agli arti.

18,20'. — Ha respiro molto affannoso; rifiuta il cibo.

19,—'. — Temperatura rettale 41°,7 C.; ha grande affanno di respiro.

19,20'. — Temperatura 42°,1 C.; seguita l'affanno.

20,—'. — Temperatura 42°,8 C.; ha sempre affanno grande.

20,30'. — Temperatura 43°,4 C.; il respiro è lento, debole. L'animale sta sdraiato, immobile, con tremiti muscolari per tutto il corpo.

20,50'. — Muore, dopo circa 4 ore dalla fine dell'iniezione.

(16 dicembre 1902).

9,—'. — Alla necroscopia si osserva quanto segue:

La rigidità cadaverica è forte. Nella pleura si ha poco liquido sieroso, leggermente sanguinolento. Il polmone mostra qualche piccola ecchimosi puntiforme sulla superficie esterna. Il cuore è contratto e duro, specie il ventricolo sinistro, che al taglio appare pallido. Tutte le cavità del cuore ed i grossi vasi sono pieni di grumi neri, compatti. Nel peritoneo si ha poco liquido sieroso, fortemente sanguinolento. La milza appare molto congesta ed al taglio la polpa sembra un po' scarsa. Il rene destro mostra all'esterno una iniezione venosa saliente, ed alla sezione la parte periferica della sostanza corticale appare arrossata, specialmente nella parte di mezzo, mentre ai poli del rene lo è assai meno. La parte interna della sostanza corticale è pallida. Il rene di sinistra invece presenta la sostanza corticale uniformemente pallida, ben distinta dalla midollare. La vescica urinaria è fortemente ripiena di urina, limpida, chiara, di reazione fortemente acida. L'intestino è tutto ripieno di gas e presenta qua e là zone fortemente arrossate. Tutto il sistema della vena porta poi è pieno di gas e nel cellulare perivenoso si ha pure dilatazione a bolle per gas. La vescica biliare è piena e fortemente distesa da bile. Fegato di grandezza normale, di colore giallo-pallido evidentissimo, specie al lobo destro. Alla superficie convessa di tutti i lobi, ed anche al taglio presenta numerose vescichette piene di gas, con apparenza di polmone enfisematoso. Al tatto il fegato dà sensazione untuosa ed appare di consistenza molle. Il liquido tracheale, pleurico e peritoneale è di reazione acida al tornasole.

Questo animale ebbe in 3' cm^3 116 di soluzione al 17 $^0/_0$ = gr. 19,72 = gr. per chilo corporeo 2,50.

ESPERIENZA 61^a (10 gennaio 1903).

Cane m. di Chgr. 12,900.

16,—'. — Si vuota la vescica urinaria e si lascia in posto un catetere per raccogliere di continuo l'urina: questa ha reazione acida lievissima.

16,8' . — } Iniezione nella vena femorale destra con cm^3 190 di soluzione al 17 $^0/_0$ di fosfato
16,18'. — } bisodico. Durante l'iniezione si ha scoppio di convulsioni intense a carattere nettamente tetanico. Si soccorre l'animale alcune volte colla respirazione artificiale finchè passa la crisi, dopo è molto abbattuto e resta sdraiato sul fianco, immobile per tutto il resto dell'esperienza.

16,23'. — Si raccoglie l'urina, cm^3 32 (cm^3 14 ogni 10').

16,45'. — L'animale presenta i muscoli un po' contratti ed ha respiro affannoso, frequente. — T. 39°,1 C.

16,53'. — Si raccoglie l'urina, cm^3 151 (cm^3 51 ogni 10'). Ha reazione acida forte.

17,15'. — Respiro affannoso, muscoli sempre un po' contratti. T. 40°,2.

17,23'. — Si raccoglie l'urina; cm^3 42 (cm^3 14 ogni 10'). Reazione acida forte.

17,53'. — Si raccoglie l'urina; cm^3 36 (cm^3 12 per ogni 10'). Reazione acida forte.

18,5'. — Ha tetano quasi continuo, specialmente accentuato nella parte anteriore del corpo. T. 41°,1.

18,23'. — Si raccoglie l'urina; cm^3 26 (cm^3 9 ogni 10'). Reazione acida forte.

18,35'. — Lo stato generale è invariato. T. 41°,6.

18,53'. — Si raccoglie l'urina; cm^3 16 (cm^3 5 ogni 10'). Reazione acida forte.

19,15'. — Stesso stato. T. 42°,2.

19,23'. — Si raccoglie l'urina; cm^3 4 (cm^3 1 in 10'). Reazione acida forte.

A questo momento lo stato dell'animale è tale che fa presentire inevitabile la morte, e si tralascia l'osservazione, considerandolo morto dopo 4 ore circa dall'iniezione di cm^3 190 di soluzione al 17 $^0/_0$ = gr. 32,25 = gr. per chilo 2,5, iniettati in 10'.

ESPERIENZA 66ª (20 gennaio 1903).

Gatto f. di Chgr. 1,300, lo stesso che servì per l'esperienza delli 6 gennaio 1903 con carbonato sodico.

16,20'. — } Iniezione nella vena giugulare sinistra con cm³ 19,1 di soluzione tiepida al 17 %
16,26'. — } di fosfato bisodico.

Durante l'iniezione l'animale presenta contrazioni generali forti a carattere tetanico, sì che, essendosi avuto poi un arresto lungo del respiro, si è costretti a sospendere per un momento l'iniezione e praticare la respirazione artificiale.

Terminata l'iniezione, l'animale si mostra molto depresso; ma si ristabilisce assai presto.

16,28'. — Si regge in piedi e gira barcollando.

17,50'. — L'animale emette un po' d'urina acidissima.

20,—'. — Ha emessa altra urina di reazione acida; ha anche vomitato.

(21 gennaio 1903).

Sta bene e mangia.

Questo animale ricevette in 4' cm³ 19,1 = gr. 3,25 = gr. 2,50 per chilo corporeo.

ESPERIENZA 67ª (14 gennaio 1903).

Coniglio f. di Chgr. 1,918.

16,1'. — } Iniezione nella vena giugulare sinistra con cm³ 12 di soluzione al 17 % di fosfato
16,4'. — } bisodico.

Durante l'iniezione l'animale presentò scosse convulsive. Subito dopo stava bene.

17,30'. — L'urina spremuta dalla vescica è di reazione acida; è torbida; l'intorbidamento scompare con acido cloridrico, ma non fa effervescenza.

(15 gennaio 1903).

L'urina emessa durante la notte ha reazione alcalina ed è torbida.

L'animale sta bene.

Questo coniglio ebbe in 3' cm³ 12 di soluzione = gr. 2,04 = gr. 1,06 per chilo corporeo.

ESPERIENZA 68ª (14 gennaio 1903).

Coniglio f. di Chgr. 1,606.

16,24'. — } Iniezione nella giugulare destra di cm³ 30 di soluzione al 17 % di fosfato
16,32'. — } bisodico.

Durante l'iniezione l'animale dapprima presenta scosse convulsive lievi, poi due accessi convulsivi intensi a carattere decisamente tetanico.

16,29'. — Ha moti convulsivi, affanno di respiro. L'urina è acida.

18,15'. — Emette un po' d'urina e poi muore. L'urina era acida molto, conteneva deposito che, trattato con acido cloridrico, si scioglie; ma non dà affatto effervescenza come fa il deposito dell'urina d'un coniglio normale.

Questo animale morì con cm³ 30 di soluzione, iniettati in 8' = gr. 5,1 = gr. 3,17 per chilo corporeo.

ESPERIENZA 74ª (29 giugno 1903).

Coniglio di Chgr. 1,420.

17,40'. — Comincia una iniezione come nelle esperienze antecedenti. Si osservano dapprima scosse convulsive, poi convulsioni forti, indi depressione rapida ed arresto persistente del respiro.

17,45'. — Muore dopo aver ricevuti cm³ 25 di soluzione. — Aperto il torace, il cuore seguita a pulsare ancora a lungo, ma debolmente.

Questo animale ebbe in 5' cm³ 25 = gr. 2,5 = gr. per chilo 1,76.

Esperienza 75ª (29 giugno 1903).

Coniglio di Chgr. 1,535.

17,58'. — Comincia una iniezione come al solito. — Dopo accessi convulsivi forti si mostra abbattuto.

18,5'. — Termina l'iniezione di cm^3 25. Slegato l'animale, si regge bene in piedi e cammina.

(30 giugno 1903).

Sta bene.

Ebbe in 7' cm^3 25 di soluzione = gr. 2,5 = gr. per chilo corporeo 1,61.

Esperienza 76ª (15 gennaio 1903).

Cavia m. di Chgr. 0,793. — L'urina normale è alcalina.

18,2'. — } Iniezione nella giugulare sinistra con cm^3 7,5 di soluzione al 17 % di fosfato biso-
18,7'. — } dico (tiepida). Durante l'iniezione l'animale presenta scosse convulsive prevalentemente toniche. Finita l'iniezione, l'animale si mostra depresso; ma poi si ristabilisce presto e mangia.

18,30'. — Emette spontaneamente urina di reazione acida.

18,50'. — Emette altra urina quasi del tutto limpida, acidissima.

19,20'. — Emette ancora urina limpida, di reazione pure acida.

21,10'. — L'animale sta male; ha scosse convulsive ad intervalli, specialmente intense alla parte anteriore del corpo.

(16 gennaio 1903).

Si trova morto. L'urina contenuta in vescica è limpidissima e di reazione acida.

Dalla tabella riassuntiva della pag. seg. risulta che la dose letale per chilo corporeo può essere valutata (1) in gr. 2,60 per il cane, in gr. 2,10 per il coniglio, ed in gr. 1,75 per la cavia; la dose letale minima per chilo di coniglio, calcolata come sale anidro, sarebbe adunque di gr. 0,83, mentre Müntzer (2) trovava gr. 1,58 (una dose quasi doppia); ma la lentezza grande dell'iniezione nelle sue esperienze (più di un'ora) spiega benissimo la diversità della dose.

Per i diversi animali di esperimento la tolleranza al fosfato appare un poco diversa, e la diversità risalta ancor meglio quando si consideri che mentre i conigli

(1) Dose totale in gr. per chilo corporeo nel

cane		coniglio		cavia	
Esperienza	gr. di fosfato	Esperienza	gr. di fosfato	Esperienza	gr. di fosfato
52	2,17	68	3,17	76	1,60
53	3,26	69	1,15	77	1,89
54	2,80	72	1,61	Media	1,75
59	2,50	73	2,62		
61	2,50	74	1,76		
62	2,50	Media	2,06		
64	2,50				
65	2,50				
Media	2,59				

In questo conto non tengo calcolo dell'esperienza 71, che manifestamente troppo si scosta dalla norma.

(2) Müntzer, loc. cit.

morivano subito, i cani e le cavie soltanto dopo alcune ore. Esaminando la tabella riassuntiva, si notano poi delle variazioni individuali forti fra animale ed animale, anche se della stessa specie, ma contrariamente a quello che avviene per altri sali, la velocità della iniezione non pare influisca poi molto sulla grandezza della dose letale, come risulta evidente dalla tabella a pag. 489, in cui le esperienze sono ordinate a seconda della velocità. A questo proposito giova ricordare che dalle esperienze di Müntzer risulta che il fosfato sodico, rispetto agli altri sali, si elimina meno prontamente.

Esperienze col fosfato bisodico.

Esperienza	Animale	Peso in Chgr.	Iniezione di fosfato: in minuti	con soluz. al %	in cm³	corrispondente a: gr.	gr. per chilo	gr. per chilo e minuto	Esito dell'animale	*Osservazioni*
52	cane	4,700	7	17	60,0	10,2	2,17	0,31	M	morì dopo 4 ore
53	"	8,700	12	"	167,0	28,4	3,26	0,27	M	" " 2 "
54	"	12,000	7	"	200,0	34,0	2,80	0,40	M	" " 5 "
55	"	12,700	3	"	112,0	19,0	1,50	0,50	V	
56	"	5,900	2	"	60,7	10,3	1,75	0,87	V	
57	"	4,100	2	"	48,2	8,2	2,00	1,00	V	
58	"	4,900	5	"	64,8	11,0	2,25	0,45	V	
59	"	7,900	3	"	116,0	19,7	2,50	0,85	M	" " 4 "
60	"	6,300	7	"	92,6	15,7	2,50	0,35	V	
61	"	12,900	10	"	190,0	32,2	2,50	0,25	M	" " 4 "
62	"	6,300	8	"	92,6	15,7	2,50	0,31	M	morì durante l'iniez.
63	"	4,400	3	"	64,7	11,0	2,50	0,83	V	
64	"	6,200	4	"	91,2	15,5	2,50	0,62	M	morì dopo 5 ore
65	"	10,200	5 ½	"	150,0	25,5	2,50	0,45	M	" " 3 "
66	gatto	1,300	4	"	19,1	3,25	2,50	0,62	V	
67	coniglio	1,918	3	"	12,0	2,04	1,06	0,35	V	
68	"	1,606	8	"	30,0	5,1	3,17	0,39	M	" " 2 "
69	"	1,180	3	"	8,0	1,36	1,15	0,38	M	morì durante l'iniez.
70	"	1,590	6	10	25,0	2,5	1,57	0,26	V	
71	"	1,455	14	"	100,0	10,0	6,87	0,49	M	" " "
72	"	1,555	2	"	25,0	2,5	1,61	0,80	M	" " "
73	"	1,450	7	"	38,0	3,8	2,62	0,37	M	" " "
74	"	1,420	5	"	25,0	2,5	1,76	0,36	M	" " "
75	"	1,535	7	"	25,0	2,5	1,61	0,23	V	
76	cavia	0,793	5	17	7,5	1,27	1,60	0,32	M	morì dopo 3 ore
77	"	0,494	6	"	5,5	0,93	1,89	0,31	M	" " 2 " ½

Questo contegno del fosfato bisodico, diverso da quello del carbonato e della soda, rispetto alla velocità dell'iniezione ed alla grandezza della dose letale, non ci farà meraviglia quando si consideri che col fosfato bisodico non solo si può avere morte immediata dell'animale durante l'iniezione; ma anche dopo alcune ore, quando cioè l'animale ha superati i primi fenomeni acuti e pare ristabilirsi, e ciò non per un fenomeno tossico attuale, diretto, provocato dal fosfato bisodico; ma indiretto, per modificazioni che lentamente si producono nell'organismo a seguito dell'iniezione di fosfato.

Esperienza	gr. per chilo corporeo e minuto (velocità)	gr. per chilo	Esito dell'animale	Esperienza	gr. per chilo corporeo e minuto (velocità)	gr. per chilo	Esito dell'animale
57	1,00	2,00	V	69	0,38	1,15	M
56	0,87	1,75	V	73	0,37	2,62	M
59	0,85	2,50	M	74	0,36	1,76	M
63	0,83	2,50	V	60	0,35	2,50	V
72	0,80	1,61	M	67	0,35	1,06	V
64	0,62	2,50	M	76	0,32	1,60	M
66	0,62	2,50	V	62	0,31	2,50	M
55	0,50	1,50	V	77	0,31	1,89	M
71	0,49	6,87	M	52	0,31	2,17	M
65	0,45	2,50	M	53	0,27	3,26	M
58	0,45	2,25	V	70	0,26	1,57	V
54	0,40	2,80	M	61	0,25	2,50	M
68	0,39	3,17	M	75	0,23	1,61	V

Questo costituisce uno dei caratteri salienti che distingue l'avvelenamento per fosfato da quello per carbonato ed idrato sodico; e poichè in questi casi, come vedremo in seguito, la variabilità della dose letale minima in rapporto alla velocità d'iniezione dipende dalla presenza dell'OH^- e dalla neutralizzazione di esso per opera dell'acido carbonico del sangue, neutralizzazione che è tanto più facile quanto più è lenta l'iniezione, conviene concludere che alla produzione del fenomeno tossico, provocato dall'iniezione endovenosa di fosfato bisodico, poco o punto intervenga l'idrossile, l'alcalinità del sale parzialmente idrolizzato; e ciò trova conferma da un doppio ordine di fatti, chimici e fisiologici, poichè mentre SHIELDS (1) trovava che il carbonato sodico è fortemente idrolizzato, ed il fosfato bisodico solo in minimo grado, il carbonato sodico altera profondamente i globuli rossi (2) e dà al sangue aspetto di lacca, ma il fosfato bisodico no.

In tutte queste esperienze, fatte con iniezioni endovenose di fosfato bisodico nei cani, gatti, conigli o cavie, si ha una concordanza perfetta riguardo ai sintomi dell'avvelenamento; sempre si osservano fenomeni di eccitazione generale, e scoppio di convulsioni a carattere nettamente tetanico; ma riguardo al decorso dell'avvelenamento in generale esso è del tutto diverso, a seconda che si tratta di dosi piccole od alte. Nel primo caso si ha scoppio di convulsioni durante l'iniezione, le quali presto cessano del tutto, e dopo un periodo più o meno lungo di depressione l'animale si ristabilisce abbastanza bene, sì che nel giorno seguente non presenta più alcun disturbo. Nel

(1) SHIELDS (vedi più avanti, a pag. 508, dove si parla del carbonato).

(2) Confrontare le esperienze fatte sul sangue *in vitro* con questi sali nella Parte II delle presenti ricerche sulla *Funzione biologica del calcio*, loc. cit.

secondo caso, quando la dose iniettata è alta, si ha ancora scoppio immediato di convulsioni, ma molto intense, per le quali l'animale può morire subito, se non viene opportunamente soccorso colla respirazione artificiale; ancora in questo caso segue poi un periodo di depressione e calma in cui pare che l'animale si ristabilisca, ma dopo un certo tempo improvvisamente ricompaiono accessi convulsivi intensi, che durano fino alla morte dell'animale, il quale in questo periodo di convulsioni, quasi continue e sempre a carattere tetanico, offre una ipertermia rilevante ed una diuresi profusa. La temperatura sale spesso altissima, fino a 43°,4 C. nell'Esperienza 59, e cede alquanto solo presso a morte; e come nell'avvelenamento stricnico può essere messa in rapporto cogli accessi convulsivi intensi e di lunga durata. La diuresi compare prontamente, sia per dosi piccole di fosfato, come è già noto da ricerche di Richet, che per dosi alte, come risulta dalle esperienze di Müntzer, e come appare anche da molte delle esperienze mie; ma di interessante ha questo, che con essa si elimina una urina acidissima, quantunque segua all'iniezione di fosfato bisodico, che reagisce alcalino. Questo fatto, a primo aspetto stranissimo, ch'io aveva già visto in alcune esperienze fatte da molti anni, allorchè era assistente di Gaglio a Bologna, è evidentissimo nelle esperienze sui conigli, nei quali l'urina cambia decisamente la reazione sua normale alcalina in acida, e se ora vogliamo discuterne il significato, parmi sia opportuno prendere le mosse da poche, ma sicure nozioni chimiche sui fosfati, le quali sono in perfetta armonia coll'indirizzo generale di tutte queste ricerche sul calcio.

Innanzi tutto il fosfato bisodico è un buon reattivo precipitante del calcio, perchè il fosfato bicalcico, e più ancora il tricalcico, è pochissimo solubile; ma allorchè il fosfato bisodico reagisce con un sale neutro di calcio, si tende a formare del fosfato tricalcico, e conseguentemente resta sciolto del fosfato primario, per cui dalla miscela di una soluzione neutra (sale calcico) e d'una alcalina (fosfato bisodico) ne nasce un liquido di reazione fortemente acida. Quindi il fosfato bisodico, nell'atto stesso in cui precipita il calcio agisce come acido, e già nella parte II delle presenti ricerche sulla " Funzione biologica del calcio ", a p. 241, ricordai le ragioni per cui questa acidità deve essere riferita alla presenza di un fosfato primario.

In secondo luogo l'acido carbonico sposta del sodio dal fosfato bisodico, trasformandolo parzialmente in sale primario, e producendo del carbonato acido (1) secondo l'equazione:

$$Na^2HPO^4 + H^2CO^3 = NaH^2PO^4 + NaHCO^3.$$

È quindi perfettamente logico ammettere che iniettando noi del fosfato bisodico nelle vene degli animali, quivi incontri dei sali di calcio e dell'acido carbonico, e reagendo con essi formi del fosfato primario, il quale è acido, e come dà normalmente l'acidità dell'urina negli animali carnivori, così ora, eliminandosi in grande quantità a seguito dell'iniezione, determini un rilevante aumento dell'acidità urinaria nel cane, un cambiamento deciso dell'urina del coniglio, da alcalina ad acida. Così mentre il

(1) Per la letteratura vedi: Dammer O., *Handbuch der anorganischen Chemie*, Stuttgart, F. Enke, 1894, Bd. II, Theil 2, S. 178. — Gmelin-Kraut, *Handbuch der anorg. Chem.*, Heidelberg, C. Winter, 1886, Bd. II, Abth. I, S. 166-167.

rene colla diuresi profusa tende ad eliminare del sale estraneo iniettato, ed a ricondurre la pressione osmotica del sangue ad un valore fisiologico, elimina urina acidissima in dipendenza delle reazioni chimiche che indubbiamente si sono prodotte nel sangue e nei tessuti fra il fosfato bisodico da un lato, i sali di calcio e l'acido carbonico dall'altro; ed in prova di ciò potrei ricordare i saggi fatti sulla alcalinità del sangue, benchè dia loro ben poca importanza, e la reazione acida che in qualche caso si è riscontrata nei liquidi sierosi del peritoneo, della pleura del pericardio. Così mentre prima abbiamo visto che nel determinismo della tossicità del fosfato bisodico l'alcalinità sua non ha nessuna importanza, ora invece si è indotti a ritenere che il fosfato bisodico possa agire come acido, e con questo concetto si accorderebbero alcune delle alterazioni anatomiche che abbiamo riscontrate in quegli animali in cui l'avvelenamento si protrasse più a lungo. Il decorso relativamente lento dell'avvelenamento con fosfato bisodico nei cani, a confronto di quello che avviene cogli altri sali decalcificanti, la degenerazione grassa del fegato ecc., mentre costituiscono un carattere differenziale fra questo e gli altri sali, offrono interessanti punti di rassomiglianza cogli avvelenamenti per acidi minerali.

Dopo ciò parmi si possa interpretare l'avvelenamento per fosfato bisodico nel modo seguente.

Allorchè iniettiamo nelle vene di un animale del fosfato bisodico, questo, come ogni altro reattivo precipitante del calcio, provoca una diminuzione della concentrazione jonica del calcio nel sangue e negli organi, e dà quelle manifestazioni di eccitazione generale dei centri nervosi, che dipendono precisamente da sottrazione di Ca-jone, e che però sono comuni a tutti i sali capaci di immobilizzare del calcio-jone. Per questo ed in questo momento l'animale può morire; ma per poco che sopravviva, presto la decalcificazione grave del primo momento viene a diminuire per la presenza e fissazione di acido carbonico come bicarbonato sodico e per il passaggio d'una parte del fosfato bisodico a fosfato primario, sali che hanno un'azione decalcificante molto minore del fosfato bisodico, e perciò le convulsioni cessano e l'animale mostra di star bene.

Ciò è conforme a quello che s'è constatato circa la tossicità comparata del fosfato bisodico e del fosfato monosodico (1), poichè nel coniglio e per chilo corporeo a produrre la morte occorrono:

	gr.	gr.-molecola
$Na^2HPO^4 + 12H^2O$	2,10	0,00586
$NaH^2PO^4 + H^2O$	1,64	0,01188,

ossia, per il fosfato monosodico occorrono delle dosi molecolari più che doppie del fosfato bisodico. Da questo risulta che nell'atto della iniezione all'organismo riesce meno dannosa l'acidità del fosfato monosodico, di quello che l'azione decalcificante del fosfato bisodico; e però si comprende come ai primi fenomeni gravi di decalcificazione, provocati dal fosfato bisodico, subentri un periodo di calma e di benessere per la trasformazione parziale di questo in fosfato primario. Successivamente, colla

(1) Cfr. per questo la nota a p. 475.

formazione dei fosfati acidi, insorgono nell'animale fatti riferibili ad una intossicazione acida (acidità dell'urina, di liquidi sierosi, degenerazione grassa del fegato ecc.). Da ultimo, allorchè colla poliuria acida si va eliminando una grossa quantità di fosfati primarî, tornano a comparire fenomeni di decalcificazione grave e persistente, assieme a fenomeni di intossicazione acida subacuta, e l'animale muore.

A chiarir bene il concetto valga un esperimento semplicissimo. Ad una soluzione diluita di cloruro calcico s'aggiunga fosfato bisodico: si forma un precipitato abbondante di fosfato calcico; si faccia gorgogliare dopo ciò dell'anidride carbonica nel liquido torbido: l'intorbidamento subito scompare, il calcio si ridiscioglie; ma intanto il liquido assume reazione acida forte, molto più di quello che farebbe se si fosse fatta gorgogliare l'anidride carbonica in acqua pura, il che ci attesta la formazione di fosfati primarî.

6-7. — *Carbonato e bicarbonato di sodio.*

Come è facile comprendere, per i rapporti stretti chimici, fisiologici e farmacologici che passano fra carbonato e bicarbonato sodico, ho creduto utile, anche per evitare dannose ripetizioni, di riunire in un unico capitolo le ricerche sperimentali e critiche eseguite intorno all'azione fisiologica di questi sali. E poichè le loro soluzioni acquose hanno reazione alcalina, farmacologicamente si considerano come preparati alcalini, e nel determinismo dell'azione fisiologica di essi deve intervenire indubbiamente l'idrossile, che per la dissociazione idrolitica contengono, così ho dovuto fare alcune esperienze colla soda, di confronto a quelle coi carbonati, esperienze che qui pure riporto.

Mentre il bicarbonato sodico è così poco tossico, che si è usato per farne uno siero artificiale (1), il carbonato invece è molto più tossico, e da tutti si ritiene che la soda iniettata nel sangue già a piccole dosi produce la morte. Bottazzi (2) per iniezione endovenosa di NaOH otteneva la morte con:

soluzione %	gr. per chilo	iniezione fatta in minuti
0,264	0,168	22
3,000	0,270	27

Munck (3) invece con gr. 0,126-0,207 di NaOH per chilo corporeo di cane non otteneva la morte dell'animale e neppure disturbi serii. La diversità dei risultati, come osserva Bottazzi, dipende dalla velocità della iniezione, e però in queste ricerche delle piccole differenze non si deve e non si può affatto tener conto; vedremo però a suo luogo che per queste sostanze varia enormemente la dose minima letale, non solo a seconda della *rapidità* della iniezione, ma anche della *concentrazione* della soluzione adoperata.

Il carbonato sodico spesso è causa di avvelenamenti; ma dalle ricerche sperimentali, e dalle osservazioni cliniche tossicologiche fatte a questo proposito quasi

(1) Richet C., *Dictionnaire de Physiol.*, T. II, p. 56.
(2) Bottazzi F., *Sull'azione fisiologica dei saponi*, " Riv. di Scienze biologiche ", n. 4-5, vol. II (1900).
(3) Munck T., " Centr. f. Physiol. ", XIII, 657 (1900).

nulla o nulla affatto si può desumere circa gli effetti dell'ingresso rapido in circolo di forti quantità di questo sale, poichè le alterazioni locali più o meno profonde che si verificano nel tubo digerente, ed i disturbi che direttamente od indirettamente da queste dipendono, dominano quasi esclusivamente la sindrome dell'avvelenamento.

D'altra parte, allorchè si prendono tracciati manometrici della pressione arteriosa, riempiendo le cannule ed i tubi di congiunzione con soluzione di carbonato sodico, se non si usano le debite cautele, si va incontro ad accidenti spesso mortali, che François Franck fin dal 1877 descriveva nel modo seguente:

" È bene che la carica manometrica oltrepassi un poco la cifra della pressione " sanguigna, ma è pericoloso, sopratutto se si opera sopra una carotide, che il mano- " metro sia sotto forte pressione. Al momento in cui si stabilisce la comunicazione " fra l'arteria ed il manometro, il carbonato di soda penetra nei vasi, e se vi entra " troppo fortemente, ne nascono accidenti varî secondo l'arteria impiegata. Nel mon- " cone centrale della carotide la penetrazione del carbonato di soda può uccidere " l'animale in alcuni istanti, probabilmente arrivando fino al cervello per la carotide " opposta; può darsi anche iniettando il cuore stesso per le coronarie. Se la femorale " è stata messa in rapporto col manometro, al momento dell'apertura del rubinetto, " l'animale è preso da convulsioni nella zampa corrispondente, spesso nelle due zampe " posteriori, per effetto dell'arrivo di carbonato sodico nelle collaterali. Egli manda " dei gridi e, se non si fissa l'arto, può strappare la cannula, o far cadere il manometro. " Io ho osservato ultimamente dell'ematuria, quasi immediatamente dopo la pene- " trazione di carbonato sodico, sotto troppo forte pressione nel moncone centrale " della femorale in un cane non cloralizzato; credo che quest'ematuria possa essere " attribuita alla penetrazione di carbonato sodico nelle arterie renali. Questi differenti " accidenti sono da evitarsi, ed inoltre non è indifferente mescolare al sangue una " certa quantità di carbonato sodico. La contrattilità vascolare è infatti profonda- " mente modificata per effetto di questa penetrazione „ (1).

Aducco (2) poi fece uno studio dettagliato delle modificazioni di circolo che si producono con iniezioni di carbonato sodico nelle arterie o nelle vene. Con gr. 3-6 in soluzione al 30 $^0/_0$, iniettati nelle vene dei cani, ebbe un aumento lieve della pressione sanguigna, di 31-50 mm. di mercurio, analogamente a quello che aveva ottenuto precedentemente Curci (3); ma colle iniezioni di carbonato nel moncone centrale delle arterie Aducco ebbe un aumento enorme della pressione, il quale aumento l'otteneva anche quando gli animali erano profondamente depressi, ed in essi riuscivano

---

(1) François-Franck, *Notes sur quelques appareils et sur quelques procédés opératoires*, " Physiologie expérimentale, Travaux du Laboratoire de M. Marey „. III^e année, 1877, Paris, Masson, p. 329-334. — Da tutto questo appare molto singolare il metodo fisiologico che Solera e Capparelli proponevano nel 1879 e praticavano nel 1882 per misurare la velocità della corrente sanguigna, metodo col quale essi introducevano nel moncone periferico dell'arteria, del carbonato di sodio della densità 1,050 (*Nuovi procedimenti sperimentali per determinare la velocità della corrente sanguigna*, " Atti dell'Acc. Gioenia „, t. XIV (1879)).

(2) Aducco V., *Azione del carbonato di soda iniettato verso i centri nervosi*, " Ann. di Freniatria ecc. „, Torino, II (1889-90), p. 231-260. — *Action du carbonate de sodium injecté vers les centres nerveux*, " Arch. ital. de Biol. „, t. XIV (1891), p. 344-373.

(3) Curci A., *Alcune ricerche sul meccanismo di azione dei comuni metalli alcalini ed alcalino-terrosi*, Laboratorio di Farmacologia sperimentale, Bologna, Azzoguidi, 1889 (citato da Aducco).

vani altri mezzi fisiologici per rialzare la pressione; e poichè l'aumento di pressione non si otteneva negli animali cui aveva cocainizzato il midollo ed il bulbo, concludeva che l'azione del carbonato si esplica direttamente sui centri nervosi.

Nel corso di queste esperienze poi, circa l'azione del carbonato sui centri nervosi, d'accordo con François Franck (1) notava convulsioni toniche di tutti i muscoli, con arresto spasmodico della respirazione.

Tutti questi fenomeni descritti da François Franck e da Aducco non sono sufficienti per lo studio dell'azione tossica generale del carbonato sodico, poichè essi dipendono prevalentemente da disturbi locali e perciò sono variabilissimi a seconda del territorio arterioso in cui penetra la soluzione; e non possono neppure essere riferiti semplicemente alla tossicità della molecola Na^2CO^3, poichè il carbonato è un buon reattivo precipitante del calcio, subisce dissociazione idrolitica e reagisce fortemente alcalino; nelle esperienze fisiologiche suddette si adoperava poi in soluzione molto concentrata (2), ed arrivava agli organi colla velocità stessa della corrente arteriosa, e perciò appunto sembra verosimile ammettere che la causa dei fenomeni descritti debba essere riferita a parecchi fattori: 1° Azione decalcificante; 2° Idrossiljone (da cui dipende anche l'azione caustica); 3° Ipertonicità della soluzione; 4° Arrivo brusco di essa agli organi, direttamente per le arterie; 5° Territorio arterioso in cui penetra.

Quindi le osservazioni cliniche-tossicologiche sull'uomo, ed i disturbi che si possono avere per iniezioni nelle arterie sugli animali con soluzioni concentrate ben poco possono giovare al nostro intento, per il quale conviene principalmente tener conto delle modificazioni funzionali che si ottengono a seguito di iniezioni endovenose di carbonato. In queste ricerche però la tolleranza degli animali varia moltissimo a seconda delle condizioni sperimentali, onde riesce già assai difficile fissare la dose minima letale. Ma lo studio e l'interpretazione farmacologica dei fenomeni tossici, prodotti dal carbonato sodico, appare assai complesso, difficile ed interessantissimo quando *dal punto di vista chimico* si consideri:

1° Che esso è un eccellente reattivo precipitante del Ca^{++};

2° Che le sue soluzioni acquose sono sempre più o meno fortemente idrolizzate, sono alcaline, e l'OH^- che così contengono ha caratteri chimici ed azione tossica sua speciale;

3° La facilità con cui il carbonato fissa anidride carbonica per trasformarsi in bicarbonato;

---

(1) François Franck, *Leçons sur les fonctions motrices du cerveau* (1876). Appendice (Esp. 51), p. 483-485 (citato da Aducco). — Vedi per questo anche il brano sopra riportato di François Franck.

(2) La soluzione di carbonato sodico consigliata da E. Meyer per prendere tracciati deve avere una densità di 1083 (*Traité de physique biologique*, publié par D'Arsonval, Chauveau etc., Paris, Masson et C.ie, 1901, t. I, p. 374); ora secondo la tavola del Gerlach (*Commentario della Farmacopea italiana*, pubblicato da I. Guareschi, Torino, Unione Tipografico-editrice, 1897, vol. II, parte II, p. 386) la soluzione che ha $D = 1083$ contiene di $Na^2CO^3 + 10H^2O$ gr. 21,2 circa $^0/_0$, mentre una soluzione da me preparata con $\Delta = 0°,61$ aveva $D = 1015$ e conteneva solo 3,82 $^0/_0$ di sale.

— quando *dal punto di vista fisico-chimico* si consideri:

4° La concentrazione dei vari joni e più specialmente dell'OH-jone nelle soluzioni di carbonato, a seconda delle condizioni sperimentali;

5° La reazione reversibile $Na^2CO^3 + H^2CO^3 \rightleftarrows 2NaHCO^3$;

6° Lo stato d'equilibrio fra acido e sali, vario a seconda della tensione del CO^2, temperatura, ecc.;

— e l'interpretazione dei fenomeni tossici diventa ancora più delicata, ed esige si proceda colla massima prudenza quando *dal punto di vista fisiologico* si consideri:

7° La presenza e produzione continua di anidride carbonica nell'organismo, e la tensione sua che varia grandemente da organo ad organo, ed a seconda del territorio vascolare;

8° L'importanza grande che i più assegnano al carbonato sodico per il passaggio fisiologico del CO^2 dai tessuti all'aria ambiente, secondo l'equazione reversibile suesposta (1):

$$Na^2CO^3 + CO^2 + H^2O \rightleftarrows 2NaHCO^3$$

nei tessuti $\rightarrow$

$\leftarrow$ nei polmoni.

Ma per buona fortuna le conoscenze chimiche e fisico-chimiche sui carbonati alcalini ed alcalino-terrosi, neutri ed acidi, in presenza d'un eccesso di CO^2 oppur no, in acqua pura od in soluzioni di colloidi, sono oggi molto estese, e lo studio fisiologico del CO^2 è a tal punto condotto, che si possiede ormai una eccellente e solida base per le ricerche critico-sperimentali sul determinismo dell'azione farmacologica e tossica dei carbonati, iniettati direttamente nelle vene.

*
* *

Qui, come al solito, per brevità sono costretto a riportare per esteso solo alcune delle esperienze da me fatte.

Esperienze col carbonato di sodio.

Esperienza 78ª (1° dicembre 1902).

Cane m. castrato di Chgr. 6,700. — Iniettto nella vena femorale sinistra della soluzione di carbonato sodico anidro al 5 %.

16,12'. — Incomincia l'iniezione lenta.

16,16'. — Si sono iniettati cm³ 10; l'animale si lamenta molto, si agita e presenta delle contrazioni toniche energiche agli arti anteriori ed al collo. Poco dopo il respiro è raro, con lunghe pause a torace in forzata inspirazione e con espirazioni molto prolungate.

---

(1) Qui non possiamo discutere, e non ci interessa, per quale meccanismo avvenga la scissione nei polmoni, se per opera di un acido, di forze vitali, o di semplici leggi fisico-chimiche, ecc.

16,17'. — Si ricomincia l'iniezione, che procede senza altri disturbi dell'animale.
16,26'. — Si sono iniettati in tutto cm^3 84 della soluzione. Slegato subito l'animale, sta bene, gira, e lasciato tranquillo si accovaccia.
19,—'. — Mangia volentieri pane ed ossa.

(2 dicembre 1902).

Il cane sta benissimo, l'urina è di colorito giallo normale, lievemente torbida, di reazione alcalina forte, non contiene affatto albumina.

Questo animale ricevette in 10' cm^3 84 di soluzione, contenenti gr. 4,20 di carbonato sodico anidro, corrispondenti a gr. 0,62 per chilo corporeo.

Esperienza 82ª (3 dicembre 1902).

Cane m. castrato di Chgr. 6,600, lo stesso che servì per l'esperienza 78ª; ora sta benissimo, l'urina sua è di reazione acida normale.

Inietto per la vena giugulare destra della soluzione al 27 % di carbonato sodico cristallizzato (10 % anidro).

16,50'. — Comincia l'iniezione.
16,52'. — Si sono iniettati cm^3 57 di soluzione. Si arresta il respiro, che già da un po' era lentissimo ed a lunghe pause, poi compare lenta una rigidità tetanica per tutto il corpo.
16,53'. — Il riflesso oculo-palpebrale manca, e durante l' accesso tetanico la lingua appare sempre più intensamente cianotica, mentre da ultimo la contrazione cede lentamente.
16,54'. — Respiro fievole e raro, il cuore pulsa validamente, la lingua presenta tremolii fibrillari, diffusi, vivissimi.
16,56'. — Arresto di respiro; respirazione artificiale; persiste il tetano solo alla nuca.
16,59'. — L'animale si è alquanto ristabilito; defeca. — Si pratica una seconda iniezione di cm^3 27 e tosto compare lentamente una rigidità tetanica generale; le pupille sono dilatate.
17,5'. — Lo stato tetanico perdura sempre, ma assai meno intenso di quello che si ebbe colla prima iniezione. I reflessi sono esagerati, il respiro difficile.
17,20'. — Il tetano è scomparso; l'animale si regge bene in piedi e, quantunque barcollando, corre abbastanza svelto.
18,30'. — Mangia con discreto appetito, gira e mostra di star bene.

(4 dicembre 1902).

Al mattino si trova che ha emessi cm^3 335 d'urina, lievemente torbida, di color giallo ranciato, di reazione fortemente alcalina, priva di sangue e d'albumina, effervescente cogli acidi.

11,—'. — Emette altra urina di reazione ancora fortemente alcalina.

In questo animale si ebbe tetano già dopo la prima iniezione di cm^3 57, praticata in 2', corrispondente a gr. 5,7 (anidro), a gr. 0,86 per chilo corporeo. Si ebbe poi tetano molto più grave dopo iniezione di cm^3 84 di carbonato, corrispondenti a gr. 8,4, a gr. 1,27 per chilo d'animale.

Esperienza 83ª (8 dicembre 1903).

Gatto f. di Chgr. 2,000. — Inietto nella giugulare destra della soluzione di carbonato (anidro) al 10 %.

15,58'. — Comincia l'iniezione, e dopo che si sono iniettati cm^3 9 si ha arresto persistente del respiro.

15,59'. — Termina l'iniezione di cm^3 13 e compare una contrattura tonica generale, dopo la quale, pur seguitando il cuore a pulsare benissimo, l'animale si rilascia, diventa cianotico, non ha più i riflessi, e la pupilla sua è dilatatissima.

A questo momento, comprimendo alquanto il torace per tentare la respirazione artificiale, fuoriesce dal naso un'abbondante schiuma bianca, di reazione alcalina. Aperta la trachea, e pulsando ancora il cuore benissimo, comprimendo lievemente il torace, fuoriescono fiotti d'un liquido chiaro, incoloro, ora schiumoso soltanto lievemente, di reazione fortemente alcalina.

Questo animale ricevette gr. 1,30, corrispondenti a gr. 0,65 per chilo corporeo.

Esperienze col bicarbonato di sodio.

Siccome queste esperienze dovevano servire essenzialmente per confrontare la tossicità del bicarbonato a quella del carbonato, così furono fatte contemporaneamente ad altre esperienze col carbonato (Esp. 86, 87, 89, 90). Quelle e queste furono fatte su conigli e cavie di peso poco diverso e con soluzioni esattamente equivalenti, poichè mentre in quelle adoperava una soluzione di carbonato al 5 %$_0$ (anidro), in queste adoperava la stessa soluzione, saturata però prima con CO^2 alla pressione e temperatura ordinaria, onde si calcola:

Sale sodico	Formula	Peso molecolare	Peso equivalente	%$_0$ della soluzione in gr.	%$_0$ della soluzione in gr.-equiv.
carbonato . . .	Na^2CO^3	106	53	5,000	0,0943
bicarbonato . .	$2NaHCO^3$	84	84	7,924	0,0943

In tutte queste esperienze poi, onde i risultati fossero meglio comparabili, e riferibili giustamente ad una diversa tossicità dei sali, si ebbe cura di praticare le iniezioni con una velocità media non troppo diversa da esperienza ad esperienza.

Esperienza 91^a (21 dicembre 1901).

(Fatta di confronto alla 86^a con carbonato sodico).

Coniglio di Chgr. 0,409. — Si inietta nella giugulare sinistra della soluzione di bicarbonato sodico al 7,924 %$_0$.

17,5'. — Comincia l'iniezione.

17,10'. — Termina l'iniezione di cm^3 13,1.

Si ha arresto di respiro e morte senza convulsioni.

L'animale muore con gr. 2,53 per chilo corporeo.

Esperienze coll'idrato di sodio.

Feci queste esperienze ora con soluzioni forti, ora con soluzioni deboli di soda, a volte iniettandole rapidamente, a volte invece con estrema lentezza. In alcune esperienze poi mescolava della soluzione forte di soda con sangue o siero di sangue, quindi diluiva con soluzione fisiologica ed iniettava il liquido così ottenuto. In tal modo potei esaminare come variasse la dose letale per effetto della concentrazione della soluzione, della velocità d'iniezione e dell'azione caustica della soda sul sangue.

Esperienza 101ª (3 aprile 1903).

Coniglio m. di Chgr. 0,895. — Iniezione nella giugulare destra con soluzione di soda all'1 %.

18,—'. — Comincia l'iniezione.

18,37'. — Termina l'iniezione di cm^3 42. Durante l'iniezione l'animale non ha presentato nulla di speciale. Finita l'iniezione e slegato l'animale, cammina.

18,50'. — Emette un grido e muore.

Alla sezione si trova il cuore pieno di grumi neri di sangue.

Il sangue nei grossi vasi appare leggermente laccato.

L'urina contenuta in vescica è rosea per sangue.

Questo coniglio morì con gr. 0,42 di soda, corrispondenti a gr. 0,47 per chilo corporeo, iniettati in 37'.

Esperienza 102ª (4 aprile 1903).

Coniglio m. di Chgr. 1,300. — Iniezione nella giugulare destra con soluzione all'1 % di soda.

10,25'. — } Iniezione di cm^3 57,5.
10,46'. — }

A principio dell'iniezione si nota un rallentamento grandissimo del respiro, che poi scompare. Alla fine dell'iniezione, che è fatta un po' più rapidamente, l'animale presenta accessi convulsivi che scompaiono col cessare dell'iniezione. Slegato, gira bene.

11,—'. — L'urina è leggermente emoglobinurica.

(5 aprile 1903).

9,45'. — L'animale sta bene, l'urina è incolora.

Questo coniglio ebbe gr. 0,575 di soda, corrispondenti a gr. 0,442 per chilogrammo corporeo, iniettati in 21'.

Esperienza 103ª (4 aprile 1903).

Coniglio di Chgr. 1,030. — Iniezione nella giugulare destra con soluzione all'1 % di soda.

15,5'. — Comincia una iniezione rapida.

15,6',30''. — Si sono iniettati cm^3 11, e dopo un arresto lungo di respiro, comparso immediato coll'iniezione, l'animale con scosse convulsive forti muore.

Aperto all'istante, si ha schiuma abbondante, bianca, che riempie tutto l'albero respiratorio, e fuoriesce dalla bocca. Il cuore è pieno di sangue aggrumato.

Questo animale morì con gr. 0,11 di soda, corrispondenti a gr. 0,106 per chilo corporeo in 1 minuto e $^1/_2$.

Esperienza 104ª (5 aprile 1903).

Coniglio di Chgr. 1,130. — Iniezione nella giugulare destra con soluzione di soda all'1 %.

10,21'. — } Iniezione di cm^3 20, che termina allorchè compaiono forti convulsioni generali.
10,24'. — }

10,26'. — L'animale muore. Aperto subito il torace, si trova il cuore ancora pulsante, specie le orecchiette ed il ventricolo sinistro. Il sangue contenuto nel cuore e grossi vasi è perfettamente liquido, coagula però prontamente, appena estratto, e dà prestissimo siero abbondante, rossiccio. (Ciò attesta una distruzione di globuli rossi e passaggio abbondante di materia colorante nel plasma).

Questo coniglio morì con gr. 0,20, corrispondenti a gr. 0,177 per chilo corporeo iniettati in 3'.

Esperienza 105ª (6 aprile 1903).

Coniglio di Chgr. 1,300. — Iniezione nella giugulare destra con soluzione di soda al 0,5 %.
15,51'. — } Iniezione di cm³ 20, e l'animale muore con scosse convulsive generali. Aperto subito
15,53'. — } l'animale, si trova che il cuore pulsa, ma irregolarmente; nel cuore e nei grossi vasi non vi sono coaguli; il sangue coagula appena estratto e dà poi siero abbondante di colorito leggermente roseo.

Questo coniglio morì con gr. 0,10 di soda, corrispondenti a gr. 0,077 per chilo corporeo, iniettati in 2'.

Esperienza 106ª (6 aprile 1903).

Coniglio di Chgr. 1,055. — Iniezione di soda al 0,5 % nella giugulare destra.
16,45'. — }
17,56'. — } (In ore 1,11') Iniezione continua di cm³ 143.

Durante l'iniezione l'animale non ha presentato alcun disturbo degno di nota; dopo era vivacissimo, l'urina rossiccia.

Durante l'iniezione si è avuto dalla ferita uno stillicidio lento di sangue, che non s'è potuto arrestare.

(7 aprile 1903).

Sta bene e non presenta nulla degno di nota.

Questo coniglio ebbe gr. 0,715 di soda, gr. 0,677 per chilo corporeo in ore 1,11'.

Esperienza 107ª (20 dicembre 1902).

Coniglio m. di Chgr. 1,535.
10,9'. — Si inietta per la giugulare sinistra lentissimamente della soluzione di soda al 0,46 %.
11,1'. — Termina l'iniezione di cm³ 65 senza che l'animale durante o dopo di essa presenti alcun disturbo.

(28 dicembre 1902).

Fino ad oggi l'animale è stato sempre bene e si tralascia l'osservazione.

Questo animale ha ricevuto gr. 0,299 di NaOH corrispondenti a gr. 0,198 per chilo corporeo, iniettati in 52'.

Esperienza 108ª (20 dicembre 1903).

Coniglio f. di Chgr. 0,930.
11,15'. — Comincia una iniezione nella giugulare sinistra con soluzione di soda al 0,46 %, e l'iniezione si fa rapida. — Durante l'iniezione l'animale si agita per due volte e grida, nel resto del tempo sta tranquillo e non presenta alcun disturbo.
11,23'. — Termina l'iniezione di cm³ 64,4. Slegato tosto l'animale, sta bene e non presenta nulla degno di nota.

(28 dicembre 1902).

Fino ad oggi è stato sempre benissimo e viene usato per altra esperienza.

Questo animale ha ricevuto gr. 0,296 di soda, corrispondenti a gr. 0,32 per chilo corporeo.

Esperienza 109ª (28 dicembre 1902).

Coniglio m. di Chgr. 1,840.
10,56'. — Estraggo dall'arteria femorale destra cm³ 10 di sangue e li mescolo tosto, agitando di continuo, con cm³ 4,2 di soda al 4,6 %.

10,59′. — Diluisco il sangue così trattato, che ha assunto colorito lacca, poi verdastro cupo, con cm^3 27,8 di soluzione fisiologica. Così ho una soluzione che dovrebbe contenere soda alla concentrazione di 0,5 %.

11,8′. — Comincio ad iniettare questo liquido nella giugulare sinistra.

11,11′. — L'animale ha scosse convulsive.

11,14′. — Ha ancora convulsioni.

11,16′. — Termina l'iniezione di cm^3 38,5, e l'animale muore; il cuore seguita a pulsare a lungo, non presenta traccia di coaguli nel cuore e grossi vasi.

Questo coniglio, supponendo che la soda fosse restata libera tutta a contatto del sangue, avrebbe ricevuti cm^3 38,5 d'una soluzione al 0,46 %, corrispondenti a gr. 0,177, a gr. 0,096 per chilo corporeo, iniettati in 8′.

Esperienza 110ª (12 giugno 1903).

Coniglio di Chgr. 1,185. — Estraggo dalla carotide destra cm^3 10 di sangue e li mescolo tosto con cm^3 5 di una soluzione di soda al 5 %. Dopo 8′ diluisco con cm^3 35 di soluzione fisiologica e così si porta il liquido a 50 cm^3. Il sangue si fa di color lacca intenso, poi verdastro bruno, mentre si dissolvono i globuli.

Iniettto di questo liquido nella giugulare destra.

17,39′. — } Iniezione di cm^3 13,5. L'animale presenta scosse convulsive tetaniche intense e
17,43′. — } muore. Il sangue del cuore è interamente liquido.

Questo coniglio in 4′ avrebbe ricevuti (se la soda fosse rimasta libera a contatto del sangue) gr. 0,067 di soda, corrispondenti a gr. 0,065 per chilo corporeo.

Esperienza 111ª (12 giugno 1903).

Coniglio di Chgr. 1,015. — Estraggo dalla carotide destra cm^3 10 di sangue e li mescolo con una soluzione di soda così composta:

Di soluzione di soda al 5 %	cm^3	5
Di soluzione fisiologica	„	35
Totale	cm^3	40

Col sangue si ha un volume di cm^3 50 di liquido, che presto assume color lacca intenso e poi bruno verdastro.

Dopo 8′ minuti inietto di questo liquido nella vena giugulare destra, ed in $^1/_4$ d'ora circa, in tre riprese ne inietto cm^3 20, con che l'animale muore, dopo aver presentate intense convulsioni a carattere tetanico.

Il sangue nel cuore è interamente liquido.

Questo coniglio *avrebbe* ricevuti gr. 0,100 di soda, corrispondenti a gr. 0,098 per chilo corporeo.

Esperienza 112ª (12 giugno 1903).

Coniglio di Chgr. 1,225. — Ripeto esattamente tutto quanto s'è fatto nell'esperienza precedente.

18,10′. — } Iniezione di cm^3 11,5 del liquido sanguigno. Morte dell'animale preceduta da scosse
18,17′. — } convulsive tetaniche, generali, intense. Il sangue del cuore è liquido.

Questo animale *avrebbe* ricevuti gr. 0,0575 di soda, corrispondenti a gr. 0,047 per chilo corporeo in 7′.

Esperienza 113ª (4 gennaio 1903).

Coniglio m. di Chgr. 1,094. — Mescolo cm^3 2,5 di soluzione di soda al 4,6 % con cm^3 10 di siero di sangue di coniglio, preparato con ogni cura asettica fin dal giorno prima. Tengo la miscela a 38° C. per 10', quindi diluisco con cm^3 12,5 di soluzione fisiologica. Così ho una soluzione che dovrebbe contenere soda nella ragione del 0,46 %, se fosse rimasta tutta libera a contatto del siero.

11,41'. — } Iniezione di tutto il liquido (cm^3 25) nella giugulare sinistra, senza che nè durante,
11,49'. — } nè dopo l'iniezione, l'animale presenti alcun disturbo.
18,—'. — L'urina è del tutto normale.

(6 gennaio 1903).

È stato sempre bene e pesa Chgr. 1,105.

Questo coniglio quindi avrebbe ricevuto gr. 0,125 di soda in soluzione al 0,46 %, corrispondenti a gr. 0,114 per chilo corporeo, iniettati in 8'.

Esperienza 114ª (4 gennaio 1903).

Coniglio f. di Chgr. 1,485. — Mescolo cm^3 6,8 di soda al 4,6 % con cm^3 10 di siero di sangue, preparato asetticamente il giorno prima da un altro coniglio sanissimo. Mantengo la miscela per 15' a 40° C., poi diluisco con cm^3 51,2 di soluzione fisiologica.

Ottengo così un totale di cm^3 68 di liquido in cui, se la soda fosse tutta libera, dovrebbe essere alla concentrazione del 0,46 %.

18,1'. — }
18,8'. — } (In 7') Inietto tutto il liquido senza che l'animale presenti alcun disturbo.

(5 gennaio 1903).

L'urina è in tutto normale.

(6 gennaio 1903).

L'animale sta sempre bene e pesa Chgr. 1,393.

Questo coniglio *avrebbe* quindi avuti, coi cm^3 68 al 0,46 %, gr. 0,3128 di soda, corrispondenti a gr. 0,210 per chilo corporeo, iniettati in 7'.

***

Dovendo ora discutere i risultati ottenuti in tutte queste esperienze col carbonato, bicarbonato ed idrato sodico, credo opportuno incominciare dall'idrato sodico, poichè la presenza di idrossil-jone nelle soluzioni dei carbonati e bicarbonati è un fatto secondario, dipendente dall'idrolisi, variabilissimo a seconda delle condizioni sperimentali. Così potremo subito farci un criterio circa gli effetti che nell'azione farmacologica dei carbonati possono essere ascritti all'alcalinità delle loro soluzioni, effetti secondari, disturbanti l'azione fondamentale dei carbonati stessi.

Nel seguente quadro ho riuniti i dati principali di tutte le esperienze fatte con soluzioni pure di soda, e da un attento esame di esso si rilevano subito due fatti importanti circa la dose letale; l'uno riguarda l'influenza della velocità dell'iniezione e l'altro l'influenza della concentrazione della soluzione iniettata.

Esperienza	Peso del coniglio in Chgr.	Soluzione di soda iniettata in cm³	al %	in minuti	Soda iniettata in gr.	gr. per chilo corporeo	gr. per chilo e minuto (velocità)	Esito dell'animale	Dose letale di soda per chilo corporeo (medie)
95	1,092	2,5	4,6	5	0,115	0,105	0,021	M	0,104
96	0,975	2,2	4,6	2	0,101	0,103	0,051	M	
97	1,055	2,3	3,7	1 1/2	0,085	0,080	0,054	M	0,075
98	1,357	2,6	3,7	5	0,096	0,071	0,014	M	
99	1,472	10,5	2,8	11	0,294	0,200	0,018	M	0,185
100	1,372	8,5	2,8	5	0,242	0,170	0,034	M	
101	0,895	42,0	1,0	37	0,420	0,470	0,013	M	0,231
102	1,300	57,5	1,0	21	0,575	0,442	0,021	V	
103	1,030	11,0	1,0	1 1/2	0,110	0,106	0.071	M	
104	1,130	20,0	1,0	3	0.200	0,177	0,059	M	
105	1,300	20,0	0,5	2	0,100	0,077	0,038	M	.....
106	1,055	143,0	0,5	71	0.715	0,677	0,009	V	
107	1,535	65,0	0,46	52	0,299	0,198	0,004	V	.....
108	0,930	64,4	0,46	8	0,296	0,320	0,040	V	

Per vedere chiaramente come la dose letale varii per effetto della velocità della iniezione, basta ordinare le esperienze secondo la velocità.

Numero d'ordine dell'esperienza	Velocità dell'iniezione	NaOH iniettata per chilo corporeo	Esito dell'animale	Medie: Velocità	Medie: Dose letale
103	0,071	0,106	M	0,055	0,097
104	0,059	0,117	M		
97	0,054	0,080	M		
96	0,051	0,103	M		
108	0,040	0,320	V		
105	0,038	0,077	M		
100	0,034	0.170	M	0,020	0,203
95	0,021	0,105	M		
102	0,021	0,442	V		
99	0,018	0,200	M		
98	0,014	0,071	M		
101	0,013	0,470	M		
106	0,009	0,677	V		
107	0,004	0,198	V		

Troviamo così che in 5 esperienze in cui si tenne una velocità grande, da 0,071 a 0,038, la dose media letale per chilo corporeo fu di gr. 0,097, ed in altre 5 esperienze, nelle quali la velocità fu assai minore, da 0,034 a 0,013, la dose media letale per chilo corporeo fu più che doppia, di gr. 0,203; ed allorchè si mantenne una delle più basse velocità (0,009 per chilo e minuto) si potè iniettare la dose massima di gr. 0,677 per chilo, senza che l'animale morisse (Esp. 106).

Per vedere come varii la dose letale per effetto della concentrazione della soluzione di soda adoperata, basta ordinare le esperienze secondo la concentrazione:

% della soluzione iniettata	Dose letale media per chilo corporeo
4,6	0,104
3,7	0,075
2,8	0,185
1,0	0,231
0,5	. . . .

Per vedere poi come varii la dose letale per effetto combinato della concentrazione e della velocità, basta disporre le esperienze secondo un ordine del tutto naturale: prima in gruppi, a seconda della concentrazione, poi nei singoli gruppi ordinare le esperienze a seconda della velocità dell'iniezione.

Esperienza	% della soluzione iniettata	velocità della iniezione	NaOH iniettata per chilo corporeo in gr.	Esito dell'animale	Dose letale media per chilo corporeo in gr.
96	4,6	0,051	0,103	M	0,104
95	"	0,021	0,105	M	
97	3,7	0,054	0,080	M	0,075
98	"	0,014	0,071	M	
100	2,8	0,034	0,070	M	0,185
99	"	0,018	0,200	M	
103	1,0	0,071	0,106	M	0,231
104	"	0,059	0,177	M	
102	"	0,021	0,442	V	
101	"	0,013	0,470	M	
105	0,5	0,038	0,077	M	. . . . . .
106	"	0,009	0,677	V	
108	0,46	0,040	0,320	V	. . . . . .
107	"	0,004	0,198	V	

Vediamo così in modo evidentissimo che col diminuire della concentrazione della soluzione adoperata la tossicità s'abbassa moltissimo, come indica la dose minima letale aumentata, e per una stessa concentrazione la tossicità diminuisce ancora col diminuire della velocità della iniezione.

In queste esperienze quindi non solo riesce difficile, ma quasi del tutto impossibile fissare la dose letale senza tener conto di tutte le più piccole condizioni sperimentali; e per avere dati attendibili è indispensabile che la velocità della iniezione si mantenga uniforme dal principio alla fine, poichè, per le ragioni suesposte, un acceleramento lieve verso la fine dell'iniezione è indubbiamente causa di errori non piccoli, facendo apparire letale una dose di soda che per la concentrazione e per la velocità media non doveva esserlo. Mantenere del tutto uniforme la velocità era tecnicamente difficile per i mezzi di cui poteva disporre, e probabilmente i valori lievemente discordanti che ho ottenuti in alcune esperienze dipendevano da ciò.

Che la velocità dell'iniezione influisca molto sulla dose letale è un fatto abbastanza generale per molte sostanze tossiche, che facilmente si comprende come possa avvenire, e nel caso presente il Bottazzi ne dà spiegazione plausibile con ciò, che "non bisogna far l'iniezione troppo lentamente e dar tempo che l'alcali o sia eliminato o passi in uno stato in cui non sia più attivo", e parlando dei saponi osserva: "vi sono però considerevoli differenze nei varî esperimenti, dipendenti sopratutto dalla rapidità con cui si fa l'iniezione, ossia dalla quantità di sapone che in un dato momento viene a trovarsi nel segmento venoso del cuore". L'influenza poi che la concentrazione della soluzione adoperata esercita sulla dose letale minima, quale risulta evidente dalle esperienze che ho sopra riportato, è molto più interessante e ci dà modo di indagare più addentro perchè la soda riesca tossica, allorchè viene iniettata nelle vene.

L'influenza della concentrazione ci richiama alla mente l'azione caustica locale, che varia d'intensità, e dà prodotti di causticazione chimicamente diversi a seconda della concentrazione stessa. E poichè la soluzione a quel grado preciso di concentrazione al quale la preparammo viene a contatto esclusivo del sangue, e poi subito con esso si diluisce, così era logico ammettere che l'influenza della concentrazione dipendesse da fenomeni di causticazione sul sangue: però feci le esperienze 109, 110, 111, 112, 113, 114, mescolando *in vitro* del sangue o del siero di sangue con della soda, ed iniettando poi il prodotto diluito con soluzione fisiologica, in modo che e per la quantità di soda adoperata, e per la concentrazione di essa, e per la velocità della iniezione si calcolava dovesse riuscire innocua, mentre poi realmente non lo era. Ciò chiarissimamente risulta dalla seguente tabella.

Esperienza	Peso del coniglio in Chgr.	Soluzione di soda iniettata			Soda iniettata in			Esito dell'animale	Dose letale di soda per chilo corporeo (medie)
		in cm^3	al %	in minuti	gr.	gr. per chilo corporeo	gr. per chilo e minuto (velocità)		
				Soda mescolata con sangue intero					
109	1,840	38,5	0,46	8	0,170	0,096	0,012	M	0,076
110	1,185	13,5	0,5	4	0,067	0,065	0,016	M	
111	1,015	20,0	0,5	—	0,100	0,098	—	M	
112	1,225	11,5	0,5	7	0,057	0,047	0,006	M	
				Soda mescolata con siero di sangue					
113	1,094	25,0	0,46	8	0,125	0,114	0,014	V	—
114	1,485	68,0	0,46	7	0,313	0,210	0,030	V	
				Soluzione pura di soda					
107	1,535	65,0	0,46	52	0,299	0,198	0,004	V	—
108	0,930	64,4	0,46	8	0,296	0,320	0,040	V	
105	1,300	20,0	0,5	2	0,100	0,077	0,038	M	
106	1,055	143,0	0,5	71	0,715	0,677	0,009	V	

Nell'esperienze 113 e 114, in cui si adoperò del siero di sangue, gli animali sopportarono benissimo l'iniezione, e non presentarono alcun disturbo.

Nell'esperienze 109, 110, 111, 112 invece, in cui s'era mescolata la soda col sangue intero, si ebbe morte dell'animale, quantunque per la dose e per la diluzione di essa dovesse riuscire innocua; onde la morte è in questo caso da attribuirsi ai prodotti di causticazione che la soda dà sui corpuscoli sanguigni. Questo concetto trova appoggio dall'azione distruttiva che la soda esercita sui globuli rossi *in vitro*, e dalla emoglobinuria (vedi Esperienze 101, 102, 106) e dal colore rossiccio (vedi Esper. 104, 105) che il siero di sangue assumeva in alcune esperienze fatte colla soda.

Osservazioni analoghe a queste furono fatte da Bottazzi coll'oleato sodico sopra elementi cellulari di vari tessuti (cellule sanguigne, epitelio peritoneale, tessuto adiposo, parenchima epatico, splenico, tessuto placentare di cagna) e sempre vide che si aveva una distruzione abbondante delle cellule e formazione contemporanea di nucleo-proteidi per opera della soda, che si libera dal sapone per idrolisi.

Possiamo quindi concludere che quando la concentrazione della soda è grande, riesce tossica per la variazione forte che provoca nella reazione chimica del sangue, per la distruzione cellulare e per la formazione di nucleoproteidi; che quando la concentrazione è debole, e non dà fenomeni locali di causticazione, la soda non riesce molto lesiva al sangue, è assai meglio tollerata per iniezioni endovenose, e riesce letale solo quando viene iniettata rapidamente, verosimilmente perchè provoca allora una brusca variazione dell'alcalinità dei liquidi dell'organismo, variazione che può essere lesiva ai protoplasmi o direttamente, oppure indirettamente, in quanto viene a rompere condizioni peculiari di equilibrii molecolari salini (1), la cui variazione, oltre certi limiti, è incompatibile colla vita. Possiamo inoltre concludere che quando la concentrazione della soda (dell'OH^- jone) è piccola, e la velocità dell'iniezione lenta, allora non si ha formazione di prodotti di causticazione di per sè tossici, l'organismo ha tempo, come dice Bottazzi, di eliminare o trasformare l'alcali in uno stato in cui non sia più attivo, ed allora l'iniezione diventa indifferente e la soda non è più tossica.

Solo per ciò che riguarda le trasformazioni, che la soda può subire nell'organismo, fermamente ritengo siano assai semplici; iniettata lentamente ed in soluzione diluita, incontra nell'organismo acido carbonico in quantità più che sufficiente per trasformarsi in carbonato o bicarbonato di sodio, assai meno tossici della soda stessa, i quali prontamente s'eliminano per le vie naturali. Quantunque non possegga apparecchi precisi, pure in alcune esperienze, esaminando l'aria espirata, vidi che durante l'iniezione lenta di soda l'eliminazione di CO^2 diminuisce ed aumenta la quantità dei carbonati nell'urina. Con questo concetto armonizza perfettamente una osservazione sperimentale molto importante di Loeb, che egli stesso così descrive: " The quantity of " free HO-ions in the blood is neither increased by a considerable addition of NaHO " nor decreased by a considerable addition of HCl „ (2). Ora, senza voler entrare in questioni molto difficili, relative all'alcalinità del sangue ed alle sue cause, credo

(1) Si ricordi ad esempio che gli alcali precipitano i fosfati alcalino-terrosi.

(2) Loeb J., *On jon-proteid compounds and their rôle in the mechanics of life phenomena. I. The poisonous character of a pure NaCl solution*, " Amer. Journ. of Physiol. „, vol. III (1900).

però opportuno osservare che questa esperienza e moltissime altre possono spiegarsi bene con concetti semplici di chimica minerale.

Nel sangue *in vitro*, ma più ancora nel sangue circolante, la soda incontra dell'acido carbonico, e si trasforma in carbonati, e l'acido cloridrico dei carbonati alcalini; che quindi nell'uno e nell'altro caso, mentre aggiungiamo direttamente dell'alcali o dell'acido, in realtà portiamo una variazione in più od in meno nei carbonati del sangue; e poichè l'alcalinità del sangue è data principalmente dalla dissociazione idrolitica dei carbonati e fosfati alcalini, così l'alcalinità del sangue non può crescere proporzionalmente alla soda, o decrescere proporzionalmente all'acido aggiunto: ma varierà solo in dipendenza dei carbonati, e varierà non proporzionalmente ad essi; ma, come risulta dalle ricerche di Shields, che vedremo fra poco, secondo la radice quadrata della concentrazione del carbonato. Quindi le variazioni nella concentrazione dell'OH-jone per aggiunta di soda o di acido devono essere molto piccole e spesso comprese entro i limiti degli errori inevitabili dei metodi sperimentali.

***

Passando ora ad esaminare la tossicità dei carbonati, abbiamo riuniti nelle seguenti tabelle i dati principali e l'esito delle esperienze relative.

Esperienze col carbonato sodico.

Esperienza	Animale	Peso in Chgr.	Soluzione di Na^2CO^3 iniettata			Na^2CO^3 iniettato in			Esito dell'animale
			in cm³	al %	in minuti	gr.	gr. per chilo corporeo	gr. per chilo e minuto (velocità)	
78	cane	6,700	84	5	10	4,20	0,62	0,062	V
79	„	5,000	91	5	14	4,55	0,91	0,065	V
80	„	14,200	211 124	5 10	7 7	22,95	1,61	0,060	V
81	„	13,000	132	10	6	13,20	1,01	0,170	V
82	„	6,600	84	10	9	8,40	1,27	0,141	V
83	gatto	2,000	13	10	1	1,30	0,65	0,650	M
84	„	1,300	21	10	24	2,10	1,61	0,067	V
85	„	1,450	16	10	16	1,60	1,10	0,069	V
86	coniglio	0,415	5	5	2	0,25	0,60	0,300	M
87	„	0,956	11	5	4	0,55	0,57	0,140	M
88	„	1,870	29	10	34	2,90	1,55	0,045	V
89	cavia	0,639	11	5	5	0,55	0,86	0,172	M
90	„	0,488	19	5	18	0,95	1,94	0,108	M

Esperienze col bicarbonato sodico.

Esperienza	Animale	Peso in Chgr.	Soluzione di bicarbonato iniettata			Bicarbonato sodico iniettato in			Esiro dell'animale
			in cm^3	al $^0/_0$	in minuti	gr.	gr. per chilo corporeo	gr. per chilo e minuto (velocità)	
91	coniglio	0,409	13,1	7,924	5	1,038	2,53	0,506	M
92	"	0,550	20,0	"	10	1,585	2,87	0,287	M
93	cavia	0,558	15,0	"	6	1,188	2,13	0,355	V
94	"	0,427	17,0	"	7	1,347	3,15	0,450	M

Esperienze comparate fra carbonato e bicarbonato.

Esperienza	Animale	Esiro dell'animale	Dose iniettata in gr. e per chilo corporeo		Dose iniettata in gr.-equiv. per chilo corporeo	
			carbonato	bicarbonato	carbonato	bicarbonato
86	coniglio	M	0,60	—	0,0113	—
91	"	M	—	2,53	—	0,0301
87	"	M	0.57	—	0.0107	—
92	"	M	—	2,87	—	0,0341
89	cavia	M	0,86	—	0,0162	—
93	"	V	—	2,13	—	0,0253
90	"	M	1.94	—	0,0366	—
94	"	M	—	3,15	—	0,0375
medie di 8 Esp.	conigli e cavie	M	0,99	2,85	0,0187	0.0339

Le esperienze eseguite col carbonato e bicarbonato sodico richiamano la nostra attenzione essenzialmente sopra due fatti, che appariscono evidentissimi; l'uno riguarda la natura dei fenomeni generali, l'altro riguarda la tolleranza degli animali, diversissima a seconda delle condizioni sperimentali. Il carbonato sodico in tutti gli animali per iniezione endovenosa dà, come sintomo costante e più saliente, dei fenomeni convulsivi a carattere tetanico; il bicarbonato sodico invece, come già è noto dalla letteratura, e come risulta dalle poche esperienze di confronto che ho fatto col carbonato, è molto meno tossico, ed invece di dare fenomeni convulsivi, come fa quello, dà per lo più depressione e paralisi generale.

La maggiore tossicità del carbonato sodico per iniezione endovenosa non pare possa essere attribuita all'alcalinità forte di questo sale, come a primo aspetto si sarebbe indotti a credere, poichè noi abbiamo già visto che la tossicità della soda è grande, ma dipende non tanto dalla dose per chilo iniettata, quanto dalla rapidità con cui viene iniettata e dalla concentrazione della soluzione adoperata, ed abbiamo visto che al disotto di un certo valore della concentrazione e velocità la soda riesce del tutto indifferente. Quindi nel determinismo dell'azione dei carbonati alcalini dovremo tener conto dell'idrossile, come elemento tossico secondario, disturbante l'azione fondamentale dei carbonati stessi, solo nel caso che la concentrazione di esso e la velocità della iniezione superi un certo valore.

Ora, per valutare la concentrazione dell'OH-jone nelle soluzioni di carbonato sodico da noi adoperate, dobbiamo prendere le mosse dalle ricerche di JOHN SHIELDS (1). Questi, studiando l'idrolisi di alcuni sali in soluzione acquosa, ha trovato che alla temperatura di 24°,2 le seguenti percentuali di carbonato sodico sono in forma di soda caustica:

Na^2CO^3	
soluzione (mol.) n.	% idrolizzato
0,1900	2,12
0,0940	3,17
0,0477	4,87
0,0238	7,10

e conclude che la quantità dell'alcali libero è proporzionale alla radice quadrata della concentrazione del sale.

Le soluzioni di carbonato sodico che ho adoperate per iniezioni endovenose erano al 5 ed al 10 % di Na^2CO^3, ossia in equivalente al 0,943 ed all' 1,8867 per litro, troppo concentrate quindi perchè si possa applicare loro con precisione la formula suesposta; tuttavia possiamo con essa farci un criterio approssimativo, nel caso nostro sufficiente, della quantità di sale che in queste soluzioni trovavasi idrolizzato: circa l'1 % soltanto. In questo modo è lecito calcolare che nelle nostre soluzioni di carbonato al 5 % si trovassero idrolizzati al massimo gr. 0,05 di sale per ogni 100 cm³ di soluzione, corrispondenti a gr. 0,04 circa di NaOH; mentre noi abbiamo visto che soluzioni di soda, 10 volte più concentrate, riuscivano innocue anche a dosi elevate. Così vediamo che in media per ottenere la morte in 7′ dei conigli e cavie col carbonato sodico in soluzione al 5 % occorrevano gr. 0,99 di sale per chilo corporeo, i quali, per la supposizione fatta che alla concentrazione del 5 % sia idrolizzato circa l'1 % del sale, contenevano di soda gr. 0,0079, mentre poi un coniglio (Esp. 108) non presentava alcun disturbo per una iniezione di soda, fatta in 8′ e corrispondente a gr. 0,32 per chilo corporeo. A questo si potrebbe obbiettare giustamente che, come abbiamo visto, l'idrolisi del carbonato cresce molto colla diluzione, e che, allorquando la nostra soluzione al 5 od al 10 % viene iniettata nel sangue, tosto si diluisce con esso grandemente, e più ancora poco dopo, diffondendosi nei liquidi dell'organismo, e che quindi nell'atto stesso della iniezione viene ad aumentare gran-

(1) SHIELDS J., *Ueber Hydrolyse in Wässerigen Salzlösungen*, " Zeitschr. für physik. Chem. ", Bd. 12 (1893), S. 167-187.

demente la quantità di alcali. Ora noi sappiamo già che nell'atto stesso in cui s'inietta la soda, per la presenza di CO^2 nell'organismo essa tende a sparire, e fra poco vedremo che, per la presenza di sali di calcio, l'alcalinità del carbonato iniettato diminuisce, formandosi del carbonato calcico; quindi non possiamo ammettere che l'idrolisi proceda per diluzione nell'organismo come fa in acqua distillata, ma concediamo pure per un momento che proceda allo stesso modo; noi avremmo allora che la dose letale di gr. 0,99 di carbonato sodico, corrisponde a gr.-equivalenti 0,0187 (vedi tab. a p. 507) per chilo d'animale, ed a questa diluzione, seguendo i dati di Shields, dovremmo calcolare che sia dissociato circa l'8 % del sale, ossia $\frac{0,99 \times 8}{100} =$ gr. 0,0792, corrispondenti circa a gr. 0,060 di soda per chilo corporeo, mentre abbiamo visto che l'animale non presenta alcun disturbo con gr. 0,32 di soda per chilo corporeo, iniettati in egual tempo circa del carbonato. Ma concedasi pure ancora di più, che cioè il 50 % del carbonato iniettato si idrolizzi, con che il restante dovrebbe convertirsi in bicarbonato, il quale, come sappiamo, è di gran lunga meno tossico del carbonato; anche così però si sarebbero iniettati in circolo col carbonato $\left(\frac{\frac{0,99}{2}\ 80}{106}\right)$ gr. 0,37 di soda per chilo d'animale, mentre sappiamo che dosi poco diverse di soda, iniettate direttamente ed in tempo uguale riescono del tutto innocue, quando anche si adoperi una soluzione al 0,46 %, mentre nella soluzione di carbonato sodico, come abbiamo visto sopra, potevasi supporre esistesse per idrolisi soda libera soltanto al 0,04 %.

Da tutto questo parmi quindi resti dimostrato che, nelle condizioni sperimentali suesposte, la tossicità del carbonato non dipende dall'alcalinità sua; ma se noi la riferiamo all'azione decalcificante, allora tutti i fatti che abbiamo raccolti fin qui armonizzano perfettamente con questo concetto.

I fenomeni convulsivi che si ottengono sono conformi a quello che era lecito prevedere, considerando il carbonato sodico come reattivo precipitante del calcio, capace cioè di produrre una diminuzione forte nella concentrazione del Ca-jone, tanto nei tubi da saggio del chimico, che nel sangue, o nei protoplasmi. Infatti il carbonato serve al chimico come reattivo precipitante del jone-calcio: serve al fisiologo a produrre incoagulabilità del sangue, diminuendo in esso la concentrazione jonica del calcio fin sotto al valore minimo sufficiente per la coagulazione: ed in fine dà fenomeni di eccitazione generale ed accessi convulsivi intensi, come ogni altro reattivo capace di diminuire la concentrazione del Ca-jone contenuto nei protoplasmi. A questo proposito possiamo riunire qui alcuni dati comparativi molto importanti, i quali riguardano da un lato l'azione decalcificante del carbonato e del bicarbonato, e dall'altro l'azione anticoagulante sul sangue (1) e l'azione tossica di questi sali sui conigli e cavie.

	In gr. equivalenti	
	carbonato	bicarbonato
Solubilità per litro (del sale calcico)	0,00025	0,01760
Dose letale per chilo corporeo (sale di sodio) . . .	0,01870	0,03170
Quantità minima anticoagulante per litro di sangue (sale di sodio)	0,06600	0,47140

(1) Sabbatani L., *Funzione biologica del calcio*, parte II, loc. cit.

Da questi dati appaiono evidenti due cose: 1° Che là dove il sale calcico è meno solubile, ivi l'azione anticoagulante e l'azione letale del sale sodico si ottiene con dosi assai minori; 2° Che per questi sali l'azione tossica non è proporzionale all'azione anticoagulante: il primo fatto ci attesta con sicurezza l'esistenza d'un rapporto fra la tossicità e la precipitazione del calcio: il secondo, che potrebbe sembrare contraddire al primo, trova spiegazione chiara dalla presenza di CO^2 nell'organismo vivo, che trasforma una parte del carbonato in bicarbonato, assai meno tossico.

Infatti, come per la soda, anche per il carbonato sodico la dose letale varia moltissimo a seconda della velocità dell'iniezione. Ciò si vede bene quando dalla tabella esposta a p. 506, togliamo tutte le esperienze fatte sui cani, i quali manifestamente presentano una resistenza grande all'azione tossica del carbonato sodico, e l'esperienza 87ª sul coniglio, il quale morì soffocato dalla ipersecrezione bronchiale, ed ordiniamo le restanti esperienze secondo la velocità della iniezione.

Esperienza	Velocità della iniezione	Dose iniettata per chilo	Esito dell'animale
83. Gatto	0,650	0,65	M
86. Coniglio	0,300	0,60	M
89. Cavia	0,172	0,85	M
90. Cavia	0,108	1,94	M
85. Gatto	0,069	1,10	V
84. Gatto	0,067	1,61	V
88. Coniglio	0,045	1,55	V

Inoltre, come per la soda, anche per il carbonato, allorchè la velocità della iniezione è piccola, la tolleranza degli animali diventa grandissima, perchè mentre il carbonato introdotto si trasforma parzialmente in bicarbonato, la eliminazione segue passo passo la introduzione della sostanza. E per le ragioni dette a proposito della soda, piccole dosi di carbonato sodico iniettate nelle vene dei cani, non possono produrre neppure variazioni forti dell'alcalinità del sangue. Infatti Cavazzani E. (1), a seguito di iniezioni endovenose di piccole quantità di carbonato sodico, osservava che " la alcalinità del sangue ha presentato oscillazioni relativamente piccole: restando " alcun poco superiore al livello iniziale, *ma entro i limiti dell'alcalinità normale del " cane* „. Così anche questi risultati sperimentali sulla alcalinità del sangue, per quanto si debba essere molto scettici sulla loro attendibilità, per la critica generale fatta ai metodi da Henri (2), sarebbero in perfetto accordo coll'ipotesi suesposta.

Ed ora è bene ritornare un momento alle osservazioni interessanti di Aducco (3): da esse risulta evidente che il carbonato sodico è di gran lunga più tossico allorchè si inietta nelle arterie, anzichè nelle vene, e mentre ciò trova spiegazione sufficiente dalla concentrazione e rapidità maggiori con cui il carbonato arriva agli organi, deve pure dipendere, almeno in parte, dalla diversa quantità di CO^2 contenuta nelle arterie

(1) Cavazzani E., *Intorno alle variazioni nel contenuto di alcali del sangue dopo la iniezione endovenosa di carbonato di sodio.* Comunicazione fatta all'Acc. di Sc. med. e nat. in Ferrara il 27 dic. 1902.

(2) Henri V., *La dissociation électrolytique et la mesure de l'alcalinité du sang.* " Revue générale des Sciences pures et appliquées „, 13e Année, N. 7, 15 avril 1902, p. 328-333.

(3) Aducco, loc. cit.

e nelle vene, per cui la trasformazione del carbonato in bicarbonato, assai meno tossico, è molto più facile nelle vene che nelle arterie. ADUCCO inoltre osservava un fatto importantissimo, che molte volte s'è avverato pure nelle mie esperienze, ed è che mentre il carbonato sodico dà fenomeni imponenti, è però una sostanza " relativement inoffensive au point que 5-6-15 minutes après l'injection les animaux sont " complètement remis „: e ciò a noi dimostra che il carbonato iniettato prontamente perde dell'azione sua tossica, e che non provoca sugli elementi cellulari una modificazione profonda: ma lieve, facilmente e prontamente riparabile, quale potrebbe essere precisamente una variazione momentanea nella concentrazione protoplasmatica del Ca-jone.

***

Riassumendo abbiamo che l'azione generale del carbonato sodico è identica a quella degli altri reattivi decalcificanti, che come ha azione decalcificante ed anticoagulante più forte del bicarbonato, ha pure azione tossica più intensa; però la tossicità sua è minore di quello che potevasi calcolare dal potere decalcificante, e ciò perchè nell'atto stesso in cui viene iniettato nel sangue, come fa la soda, fissa dell'acido carbonico, e si trasforma, almeno in parte, in bicarbonato, il quale ha azione decalcificante, anticoagulante e tossica di gran lunga minore. La trasformazione del carbonato in bicarbonato è tanto più abbondante quanto più lenta procede l'iniezione, e perciò stesso la dose letale del carbonato (analogamente a quanto avviene per la soda) cresce assai col diminuire della velocità dell'iniezione; al disotto poi di un certo valore della velocità, come per la soda, anche per il carbonato sodico l'iniezione diventa innocua; i fenomeni tossici sono più gravi per iniezioni nelle arterie che nelle vene, fors'anche in rapporto colla diversa quantità di CO^2 contenuto in esse, ed i fenomeni tossici scompaiono prontamente perchè il carbonato stesso nell'organismo si trasforma rapidamente in bicarbonato, meno tossico, e perchè la diminuzione della concentrazione del Ca-jone da esso provocata nei protoplasmi deve cessare quasi interamente per la trasformazione del carbonato in bicarbonato.

8. *Oleato di sodio.*

BOTTAZZI e MUNCK si sono occupati dell'azione fisiologica e tossica dei saponi. Secondo MUNCK, che adoperava soluzioni al 5 %, l'oleato è letale nel coniglio alla dose di gr. 0,25; il palmitato e lo stearato sono ancora più tossici. BOTTAZZI, che adoperava soluzioni all'1 ed al 10 %, otteneva dei valori che oscillavano attorno a quelli trovati dal MUNCK, e notava che, indipendentemente dalla concentrazione della soluzione iniettata, si hanno delle grandi differenze individuali di resistenza degli animali all'iniezione endovenosa di sapone.

Riporto qui quattro esperienze di BOTTAZZI fatte sul cane (1):

(1) BOTTAZZI F., *Sull'azione fisiologica dei saponi*, " Rivista di Sc. biol. „, Como, vol. II, N. 4-5 (1900).

I. Iniezione di gr. 0,14 di sapone per chilogr. (soluzione 1 % in NaCl 0,6 %) in 20′.
II. Iniezione di gr. 0,155 di sapone per chilogr. (soluzione di sapone 10 % in H^2O).
III. Iniezione di gr. 0,52 di sapone per chilogr. (soluz. di sapone 1 % in NaCl 0,6 %) in circa 40′. [L'animale presentò alla fine dell'esperienza una grave emorragia polmonare che lo soffocò].
IV. Iniezione di gr. 0,456 di sapone per chilogr. (soluzione di sapone 10 % in 420) in 20′.

In media ottenne coll'oleato sodico come dose letale per chilo corporeo nel cane gr. 0,318.

Credo quindi che la dose letale possa essere calcolata nel modo seguente:

	per chilo corporeo in gr.	per chilo corporeo in gr.-equivalenti
Nel cane (Bottazzi)	0,318	0,00104
Nel coniglio (Munck)	0,250	0,00082

Così troviamo ancora per i saponi verificarsi una sensibile differenza nella tossicità fra coniglio e cane, come sempre ho visto accadere per tutti gli altri sali esaminati.

Per i saponi si affacciano gli stessi dubbî, le stesse questioni che già abbiamo esaminate a proposito del carbonato sodico, e relative alla dissociazione idrolitica. Che l'alcali delle soluzioni dei saponi intervenisse nel determinismo dell'azione fisiologica e tossica di essi, fu subito ammesso da Bottazzi, e fu negato da Munck; ma nella polemica che sorse fra questi Bottazzi modificò il suo primo giudizio e concluse che " l'azione tossica dei saponi solubili molto probabilmente è dovuta in " parte all'alcali libero che le loro soluzioni contengono ed in parte, forse maggiore, " alla sottrazione che essi operano del Ca ai citoplasmi viventi „ (1). Se ci riferiamo però a quanto s'è visto sopra, circa l'azione della soda e del carbonato sodico, è evidente che l'importanza tossica massima dei saponi sta nell'azione decalcificante e non nell'alcalinità delle loro soluzioni, la quale interverrà come efficace fattore di tossicità solo a seconda della concentrazione e velocità della iniezione.

Noi possiamo, per mezzo di una interpolazione grafica nella tavola annessa a questo lavoro, calcolare quale sarebbe la tossicità dell'oleato sodico, dipendente esclusivamente dall'azione decalcificante sua. Troviamo allora i seguenti dati per la tossicità dell'oleato sodico reale, trovata da Bottazzi e da Munck e la tossicità calcolata in base alla semplice azione decalcificante.

Tossicità dell'oleato sodico in gr.-equivalenti per chilogr. corporeo:

Trovato da Bottazzi per il cane	0,00104
Calcolato da me per il coniglio	0,00500
Trovato da Munck per il coniglio	0,00082

e indubitato quindi che la tossicità dell'oleato sodico, riscontrata sperimentalmente da Bottazzi e da Munck molto superiore a quella che gli spetterebbe come semplice reattivo decalcificante, devesi ascrivere, come voleva giustamente Bottazzi in parte all'alcalinità sua, e ciò per le condizioni sperimentali.

(1) Bottazzi F., loc. cit.

9. *Ossalato di sodio.*

Lo studio dell'acido ossalico ed ossalato presenta un grandissimo interesse fisiologico, farmacologico, tossicologico e clinico, e perciò da molto tempo è stato oggetto di svariatissime ricerche.

Quantunque poi Onsum avesse osservata la formazione di ossalato calcico nel sangue, solo di recente la tossicità dell'ossalato è stata posta in rapporto colla sottrazione di calcio che esso apporta nell'organismo. Prima si ebbero le osservazioni di Arthus sull'azione decalcificante dell'ossalato nel sangue, di cui provoca incoagulabilità, poi le osservazioni di Cavazzani sulle rane, in cui i fenomeni tossici provocati dall'ossalato vengono tolti con successive iniezioni di calcio, le osservazioni di Cyon (1), di Loeb e di molti altri. Si ebbero poi le osservazioni di Bottazzi (2), nelle quali si fa un raffronto fra la tossicità dell'ossalato, dei saponi e fluoruri in rapporto all'azione decalcificante. In ultimo si ebbero le osservazioni di Friedenthal (3), il quale molto opportunamente confronta la tossicità molecolare degli ossalati, fluoruri e saponi. Incidentalmente, trattando dell'azione antagonistica fra citrato trisodico e calcio, io pure mostrai i rapporti che passano fra la dose letale minima dell'ossalato, citrato e saponi e l'attività loro come reattivi decalcificanti.

Nella prima parte di queste ricerche ricordai che secondo Koch R. l'ossalato neutro di sodio è per iniezione ipodermica tossico nei conigli alla dose di gr. 0,25 e nel gatto (di peso medio) a gr. 0,375; questi dati servono bene a dimostrare la grande tossicità dell'ossalato, ma non possono *a priori* essere ritenuti sufficienti per l'intento nostro di confrontare l'azione dei diversi reattivi decalcificanti; per questo scopo, come già ho detto altre volte, è indispensabile tener conto sopratutto di dati ottenuti sempre con iniezioni endovenose e sempre sullo stesso animale d'esperimento. Bottazzi nel lavoro sopra citato riporta tre esperienze fatte con iniezioni endovenose di ossalato sodico nei cani; ebbe la morte degli animali con:

" I. Iniezione di gr. 0,117 di ossalato sodico per Chgr. (soluzione 2 % in H^2O)
" in 10 minuti;
" II. Iniezione di gr. 0,071 di ossalato sodico per Chgr. (soluzione 1,5 %) in
" 8 minuti;
" III. Iniezione di gr. 0,092 di ossalato sodico per Chgr. (soluzione 1,5 % in
" due volte) in 20 minuti ".

Non intendendo, almeno per ora, diffondermi in modo speciale nello studio dell'ossalato, mi sono limitato a fare alcune poche esperienze nelle cavie, conigli e cani, poi alcune altre (Esp. 121, 122, 123, 124) con iniezioni alternate o miste di ossalato e calcio; di tutte però una sola riporto qui per esteso, limitandomi per altre a presentarne lo specchietto riassuntivo.

---

(1) Citato da Bottazzi.
(2) Bottazzi F., *Sull'azione fisiologica dei saponi*, loc. cit.
(3) Friedenthal, *Ueber die Giftwirkung der Seifen und der anderen Kalkfällenden Mittel*, " Arch. für Anat. und Physiol. ", 1901, Heft I-II.

Esperienza 121ª (22 dicembre 1900).

Cavia m. di Chgr. 0,650. — In un vaso di vetro mescolo un volume di soluzione al 2,66 % di ossalato sodico e 2 volumi di soluzione all'1,11 % di cloruro calcico; così l'ossalato ed il cloruro si trovano in rapporti equimolecolari, e formano un abbondante precipitato finissimo di ossalato calcico.

Il liquido lattescente così ottenuto viene iniettato nella giugulare sinistra della cavia.

17.9'. — } Si iniettano cm^3 20 della miscela; ma l'animale non presenta alcun disturbo, nè
17.11'. — } subito, nè dopo slegato.

Sta bene, corre e mangia come al solito.

In appresso però a poco a poco l'animale si mostra abbattuto, poi muore verso le 19.

Dalla seguente tabella riassuntiva si ha come dose minima letale media di ossalato sodico per iniezioni endovenose e per chilo corporeo:

Nella cavia	gr. 0,110
Nel coniglio	„ 0,105
Nel cane	„ 0,118

Su queste differenze però, che sono molto piccole, non c'è da fare troppo assegnamento, perchè potrebbero dipendere dalle diverse condizioni sperimentali.

Esperienza	Animale	Peso dell'animale in Chgr.	Iniezione di ossalato sodico					Esito
			%	in cm^3	in minuti	in gr. per chilo	in gr. per chilo e minuto (velocità)	
115	cavia	0,780	0,88	10	—	0,11	—	M
116	„	0,565	0,88	7	2	0,11	0,055	M
117	coniglio	1,620	2,00	7,6	4	0,09	0,026	M
118	„	1,175	2,00	7	2 1/2	0,12	0,048	M
119	cane	5,800	2,66	30	3	0,14	0,045	M
120	„	7,900	2,66	53	—	0,17	—	M
di Bottazzi I	„	—	2,00	—	10	0,117	—	M
di Bottazzi II	„	—	1,50	—	8	0,071	—	M
di Bottazzi III	„	—	1,50	—	20	0,092	—	M

Circa l'azione generale dell'ossalato sodico ho visto che, come gli altri reattivi studiati, esso pure per iniezione endovenosa dà sempre nei mammiferi fenomeni di eccitazione generale e convulsioni a carattere tetanico; ciò è d'accordo con quanto è stato osservato da quasi tutti quelli che hanno sperimentato coll'ossalato. Nelle rane, che sono pochissimo sensibili al calcio (Delogu), l'ossalato dà invece fenomeni di depressione, paralisi e morte (Cavazzani), mentre il citrato dopo la paralisi del primo momento dà fenomeni di eccitazione generale, allorchè l'avvelenamento grave del primo momento va attenuandosi, mentre quello dell'ossalato conduce subito a morte.

Ma anche nelle rane si possono veder bene fenomeni di eccitazione, allorchè si bagna direttamente l'encefalo con soluzione di ossalato sodico; compaiono allora convulsioni generali intense e di lunga durata (1). Nei cani poi dimostrai che l'applicazione di ossalato sodico direttamente sulla corteccia cerebrale provoca aumento della eccitabilità elettrica, e scoppio di convulsioni epilettiche (2).

L'azione antagonistica fra ossalato e calcio era stata osservata da Cavazzani sulle rane (3), come già ricordai nella prima parte di queste ricerche; ma nei mammiferi e per iniezione endovenosa i fenomeni di antagonismo fra ossalato e calcio si riducono a ben poca cosa, poichè per effetto di queste iniezioni si produce sempre coagulazione intravascolare.

Dall'esperienza 121 si vede che quando s'inietta dell'ossalato calcico, sospeso in acqua e di recente precipitato, esso non è punto causa immediata di morte, neanche quando l'ossalato è in quantità più che doppia della letale (Esp. 116). Quindi appare evidente che la tossicità dell'ossalato è del tutto sospesa, allorchè esso trovasi in forma insolubile di ossalato calcico nel sangue, e che la introduzione e la presenza del precipitato finissimo di ossalato calcare nel sangue circolante non è condizione sufficiente alla formazione di coaguli, i quali compaiono subito che la formazione dell'ossalato avviene direttamente nel sangue o per iniezione contemporanea di quantità equivalenti di ossalato e calcio per due vene simmetriche, o per iniezione successiva ed alterna di quantità pure equivalenti delle stesse soluzioni. Ciò limita grandemente il campo sperimentale per l'antagonismo.

Per queste osservazioni semplicissime però resta chiaramente dimostrato che l'ossalato sodico ed il cloruro calcico da noi iniettati per due vene diverse trovansi anche nel sangue allo stato di ione, poichè nel sangue circolante si ha l'immediata formazione della reazione ionica loro caratteristica, precipitante — ossalato calcico — e queste osservazioni sono perfettamente concordi a quelle di Onsum e di altri, i quali constatarono al microscopio la presenza di ossalato calcico nei vasi sanguigni di animali avvelenati con ossalato. Ora però la morte degli animali l'attribuiamo non agli effetti meccanici del precipitato calcare, come faceva Onsum, ma alla diminuzione della concentrazione di Ca-jone che l'ossalato produce.

10. *Citrato trisodico.*

Nella prima parte delle presenti ricerche (4), studiando l'*azione antagonistica fra citrato trisodico e calcio*, feci alcune esperienze sull'azione fisiologica e tossica del citrato, delle quali ne riportai solo tre sui cani (4^a-5^a-6^a). Successivamente feci molte

(1) Sabbatani L., *Come si debba interpretare l'azione antagonistica fra il calcio ed i reattivi che lo immobilizzano*, " Rivista critica di Clinica medica ", anno III, n. 15 (1902).

(2) Sabbatani L., *Importanza del calcio che trovasi nella corteccia cerebrale*, " Rivista sperimentale di Freniatria ", vol. XXVII (1901).

(3) Cavazzani A., *Dell'azione dell'ossalato potassico sul plasma muscolare ecc.*, " Riforma medica ", N. 131-32 (1892).

(4) Sabbatani L., *Funzione biologica del calcio*, Parte I: *Azione antagonistica fra citrato trisodico e calcio*. " Memorie della R. Accademia delle Sc. di Torino ", Serie II, tomo LI (1901), p. 267-305.

ricerche sulla tossicità dell'acido citrico, citrato mono-bi-tri-sodico e sull'etere trietilcitrico, amministrando queste sostanze per via gastrica, ipodermica ed endovenosa, nei cani, gatti, conigli, cavie, topi e rane; ora non voglio intrattenermi sulle differenze che, riguardo ai sintomi ed alla tolleranza, si riscontrano da animale ad animale, a seconda che si tratta dell'uno o dell'altro preparato, ma ricorderò solo che le maggiori differenze si hanno sempre a seconda della via di introduzione, e ciò verosimilmente perchè con questa varia moltissimo la rapidità dell'ingresso in circolo del citrato. Qui riferisco solo il risultato finale di tutte le esperienze che ho fatte sui cani, conigli, gatti e cavie con iniezioni endovenose di citrato trisodico, dalle quali possiamo fissare con sufficiente sicurezza la dose minima letale.

L'acido citrico è stato già studiato da Mitscherlich (1) e sappiamo che riesce tossico negli animali producendo dapprima accelerazione del cuore e del respiro, in seguito accessi convulsivi violenti con diminuzione della sensibilità, impulso cardiaco insensibile, dispnea, grande debolezza e morte. Recentemente è stata studiata da Vietinghoff (2) l'azione tossica comparata dei citrati e tartrati neutri, e l'azione anticoagulante sul sangue e sul latte: di interessante ha visto che il citrato dà azione eccitante sui centri nervosi, concordemente a quello che già aveva osservato io.

Da tutte le esperienze risulta che, come già dimostrai nella prima parte di queste ricerche, il citrato trisodico, iniettato nelle vene degli animali, riesce molto tossico, dà sempre fenomeni di eccitazione generale e convulsioni alle quali segue rapidamente la morte con fenomeni di depressione e paralisi generale. Le convulsioni sono prevalentemente toniche, ed il più delle volte assumono carattere nettamente tetanico; ciò si vede assai bene nei cani, nei conigli e nelle cavie; nei gatti invece le convulsioni sono prevalentemente tonico-cloniche, ed una volta sola ebbi un accesso tetaniforme deciso, mentre negli altri casi le convulsioni sembravano piuttosto epilettiformi: troviamo così un nuovo punto di analogia fra l'azione comparata di questo e d'altri sali ad azione decalcificante.

Il gatto si mostra poi più sensibile degli altri animali all'azione tossica del citrato, come si vede bene dalla tabella alla pag. seguente, in cui sono raccolti i dati principali e l'esito di tutte le esperienze fatte col citrato.

Da ciò risulta che la sensibilità all'azione tossica del citrato trisodico è massima nel gatto, minore nella cavia, minore ancora nel coniglio, minore che in tutti gli altri poi è nel cane.

In gr.-equivalente e per chilo d'animale la dose minima letale è:

Nel gatto	0,0032
Nella cavia	0,0036
Nel coniglio	0,0044
Nel cane	0,0061

Per le cose dette altrove, e specialmente a proposito del carbonato ed oleato sodico, facilmente si comprende come, a seconda delle condizioni sperimentali e più

(1) Teodoro Huseman, *Manuale di materia medica*, traduzione di V. Gautier, p. 703.

(2) Vietinghoff-Scheel, *Zur Giftwirkung des neutralen Citronensäuren und Weinsäure Natriums und über ihren Einfluss auf die Blutgerinnung und die Kaseingerinnung mit Lab.*, " Arch. internation. de Pharmacodinam. ", X (1902), p. 145-176.

che tutto della velocità d'iniezione, debbano variare le manifestazioni tossiche, ed ora essere più intense sui centri nervosi ed ora sul cuore; purtuttavia pare esista veramente una differenza sostanziale a questo proposito fra i diversi animali d'esperimento.

Noi cani si aveva sempre prima arresto di respiro e poi del cuore, nel gatto invece o nelle cavie si avrebbe il contrario, poichè tranne una volta (Esp. 134) in questi animali il cuore si arrestava e diventava ineccitabile mentre il respiro durava ancora a lungo, e ciò potrebbe essoro una ragione sufficiente alla differenza di tossicità del citrato per i cani, gatti e cavie.

Esperienza	Animale	Sesso	Peso in Chgr.	Iniezione di citrato					Esito	Dose media mortale minima per chilo corporeo
				in minuti primi (1)	con soluzione al %	in cm³	in gr.	in gr. per chilo		
125	cane	m.	5,500	8 *r.*	8,5	20,0	1,70	0,31	V	
126	"	m.	5,000	24 *r.*	8,5	50,0	4,25	0,85	M	
127	"	f.	3,900	24 *r.*	8,5	40,0	3,40	0,87	M	
128	"	m.	2,200	6 *r.*	8,49	12,2	1,03	0,47	M	0,73
129	"	m.	2,900	8 *r.*	8,49	25,0	2,12	0,73	M	
130	"	m.	4.100	28 *r.*	8,49	35,0	2,97	0,72	M	
131	gatto	f.	2.110	6 *c.*	5,0	16,0	0,80	0,38	M	
132	"	...	1.000	2 *c.*	5,0	7,0	0,35	0,35	M	0,38
133	"	f.	1.710	6 *c.*	5,0	17,0	0,85	0,50	M	
134	"	...	1,410	5 *c.*	5,0	8,5	0,42	0,30	M	
135	coniglio	...	0,708	...	13,6	1,0	0,136	0,19	V	
136	"	...	0,985	...	5,0	3,5	0,175	0.17	V	
137	"	...	0,950	9 *r.*	5,0	10,0	0,50	0,53	M	
138	"	...	1,224	...	5,0	12,0	0,60	0.49	M	0,53
139	"	m.	1,204	11 *c.*	5,0	14,6	0,73	0,60	M	
140	cavia	m.	0.482	...	5,0	3,5	0,175	0.36	M	
141	"	...	0,350	...	5,0	4,0	0,20	0,57	M	0,43
142	"	...	0,520	...	5,0	4,5	0,225	0.43	M	
143	"	...	0,352	...	5,0	2,5	0,125	0,35	M	

A questo proposito sono interossantissimo le esperienze 132 o 133 sui gatti, e la 130 sui cani, poichè nelle prime chiaramente si vide che il citrato spiega una azione letale più intensa sul cuore cho sul centro respiratorio, sì che quando da 17′ (Esp. 133) i ventricoli erano immobili ed ineccitabili, mercè la compressione ritmica del cuore si conservava bene attiva la funzione respiratoria, mentro poi nè la respirazione artificiale, nè la compressione ritmica del cuore erano stato sufficienti a riattivare la funziono cardiaca. Nell'Esp. 130ª sul cane si vide invece che praticando la iniezione lentamente e per la vena femorale, si aveva prima arresto del rospiro di quello che del cuore, e che a produrre l'arresto di cuore occorreva una dose un po' maggiore di citrato.

(1) *r* = refratta, *c* = continua.

Come per gli altri sali, per il citrato la tossicità varia molto a seconda della velocità della iniezione, e ciò, trattandosi qui di un sale organico, facilmente ossidabile, non può far meraviglia, anzi in questo stesso senso riesce ovvio interpretare le differenze grandissime di tossicità che si hanno col citrato per iniezioni endovenose, ipodermiche o gastriche. La grande tolleranza degli animali al citrato per questa ultima via non dipende certo da una azione protettiva del fegato, poichè iniettando il citrato in una vena della circolazione generale od in un ramo della vena porta la dose minima letale per il cane è presso a poco la stessa.

Diremo adunque che, iniettato nelle vene con grande lentezza, od amministrato per bocca, nel qual caso l'assorbimento è pure lento, il citrato va incontro ad un processo di ossidazione, ed occorre introdurne delle dosi assai maggiori per raggiungere nell'organismo quella concentrazione minima di citrato che può produrre fenomeni tossici, dipendenti da diminuita concentrazione del Ca^{++}.

In vitro, e coi comuni mezzi di ossidazione l'acido citrico in ambiente acido dà come primo prodotto di ossidazione dell'acido acetondicarbonico e poi subito dopo dell'acetone (1), in ambiente alcalino dà invece dell'acido ossalico. Il primo caso non pare, teoricamente considerato, possa avverarsi e sperimentalmente dimostrai che non s'avvera infatti (2); maggiore verosimiglianza avrebbe il secondo caso, per l'ambiente alcalino dei tessuti, per i rapporti fra ossaluria ed alimentazione, per la tossicità grande dell'ossalato stesso e la somiglianza dei sintomi coll'avvelenamento per citrato; ma se consideriamo da un lato la pochissima ossidabilità dell'ossalato nell'organismo e dall'altro la fugacità grande dei fenomeni provocati con iniezioni endovenose di citrato, allora appare ben poco probabile che il citrato nell'organismo si ossidi con formazione di ossalato.

Quindi, mentre non è credibile che l'azione tossica intensa del citrato dipenda da formazione rapida di ossalato, a più forte ragione non pare neppure credibile che la minore tossicità del citrato, allorchè s'inietta lentamente, dipenda da ossidazione di esso con formazione di ossalato. Verosimilmente in questi casi si deve ossidare compiutamente con formazione di carbonati ed acqua, secondo l'equazione:

$$2Na^3C^6H^5O^7 + 5\frac{1}{2}H^2O + 6\frac{1}{2}O^2 = 6NaHCO^3 + 2H^2O$$

da gr. 0,53 di citrato si formerebbero gr. 0,37 di bicarbonato, e quindi la dose di citrato, che è sufficiente a produrre la morte in un coniglio d'un chilo, trasformata in bicarbonato, non produrrebbe alcun disturbo, poichè abbiamo visto a suo luogo che la dose letale minima per il bicarbonato è nelle stesse condizioni sperimentali di gr. 2,70.

---

(1) Sabbatani L., *Sulla ossidazione dell'acido citrico e dei citrati col permanganato di potassio o col ferro*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXV, 8 aprile 1900.

(2) Sabbatani L., *Ricerche farmacologiche e chimiche sugli acidi acetondicarbonico e citrico*, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXIV, 1° gennaio 1899.

III.

Da tutte le serie di esperienze esposte fin qui appare evidente che i sali decalcificanti per iniezione endovenosa a dose or più or meno alta provocano costantemente fenomeni gravissimi nei diversi animali d'esperimento: dapprima eccitazione, di poi paralisi e morte. Solo col bicarbonato sodico non si osservano fenomeni di eccitazione, ma questo è uno dei sali meno tossici, che facilmente si elimina, che facilmente si decompone, e probabilmente nell'azione tossica di esso prende una parte non indifferente l'acido carbonico; le manifestazioni tossiche poi dipendenti da decalcificazione devono essere con questo sale debolissime, in relazione colla debole azione precipitante che ha sopra i sali di calcio. Così, all'infuori del bicarbonato, tutti questi sali per iniezione endovenosa in un primo momento agiscono da eccitanti, come da eccitanti agiscono per applicazione diretta su organi isolati; mentre d'altra parte sappiamo che il calcio agisce sempre come deprimente.

Per i muscoli abbiamo le osservazioni di Loeb (1) fatte col fluoruro, carbonato, fosfato, ossalato, citrato e tartrato sodico, e le mie col citrato e metafosfato, dalle quali si vide che questi reattivi provocano un aumento della irritabilità e contrattilità del muscolo, mentre il calcio ne provoca una diminuzione. L'ossalato poi (Cavazzani), il citrato e metafosfato (esperienze mie) ostacolano la rigidità cadaverica, che per contro è favorita dal calcio.

Pei nervi pure Loeb ed io abbiamo visto dei fatti analoghi, e mentre Stefani (2) osservava che il nervo di rana a contatto della soluzione fisiologica addizionata di cloruro calcico conserva più a lungo la sua eccitabilità, l'eccitabilità del nervo stesso è però minore.

Per il midollo spinale alle osservazioni che pubblicai nella I^a parte, fatte col citrato trisodico, altre ne abbiamo visto ora col metafosfato e pirofosfato sodico, le quali perfettamente si accordano con quelle, nel senso che tutti i reattivi, capaci di provocare una decalcificazione, applicati direttamente sul midollo spinale a dosi piccolissime provocano fenomeni di eccitazione intensi e scoppio di tetano violento, che spesso si localizza da quel lato a cui si limitò l'applicazione sul midollo; il calcio invece, come risulta dalle esperienze mie e di Zanda (3), sul midollo spinale provoca depressione, paralisi, e spiega azione antagonistica coi reattivi decalcificanti.

Per ciò che riguarda il centro respiratorio, non essendo ancora terminate le mie ricerche, ricorderò soltanto che secondo Batteli (4), il respiro dura più a lungo quando si fa circolare nei centri nervosi della soluzione fisiologica contenente calcio,

---

(1) Loeb J., *On an apparently new form of muscular irritability (contact irritability?) produced by solutions of salts (preferably sodium salts) whose anions are liable to form insoluble calcium compounds*, " Amer. Journ. of Physiol. ", vol. V (1901).

(2) Stefani U., *Intorno all'azione del cloruro di calcio sull'eccitabilità nervosa, ecc.*, " Rivista sper. di Fren. e di Med. leg. ", vol. XIX (1893), p. 574.

(3) Zanda G. B., *Azione dei metalli alcalino-terrosi per iniezione lombare*, " Arch. di Farm. e Terapeutica ", vol. X, fasc. 3-4 (1902).

(4) Battelli F., *Influence des différents composants du sang, etc.*, " Journ. de Physiol. et de Pathol. génér. ", 1900, No. 6.

a confronto di semplice soluzione fisiologica; e che secondo le mie esperienze l'eccitabilità dei centri nervosi negli animali trattati col calcio, permane più a lungo durante l'asfissia, ma mancano le convulsioni asfittiche.

Per ciò che riguarda l'azione sulla corteccia cerebrale io aveva sperimentato col citrato, fluoruro, ossalato e saponi di sodio (1), ed ora anche col metafosfato e col pirofosfato; il mio amico e collega Prof. Roncoroni (2) ha estese poi le ricerche a tutti i reattivi decalcificanti, ed ora possiamo generalizzare come legge il concetto che tutti i reattivi, capaci di abbassare la concentrazione del Ca-jone, applicati direttamente sulla corteccia cerebrale ne aumentano l'eccitabilità elettrica e dànno azione epilettogena. Ciò risulta evidentissimo dalla seguente tabella in cui ho riuniti i risultati di quasi tutte le esperienze fatte da me e da Roncoroni.

Sale di sodio	%	Eccitabilità elettrica della corteccia cerebrale misurata dalla dist. in mm. dei rocchetti della slitta							Sperimentatore
		normale	dopo varie applicazioni di sali della durata di 10' ciascuna						
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	
fluoruro	0,1	145	155	150	150	135	160		Roncoroni
"	0,7			diminuzione dell'eccitabilità					Sabbatani
"	0,7			diminuzione dell'eccitabilità					"
solfato	4,64	140	150	160					Roncoroni
"	3,3	145	150	150	160				"
"	3,3	160	160	165	170	170			"
metafosfato	2,43	150	150	175	200	225	E.		Sabbatani
"	2,43	—	—	—	—	E.			"
"	2,43	—	—	—	—	—	E.		"
"	2,43	160	160	185	E.				"
pirofosfato tetra-	1,0	145	145	165	180	—	180		Roncoroni
pirofosfato bi-	0,75	150	170	165	175	180	195		"
"	0,75	165	170	180	182				"
fosfato bi-	7,0	130	145E.						"
"	7,0	140	165						"
"	7,0	160	180	E.	E.				"
"	5,0	135	145	170	E.				"
carbonato	—			diminuzione dell'eccitabilità					"
"	—			diminuzione dell'eccitabilità					Sabbatani
sapone	1-3	135	135	150	150E.				"
"	3,0	140	145	155	165	165E.			"
"	3,0	160	165	160	160	185	185	195E.	"
ossalato	3,0	130	140	145	145	165	E.		"
"	3,0	120	135	130	(?)				"
"	1,6	135	140	155	145	145	E.		"
citrato tri-	4,17	130	E.	—	140				"
"	4,17	146	146	E.					"

(1) Sabbatani L., *Importanza del calcio che trovasi nella corteccia cerebrale*, " Rivista sperimentale di Freniatria ", vol. XXVII (1901).

(2) Roncoroni L., *Aumento dell'eccitabilità corticale e fenomeni di epilessia provocati da reattivi decalcificanti*, " Arch. di Psichiatria, Scienze penali ed Antropol. crimin. ", vol. XXIV, fasc. IV (1903).

Alla regola fanno eccezione il fluoruro ed il carbonato sodico: per il primo Roncoroni con soluzioni al 0,1 % otteneva un aumento non bene deciso dell'eccitabilità, mentre io con soluzioni al 0,7 % ebbi sempre una decisa diminuzione, e ciò devesi probabilmente ascrivere ad una azione farmacologica propria del fluor-jone, analoga a quella del bromo-jone. Quanto al carbonato sodico, mentre per iniezioni endovenose l'alcalinità sua non costituisce un fatto tossico grave, perchè coll'anidride carbonica del sangue si forma prontamente del bicarbonato, invece per applicazione diretta sulla corteccia l'idrossil-jone dà manifestazione tossica sua propria depressiva, il che benissimo ha dimostrato Roncoroni, confrontando l'azione del carbonato e della soda; onde per la corteccia l'azione eccitante, che si dovrebbe avere colla decalcificazione, è maschorata dall'azione depressiva dell'alcali. Queste eccezioni, chiaramente spiegabili per il fluoruro e per il carbonato, trovano riscontro in anomalie corrispondenti rispetto all'aziono anticoagulante, poichè, come già mostrai nella II[a] parte delle presenti ricerche, il fluoruro sodico a piccole dosi riesce anticoagulante in quanto precipita il calcio, ma a dosi alte l'azione sua è più complessa; ed il carbonato sodico, che ha azione distruttiva sui globuli rossi, certo mentre provoca l'incoagulabilità del sangue, decalcificandolo, provoca in esso altri e più profondi cambiamenti.

L'azione poi del calcio sulla corteccia cerebrale, come risulta sicuramente dalle esperienze mie, di Regoli (1) e di Roncoroni (2), è sempre depressiva ed antagonistica con quella dei reattivi decalcificanti; e per ciò che riguarda la funzione del calcio nella corteccia sarà bene ricordare che secondo Toyonaga (3) si trova più calcio nella sostanza grigia che nella bianca.

Per l'azione eccitante sulla motilità dell'intestino e l'azione purgativa di alcuni sali, questione ch'io aveva proposta fin dal 1901 al Dott. Simon (4), como argomento di studio complementare alle sue ricerche sulla motilità dell'intestino, e che è stata molto bene svolta da Mac Callum (5), sappiamo ormai con sicurezza che viene inibita dal calcio.

Per la secrezione urinaria Mac Callum stesso (6) vide che diminuisce col calcio.

Per la glicosuria poi, prodotta da soluzioni di sali di sodio, Fischer (7) vide che viene arrestata dal calcio.

Per gli infusorî la relazione che passa fra l'azione decalcificante dei sali e la tossicità loro può essere messa ora in evidenza per mezzo di ricerche fatte molti

---

(1) Regoli P., *Azione dei metalli alcalino-terrosi sull'eccitabilità elettrica della corteccia cerebrale*, " Boll. della Soc. tra i cultori di Sc. med. e nat. in Cagliari „ 1899-1900, p. 151-156.

(2) Roncoroni L., *Azione del calcio-jone sulla corteccia cerebrale*, " Rivista sperimentale di Freniatria „, vol. XXX (1904).

(3) Toyonaga M., *Ueber die Vertheilung des Kalks in thierischen Organismus*. From the " Bull. of the College of Agriculture „, Tokyo, Imperial University, vol. V, n. 2.

(4) Simon I., *Ricerche sperimentali sulla peristaltica intestinale*. Tesi di Cagliari, 1902, pubblicata nello " Sperimentale „, anno LVII (1903).

(5) Mac Callum J. B., *On the mechanism of the action of saline purgatives, and the counteraction of their effect by calcium*, University of California publications, vol. I, p. 5-6 (1903).

(6) Id., *The influence of calcium and barium on the flow of urine*, " University of California publications „, vol. I (1904), p. 81-82.

(7) Fischer M. H., *On the production and suppression of glycosuria in rabbits through electrolytes*, " University of California publications „, vol. I (1904), p. 87-113.

anni addietro da Faggioli per altro scopo (1). Infatti, calcolando in gr.-equivalenti le dosi dei diversi sali, che per 100 cm³ di soluzione erano sufficienti a determinare la morte del *Paramaecium Aurelia*, troviamo i seguenti dati:

Sale	gr.- equivalente per 100 cm³ di H^2O
Na^2CO^3	0.0015
Na^2SO^4	0.0021
NaI	0,0031
NaH^2PO^4	0.0032
Na^3PO^4	0,0035
NaBr	0.0037
$NaHCO^3$	0,0040
NaCl	0.0045
$NaNO^3$	0,0053

Da questi vediamo che, prescindendo dal ioduro e dal bromuro, di cui gli anioni I^- e Br^- verosimilmente hanno una tossicità speciale, la tossicità minore spetta al nitrato, cloruro e bicarbonato sodico, di cui i sali di calcio corrispondenti sono molto solubili, mentre poi la maggiore tossicità spetta al carbonato, solfato e fosfati, cui corrispondono dei sali di calcio assai poco solubili.

Per i vasi sanguigni Kobert, studiando l'azione di molte sostanze medicamentose colla circolazione artificiale, osservava che l'acido ossalico e l'ossalato sodico (2) li restringono; e quando io faceva passare attraverso un arto di un animale appena morto del citrato trisodico, onde vedere l'influenza di esso sulla rigidità cadaverica, notai che durante il passaggio del citrato dapprima la resistenza che s'incontrava nel fare l'iniezione cresceva moltissimo, per diminuire poi grandemente verso la fine.

Per ciò che riguarda poi la tossicità comparata di alcuni reattivi precipitanti del calcio, conviene ricordare le ricerche interessantissime di Friedenthal (3) e di Bottazzi (4); ma per considerazioni teoretiche circa la solubilità diversa dei corrispondenti sali di calcio, per la tossicità speciale di alcuni anioni e per i risultati sperimentali sicuri che abbiamo ottenuti, e che discuteremo fra poco, non si può affatto parlare di equivalenza chimica delle dosi tossiche di fluoruro, ossalato ed oleato sodico.

Ora, senza volerci dilungare più oltre nella enumerazione di altri fatti, possiamo veramente affermare che, mentre il calcio provoca sempre fenomeni di depressione, i reattivi decalcificanti invece tanto per iniezione endovenosa, che per applicazione diretta su organi isolati, sempre in un primo momento provocano fenomeni di ecci-

(1) Faggioli F., *Di alcune azioni chimiche studiate sui protozoi*, " Atti della Società Ligustica di Sc. Nat. ", vol. IV, N. 4, dicembre 1893, p. 383; vol. V, N. 2, gennaio 1894, p. 1.

(2) Kobert R., *Ueber die Beeinflussung der peripheren Gefässe durch pharmakologische Agentien*, " Arch. für exp. Path. u. Pharm. ", Bd. 22 (1887), S. 77-106.

(3) Friedenthal H., *Ueber die Giftwirkung der Seifen etc.*, loc. cit.

(4) Bottazzi F., loc. cit.

tazione; ma come iniettando delle dosi alte nelle vene ai fenomeni di eccitazione seguono presto la paralisi e la morte, così pure seguitando a lungo nelle applicazioni locali sui muscoli, sui nervi, ecc. alla eccitabilità aumentata del primo momento segue la depressione e l'ineccitabilità. Se poi limitiamo le dosi fino ad ottenere soltanto fenomeni di eccitazione, questi possono essere anche molto intensi, ma sempre scompaiono prontamente col cessare dell'applicazione, allorchè si sperimenta con iniezioni endovenose o su organi isolati, in modo però che questi conservino i loro rapporti anatomici normali di circolazione; e ciò dimostra che le modificazioni provocate da questi sali sui protoplasmi sono sempre lievi, facilmente e prontamente riparabili. Conformemente a questo concetto Roncoroni (1) non vide istologicamente sulla corteccia cerebrale modificazioni anatomiche importanti, neanche dopo prolungata applicazione locale di reattivi decalcificanti o di cloruro calcico; ed io per quasi tutti i sali decalcificanti, e Delogu (2) per il calcio, abbiamo osservato che la dose minima letale varia molto a seconda della velocità della iniezione, e che alcune volte, quando anche i fenomeni erano gravissimi, e la morte imminente, in pochi minuti colla respirazione artificiale e, se occorreva, colla compressione ritmica del cuore, l'animale si ristabiliva (3). In fine giova ricordare la prontezza con cui compaiono e scompaiono i fenomeni di eccitazione e di depressione nell'antagonismo fra decalcificanti e sali di calcio.

Abbiamo quindi nell'andamento delle manifestazioni tossiche generali e locali dei decalcificanti e del calcio un tale accordo, che siamo costretti ad ammettere si tratti sempre e per tutti questi sali di uno stesso meccanismo d'azione, basato sopra variazioni in più od in meno della concentrazione del Ca-jone protoplasmatico, analogamente a quello che avviene per il sangue, sul quale l'effetto di una decalcificazione o di una ipercalcificazione, oltre determinati valori critici, conduce sempre alla incoagulabilità.

***

Se ora consideriamo soltanto i reattivi decalcificanti, l'azione tossica loro può evidentemente essere subito riferita al carattere chimico comune di diminuire la concentrazione del Ca-jone, come l'azione anticoagulante di essi dipende sicuramente da una decalcificazione che provocano. Infatti nella II^a parte delle presenti ricerche potei dimostrare che l'attività anticoagulante di questi sali aumenta col crescere della attività loro decalcificante, e che l'incoagulabilità prodotta dalle dosi minime di essi è prontamente tolta con aggiunta di sali solubili di calcio; raccogliendo ora i dati ottenuti nei capitoli speciali, vediamo che anche la tossicità aumenta in questi sali col crescere della decalcificazione che possono produrre, e che fra questi ed i sali di calcio si possono ottenere fenomeni di antagonismo interessantissimi.

Onde poter fare dei confronti sulla tossicità dei sali, è indispensabile tener conto

(1) Roncoroni L., *Alcune esperienze intorno all'azione del calcio sulla corteccia cerebrale*, "Rivista sperimentale di Freniatria", vol. XXIX, fasc. I-II (1903).

(2) Delogu G., loc. cit.

(3) Vedasi a questo proposito ciò che s'è riportato delle esperienze di Aducco sul carbonato sodico, e le esperienze 132, 133 col citrato.

soltanto dei dati ottenuti sopra uno stesso animale d'esperimento, per il che ho preferito il coniglio, sul quale il numero delle esperienze fatte è maggiore che per gli altri; ed è pure indispensabile calcolare le dosi in gr.-equivalente per chilo corporeo, onde evitare gli errori che si avrebbero per la grandezza molecolare e la valenza varia dei sali, e quelli provenienti dal diverso peso degli animali.

Con questi criterî ho raccolti nella seguente tabella i dati relativi alla dose letale.

N.	Sali	Formula	Equivalente	Dose letale per chilo di coniglio in gr.	in gr.-equiv.
1	fluoruro sodico	NaFl	42,0	0,262	0,0062
2	solfato sodico	$Na^2SO^4 + 10H^2O$	161,0	10.300	0,0644
3	metafosfato sodico . . .	$NaPO^3$	102,0	0,180	0,0017
4	pirofosfato sodico . . .	$Na^2H^2P^2O^7$	55,5	0,087	0,0015
5	ortofosfato bisodico . .	$Na^2HPO^4+12H^2O$	119.3	2.060	0.0173
6	carbonato sodico . . .	Na^2CO^3	53,0	0,585	0,0110
7	carbonato acido di sodio	$NaHCO^3$	84,0	2,700	0,0321
8	oleato sodico	$NaC^{18}H^{33}O^2$	304.0	—	—
9	ossalato sodico	$Na^2C^2O^4$	67,0	0,100	0,0015
10	citrato trisodico	$Na^3C^6H^5O^7+5{}^1/{}_2H^2O$	119.0	0.530	0,0044

Da ciò vediamo che la tossicità è per questi sali molto varia:

— *grande* — fluoruro, ossalato, metafosfato, citrato:

— *discreta* — fosfato, carbonato:

— *piccola* — bicarbonato, solfato:

e mentre al primo gruppo appartengono tutti quei sali che sono considerati come reattivi più sensibili del calcio, al secondo appartengono quelli che sono considerati soltanto come reattivi discreti del calcio, ed al terzo quelli che manifestamente sono reattivi assai poco sensibili del jone-calcio. E la relazione che passa fra tossicità e decalcificazione è poi per tutti così stretta, come chiaramente risulta dal confronto diretto delle cifre nella tabella alla pagina seguente, nella quale, accanto ai dati della solubilità dei sali di calcio e della tossicità dei corrispondenti sali di sodio, ho aggiunto quelli relativi all'attività anticoagulante. che pure dipende dalla decalcificazione, riportandoli dalla IIª parte delle presenti ricerche.

Queste tre serie di dati con ogni cura raccolti, e però esatti per quanto ricerche biologiche di questo genere lo permettono, non lasciano dubbio alcuno circa la relazione strettissima che passa fra potere decalcificante, anticoagulante e tossico dei sali ora studiati, e si può dire con tutta sicurezza che il carattere di dare un sale calcico poco solubile è accompagnato sempre da una corrispondente azione anticoagulante e tossica degli anioni.

Questa relazione causale fra azione decalcificante ed azione anticoagulante e tossica, che per alcuni sali soltanto era sicuramente dimostrata, non pareva si potesse prima d'ora generalizzare a tutti i reattivi decalcificanti, perchè alcuni di essi sono

N.	Sali di sodio	in gr.-equivalente solubilità del sale calcico corrispondente per litro di soluz.	quantità minima anticoagulante per litro di sangue	dose letale minima per chilo corporeo di coniglio
	a	*b*	*c*	*d*
9	ossalato	0,0001	0,0090	0,0015
3	metafosfato	—	0,0095	0,0017
4	pirofosfato	—	0,0100	0,0015
10	citrato	—	0,0200	0,0044
8	oleato	—	0,0246	—
1	fluoruro	0,0004	0,0357	0,0062
6	carbonato bisodico . . .	0,0002	0,0660	0,0110
5	fosfato bisodico	0,0015	0,2251	0,0173
7	carbonato monosodico . .	0,0176	0,4714	0,0321
2	solfato	0,0300	0,6000	0,0644

poco sensibili come precipitanti del calcio, e perchè varie considerazioni chimiche potevano far credere che la tossicità di alcuni di questi sali dipendesse da altre cause, che non sia la decalcificazione. Così ad esempio per il bicarbonato, e più ancora per il solfato era lecito dubitare che nel determinismo dei fenomeni tossici concorresse una tossicità fisica in rapporto alla quantità forte di sale che conviene iniettare per produrre la morte, molto più che anche il cloruro sodico ad alte dosi, iniettato nelle vene, dà fenomeni generali di eccitazione (1), tremiti muscolari, crampi, convulsioni, ed iniettato nelle arterie verso i centri nervosi dà ancora fenomeni convulsivi (2), i quali si ottengono pure per applicazione diretta sulla corteccia (3) di soluzioni concentrate di cloruro sodico. Se però si ricorda che nel coniglio e per via endovenosa

(1) Müntzer E., *Zur Lehre von der Wirkung der Salze*, 7 Mittheilung, *Die Allgemeinwirkung der Salze*, " Arch. für exp. Pathol. u. Pharm. „, Bd. 41 (1898), S. 74-96, descrive le seguenti esperienze:

16 ott. 1894. — Coniglio di gr. 1400; ricevette in più riprese, in 47', cm³ 28 di soluzione di cloruro sodico al 10 %, corrispondenti a gr. 2 per chilo corporeo; presentò dapprima tremori agli arti anteriori e posteriori, in ultimo convulsioni generali.

13 dic. 1894. — Coniglio di gr. 2800; ricevette in 91' cm³ 101 di soluzione al 10 % di NaCl, corrispondenti a gr. 3,6 per chilo; presentò dapprima tremiti delle estremità, poi convulsioni cloniche ed in ultimo morì.

Già Bohne, d'accordo con Richet e Blumenthal, notava che per azione del cloruro sodico si hanno convulsioni e tetano; Müntzer poi aggiungeva che questa non è un'azione specifica del cloruro sodico, ma comune agli altri sali. Convulsioni generali nei conigli per grosse dosi di cloruro sodico, le osservava pure Spiro (*Ueber Diurese*, Zweiter Theil, *Die Wirkung artificieller Bluteindickung auf Harnabsonderung und Lymphorrhöe. Ein Beitrag zur Pharmakologie colloider Substanzen*, " Arch. für exp. Path. und Pharm. „, Bd. 41 (1898), S. 148-157) ed anche Bosc e Vedel (*Recherches sur la toxicité et les effets des solutions fortes* (7 %) *de chlorure de sodium en injection intra-veineuse*, " Compt. rend. Soc. de Biol. „, t. III [10] (1896), p. 736); Bosc e Mairet poi fissavano come dose letale gr. 4 per chilo corporeo di coniglio.

(2) Novi, *Einfluss des Chlornatriums auf die chemische Zusammensetzung des Gehirnes*, " Pfluger's Arch. „, Bd. 48 (1891), S. 320.

(3) Regoli P., *Azione dei metalli alcalino-terrosi sull'eccitabilità elettrica della corteccia cerebrale*, " Bollettino della Società tra i cultori delle Sc. med. e nat. in Cagliari „, 1899-1900, p. 151-156.

a produrre la morte occorrono gr. 4 di cloruro sodico (1) per chilo corporeo, ossia gr.-equivalenti 0,0683, mentre per il bicarbonato abbiamo visto che occorrono gr.-equivalenti 0,0321, e per il solfato gr.-equivalenti 0,0643, allora appare evidente che la tossicità di questi due sali non può essere ascritta interamente alla semplice concentrazione molecolare, od alla così detta — azione salina — nel senso comunemente accettato. D'altro lato, se confrontiamo la debole attività precipitante di questi sali per il calcio, e le piccole quantità di calcio che trovansi nel sangue e negli organi più importanti e vitali, appare credibile che possano produrre così nel sangue come nei protoplasmi una diminuzione nella concentrazione jonica del calcio solo per un fenomeno di retrocessione nella dissociazione elettrolitica.

Dal confronto poi delle cifre relative alla tossicità del cloruro sodico e dei sali decalcificanti appare evidente che la tossicità di questi non dipende certo dal catione — *sodio* — comune in tutti, il quale fra i metalli viene giustamente considerato innocuo. Solo Loeb (2) considerando l'azione del cloruro sodico puro, poi quella del cloruro sodico assieme a piccole quantità di altri sali, e specialmente di calcio, era stato condotto ad assegnare al sodio-jone una azione tossica che non ha, ed una azione antitossica al calcio, che pure non ha; parmi invece che ai fatti interessantissimi, osservati da Loeb, debbasi dare un altro significato, molto più semplice, questo: come per la funzione fisiologica dei protoplasmi è indispensabile una determinata pressione osmotica, una determinata pressione barometrica, una determinata composizione salina, così certi rapporti fra i diversi sali normali non possono essere impunemente variati oltre determinati limiti, come avviene per la composizione centesimale dell'aria, sì che riesce tossica una atmosfera di azoto puro o di ossigeno puro, come una soluzione di cloruro sodico o di cloruro calcico puri. Le osservazioni di Loeb sono interessanti specialmente perchè hanno mostrato l'importanza fisiologica di determinati rapporti molecolari nella composizione salina dei liquidi; ed è su questo che giustamente insiste egli nelle pubblicazioni sue più recenti: " By a series " of researches in my laboratory the idea has been arrived, that the irritability " of the nerves and muscles and the rhytmical activity of different organs is amongst " others, a function of the quotient $\frac{C_{Na}}{C_{Ca}}$, that is, the concentration of the sodium " ions divided by the concentration of the calcium ions of the solution surrounding " the tissues in question „ (3). Con ciò però non si dice ancora quale sia la funzione di questi ioni, il cui quoziente fisiologico delle concentrazioni, forse in rapporto alla legge dell'azione di massa, dipende dalla funzione loro biologica speciale. Per il calcio-jone la funzione è, a mio credere, moderatrice, e va studiata non solo per quello contenuto nelle soluzioni che circondano i tessuti, ma più ancora per quello contenuto nei protoplasmi.

Per il carbonato e bicarbonato sodico, per il fosfato bisodico e per il pirofosfato tetrasodico si poteva dubitare che la tossicità dipendesse in parte almeno dall'alca-

---

(1) Vedi nota 1 a pag. antecedente.

(2) Loeb J., *On ion-proteid compounds and their rôle in the mechanics of life phenomena.* I. *The poisonous character of a pure NaCl solution,* " Amer. Journ. of Physiol. „, vol. III (1900).

(3) Loeb J., *On the segmental character of the respiratory center in the medulla oblongata of mammals,* " University of California publications „, vol. I (1903), p. 71-75.

linità delle soluzioni loro; ma per quello che abbiamo visto, trattando della soda e del carbonato sodico, è certo che la concentrazione dell'OH-jone nelle soluzioni dei sali da noi sperimentate, e la velocità dell'iniezione erano tali, che nel determinismo delle manifestazioni tossiche l'alcalinità delle soluzioni è del tutto trascurabile. La funzione acida del terzo atomo d'idrogeno dell'acido fosforico è così debole che può del tutto essere trascurata nel fosfato bisodico, allorchè si ha un avvelenamento rapido, e noi infatti abbiamo visto che con questo sale si hanno segni di intossicazione acida solo quando l'avvelenamento decorre lentamente. Quanto poi all'acidità forte del pirofosfato bisodico, questa non può essere causa di fenomeni tossici, per la piccolezza della dose letale del pirofosfato stesso.

Si poteva dubitare inoltre che l'azione tossica di questi reattivi dipendesse dalla incoagulabilità del sangue che provocano; ma a questa obbiezione si risponde che quando con tutti i reattivi avviene la morte dell'animale il sangue coagula ancora benissimo, appena estratto dai vasi, e che per produrre l'incoagulabilità del sangue *in vitro* occorrono delle dosi molto maggiori che per produrre la morte dell'animale. Ciò risulta evidente confrontando i dati delle colonne *c* e *d* della tabella suesposta, dai quali facendo il rapporto $\frac{c}{d}$ vediamo di quante volte la dose anticoagulante per litro di sangue *in vitro* è maggiore della dose letale per chilo d'animale.

Numero d'ordine	Sali di sodio	$\frac{c}{d}$
9	Ossalato . . .	6,0
3	Metafosfato . .	6,5
4	Pirofosfato . .	6,6
10	Citrato	4,5
8	Oleato	—
1	Fluoruro . . .	5,7
6	Carbonato bi- .	6,0
5	Fosfato bi- . .	12,4
7	Carbonato mono-	14,6
2	Solfato	9,3

Ora, senza voler dare eccessiva importanza a questo rapporto, perchè nel chilo di animale abbiamo molta parte inerte (ossa, peli, ecc.) e molti tessuti ed organi diversissimi fra loro chimicamente, per la funzione e per la sensibilità ai reattivi decalcificanti, purtuttavia osserveremo che, eccettuati tre sali, per gli altri il rapporto non varia molto e fa pensare che le modificazioni chimiche operate sul sangue, le quali portano all'incoagulabilità, e quelle operate sui protoplasmi, le quali portano alla morte, siano veramente dello stesso ordine per tutti i sali, molto più che i tre sali, pei quali troviamo un rapporto troppo alto dalla media di 6,0 sono proprio quelli che possono produrre una diminuzione nella concentrazione del Ca-jone del sangue e dei protoplasmi solo quando per una concentrazione molecolare elevata si possono produrre fatti di retrocessione nella dissociazione elettrolitica dei sali di calcio. Riassumendo, da questo confronto fra l'azione anticoagulante e tossica mentre si raccolgono nuovi elementi, che inducono a riferire l'incoagulabilità e la tossicità alla sottrazione di Ca-jone, acquistiamo la certezza che la tossicità di questi sali non dipende dalla incoagulabilità, che possono produrre solo a dosi molto più alte di quelle letali.

Per l'ossalato non credo si possa più pensare ora ad una tossicità speciale dell'anione suo, e neanche alla formazione di precipitati nell'interno dei vasi, ma sì bene alla diminuzione della concentrazione del Ca-jone che provoca. Per molti reattivi poi la formazione di precipitati calcarei potrà modificare alcuni dettagli, ma non l'azione fondamentale loro, e noi vediamo infatti che tanto per iniezione endovenosa, che per applicazione sui muscoli, sui nervi, sul midollo e sulla corteccia cerebrale l'azione è sempre la stessa fondamentalmente, sia per i reattivi che provocano una diminuzione nella concentrazione del Ca-jone precipitandolo, che per quelli i quali non lo precipitano.

Quanto poi alla tossicità degli anioni meta- piro- ed orto-fosforico, mentre per i lavori di Schulz si era tentati a porla in relazione colla tossicità propria del fosforo o con fenomeni di ossidazione, ora è indubitato che questa dipende invece da una decalcificazione intensa che producono. Anzi, prescindendo da questi tre di cui mi sono occupato in modo speciale, e considerando da un lato la tossicità di tutti i sali sodici degli acidi ossigenati del fosforo e dall'altro la solubilità dei corrispondenti sali di calcio troviamo una concordanza singolarissima fra quella e questa; ma di ciò mi intratterrò prossimamente.

Solo per ciò che riguarda la tossicità del fluoruro e del bicarbonato sodico, non pare possa ascriversi ad una semplice decalcificazione; ma almeno in parte anche ad una azione propria del fluor-jone e dell'acido carbonico, come dimostra il comportamento loro diverso dagli altri sali, che spesso nell'azione generale e locale abbiamo notato.

Tornando quindi ai rapporti fra l'azione decalcificante, anticoagulante e tossica, esposti nella tabella a p. 525, rapporti che possiamo rendere evidentissimi nella Tavola annessa al presente lavoro, appare ora chiaramente che l'azione tossica fondamentale di questi sali dipende dalla diminuzione che producono nella concentrazione del Ca-jone.

***

Circa la tossicità comparata dei reattivi decalcificanti sopra i comuni animali d'esperimento, non si ha un rapporto costante, come si vede dalla seguente tabella:

Animale	Dose letale in gr. per chilo corporeo dei sali sodici			
	solfato	fosfato	metafosfato	citrato
cane	8,5	2,59	0,15	0,73
gatto	—	—	—	0,38
coniglio	10,3	2,06	0,18	0,53
cavia	—	1,75	0,20	0,43

e ciò probabilmente perchè, a seconda delle proprietà chimiche varie dei sali e della specie dell'animale, si ha una maggiore o minore facilità all'eliminazione od alla trasformazione in prodotti meno tossici del sale iniettato; talchè la decalcificazione, che costituisce il fenomeno fondamentale tossico, è alterata variamente nei singoli animali da azioni di difesa; ma è possibile inoltre che a determinare queste differenze intervenga anche una particolare sensibilità di alcuni animali a determinati anioni.

Probabilmente è per queste ragioni che non possiamo trovare una relazione fra la tossicità del calcio e quella dei reattivi decalcificanti. Delogu infatti fissava la dose letale minima per il cloruro di calcio come segue:

	Gr. per chilo corporeo
Cane	0,19
Gatto	0,34
Coniglio	0,50
Cavia	0,30

e quantunque *a priori* si possa ammettere che fra la tossicità dei decalcificanti e del calcio debba esistere una stretta relazione, in quanto l'una e l'altra sono espressione di alterazioni protoplasmatiche dello stesso ordine (concentrazione del Ca-jone aumentata o diminuita), purtuttavia non si riesce a metterla bene in evidenza. Se però ci limitiamo a confrontare quelle serie di esperienze, che per essere più numerose sono anche più attendibili, cioè quelle fatte sui cani e conigli col citrato trisodico e col cloruro calcico, si sarebbe tentati a credere che quegli animali, i quali sono più sensibili al calcio, forse perchè normalmente ne contengono meno, siano per la stessa ragione meno sensibili alla sottrazione del calcio, e però ai reattivi decalcificanti.

Animale	Calcio conten. normalmente in 1000 parti di sangue (Abderhalden)	Dose letale minima per chilo corporeo in gr. — cloruro calcico (Delogu)	Dose letale minima per chilo corporeo in gr. — citrato trisodico (Sabbatani)
cane	0,062-0,049	0,19	0,73
coniglio	0,072	0,50	0,53

Ma su questo concetto, che pur sarebbe molto interessante, in quanto si collega a questioni generali, non posso ora insistere per la scarsità dei dati di cui disponiamo attualmente. Se poi confrontiamo la tossicità dei reattivi decalcificanti energici con quella del cloruro di calcio nello stesso animale, il coniglio, desumendola per i primi dalla tabella esposta a p. 525 e per il secondo dal dato surriferito di Delogu (gr. 0,50 = gr.-equivalenti 0,0090 di $CaCl^2$ per chilo corporeo di coniglio) abbiamo i seguenti dati:

	Dose letale minima per chilo corporeo di coniglio in gr.-equivalenti
Metafosfato sodico	0,0017
Pirofosfato sodico	0,0015
Citrato trisodico	0,0041
Ossalato sodico	0,0015
Cloruro calcico	0,0090

dai quali possiamo farci un'idea dei valori critici, minimo e massimo, della concentrazione del Ca-jone, incompatibile colla vita, rispetto alla concentrazione fisiologica di esso; graficamente verrebbero espressi così.

C_{Ca} minima	C_{Ca} fisiologica	C_{Ca} massima

***

Da tutto quello che abbiamo esposto fin qui parmi quindi si possa ritenere che, come per la coagulazione del sangue, anche per la normale funzione dei protoplasmi sia indispensabile una determinata concentrazione jonica del calcio, la quale, tanto nel primo che nel secondo caso, può oscillare entro limiti abbastanza ampî, senza che si abbiano forti variazioni fisiologiche della coagulabilità del sangue o della funzione protoplasmatica; però, oltre certi valori critici minimo e massimo, diversi per il sangue e per i protoplasmi, si ha nel sangue l'incoagulabilità, e nei protoplasmi la sospensione della vita; ma come per il sangue la coagulabilità ritorna normale, tosto che con mezzi adatti si riconduce la concentrazione del Ca-jone entro i limiti fisiologici, così anche la vitalità e la funzione nei protoplasmi torna normale, tosto che si allontana l'eccesso di calcio, o si ridà al protoplasma il Ca-jone che gli mancava. Soltanto, onde ciò possa avvenire, conviene che si intervenga abbastanza presto, prima che il protoplasma muoia, ed in questo troviamo un nuovo punto di analogia colla coagulabilità del sangue, la quale può essere sospesa da una deficienza o da un eccesso di calcio, ma se avviene, i reattivi decalcificanti ed i sali di calcio non hanno potere di ridisciogliere il coagulo di fibrina.

Così si interpretano bene e coordinatamente i numerosi fatti di antagonismo bilaterale fra il calcio ed i reattivi decalcificanti, che si sono osservati rispetto alla coagulazione del sangue ed all'azione farmacologica: antagonismo che acquista perciò una grandissima importanza rispetto all'ipotesi della presenza e funzione biologica moderatrice del calcio-jone nei liquidi circolanti e negli organi.

Dal Laboratorio di Materia Medica e Farmacologia sperimentale
della R. Università di Parma. Aprile 1904.

SABBATANI L.- Funzione biol. del calcio