$$\triangle'=\frac{1}{x_1}\begin{vmatrix}0&-2&0&\cdots\cdots&0\\0&0&-2&\cdots\cdots&0\\0&0&0&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2}&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_3}&0&-2&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_4}&0&0&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}$$

然ルニ $\begin{vmatrix}0&-2&0&\cdots\cdots&0\\0&0&-2&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}=2^n\begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots\cdots&0\\0&0&-1&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots\cdots&1\end{vmatrix}=2^n$

$$\therefore\ \triangle'=\frac{2^n}{x_1}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2}&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_3}&0&-2&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_4}&0&0&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}$$

同様ニ $\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2}&-2&0&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_3}&0&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_4}&0&0&-2&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}=\frac{2^{n-1}}{x_2}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_3}&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_4}&0&-2&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{x_3}&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_4}&0&-2&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}=\frac{2^{n-2}}{x_3}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_4}&-2&0&\cdots\cdots&0\\\frac{1}{x_5}&0&-2&\cdots\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{x_{n+1}}&2&2&\cdots\cdots&2\end{vmatrix}$$

……………………………………

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{x_n}&-2\\\frac{1}{x_{n+1}}&2\end{vmatrix}=\frac{2}{x_n}+\frac{2}{x_{n+1}}$$

$$\therefore\ \triangle'=2^n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

$$\therefore\ \triangle=(-1)^{n+1}2^nx_1x_2\cdots\cdots x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right),$$

60. $\triangle_n=\begin{vmatrix}1+x^2&x&0&0&\cdots\cdots&0&0\\x&1+x^2&x&0&\cdots\cdots&0&0\\0&x&1+x^2&x&\cdots\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots\cdots&x&1+x^2\end{vmatrix}=1+x^2+x^4+\cdots\cdots+x^{2n}$

ヲ証セヨ，但シ $\triangle_n$ ハ n 次ノ行列式トス。

〔解〕 第一行ニツキ展開スレバ

$$\triangle_n=(1+x^2)\begin{vmatrix}1+x^2&x&0&\cdots\cdots&0&0\\x&1+x^2&x&\cdots\cdots&0&0\\0&x&1+x^2&\cdots\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots\cdots&x&1+x^2\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots\cdots&0&0\\1&1+x^2&x&\cdots\cdots&0&0\\0&x&1+x^2&\cdots\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots\cdots&x&1+x^2\end{vmatrix}$$

故ニ今 $\triangle_n$ ト同ジ形ニテ次數ガ $(n-1)$, $(n-2)$ トナリタル行列式ヲ $\triangle_{n-1}$, $\triangle_{n-2}$ ニテ表ハシ且ツ右邊ノ第二行列式ヲ第一列ニツキ展開スレバ

$$\triangle_n=(1+x^2)\triangle_{n-1}-x^2\triangle_{n-2},$$

$$\therefore\ \triangle_{n-1}=(1+x^2)\triangle_{n-2}-x^2\triangle_{n-3}$$

……………………………………

$$\triangle_3=(1+x^2)\triangle_2-x^2\triangle_1$$

$$\therefore\ \triangle_n+\triangle_{n-1}+\ldots\ldots+\triangle_3$$

$$=(1+x^2)(\triangle_{n-1}+\triangle_{n-2}+\ldots\ldots+\triangle_2)-x^2(\triangle_{n-2}+\triangle_{n-3}+\ldots\ldots+\triangle_1),$$

$$\therefore\ \triangle_n=\triangle_2+x^2(\triangle_{n-1}-\triangle_1)$$

然ルニ $\triangle_1=1+x^2,\quad \triangle_2=(1+x^2)^2-x^2=1+x^2+x^4$

$$\therefore\ \triangle_n=x^2\triangle_{n-1}+1,$$

$$\therefore\ \triangle_{n-1}=x^2\triangle_{n-2}+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle_2=x^2\triangle_1+1$$

各ニ $1,\ x^2,\ x^4,\ \ldots\ldots,\ x^{2n-4}$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$\triangle_n=1+x^2+x^4+\ldots\ldots+x^{2n-6}+x^{2n-2}\triangle_1+x^{2n-4}$$

$$=1+x^2+x^4+\ldots\ldots+x^{2n-6}+x^{2n-4}+x^{2n-2}+x^{2n},$$

第 十 二 章

消 去 法、終 結 式

基本定理 **I.** n 個ノ未知數 $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n$ ノ間ノ $n+1$ 個ノ一次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+\ldots\ldots+k_1x_n+p_1=0$$

$$a_2x_1+b_2x_2+\ldots\ldots+k_2x_n+p_2=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n+1}x_1+b_{n+1}x_2+\ldots\ldots+k_{n+1}x_n+p_{n+1}=0$$

ガ同時ニ成立スルタメニ必要ナル條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots & k_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots & k_2 & p_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots\ldots & k_{n+1} & p_{n+1} \end{vmatrix}=0,$$ (前章問. 30 參照)

II. n 個ノ未知數 $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_n$ ノ間ノ n 個ノ一次同次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+\ldots\ldots+k_1x_n=0$$

$$a_2x_1+b_2x_2+\ldots\ldots+k_2x_n=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_nx_1+b_nx_2+\ldots\ldots+k_nx_n=0$$

ガ未知數ノ悉クハ 0 ナラザル値ニテ 同時ニ 成立スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots & k_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_n & b_n & \ldots\ldots & k_n \end{vmatrix}=0,$$ (前章問. 31 參照)

演習問題

1. $2x+y-1=0,\quad x-2y+1=0,\quad x+3y-2=0,\quad 4x-3y+1=0$

ガ同時ニ成立スルカ否カヲ吟味セヨ。

〔解〕 四ツノ方程式ガ同時ニ成立スルトキハ其中ノ任意ノ三ツハ同時ニ成立セザルベカラズ，然ルニ第一，第二，第三及ビ第二，第三，第四方程式ヨリ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8+1-3-2+2-6=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}=3+16-3-12+2-6=0$$

而シテ第二，第三方程式ノ x, y ノ係數ノ行列式ハ 0 ナラズ即チ

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$$

故ニ第一，第二，第三及第二，第三，第四方程式ハ同時ニ成立ス（前章問．30），從ツテ四ツノ方程式ハ同時ニ成立ス。

2. **次ノ聯立方程式ハ k ノ如何ナル値ニ對シテ成立スルカ，**

$$4x+3y+z=kx$$
$$3x-4y+7z=ky$$
$$x+7y-6z=kz$$

〔解〕 所題ノ方程式ガ同時ニ成立スルタメニハ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} 4-k & 3 & 1 \\ 3 & -4-k & 7 \\ 1 & 7 & -6-k \end{vmatrix}=0$$

$\therefore\ k^3+6k^2-75k=0$

$\therefore\ k=0,\quad -3\pm2\sqrt{21}$,

3. **次ノ聯立方程式ガ $x=y=z=0$ 以外ノ根ヲ有ルコトヲ証セヨ，**

$$(b-c)x+by-cz=0$$

$$(c-a)y+cz-ax=0$$
$$(a-b)z+ax-by=0$$

〔解〕 $$\begin{vmatrix} b-c & b & -c \\ -a & c-a & c \\ a & -b & a-b \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)+ac(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)$$
$$=0$$

0 故ニ基本定理 II ニヨリ $x=y=z=0$ 以外ノ根ヲ有ス。

4. **x, y, z ノ同ジ値ニ對シテ次ノ方程式ガ同時ニ成立スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ，**

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$$

〔解〕 二組ノ方程式ノ値ヲ夫々 K, K' トスレバ

$x=a+lK,\qquad y=b+mK,\qquad z=c+nK,$

$x=a'+l'K',\quad y=b'+m'K',\quad z=c'+n'K',$

$\therefore\ a-a'+lK-l'K'=0$

$b-b'+mK-m'K'=0$

$c-c'+nK-n'K'=0$

所題ノ方程式ガ x, y, z ノ同ジ値ニテ成立スルトキハ K, K' ノ間ノ此三ツノ方程式ガ同時ニ成立セザルベカラズ，故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a-a' & l & l' \\ b-b' & m & m' \\ c-c' & n & n' \end{vmatrix}=0$$

逆ニ $\triangle=0$ ニシテ且ツ $l:m:n$ ガ $l':m':n'$ ニ等シカラザレバ上ノ三ツノ方程式ヲ滿足セシムベキ K, K' ノ値アリ，從ツテ所題ノ方程式ヲ滿足セシムベキ x, y, z ノ値アリ，依ツテ所要ノ條件ハ l, m, n ノ比ガ l', m', n' ノ比ニ等シカラズシテ且ツ $\triangle=0$ ナルコトナリ。

5. **a, b, c, d ハ何レモ -1 ニ等シカラズ，x, y, z, u ハ悉クハ 0 ナラズシテ**

$$x=by+cz+du,\quad y=ax+cz+du,\quad z=ax+by+du,\quad u=ax+by+cz$$

ナルトキハ次ノ關係ヲ証セヨ,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1,$$

〔解〕 x, y, z, u ハ悉クハ 0 ナラズシテ所題ノ四ツノ方程式ガ成立スル故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix}=0$$

第四列ヲ他ノ三列ヨリ引ケバ

$$\begin{vmatrix} -1-a & 0 & 0 & d+1 \\ 0 & -1-b & 0 & d+1 \\ 0 & 0 & -1-c & d+1 \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ -(a+1)\begin{vmatrix} -1-b & 0 & d+1 \\ 0 & -1-c & d+1 \\ b & c & -1 \end{vmatrix}-(d+1)\begin{vmatrix} 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 0 & -1-c \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ -(a+1)(b+1)(c+1)+(a+1)(d+1)(c+1)b+(a+1)(b+1)(d+1)c$$
$$+(d+1)(b+1)(c+1)a=0$$

a, b, d, d ハ -1 ニ等シカラザル故ニ $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ ニテ割レバ

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{1}{d+1}$$

$$\therefore\ \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1,$$

6. $x+y+z=1,\ ax+by+cz=d,\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2$ **ナルトキ** $a^3x+b^3y+c^3z$ **ノ値ヲ求ム, 但シ** a, b, c **ハ皆相異ナルモノトス。**

〔解〕 所要ノ値ヲ k トスレバ所題ノ三方程式ト $a^3x+b^3y+c^3z=k$ トハ同時ニ成立スル故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & k \end{vmatrix}=0,\quad \therefore\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & k-a^3 \end{vmatrix}=0$$

$b-a,\ c-a$ ハ 0 ナラザル故ニ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & d-a \\ b+a & c+a & d^2-a^2 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & k-a^3 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & d^2-a^2-(a+b)(d-a) \\ a^2+ab+b^2 & c^2+ac-b^2-ab & k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a) \end{vmatrix}=0$$

$c-b\neq 0$ ナル故ニ

$$\begin{vmatrix} 1 & (d-a)(d-b) \\ a+b+c & k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a) \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a)-(d-a)(d-b)(a+b+c)=0$$

$$\therefore\ k=(a+b+c)d^2-(ab+bc+ca)d+abc,$$

7. $b^2-4ac=0$ **或ハ** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ **ナラバ聯立方程式** $ax^2+bx+c=0$ $(a_1x^2+b_1x+c_1)+y(a_2x^2+b_2x+c_2)=0$ **ヲ滿足セシムル** y **ノ二ツノ値ハ相等シキコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $b^2-4ac=0$ ナラバ x ノ二ツノ値ハ相等シクナル故ニ y ノ二ツノ値モ亦相等シクナルコト明カナリ,

次ニ $ax^2+bx+c=0$ (1), ノ二根ガ α, β ナルトキ y ノ二ツノ値ガ相等シキタメニハ

$$\frac{a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2}{a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1}=\frac{a_2\beta^2+b_2\beta+c_2}{a_1\beta^2+b_1\beta+c_1}=k$$

ナラザルベカラズ, 即チ

$$(a_2-a_1k)x^2+(b_2-b_1k)x+c_2-c_1k=0$$

$$(a_2-a_1k)\beta^2+(b_2-b_1k)\beta+c_2-c_1k=0$$

即チ　$(a_2-a_1k)x^2+(b_2-b_1k)x+c_2-c_1k=0$　(2)，　モ亦 α, β ナル二根ヲ有セザルベカラズ，即チ (2) ハ (1) ト同ジ根ヲ有セザルベカラズ，故ニ

$$\frac{a_2-a_1k}{a}=\frac{b_2-b_1k}{b}=\frac{c_2-c_1k}{c} \qquad (3)$$

コノ三ツノ分數ノ値ヲ l トオケバ

$$\begin{matrix} al+a_1k-a_2=0 \\ bl+b_1k-b_2=0 \\ cl+c_1k-c_2=0 \end{matrix} \qquad \therefore \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (\text{基本定理 I})$$

逆ニ此關係アラバ (3) ガ成立スル故ニ (1), (2) ハ同ジ二根ヲ有シ，從ツテ y ノ二ツノ値ハ相等シクナルベシ。

8. $(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0$

$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0$

$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0$

ナルトキハ

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヨリ x, y, z ヲ消去スレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} f^2-bc & ch-fg & bg-hf \\ ch-fg & g^2-ca & af-gh \\ bg-hf & af-gh & h^2-ab \end{vmatrix}=0$$

然ルニ前章問. 41 ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}^2 \qquad \therefore \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0,$$

9. $(x+y)(x+z)=bcyz,$

$(y+z)(y+x)=cazx,$

$(z+x)(z+y)=abxy$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ，但シ x, y, z ハ何レモ 0 ナラズトス。

〔解〕 所題ノ三方程式ヲ邊々相乘ジテ平方ニ開ケバ

$$(x+y)(x+z)(y+z)=\pm abc\,xyz,$$

$$\therefore\ y+z=\pm ax, \qquad x+z=\pm by, \qquad x+y=\pm cz,$$

故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} \pm a & 1 & 1 \\ 1 & \pm b & 1 \\ 1 & 1 & \pm c \end{vmatrix}=0,$$

10. $ax^2+bx+c=0$, $x^3=1$ **ナルトキハ**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 第一方程式ニ x, x^2, x^3 ヲ乘ズレバ

$$ax^3+bx^2+cx=0, \qquad ax^4+bx^3+cx^2=0, \qquad ax^5+bx^4+cx^3=0$$

第二方程式ヲ代入スレバ

$$a+bx^2+cx=0, \qquad b+cx^2+ax=0, \qquad c+ax^2+bx=0$$

此三式ヨリ x, x^2 ヲ未知數ト見テ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0,$$

11. **一ツノ二次方程式ノ二根ノ n 乘ノ和ヲ S_n ニテ表ハセバ其二次方程式ハ次ノ如ク表ハサルヽコトヲ証セヨ，**

$$(s_n s_{n-2}-s_{n-1}^2)x^2+(s_n s_{n-1}-s_{n+1}s_{n-2})x+(s_{n+1}s_{n-1}-s_n^2)=0,$$

〔解〕 所題ノ二次方程式ヲ $ax^2+bx+c=0$ トシ其二根ヲ α, β トスレバ

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \qquad a\beta^2+b\beta+c=0$$

兩式ニ夫々 α^{n-2}, β^{n-2} ヲ乘ズレバ

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}=0, \qquad a\beta^n+b\beta^{n-1}+c\beta^{n-2}=0$$

$$\therefore \quad as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0 \qquad (1)$$

此關係ハ 2 以上ノ n ノ總テノ正ノ整數値ニヨツテ成立スル故ニ

$$as_{n+1}+bs_n+cs_{n-1}=0 \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ a, b, c ノ比ヲ求メテ

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (3)$$

ニ代入スレバ所要ノ結果ヲ得ベク，或ハ (1), (2), (3) ヨリ a, b, c ヲ消去スルモ同樣ナリ，即チ

$$\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & s_{n-2} \\ s_{n+1} & s_n & s_{n-1} \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

第三列ニツキテ展開スレバ

$$(s_ns_{n-2}-s_{n-1}^2)x^2+(s_ns_{n-1}-s_{n+1}s_{n-2})x+(s_{n+1}s_{n-1}-s_n^2)=0,$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & a \\ x^2 & y^2 & z^2 & a^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & b \\ x^2 & y^2 & z^2 & b^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & b^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & c \\ x^2 & y^2 & z^2 & c^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & c^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & d \\ x^2 & y^2 & z^2 & d^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & d^3 \end{vmatrix}=0$$

ナラバ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=0$ **ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 所題ノ四ツノ行列式ノ第四行ノ各元素ノ餘因數ヲ夫々 Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 トスレバ

$$\Delta_1+a\Delta_2+a^2\Delta_3+a^3\Delta_4=0$$

$$\Delta_1+b\Delta_2+b^2\Delta_3+b^3\Delta_4=0$$

$$\Delta_1+c\Delta_2+c^2\Delta_3+c^3\Delta_4=0$$

$$\Delta_1+d\Delta_2+d^2\Delta_3+d^3\Delta_4=0$$

コレヨリ Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4 ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=0$$

行列ヲ交換スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=0,$$

13. $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$ **ヲ有理化スルタメニ乘ズベキ因數及其有理化シタル結果ハ夫々次ノ行列式ニテ表ハサルヽコトヲ證セヨ，**

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ x^{\frac{1}{3}} & a & b \\ x^{\frac{2}{3}} & cx & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix},$$

〔解〕 $P=a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$ トスレバ

$$x^{\frac{1}{3}}P=ax^{\frac{1}{3}}+bx^{\frac{2}{3}}+cx. \qquad x^{\frac{2}{3}}P=ax^{\frac{2}{3}}+bx+cx.x^{\frac{1}{3}}$$

故ニ $x^{\frac{1}{3}}=X$, $x^{\frac{2}{3}}=Y$ トオケバ

$$a-P+bX+cY=0$$

$$cx-x^{\frac{1}{3}}P+aX+bY=0$$

$$bx-x^{\frac{2}{3}}P+cxX+aY=0$$

此三ツノ方程式ハ X, Y ノ同ジ値ニテ成立スル故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a-P & b & c \\ cx-x^{\frac{1}{3}}P & a & b \\ bx-x^{\frac{2}{3}}P & cx & a \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & b & c \\ x^{\frac{1}{3}}P & a & b \\ x^{\frac{2}{3}}P & cx & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore P\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ x^{\frac{1}{3}} & a & b \\ x^{\frac{2}{3}} & cx & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix}$$

此右邊ハ有理式ナルコト明カナリ，故ニ P ヲ有理化スルタメニ乘ズベキ因數ハ左邊ノ行列式ニシテ其有理化シタル結果ハ右邊ノ行列式ナリ。

14. $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{1}{2}}$ **ノ有理化因數ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ト同樣ニ $P=a+bx^{\frac{2}{6}}+cx^{\frac{3}{6}}$ トシ $1,\ x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{2}{6}},\ x^{\frac{3}{6}},\ x^{\frac{4}{6}},\ x^{\frac{5}{6}}$ ヲ乘ズレバ

$$\begin{aligned} P&=a+bx^{\frac{2}{6}}+cx^{\frac{3}{6}} \\ x^{\frac{1}{6}}P&=ax^{\frac{1}{6}}+bx^{\frac{3}{6}}+cx^{\frac{4}{6}} \\ x^{\frac{2}{6}}P&=ax^{\frac{2}{6}}+bx^{\frac{4}{6}}+cx^{\frac{5}{6}} \\ x^{\frac{3}{6}}P&=cx+ax^{\frac{3}{6}}+bx^{\frac{5}{6}} \\ x^{\frac{4}{6}}P&=bx+cxx^{\frac{1}{6}}+ax^{\frac{4}{6}} \\ x^{\frac{5}{6}}P&=bxx^{\frac{1}{6}}+cxx^{\frac{2}{6}}+ax^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

此六ツノ方程式ヨリ $x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{2}{6}},\ x^{\frac{3}{6}},\ x^{\frac{4}{6}},\ x^{\frac{5}{6}}$ ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} P-a & 0 & b & c & 0 & 0 \\ x^{\frac{1}{6}}P & a & 0 & b & c & 0 \\ x^{\frac{2}{6}}P & 0 & a & 0 & b & c \\ x^{\frac{3}{6}}P-cx & 0 & 0 & a & 0 & b \\ x^{\frac{4}{6}}P-bx & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ x^{\frac{5}{6}}P & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore P\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ x^{\frac{1}{6}} & a & 0 & b & c & 0 \\ x^{\frac{2}{6}} & 0 & a & 0 & b & c \\ x^{\frac{3}{6}} & 0 & 0 & a & 0 & b \\ x^{\frac{4}{6}} & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ x^{\frac{5}{6}} & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b & c \\ cx & 0 & 0 & a & 0 & b \\ bx & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

右邊ハ明カニ有理式ナル故ニ左邊ノ行列式ガ所要ノ有理化因數ナリ。

15. $x+y+z=0,\ x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$ **ヨリ** $x,\ y,\ z$ **ヲ消去スルコトニ由ツテ** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 先ヅ $x+y+z=0$ ニ $xyz,\ x,\ y,\ z$ ヲ乘ジテ $x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$ ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned} ayz+bzx+cxy&=0 \\ a+zx+xy&=0 \\ b+yz+xy&=0 \\ c+yz+zx&=0 \end{aligned}$$

$yz,\ zx,\ xy$ ヲ三ツノ未知數ト見做シテ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

次ニ $x+y+z=0$ ニ $yz,\ zx,\ xy$ ヲ乘ジテ $x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$ ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ xyz+cy+bz&=0 \\ xyz+cx+az&=0 \\ xyz+bx+ay&=0 \end{aligned}$$

xyz, x, y, z ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0$$

16. $x+y+z=0$, $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$ ヨリ x, y, z ヲ消去スルコトニヨツテ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $x+y+z=0$ ニ順次 x, y, z, y^2z^2, z^2x^2, x^2y^2, x^2yz, xy^2z, xyz^2 ヲ乘ジ $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$ ヲ代入シテ得べキ 9 個ノ方程式ヨリ x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z ヲ消去スレバ所要ノ結果ヲ得ベシ。 6.7

17. 次ノ四式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ,

$$x+y+z=0,\quad x^3+y^3+z^3=a,\quad x^5+y^5+z^5=b,\quad x^7+y^7+z^7=c,$$

〔解〕 所題ノ x, y, z ヲ三根トスル三次方程式ヲ $X^3+\lambda X+\mu=0$ トシ $x^n+y^n+z^n=s_n$ トスレバ

$$s_3+\lambda s_1+3\mu=0$$
$$s_4+\lambda s_2+\mu s_1=0$$
$$s_5+\lambda s_3+\mu s_2=0$$
$$s_7+\lambda s_5+\mu s_4=0$$

然ルニ $s_1=0$, $s_3=a$, $s_5=b$, $s_7=c$,

$$\therefore\ a+3\mu=0,\quad s_4+\lambda s_2=0,\quad b+a\lambda+\mu s_2=0,\quad c+b\lambda+\mu s_4=0$$

又 $x+y+z=0$ ヨリ $s_2+2\lambda=0$,

以上五式ヨリ λ, μ, s_2, s_4 ヲ消去センニ第一式ヨリ $\mu=-\frac{a}{3}$, 最後ノ式ヨリ $\lambda=-\frac{s_2}{2}$, 他ノ四式ニ代入スレバ

$$s_4-\frac{1}{2}s_2^2=0,\quad b-\frac{a}{2}s_2-\frac{a}{3}s_2=0,\quad c-\frac{b}{2}s_2-\frac{a}{3}s_4=0$$

此第二式及ビ第一式ヨリ

$$s_2=\frac{6b}{5a},\quad s_4=\frac{18b^2}{25a^2},$$

第三式ニ代入シテ $25ac-21b^2=0$,

18. 次ノ四式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ,

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad yz+zx+xy=b^2,\quad y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=c^4,\quad x^3+y^3+z^3=d^3,$$

〔解〕 前問ト同樣ニ x, y, z ヲ根トスル方程式チ $X^3+\lambda X^2+b^2X+\mu=0$ トシ $x^n+y^n+z^n=s_n$ トスレバ

$$s_3+\lambda s_2+b^2s_1+3\mu=0,\quad s_4+\lambda s_3+b^2s_2+\mu s_1=0.$$

然ルニ $s_1=-\lambda$, $s_2=a^2$, $s_3=d^3$ 又 $yz+zx+xy=b^2$ チ二乘スレバ

$$c^4+2xyz(x+y+z)=b^4 \qquad \therefore\ c^4+2\lambda\mu=b^4$$

又 $s_2=a^2$ チ二乘スレバ $a^4=s_4+2c^4$

以上七式ヨリ λ, μ, s_1, s_2, s_3, s_4 チ消去センニ先ヅ s_1 s_2 s_3 s_4 チ消去スレバ

$$d^3+(a^2-b^2)\lambda+3\mu=0,\quad a^4-2c^4+d^3\lambda+a^2b^2-\lambda\mu=0$$

然ルニ $2\lambda\mu=b^4-c^4$

$$\therefore\ \lambda=\frac{3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2}{2d^3}$$

$$\mu=\frac{(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)(b^2-a^2)}{6d^3}-\frac{d^3}{3}$$

コレヲ $2\lambda\mu=b^4-c^4$ ニ代入スレバ

$$2\frac{3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2}{2d^3}\left[\frac{(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)(b^2-a^2)}{6d^3}-\frac{d^3}{3}\right]=b^4-c^4$$

$$\therefore\ (3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)^2(b^2-a^2)-2d^6(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)=6d^6(b^4-c^4)$$

$$\therefore\ (3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)^2(b^2-a^2)=2d^6(4b^4-2a^4-2a^2b^2),$$

19. $a_0x^3+\cancel{a_1x^2y}+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3=p_1(x-\alpha_1y)^3+p_2(x-\alpha_2y)^3$ **ナル如キ** α_1, α_2 **ハ二次方程式** $(3a_0a_2-a_1^2)x^2+(9a_0a_3-a_1a_2)x+3a_1a_3-a_2^2=0$ **ノ根ナルコトヲ証セヨ。**

〔**解**〕 所題ノ等式ノ兩邊ノ係數ヲ比較シテ

$$p_1+p_2=a_0 \qquad (1)$$

$$\alpha_1p_1+\alpha_2p_2=-\frac{a_1}{3} \qquad (2)$$

$$\alpha_1^2p_1+\alpha_2^2p_2=\frac{a_2}{3} \qquad (3)$$

$$\alpha_1^3p_1+\alpha_2^3p_2=-a_3 \qquad (4)$$

(1), (2), (3) 及ビ (2), (3), (4) ヨリ p_1, p_2 ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{a_1}{3} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{a_2}{3} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{a_1}{3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \frac{a_2}{3} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & -a_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

然ルニ α_1, α_2 ヲ二根トスル二次方程式ハ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & x^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

(4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去スレバ α_1, α_2 ヲ二根トスル二次方程式ヲ得ベシ

然ルニ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}=\triangle_1$, $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}=\triangle_2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}=\triangle_3$ トスレバ

(4), (5) ハ次ノ如クナル

$$a_0\triangle_1-\frac{a_1}{3}\triangle_2+\frac{a_2}{3}\triangle_3=0$$

$$-\frac{a_1}{3}\triangle_1+\frac{a_2}{3}\triangle_2-a_3\triangle_3=0 \qquad (6)$$

$$\triangle_1+x\triangle_2+x^2\triangle_3=0$$

(4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去スルコトハ (6) ヨリ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ ヲ消去スルコトナリ，故ニ (4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去シタル結果ハ次ノ如シ

$$\begin{vmatrix} a_0 & -\frac{a_1}{3} & \frac{a_2}{3} \\ -\frac{a_1}{3} & \frac{a_2}{3} & -a_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}=0 \quad 即チ \quad \begin{vmatrix} 3a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_3 & 3a_3 \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3a_0a_2-a_1^2)x^2+(9a_0a_3-a_1a_2)x+3a_1a_3-a_2^2=0,$$

20. $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $px^2+qx+r=0$ **ヨリ** x **ヲ消去セヨ。**

〔**解**〕 第一ノ方程式ニ x, 1, 第二ノ方程式ニ x^2, x, 1 ヲ乘ズレバ

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx \quad =0$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$px^4+qx^3+rx^2 \quad =0$$

$$px^3+qx^2+rx \quad =0$$

$$px^2+qx+r=0$$

此五ツノ方程式ヨリ x^4, x^3, x^2, x ヲ四ツノ未知數ト見テ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

(**注意**) 一般ニ x ノ n 次方程式ト m 次方程式トヨリ x ヲ消去スルニハ前者ニ x^{m-1}, x^{m-2}, ...x, 1 後者ニ x^{n-1}, x^{n-2}, ...x, 1 ヲ乘ジテ得ベキ $m+n$ 個ノ方程式ヨリ x^{n+m-1}, x^{n+m-2}, ..., x ヲ消去ス，從ツテ消去シタル結果ノ行列式ハ $(m+n)$ 次ナリ之ヲ兩方程式ノ**終結式**トイフ。

21. $lx^2y+mxy^3=0$, $px^3y+qxy^3+ry^4=0$ **ヨリ** x, y **ヲ消去セヨ。**

〔**解**〕 兩方程式ヲ夫々 y^3, 及ビ y^4 ニテ割レバ

$$l\frac{x^2}{y^2}+m\frac{x}{y}=0, \qquad p\frac{x^3}{y^3}+q\frac{x}{y}+r=0$$

前者ニ $\frac{y^2}{y^2}$, $\frac{x}{y}$, 1 後者ニ $\frac{x}{y}$, 1 ヲ乘ズレバ

$$
\begin{array}{llllll}
l\dfrac{x^4}{y^4}+m\dfrac{x^3}{y^3} & & & & & =0 \\
 & l\dfrac{x^3}{y^3}+m\dfrac{x^2}{y^2} & & & & =0 \\
 & & l\dfrac{x^2}{y^2}+m\dfrac{x}{y} & & & =0 \\
p\dfrac{x^4}{y^4} & & +q\dfrac{x^2}{y^2}+r\dfrac{x}{y} & & & =0 \\
 & p\dfrac{x^3}{y^3} & & +q\dfrac{x}{y}+r & & =0
\end{array}
$$

之レヨリ $\dfrac{x^4}{y^4}$, $\dfrac{x^3}{y^3}$, $\dfrac{x^2}{y^2}$, $\dfrac{x}{y}$ ヲ消去スレバ

$$
\begin{vmatrix}
l & m & 0 & 0 & 0 \\
0 & l & m & 0 & 0 \\
0 & 0 & l & m & 0 \\
p & 0 & q & r & 0 \\
0 & p & 0 & q & r
\end{vmatrix}=0
$$

22. **ニツノ方程式**

$$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=0,\qquad px^2+qx+r=0}$$

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 共通根ヲ有スルトキハ兩方程式ハ x ノ其値ノトキ同時ニ成立ス，從ツテ兩方程式ヨリ其 x ヲ消去スルコトヲ得，依ツテ前々問ヨリ

$$
\triangle=\begin{vmatrix}
a & b & c & d & 0 \\
0 & a & b & c & d \\
p & q & r & 0 & 0 \\
0 & p & q & r & 0 \\
0 & 0 & p & q & r
\end{vmatrix}=0
$$

即チ兩方程式ノ終結式ハ 0 ニ等シ，コレ即チ必要ナル條件ナリ，次ニ兩方程式ノ左邊ヲ夫々 $f(x)$, $\varphi(x)$ トシ，終結式 $\triangle$ ノ第一行ニ x^4, 第二行ニ x^3, 第三行ニ x^2, 第四行ニ x ヲ乘ジテ第五行ニ加フレバ

$$
\triangle=\begin{vmatrix}
a & b & c & d & xf(x) \\
0 & a & b & c & f(x) \\
p & q & r & 0 & x^2\varphi(x) \\
0 & p & q & r & x\varphi(x) \\
0 & 0 & p & q & \varphi(x)
\end{vmatrix}=0
$$

第五行ニツイテ展開スレバ

$$(Ax+B)f(x)-(Px^2+Qx+R)\varphi(x)=0,$$

但シ A, B, P, Q, R ハ夫々 a, b, c, d, p, q, r ノ整式ナリ，又此關係ハ x ノ値ノ如何ニ係ラザルモノナリ，然ルニ此關係ヨリ

$$\frac{(Ax+B)f(x)}{\varphi(x)}=Px^2+Qx+R,$$

即チ $(Ax+B)f(x)$ ハ $\varphi(x)$ ニテ整除セラル，然ルニ $Ax+B$ ハ $\varphi(x)$ ヨリ少クトモ一次低シ，故ニ $f(x)$ ト $\varphi(x)$ トハ少クトモ一次ノ共通因數ヲ有セザルベカラズ，即チ $\triangle=0$ ナルトキハ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ハ少クトモ一ツノ共通根ヲ有ス，故ニ所題ノ二ツノ方程式ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ其終結式 $\triangle$ ガ 0 ナルコトナリ。

（注意） 一般ニ任意ノ次數ノ二ツノ方程式ニツイテモ同ジ結果ヲ同様ニ證明スルコトヲ得。

23. ***k*** **ガ如何ナル値ノトキ次ノ二ツノ方程式ハ共通根ヲ有スルカ，又其共通根ヲ求メヨ，**

$$\boldsymbol{x^3+kx+2=0,\qquad x^2+2x+k=0,}$$

〔解〕 共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$
\begin{vmatrix}
1 & 0 & k & 2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & k & 2 \\
1 & 2 & k & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & k & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & k
\end{vmatrix}=0
$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore\ k^2+2k-3=0$　　　$\therefore\ k=1$ 又ハ -3

$k=1$ ナラバ　$x^3+kx+2=x^3+x+2=(x+1)(x^2-x+2)$

$x^2+2x+k=x^2+2x+1=(x+1)^2$

故ニ此場合ノ共通根ハ -1,

$k=-3$ ナラバ　$x^3+kx+2=x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

$x^2+2x+k=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

2

故ニ此場合ノ共通根ハ 1,

24. $\boldsymbol{ax^2+bx+c,\quad cx^2+bx+a}$ **ガ共通因數ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ**

$$\boldsymbol{(a-c)^2(a+b+c)(a-b+c)=0}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ二式ガ共通因數ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ二ツ方程式 $ax^2+bx+c=0$, $cx^2+bx+a=0$ ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ，然ルニコノ後ノ條件ハ前々問ニヨリ

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = 0$$

第一行ニ他ノ行ヲ加ヘ第一行ヨリ $a+b+c$ ヲ括リ出シ然ル後第一列ヨリ第三列ヲ引ケバ

$$\triangle = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & 0 \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & c-a & 0 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & 0 \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(c-a)(ab+c^2-bc-a^2)$$

$$= (a+b+c)(c-a)^2(c+a-b),$$

故ニ所要ノ條件ハ　$(a-c)^2(a+b+c)(a-b+c)=0$,

25. 次ノ三ツノ方程式ガ共通ノ一根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム,

$$\boldsymbol{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0}$$

$$\boldsymbol{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0}$$

$$\boldsymbol{c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0,}$$

〔解〕 $x^3=u$, $x^2=v$, $x=w$ トオケバ三ツノ方程式

$$a_0u+a_1v+a_2w+a_3=0$$

$$b_0u+b_1v+b_2w+b_3=0$$

$$c_0u+c_1v+c_2w+c_3=0$$

ヲ滿足セシムル u, v, w ノ只一組ノ値ガ存在セザルベカラズコレガタメニハ（前章問. 28）

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

然ルトキハ

$$u = \frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix},\quad v = \frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$w = \frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

而シテ $v=w^2,\ u=w^3$ ナルヲ要スル故ニ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \triangle \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^3 - \triangle^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

逆ニ (1), (2), (3) ガ成立スルトキハ所題ノ三方程式ハ一根ヲ共有スルコト明カナリ，依ツテ所要ノ條件ハ (1), (2), (3) ナリ。

○ 26. 次ノ四ツノ方程式ガ共通ノ一根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム， $\boldsymbol{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0} \quad \boldsymbol{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0}$

$$\boldsymbol{c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0} \qquad \boldsymbol{d_0x^3+d_1x^2+d_2x+d_3=0,}$$

〔解〕 前問ノ如ク $x^3=u,\ x^2=v,\ x=w$ トオケバ四ツノ方程式

$$a_0u+a_1v+a_2w+a_3=0, \qquad b_0u+b_1v+b_2w+b_3=0$$

$$c_0u+c_1v+c_2w+c_3=0, \qquad d_0u+d_1v+d_2w+d_3=0$$

ヲ滿足セシムル $u,\ v,\ w$ ノ只一組ノ値ガ存在セザルベカラズ，コレガタメニハ

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \triangle' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

ナラザルベカラズ，然ルトキハ前問ト同樣ニ更ニ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \triangle' \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^3 - \triangle'^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ナルヲ要ス，即チ所要ノ條件ハ (1), (2), (3) ナリ。

27. 三ツノ方程式 $x^2-px+q=0,\quad x^2+px-5=0,\quad x^2+2x-q=0$ **ガ共通根ヲ有スルヤウニ $p,\ q$ ノ値ヲ定メヨ。**

〔解〕 第二，第三方程式ヨリ第一方程式ヲ引ケバ

$$2px-q-5=0 \qquad (1)$$

$$(2+p)x-2q=0 \qquad (2)$$

故ニ所題ノ三方程式ガ共通根ヲ有スレバ (1), (2), 及ビ

$$x^2+2x-q=0 \qquad (3)$$

ハ共通根ヲ有シ，逆ニ (1), (2), (3) ガ共通根ヲ有スレバ所題ノ三方程式ハ共通根ヲ有ス，然ルニ (1), (2) ハ x ノ一次方程式ナル故ニ (1), (2), (3) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ (1), (2), 及ビ (1), (3) ノ結終式ガ 0 ナルコトナリ，即チ

$$\begin{vmatrix} 2p & -q-5 \\ 2+p & -2q \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2p & -q-5 & 0 \\ 0 & 2p & -q-5 \\ 1 & 2 & -q \end{vmatrix} = 0$$

$$4pq-(p+2)(q+5)=0 \qquad (4)$$

$$4p^2q-(q+5)^2-4p(q+5)=0 \qquad (5)$$

(4) ニ p ヲカケテ (5) ヲ引ケバ

$$(q+5)^2+4p(q+5)-p(p+2)(q+5)=0$$

$$\therefore\quad q=-5, \qquad q=p^2-2p-5$$

$q=-5$ トスレバ (4) ヨリ $p=0$, 然ルトキハ第一第二方程式ハ一致シ第三ト共通根ヲ有シ得ザルコトナル故ニ此値ハ採用スルヲ得ズ

$q=p^2-2p-5$ トスレバ (4) ヨリ $p=0,\ 4,\ -\dfrac{4}{3}$, 從ツテ $q=-5,\ 3,\ -\dfrac{5}{9}$,

然ルニ $p=0,\ q=-5$ ハ前述ノ如ク採用スルコト能ハズ，依ツテ所要ノ値ハ

$$\left.\begin{matrix} p=4 \\ q=3 \end{matrix}\right) \qquad \left.\begin{matrix} -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{5}{9} \end{matrix}\right)$$

或ハ前問ノ如ク

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & q \\ 1 & p & -5 \\ 1 & 2 & -q \end{vmatrix}=0, \qquad x^2=\frac{5p-pq}{2p}=\left(\frac{q+5}{2p}\right)^2$$

ヨリ p, q ヲ求ムルモ可ナリ。

28. $\boldsymbol{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0}$ **ノ三根ヲ** $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ **トシ**

$\boldsymbol{\varphi(x)=px^2+qx+r=0}$ **ノ二根ヲ** $\beta_1\ \beta_2$ **トスレバ**

$$\triangle=\boldsymbol{p^3f(\beta_1)f(\beta_2)=a^2}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3)$$

ナルコトヲ証セヨ，但シ △ ハ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ノ終結式トス。

〔解〕 $f(x)-u=ax^3+bx^2+cx+d-u=0$ 　(1)

$\varphi(x)\quad=px^2+qx+r\qquad=0$ 　(2)

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ 問. 22 ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d-u & 0 \\ 0 & a & b & c & d-u \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

(3) ヲ u ノ羃ノ順ニ整頓スルタメニ第五行ニツイテ展開スレバ

$$r\begin{vmatrix} a & b & c & d-u \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}+(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & d-u \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}=0$$

各行列式ヲ二ツヅヽニ分割スレバ

$$r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-r\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ 0 & a & b & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 \end{vmatrix}+(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$$

$$-(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$$

$$+\left\{r\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ p & q & r \\ 0 & p & q \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}\right\}u+\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}u^2=0$$

然ルニ $\triangle=r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$, 又 $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}=p^3$,

故ニ u ノ係數ヲ A トオケバ (3) ハ次ノ如クナル

$$\triangle+Au+p^3u^2=0 \qquad (4)$$

(3) 即チ (4) ハ (1), (2) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナル故ニ (4) ヲ満足セシムル u ノ値ノトキニ限リ (1), (2) ハ共通根ヲ有ス，然ルニ $u=f(\beta_1)$, $u=f(\beta_2)$ ノトキ (1), (2) ハ明カニ共通根 β_1, β_2 ヲ有ス，故ニ (4) ノ二根ハ $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$ ナリ，故ニ

$$\frac{\triangle}{p^3}=f(\beta_1)\cdot f(\beta_2) \qquad \therefore\ \triangle=p^3f(\beta_1)f(\beta_2),$$

同様ニ $\triangle=a^2\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3)$,

（注意） 一般ニ　$f(x)=a_0x^n+a_1a^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$

$\varphi(x)=b_0x^m+b_1a^{m-1}+\ldots\ldots+a_m=0$ ノ根ヲ $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_m$ トシ

$f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ノ終結式ヲ △ トスレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}b_0^nf(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\ldots\ldots f(\beta_m)$$

$$=a_0^m\varphi(\alpha_1)\cdot f(\alpha_2)\ldots\ldots\varphi(\alpha_n),$$

6.8

ナルコトハ同様ニ証明スルコトヲ得。

29. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots\ldots+b_m=0$

ガ共通根ヲ有セザルトキハ

$$f(x)F(x)+\varphi(x)\phi(x)=1$$

ナル如キ二ツノ整式 $F(x)$，$\phi(x)$ ガ常ニ存在スルコトヲ証セヨ，但シ $F(x)$，$\phi(x)$ ハ夫々 x ニツキ $(m-1)$ 次及 $(n-1)$ 次以下トス。

〔解〕 $f(x)=0,\ \varphi(x)=0$ ガ共通根ヲ有セザル故ニ前者ニ $x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots\ldots\ x,\ 1$ ヲ乘ジ後者ニ $x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots\ldots\ x,\ 1$ ヲ乘ジテ得ベキ $(m+n)$ 個ノ方程式ヨリ $x^{n+m-1},\ x^{n+m-2},\ \ldots\ldots\ x$ ヲ消去シテ得ベキ次ノ行列式 $\triangle$ ハ 0 ナラズ (問 22)

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_0 & \ldots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_0 & \ldots b_m \end{vmatrix}\neq 0$$

$\triangle$ ノ第一行以下ニ順次 $x^{n+m-1},\ x^{n+m-2},\ \ldots\ldots\ x,\ 1$ ヲ乘ジテ最後ノ行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-1}f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-2}f(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots a_0 \ldots\ldots & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{n-1}\varphi(x) \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{n-2}\varphi(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots b_0 \ldots\ldots & \varphi(x) \end{vmatrix}\neq 0,$$

最後ノ行ニツキ展開スレバ

$$f(x)(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1})+\varphi(x)(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots\ldots+B_{n-1})$$
$$=\triangle,$$

但シ $A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots\ A_{m-1},\ B_0,\ B_1,\ \ldots\ldots\ B_{n-1}$ ハ x ヲ含マズ，故ニ

$$F(x)=\frac{1}{\triangle}(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1})$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\triangle}(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots\ldots+B_{n-1})$$

トオケバ $\quad f(x)F(x)+\varphi(x)\phi(x)=1,$

30. $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,\ \varphi(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$

ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 $f(x)=0,\ \varphi(x)=0$ ガ二根ヲ共有スルタメニハ $f(x)$，$\varphi(x)$ ハ二次ノ共通因數ヲ有セザルベカラズ，今其共通因數ヲ $x^2+c_1x+c_2$ トシ

$$f(x)=(x^2+c_1x+c_2)(a_0'x^2+a_1'x+a_2')$$

$$\varphi(x)=(x^2+c_1x+c_2)(b_0'x+b_1')$$

トオケバ

$$\begin{array}{ll} a_0=a_0' & b_0=b_0' \\ a_1=a_1'+a_0'c_1 & b_1=b_1'+b_0'c_1 \\ a_2=a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & b_2=b_1'c_1+b_0'c_2 \\ a_3=a_2'c_1+a_1'c_2 & b_3=b_1'c_2 \\ a_4=a_2'c_2 & \end{array}$$

故ニ兩方程式ノ終結式ヲ $\triangle$ トスレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 \\ b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 \end{vmatrix}$$

第一行ニ $-c_1$ ヲカケテ第二行ニ加ヘ，次ニ第一行ニ $-c_2$

第二行ニ $-c_1$ ヲカケテ第三行ニ加ヘ，次ニ第二行ニ $-c_2$

第三行ニ $-c_1$ ヲカケテ第四行ニ加ヘ，次ニ第三行ニ $-c_2$

第四行ニ $-c_1$ ヲカケテ第五行ニ加ヘ，次ニ第四行ニ $-c_2$

第五行ニ $-c_1$ ヲカケテ第五行ニ加ヘ，次ニ第五行ニ $-c_2$

ヲスケテ第七行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 \\ b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$\triangle$ ノ終リノ二行及ビ第三列，第七列ヲ消シタルモノ即チ a 列，b 列ヨリ終リノ各一列ヲ消シタルモノヲ $\triangle_1$ トスレバ上ト同様ニ

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 \\ b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

同様ニ a 列，b 列ヨリ終リノ各二列ヲ消シタルモノヲ $\triangle_2$ トスレバ

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' \\ b_0' & b_1' & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' \end{vmatrix}$$

$\triangle_2$ ハ $a_0'x^2+a_1'x+a_2'=0$, $b_0'x+b_1'=0$ ノ終結式ニシテ此兩方程式ハ共通根ヲ有セザル故ニ $\triangle_2\neq0$.

之ニ由ツテ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ナル條件ハ

$$\triangle=\triangle_1=0,\qquad \triangle_2\neq0,$$

逆ニ $\triangle=0$ ナラバ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ハ共通根ヲ有ス，今共通根ガ只一ツナリトスレバ上ト同様ニ $\triangle_1\neq0$，故ニ $\triangle_1=0$ ナラバ共通根ハ一ツナラズ，若シ又三ツ以上ナリトスレバ上ト同様ニ $\triangle_2=0$ ナラザルベカラズ，故ニ $\triangle_2\neq0$ ナラバ三ツ以上ナラズ故ニ $\triangle=\triangle_1=0$，$\triangle_2\neq0$ ナラバ共通根ハ二ツナリ，故ニ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\triangle=\triangle_1=0$, $\triangle_2\neq0$ ナリ。

（注意） 一般ニ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$

$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots\ldots+b_m=0$

ガ k 個ノ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\triangle=\triangle_1=\ldots\ldots=\triangle_{k-1}=0,\qquad \triangle_k\neq0,$$

ナルコトヲ同様ニ證明スルコトヲ得，但シ $\triangle$ ハ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ノ終結式ニシテ $\triangle_r$ ハ $\triangle$ ノ a 列及 b 列ノ終リヨリ各 r 列ヲ消シ去リ且ツ終リヨリ $2r$ 行ヲ消シ去リタル行列式ヲ表ハス。

31. $x^3+px^2+ax+b=0$, $x^3+qx^2+ax+c=0$ **ガ二根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ** $b=ap$, $c=aq$ **ナルコトヲ證セヨ，但シ** $p\neq q$, $b\neq c$ **トス。**

〔解〕 所題ノ三次方程式ガ二根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & p & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p & a & b \\ 1 & q & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q & a & c \end{vmatrix}=0,$$

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} 1 & p & a & b \\ 0 & 1 & p & a \\ 1 & q & a & c \\ 0 & 1 & q & a \end{vmatrix}=0,\qquad \triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{vmatrix}\neq0$$

△ ノ第三列ヲ第五列ニ移シ第六行ニツキ展開スレバ

$$\triangle=-b\begin{vmatrix} & & & & 0\\ & \triangle_1 & & & b\\ & & & & 0\\ & & & & c\\ 0 & 0 & 1 & q & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} & & & & 0\\ & \triangle_1 & & & b\\ & & & & 0\\ & & & & c\\ 0 & 0 & 1 & p & a\end{vmatrix}$$

第五列ニツイテ展開スレバ $\triangle_1=0$ ナル故ニ

$$\triangle=(c-b)\begin{vmatrix}1 & p & b & 0\\ 0 & 1 & a & b\\ 1 & q & c & 0\\ 0 & 1 & a & c\end{vmatrix}+(bq-cp)\begin{vmatrix}1 & p & a & 0\\ 0 & 1 & p & b\\ 1 & q & a & 0\\ 0 & 1 & q & c\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)\begin{vmatrix}1 & a & b\\ q-p & c-b & 0\\ 1 & a & c\end{vmatrix}+(bq-cp)\begin{vmatrix}1 & p & b\\ q-p & 0 & 0\\ 1 & q & c\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)^2\{c-b+a(p-q)\}+(bq-cp)^2(q-p)=0 \qquad (1)$$

次ニ $\triangle_1=\begin{vmatrix}1 & p & a\\ q-p & 0 & c-b\\ 1 & q & a\end{vmatrix}=(p-q)\{c-b+a(p-q)\}=0$

$$\therefore\ c-b+a(p-q)=0 \qquad (2)$$

故ニ (1) ヨリ $bq=cp$ (3)

(2), (3) ヨリ $b=ap,\quad c=aq,$

或ハ $x^3+px^2+ax+b=(x^2+Ax+B)(x+C)$

$x^3+qx^2+ax+c=(x^2+Ax+B)(x+D)$

トオキ係數ヲ比較スルモ可ナリ。

32. 次ノ二ツノ方程式ガ只一根ヲ共有スルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ,

$$mx-m^2x^2+x=1,$$

$$2m^3x^2+m^2x-x=2,$$

〔解〕 只一根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前々問ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1) & 1 & 0\\ 0 & m^2 & -(m+1) & 1\\ 2m^3 & m^2-1 & -2 & 0\\ 0 & 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$\triangle_1=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1)\\ 2m^3 & m^2-1\end{vmatrix}\neq 0,$$

然ルニ $\triangle_1=m^2(m+1)(3m-1)$ $\therefore\ m\neq 0,\quad -1,\quad \frac{1}{3}$

故ニ $\triangle=0$ ヨリ

$$\begin{vmatrix}1 & -(m+1) & 1 & 0\\ 0 & m^2 & -(m+1) & 1\\ 2m & m^2-1 & -2 & 0\\ 0 & 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1) & 1\\ 3m^2+2m-1 & -2(m+1) & 0\\ 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix}m^2 & 1 & 1\\ 3m^2+2m-1 & 2 & 0\\ 2m^3 & 1-m & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3m^2+2m-1 & 2\\ 2m^3+2m^2 & 3-m\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3m^2+2m-1)(3-m)-4m^2(m+1)=0$$

$$\therefore\ (3m-1)(3-m)-4m^2=0$$

$$\therefore\ 7m^2-10m+3=0 \qquad \therefore\ m=1 \text{ 又ハ } \frac{3}{7},$$

或ハ共通根ヲ α トシ

$$m^2x^2-(m+1)x+1=m^2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$2m^3x^2+(m^2-1)x-2=2m^3(x-\alpha)(x-\gamma)$$

トオキ $\beta\neq\gamma$ トシテ係數ヲ比較スルモ可ナリ, 或ハ又 問. 25 ノ如ク $\triangle=0$ ニ代フルニ

$$x^2=\frac{2(m+1)-(m^2-1)}{m^2(m^2-1)+2m^3(m+1)}=\left(\frac{2m^3+2m^2}{m^2(m^2-1)+2m^3(m+1)}\right)^2$$

ヲ以テスルモ可ナリ。

33. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 所要ノ條件ハ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$$

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ (第十章 基本定理 II), 故ニ問 22 ニヨリ $f(x)=0, f'(x)=0$ ノ終結式ガ 0 ニ等シキコトガ所要ノ條件ナリ, 即チ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}=0,$$

(注意) 一般ニ任意次數ノ方程式ニツイテモ同様ナルコト明カナリ。

34. 前問ニ於ケル行列式 $\triangle$ ト原方程式ノ判別式 D トノ關係ヲ求ム。

〔解〕 原方程式ノ三根ヲ α, β, γ トスレバ 問. 28 ニヨリ

$$\triangle=a^2f'(\alpha)\cdot f'(\beta)\cdot f'(\gamma)$$

又 $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$f'(x)=a\{(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)\},$$

$$\therefore\ f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\quad f'(\beta)=a(\beta-\alpha)(\beta-\gamma),\quad f'(\gamma)=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),$$

$$\therefore\ \triangle=-a^5(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

然ルニ $D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ $\qquad\therefore\ \triangle=-a^5D,$

(注意) 一般ニ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$ ノ判別式(根ノ差ノ平方ノ積)ヲ D トシ $f(x)=0, f'(x)=0$ ノ終結式ヲ $\triangle$ トスレバ

$$\triangle=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}D$$

ナルコトヲ同様ニ證明スルコトヲ得。

35. 方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ ノ判別式ヲ求ム。

〔解〕 $f(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ ト $f'(x)=3(a_0x^2+2a_1x+a_2)=0$ トノ終結式ヲ $\triangle$ トシ $f(x)=0$ ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ヲ判別式 D トスレバ前問ニヨリ $\triangle=-a_0^5D$

$$\therefore\ D=-\frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a_0^4}\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

或ハ最初ヨリ

$$f'(x)=3(a_0x^2+2a_1x+a_2)=0 \quad ト \quad f(x)-\frac{xf'(x)}{3}=a_1x^2+2a_2x+a_3=0$$

トヨリ x ヲ消去スルモ可ナリ。

36. 方程式 $f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ ノ判別式ヲ求ム。

〔解〕 前問ト同様ニ

$$\frac{1}{4}f'(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

$$f(x)-\frac{x}{4}f'(x)=a_1x^3+3a_2x^2+3a_3x+a_4=0$$

ヨリ x ヲ消去スレバ

$$D=\frac{1}{a_0^6}\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

37. $f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$　**ガ三重根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。**

〔解〕 $f(x)=0$ ノ三重根ハ $f'(x)=0$ ノ二重根ニシテ從ツテ又 $f''(x)=0$ ノ根ナリ，

故ニ $f(x)=0$ ガ三重根ヲ有スルトキハ $f(x)=0$, $f'(x)=0$ $f''(x)=0$ ガ共通ノ一根ヲ有セザルベカラズ，即チ

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \qquad (1)$$

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (2)$$

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0 \qquad (3)$$

ガ共通根ヲ有セザルベカラズ，然ルニ

$$(1)-(2)\times x,\quad a_1x^3+3a_2x^2+3a_3x+a_4=0 \qquad (4)$$

$$(2)-(3)\times x,\quad a_1x^2+2a_2x+a_3=0 \qquad (5)$$

$$(4)-(5)\times x,\quad a_2x^2+2a_3x+a_4=0 \qquad (6)$$

故ニ (1), (2), (3) ガ共通ノ一根ヲ有スルトキハ (3), (5), (6) ハ又共通根ヲ有セザルベカラズ，逆ニ (3), (5), (6) ガ共通一根ヲ有スルトキハ (1), (2), (6) ハ共通根ヲ有シ從ツテ其共通根ハ (1) ノ三重根トナル，故ニ (3), (5), (6) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ即チ所要ノ條件ナリ，

然ルニ (3), (5) ヨリ

$$x^2=\frac{a_1a_3-a_2^2}{a_0a_2-a_1^2},\qquad x=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{2(a_0a_2-a_1^2)}$$

故ニ (3), (5), (6) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\frac{a_1a_3-a_2^2}{a_0a_2-a_1^2}=\frac{(a_1a_2-a_0a_3)^2}{4(a_0a_2-a_1^2)^2} \qquad (A)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0 \qquad (B)$$

コレ即チ所要ノ條件ナリ，尙コレヲ變形スレバ (B) ヨリ

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_1^2a_4-a_0a_3^2=0$$

(A) ヨリ

$$a_0(2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_2^3)+4a_0a_1a_2a_3+3a_1^2a_2^2-3a_0a_2^3-4a_1^3a_3=0$$

$$\therefore\ a_0(a_1^2a_4-a_0a_2a_4)+4a_0a_1a_2a_3+3a_1^2a_2^2-3a_0a_2^3-4a_1^3a_3=0,$$

$$\therefore\ (a_0a_4-4a_1a_3+3a_1^2)(a_1^2-a_0a_2)=0$$

然ルニ (1) ハ四重根ヲ有セザル故ニ (3) ハ二重根ヲ有セズ故ニ其判別式 $a_1^2-a_0a_2$ ハ 0 ナラズ，依ツテ所要ノ條件 (A), (B) ノ代リニ次ノ (C), (D) ヲ以テスルコトヲ得，

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3=0 \qquad (C)$$

$$a_0a_4-4a_1a_3+3a_1^2=0 \qquad (D)$$

但シ (C) ハ (B) ソノモノナリ。

或ハ (1), (2) ガ二ツノ共通根ヲ有スル條件ヲ 問. 20 ニヨリ次ノ如ク書キ下スモ可ナリ，即チ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 \end{vmatrix}=0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 \\ 0 & a_0 & 3a_1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

或ハ又

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=a_0(x-\alpha)^3(x-\beta)$$

トオキ係數ヲ比較シテ α, β ヲ消去スルモ可ナリ。

——〔完〕——

$$R_3(x) = R_1(x) - Q_2(x)R_2(x)$$

コンナコト位暗算デスルヨウニ!

ソレガデキナイ コノツラサ!

$$= f(x) - Q_0(x)\phi(x) - Q_2(x)\{-f(x)Q_1(x) + \phi(x)[1 + Q_0(x)Q_1(\ldots$$

$$= f(x) - Q_0(x)\phi(x) - Q_2(x)\{-f(x)Q_1(x) + \phi(x)$$

$$= f(x) - Q_0(x)\phi(x) + Q_2(x)Q_1(x)f(x) - \phi(x)[Q_2(x) + Q_0(x)Q_1(x)Q_2(\ldots$$

$$= f(x)\{1 + Q_2(x)Q_1(x)\} - \phi(x)[Q_0(x) + Q_2(x) + Q_0(x)Q_1(x)Q_2(x)]$$

$$R_4(x) = R_2(x) - Q_3(x)R_3(x)$$

$$R_4(x) = -f(x)Q_1(x) + \phi(x)\{1 + Q_0(x)Q_1(x)\} - Q_3(x)\{f(x)[1 + Q_2(x)Q_1(\ldots$$

$$- \phi(x)[Q_0(x) + Q_2(x) + Q_0(x)Q_1(x)Q_2(x)]$$

$$= -f(x)[Q_1(x) + Q_3(x) + Q_1(x)Q_2(x)Q_3(x)]$$

$$+ \phi(x)\{1 + Q_0(x)Q_1(x) + Q_0(x)Q_3(x) + Q_2(x)Q_3(x) + Q_0(x)Q_1(x)Q_2(x)Q_3\ldots$$

$$R\ \phi(x)\{1 + Q_0(x)Q_1(x) + Q$$

あ

27. 3. 4

昭和六年四月 十 日印刷

昭和六年四月二十日發行

代數學演習

定 價 四 圓

著者 檢印

著作者 大上茂喬

發行者 楠間龜楠

東京市小石川區水道端二ノ一〇

印刷者 山内勇次郎

東京市牛込區横寺町三〇

發行所

文明社

東京市小石川區水道端二ノ一〇

振替東京一七〇一六番 電話小石川三八二二番

$ax+\frac{b}{x}=p$　$ax+\frac{b}{x}=p$

$ax+\frac{b}{x}$

若人よ！
戀せよ！

Chap2
29

終