平面·立體
解析幾何學

東京帝國大學教授
理學博士
坂井英太郎
著

東京
共立社發行

目　次

第三章　座標ノ變換　49—80

第四章　二次曲線ノ分類　81—108

第五章　直線及ビ圓　109—160

第六章　橢圓, 雙曲線及ビ拋物線　161—192

第七章　空間ニ於ケル座標　193—213

第八章　平面及ビ直線　214—224

第九章　球　面　237—254

第十章　二次曲面　255—284

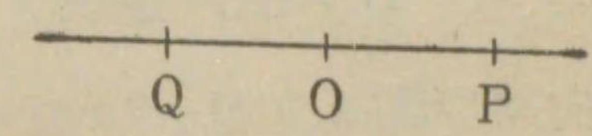
—（終）—

解析幾何學

第一章　座　標

1.　直線上ニ於ケル點ノ位置

一定ノ直線上ニ於ケル任意ノ點Pノ位置ハ其ノ直線上ニ一定ノ點Oヲ取リ，PガOヨリ何レノ方向ニ於テ何程ノ距離ニアルカヲ知ルコトニヨリテ定マル



距離ヲ表ハスニハ適宜ナル長サヲ長サノ單位トシテ OP ヲ測リテ得タル數値ヲ以テシ，方向ヲ示スニハPガOヨリ右方ニアルトキハ正號ヲ附シ，Oヨリ左方ニアルトキハ負號ヲ附スルモノトス

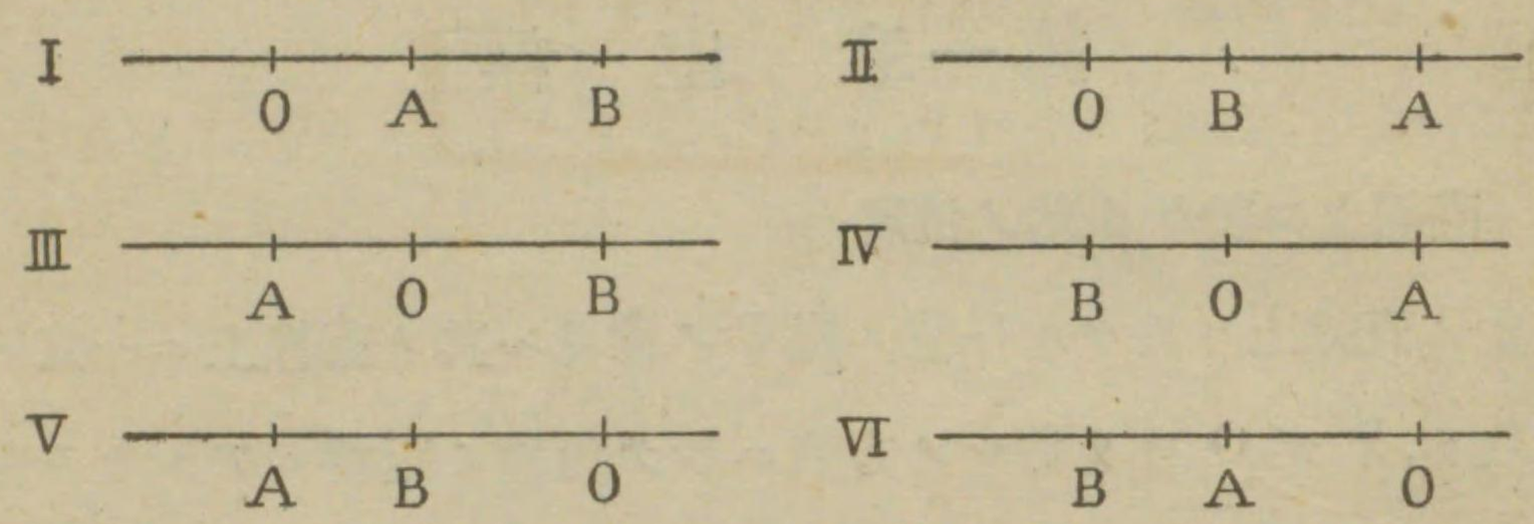
例ヘバPガOノ右方ニ於テ單位ノ長サノ2倍ニ等シキ距離ニアルトキハ2ヲ以テ之ヲ表ハシ，QガOノ左方ニ於テ單位ノ長サノ1.5倍ニ等シキ距離ニアルトキハ -1.5 ヲ以テ之ヲ表ハス

一般ニ一定ノ直線上ニ於ケル任意ノ一點ノ位置ハ其ノ直線上ニ於ケル定點ニ關シテ正又ハ負ノ實數 a ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得ベク，又一ツノ實數 a ヲ知ルトキハ一定ノ直線上ニ於ケル定點ニ關シテ一ツノ點ノ位置ヲ決定スルコトヲ得ベシ；卽チ一ツノ實數ト一定直線上ニ於ケル一ツノ點トハ一々對應シテ存在スルモノトス

此ノ如ク定點ニ關シテ一定直線上ニ於ケル點Pノ位置ヲ決定スルニ必要ナル實數 a ヲ點Pノ**座標**トイヒ，定點Oヲ座標ノ**原點**トイフ

2. 直線上ニ於ケル二點ノ距離

一定ノ直線上ニ於ケル原點ヲOトシ,任意ノ二點ヲ A, B トスルトキハ A, B ノ位置ニヨリ次ノ如ク種々ノ場合アリ



今 A ヨリ B ニ至ル距離ヲ AB ニテ表ハスコトトシ,A ヨリ B ニ至ル方向ガ原點ヨリ見タル正ノ方向ト一致スルトキハ正號又之ト反對ナルトキハ負號ヲ附スコトト定ム

然ルトキハ $\qquad AB=-BA$

從テ A, B ノ位置如何ニ係ハラズ

$$AB+BA=0$$

二點 A, B ノ座標ヲ夫々 a, b トスルトキハ上ノ六箇ノ場合ヨリ直チニ次ノ關係ヲ得

I. $AB=OB-OA=b-a$

II. $AB=-BA=-(OA-OB)=-(a-b)=b-a$

III. $AB=AO+OB=-OA+OB=-a+b=b-a$

IV. $AB=-BA=-(BO+OA)=-(-b+a)=b-a$

V. $AB=AO-BO=-OA+OB=-a+b=b-a$

VI. $AB=-BA=-(BO-AO)=-(-b+a)=b-a$

此ノ如ク上ノ規約ニ從フトキハ A, B ノ位置如何ニ係ハラズ恒ニ

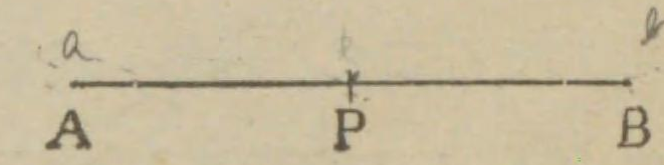
$$AB=b-a$$

卽チ AB ノ距離ハ B ノ座標ヨリ A ノ座標ヲ減ジタルモノニ等シ

3. 二點ヲ兩端トスル線分ヲ定比ニ分ツ點

二點 A, B ノ座標ヲ夫々 a, b トシ,線分 AB 上ニ於ケル任意ノ一點 P ノ座標ヲ x トスルトキハ第2節ニヨリ

$$AP=x-a, \quad PB=b-x$$



P ガ線分 AB ノ中點ナルトキハ

$$AP=PB$$

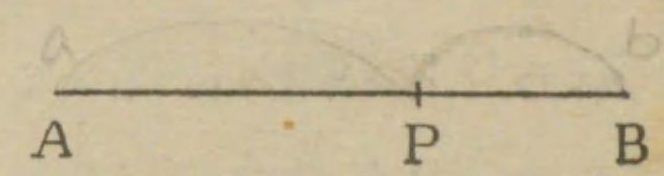
故ニ $\qquad x-a=b-x$

從テ $\qquad x=\frac{a+b}{2}$

卽チ AB ノ中點ノ座標ハ A, B ノ位置如何ニ係ハラズ二點ノ座標ノ和ノ半ニ等シ

尙一般ニ P ガ AB 上ノ任意ノ位置ニアリテ AB ヲ $m:n$ ノ比ニ分ツトキハ

$$AP:PB=m:n$$



故ニ $\qquad x-a:b-x=m:n$

卽チ $\qquad n(x-a)=m(b-x)$

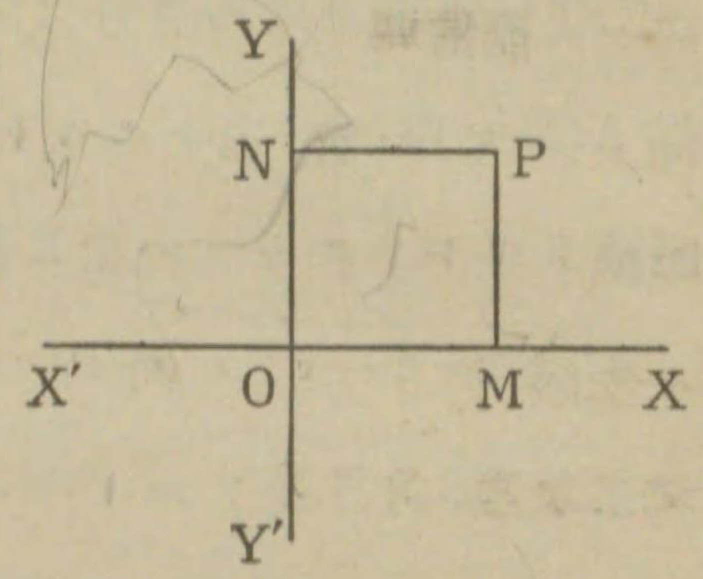
從テ $\qquad x=\frac{na+mb}{m+n}$

此ノ特別ナル場合トシテ $m=n$ ナルトキハ $x=\frac{a+b}{2}$ 卽チ前ニ擧ゲタル中點ノ座標トナル

4. 平面上ニ於ケル點ノ位置

一直線上ニ於ケル點ノ位置ヲ定ムル方法ヲ擴張シテ次ノ如ク一平面上ニ於ケル點ノ位置ヲ定ムルコトヲ得

平面上ニ二ツノ互ニ直角ニ交ハル直線 XX′, YY′ ヲ引キ,其ノ交點ヲ O トシ, 平面上ノ一點 P ヨリ此ノ二ツノ直線ニ垂線ヲ引キ, XX′ トノ交點ヲ M, 又 YY′ トノ交點ヲ N トス



然ルトキハ XX′, XY′ ハ一定ナルガ故ニ定點 P ヨリ下セル垂線ノ足 M,N ノ位置ハ一定ナリ,又 XX′ 上ノ點 M 及ビ YY′ 上ノ點 N ノ位置定マルトキハ M, N ヨリ XX′, YY′ ニ夫々垂線ヲ引ケバ其ノ交點 P ノ位置ハ定マル

然ルニ XX′ 上ノ點 M ノ位置ハ O ヲ原點トシ, M ノ座標卽チ OM ノ大サ及ビ方向ニヨリテ決定セラルベク, YY′ 上ノ點 N ノ位置ハ又 O ヲ原點トシ, ON ノ大サ及ビ方向ニヨリテ決定セラルベシ.

故ニ O ヲ共通ノ原點トシテ同一ノ長サノ單位ヲ用ヒテ OM, ON ヲ測リテ其ノ數値ヲ得, M ガ XX′ 上ニ於テ O ノ右方ニアレバ正又左方ニアレバ負トシ, N ガ YY′ 上ニ於テ O ノ上方ニアレバ正又下方ニアレバ負トスルコトニヨリテ M, N ノ位置ハ全ク定マル

從テ點 P ノ位置ハ M ノ座標 x 及ビ N ノ座標 y ニヨリテ全ク定マル

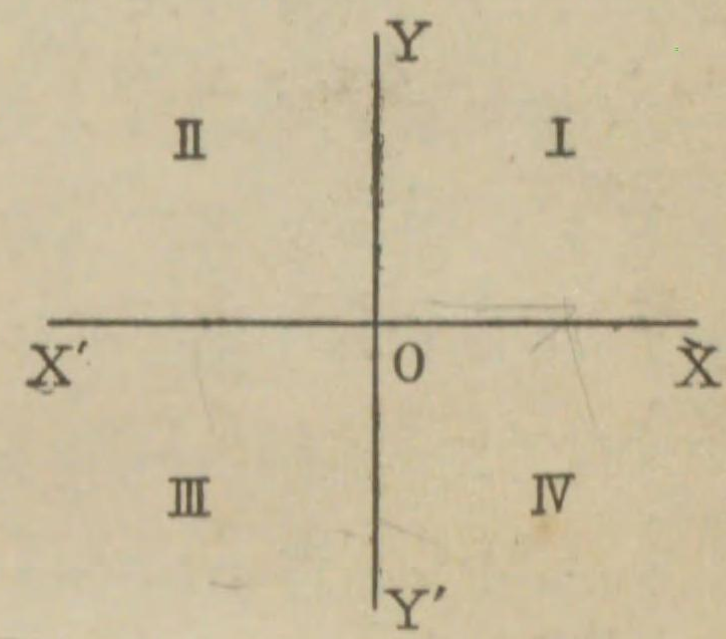
x ヲ P ノ**橫座標**又ハ x **座標**, y ヲ其ノ**縱座標**又ハ y **座標**トイヒ. 之ヲ總稱シテ單ニ P ノ**座標**トイフ

點 P ノ座標ガ x, y ナルコトヲ P(x, y) ト書ク, 原點 O ノ座標ハ $(0, 0)$ ナリ

又直線 XX′ ヲ**橫軸**又ハ x **軸**ト云ヒ, YY′ ヲ**縱軸**又ハ y **軸**トイヒ, 之ヲ總稱シテ**座標軸**トイフ、

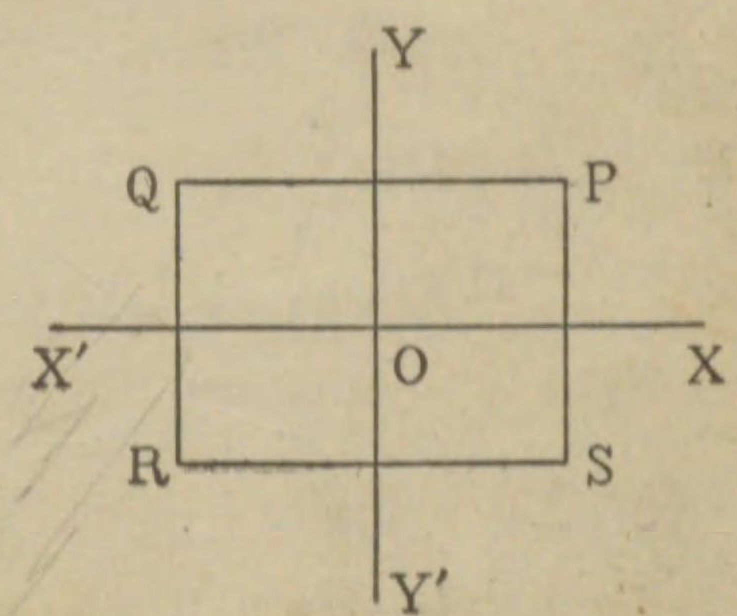
橫軸上ノ點ノ座標ハ $(x, 0)$ 又縱軸上ノ點ノ座標ハ $(0, y)$ ナリ

座標軸ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ, 角 XOY ノ內ニアル平面ノ部分ヲ**第一象限**. 角 YOX′ ノ內ニアル部分ヲ**第二象限**, 角 X′OY′ ノ內ニアル部分ヲ**第三象限**, 角 Y′OX ノ內ニアル部分ヲ**第四象限**トイフ



第一象限ニ於ケル點ノ橫座標及ビ縱座標ハ共ニ正, 第二象限ニ於テハ橫座標ハ負ニシテ縱座標ハ正, 第三象限ニ於テハ橫座標及ビ縱座標共ニ負, 第四象限ニ於テハ橫座標ハ正ニシテ縱座標ハ負ナリ

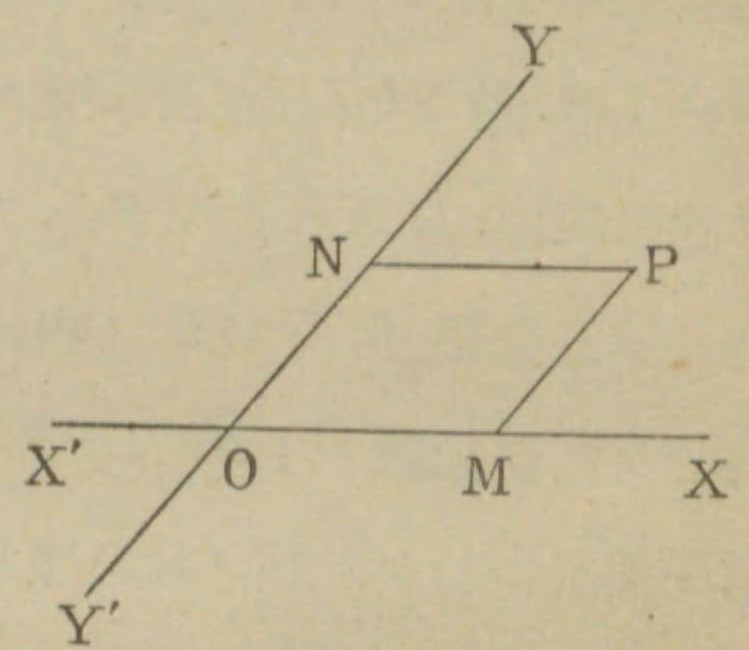
注意(1) 點 P ト點 Q, 及ビ點 R ト點 S ノ如ク縱座標ガ相等シクシテ橫座標ノ絕對値相等シク符號相反スル點ニ於テハ縱軸ハ線分 PQ 及ビ RS ヲ直角ニ二等分ス, 故ニ P ト Q, 及ビ R ト S ハ縱軸ニ關シテ互ニ對稱ナリ



同樣ニ點 P ト點 S, 及ビ點 Q ト點 R ハ橫軸ニ關シテ互ニ對稱ナリ

又點Pト點R,及ビ點Qト點Sノ如ク横座標及ビ縦座標共ニ絶對値相等シク符號相反スル點ニ於テハ原點ハ線分PR及ビQSヲ二等分ス,故ニPトR,及ビQトSハ原點ニ關シテ互ニ對稱ナリ

注意(2) 座標軸ハ必ズシモ前記ノ如ク互ニ直角ニ交ハルコトヲ要セズ,任意ノ角ヲナシテ相交ルモノヲ取ルモ差支ナシ,卽チ圖ノ如クOニ於テ斜ニ交ル二ツノ直線XX′, YY′ヲ取リ,PヨリYY′ニ平行線ヲ引キ,XX′トノ交點ヲMトシ,PヨリXX′ニ平行線ヲ引キ,YY′トノ交點ヲNトシ,OM,ONノ長サ及ビ方向ヲ知ルトキハPノ位置ヲ決定スルコトヲ得



此ノ場合ニモ座標x, yノ正負,象限ノ區別等ハ座標軸ガ互ニ直角ニ交ハルトキト異ナルコトナシ

此ノ如ク二ツノ定直線ヲ軸トシテ一點ノ位置ヲ定ムル方法ヲ**平行座標**ノ方法トイフ

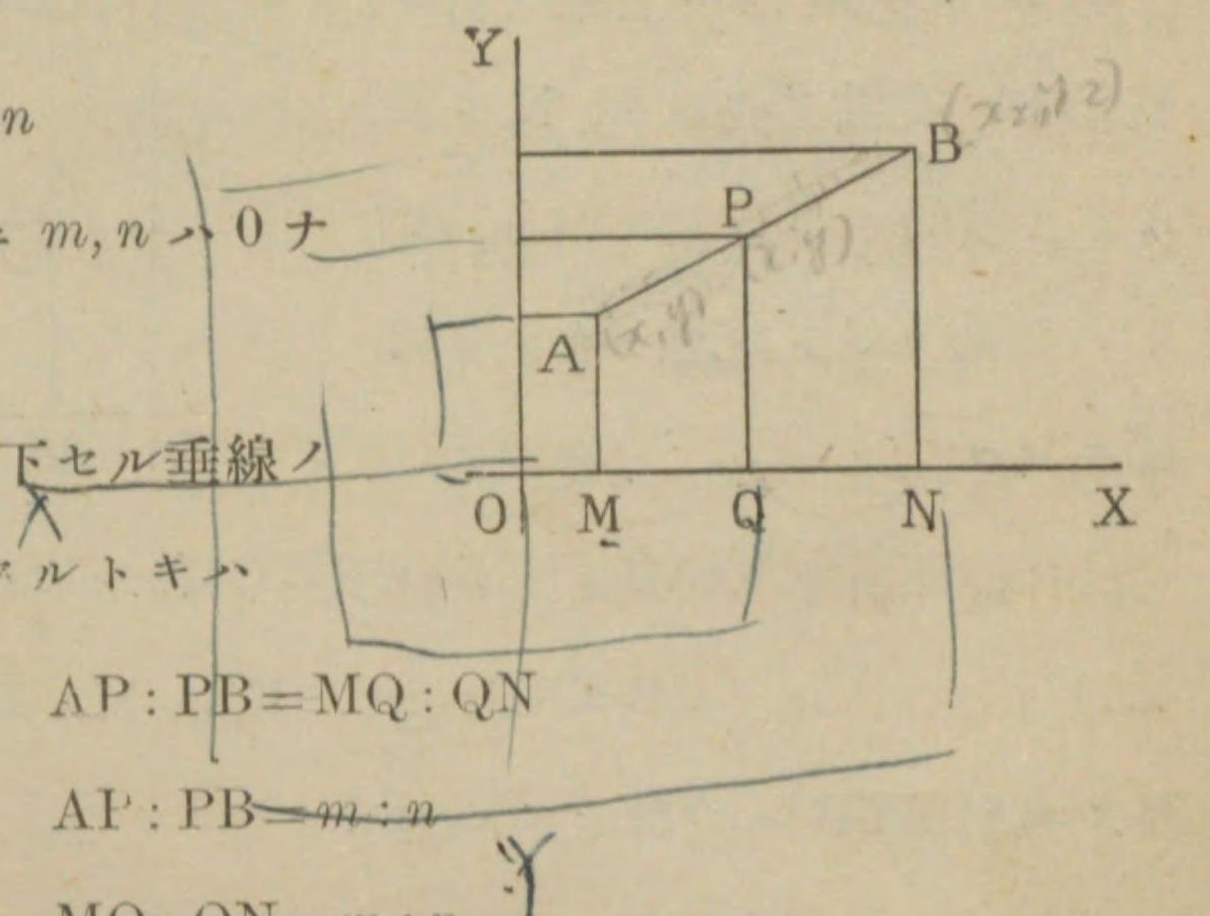
尙兩軸ノ正方向卽チ横軸ノ原點ヨリ右方ノ部分及ビ縦軸ノ原點ヨリ上方ノ部分ノ夾ム角ヲ**座標軸間ノ角**トイヒ,普通ωヲ以テ之ヲ表ハス,ωノ直角ナルトキハ其ノ軸ヲ**直交軸**トイヒ,然ラザルトキハ之ヲ**斜交軸**トイフ

直交軸ヲ用フルトキ一點ノ座標ヲ**直角座標**トイフコトアリ

以下單ニ座標ト稱スルハ直角座標ヲ指スモノトス

5. 平面上ニ於ケル線分ヲ定比ニ分ツ點

一ツノ平面上ニ於ケル二點ヲ$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$トシ,線分ABノ上ニ一點$P(x, y)$ヲ取リ



$$AP:PB=m:n$$

ナラシメントス,此ニm, nハ0ナラザル實數トス

A,B,Pヨリ横軸ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々M,N,Qトスルトキハ

$$AP:PB=MQ:QN$$

然ルニ $AP:PB=m:n$

依テ $MQ:QN=m:n$

第2節ニヨリ $MQ=x-x_1,\ QN=x_2-x$

故ニ $x-x_1:x_2-x=m:n$

卽チ $n(x-x_1)=m(x_2-x)$

從テ $$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

同様ニA,B,Pヨリ縦軸ニ垂線ヲ引キテ次ノ式ヲ得

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

此ニ特ニ$m=n$ト置クトキハ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

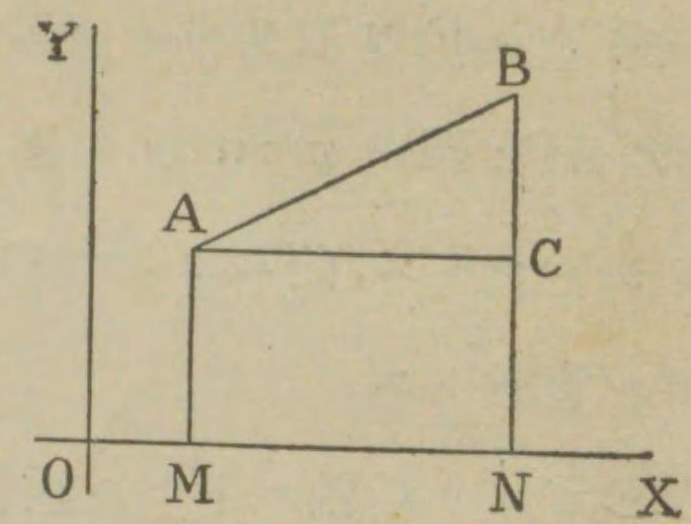
是レ卽チ線分ABノ中點ノ座標ナリ

注意 上記ノ關係ハ斜交軸ヲ用フルモ全ク異ナルコトナシ

6. 平面上ニ於ケル二點ノ距離

一ツノ平面上ニ於ケル二點ヲ $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ トス

A, B ヨリ横軸ニ垂線ヲ引キ, 横軸トノ交點ヲ夫々 M, N トシ, A ヨリ横軸ニ平行線ヲ引キ, BN トノ交點ヲ C トスルトキハ第2節ニヨリ



$$AC=MN=ON-OM=x_2-x_1$$

$$CB=NB-NC=NB-MA=y_2-y_1$$

然ルニ角 ACB ハ直角ナルガ故ニ

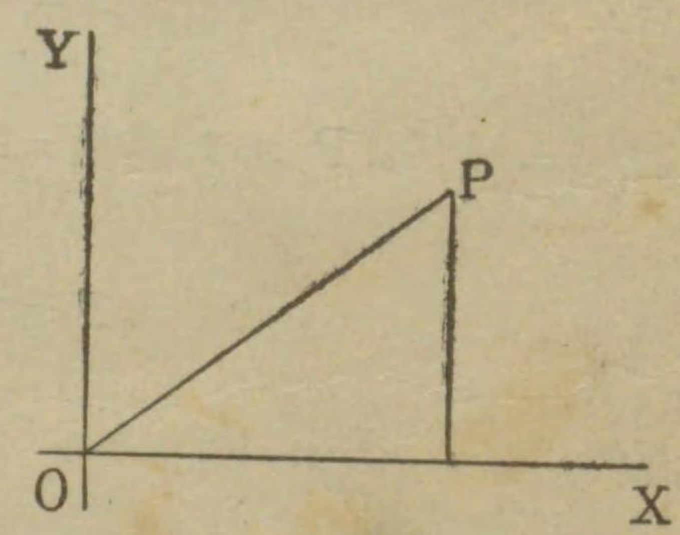
$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

卽チ $$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

故ニ $$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

是レ卽チ二點 A,B ノ距離ヲ其ノ座標ヲ以テ表ハシタル式ニシテ A,B ノ位置如何ニ係ハラズ恒ニ眞ナリ

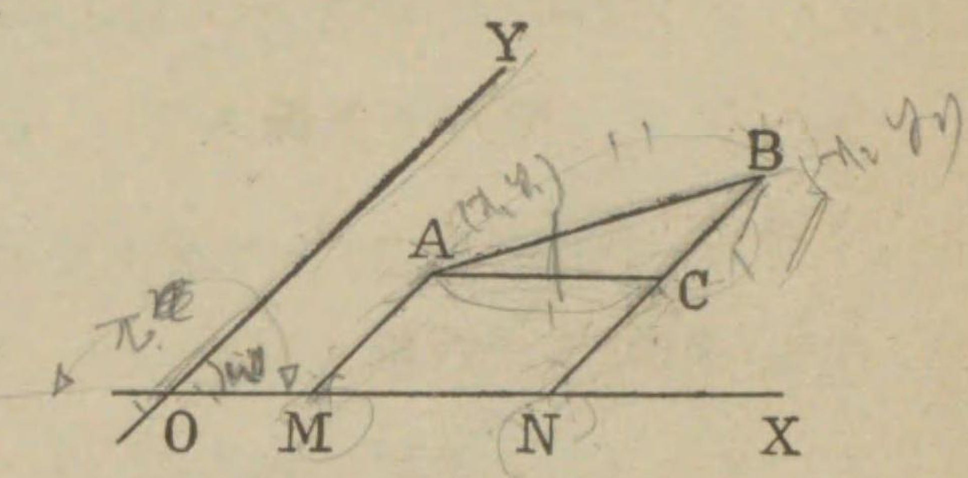
此ノ特別ナル場合トシテ原點 (0,0) ト任意ノ點 $P(x,y)$ トノ距離ヲ表ハス式ハ



$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$$

注意(1) 此ノ關係ニヨリ原點 (0,0) ヨリ一定ノ距離 r ニアル點ノ座標 x,y ハ恒ニ方程式 $\sqrt{x^2+y^2}=r$, 卽チ $x^2+y^2=r^2$ ヲ滿足スルコト明ナリ

注意(2) 斜交軸ヲ用ヒテ二點 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ノ距離ヲ索ムルニハ前同樣ニ A, B ヨリ縱軸ニ平行線ヲ引キ, 横軸トノ交點ヲ夫々 M, N トシ, A ヨリ横軸ニ平行線ヲ引キ, BN トノ交點ヲ C トスルトキハ第2節ニヨリ



$$AC=MN=ON-OM=x_2-x_1$$

$$CB=NB-NC=NB-MA=y_2-y_1$$

然ルニ三角形 ABC ニ於テ

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2\overline{AC}.\overline{CB}\cos ACB$$

角 XOY$=\omega$ ト置クトキハ

$$\angle ACB=\pi-\omega$$

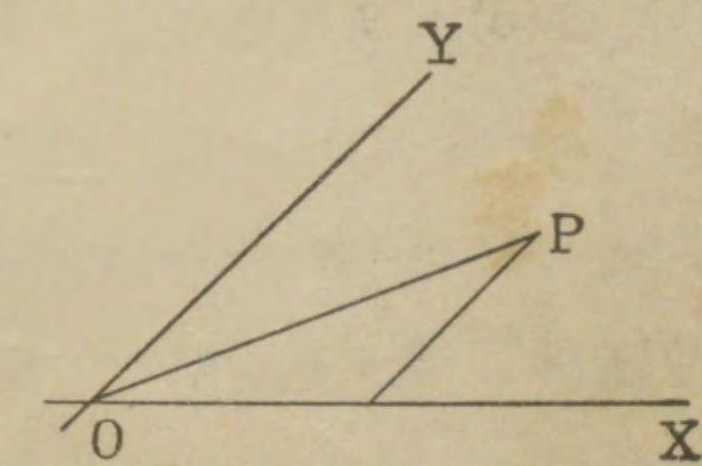
$$\cos ACB=\cos(\pi-\omega)=-\cos\omega$$

故ニ $$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega$$

卽チ $$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

此ノ特別ナル場合トシテ原點 (0, 0) ヨリ任意ノ點 $P(x,y)$ ニ至ル距離ヲ表ハス式ハ

$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\omega}$$



$\omega=\dfrac{\pi}{2}$ ト置クトキハ

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

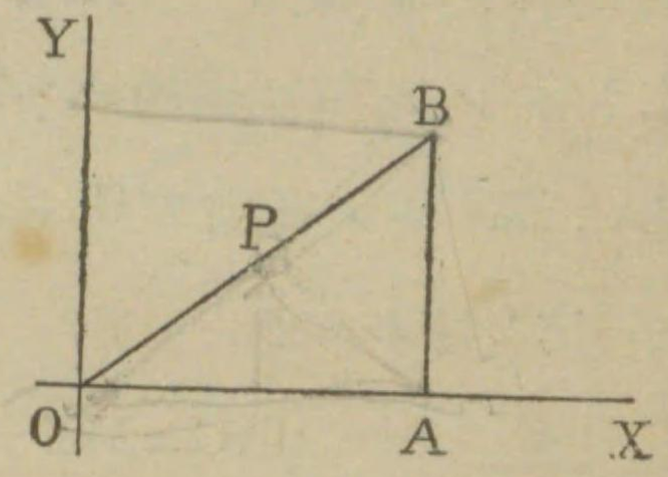
$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$$

卽チ前ニ得タル直交軸ヲ用ヒテ二點ノ距離ヲ表ハス式ト一致ス

7. 例題

(i) 三點 $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,b)$ ヨリ等距離ニアル點ノ座標ヲ索ムルコト

索ムル點ヲ $P(x,y)$ トスルトキハ題意ニヨリ



$$\overline{PO}^2=\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$$

然ルニ第6節ニヨリ

$$\overline{PO}^2=(x-0)^2+(y-0)^2=x^2+y^2 \qquad (1)$$

$$\overline{PA}^2=(x-a)^2+(y-0)^2=(x-a)^2+y^2 \qquad (2)$$

$$\overline{PB}^2=(x-a)^2+(y-b)^2 \qquad (3)$$

故ニ (1) 及ビ (2) ヨリ

$$x^2+y^2=(x-a)^2+y^2$$

即チ $$2ax-a^2=0 \qquad (4)$$

又 (2) 及ビ (3) ヨリ

$$(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

即チ $$2by-b^2=0 \qquad (5)$$

(4) 及ビ (5) ヨリ

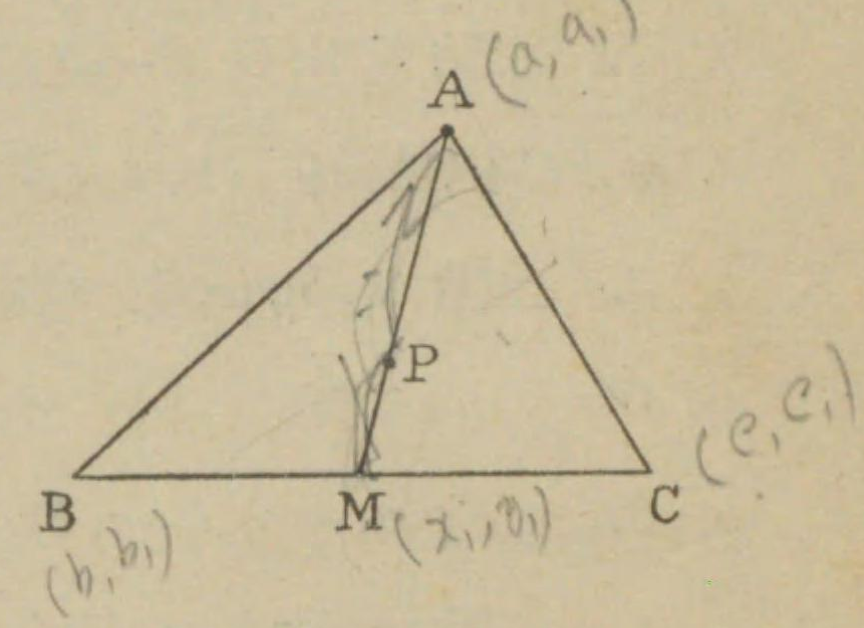
$$x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{b}{2}$$

即チ $$x=\frac{a+0}{2},\quad y=\frac{b+0}{2}$$

此ノ結果ハ第5節ニヨリ三點 O, A, B ヨリ等距離ニアル點ハ線分 OB ノ中點ナルコトヲ示スモノトス

(ii) 三角形ノ頂點ヨリ對邊ノ中點ニ至ル線分ヲ 2:1 ノ比ニ分ツ點ヲ索ムルコト

三角形ノ頂點ヲ $A(a,a_1)$, $B(b,b_1)$, $C(c,c_1)$ トシ, 邊 BC ノ中點ヲ $M(x_1,y_1)$ トス



AM ノ上ニ一點 $P(x,y)$ ヲ取リ

$$AP:PM=2:1$$

ナラシムルトキハ第5節ニヨリ

$$x=\frac{a+2x_1}{3},\quad x_1=\frac{b+c}{2}$$

故ニ $$x=\frac{a+b+c}{3}$$

同様ニシテ

$$y=\frac{a_1+2y_1}{3},\quad y_1=\frac{b_1+c_1}{2}$$

故ニ $$y=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

即チ $$x=\frac{a+b+c}{3},\quad y=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

此ノ結果ハ a, b, c 及ビ a_1, b_1, c_1 ノ順序ヲ變更スルモ同一ナルガ故ニ頂點 B ヨリ對邊 CA ノ中點ニ至ル線分及ビ頂點 C ヨリ對邊 AB ノ中點ニ至ル線分ヲ 2:1 ノ比ニ分ツ點ノ座標モ亦上記ノ座標ト異ナラザルコトヲ示ス, 即チ一ツノ三角形ノ各頂點ヨリ其ノ對邊ニ至ル中線ハ同一ノ點ニ於テ相交ハルモノトス

問 題

1. 三點 A, B, C ガ一直線上ニアルトキハ其ノ位置如何ニ關セズ $AB+BC+CA=0$ ナルコトヲ證明セヨ

2. 二點 $(a, b), (c, d)$ ヲ兩端トスル線分ヲ三等分スル點ノ座標ヲ索メヨ

3. 二點 $(a, -b), (-a, b)$ ノ距離ヲ索メヨ

4. 三點 $(a, b), (-a, b), (-a, -b)$ ヲ頂點トスル三角形ノ周ヲ索メヨ

5. 二點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ヲ兩端トスル線分ヲ $m:n$ ノ比ニ外分スル點ノ座標ヲ索メヨ

6. 第 6 節ニ於ケル斜交軸ヲ用ヒテ二點ノ距離ヲ表ハス式ハ二點ノ位置如何ニ關セズ恒ニ眞ナルコトヲ證明セヨ

7. 座標軸間ノ角ガ $60°$ ナルトキ二點 $(a,0), (0,b)$ ノ距離ヲ索メヨ

8. 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分スルコトヲ證明セヨ

9. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ中點ヲ兩端トスル線分ハ邊 BC ノ半ニ等シキコトヲ證明セヨ

10. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上又ハ其ノ延長上ノ一點ヲ P トスルトキハ

$$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.PC$$

ナルコトヲ證明セヨ

第二章　方程式ト軌跡

8. 二元一次方程式ノ圖示

聯立二元一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

ニ於テ, (1) ニ b_2 ヲ乘ジ, (2) ニ $-b_1$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_1c_2-b_2c_1 \qquad (3)$$

又 (1) ニ $-a_2$ ヲ乘ジ, (2) ニ a_1 ヲ乘ジテ加フレバ

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=c_1a_2-c_2a_1 \qquad (4)$$

$a_1b_2-d_2b_1 \gtrless 0$ ナルトキハ (3) 及ビ (4) ヨリ

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ヲ得, 是レ卽チ聯立方程式 (1) 及ビ (2) ノ根ナリ

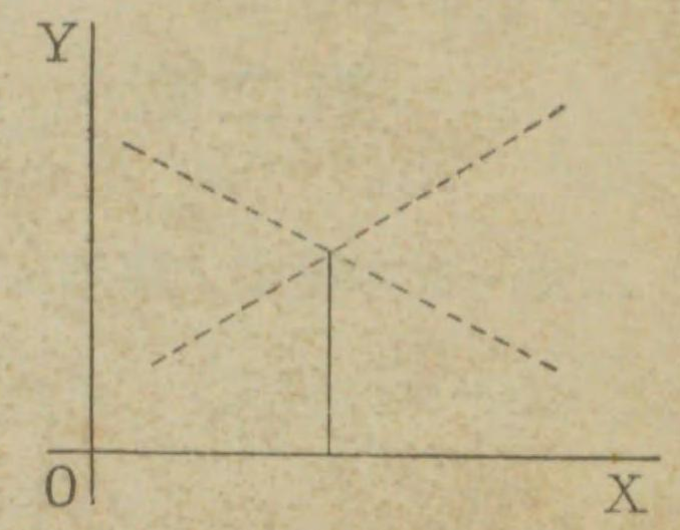
今單ニ方程式 $a_1x+b_1y+c_1=0$ ノミヲ考フルトキハ x ニ任意ノ一ツノ値ヲ與フレバ之ニ對應シテ y ノ一ツノ値定マル, 從テ x ニ順次ニ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, \ldots\ldots$ ノ値ヲ與フレバ之ニ對應シテ順次ニ y ノ値 $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n, \ldots\ldots$ ヲ得ベシ

方程式 $a_2x+b_2y+c_2=0$ ノミヲ考フルモ亦同様ナリ

故ニ一組ノ二元一次方程式ニハ一般ニ唯一ツノ解アリ, 之ニ反シテ一ツノ二元一次方程式ニハ限リナク多クノ解アリ

x, y ヲ以テ平面上ニ於ケル點ノ座標ト考フルトキハ聯立方程式 (1)

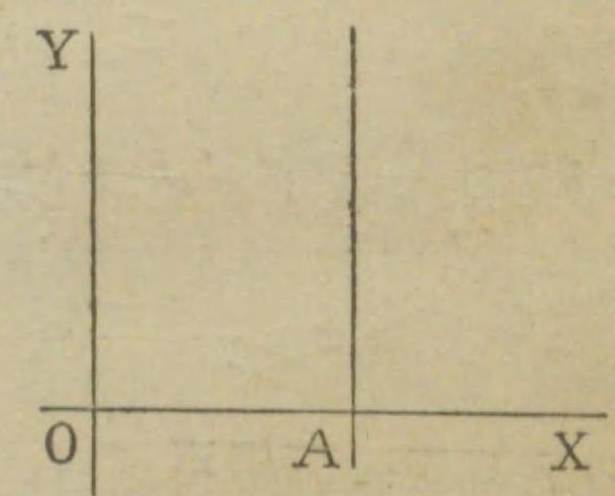
及ビ(2)ハ一般ニ一ツノ點ヲ決定シ，(1)又ハ(2)ハ何レモ限リナク多クノ點ノ列ヲ決定スルコトトナル，即チ二ツノ聯立方程式ハ各一ツノ軌跡ヲ表ハシ，此ノ軌跡ノ交點ノ座標ハ聯立方程式ノ根ニ相當スルモノトス



今進ミテ方程式 $ax+by+c=0$ ノ表ハス軌跡ヲ研究セントスルニ當リ，a, b ハ同時ニ0ナラズトシテ，次ノ如ク二ツノ場合ニ區別ス

(1) $b=0,\ a\gtrless 0$

此ノ場合ニハ元ノ方程式ハ $x=\alpha$ ノ形トナリ，其ノ表ハス點ハ何レモ縦軸ヨリ α ナル距離ニアリ，依テ横軸上ニ一點 $A(\alpha, 0)$ ヲ取リ，此ノ點ヲ通過シ横軸ニ垂線ヲ引クトキハ此ノ直線上ノ點ノ座標ハ何レモ $x=\alpha$ ヲ滿足ス，即チ方程式 $x=\alpha$ ノ表ハス軌跡ハ定點ヲ通過シ横軸ニ垂直ナル直線ナリ

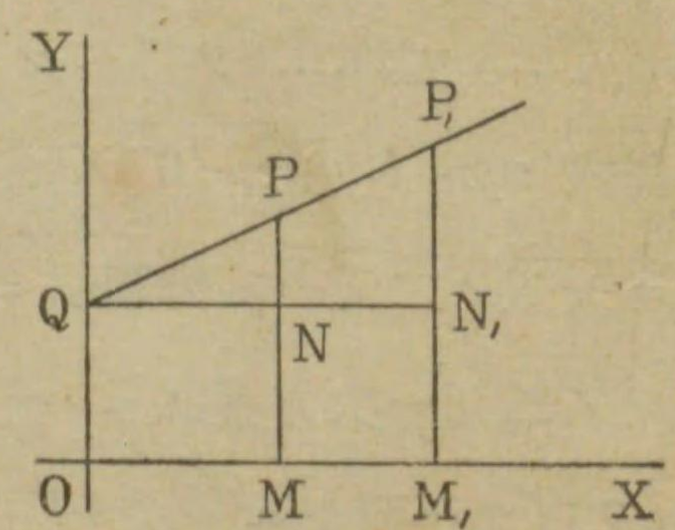


(2) $b\gtrless 0$

此ノ場合ニハ元ノ方程式ハ $y=mx+k$ ノ形トナリ，其ノ上ノ一點ヲ $P(x,y)$ トシ，此ノ點ヨリ横軸ニ垂線PMヲ引キ點 $Q(0,k)$ ヨリPMニ垂線QNヲ引クトキハ

$$OM=QN=x$$

$$MP=y,\quad OQ=k$$



然ルニ
$$y=mx+k$$

$$\frac{NP}{QN}=\frac{MP-MN}{QN}=\frac{MP-OQ}{OM}=\frac{y-k}{x}$$

故ニ
$$\frac{NP}{QN}=m$$

即チPハ定點Qヲ通過シテ横軸トナス角ノ正切ガ m ニ等シキ直線上ニアリ

又此ノ直線上ニ任意ノ一點 $P_1(x_1, y_1)$ ヲ取リ横軸ニ垂線 P_1M_1 ヲ引キ，Qヨリ P_1M_1 ニ垂線 QN_1 ヲ引クトキハ二ツノ三角形 PQN, P_1QN_1 ハ相似ナルガ故ニ

$$\frac{NP}{QN}=\frac{N_1P_1}{QN_1}$$

然ルニ
$$\frac{NP}{QN}=m$$

$$\frac{N_1P_1}{QN_1}=\frac{M_1P_1-M_1N_1}{QN_1}=\frac{M_1P_1-OQ}{OM_1}=\frac{y_1-k}{x_1}$$

故ニ
$$y_1=mx_1+k$$

即チ P_1 ノ座標ハ方程式 $y=mx+k$ ヲ滿足ス

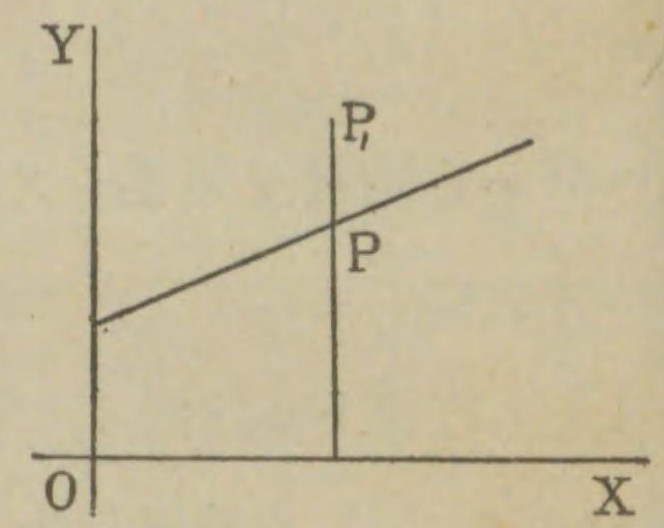
故ニ方程式 $y=mx+k$ ノ表ハス直線ハ定點ヲ通過シ横軸ト定角ヲナス直線ナリ

以上ノ證明ニヨリ一ツノ二元一次方程式ハ一ツノ直線ヲ表ハシ，聯立二元一次方程式ハ一般ニ二ツノ直線ノ交點ヲ表ハスモノトス

注意 (1) 座標ガ不等式 $x>\alpha$ ヲ滿足スル點ハ何レモ方程式 $x=\alpha$ ノ表ハス直線ノ右方ニアリ又不等式 $x<\alpha$ ヲ滿足スル點ハ何レモ此ノ直線ノ左方ニアリ，即チ $x=\alpha$ ナル直線ハ上記二種ノ點ノ存在スル區域ノ境界ヲナスモノトス

又方程式 $y=mx+k$ ノ表ハス直線外ノ一點ヲ $P_1(x_1, y_1)$ トシ, 此ノ點ヲ通過シテ横軸ニ垂線ヲ引キ, 直線トノ交點ヲ $P(x_1, y)$ トスルトキハ

$$y=mx_1+k$$

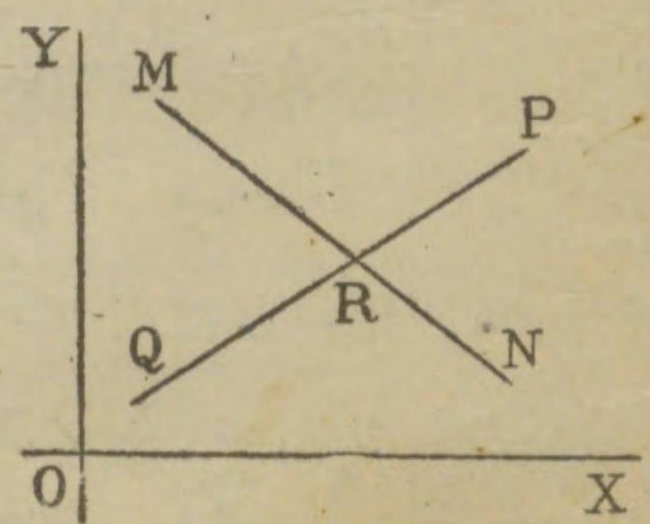


故ニ $y_1>y$ ナルトキハ $y_1>mx_1+k$

又 $y_1<y$ ナルトキハ $y_1<mx_1+k$

故ニ座標ガ不等式 $y>mx+k$ ヲ滿足スル點ハ何レモ方程式 $y=mx+k$ ノ表ハス直線ノ上方ニアリ, 又不等式 $y<mx+k$ ヲ滿足スル點ハ何レモ此ノ直線ノ下方ニアリ, 卽チ此ノ直線ハ又上記二種ノ點ノ存在スル區域ノ境界ヲナスモノトス

注意 (2) 方程式 $y=mx+k$ ノ表ハス直線ヲ MN, 方程式 $y=nx+l$ ノ表ハス直線ヲ PQ トシ, 二ツノ直線ノ交點ヲRトスルトキハ上ノ證明ニヨリ



二ツノ不等式 $y-mx>k, y-nx>l$ ヲ同時ニ滿足スベキ x, y ノ値ハ何レモ角 MRP ノ内ニアル點ノ座標ナリ

方程式 $y-mx=k$ 及ビ不等式 $y-nx>l$ ヲ同時ニ滿足スベキ x,y ノ値ハ何レモ PQ ノ上方ニ於テ MN ノ上ニアル點ノ座標ナリ

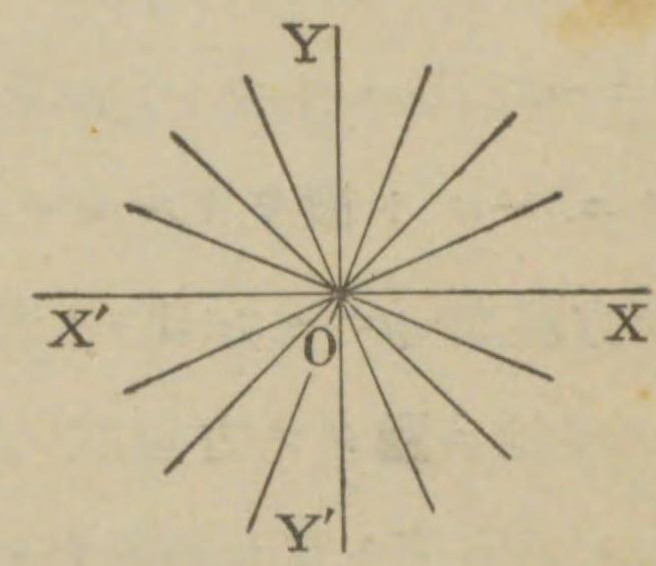
不等式 $y-mx>k$ 及ビ方程式 $y-nx=l$ ヲ同時ニ滿足スベキ x,y ノ値ハ何レモ MN ノ上方ニ於テ PQ ノ上ニアル點ノ座標ナリ

二ツノ方程式 $y-mx=k, y-nx=l$ ヲ同時ニ滿足スベキ x,y ノ値ハ交點Rノ座標ナリ

9. 例題

(i) 方程式 $y=mx$ ノ圖示

$x=0, y=0$ ハ方程式 $y=mx$ ヲ滿足スルガ故ニ此ノ方程式ノ表ハス直線ハ原點ヲ通過ス



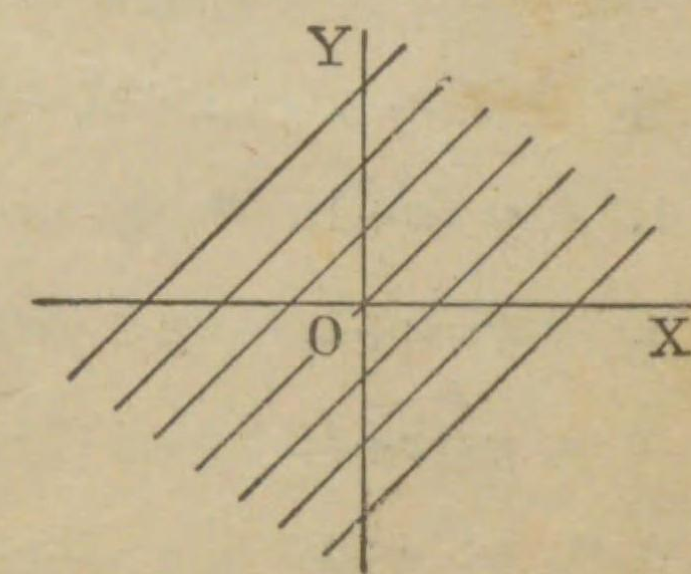
此ノ直線ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ $m=\tan\alpha$ ニシテ m ノ一ツノ値ニ對シテ α ノ定マリタル値アリ, 卽チ此ノ直線ノ方向定マル

故ニ方程式 $y=mx$ ハ原點ヲ通過スル直線ヲ表ハシ, m ノ値ニヨリテ其ノ方向ヲ異ニスルモノトス

特ニ $m=0$ ナルトキハ方程式ハ $y=0$ トナリテ直線ハ横軸ニ一致シ, $m=1$ ナルトキハ $y=x$ トナリテ角 XOY ノ二等分線ヲ表ハシ, $m=-1$ ナルトキハ $y=-x$ トナリテ角 YOX' ノ二等分線ヲ表ハス

(ii) 方程式 $y=x+k$ ノ圖示

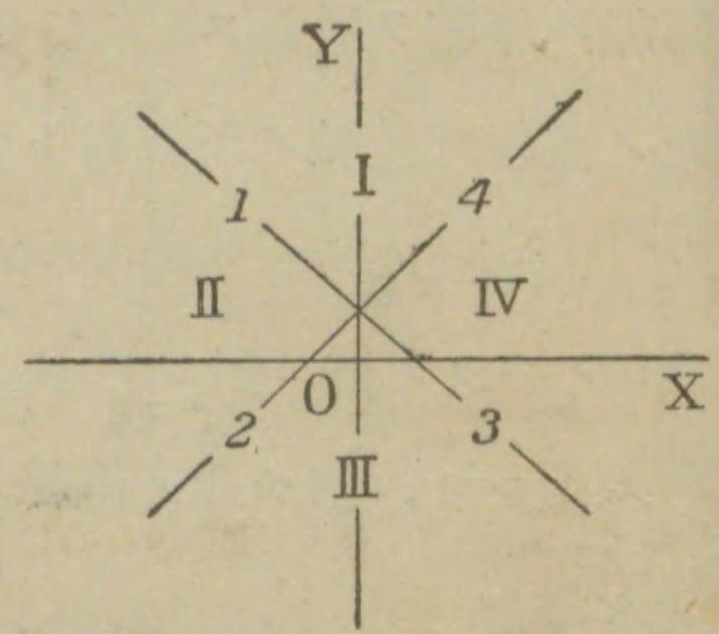
此ノ方程式ノ表ハス直線ガ横軸ノ正方向トナス角ハ $45°$ ニシテ, 此ノ方程式ニ於テ $x=0$ ト置クトキハ $y=k$ トナル, 卽チ直線ハ點 $(0, k)$ ヲ通過ス



故ニ方程式 $y=x+k$ ハ横軸ノ正方向ト $45°$ ノ角ヲナス直線ヲ表ハシ, k ノ値ニヨリテ其ノ位置ヲ異ニスルモノトス

(iii) 二ツノ方程式 $y=x+1$, $y=-x+1$ ノ表ハス直線ヲ境界トスル平面ノ部分

前題ニヨリ方程式 $y=x+1$ ハ横軸ノ正方向トナス角ガ $45°$ ニシテ點 $(0,1)$ ヲ通過スル直線ヲ表ハス



$y=-x+1$ ハ $y=x+1$ ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ト置キタルモノニ等シ, 卽チ方程式 $y=-x+1$ ノ表ハス直線ハ縱軸ニ關シテ方程式 $y=x+1$ ノ表ハス直線ト互ニ對稱ナリ

此ノ二ツノ直線ノ交點ノ座標ハ卽チ聯立方程式 $y=x+1$, $y=-x+1$ ノ根ニシテ其ノ値ハ $x=0$, $y=1$ ナリ

此ノ二ツノ直線ハ圖ノ如ク平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ, 之ヲ I, II, III, IV トスレバ各部分ニ於ケル點ノ座標 x, y ハ次ノ式ヲ滿足ス

I.　$y>x+1$,　$y>-x+1$

II.　$y>x+1$,　$y<-x+1$

III.　$y<x+1$,　$y<-x+1$

IV.　$y<x+1$,　$y>-x+1$

又點 $(0,1)$ ガ分ツ直線ノ部分ヲ 1, 2, 3, 4 トスレバ各部分ニ於ケル點ノ座標 x, y ハ次ノ式ヲ滿足ス

1.　$y>x+1$,　$y=-x+1$

2.　$y=x+1$,　$y<-x+1$

3.　$y<x+1$,　$y=-x+1$

4.　$y=x+1$,　$y>-x+1$

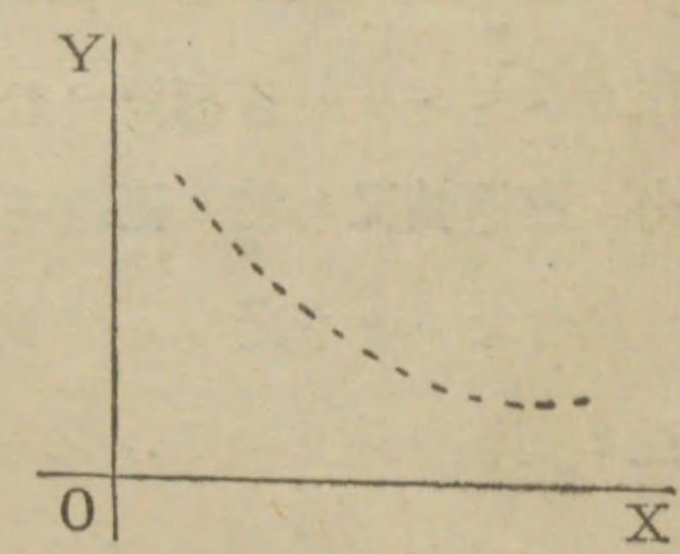
10. 高次方程式ノ圖示

第 8 節ニ於テ二元一次方程式 $ax+by+c=0$ ハ直線ヲ表ハスコトヲ說明セリ, 之ト同樣ニ x, y ニ關スル二次又ハ之レヨリモ高次ノ方程式ニ於テ x ニ一ツノ實値ヲ與フルトキ之ニ對應シテ y ノ實値ヲ得ル場合ニハ此ノ x, y ノ一對ノ値ヲ平面上ニ於ケル點ノ座標ト考フルコトヲ得

x ニ順次ニ異リタル値 $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ ヲ與フルトキハ一般ニ之ニ對應シテ y ノ値 $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$ ヲ得ベク, 從テ此ノ方程式ハ限リナク多クノ點ノ列ヲ決定スルコトトナル

此ノ如クシテ得タル點列ガ一定ノ形ノ曲線ヲ作ルトキ, 此ノ方程式ハ一ツノ曲線ヲ表ハストイフ

一ツノ方程式ノ表ハス曲線ハ上記ノ如ク順次ニ其ノ上ニアル無數ノ點ノ座標ヲ索ムルコトノ外ニ, 方程式ヨリ其ノ曲線ノ有スル性質ヲ知ルトキハ容易ニ之ヲ畫クコトヲ得



曲線ヲ畫クニ當リテ注意スベキ重ナル點次ノ如シ

(a) **座標軸トノ交點**

$x=0, y=0$ ガ方程式ヲ滿足スルトキハ曲線ハ原點ヲ通過ス

方程式ニ於テ $y=0$ ト置キテ x ノ實値 a ヲ得レバ $(a,0)$ ハ曲線ト橫軸トノ交點ナリ, 又 $x=0$ ト置キテ y ノ實値 b ヲ得レバ $(0,b)$ ハ曲線ト縱軸トノ交點ナリ

(*b*) **座標軸, 原點又ハ其他ノ直線, 點ニ關スル對稱**

x ノ代リニ $-x$ ト置キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナリ

y ノ代リニ $-y$ ト置キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ横軸ニ關シテ對稱ナリ

x ノ代リニ $-x$, 又 y ノ代リニ $-y$ ト置キテ方程式變ゼザルトキハ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ

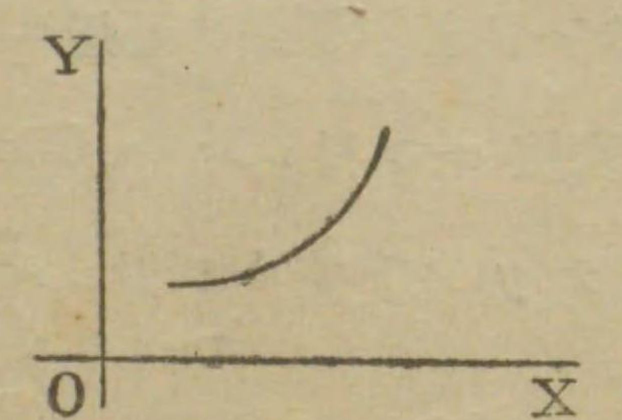
(*c*) **存在スル區域ノ制限**

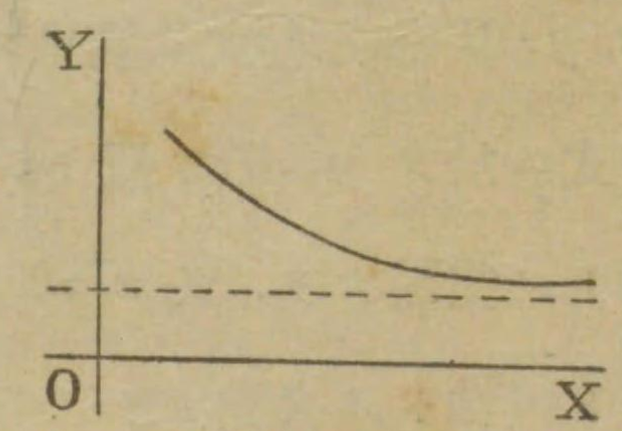
x ノ一ツノ實値ニ對シテ y ノ値實數ナルトキハ之ニ對應スル點ハ實在シ, y ノ値虚數ナルトキハ點ハ實在セズ, 例ヘバ $a\leqq x\leqq b$ ナルトキ y ハ實數ニシテ, $x<a$ 又ハ $x>b$ ナルトキ y ハ虚數トスレバ曲線ハ $x=a$ 及ビ $x=b$ ナル二ツノ直線ノ間ニノミ存在シ, $x=a$ ノ左方及ビ $x=b$ ノ右方ニハ存在スルコトナシ

(*d*) **座標軸又ハ他ノ直線ニ對スル形**

x ガ増大スルニ從ヒ y ノ絶對値モ亦増大スレバ曲線ハ右方ニ赴クニ從ヒ横軸ニ遠ザカリ, 之ニ反シテ x ノ増大スルニ從ヒ y ノ絶對値ガ減少スレバ曲線ハ右方ニ赴クニ從ヒ横軸ニ近ヅク

x ガ限リナク増大スルトキ y ガ一定ノ値ニ近ヅクナラバ曲線ハ終ニ横軸ニ平行ナル形ヲトル





11. 例題

(i) 方程式 $y=x^2$ ノ圖示

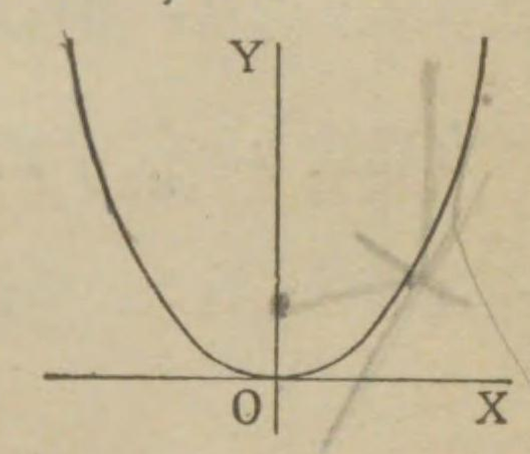
此ノ方程式ニ於テ $x=0$ ト置ケバ $y=0$ トナル, 即チ曲線ハ原點ヲ通過ス, 其ノ他ノ點ニ於テ座標軸ト交ハルコトナシ

x ノ代リニ $-x$ ト置キテ方程式變セズ, 故ニ曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナリ

x ノ正負ニ關セズ y ノ値ハ正ナルガ故ニ曲線ハ横軸ノ上方ニノミ存在ス

$x=0$ ノトキ $y=0$ ニシテ, x ノ絶對値ガ増大スルニ從ヒ y ノ値益増大ス, 故ニ曲線ハ原點ヨリ左右ニ距ルニ從ヒ益横軸ニ遠ザカル

此ノ方程式ニ於テ x ニ少シヅツ異リタル種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル y ノ値ヲ索メ, 此ノ x, y ヲ點ノ座標トシ, 上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ圖形ヲ得



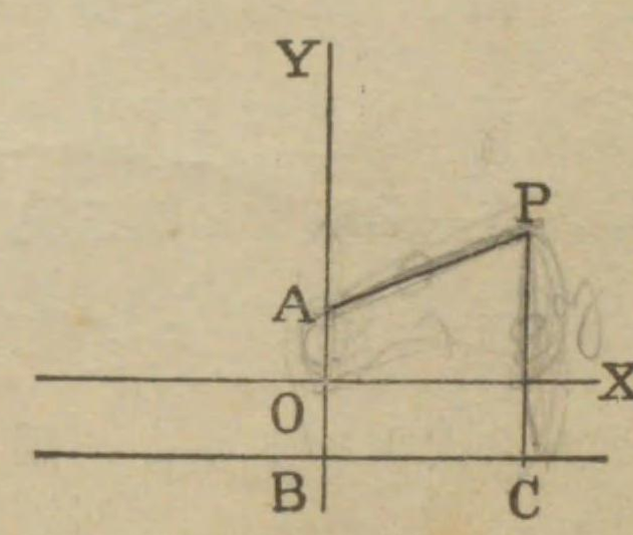
尚方程式 $y=x^2$ ハ之ヲ次ノ如ク書クコトヲ得

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2-\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=x^2$$

即チ $\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+x^2$

O ヲ原點, P(x, y) ヲ曲線上ノ一點トシ, 縱軸上ニ點 A ヲ取リ, $\mathrm{OA}=\frac{1}{4}$ ナラシムレバ第 6 節ニヨリ

$$\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+x^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$$



又横軸ニ平行ニ $\frac{1}{4}$ ノ距離ニ於テ A ノ反對ノ側ニ直線 BC ヲ引キ，P ヨリ之ニ垂線 PC ヲ下ストキハ

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\overline{PC}^2$$

依テ　　$\overline{AP}^2=\overline{PC}^2$

即チ　　$AP=PC$

故ニ此ノ曲線ハ定點 A 及ビ定直線 BC ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナリ，之ヲ**抛物線**トイヒ，O ヲ其ノ**頂點**，A ヲ其ノ**焦點**，BC ヲ其ノ**準線**トイフ

注意　定點 A ヲ中心トシ，任意ノ長サ a ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，定直線 BC ヨリ a ナル距離ニアル直線トノ交點ヲ P トスルトキハ P ハ即チ A ヲ焦點トシ，BC ヲ準線トスル抛物線上ノ一點ナリ，此ノ方法ニヨリ容易ニ抛物線ヲ畫クコトヲ得

(ii)　方程式 $y=\frac{1}{x}$ ノ圖示

此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ原點ヲ通過セズ又座標軸ト交ハルコトナシ

x ノ代リニ $-x$，又 y ノ代リニ $-y$ ト置キテ方程式變セズ，故ニ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ

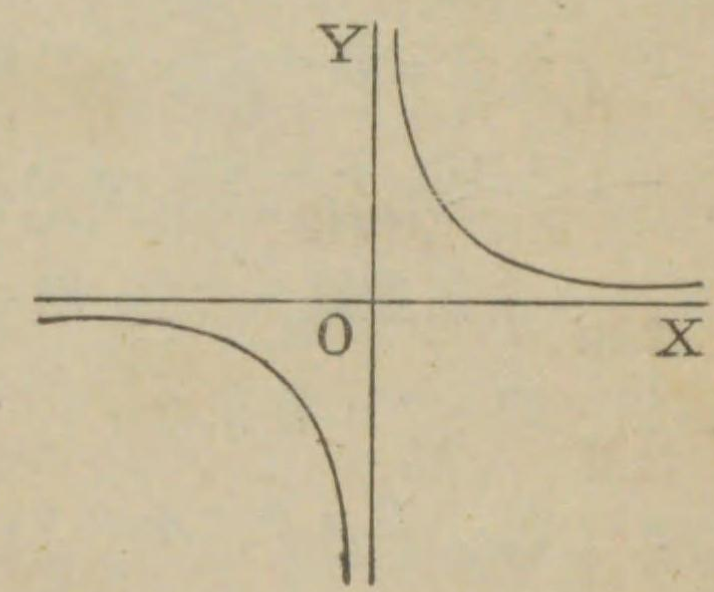
$x>0$ ナルトキハ $y>0$ ニシテ，$x<0$ ナルトキハ $y<0$ ナリ，故ニ曲線ハ第一象限及ビ第三象限ニアリ

$x>0$ ナルトキハ x ノ値増大スルニ從ヒ y ノ値ハ益減少シ，x ノ限リナク大ナルトキ y ハ限リナク小トナル，故ニ曲線ハ益横軸ニ近ヅキ，終ニ $y=0$ ト同一ノ形ヲトル

$y>0$ ナルトキハ y ノ値増大スルニ從ヒ x ノ値ハ益減少シ，y ノ限リナク大ナルトキ x ハ限リナク小トナル，故ニ曲線ハ益縦軸ニ近ヅキ，終ニ $x=0$ ト同一ノ形ヲトル

$x<0,\ y<0$ ノトキモ亦其ノ絶對値ヲ考フレバ同様ナル結果ヲ得

方程式 $y=\frac{1}{x}$ ヲ滿足スル x, y ノ種々ノ値ヲ索メ，上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ圖形ヲ得

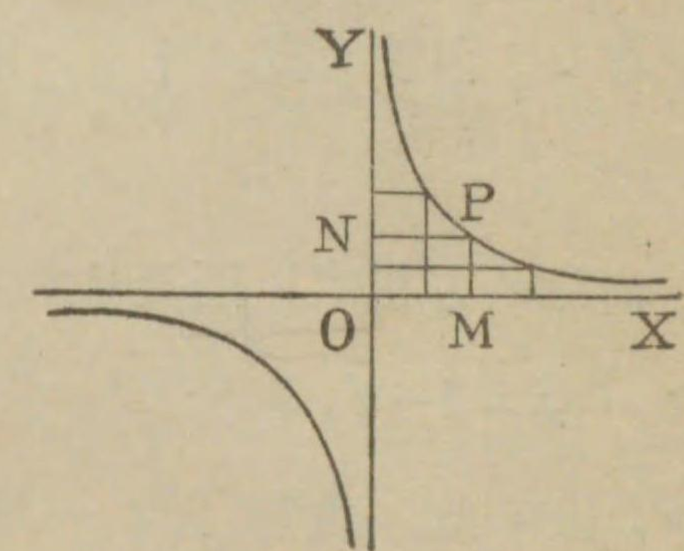


尙此ノ曲線上ノ一點 P (x, y) ヨリ横軸及ビ縦軸ニ夫々垂線 PM, PN ヲ引クトキハ

$$NP=OM=x,\quad MP=ON=y$$

然ルニ　　$xy=1$

依テ　　$\overline{OM}.\overline{ON}=1$



故ニ此ノ曲線ハ原點 O ヲ一ツノ頂點トシ，座標軸ノ上ニ二邊 OM, ON ヲ有シ，其ノ面積ガ 1 ニ等シキ矩形ノ頂點 P ノ軌跡ナリ，之ヲ**雙曲線**トイフ

注意　曲線上ノ一點ヨリ一ツノ定直線ニ至ル距離ガ其ノ點ノ位置原點ヲ遠ザカルニ從ヒ益減少シ，終ニ限リナク小トナリ得ル場合ニハ此ノ直線ヲ其ノ曲線ノ**漸近線**トイフ

$x=0$ 及ビ $y=0$ ハ $y=\frac{1}{x}$ ノ漸近線ナリ

(iii) 方程式 $y=\sqrt{1-x^2}$ ノ圖示

$x=0,\ y=1$ 及ビ $x=1,\ y=0$ ハ此ノ方程式ヲ滿足ス，故ニ曲線ハ點 $(0, 1)$ ニ於テ縱軸ニ交ハリ，點 $(1, 0)$ ニ於テ横軸ニ交ハル

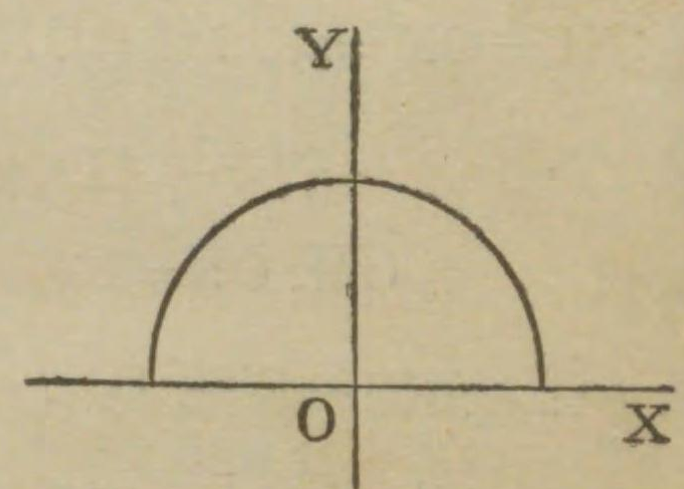
x ノ代リニ $-x$ ト置キテ方程式變セズ，故ニ曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナリ

x ノ正負ニ關セズ $y>0$，故ニ曲線ハ横軸ノ上方ニノミ存在ス

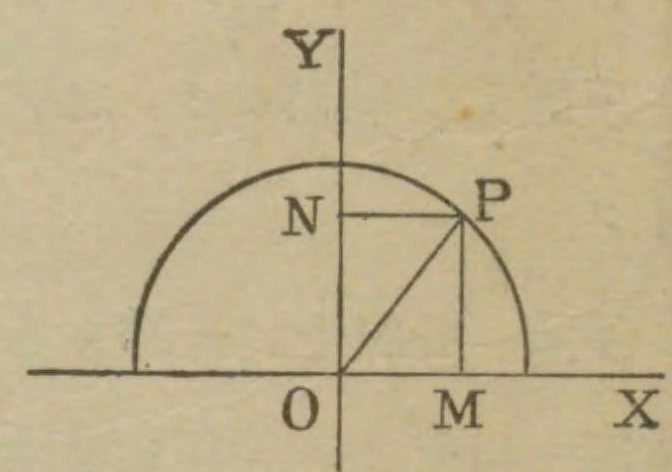
$-1\leqq x\leqq 1$ ナルトキ y ノ値實數ニシテ，$x>1$ 又ハ $x<-1$ ナルトキハ y ノ値虛數トナル，故ニ曲線ハ $x=1$ 及ビ $x=-1$ ナル二ツノ直線ノ間ニノミ存在ス

y ハ恒ニ 1 ヨリモ小ナリ，故ニ曲線ハ $y=1$ ナル直線ノ下ニアリ

方程式 $y=\sqrt{1-x^2}$ ヲ滿足スル x，y ノ種々ノ値ヲ索メ，上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫クトキハ右ノ圖形ヲ得



尙此ノ方程式ノ兩邊ヲ二乘スルトキハ $y^2=1-x^2$，卽チ $x^2+y^2=1$ トナル，依テ此ノ曲線上ノ一點 $P(x, y)$ ヨリ横軸及ビ縱軸ニ夫々垂線 PM PN ヲ引クトキハ



$$NP=OM=x,\quad MP=y$$

卽チ $$\overline{OM}^2+\overline{MP}^2=\overline{OP}^2=1$$

故ニ曲線ハ原點ヲ中心トシ，半徑ガ 1 ナル圓ニシテ，$y=\sqrt{1-x^2}$ ハ y ノ正ナル部分卽チ横軸ノ上方ニアル半圓ヲ表ハスモノトス

(iv) 方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ圖示

此ノ方程式ニ於テ $x=0$ ト置ケバ $y=\pm b$ トナリ又 $y=0$ ト置ケバ $x=\pm a$ トナル，故ニ曲線ハ點 $(a, 0)$ 及ビ點 $(-a, 0)$ ニ於テ横軸ニ交ハリ，點 $(0, b)$ 及ビ點 $(0, -b)$ ニ於テ縱軸ニ交ハル

x ノ代リニ $-x$ ト置クモ又 y ノ代リニ $-y$ ト置クモ方程式變セズ，故ニ曲線ハ横軸ニ關シテモ又縱軸ニ又原點ニ關シテモ對稱ナリ

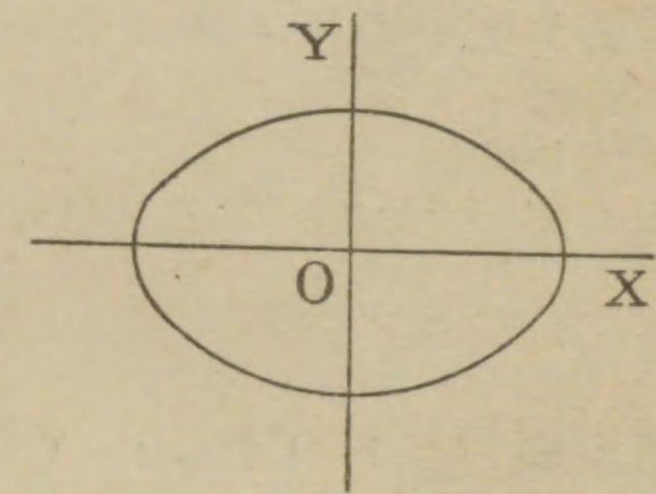
此ノ方程式ヲ y ニ關シテ解クトキハ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ トナリ，$-a\leqq x\leqq a$ ノトキノミ y ノ値實數トナル，故ニ曲線ハ $x=a$ 及ビ $x=-a$ ナル二ツノ直線ノ間ニノミ存在ス

同樣ニ曲線ハ $y=b$ 及ビ $y=-b$ ナル二ツノ直線ノ間ニノミ存在ス

$x=0$ ナルトキ y ノ絕對値ハ b ニシテ，x ノ絕對値ガ增大スルニ從ヒ y ノ絕對値減少ス，故ニ曲線ハ原點ヲ距ルニ從ヒ横軸ニ近ヅク

縱軸ニ關シテモ同樣ナリ

方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ $a>b$ トシ，之ヲ滿足スル x, y ノ種々ノ値ヲ索メ，上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ圖形ヲ得



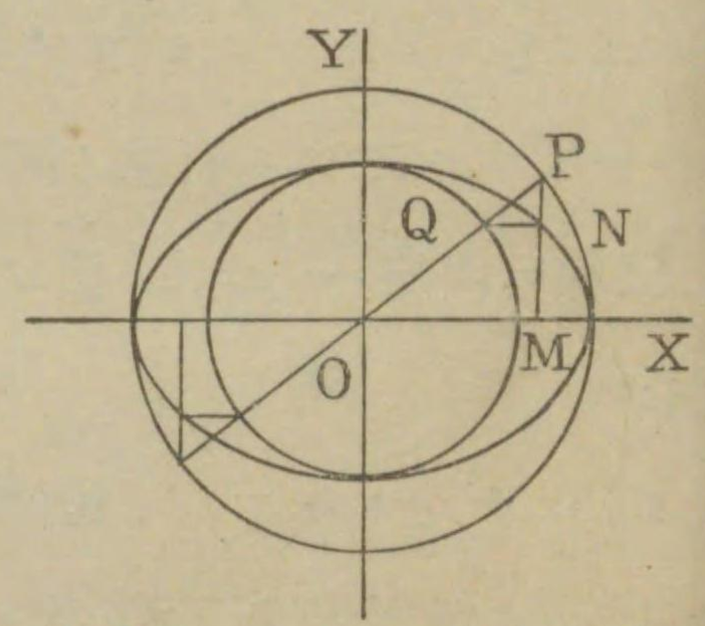
尙此ノ方程式ハ次ノ如ク書クコトヲ得

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2$$

此ニ $\frac{a}{b}y=y_1$ ト置クトキハ $x^2+y_1^2=a^2$ トナル，是レ卽チ原點ヲ中心トシ，半徑ガ a ナル圓ヲ表ハス方程式ナリ

逆ニ方程式 $x^2+y_1^2=a^2$ ニ於テ $y_1=\frac{a}{b}y$ 卽チ $y=\frac{b}{a}y_1$ ト置クトキハ元ノ方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ得

故ニ方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ表ハス曲線ハ原點ヲ中心トシ半徑ガ a ナル圓ヲ畫キ，其上ニ於ケル各點ノ縱座標ヲ一定ノ比ニ縮メテ得タル點ノ軌跡ナリト考フルコトヲ得，之ヲ**楕圓**トイヒ，曲線ト座標軸トノ交點 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ ヲ其ノ**頂點**トイフ



今 $a>b$ トシ，O ヲ中心トシテ半徑 a 及ビ b ヲ以テ二ツノ同心圓ヲ畫キ，O ヲ通過スル一ツノ直線ト此ノ二ツノ圓トノ交點ヲ夫々 P, Q トシ，P ヨリ横軸ニ垂線 PM ヲ引キ，Q ヨリ横軸ニ平行線ヲ引キ PM ト N ニ於テ交ハラシムルトキハ二ツノ三角形 POM, PQN ハ相似ナルガ故ニ

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$$

然ルニ $\mathrm{OP}=a,\quad \mathrm{OQ}=b,\quad \mathrm{OM}=x,\quad \mathrm{MP}=y_1$

依テ $$\mathrm{MN}=\frac{b}{a}y_1$$

故ニ N ハ P ニ對應スル楕圓上ノ一點ナリ

此ノ方法ニヨリ順次ニ O ヲ通過スル數多ノ直線ヲ引キテ之ニ對應スル點 N ヲ索メ楕圓ヲ畫クコトヲ得

(v) 方程式 $y=x+\frac{1}{x}$ ノ圖示

此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ原點ヲ通過セズ又座標軸ト交ハルコトナシ

x ノ代リニ $-x$, 又 y ノ代リニ $-y$ ト置キテ方程式變セズ，故ニ曲線ハ原點ニ關シテ對稱ナリ

$x>0$ ナルトキハ $y>0$ ニシテ又 $x<0$ ナルトキハ $y<0$ ナリ，故ニ曲線ハ第一象限及ビ第三象限ニアリ

方程式ヲ變ジテ次ノ如ク書クコトヲ得

$$(y-x)x=1$$

依テ $x>0$ ナラバ $y-x>0$ ニシテ，$x<0$ ナラバ $y-x<0$ ナリ，故ニ曲線ハ縱軸ノ右方ニ於テハ $y-x=0$ ナル直線ノ上方ニアリ，其ノ左方ニ於テハ $y-x=0$ ノ下方ニアリ

次ニ又此ノ方程式ヲ變ジテ次ノ如ク書クコトヲ得

$$y=\frac{(x-1)^2+2x}{x}$$

卽チ $$y=2+\frac{(x-1)^2}{x}$$

依テ $x=1$ ノトキ $y=2$ ニシテ，$x>1$ ニテモ $0<x<1$ ニテモ y ノ値ハ 2 ヨリモ大ナリ，故ニ曲線ハ點 $(1, 2)$ ニ於テ最モ横軸ニ近シ

又 $$y=\frac{(x+1)^2-2x}{x}$$

卽チ $$y=-2+\frac{(x+1)^2}{x}$$

ト書クトキハ $x=-1$ ノトキ $y=-2$ ニシテ，$0>x>-1$ ニテモ

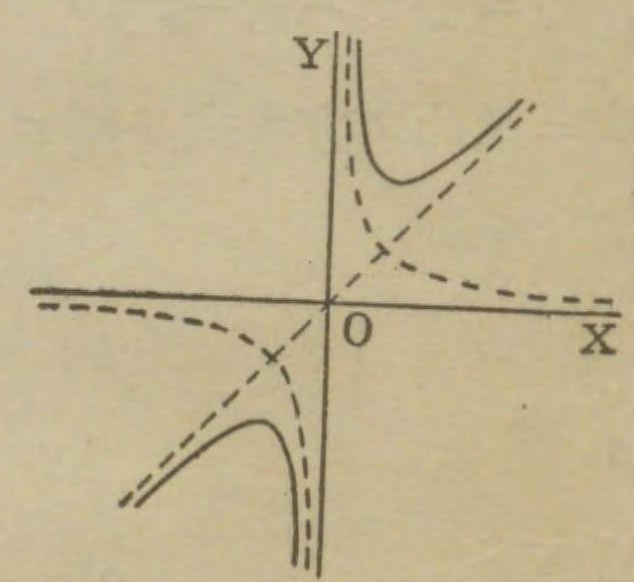
$x<-1$ ニテモ y ノ値ハ -2 ヨリモ小ナリ，故ニ曲線ハ點 $(-1,\ -2)$ ニ於テ最モ横軸ニ近シ

次ニ方程式 $y=x+\dfrac{1}{x}$ ニ於テ $x>0$ ニシテ極メテ小ナルトキハ y ノ値ハ限リナク大ニシテ，前記ノ如ク $x=1$ ノトキ $y=2$ トナリ，更ニ x ガ増大シテ終ニ限リナク大ナルトキハ $x+\dfrac{1}{x}$ ト x トノ差ハ限リナク小ナリ，故ニ曲線ハ益 $y=x$ ニ近ヅキ之ト同一ノ形ヲトル

$x<0$ ナルトキモ亦同様ナルコトハ對稱ノ性質ヨリ明ナリ

終リニ $y_1=x,\ y_2=\dfrac{1}{x}$ ト置クトキハ $y=y_1+y_2$ トナル，卽チ方程式 $y=x+\dfrac{1}{x}$ ノ表ハス曲線上ノ點ノ縱座標ハ $y_1=x$ ナル直線及ビ $y_2=\dfrac{1}{x}$ ナル雙曲線上ノ點ノ縱座標ノ和トシテ之ヲ索ムルコトヲ得

依テ同一ノ座標軸ヲ用ヒテ方程式 $y=x$ ノ表ハス直線及ビ方程式 $y=\dfrac{1}{x}$ ノ表ハス雙曲線ヲ畫キ，其ノ縱座標ノ和ヲ索メ，前記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ作ルトキハ右ノ圖形ヲ得



注意 (1) $y=x$ 及ビ $x=0$ ハ $y=x+\dfrac{1}{x}$ ノ漸近線ナリ，又點 $(1,\ 2)$ ニ於テ y ノ値**極小**ナリトイヒ，點 $(-1,\ -2)$ ニ於テ**極大**ナリトイフ

注意 (2) 以下方程式 $ax+by+c=0$ ノ表ハス直線等ト稱スル代リニ單ニ直線 $ax+by+c=0$ 等トイフコトアリ

12. 聯立方程式ノ圖示

$x,\ y$ ニ關スル方程式ハ一般ニ一ツノ直線又ハ曲線ヲ表ハシ，此ノ方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ハ卽チ其ノ線上ノ點ノ座標ナリ，故ニ二ツノ方程式ヲ同時ニ滿足スル x, y ノ實値アルトキ此ノ値ハ二ツノ方程式ノ表ハス線ノ雙方ノ上ニアル點卽チ二ツノ線ノ交點ノ座標ナリ

依テ聯立方程式ヲ解クニ當リ其ノ各ノ表ハス線ヲ畫キ，其ノ交點ヲ索ムルコトニヨリテ其ノ方程式ノ實根ノ所在ヲ確メ，從テ方程式ノ性質ヲ明ニスルコトヲ得ベク，又必ズシモ聯立方程式ニ限ラズ單ニ一個ノ一元方程式ガ與ヘラルルトキ，之ヲ聯立二元方程式ヨリ一ツノ未知數ヲ消去シタル結果ナリト考ヘ，二ツノ線ノ交點ヲ索ムルコトニヨリテ方程式ノ根ヲ知ルコトヲ得ベシ，尙曲線ノ研究ニ於テ其ノ方程式ト他ノ直線又ハ曲線ヲ表ハス方程式トヲ聯立方程式トシテ根ヲ索ムルコトニヨリテ曲線ノ性質ヲ明ニスルコトヲ得ベシ

13. 例題

(i) 聯立方程式 $y=m_1x+k_1,\ y=m_2x+k_2$

第 8 節ニヨリ此ノ二ツノ方程式ノ根ハ次ノ如シ

$$x=-\frac{k_1-k_2}{m_1-m_2},\qquad y=\frac{m_1k_2-m_2k_1}{m_1-m_2}$$

$m_1\gtrless m_2$ ナルトキハ x, y ノ値ハ必ズ存在ス卽チ二ツノ直線ハ一點ニ於テ相交ハル

$m_1=m_2$ ニシテ $k_1\gtrless k_2$ ナルトキハ $m_1k_2\gtrless m_2k_1$ トナリ，x, y ノ値ハ無限ニ大ナリ，此ノ場合ニハ二ツノ方程式ハ

$$y=m_1x+k_1,\quad y=m_1x+k_2,\quad k_1\gtrless k_2$$

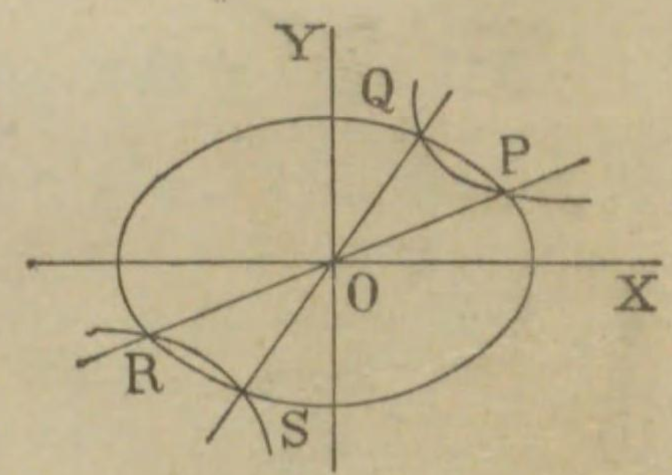
從テ二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ，故ニ共通點ヲ有セズ

$m_1=m_2$ ニシテ且 $k_1=k_2$ ナルトキハ $m_1k_2=m_2k_1$ トナリ，x, y ノ値ハ不定ナリ，此ノ場合ニハ二ツノ方程式ハ全ク同一トナリ，從テ二ツノ直線ハ相一致ス，故ニ其ノ上ニ於ケル點ハ何レモ雙方ニ共通ナリ

(ii) 聯立方程式 $3x^2+4y^2=8,\ xy=1$

方程式 $3x^2+4y^2=8$ ノ表ハス曲線ハ楕圓ニシテ横軸及ビ縱軸ノ何レニ關シテモ對稱ナリ，又方程式 $xy=1$ ノ表ハス曲線ハ雙曲線ニシテ原點ニ關シテ對稱ナリ，故ニ此ノ二ツノ曲線ガ交點ヲ有スルナラバ必ズ原點ニ關シテ對稱ノ位置ニアリ

$y=mx$ ト置クトキハ二ツノ方程式ヨリ



$$x^2=\frac{8}{3+4m^2},\qquad x^2=\frac{1}{m}$$

從テ　$4m^2-8m+3=0$

卽チ　$(2m-1)(2m-3)=0$

故ニ　$m=\frac{1}{2}$　又ハ　$m=\frac{3}{2}$

$m=\frac{1}{2}$ トスレバ，$x^2=\frac{1}{m}$，$xy=1$ ヨリ $x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ得

$m=\frac{3}{2}$ トスレバ $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ヲ得

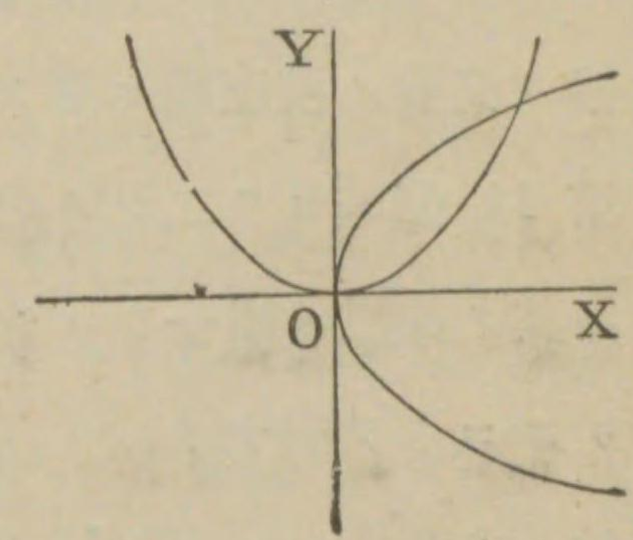
依テ方程式ノ根ニ對應スル二ツノ曲線ノ交點ハ $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$Q\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$，$R\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$S\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ ニシテ

P ト R, Q ト S トハ夫々直線 $y=\frac{1}{2}x$ 及ビ $y=\frac{3}{2}x$ ノ上ニアリ

(iii) 聯立方程式 $y^2=x,\ x^2=y$

此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ何レモ拋物線ニシテ一ツハ横軸ニ關シテ對稱ニシテ縱軸ノ右方ニアリ，一ツハ縱軸ニ關シテ對稱ニシテ横軸ノ上方ニアリ，從テ其ノ交點ハ原點ノ外ニ第一象限ニアルベシ

二ツノ方程式ヨリ y ヲ消去スレバ



$$x^4-x=0$$

卽チ　$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

故ニ　$x=0,\ x=1,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

從テ $y=x^2$ ヨリ

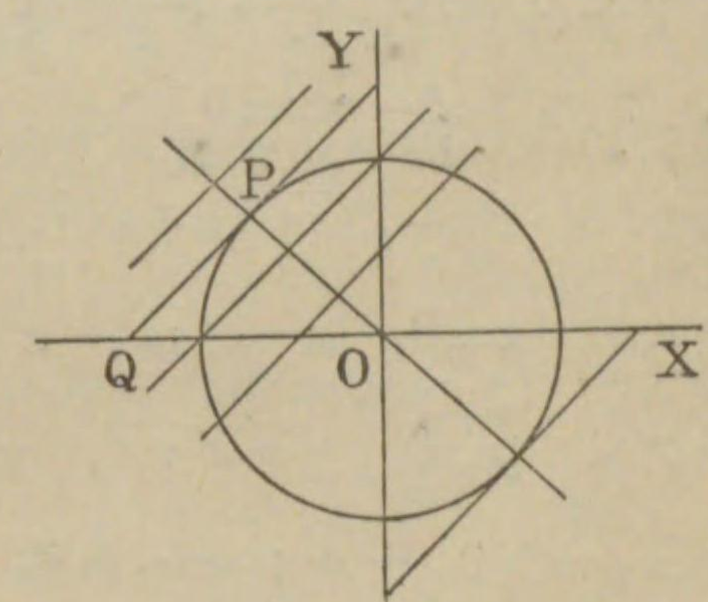
$$y=0,\ y=1,\ y=\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}$$

故ニ方程式ノ實根ニ對應スル曲線上ノ點ハ (0, 0), (1, 1) ナリ

(iv) 聯立方程式 $x^2+y^2=1,\ y=x+k$

最初ノ方程式ハ圓ヲ表ハシ，次ノ方程式ハ直線ヲ表ハス

二ツノ方程式ヨリ y ヲ消去スレバ



$$2x^2+2kx+k^2-1=0$$

故ニ　$x=\frac{-k\pm\sqrt{2-k^2}}{2}$

從テ　$y=\frac{k\pm\sqrt{2-k^2}}{2}$

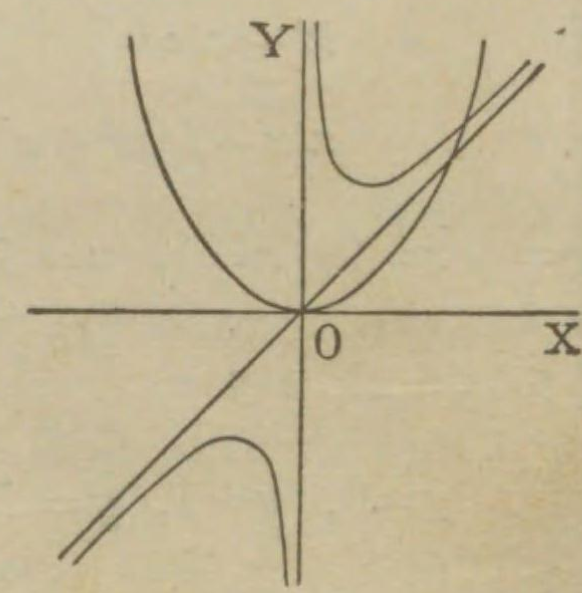
$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ナルトキハ圓ト直線トハ二點ニ於テ交ハル，卽チ直線ハ圓ノ割線ナリ，$k>\sqrt{2}$ 又ハ $k<-\sqrt{2}$ ナルトキハ圓ト直線トハ相交ハラズ，$k=\sqrt{2}$ ナルトキハ直線ト圓トノ交點ヲ P，横軸トノ交點ヲ Q トスレバ角 OPQ ハ直角ニシテ直線ハ圓ノ切線トナル，$k=-\sqrt{2}$ ノトキモ亦同樣ナリ

(v) 方程式 $x^3=x^2+1$ ノ實根ノ所在

$x^2=y$ ト置クトキハ方程式 $x^3=x^2+1$ ハ二ツノ聯立方程式

$$y=x^2,\qquad xy=x^2+1$$

ヨリ y ヲ消去シタル結果ナリト考フルコトヲ得ベク，從テ元ノ方程式ノ實根ハ此ノ二ツノ方程式ノ表ハス曲線ノ交點ノ橫座標ニ等シ



第 11 節ニヨリ二ツノ曲線ヲ畫クトキハ其ノ交點ハ唯一ツニシテ第一象限ニアルコトヲ明ナリ

故ニ方程式 $x^3=x^2+1$ ノ實根ハ唯一ツニシテ其ノ値ハ正ナリ

(vi) 曲線 $y=x^3$ ノ圖示

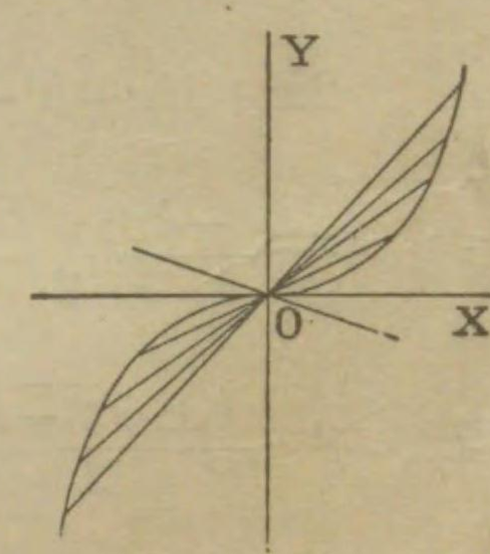
聯立方程式 $y=x^3,\ y=mx$ ヨリ y ヲ消去スルトキハ

$$x^3-mx=0$$

即チ $x(x-\sqrt{m})(x+\sqrt{m})=0$

故ニ $x=0,\ \ x=\sqrt{m},\ \ x=-\sqrt{m}$

從テ $y=0,\ \ y=\sqrt{m^3},\ \ y=-\sqrt{m^3}$



故ニ $m>0$ ナルトキハ直線 $y=mx$ ト曲線 $y=x^3$ トハ原點及ビ之ト對稱ナル二點ニ於テ交ハリ，$m=0$ ナルトキハ原點ノミニ於テ交ハリ，$m<0$ ナルトキハ相交ハラズ，依テ m ニ順次ニ異リタル正値ヲ與ヘテ直線ヲ引キ,其ノ上ニ點 $(\sqrt{m},\ \sqrt{m^3})$ 及ビ $(-\sqrt{m},-\sqrt{m^3})$ ヲ取ルコトニヨリ曲線 $y=x^3$ ヲ畫クコトヲ得

14. 軌跡ヲ表ハス方程式

解析幾何學ハ座標ヲ用ヒテ圖形間ノ關係ヲ表ハス方程式ヲ作リ，之ニ解析學ノ法則ヲ適用シテ推理ヲ行ヒ，其ノ結論ヲ圖形間ノ關係トシテ表ハスヲ以テ重ナル目的トシ，之ニヨリテ一面ニハ圖形ノ性質ヲ簡明ニ探究シ得ルト同時ニ一面ニハ解析學ノ進步發達ニ資スルコト極メテ大ナルモノトス

本章第 8 節乃至第 11 節ニ於テ x, y ニ關スル方程式ハ x, y ヲ一定ノ座標軸ニ關スル點ノ座標ト考フルトキ，一般ニ直線又ハ曲線ヲ表ハスコトヲ示シ，尙其ノ特別ナル場合例ヘバ方程式 $y=x^2$ ハ一ツノ定點及ビ一ツノ定直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハスコト，又方程式 $x^2+y^2=r^2$ ハ一ツノ定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハスコト等ヲ示セリ

以下更ニ進ミテ一定ノ條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索ムル方法ヲ例ニヨリテ說明シ且其ノ方程式ノ表ハス曲線ノ形狀性質等ヲ研究セントス

軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索ムルニ當リテ注意スベキ重ナル點次ノ如シ

(*a*) **座標軸ヲ適當ナル位置ニ選定スルコト**

(*b*) **所要ノ條件ニ適スル點ヲ選ビ其ノ座標ヲ定ムルコト**

(*c*) **座標間ニ存在スル關係ヲ方程式トシテ表ハスコト**

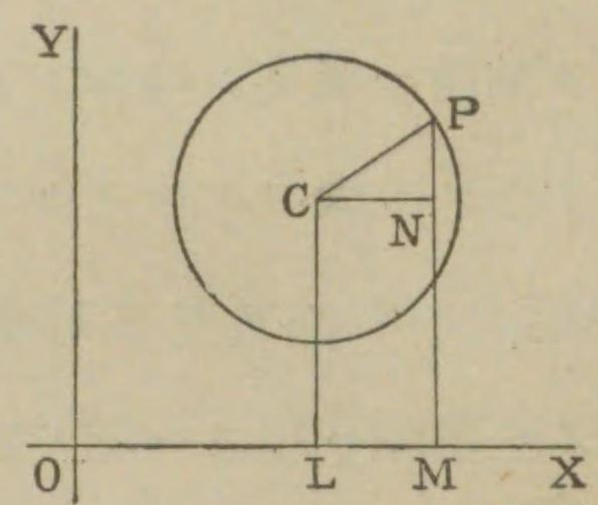
(*d*) **得タル方程式ヲ成ルベク簡單ナル形ニ直スコト**

(*e*) **最後ニ得タル式ガ條件ニ適スルヤ否ヲ驗スコト**

15. 例題

(i) 定點ヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

一定ノ直交軸ニ關シテ定點 C $(a,\ b)$ ヨリ一定ノ距離 r ニアル一點ヲ $P(x, y)$ トシ C 及ビ P ヨリ横軸ニ夫々垂線 CL, PM ヲ引キ, C ヨリ PM ニ垂線 CN ヲ引クトキハ



$$\overline{CP}^2=\overline{CN}^2+\overline{NP}^2$$
$$=(OM-OL)^2+(MP-MN)^2$$
$$=(OM-OL)^2+(MP-LC)^2$$

然ルニ　$CP=r,\quad OM=x,\quad MP=y,\quad OL=a,\quad LC=b$

故ニ
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

定點 C ヨリ r ナル距離ニアル點ノ座標 x, y ハ何レモ (1) ヲ滿足シ, 座標 x, y ガ (1) ヲ滿足スル點ハ何レモ C ヨリ r ナル距離ニアルコト明ナリ, 故ニ (1) ハ索ムル方程式ニシテ, 中心ガ $C(a, b)$ ニシテ半徑ガ r ナル圓ヲ表ハス

(1) ニ於テ, $a=0$ ト置クトキハ　$x^2+(y-b)^2=r^2$　(2)

$b=0$ ト置クトキハ　$(x-a)^2+y^2=r^2$　(3)

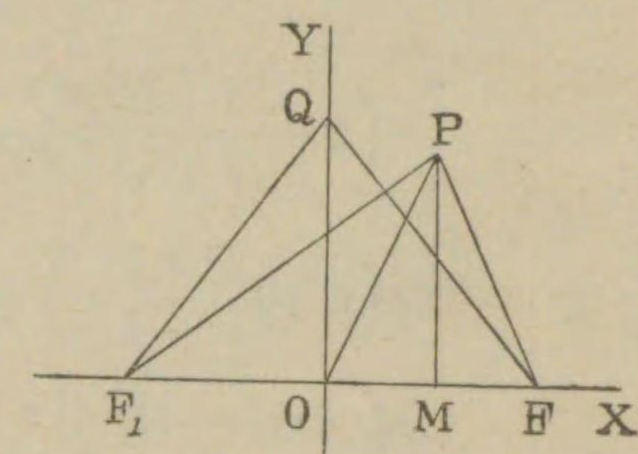
$a=0,\ b=0$ ト置クトキハ　$x^2+y^2=r^2$　(4)

(2) ハ縱軸上ニ中心ヲ有スル圓, (3) ハ横軸上ニ中心ヲ有スル圓, (4) ハ原點ヲ中心トスル圓ヲ表ハス

注意 座標軸ニ關係ナク唯一ツノ圓ノ性質ヲ研究スル場合等ニハ方程式トシテ (4) ヲ用フルヲ便トスレドモ, 他ノ圖形ニ對スル關係等ヲ考フル場合ニハ (1), (2) 又ハ (3) ヲ用フルヲ要スルコトアリ

(ii) 二定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

最初ニ比ノ値ガ 1 ニ等シキトキ卽チ二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ考フルコトトシ, 二定點 F, F_1 ヲ通過スル直線ヲ横軸トシ, FF_1 ノ中點ヲ原點トスルトキハ原點 O ハ明カニ F 及ビ F_1 ヨリ等距離ニアリ, 卽チ軌跡上ノ一點ナリ



今 $P(x, y)$ ヲ軌跡上ノ任意ノ一點トシ, PF, PF_1, PO, 及ビ P ヨリ横軸ニ垂線 PM ヲ引クトキハ

$$\overline{FP}^2=\overline{MF}^2+\overline{MP}^2=(OF-OM)^2+\overline{MP}^2$$
$$\overline{F_1P}^2=\overline{F_1M}^2+\overline{MP}^2=(F_1O+OM)^2+\overline{MP}^2$$

然ルニ
$$OM=x,\quad MP=y$$

又 $OF=F_1O=c$ ト置クトキハ

$$\overline{FP}^2=(c-x)^2+y^2,\quad \overline{F_1P}^2=(c+x)^2+y^2$$

然ルニ
$$FP=F_1P$$

故ニ
$$(c-x)^2+y^2=(c+x)^2+y^2$$

卽チ
$$x=0 \qquad (1)$$

又 $x=0$ ノ上ニ任意ノ一點 $Q(x, y)$ ヲ取ルトキハ

$$\overline{FQ}^2=\overline{OF}^2+\overline{OQ}^2=c^2+y^2$$
$$\overline{F_1Q}^2=\overline{F_1O}^2+\overline{OQ}^2=c^2+y^2$$

故ニ
$$FQ=F_1Q$$

依テ $x=0$ ハ二點 F, F_1 ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ニシテ, 線分 FF_1 ヲ垂直ニ二等分スル直線ヲ表ハス

次ニ比ノ値ガ 1 ニ等シカラズトシ, $\frac{FP}{F_1P}=k$ ト置クトキハ前同様ニシテ

$$(c-x)^2+y^2=k^2\{(c+x)^2+y^2\}$$

即チ
$$x^2+y^2-2\frac{1+k^2}{1-k^2}cx+c^2=0$$

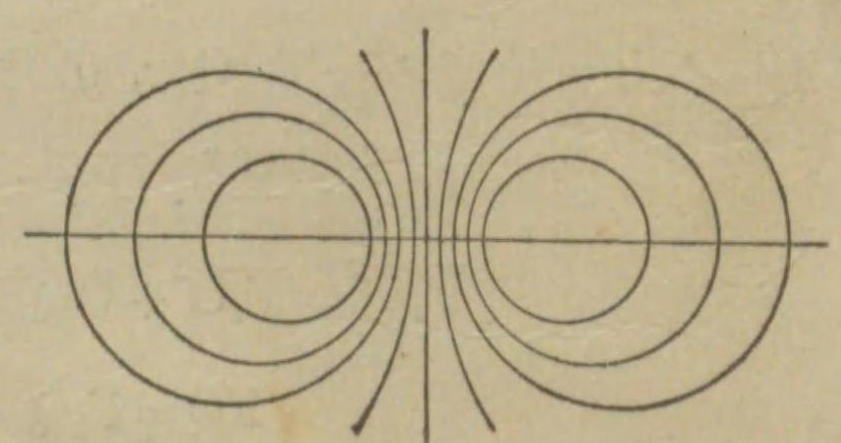
従テ
$$\left(x-\frac{1+k^2}{1-k^2}c\right)^2+y^2=\left\{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2-1\right\}c^2$$

又ハ
$$\left(x+\frac{k^2+1}{k^2-1}c\right)^2+y^2=\left\{\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-1\right\}c^2$$

即チ
$$\left(x-\frac{1+k^2}{1-k^2}c\right)^2+y^2=\left(\frac{2kc}{1-k^2}\right)^2 \qquad (2)$$

又ハ
$$\left(x+\frac{k^2+1}{k^2-1}c\right)^2+y^2=\left(\frac{2kc}{k^2-1}\right)^2 \qquad (3)$$

F, F_1 ヨリノ距離ノ比ガ k ニ等シキ點ノ座標ハ此ノ方程式ヲ滿足シ,座標ガ此ノ方程式ヲ滿足スル點ハ F, F_1 ヨリノ距離ノ比ガ k ニ等シキコト明ナリ,故ニ (2) 及ビ (3) ハ索ムル方程式ニシテ前例題ト比較スルトキハ中心ガ横軸ノ上ニアル圓ヲ表ハシ, $k<1$ ナルトキハ中心ハ縦軸ノ右方 $\frac{1+k^2}{1-k^2}c$ ノ距離ニアリテ半徑ハ $\frac{2kc}{1-k^2}$ ニ等シク, $k>1$ ナルトキハ中心ハ縦軸ノ左方 $\frac{k^2+1}{k^2-1}c$ ノ距離ニアリテ半徑ハ $\frac{2kc}{k^2-1}$ ニ等シ



(2) 又ハ (3) ニ於テ $y=0$ ト置クトキハ

$x=\frac{1+k}{1-k}c$ 又ハ $x=\frac{1-k}{1+k}c$

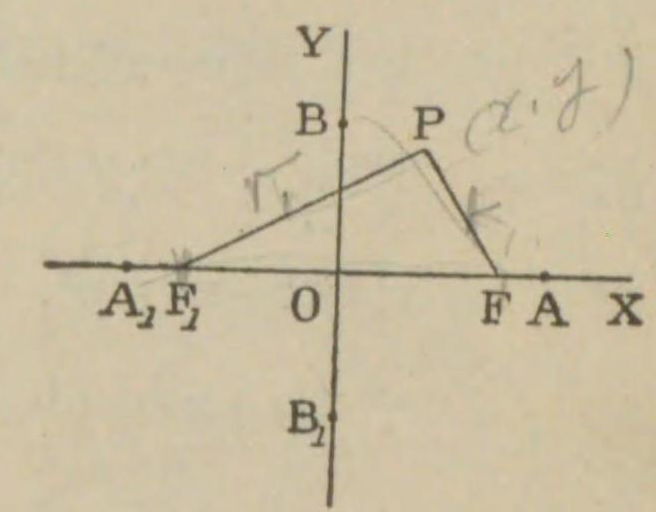
ヲ得, 是レ即チ圓ト横軸トノ交點ノ横座標ナリ

(2) 及ビ (3) ニ於テ k ニ種々ノ値ヲ與フレバ圖ノ如キ圓ノ群ヲ得

(iii) 二定點ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

二定點 $F(c, 0)$, $F_1(-c, 0)$ ヨリ一點 $P(x, y)$ ニ至ル距離ヲ夫々 r, r_1 トシ, $r+r_1$ ガ一定ノ長サ $2a$ ニ等シトスレバ

$$r+r_1=2a \qquad (1)$$



$c>a$ 即チ $FF_1>2a$ ナルトキハ (1) ヲ滿足スベキ點ハ存在セズ

$c=a$ 即チ $FF_1=2a$ ナルトキハ線分 FF_1 ハ即チ索ムル軌跡ニシテ其ノ方程式ハ $y=0$, $-c<x<c$

$c<a$ 即チ $FF_1<2a$ ナルトキ横軸上ニ a ニ等シク OA ヲ取レバ

$$FA=OA-OF,\quad F_1A=F_1O+OA.$$

然ルニ
$$OA=a,\quad OF=F_1O=c$$

故ニ
$$FA+F_1A=2a$$

依テ A ハ軌跡上ノ一點ナリ

同様ニ横軸上ニ a ニ等シク OA_1 ヲ取レバ A_1 モ亦軌跡上ノ一點ナリ

次ニ F ヲ中心トシ a ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,縦軸ト B 及ビ B_1 ニ於テ交ハラシムルトキハ

$$FB=a,\quad F_1B=a$$

故ニ
$$FB+F_1B=2a$$

同様ニ
$$FB_1+F_1B_1=2a$$

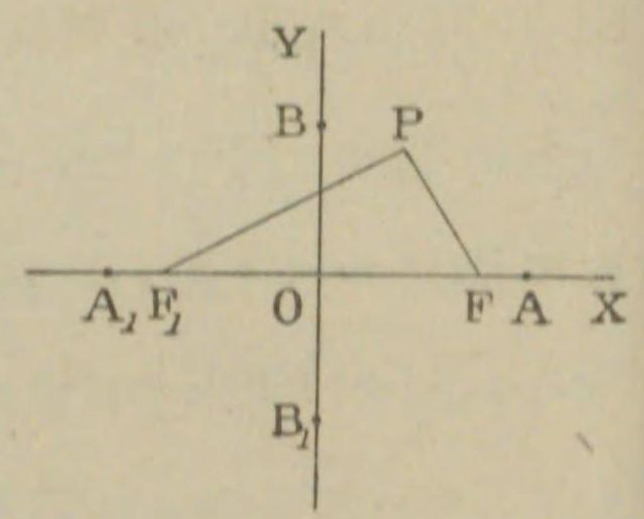
故ニ B 及ビ B_1 モ亦軌跡上ノ點ナリ

依テ索ムル軌跡ハ四點 A, A_1, B, B_1 ヲ通過スルコト明ナリ

更ニ F ヲ中心トシ $2a$ ヨリモ小ナル任意ノ長サ b ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ，次ニ F_1 ヲ中心トシ $2a-b$ ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ，其ノ交點ヲ $P(x, y)$ トスレバ P ハ軌跡上ノ一點ニシテ

$$\overline{FP}^2=(c-x)^2+y^2$$

$$\overline{F_1P}^2=(c+x)^2+y^2$$



然ルニ　$FP=r,\quad F_1P=r_1$

故ニ　$r^2=(c-x)^2+y^2$　　(2)

$r_1^2=(c+x)^2+y^2$

從テ　$$r_1^2-r^2=(c+x)^2-(c-x)^2=4cx$$

即チ　$$(r_1-r)(r_1+r)=4cx \qquad (3)$$

然ルニ　$$r_1+r=2a$$

故ニ　$$r_1-r=\frac{2c}{a}x \qquad (4)$$

從テ　$$r=a-\frac{c}{a}x, \qquad r_1=a+\frac{c}{a}x$$

此ノ r ノ値ヲ (2) ニ代入シテ

$$\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2=(c-x)^2+y^2$$

即チ　$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$$

從テ　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (5)$$

$a>c$ ナルガ故ニ $\sqrt{a^2-c^2}=b$ ト置クトキハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (6)$$

此ニ　$$\sqrt{a^2-b^2}=c$$

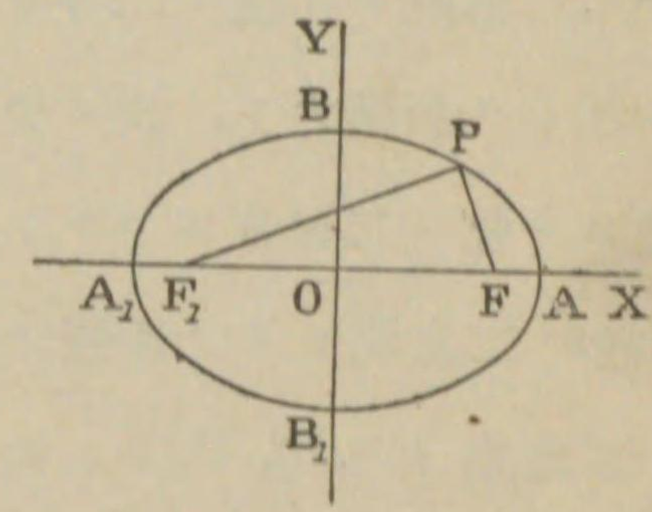
方程式 (6) ハ第 11 節 (iv) ニヨリ楕圓ヲ表ハシ，a ハ中心 O ヨリ頂點 A 及ビ A_1 ニ至ル距離，b ハ O ヨリ頂點 B 及ビ B_1 ニ至ル距離，又 $\sqrt{a^2-b^2}$ ハ O ヨリ F 及ビ F_1 ニ至ル距離ニシテ，AA_1 及ビ BB_1 ヲ夫々楕圓ノ**長軸**及ビ**短軸**トイヒ，F 及ビ F_1 ヲ其ノ**焦點**トイフ

次ニ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \sqrt{a^2-b^2}=c$ ノ上ニ任意ノ一點 $P(x, y)$ ヲ取ルトキハ

$$\overline{FP}^2=(c-x)^2+y^2$$

$$=(c-x)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$



故ニ　$$\overline{FP}^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2$$

同樣ニ　$$\overline{F_1P}^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2$$

依テ　$$FP=\pm\left(a-\frac{c}{a}x\right), \qquad F_1P=\pm\left(a+\frac{c}{a}x\right)$$

此ノ二ツノ式ヨリ次ノ結果ヲ得

$$FP+F_1P=2a \qquad (1)$$

$$F_1P-FP=2a \qquad (2)$$

$$FP-F_1P=2a \qquad (3)$$

$$-FP-F_1P=2a \qquad (4)$$

$F_1P-FP\leqq FF_1<2a,\quad FP-F_1P\leqq FF_1<2a,\quad FP+F_1P>0$

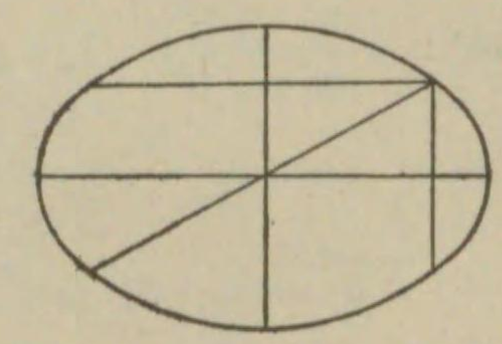
故ニ (2), (3), (4) ハ成立セズ

依テ　$$FP+F_1P=2a$$

故ニ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \sqrt{a^2-b^2}=c$ ハ索ムル軌跡ノ方程式ナリ

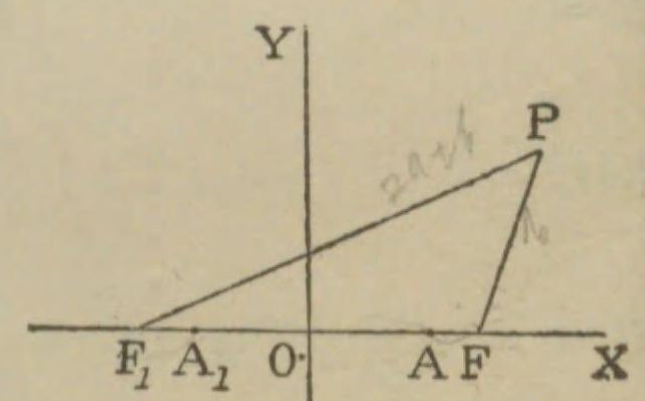
注意 (1)　楕圓ハ其ノ焦點ノ距離ト一ツノ軸ノ長サヲ知ルトキハ之ヲ畫クコトヲ得

注意 (2)　方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ハ x, y ノ偶數冪ノミヲ含ムガ故ニ楕圓ハ横軸ニ關シテモ又縦軸ニ關シテモ對稱ナリ，故ニ横軸及ビ縦軸ハ夫々之ニ垂直ナル弦ヲ二等分ス，又原點ニ關シテ對稱ナリ，故ニ原點ハ之ヲ通過スル弦ヲ二等分ス



(iv)　二定點ヨリノ距離ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

二定點 $F(c, 0)$, $F_1(-c, 0)$ ヨリ一點 $P(x, y)$ ニ至ル距離ヲ夫々 r, r_1 トシ，r_1-r 又ハ $r-r_1$ ガ一定ノ長サ $2a$ ニ等シトスレバ



$$r_1-r=\pm 2a \qquad (1)$$

$c<a$ 卽チ $FF_1<2a$ ナルトキハ(1)ヲ滿足スベキ點ハ存在セズ

$c=a$ 卽チ $FF_1=2a$ ナルトキハ線分 FF_1 ノ延長部分ハ卽チ索ムル軌跡ニシテ，其ノ方程式ハ $y=0$, $x>c$ 又ハ $x<-c$

$c>a$ 卽チ $FF_1>2a$ ナルトキ横軸上ニ a ニ等シク OA ヲ取レバ

$$FA=OF-OA, \qquad F_1A=F_1O+OA$$

然ルニ　$OA=a, \qquad OF=F_1O=c$

故ニ　$F_1A-FA=2a$

依テ A ハ軌跡上ノ一點ナリ

同様ニ横軸上ニ a ニ等シク OA_1 ヲ取レバ A_1 モ亦軌跡上ノ一點ナリ

次ニ F ヲ中心トシ任意ノ長サ b ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ，又 F_1 ヲ中心トシ $2a+b$ ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ，其ノ交點ヲ $P(x, y)$ トスレバ P ハ軌跡上ノ一點ニシテ

$$\overline{FP}^2=(x-c)^2+y^2, \qquad \overline{F_1P}^2=(x+c)^2+y^2$$

然ルニ　$FP=r, \qquad F_1P=r_1$

故ニ　$r^2=(x-c)^2+y^2 \qquad (2)$

$$r_1^2=(x+c)^2+y^2$$

從テ　$r_1^2-r^2=(x+c)^2-(x-c)^2=4cx$

卽チ　$(r_1-r)(r_1+r)=4cx \qquad (3)$

然ルニ　$r_1-r=\pm 2a$

故ニ　$r_1+r=\pm\frac{2c}{a}x \qquad (4)$

從テ　$r=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right), \quad r_1=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right)$

此ノ r ノ値ヲ(2)ニ代入シテ

$$\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2=(x-c)^2+y^2$$

卽チ　$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2$

從テ　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \qquad (5)$

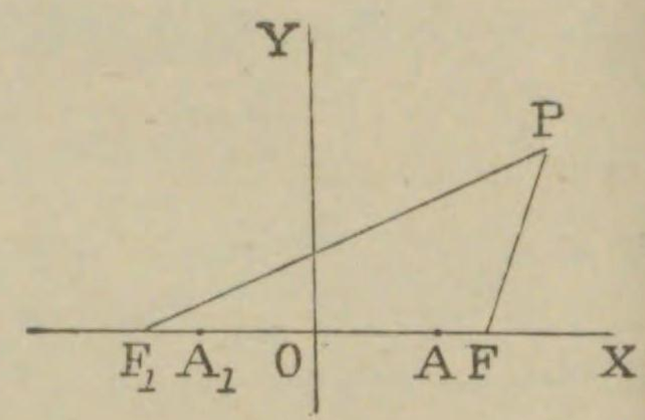
$c>a$ ナルガ故ニ $\sqrt{c^2-a^2}=b$ ト置クトキハ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

此ニ　$\sqrt{a^2+b^2}=c.$

次ニ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\sqrt{a^2+b^2}=c$ ノ上ニ任意ノ一點 $P(x, y)$ ヲ取レバ

$$\begin{aligned}\overline{FP}^2&=(x-c)^2+y^2\\&=(x-c)^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)\\&=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2\end{aligned}$$



故ニ $\overline{FP}^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2$

同様ニ $\overline{F_1P}^2=\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2$

依テ $FP=\pm\left(\frac{c}{a}x-a\right)$, $F_1P=\pm\left(\frac{c}{a}x+a\right)$

此ノ二ツノ式ヨリ前例題ト同様ニシテ次ノ結果ヲ得

$$F_1P-FP=\pm 2a$$

故ニ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\sqrt{a^2+b^2}=c$ ハ索ムル軌跡ノ方程式ナリ

方程式 (6) ノ表ハス曲線ノ形ヲ定メンガ爲メニ先ヅ $y=0$ ト置ケバ $x=\pm a$ トナリ, $x=0$ ト置ケバ $y^2=-b^2$ トナル, 故ニ曲線ハ點 $(a,0)$ 及ビ點 $(-a,0)$ ニ於テ横軸ト交ハリ,縦軸トハ相交ハルコトナシ

此ノ方程式ハ x 及ビ y ノ偶數冪ノミヲ含ムガ故ニ曲線ハ横軸ニ關シテモ又縦軸ニ關シテモ對稱ナリ, 又原點ニ關シテモ對稱ナリ

此ノ方程式ヲ y ニ關シテ解クトキハ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ トナリ, $x\geqq a$ 又ハ $x\leqq -a$ ナルトキハ y ノ値實數ナレドモ, $-a<x<a$ ナルトキハ y ノ値虚數トナル, 故ニ曲線ハ $x=a$ ナル直線ノ右方及ビ $x=-a$ ナル直線ノ左方ニ存在ス

$x=a$ ノトキ $y=0$ ニシテ, x ノ絶對値ガ増大スルニ從ヒ y ノ値ハ益増大ス, 故ニ曲線ハ原點ヲ距ルニ從ヒ益横軸ニ遠ザカル

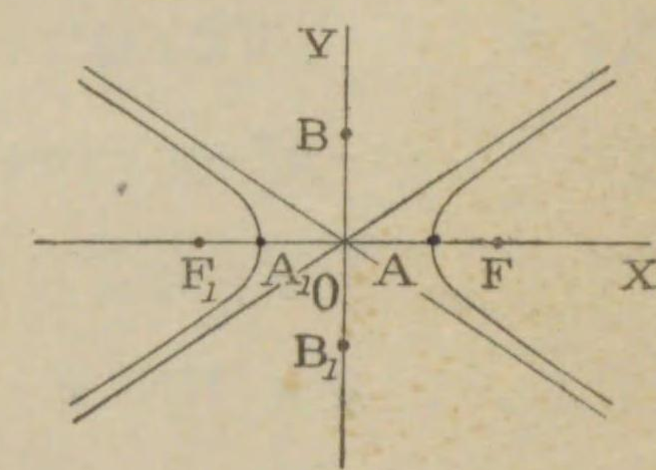
又 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $y_1=\frac{b}{a}x$

ト置クトキハ

$$y_1-y=\frac{b}{a}\{x-\sqrt{x^2-a^2}\}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

故ニ $x>a$ ナルトキハ $y_1>y$ ニシテ x ノ増大スルニ從ヒ y_1-y ハ益減少シ, 終ニ限リナク 0 ニ近ヅク, 依テ第一象限ニ於テ此ノ曲線ハ直線 $y=\frac{b}{a}x$ ノ下方ニアリ, x ノ増大スルニ從ヒ益此ノ直線ニ近ヅク

對稱ノ性質ニヨリ第二象限ニ於テハ曲線ハ直線 $y=-\frac{b}{a}x$ ノ下方ニアリ, 第三象限ニ於テハ $y=\frac{b}{a}x$ ノ上方ニアリ, 又第四象限ニ於テハ $y=-\frac{b}{a}x$ ノ上方ニアリ



上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ圖形ヲ得

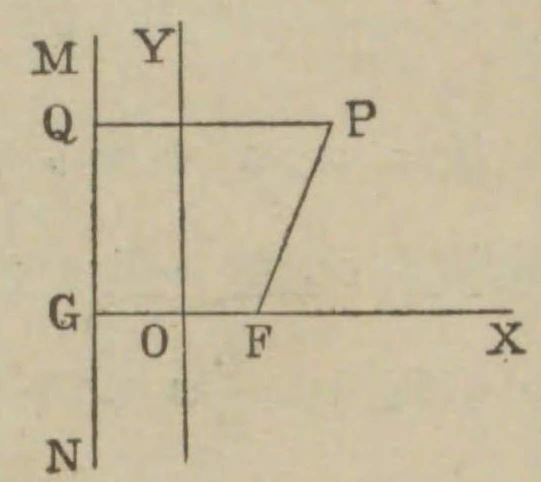
此ノ曲線ハ雙曲線ニシテ, a ハ中心 O ヨリ頂點 A 及ビ A_1 ニ至ル距離, $\sqrt{a^2+b^2}$ ハ O ヨリ焦點 F 及ビ F_1 ニ至ル距離ナリ

AA_1 ヲ雙曲線ノ**交軸**トイヒ, 縦軸ノ上ニ b ニ等シク OB 及ビ OB_1 ヲ取ルトキ BB_1 ヲ其ノ**共軛軸**トイフ, $y=\frac{b}{a}x$ 及ビ $y=-\frac{b}{a}x$ ハ其ノ漸近線ナリ

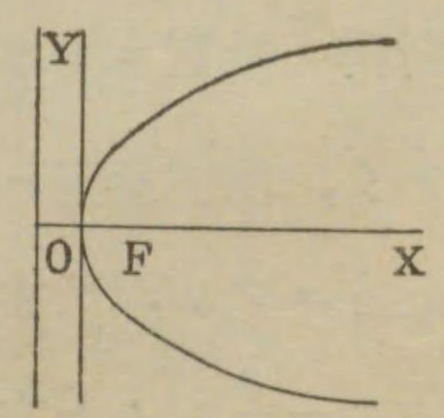
注意　雙曲線ハ其ノ焦點ノ距離ト一ツノ軸ノ長サヲ知ルトキハ之ヲ畫クコトヲ得

(v) 定直線及ビ其ノ上ニアラザル定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

最初ニ比ノ値ガ 1 ナルトキ卽チ定直線 MN 及ビ其ノ外ニアル定點 F ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ考フルコトトシ, F ヨリ MN ニ垂線 FG ヲ引キ,其ノ中點ヲ O トスルトキハ O ハ F 及ビ MN ヨリ等距離ニアリ, 卽チ軌跡上ノ一點ナリ



O ヲ原點, OF ヲ横軸トシ, 軌跡上ノ一點 $P(x, y)$ ヨリ MN ニ垂線 PQ ヲ引キ, $GO=OF=p$ ト置ケバ



$$\overline{FP}^2=(x-p)^2+y^2,\quad QP=p+x$$

然ルニ　$FP=QP$

故ニ　$(x-p)^2+y^2=(p+x)^2$

卽チ　$y^2=4px$　(1)

(1) ハ F 及ビ MN ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ニシテ第 11 節 (i) ニ於テ示セル如ク拋物線ヲ表ハシ, 焦點ノ座標ハ $(p, 0)$ ニシテ, 準線ノ方程式ハ $x=-p$ ナリ

次ニ比ノ値ガ 1 ニ等シカラズトシ, $\dfrac{FP}{QP}=k$ ト置キ GF ヲ $1:k$ ノ比ニ内分及ビ外分スル點ヲ A, A_1 トスルトキハ

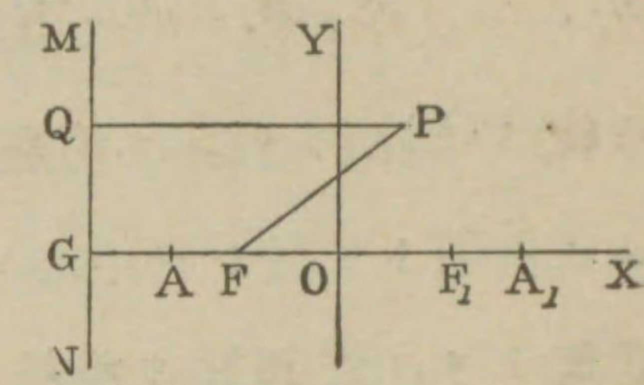
$$\frac{GA}{AF}=\frac{1}{k},\qquad \frac{GA_1}{A_1F}=\frac{1}{k}$$

$$\frac{GA}{GA+AF}=\frac{GA}{GF}=\frac{1}{1+k},\qquad \frac{GA_1}{GA_1-A_1F}=\frac{GA_1}{GF}=\frac{1}{1-k}$$

$GF=2p$ ト置クトキハ

故ニ　$GA=\dfrac{2p}{1+k},\qquad GA_1=\dfrac{2p}{1-k}$

A 及ビ A_1 ハ明カニ軌跡上ノ點ナリ



AA_1 ノ中點ヲ O トスルトキハ

$$AO=\frac{GA_1-GA}{2}=\frac{p}{1-k}-\frac{p}{1+k}=\frac{2pk}{1-k^2}$$

$$GO=\frac{GA_1+GA}{2}=\frac{p}{1-k}+\frac{p}{1+k}=\frac{2p}{1-k^2}$$

從テ　$FO=GO-GF=\dfrac{2p}{1-k^2}-2p=\dfrac{2pk^2}{1-k^2}$

$AO=a$ ト置クトキハ

$$\frac{2pk}{1-k^2}=a$$

故ニ　$FO=ak,\qquad GO=\dfrac{a}{k}$

O ヲ原點トシ, FO ヲ横軸トシ, 軌跡上ノ任意ノ一點 $P(x, y)$ ヨリ MN ニ垂線 PQ ヲ引クトキハ

$$\overline{FP}^2=(ak+x)^2+y^2,\qquad QP=\frac{a}{k}+x$$

然ルニ　$\overline{FP}=k.\ \overline{QP}$

故ニ　$(ak+x)^2+y^2=k^2\left(\dfrac{a}{k}+x\right)^2$

從テ　$(1-k^2)x^2+y^2=a^2(1-k^2)$

卽チ　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2(1-k^2)}=1$

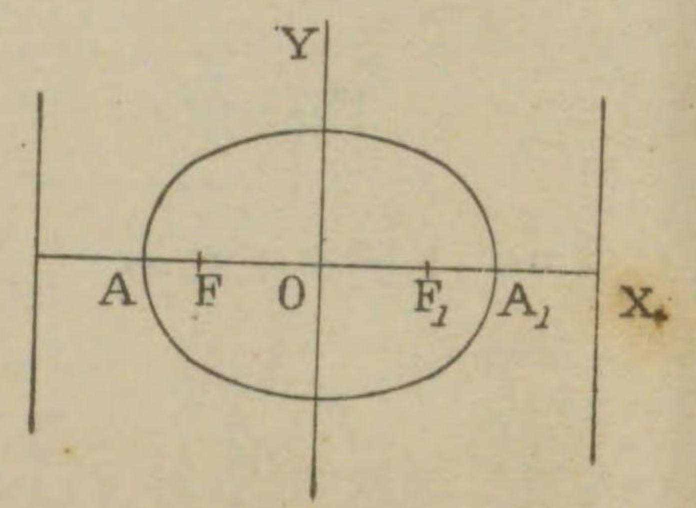
$k<1$ ナルトキハ $a\sqrt{1-k^2}=b$ ト置ケバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=k \qquad (2)$$

$k>1$ ナルトキハ $a\sqrt{k^2-1}=b$ ト置ケバ

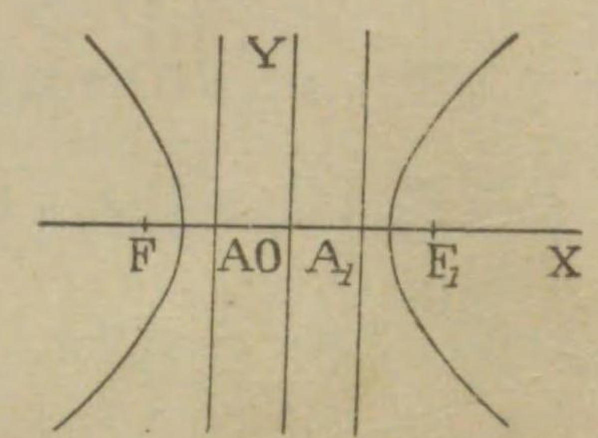
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=k \qquad (3)$$

(2) ハ楕圓ヲ表ハス方程式, (3) ハ雙曲線ヲ表ハス方程式ニシテ, ak ハ前例題ト比較シテ中心ヨリ焦點ニ至ル距離ニ等シ, 故ニ F ハ卽チ焦點ナリ, 又 MN ヲ**準線**トイフ



楕圓及ビ雙曲線ハ縱軸ニ關シテ對稱ナルガ故ニ中心 O ノ反對側ニ尙一ツノ焦點及ビ準線ノ存在スベキコト明ナリ

楕圓ニ於ケル $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 及ビ雙曲線ニ於ケル $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ヲ其ノ**離心率**トイヒ, e ヲ以テ之ヲ表ハス



此ノ記號ヲ用フルトキハ上記ノ證明ニヨリ楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及ビ雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ焦點ノ座標ハ $(ae, 0)$ 及ビ $(-ae, 0)$ ニシテ準線ノ方程式ハ $x=\dfrac{a}{e}$ 及ビ $x=-\dfrac{a}{e}$ ナリ

注意 定直線ヨリノ距離ト其ノ上ニアラザル定點ヨリノ距離トノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ比ガ 1 ナルトキハ抛物線, 1 ヨリモ小ナルトキハ楕圓, 又 1 ヨリモ大ナルトキハ雙曲線ナリ

問題

1. 次ノ方程式ヲ圖示セヨ

i $y^2=x^2+1$　　ii $y^3=x^2$

iii $y=x(x^2-1)$　　iv $y=x^2(x-1)$

v $y=\dfrac{x}{x+1}$　　vi $y=\dfrac{x^2-1}{x}$

vii $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$　　viii $y^2=\dfrac{1}{x-1}$

ix $(x-1)^2+y^2=x$　　x $(y-x)^2=1-x$

2. 次ノ聯立方程式ヲ圖示シ且其ノ實根ヲ索メヨ

i $x-y=1,\quad xy=9$

ii $x^2+y^2=9,\quad y^2=2x$

iii $4x^2-y^2=36,\quad 2x-y=6$

iv $x^2+y^2=x,\quad x^2+y^2=y$

v $x^2-3y^2=3,\quad 3x^2+y^2=3$

vi $y^2=x^3,\quad 3x-y=4$

vii $y=2x,\quad y^2=x(x-3)^2$

viii $2y^2=x-2,\quad x^2-4y^2=4$

3. a ニ順次ニ 1, 2, 3, 4, ... ノ値ヲ與フルトキ, 次ノ方程式ハ如何ナル曲線ノ群ヲ表ハスカ, 同一ノ座標軸ヲ用ヒテ之ヲ示セ

i $y^2=ax$　　ii $xy=a$

iii $x^2+y^2=a^2$　　iv $ay=x^2+a^2$

v $x^2+ay^2=1$　　vi $y=x^a$

4. 聯立方程式ノ圖示ニヨリ次ノ方程式ノ實根ノ正負ヲ定メヨ

i $x^3=x+1$　　ii $x^3-x^2+x=2$

iii $x^4=x+2$　　iv $x^4-4x^3=4$

5. 二定點ヨリノ距離ノ二乘ノ和又ハ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ

6. 定直線ヨリノ距離ガ定點ヨリノ距離ノ二乘ニ比例スル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ

7. 定直線及ビ其ノ上ニアル定點ヨリノ距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ

8. 三定點ヲ A, B, C トシ, $2\,\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ ナルトキ P ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ

9. 定點 O ヨリ定直線 MN ニ至ル線分 OM 上ニ於ケル一點ヲ P トシ, $\overline{OM}\cdot\overline{OP}$ ガ一定ナルトキ P ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ.

10. 線分 FF_1 ノ長サヲ $2a$ トシ, $\overline{FP}.\ \overline{F_1P}=a^2$ ナル條件ヲ滿足スル點 P ノ軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索メヨ

第三章　座標ノ變換

16. 座標軸ノ變換

平面上ニ於ケル點ノ位置ハ其ノ平面上ニ於ケル二ツノ軸ニ關スル座標ニヨリテ定マリ, 軸ノ位置變ズレバ座標モ亦變ズ, 從テ座標ヲ用ヒテ圖形間ノ關係ヲ表ハス式ヲ作ルニ當リ座標軸ノ取リ方ニヨリテ其ノ形同一ナラズ

故ニ成ルベク簡單ナル式ヲ作リテ以後ノ演算ヲ容易ナラシムルト同時ニ圖形ノ性質ヲ簡明ニ誘出センガ爲メニ最モ重要ナルハ座標軸ノ位置ノ選定ナルコトハ前章ノ例題ニ於テ示セル所ニヨリテ已ニ明ナリ, 然カモ先ヅ一定ノ座標軸ニ關スル座標ヲ用ヒテ式ヲ作リ, 必要ナル場合ニ於テ軸ヲ適當ナル位置ニ變更スルヲ以テ便トスルコト少カラズ

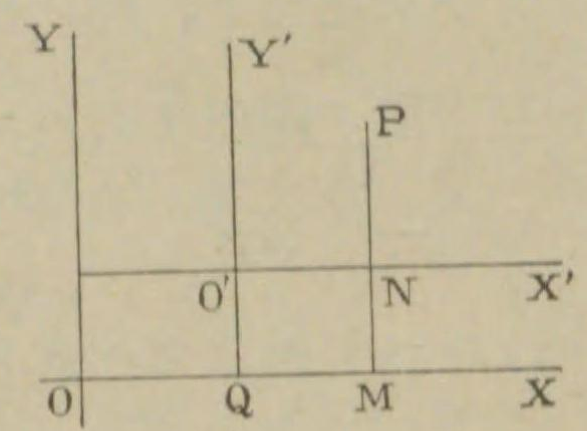
此ニ於テ同一ノ平面上ニ於テ定點ヲ原點トスル一定ノ軸ニ關スル一點ノ座標ト他ノ任意ノ點ヲ原點トシ, 任意ノ方向ヲ有スル軸ニ關スル同一ノ點ノ座標トノ間ニ存在スベキ關係ヲ定ムルコトノ必要ヲ生ズ

次ニ掲グル如ク此ノ關係ヲ知ルトキハ一方ノ座標ヲ以テ表ハシタル式ヲ他ノ座標ヲ以テ表ハシタル式ニ變ズルコトニヨリテ所要ノ目的ヲ達スルコトヲ得ベシ

座標軸トシテ最モ重要ナルハ直交軸ナルヲ以テ以下主トシテ之ニ關スル變換ニ就テ論ゼントス

(I) 二組ノ平行軸ニ關スル同一ノ點ノ座標ノ間ノ關係

O ヲ原點トスル直交軸 OX, OY ニ關シテ一點 P ノ座標ヲ x, y トシ，之ニ平行ニシテ O′ ヲ原點トスル直交軸 O′X′, O′Y′ ニ關シテ P ノ座標ヲ x', y' トシ，最初ノ軸ニ關シテ O′ ノ座標ヲ a, b トス



P ヨリ OY ニ平行線ヲ引キ，OX 及ビ O′X′ トノ交點ヲ夫々 M, N トシ，O′Y′ ト OX トノ交點ヲ Q トスルトキハ

$$\text{OM}=\text{OQ}+\text{QM}=\text{OQ}+\text{O}'\text{N}$$

$$\text{MP}=\text{MN}+\text{NP}=\text{QO}'+\text{NP}$$

然ルニ $\qquad \text{OM}=x,\quad \text{MP}=y,\quad \text{O}'\text{N}=x',\quad \text{NP}=y'$

$$\text{OQ}=a,\quad \text{QO}'=b$$

故ニ
$$\left.\begin{aligned}x&=a+x'\\ y&=b+y'\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

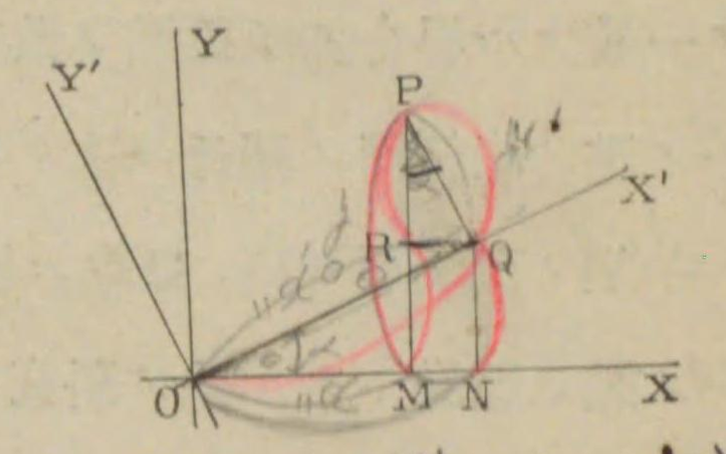
從テ
$$\left.\begin{aligned}x'&=x-a\\ y'&=y-b\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ハ直交軸ノ平行移動ニヨル新舊兩座標ノ關係ヲ示スモノニシテ (1) ハ舊座標ヲ新座標ニテ表ハシ，(2) ハ新座標ヲ舊座標ニテ表ハシタルモノトス

注意 上ノ證明ニ於テ新舊兩軸ハ互ニ平行ナリトノ假定ヲ用ヒタルノミニシテ直交ト否トニハ全ク關係ナシ，故ニ任意ノ斜交軸ノ平行移動ノ場合ニ於テ全ク同一ノ式ヲ用フルコトヲ得

(II) 原點ヲ共有スル二組ノ直交軸ニ關シテ同一ノ點ノ座標ノ間ノ關係

O ヲ原點トスル直交軸 OX, OY ニ關シテ一點 P ノ座標ヲ x, y トシ，O ヲ原點トスル他ノ直交軸 OX′, OY′ ニ關シテ P ノ座標ヲ x', y' トシ，角 XOX′ ヲ α トス



$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$
$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$

P ヨリ OX, OX′ ニ夫々垂線 PM, PQ ヲ引キ，Q ヨリ OX, PM ニ夫々垂線 QN, QR ヲ引クトキハ

a) $\quad \text{OM}=\text{ON}-\text{MN}=\text{ON}-\text{RQ}$

$$=\text{OQ}\cos\alpha-\text{QP}\sin\alpha$$

b) $\quad \text{MP}=\text{MR}+\text{RP}=\text{NQ}+\text{RP}$

$$=\text{OQ}\sin\alpha+\text{QP}\cos\alpha$$

然ルニ $\qquad \text{OM}=x,\quad \text{MP}=y,\quad \text{OQ}=x',\quad \text{QP}=y'$

故ニ
$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3) ノ第一式ニ $\cos\alpha$ ヲ乘ジ，第二式ニ $\sin\alpha$ ヲ乘ジテ加フルトキハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=x'(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

(3) ノ第一式ニ $-\sin\alpha$ ヲ乘ジ，第二式ニ $\cos\alpha$ ヲ乘ジテ加フルトキハ

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=y'(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

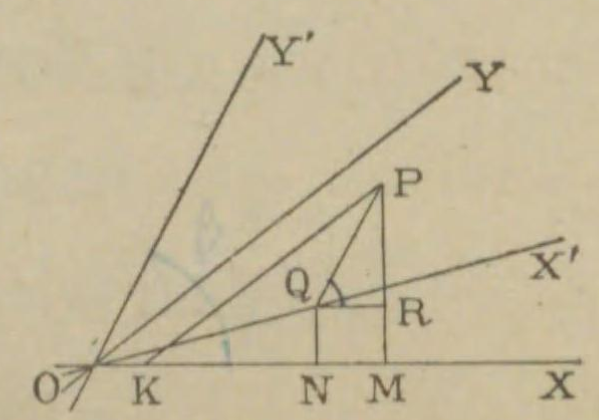
依テ又次ノ關係ヲ得

$$\left.\begin{aligned}x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(3) 及ビ (4) ハ直交軸ノ回轉ニヨル新舊兩座標ノ關係ヲ示スモノニシテ (3) ハ舊座標ヲ新座標ニテ表ハシ, (4) ハ新座標ヲ舊座標ニテ表ハシタルモノトス

注意 (3) 及ビ (4) ハ直交軸ノ回轉ニ限リ用フベキモノトス, 此ノ一般ナル場合卽チ原點ヲ共有スル任意ノ二組ノ斜交軸ニ關シテ同一ノ點ノ座標間ノ關係ハ次ノ如クシテ之ヲ索ムルコトヲ得

一組ノ斜交軸 OX, OY ニ關シテ一點 P ノ座標ヲ x, y トシ, 同一ノ點ヲ原點トスル他ノ斜交軸 OX′, OY′ ニ關スル P ノ座標ヲ x', y' トシ, 角 XOY ヲ ω, 角 XOX′ ヲ α, 角 XOY′ ヲ β トス



P ヨリ OX ニ垂線 PM ヲ引キ, 次ニ P ヨリ OY ニ平行線ヲ引キ OX トノ交點ヲ K トシ, P ヨリ OY′ ニ平行線ヲ引キ OX′ トノ交點ヲ Q トシ, Q ヨリ OX 及ビ PM ニ夫々垂線 QN, QR ヲ引クトキハ

$$\mathrm{OM}=\mathrm{ON}+\mathrm{NM}=\mathrm{ON}+\mathrm{QR}$$
$$=\mathrm{OQ}\cos\alpha+\mathrm{QP}\cos\beta$$
$$\mathrm{MP}=\mathrm{MR}+\mathrm{RP}=\mathrm{NQ}+\mathrm{RP}$$
$$=\mathrm{OQ}\sin\alpha+\mathrm{QP}\sin\beta$$

又 $$\mathrm{OM}=\mathrm{OK}+\mathrm{KM}=\mathrm{OK}+\mathrm{KP}\cos\omega$$
$$\mathrm{MP}=\mathrm{KP}\sin\omega$$

故ニ $$\mathrm{OK}+\mathrm{KP}\cos\omega=\mathrm{OQ}\cos\alpha+\mathrm{QP}\cos\beta$$
$$\mathrm{KP}\sin\omega=\mathrm{OQ}\sin\alpha+\mathrm{QP}\sin\beta$$

然ルニ $\mathrm{OK}=x,\quad \mathrm{KP}=y,\quad \mathrm{OQ}=x',\quad \mathrm{QP}=y'$

故ニ $$x+y\cos\omega=x'\cos\alpha+y'\cos\beta$$
$$y\sin\omega=x'\sin\alpha+y'\sin\beta$$

最初ノ式ニ $\sin\omega$ ヲ乘ジ, 次ノ式ニ $-\cos\omega$ ヲ乘ジテ加フルトキハ

$$x\sin\omega=x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)$$

依テ次ノ關係ヲ得

$$\left.\begin{aligned}x\sin\omega&=x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)\\ y\sin\omega&=x'\sin\alpha+y'\sin\beta\end{aligned}\right\}\qquad(3)'$$

(3)′ ハ原點ヲ共有スル二組ノ斜交軸ニ關スル同一ノ點ノ新舊兩座標ノ關係ヲ示スモノトス

此ノ特別ナル場合トシテ $\omega=\dfrac{\pi}{2}$ ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\alpha+y'\cos\beta\\ y&=x'\sin\alpha+y'\sin\beta\end{aligned}\right\}\qquad(3)_1$$

$(3)_1$ ハ舊軸ガ直交軸ニシテ新軸ガ斜交軸ナルトキノ式ナリ

(3)′ ニ於テ $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}x\sin\omega&=x'\sin(\omega-\alpha)-y'\cos(\omega-\alpha)\\ y\sin\omega&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(3)_2$$

$(3)_2$ ハ舊軸ガ斜交軸ニシテ新軸ガ直交軸ナルトキノ式ナリ

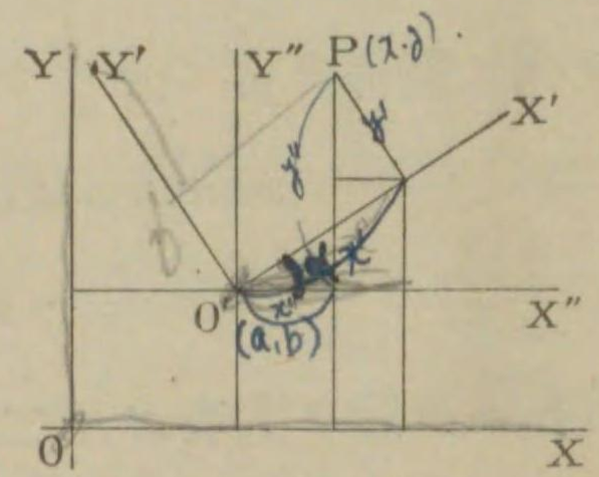
更ニ (3)′ ニ於テ $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(3)_3$$

$(3)_3$ ハ卽チ新舊兩軸共ニ直交軸ナルトキノ式ニシテ (3) ト全ク相一致ス

(III)　原點ヲ異ニセル二組ノ直交軸ニ關シテ同一ノ點ノ座標間ノ關係

Ｏヲ原點トスル直交軸 OX, OY ニ關シテ一點 P ノ座標ヲ x, y トシ, O′ ヲ原點トスル他ノ直交軸 O′X′, O′Y′ ニ關シテ P ノ座標ヲ x', y' トシ, O′X′ ガ OX トナス角ヲ α トシ, O′ ノ OX, OY ニ關スル座標ヲ a, b トス



O′ ヲ通過シテ OX, OY ニ平行ニ O′X″, O′Y″ ヲ引キ, 此ノ新シキ軸ニ關シテ P ノ座標ヲ x'', y'' トスルトキハ O′X″, O′Y″ ハ夫々 OX, OY ニ平行ナルガ故ニ (1) ニヨリ

$$x=a+x'',\qquad y=b+y''$$

又 O′X′ ハ O′X″ ト角 α ヲナスガ故ニ (3) ニヨリ

$$x''=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$
$$y''=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

從テ

$$\left.\begin{aligned}x&=a+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y&=b+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

(5) ハ原點ヲ異ニセル二組ノ直交軸ニ關スル同一ノ點ノ新舊兩座標ノ關係ヲ示スモノトス

注意　(1)　一組ノ斜交軸ニ關スル點ノ座標ヲ原點ヲ異ニセル他ノ斜交軸ニ關スル座標ニテ表ハサントスル場合ニハ先ヅ (1) ニヨリ座標軸ヲ平行ニ移動セシメ, 次ニ (3)′ ニヨリ原點ヲ共有スル二組ノ斜交軸ニ關スル座標ノ關係ヲ知リテ之ヲ索ムベシ

注意　(2)　一組ノ座標軸ニ關スル一點ノ座標ヲ x, y トシ, 他ノ座標軸ニ關スル同一ノ點ノ座標ヲ x', y' トスルトキハ本節ニヨリ

$$x=ax'+by'+c$$
$$y=a_1x'+b_1y'+c_1$$

此ニ a, b, c, a_1, b_1, c_1 ハ一定ノ常數トス, 即チ x, y ハ x', y' ノ一次式トシテ表ハサレ又逆ニ x', y' ニ關シテ解クトキハ x', y' ハ x, y ノ一次式トシテ表ハサルルコト明ナリ

依テ x, y ニ關スル一ツノ有理整方程式ノ次數ヲ p トスルトキハ座標ノ變換ニヨリテ得タル方程式ノ次數ハ決シテ p ヨリモ高キコトナシ, 又此ノ變換ニヨリテ最高次ノ項ノ係數消滅シテ次數ガ p ヨリモ低クナルコトアリトセバ逆ノ變換ニヨリテ次數ヲ高クスルコトヲ得ルコトトナリ不合理ナリ

故ニ x, y ニ關スル有理整方程式ノ次數ハ座標軸ノ變換ニヨリテ變ズルコトナシ

x, y ノ一次式ニテ表ハサルル曲線ヲ**一次曲線**トイヒ, 二次式ニテ表ハサルル曲線ヲ**二次曲線**トイフ, 以下之ニ準ズ

$ax+by+c=0$ 即チ直線ハ一次曲線ニシテ, $x^2+y^2=r^2$, $y^2=4px$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 等ハ何レモ二次曲線ナリ

方程式ガ x, y ニ關シテ有理整式ナラザルモ, 之ヲ有理整式ニ變化シ得ベキトキハ其ノ次數ニヨリテ之ヲ區別ス, 例ヘバ $y=\sqrt{x}$ ハ二次曲線ナリ

方程式ガ x, y ニ關シテ有理整式ニ變化シ得ザルトキハ其ノ表ハス曲線ヲ**超越曲線**トイフ, 例ヘバ $y=\sin x$ ハ超越曲線ナリ

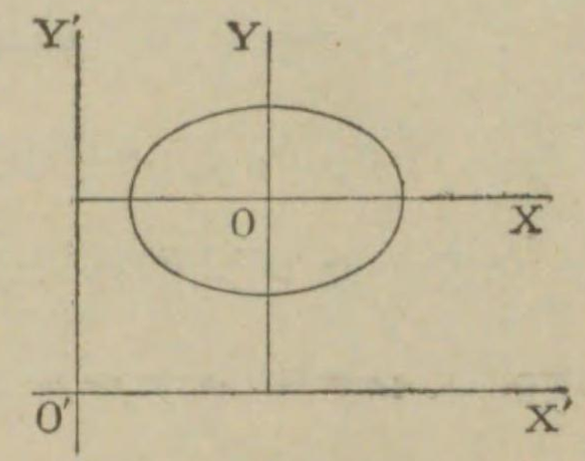
17. 例題

(i) 曲線 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ座標軸ノ平行移動

前節 (1) ニヨリ

$$x=x'-h,\quad y=y'-k$$

ト置キ座標軸ヲ平行移動セシムルトキハ曲線ノ方程式ハ



$$\frac{(x'-h)^2}{a^2}+\frac{(y'-k)^2}{b^2}=1$$

トナル，然ルニ元ノ方程式ハ原點ヲ中心トシ座標軸ノ上ニ軸ヲ有スル楕圓ヲ表ハスヲ以テ，新ニ得タル方程式ハ新座標軸ニ關シテ任意ノ點 (h, k) ヲ中心トシ，座標軸ニ平行ナル軸ヲ有スル楕圓ヲ表ハス

(ii) 曲線 $y^2=ax+bx^2(a\gtreqless 0)$ ノ座標軸ノ平行移動

前節 (1) ニヨリ $x=\alpha+x'$ ト置キ縦軸ヲ平行移動セシムルトキハ

$$y^2=a(\alpha+x')+b(\alpha+x')^2$$
$$=(a\alpha+b\alpha^2)+(a+2b\alpha)x'+bx'^2$$

此ニ α ハ任意ノ値ヲ取リ得ベキヲ以テ，新ニ得タル方程式ヲ成ルベク簡單ナラシメンガ爲メニ，$b\gtreqless 0$ トシテ

$$a+2b\alpha=0$$

卽チ
$$\alpha=-\frac{a}{2b}$$

ト取ルトキハ

$$y^2=-\frac{a^2}{2b}+\frac{a^2}{4b}+bx'^2$$
$$=-\frac{a^2}{4b}+bx'^2$$

依テ
$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{4b^2}}+\frac{y^2}{-\frac{a^2}{4b}}=1$$

故ニ $b<0$ ナルトキハ $-\frac{a^2}{4b}>0$ ニシテ新座標軸ヲ軸トスル楕圓ヲ表ハシ，$b>0$ ナルトキハ $-\frac{a^2}{4b}<0$ ニシテ雙曲線ヲ表ハス

$b=0$ ナルトキハ元ノ方程式ハ

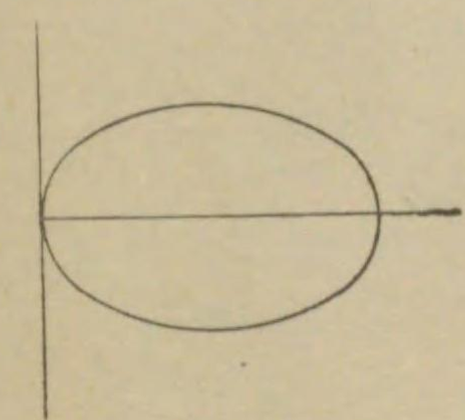
$$y^2=ax$$

ニシテ拋物線ヲ表ハス

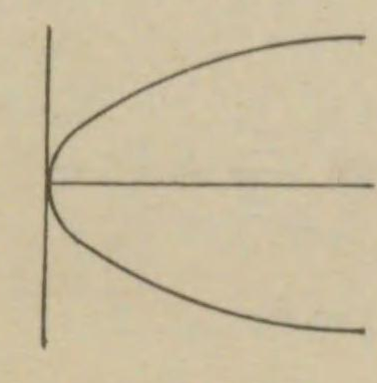
又 $y^2=ax+bx^2$ ニ於テ $y=0$ ト置ケバ $x=0$ 及ビ $x=-\frac{a}{b}$ ヲ得

故ニ方程式 $y^2=ax+bx^2$ $(a\gtreqless 0)$ ハ $b<0$ ナルトキハ原點及ビ點 $\left(-\frac{a}{b}, 0\right)$ ヲ頂點トシ横軸ヲ軸トスル楕圓ヲ表ハシ，$b=0$ ナルトキハ原點ヲ頂點トシ横軸ヲ軸トスル拋物線ヲ表ハシ，$b>0$ ナルトキハ原點及ビ點 $\left(-\frac{a}{b}, 0\right)$ ヲ頂點トシ横軸ヲ軸トスル雙曲線ヲ表ハス

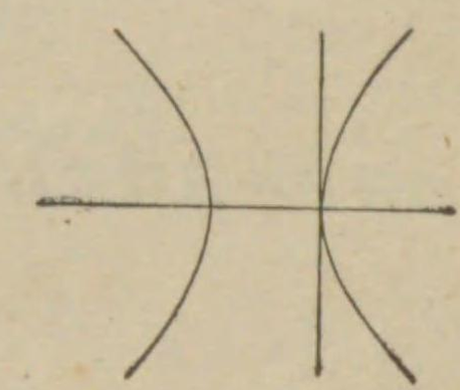
$a>0,\ b<0$



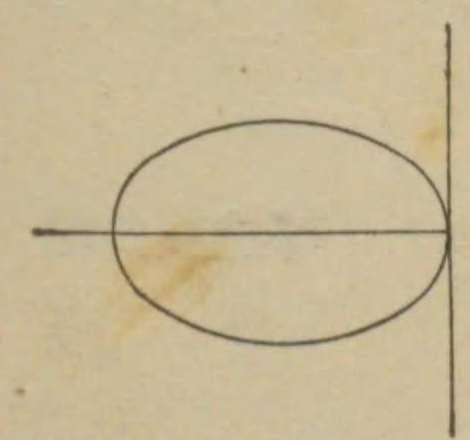
$a>0,\ b=0$



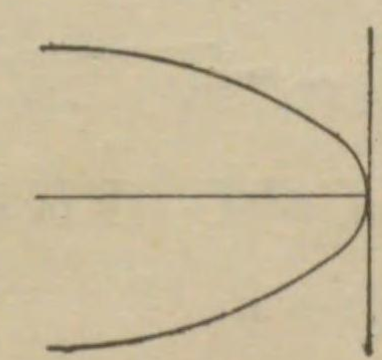
$a>0,\ b>0$



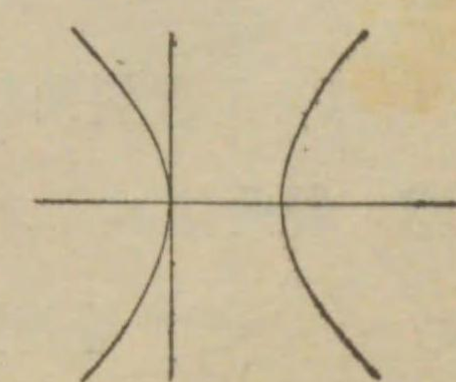
$a<0,\ b<0$



$a<0,\ b=0$



$a<0,\ b>0$



(iii) 曲線 $xy=1$ ノ座標軸ノ回轉

前節 (3) ニヨリ

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

ト置キ座標軸ヲ回轉セシムルトキハ曲線ノ方程式ハ

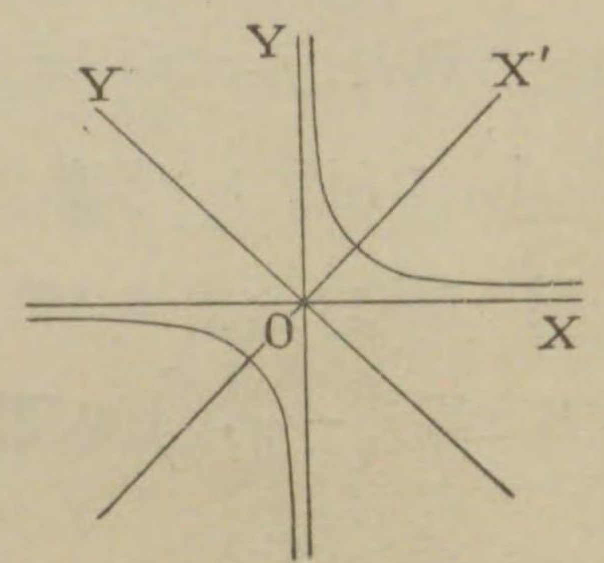
$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)=1$$

卽チ $$(x'^2-y'^2)\sin\alpha\cos\alpha+x'y'(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=1$$

トナル

此ニ α ハ任意ノ値ヲ取リ得ベキヲ以テ新ニ得タル方程式ヲ簡單ナラシメンガ爲メニ

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$



卽チ $\cos\alpha=\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ト置クトキハ

$$x'^2-y'^2=2$$

ヲ得

新ニ得タル方程式ハ雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ

$$a=b=\sqrt{2}$$

卽チ漸近線ガ互ニ垂直ナル場合ナリ，從テ方程式 $xy=1$ ノ表ハス曲線モ之ト同一ニシテ座標軸ヲ回轉シタルニ過ギズ，第 11 節例題 (ii) ニ於テ $xy=1$ ヲ雙曲線ト稱シタルハ之ガ爲メナリ

注意 雙曲線ニ於テ漸近線ガ互ニ垂直ナルモノヲ**等邊雙曲線**トイフ，$xy=1$ ハ卽チ等邊雙曲線ナリ

(iv) 曲線 $(x-y)^3=2(x+y)+4$ ノ座標軸ノ變換

前節 (1) ニヨリ

$$x=x'+h,\qquad y=y'+k$$

ト置キ座標軸ヲ平行移動セシムルトキハ曲線ノ方程式ハ

$$(x'-y'+h-k)^3=2(x'+y'+h+k)+4$$

トナリ，此ニ方程式ヲ簡單ナラシメンガ爲メニ特ニ

$$h-k=0,\qquad 2(h+k)+4=0$$

ヨリ h, k ヲ定ムルトキハ

$$h=k=-1$$

依テ曲線ノ方程式ハ

$$(x'-y')^3=2(x'+y')$$

次ニ前節 (3) ニヨリ

$$x'=x''\cos\alpha-y''\sin\alpha,\qquad y'=x''\sin\alpha+y''\cos\alpha$$

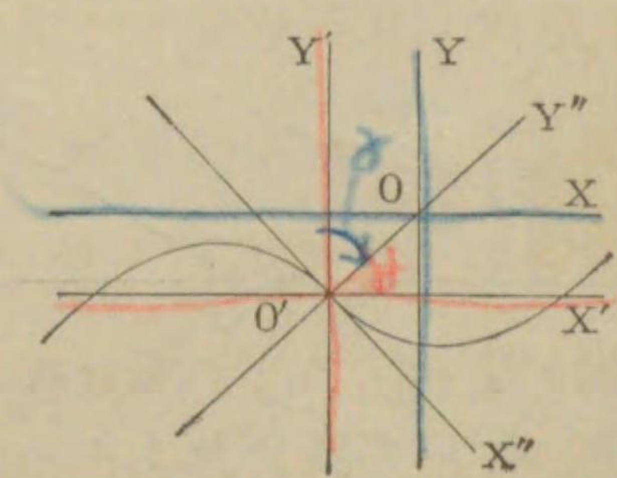
ト置キ座標軸ヲ回轉セシムルトキハ

$$\{x''(\cos\alpha-\sin\alpha)-y''(\cos\alpha+\sin\alpha)\}^3$$
$$=2\{x''(\cos\alpha+\sin\alpha)+y''(\cos\alpha-\sin\alpha)\}$$

トナリ，此ニ特ニ $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ ト置クトキハ

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sin\alpha$$

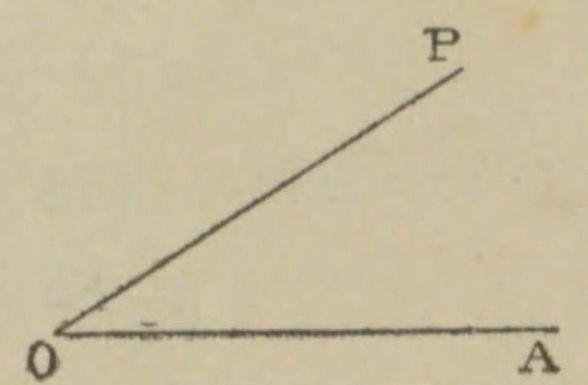
依テ $y''=x''^3$



此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ第 13 節例題 (vi) ニ於テ已ニ論ジタルモノニシテ，元ノ座標軸ニ關シテ曲線ヲ畫ケバ右ノ圖形ヲ得

18. 極座標

一平面上ニ於ケル一定ノ點 O ヲ通過スル直線ヲ OA トスルトキ，其ノ平面上ニ於ケル任意ノ點 P ノ位置ハ線分 OP ノ長サ ρ 及ビ OP ガ OA ト作ル角 θ ヲ知ルコトニヨリテ之ヲ定ムルコトヲ得



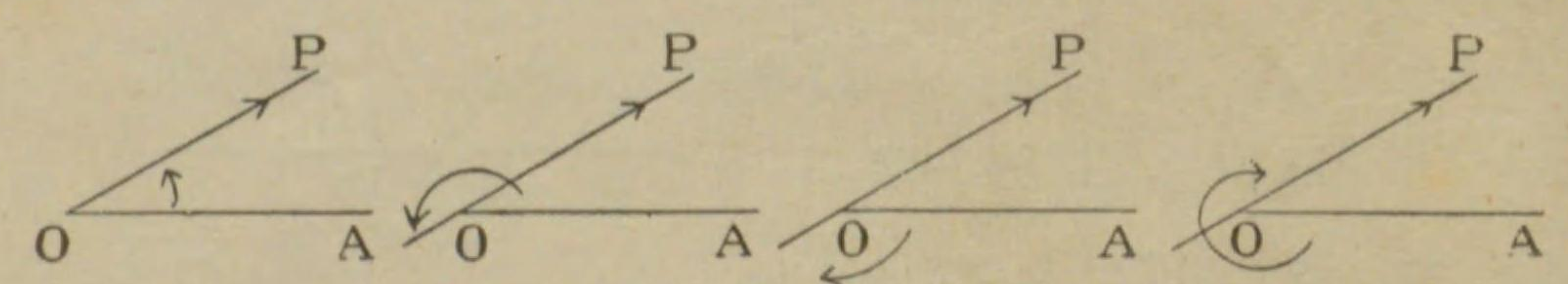
定點 O ヲ**極**，定直線 OA ヲ**原線**，ρ ヲ**動徑**，θ ヲ**傾角**トイヒ，ρ 及ビ θ ヲ點 P ノ**極座標**トイフ

點 P ノ極座標ガ ρ 及ビ θ ナルコトヲ $P(\rho, \theta)$ ト書クモノトス

傾角ハ原線ヨリ測リテ其ノ方向ガ時計ノ針ノ進行ト反對ナルモノヲ正トシ，時計ノ針ノ進行ト同一ナルモノヲ負トス

動徑ハ原線ヨリ傾角 θ ニ等シク角 AOP ヲ測リタルトキ，極 O ヨリ P ノ方ニ ρ ニ等シク取リタルモノヲ正トシ，PO ノ延長シタル方向ニ取リタルモノヲ負トス

上ノ規約ニ從フトキハ一定ノ極座標ニ對應スル點ハ唯一ナレドモ，同一ノ點ノ極座標ハ必ズシモ唯一ナラズ，例ヘバ $\left(1, \frac{\pi}{6}\right), \left(-1, \frac{7\pi}{6}\right), \left(-1, -\frac{5}{6}\pi\right), \left(1, -\frac{11}{6}\pi\right)$ ハ何レモ同一ノ點ヲ表ハス

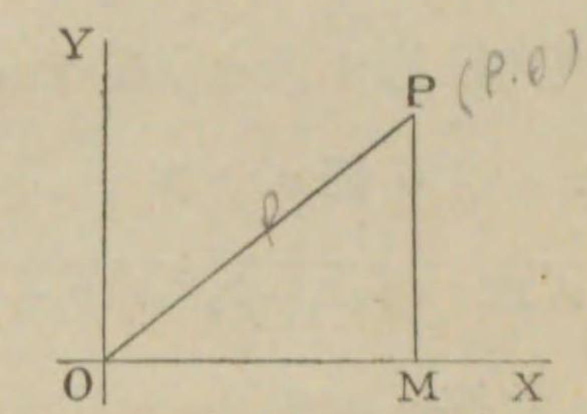


注意　特ニ必要ナキトキハ ρ ヲ正トシ，θ ヲ 0 ト 2π トノ間又ハ $-\pi$ ト π トノ間ニ取ルヲ通常トス

19. 直角座標ト極座標トノ變換

直角座標ノ原點ヲ極座標ノ極トシ横軸ノ正ノ部分ヲ原線トスルトキ，一點 P ノ直角座標ヲ x, y トシ，其ノ極座標ヲ ρ, θ トス

P ヨリ横軸ニ垂線 PM ヲ引クトキハ



$$OM = x, \quad MP = y,$$

$$OP = \rho, \quad \angle MOP = \theta$$

然ルニ　$OM = OP \cos MOP, \quad MP = OP \sin MOP$

故ニ　$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \qquad (1)$$

又　$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2, \quad \tan MOP = \frac{MP}{OM}$

故ニ　$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ハ同一ノ點ノ直角座標ト極座標トノ關係ニシテ，(1) ニヨリテ直角座標ヲ極座標ニ變換シ得ベク (2) ニヨリテ極座標ヲ直角座標ニ變換シ得ベシ，但シ ρ, θ ガ與ヘラルルトキ (1) ニヨリテ x, y ハ夫々唯一ニ定マレドモ，x, y ガ與ヘラルルトキ (2) ニヨリテ θ ニハ二ツノ値アリ，其ノ何レヲ取ルベキカハ x, y ノ正負ニヨリ象限ヲ知ルコトニヨリテ之ヲ定ムベキモノトス

例ヘバ $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ ナルトキハ

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2, \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

故ニ　$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{　又ハ　} \frac{7\pi}{6}$$

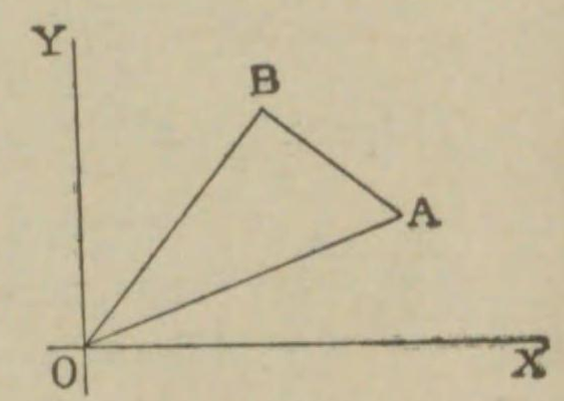
然ルニ　$$x > 0, \quad y > 0$$

故ニ　$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

20. 例題

(i) 二點 $A(\rho_1, \theta_1)$, $B(\rho_2, \theta_2)$ ノ距離

極座標ノ極 O ヲ原點トシ，原線ヲ横軸ノ正ノ部分トシテ，二點 A, B ノ直角座標ガ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ナルトキハ第 6 節ニヨリ



$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

然ルニ前節ニヨリ

$$x_1=\rho_1\cos\theta_1,\quad y_1=\rho_1\sin\theta_1$$

$$x_2=\rho_2\cos\theta_2,\quad y_2=\rho_2\sin\theta_2$$

故ニ
$$\overline{AB}^2=(\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\cos\theta_1)^2+(\rho_2\sin\theta_2-\rho_1\sin\theta_1)^2$$
$$=\rho_1^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+\rho_2^2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)$$
$$-2\rho_1\rho_2(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)$$

卽チ
$$\overline{AB}=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

以上ノ結果ハ又次ノ如クシテ之ヲ得ベシ

三角形 OAB ニ於テ

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos AOB$$

然ルニ
$$OA=\rho_1,\quad OB=\rho_2,\quad \angle AOB=\theta_2-\theta_1$$

故ニ
$$\overline{AB}=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

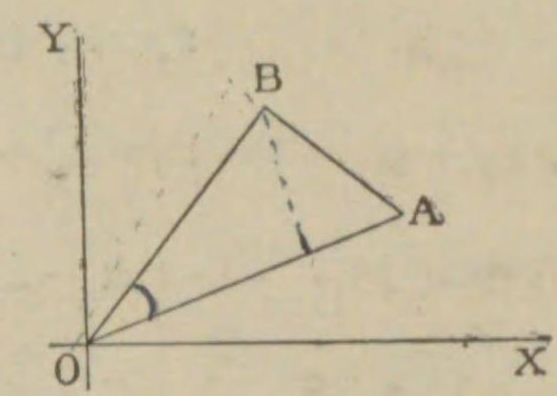
(ii) 三角形ノ面積

直角座標ノ原點 O ヲ極トシ，横軸ノ正ノ部分ヲ原線トシテ，二點 A, B ノ直角座標ガ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2)，又其ノ極座標ガ夫々 (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2) ナルトキハ前節ニヨリ

$$x_1=\rho_1\cos\theta_1,\quad y_1=\rho_1\sin\theta_1,\quad x_2=\rho_2\cos\theta_2,\quad y_2=\rho_2\sin\theta_2$$

三角形 OAB ノ面積ヲ S トスルトキハ

$$S=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin AOB$$



然ルニ
$$OA=\rho_1,\quad OB=\rho_2$$
$$\angle AOB=\angle XOB-\angle XOA$$
$$=\theta_2-\theta_1$$

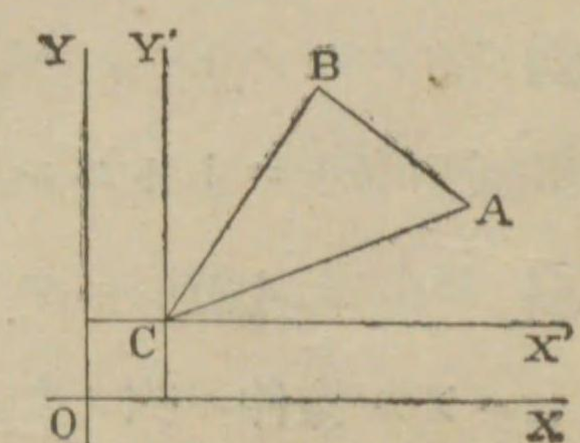
故ニ
$$S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)$$
$$=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$=\frac{1}{2}(\rho_1\cos\theta_1\rho_2\sin\theta_2-\rho_2\cos\theta_2\rho_1\sin\theta_1)$$

卽チ
$$S=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

行列式ノ記號ヲ用フルトキハ

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

次ニ任意ノ三點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ヲ頂點トスル一ツノ三角形 ABC ノ面積ヲ三點ノ座標ヲ用ヒテ表ハサントセバ，原點ヲ一ツノ頂點例へバ C ニ平行移動セシメ，新座標軸 CX′, CY′ ニ關スル二點 A, B ノ座標ヲ夫々 (x_1', y_1'), (x_2', y_2') トスルトキハ上ノ證明ニヨリ



$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}$$

然ルニ第 16 節ニヨリ

$$x_1=x_1'+x_3,\qquad y_1=y_1'+y_3$$

$$x_2=x_2'+x_3,\qquad y_2=y_2'+y_3$$

故ニ
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$$

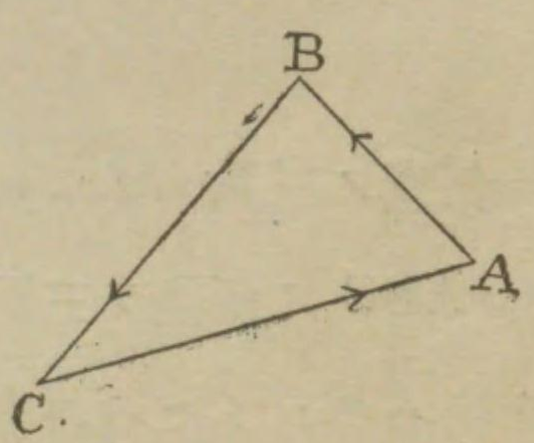
$$=\frac{1}{2}\{(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)\}$$

即チ
$$=\frac{1}{2}\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}$$

行列式ノ記號ヲ用フルトキハ

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

注意 (1) 上ノ證明ニ於テ三點 A, B, C ノ順序ハ三角形 ABC ノ面積ヲ左方ニ見テ其ノ周圍ヲ一周スルガ如クニ之ヲ取レリ，若シ反對ノ順序ニ取ルトキハ S ハ之ト符號ヲ變ジタルモノトナルベク，其ノ絕對値ヲ取ルコトトスレバ何レニテモ同一トナル



注意 (2) 上ノ證明ニヨリ三點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ガ一直線上ニアル條件ハ次ノ如クナルベキコト明ナリ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

21. 極座標ニテ表ハシタル方程式ト曲線

x, y ヲ平面上ニ於ケル點ノ直角座標トシ, ρ, θ ヲ同一ノ點ノ極座標トスルトキハ第 19 節ニヨリ x, y ニ關スル方程式ヲ ρ, θ ニ關スル方程式ニ變ズルコトヲ得ベク又逆ニ ρ, θ ニ關スル方程式ヲ x, y ニ關スル方程式ニ變ズルコトヲ得ベシ, 然ルニ x, y ニ關スル方程式ハ一般ニ曲線ヲ表ハスガ故ニ ρ, θ ニ關スル方程式モ亦一般ニ曲線ヲ表ハスコト明ナリ

極座標ニテ表ハシタル方程式ニヨリテ曲線ヲ研究セントスルニ當リ先ヅ之ヲ直角座標ニ變換スルヲ可トスル場合ト直チニ極座標ヲ用フルヲ可トスル場合トアリ又軌跡ヲ表ハス方程式ヲ索ムルニ當リ極座標ヲ用フルヲ便トスルコト少カラズ, 是等極座標ヲ用フル場合ニ於テハ何レモ直角座標ニ於ケル方程式ニ就テ論ジタルト同樣ナル方法ヲ應用スベキモノトス, 例ヘバ直角座標ニ於テ座標軸トノ交點ヲ考フル代リニ極座標ニ於テハ原線トノ交點ヲ考ヘ, 直角座標ニ於テ原點又ハ座標軸ニ關スル對稱ヲ考フル代リニ極座標ニ於テハ極又ハ原線ニ關スル對稱ヲ考フルガ如シ

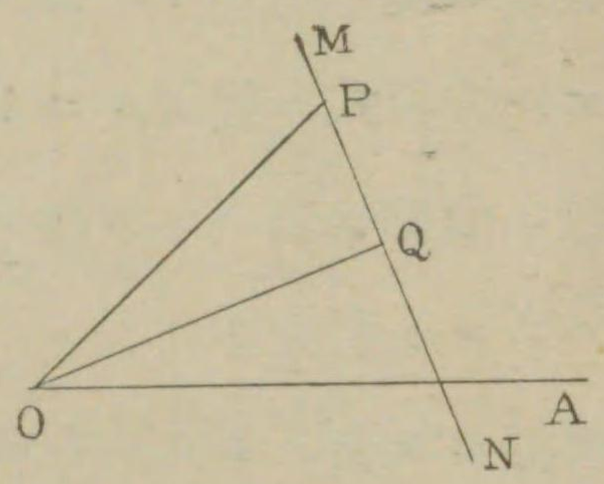
尙極座標若シクハ直角座標ヲ用ヒテ方程式ヲ索メタル後更ニ其ノ表ハス曲線ヲ畫カントスル場合等ニハ臨機座標ノ變換又ハ座標軸ノ變換等ヲ行ヒ, 成ルベク簡單ナル徑路ヲ取リテ目的ヲ達スベキモノトス

注意 極座標ニテ表ハシタル方程式ト稱スル代リニ以下單ニ**極方程式**トイフコトト定ム

22. 例題

(i) 直線ノ極方程式

O ヲ極座標ノ極, OA ヲ原線トシ, 直線 MN ノ上ニ一點 $P(\rho, \theta)$ ヲ取リ O ヨリ MN ニ垂線ヲ引キ,



其ノ交點ヲ $Q(p, \alpha)$ トスルトキハ

$$OP \cos POQ = OQ$$

此ニ　$OP=\rho,\quad \angle AOP=\theta$

　　$OQ=p,\quad \angle AOQ=\alpha$

故ニ
$$\rho \cos(\theta-\alpha)=p \qquad (1)$$

(1) ハ即チ直線 MN ノ極方程式ナリ

此ニ特ニ $\alpha=0$ トスレバ　$\rho\cos\theta=p$　(2)

又 $p=0$ トスレバ　$\theta=\alpha'$　(3)

(2) ハ極ヨリ p ナル距離ニ於テ原線ニ垂直ナル直線ノ方程式ニシテ, (3) ハ極ヲ通過シ原線ト α' ナル角ヲナス直線ノ方程式ナリ

注意　直角座標ニ於ケル直線ノ方程式 $ax+by+c=0$ ニ於テ

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta$$

$$a=-\frac{c}{p}\cos\alpha, \qquad b=-\frac{c}{p}\sin\alpha$$

ト置クトキハ

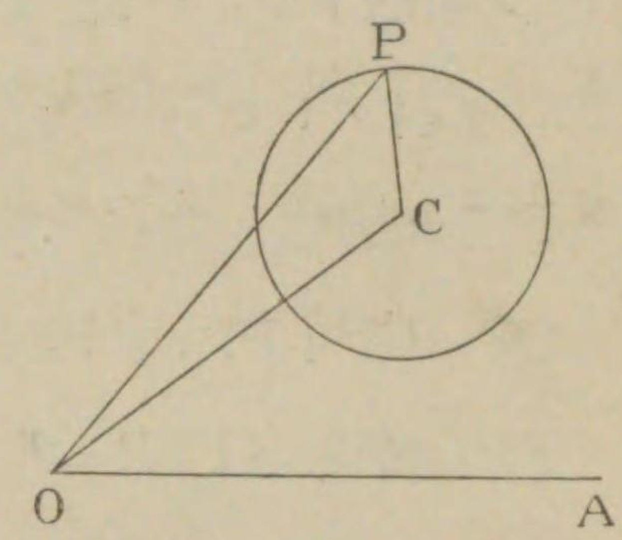
$$-\frac{\rho c}{p}\cos\theta\cos\alpha-\frac{\rho c}{p}\sin\theta\sin\alpha+c=0$$

即チ
$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p$$

トナリ, 直線ノ極方程式 (1) ト一致ス

(ii) 圓ノ極方程式

O ヲ極座標ノ極, OA ヲ原線トシ, 中心ガ $C(c, \alpha)$ ニシテ半徑ガ r ナル圓ノ上ニ於ケル一點ヲ $P(\rho, \theta)$ トスルトキハ



$$\overline{OP}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OP}\cdot\overline{OC}\cos POC=\overline{CP}^2$$

此ニ　$OP=\rho \qquad \angle AOP=\theta$

　　$OC=c \qquad \angle AOC=\alpha$

　　$CP=r$

故ニ
$$\rho^2-2\rho c\cos(\theta-\alpha)+c^2=r^2 \qquad (1)$$

(1) ハ即チ中心ガ $C(c, \alpha)$ ニシテ半徑ガ r ナル圓ノ方程式ナリ

此ニ特ニ $c=r$ トスレバ　$\rho=2c\cos(\theta-\alpha)$　(2)

$c=r,\ \alpha=0$ トスレバ　$\rho=2c\cos\theta$　(3)

$c=0$ トスレバ　$\rho=r$　(4)

(2) ハ極ヲ通過スル圓ノ方程式, (3) ハ極ヲ通過シ且原線上ニ中心ヲ有スル圓ノ方程式, 又 (4) ハ極ヲ中心トスル圓ノ方程式ナリ

注意　直角座標ニ於ケル圓ノ方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ニ於テ

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta$$

$$a=c\cos\alpha, \qquad b=c\sin\alpha$$

ト置クトキハ

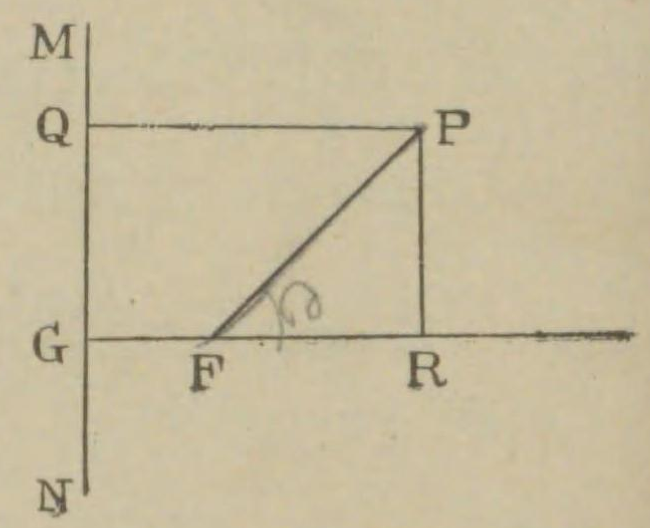
$$(\rho\cos\theta-c\cos\alpha)^2+(\rho\sin\theta-c\sin\alpha)^2=r^2$$

即チ
$$\rho^2-2\rho c\cos(\theta-\alpha)+c^2=r^2$$

トナリ, 圓ノ極方程式 (1) ト一致ス

(iii) 楕圓，雙曲線，抛物線ノ極方程式

焦點 F ヲ極座標ノ極トシ，F ヲ通過シテ準線 MN ニ垂直ナル直線 GF ヲ原線トシ，一點 $P(\rho, \theta)$ ヨリ MN 及ビ GF ニ夫々垂線 PQ, PR ヲ引クトキハ



$$FP = eQP$$

$$QP = GF + FP\cos PFR$$

此ニ $FP=\rho,\quad \angle PFR=\theta$

依テ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ナルトキ $\rho=l$ トスレバ

$$\rho = l + e\rho\cos\theta$$

即チ

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

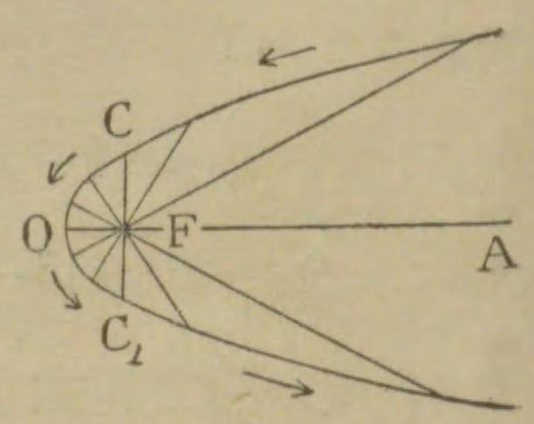
此ノ方程式ハ θ ノ代リニ $-\theta$ ト置クモ變ゼザルガ故ニ曲線ハ原線ニ關シテ對稱ナリ，又 θ ノ實値ニ對シテ ρ ノ値虛數トナルコトナシ

I $e=1$

$$\rho=\frac{l}{1-\cos\theta}$$

$\theta=0$ ノトキ ρ ハ無限ニ大ニシテ，$\theta=\pi$ ノトキ $\rho=\dfrac{l}{2}$ トナル，故ニ曲線ハ點 $O\left(\dfrac{l}{2},\pi\right)$ ニ於テ原線ニ交ハル

$\theta>0$ ナルトキ $\rho>0$ ニシテ θ ノ増大スルニ從ヒ ρ ハ益減少シ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 即チ C ニ於テ l トナリ，$\theta=\pi$ 即チ O ニ於テ $\dfrac{l}{2}$ トナル，$\theta>\pi$ ナル場合ハ對稱ノ性質ヨリ直チニ之ヲ知ルコトヲ得



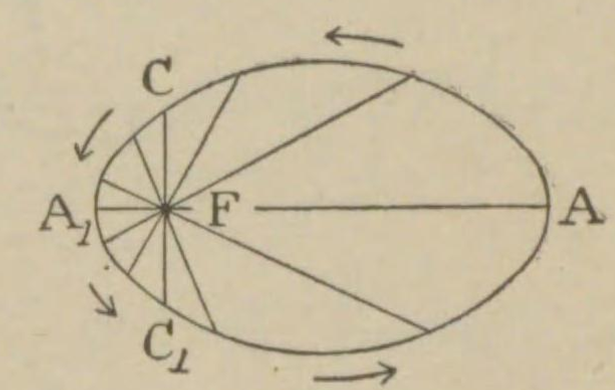
II $e<1$

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

$\theta=0$ ノトキ $\rho=\dfrac{l}{1-e}$ ニシテ，$\theta=\pi$ ノトキ $\rho=\dfrac{l}{1+e}$，即チ曲線ハ點 $A\left(\dfrac{l}{1-e},0\right)$ 及ビ點 $A_1\left(\dfrac{l}{1+e},\pi\right)$ ニ於テ原線ニ交ハル

$\theta>0$ ナルトキ $\rho>0$ ニシテ θ ノ増大スルニ從ヒ ρ ハ益減少シ A ヨリ $C\left(l,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ヲ經テ A_1 ニ至ル

$\theta>\pi$ ナル場合ハ前同樣ニ對稱ニヨリテ明ナリ

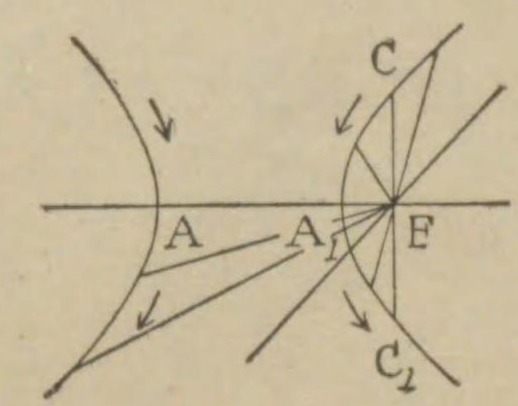


III $e>1$

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

$\theta=0$ ノトキ $\rho=\dfrac{l}{1-e}<0$ ニシテ，$\theta=\pi$ ノトキ $\rho=\dfrac{l}{1+e}>0$，即チ曲線ハ點 $A\left(\dfrac{l}{1-e},0\right)$ 及ビ點 $A_1\left(\dfrac{l}{1+e},\pi\right)$ ニ於テ原線ニ交ハル

$0<\theta<\cos^{-1}\dfrac{1}{e}$ ニ於テハ $\rho<0$ ニシテ其ノ絕對値ハ θ ノ増大スルニ從テ益増大シ，$\cos^{-1}\dfrac{1}{e}$ ニ至リテ $|\rho|$ ハ無限ニ大ナリ又 $\cos^{-1}\dfrac{1}{e}<\theta\leqq\pi$ ニ於テハ $\rho>0$ ニシテ其ノ値ハ θ ノ増大スルニ從テ益減少シ，$\theta=\pi$ ニ至リテ $\dfrac{l}{1+e}$ トナル



$\theta>\pi$ ナル場合ハ對稱ニヨリテ明ナルコト前ノ場合ト同樣ナリ

注意 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ ト置キテ上ニ得タル極方程式

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

即チ
$$\rho-e\rho\cos\theta=l$$

ヲ直角座標ニ變換スルトキハ

$$\sqrt{x^2+y^2}-ex=l$$

即チ
$$x^2+y^2=(ex+l)^2$$

從テ
$$(1-e^2)x^2-2elx+y^2=l^2$$

I $e=1$

$$y^2=2l\left(x+\frac{l}{2}\right)$$

座標軸ノ平行移動ニヨリ $x+\frac{l}{2}=x'$ ト置クトキハ

$$y^2=2lx'$$

即チ拋物線ノ方程式ヲ得

II $e\gtrless1$

$$x^2-\frac{2el}{1-e^2}x+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{l^2}{1-e^2}$$

即チ
$$\left(x-\frac{el}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^2$$

座標軸ノ平行移動ニヨリ $x-\frac{el}{1-e^2}=x'$ ト置クトキハ

$$x'^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^2$$

即チ
$$\frac{x'^2}{\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{1-e^2}}=1$$

故ニ $e<1$ ナルトキハ橢圓, $e>1$ ナルトキハ雙曲線ノ方程式ナリ

(iv) 極方程式 $a\rho+b\theta+c=0$ ノ圖示

此ノ方程式ハ $a=0$ ナルトキハ $\theta=-\frac{c}{b}$ トナリテ極ヲ通過スル直線ヲ表ハシ, $b=0$ ナルトキハ $\rho=-\frac{c}{a}$ トナリテ極ヲ中心トスル圓ヲ表ハス

$a\gtrless0,\ b\gtrless0$ トシテ, $c=0$ ナルトキハ $a\rho+b\theta=0$ トナリ, $c\gtrless0$ ナルトキハ $c=b\alpha$ ト置ケバ $a\rho+b(\theta+\alpha)=0$ トナリ, 次ニ原線ヲ回轉シテ $\theta+\alpha=\theta'$ ト置ケバ $a\rho+b\theta'=0$ トナル, 故ニ結局方程式 $\rho=k\theta$ ノ表ハス曲線ヲ研究スルコトニ歸着ス

$\rho=k\theta$ ニ於テ θ ノ代リニ $-\theta$ 又 ρ ノ代リニ $-\rho$ ト置キテ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ極ヲ通過シ原線ニ垂直ナル直線ニ關シテ對稱ナリ

$\theta=0$ ノトキ $\rho=0$ ニシテ, θ ノ絕對値ガ增大スルニ從ヒ ρ ノ絕對値ハ正比例シテ增大ス, 故ニ曲線ハ益極ニ遠ザカル

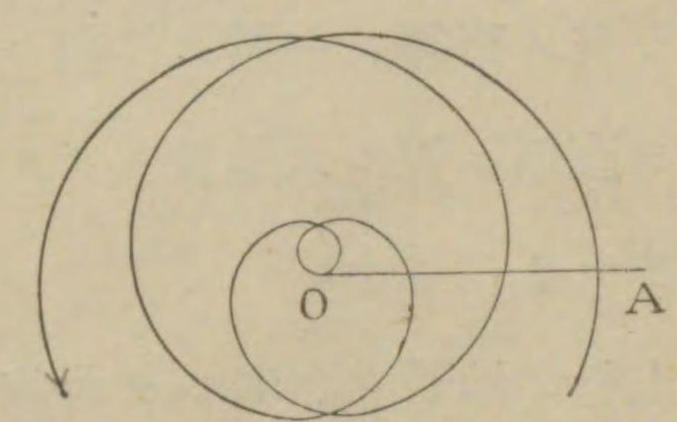
$\theta=\theta_1$ ノトキ $\rho=\rho_1$, $\theta=\theta_1+2\pi$ ノトキ $\rho=\rho_2$, $\theta=\theta_1+4\pi$ ノトキ $\rho=\rho_3,\ldots\ldots,\theta=\theta_1+(2n-2)\pi$ ノトキ $\rho=\rho_n$ トスレバ

$$\rho_2=k(\theta_1+2\pi)=\rho_1+2\pi k$$

$$\rho_3=k(\theta_1+4\pi)=\rho_2+2\pi k$$

....

$$\rho_n=k(\theta_1+\overline{2n-2}\pi)=\rho_{n-1}+2\pi k$$



即チ
$$\rho_2-\rho_1=\rho_3-\rho_2=\ldots=\rho_n-\rho_{n-1}$$
$$=2\pi k$$

$k>0$ トシ前記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ作ルトキハ上ノ圖形ヲ得, 此ノ曲線ヲ**アルキメデスノ螺線**トイフ

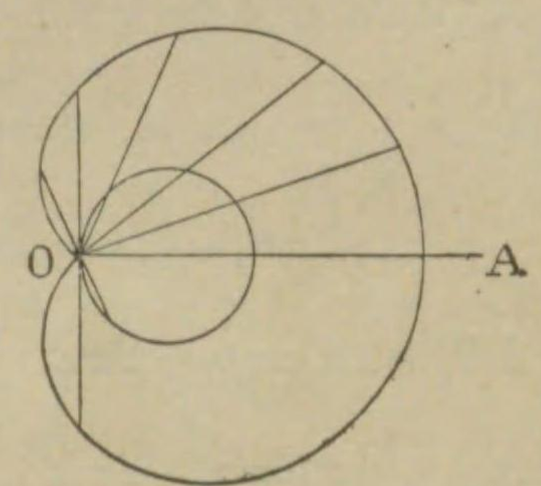
(v) 極方程式 $\rho=a(\cos\theta+1)$ ノ圖示

此ノ方程式ニ於テ $\theta=0$ ト置ケバ $\rho=2a$ トナリ, $\theta=\pi$ ト置ケバ $\rho=0$ トナル, 故ニ曲線ハ極及ビ點 $(2a, 0)$ ニ於テ原線ニ交ハル

θ ノ代リニ $-\theta$ ト置クトキ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ原線ニ關シテ對稱ナリ

θ ノ總テノ値ニ對シテ ρ ノ値ハ實數ニシテ, θ ノ値ガ 0 ヨリ增大スルニ從ヒ ρ ノ値ハ $2a$ ヨリ益減少ス, 故ニ曲線ハ益極ニ近ヅキ, $\theta=\pi$ ノトキ極ニ達ス

$\rho_1=a\cos\theta$, $\rho_2=a$ ト置クトキハ $\rho=\rho_1+\rho_2$ トナル, 卽チ極方程式 $\rho=a(\cos\theta+1)$ ノ表ハス曲線上ノ點ノ動徑ハ $\rho_1=a\cos\theta$ 及ビ $\rho_2=a$ ナル二ツノ曲線上ノ點ノ動徑ノ和トシテ之ヲ索ムルコトヲ得

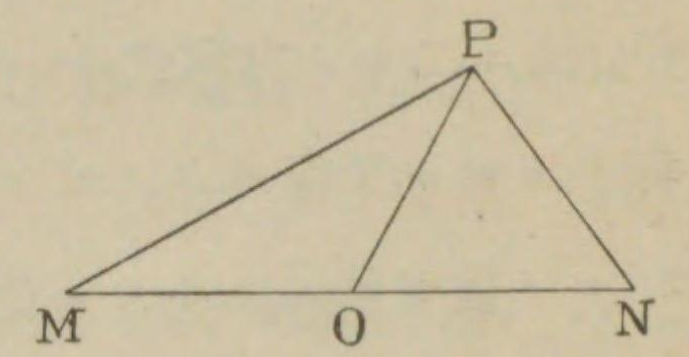


然ルニ $\rho_1=a\cos\theta$ ハ本節例題(ii)ニヨリ極ヲ通過シaヲ直徑トスル圓ヲ表ハス, 故ニ $\rho=a(\cos\theta+1)$ ノ表ハス曲線ハ直徑ガaナル圓ヲ畫キ其ノ直徑ノ一端ヨリ引ケル動徑ヲ直徑ニ等シク延長シタル端ノ軌跡ナリ

上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ作ルトキハ上ノ圖形ヲ得

此ノ曲線ヲ**心臟線**トイヒ, 方程式 $\rho=a\cos\theta+b$ ニ於テ $a=b$ ナル特別ナル場合ニ相當スルモノトス

(vi) 底邊ガ一定ニシテ他ノ二邊ノ積ガ底邊ノ半ノ平方ニ等シキ三角形ノ頂點ノ軌跡



三角形 MNP ノ底邊 MN ノ中點 O ヲ極トシ, M, N, P ノ座標ヲ夫々 $(-a,\pi)$, $(a,0)$, (ρ,θ) トスルトキハ

$$\overline{MP}^2=\overline{OM}^2+\overline{OP}^2-2OM\cdot OP\cos MOP$$

$$\overline{NP}^2=\overline{ON}^2+\overline{OP}^2-2ON\cdot OP\cos NOP$$

此ニ $$OP=\rho,\quad \angle NOP=\theta,\quad OM=ON=a$$

故ニ $$\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\theta}\,\sqrt{a^2+\rho^2+2a\rho\cos\theta}=a^2$$

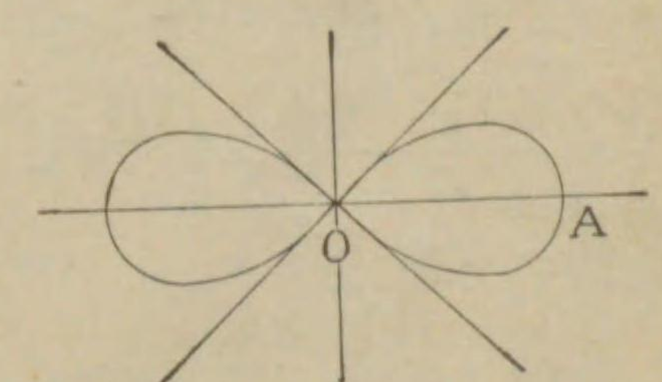
從テ $$(a^2+\rho^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta=a^4$$

卽チ $$\rho^2=2a^2\cos2\theta$$

此ノ方程式ニ於テ $\theta=0$ ト置ケバ $\rho=\pm\sqrt{2}a$, 又 $\theta=\frac{\pi}{4}$ ト置ケバ $\rho=0$, 故ニ曲線ハ極及ビ點 $(\sqrt{2}a,0)$, $(-\sqrt{2}a,0)$ ヲ通過ス

θ ノ代リニ $-\theta$ ト置クモ, ρ ノ代リニ $-\rho$ ト置クモ方程式變ゼザルガ故ニ曲線ハ原線ニ關シテモ, 極ニ關シテモ對稱ナリ

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ ノトキ ρ ノ値ハ實數ニシテ, $\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ ノトキハ虛數トナル, 故ニ曲線ハ $\theta=0$ ト $\theta=\frac{\pi}{4}$ トノ間ニ存在シ, $\theta=\frac{\pi}{4}$ ト $\theta=\frac{\pi}{2}$ トノ間ニハ存在セズ



θ ガ 0 ヨリ增大シテ $\frac{\pi}{4}$ ニ至ル間ニ ρ ハ $\sqrt{2}a$ ヨリ減少シテ 0 ニ至ル

上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ上ノ圖形ヲ得, 此ノ曲線ヲ**雙紐線**トイフ

23. 徑數ニテ表ハシタル曲線ノ方程式

抛物線ノ方程式 $y^2=4px$ ニ於テ $y=2pm$ ト置クトキハ $x=pm^2$ ヲ得，逆ニ $x=pm^2, y=2pm$ ヨリ m ヲ消去スルトキハ $y^2=4px$ ヲ得，故ニ二ツノ方程式 $x=pm^2, y=2pm$ ハ一ツノ抛物線ヲ表ハスト考フルコトヲ得ベク，m ニ順次ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル x, y ノ値ヲ索ムルトキハ抛物線ヲ畫クコトヲ得ベシ

此ノ如キ場合ニ m ヲ徑數トイヒ，$x=pm^2$ 及ビ $y=2pm$ ヲ徑數 m ニテ表ハシタル抛物線ノ方程式トイフ

同様ニ $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi$ ヨリ ϕ ヲ消去スルトキハ圓ノ方程式 $x^2+y^2=r^2$ ヲ得，故ニ $x=r\cos\phi, y=r\sin\phi$ ハ徑數 ϕ ニテ表ハシタル圓ノ方程式ナリ

$x=a\cos\phi, y=b\sin\phi$ ヨリ ϕ ヲ消去スルトキハ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ得，又 $x=a\sec\phi, y=b\tan\phi$ ヨリ ϕ ヲ消去スルトキハ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ得，故ニ $x=a\cos\phi, y=b\sin\phi$ ハ徑數 ϕ ニテ表ハシタル楕圓ノ方程式ニシテ，$x=a\sec\phi, y=b\tan\phi$ ハ雙曲線ノ方程式ナリ

徑數ヲ用フル場合ニハ同一ノ曲線ノ方程式ニシテ種々ノ形ヲ取ルコトヲ得，例ヘバ $x=a\frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2}$，$y=b\frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2}$ ヨリ ϕ ヲ消去スルトキハ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ得，故ニ $x=a\frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2}$，$y=b\frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2}$ モ亦雙曲線ノ方程式ナリ

曲線ノ研究ニ於テ徑數ニテ表ハシタル方程式ヲ用フルヲ便トスルコト少カラズ，次ニ一二ノ例ヲ擧グベシ

24. 例題

(i) 方程式 $x^3+y^3=3xy$ ノ圖示

$x=0, y=0$ ハ此ノ方程式ヲ滿足ス，故ニ曲線ハ原點ヲ通過ス

x ト y トヲ更換スルトキ方程式變ゼズ，故ニ曲線ハ直線 $y=x$ ニ關シテ對稱ナリ

x, y 共ニ負ナルトキハ方程式ノ左邊ハ負ニシテ右邊ハ正ナリ，故ニ曲線ハ第三象限ニハ存在セズ

方程式ヲ變ジテ

$$(x+y+1)(x^2-xy+y^2)=(x+y)^2$$

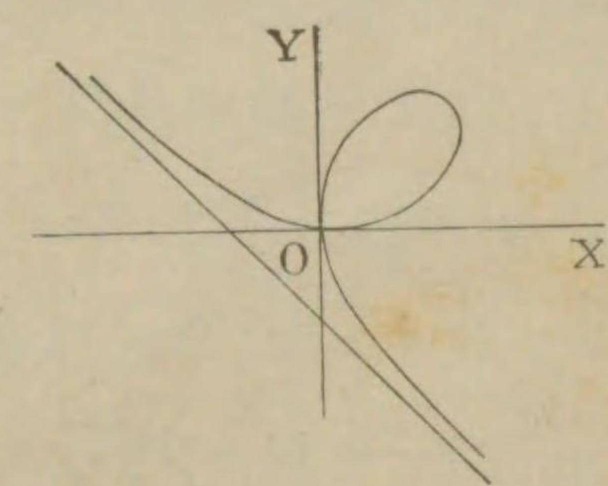
ト書クトキハ $x+y+1>0$，故ニ曲線ハ直線 $x+y+1=0$ ノ上方ニアリ

次ニ曲線上ノ點ヲ索ムル爲メニ $y=xt$ ト置クトキハ

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\qquad y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

ヲ得，此ノ徑數 t ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之ニ對應スル x, y ノ値ヲ得

$t>0$ ナルトキハ $x>0, y>0$ ニシテ t ガ 0 ヨリ 1 ニ至ル間ニ x,y 共ニ 0 ヨリ $\frac{3}{2}$ ニ至リ，t ガ 1 ヨリ無限大ニ至ル間ニ x, y 共ニ $\frac{3}{2}$ ヨリ 0 ニ至ル



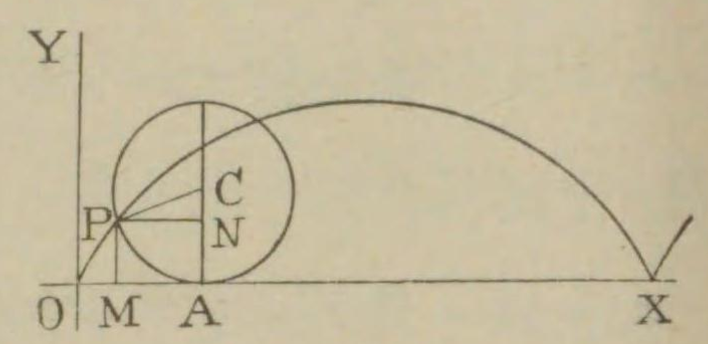
$-\infty<t<-1$ ナルトキハ，x ハ 0 ヨリ ∞ ニ至リ，y ハ 0 ヨリ $-\infty$ ニ至ル

又 $-1<t<0$ ナルトキハ x ハ $-\infty$ ヨリ 0 ニ至リ，y ハ ∞ ヨリ 0 ニ至ル

上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ上ノ圖形ヲ得，此ノ曲線ヲ**正葉線**トイフ

(ii) 一定ノ半徑ヲ有スル圓ガ一定ノ直線ニ沿ウテ轉ズルトキ，其ノ上ニ於ケル點ノ軌跡ヲ表ハス方程式

定直線ヲ横軸トシ，定圓ガ最初ニ切シタル點 O ヲ原點トシ，定圓ノ半徑ヲ a, 任意ノ位置ニ於ケル圓ノ中心ヲ C トシ，O ニ對應スル圓上ノ點P (x,y) 及ビ C ヨリ横軸ニ夫々垂線 PM, CA ヲ引キ，P ヨリ CA ニ垂線 PN ヲ引クトキハ



$$\overline{OM}=\overline{OA}-\overline{MA}=\widehat{PA}-\overline{PC}\sin PCN$$

$$\overline{MP}=\overline{AC}-\overline{NC}=\overline{AC}-\overline{PC}\cos PCN$$

此ニ　$OM=x,\quad MP=y,\quad AC=PC=a$

$\angle PCN=\theta$ ト置クトキハ

$$\widehat{PA}=a\theta$$

故ニ　$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad y=a(1-\cos\theta)$

是レ卽チ索ムル軌跡ノ方程式ナリ

此ノ方程式ハ $\theta=0$ ノトキ $x=0$, $y=0$, 故ニ曲線ハ原點ヲ通過ス

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ ナルヲ以テ $0\leqq y\leqq 2a$, 故ニ曲線ハ直線 $y=2a$ ト横軸トノ間ニアリ

$y=0$ ト置ケバ $\theta=2n\pi$, 從テ $x=2n\pi a$, 此ニ n ハ 0 又ハ整數

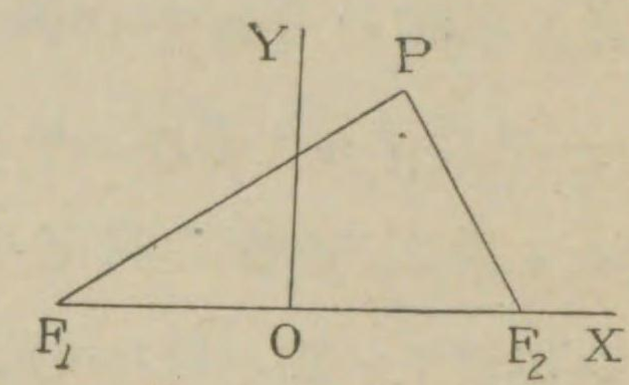
θ ノ代リニ $\theta+2n\pi$ ト置ケバ y ハ變ゼズシテ x ハ $x+2n\pi a$ トナル，故ニ曲線ハ同一ノ形ヲ際限ナク反復ス

上記ノ性質ヲ參考シテ曲線ヲ畫ケバ上ノ圖形ヲ得，此ノ曲線ヲ擺線トイフ

25. 雙極座標及ビ雙角座標

平面上ニ於ケル點ノ位置ヲ定ムルニハ上ニ論ジタル平行座標及ビ極座標ノ外ニ種々ノ方法アリ，次ノ如キモ其ノ簡單ナルモノナリ

平面上ニ於ケル二ツノ定點ヲ F_1, F_2 トシ，一點 P ヲ取リ



$F_1P=r_1,\qquad F_2P=r_2$

$\angle PF_1F_2=\theta_1,\quad \angle PF_2F_1=\theta_2$

ト置クトキハ P ノ一定ノ位置ニ對シテ $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ ハ何レモ定リタル値ヲ有ス，此ノ r_1, r_2 ヲ P ノ雙極座標トイヒ，θ_1, θ_2 ヲ其ノ雙角座標トイフ，但シ θ_1, θ_2 ノ一對ノ値ニ對シテ P ノ位置ハ唯一ニ定マレドモ，r_1, r_2 ノ一對ノ値ニ對シテハ必ズシモ然ラズ，卽チ $r_1+r_2\geqq F_1F_2$ ナルコトヲ要シ，$r_1+r_2>F_1F_2$ ノ場合ニハ r_1, r_2 ノ一對ノ値ハ直線 F_1F_2 ノ兩側ニ各一ツノ點ヲ定ムルモノトス

前ニ擧ゲタル $r_1+r_2=a$ ハ雙極座標ニ於ケル橢圓ノ方程式ニシテ，$r_1=kr_2$ ハ圓ノ方程式，又 $\theta_1+\theta_2=a$ ハ雙角座標ニ於ケル圓ノ弧ノ方程式ナリ

尙 F_1F_2 ヲ横軸，其ノ中點 O ヲ原點トシ，任意ノ點 P ノ直角座標ヲ x, y, 其ノ雙極座標ヲ r_1, r_2, 其ノ雙角座標ヲ θ_1, θ_2 トシ，$F_1F_2=2a$ ト置クトキハ

$$r_1=\sqrt{(a+x)^2+y^2},\qquad r_2=\sqrt{(a-x)^2+y^2}$$

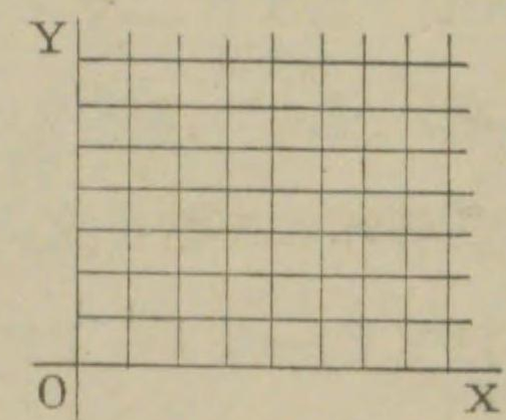
$$\tan\theta_1=\frac{y}{a+x},\qquad \tan\theta_2=\frac{y}{a-x}$$

此ノ關係ニヨリ座標ノ變換ヲナスコトヲ得

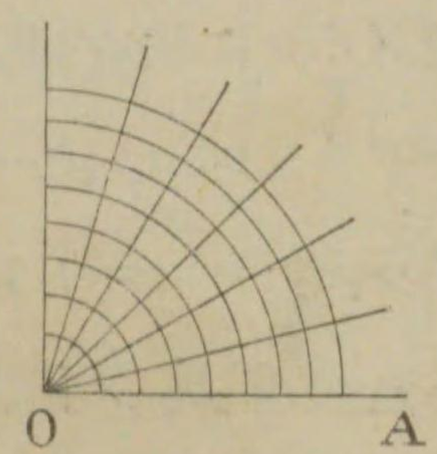
26. 座標ヲ決定スル曲線群

平行座標ニ於テ點Pノ座標ガ a, b ナリトハ一定ノ座標軸ニ平行ニ $x=a, y=b$ ナル直線ヲ引クトキ其ノ交點ガPナリトイフコトナリ

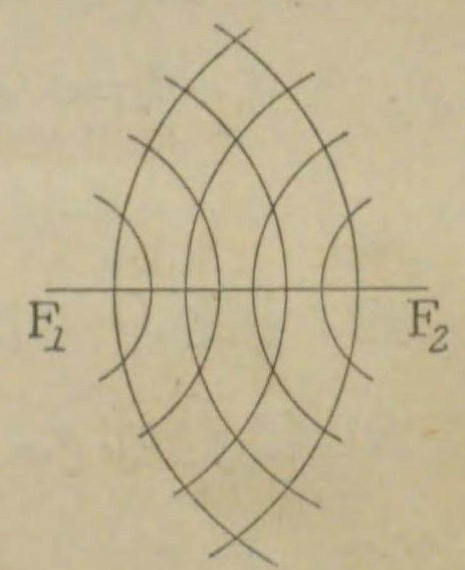
從テ兩軸ニ平行ナル直線 $x=\lambda$, $y=\mu$ ヲ作リ，λ 及ビ μ ニ順次ニ種々ノ異リタル値ヲ與フルトキハ，其ノ平面上ノ點ハ何レモ此ノ二組ノ直線ノ交點ナリト考フルコトヲ得，即チ二組ノ平行ナル直線群ハ平面上ノ總テノ點ヲ決定ス

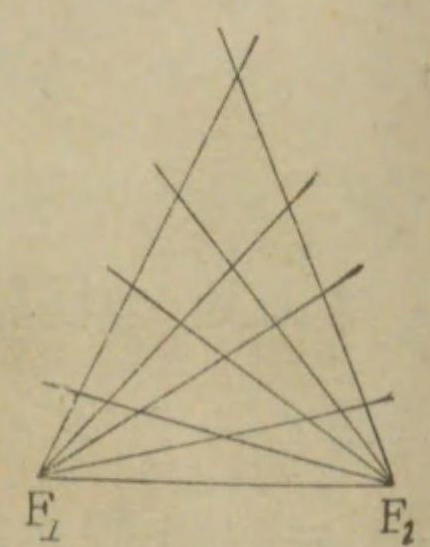


同樣ニ極座標ニ於テ $P(a,\alpha)$ ハ極ヲ中心トスル圓 $\rho=a$ ト極ヨリ引ケル直線 $\theta=\alpha$ トノ交點ナリ，故ニ圓群 $\rho=\lambda$ ト直線群 $\theta=\mu$ トハ平面上ノ總テノ點ヲ決定ス



雙極座標ニ於テハ二ツノ圓群 $r_1=a_1, r_2=a_2$ ハ平面上ノ點ヲ決定シ，雙角座標ニ於テハ二ツノ直線群 $\theta_1=\alpha_1$, $\theta_2=\alpha_2$ ハ平面上ノ點ヲ決定ス





一般ニ一ツノ曲線群 $u=\lambda$ ト他ノ曲線群 $v=\mu$ トガ互ニ相交ハリテ平面上ノ點ヲ決定スル場合ニハ u, v ヲ以テ平面上ノ點ノ座標トスルコトヲ得，故ニ座標ノ取リ方ハ限リナク多クアリ，從テ研究スベキ問題ニ對シテ最モ適當ナルガ如ク選定スベキモノトス

問題

1. 直交軸 OX, OY ニ關スル點Pノ座標ヲ x, y, 又斜交軸 OX, OY' ニ關スル同一ノ點Pノ座標ヲ x', y' トシ，x, y ト x', y' トノ關係ヲ索メヨ

2. 座標軸ノ移動ニヨリ方程式 $xy-x-y=1$ ニ於ケル x 及ビ y ノ項ヲ消去セヨ

3. 座標軸ノ回轉ニヨリ方程式 $x^2+2xy+2y^2=4$ ニ於ケル xy ノ項ヲ消去セヨ

4. 方程式 $x^2+y^2=a^2$ ハ座標軸ノ回轉ニヨリ形ヲ變ゼザルコトヲ證明セヨ

5. 方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ ニ於テ先ヅ原點ヲ $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ ニ移動シ，次ニ座標軸ヲ 45° 回轉セヨ

6. 方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ $x'y'=c$ ノ形ニ變ゼヨ

7. 方程式 $x(y-x)=1$ ハ雙曲線ヲ表ハスコトヲ證明セヨ

8. 方程式 $x^3+y^3=3xy$ ハ直線 $y=x$ ヲ新座標横軸トスルトキ如何ナル形ヲ取ルカ

9. 極座標ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ作レ

   i. 定圓上ノ定點ヲ通過スル弦ノ中點ノ軌跡

   ii. 定點ヨリ定直線ニ至ル線分ヲ一定ノ長サニ等シク延長シタル端ノ軌跡

10. 次ノ極方程式ヲ圖示セヨ

i. $\rho\theta=a$　　ii. $\rho=a\cos\theta+b$

iii. $\rho=a\cos\frac{\theta}{2}$　　iv. $\rho=a\sin 3\theta$

11. 次ノ極方程式ヲ直角座標ニテ表ハセ

i. $\rho=a(1-\cos\theta)$　　ii. $\rho^2\cos 2\theta=a^2$

iii. $\rho=a\sin 2\theta$　　iv. $\rho=2a\sin\theta\tan\theta$

12. 次ノ方程式ヲ極座標ニテ表ハセ

i. $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$　　ii. $\frac{x^2}{a+x}=\frac{y^2}{a-x}$

iii. $x^3+y^3=3xy$　　iv. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

13. 次ノ式ヨリ徑數ヲ消去シ且曲線ヲ圖示セヨ

i. $x=\cos^2 t,\quad y=\sin t$

ii. $x=at^2,\quad y=a^2t^3$

14. 同一ノ座標軸ヲ用ヒテ二ツノ曲線群 $x^2-y^2=a,\ xy=b$ ヲ畫ケ

15. 同一ノ座標ノ極 F_1, F_2 ヲ用ヒテ二ツノ曲線群 $\theta_1+\theta_2=a$, $r_1=kr_2$ ヲ畫ケ

第四章　二次曲線ノ分類

27. 二元二次方程式

x, y ヲ一定ノ座標軸ニ關スル點ノ座標ト考フルトキ, x, y ニ關スル一次方程式 $ax+by+c=0$ ハ直線ヲ表ハシ, x, y ニ關スル或ル二次方程式例ヘバ $y^2=ax+bx^2$ ハ楕圓, 雙曲線, 又ハ抛物線ヲ表ハシ, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ハ圓ヲ表ハシ, $xy=1$ ハ等邊雙曲線ヲ表ハスコトハ前章ニ於テ之ヲ詳論セリ

是等ノ二次方程式ハ何レモ x, y ニ關スル一般二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ特殊ナル場合ニ過ギズ

以下本章ニ於テハ座標軸ノ平行移動ト回轉トニヨリテ x, y ニ關スル一般二次方程式ヲ變ジテ標準ノ形トナシ, 二次曲線ノ分類ヲ試ミントス

注意 (1) 第 16 節ニ於テ説明セル如ク有理整方程式ノ次數ハ座標軸ノ變換ニヨリテ變ズルコトナシ, 故ニ座標軸ヲ平行ニ移動シ又ハ回轉セシムルモ二次方程式ニ於ケル二次ノ項全部ノ係數消滅スルコトナシ

注意 (2) 本章ニ於テ x, y ハ直交軸ニ關スル點ノ座標トシテ之ヲ論ズ, 從テ斜交軸ニ關スル方程式ハ先ヅ之ヲ直交軸ニ關スルモノニ變換シテ後ニ同一ノ方法ヲ應用スベキモノトス

28. 座標軸ノ平行移動

二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ニ於テ

$$x=x'+x_1, \quad y=y'+y_1$$

ト置キ座標ノ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移ストキハ (1) ハ

$$a(x'+x_1)^2+2h(x'+x_1)(y'+y_1)+b(y'+y_1)^2$$
$$+2g(x'+x_1)+2f(y'+y_1)+c=0$$

卽チ $ax'^2+2hx'y'+by'^2+2(ax_1+hy_1+g)x'+2(hx_1+by_1+f)y'$

$$+ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \qquad (2)$$

トナル

聯立方程式

$$\left.\begin{array}{l} ax_1+hy_1+g=0 \\ hx_1+by_1+f=0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

ヨリ x_1, y_1 ヲ定メ得ルトキハ (2) ハ

$$ax'^2+2hx'y'+by'^2+c'=0 \qquad (4)$$

此ニ $c'=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$

ナリ

今 (3) ノ第一式ニ b ヲ乘ジ, 第二式ニ $-h$ ヲ乘ジテ加フルトキハ

$$(ab-h^2)x_1=hf-bg \qquad (5)$$

又 (3) ノ第一式ニ $-h$ ヲ乘ジ, 第二式ニ a ヲ乘ジテ加フルトキハ

$$(ab-h^2)y_1=hg-af \qquad (6)$$

$ab-h^2 \gtrless 0$ ナルトキハ (5) 及ビ (6) ヨリ

$$x_1=\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \qquad y_1=\frac{hg-af}{ab-h^2} \qquad (7)$$

(7) ニヨリ x_1, y_1 ノ値ハ確定ス, 卽チ此ノ場合ニハ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移スコトニヨリ (1) ヲシテ (4) ノ形ヲ取ラシムルコトヲ得

$ab-h^2=0$ ニシテ且 $hf-bg$ 及ビ $hg-af$ ノ雙方又ハ何レカ一方ガ零ニ等シカラザルトキハ x_1, y_1 ノ少クモ一ツハ有限ナラズ, 從テ (1) ヲシテ (4) ノ形ヲ取ラシムベキ新原點 (x_1, y_1) ハ存在セズ

$ab-h^2=0$ ニシテ且 $hf-bg=0$, $hg-af=0$ ナルトキハ x_1, y_1 ノ値ハ不定ナリ, 此ノ場合ニハ直線 $ax+hy+g=0$ 上ノ任意ノ一點ノ座標ヲ x_1, y_1 トスレバ (1) ハ (4) ノ形ヲ取ル

上ニ述タル如ク $ab-h^2 \gtrless 0$ ナルトキ, 原點ヲ (x_1, y_1) ニ移セバ (1) ハ (4) ノ形卽チ

$$ax'^2+2hx'y'+by'^2+c'=0$$

トナリテ一次ノ項ヲ含マズ, 從テ (x', y') ガ此ノ方程式ヲ滿足スルナラバ $(-x', -y')$ モ亦之ヲ滿足ス, 卽チ此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ點 (x_1, y_1) ニ關シテ對稱ナリ

此ノ場合ニ點 (x_1, y_1) ヲ此ノ方程式ノ表ハス曲線ノ**中心**トイヒ, 中心ヲ有スル二次曲線ヲ**有心二次曲線**トイフ

$ab-h^2=0$ ナルトキハ此ノ曲線ハ確定セル唯一ツノ中心ヲ有セズ

此ノ場合ニハ曲線ヲ**無心二次曲線**トイフ

29. 有心二次曲線ノ標準ノ形

有心二次曲線ニ於テ原點ヲ $(x_1,\ y_1)$ ニ移ストキハ曲線ノ方程式ハ前節 (4) ニヨリ

$$ax'^2+2hx'y'+by'^2+c'=0$$

此ニ
$$c'=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$
$$=(ax_1+hy_1+g)x_1+(hx_1+by_1+f)y_1+gx_1+fy_1+c$$

然ルニ前節 (3) ニヨリ

$$ax_1+hy_1+g=0,\qquad hx_1+by_1+f=0$$

故ニ
$$c'=gx_1+fy_1+c \tag{1}$$

又前節 (7) ニヨリ

$$x_1=\frac{hf-bg}{ab-h^2}=\frac{A_{31}}{A_{33}},\quad y_1=\frac{hg-af}{ab-h^2}=\frac{A_{32}}{A_{33}}$$

之ヲ (1) ニ代入シテ

$$c'=g\frac{hf-bg}{ab-h^2}+f\frac{hg-af}{ab-h^2}+c$$

$$=\frac{1}{ab-h^2}(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2) \tag{2}$$

行列式ノ記號ヲ用フルトキハ

$$c'=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$$

依テ
$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

ト置クトキハ曲線ノ方程式次ノ如シ

$$ax'^2+2hx'y'+by'^2+c'=0 \tag{3}$$

此ニ

$$\boxed{c'=\frac{\Delta}{ab-h^2}}=\frac{\Delta}{A_{33}}$$

次ニ (3) ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} x'&=\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta \\ y'&=\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Y}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ト置キテ座標軸ヲ回轉スルトキハ

$$a(\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta)^2+2h(\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Y}\sin\theta)(\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Y}\cos\theta)$$
$$+b(\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Y}\cos\theta)^2+c'=0$$

即チ
$$(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta)\mathrm{X}^2$$
$$+2\{h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(a-b)\sin\theta\cos\theta\}\mathrm{XY}$$
$$+(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta)\mathrm{Y}^2$$
$$+c'=0$$

或ハ
$$a'\mathrm{X}^2+2h'\mathrm{XY}+b'\mathrm{Y}^2+c'=0 \tag{5}$$

此ニ
$$a'=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$
$$h'=h\cos2\theta-\frac{a-b}{2}\sin2\theta$$
$$b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

(5) ヲ簡單ナラシメンガ爲メニ

$$h'=0$$

即チ
$$\boxed{\tan2\theta=\frac{2h}{a-b}}=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} \tag{6}$$

ヨリ θ ノ値ヲ定ムルトキハ (5) ハ次ノ形ヲ取ル

$$a'\mathrm{X}^2+b'\mathrm{Y}^2+c'=0 \tag{7}$$

(6) ヲ滿足スベキ θ ノ値ハ無數ニ多クアリ，其ノ最小ナル正ノ角ヲ α トスルトキハ他ノ角ハ何レモ α ニ 90° ノ整數倍ヲ增減シタルモノニシテ，其ノ何レヲ取ルモ互ニ垂直ナル二直線ノ一ツヲ横軸トシ，他ノ一ツヲ縱軸トスルニ過ギズ，依テ以下 (6) ヲ滿足スル最小ナル正ノ角ヲ取ルコトト定ム

此ノ如クシテ θ ノ値定マルトキハ其ノ値ヲ代入シテ a', b' ノ値定マル，之ニハ次ノ關係ヲ用フルヲ便トス

$$a'=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$

$$h'=h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(a-b)\sin\theta\cos\theta$$

$$=h\cos2\theta-\frac{a-b}{2}\sin2\theta$$

$$b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$

故ニ
$$\boxed{a'+b'=a+b} \qquad (8)$$

$$a'-b'=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta$$

從テ
$$4h'^2+(a'-b')^2=4h^2+(a-b)^2$$

$$4h'^2+(a'-b')^2-(a'+b')^2=4h^2+(a-b)^2-(a+b)^2$$

卽チ
$$\boxed{h'^2-a'b'=h^2-ab} \qquad (9)$$

然ルニ $h'=0$ ト置キタルガ故ニ (8), (9) ヨリ次ノ關係ヲ得

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a'+b'=a+b}\\ a'b'=ab-h^2\end{array}\right\} \qquad (10)$$

故ニ a', b' ハ二次方程式

$$z^2-(a+b)z+ab-h^2=0 \qquad (11)$$

ノ二根ニ等シ

此ノ方程式ノ判別式ヲ作レバ

$$(a+b)^2-4(ab-h^2)=(a-b)^2+4h^2\geqq0$$

ナルガ故ニ二根ハ共ニ實ニシテ $a=b,\ h=0$ ナルトキニ限リ相等シ

卽チ
$$a'=b'$$

從テ (7) ハ次ノ形ヲ取ル

$$X^2+Y^2+c''=0 \qquad (12)$$

$a\gtrless b$ ナル場合ニハ二根ハ等シカラズシテ

$$a'-b'=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta$$

$$2h=(a-b)\tan2\theta$$

依テ
$$2h(a'-b')=\{(a-b)^2+4h^2\}\sin2\theta$$

然ルニ $0<2\theta<180^\circ$ ナルガ故ニ

$$\sin2\theta>0$$

從テ
$$2h(a'-b')>0 \qquad (13)$$

卽チ $h>0$ ナルトキハ $a'>b'$ ニシテ，$h<0$ ナルトキハ $a'<b'$

依テ $h>0$ ナルトキハ二根ノ中ニテ大ナルモノヲ a' トシ，$h<0$ ナルトキハ小ナルモノヲ a' トスベシ

$h=0$ ナルトキハ (3) ハ最初ヨリ (7) ノ形ヲ取リ，軸ヲ回轉スルヲ要セズ

此ノ如クシテ得タル方程式

$$a'X^2+b'Y^2+c'=0 \qquad (14)$$

ヲ**有心二次曲線ノ標準ノ形**トイフ

此ノ方程式ノ表ハス曲線ハ横軸ニ關シテモ縱軸ニ關シテモ對稱ナリ，依テ此ノ兩座標軸ヲ此ノ曲線ノ**軸**トイフ

30. 有心二次曲線ノ分類

有心二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

ニ於テ中心ヲ原點トシ，曲線ノ軸ヲ座標軸トスルトキハ前節ニヨリ方程式ハ次ノ形ヲ取ル

$$a'X^2+b'Y^2+c'=0 \qquad (2)$$

此ニ

$$a'b'=ab-h^2 \gtrless 0$$

$$c'=\frac{\Delta}{ab-h^2} = -\frac{D}{A_{33}}$$

$$\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

(I) $ab-h^2>0$

此ノ場合ニハ $a'b'>0$ 卽チ a' ト b' トハ同一ノ符號ヲ有ス，依テ(2) ハ

$$PX^2+QY^2=R \qquad (3)$$

ノ形トナリ，$P>0$, $Q>0$ ナラシムルコトヲ得

然ルニ $R>0$, $R=0$, 又ハ $R<0$ ナルニヨリテ三ツノ區別アリ

(i) $R>0$

$$\frac{R}{P}=a^2, \qquad \frac{R}{Q}=b^2$$

ト置クトキハ (3) ハ

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

ノ形トナリ，楕圓ヲ表ハス

此ノ特別ナル場合トシテ，$a=b$ ナルトキハ (4) ハ

$$X^2+Y^2=a^2 \qquad (5)$$

トナリ圓ヲ表ハス

(ii) $R=0$

此ノ場合ニハ (3) ハ

$$PX^2+QY^2=0 \qquad (6)$$

トナリ之ヲ滿足スル値ハ $X=0$, $Y=0$ ノミナルガ故ニ (6) ハ原點(0, 0) ヲ表ハス，但シ楕圓ニ於テ其ノ兩軸ガ零トナレル特別ノ場合ト考ヘテ (6) ハ**點楕圓**ヲ表ハストイフコトアリ

(iii) $R<0$

此ノ場合ニハ (3) ノ左邊ハ正ニシテ右邊ハ負ナルガ故ニ之ヲ滿足スベキ實値ナシ，然レドモ

$$\frac{R}{P}=(ia)^2, \qquad \frac{R}{Q}=(ib)^2, \qquad i=\sqrt{-1}$$

ト置クトキハ (3) ハ

$$\frac{X^2}{(ia)^2}+\frac{Y^2}{(ib)^2}=1$$

トナリ**虛楕圓**ヲ表ハストイフコトアリ

(II) $ab-h^2<0$ $A_{33}<0$

此ノ場合ニハ $a'b'<0$ 卽チ a' ト b' トハ反對ノ符號ヲ有ス，依テ(2) ハ

$$PX^2-QY^2=R \qquad (7)$$

ノ形トナリ，$P>0$, $Q>0$ ナラシムルコトヲ得

(i) $R>0$

$$\frac{R}{P}=a^2, \qquad \frac{R}{Q}=b^2$$

ト置クトキハ (7) ハ

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

トナリ雙曲線ヲ表ハス

(ii) $R=0$

此ノ場合ニハ (7) ハ

$$PX^2-QY^2=0 \tag{9}$$

卽チ $(\sqrt{P}X-\sqrt{Q}Y)(\sqrt{P}X+\sqrt{Q}Y)=0$

トナリ，$\sqrt{P}X-\sqrt{Q}Y=0$ 及ビ $\sqrt{P}X+\sqrt{Q}Y=0$ 上ノ點ハ何レモ (9) ヲ滿足ス，故ニ (9) ハ相交ハル二ツノ直線ヲ表ハス

(iii) $R<0$

$$\frac{R}{P}=-a^2, \qquad \frac{R}{Q}=-b^2$$

ト置クトキハ (7) ハ

$$-\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \tag{10}$$

トナリ (8) ト同樣ニ雙曲線ヲ表ハシ，唯橫軸ト縱軸トヲ交換シタルモノトナル

(8) 及ビ (10) ノ雙曲線ヲ互ニ**共軛**ナリトイフ

注意 (1) $a=b$ ニシテ且 $h=0$ ナルトキハ (1) ハ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ形トナリ，中心ノ座標ハ第 28 節 (7) ニヨリ

$$x_1=-g, \qquad y_1=-f$$

原點ヲ中心ニ移ストキハ曲線ノ方程式ハ

$$X^2+Y^2+c'=0$$

此ニ $c'=g(-g)+f(-f)+c=-g^2-f^2+c$

故ニ $g^2+f^2-c>0$, $=0$, 又ハ <0 ナルニ從ヒ上ノ方程式ハ**實圓**，**點圓**，又ハ**虛圓**ヲ表ハスモノトス

注意 (2) 本節ニ於テハ $ab-h^2$ 及ビ R ノ符號ニヨリテ二次曲線ヲ分類セリ，若シ元ノ方程式 (1) ノ係數ノミニヨリテ分類ヲナサバ次ノ如キ結果ヲ得ベシ

本節 (2) ニヨリ

$$a'X^2+b'Y^2+c'=0$$

$$a'b'=ab-h^2 \gtreqless 0$$

$$c'=\frac{\Delta}{ab-h^2}$$

(I) $ab-h^2>0$

此ノ場合ニハ $a'b'>0$ ナルガ故ニ a', b' ハ同符號ヲ有ス，然ルニ前節 (8) ニヨリ

$$a'+b'=a+b$$

故ニ a' ノ符號ハ $a+b$ ノ符號ニ同ジク又 $ab>h^2$ ナルガ故ニ a, b ハ同符號ニシテ，結局 a' ノ符號ハ a ノ符號ニ同ジ，依テ

(i) $a\Delta<0$ ナルトキハ橢圓

(ii) $\Delta=0$ ナルトキハ點橢圓

(iii) $a\Delta>0$ ナルトキハ虛橢圓

(II) $ab-h^2<0$

此ノ場合ニハ $a'b'<0$ ナルガ故ニ a', b' ハ反對ノ符號ヲ有ス，從テ c' 卽チ Δ ノ零ナルト否トニヨリテ區別スルコトヲ要ス

(i) $\Delta \gtrless 0$ ナルトキハ雙曲線

(ii) $\Delta=0$ ナルトキハ相交ハル直線

31. 例題

(i) 方程式 $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$ ノ圖示

前節ニ於ケル一般二次曲線ノ方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=8,\quad h=2,\quad b=5,\quad g=4,\quad f=-8,\quad c=-16$$

故ニ $$ab-h^2=40-4=36>0$$

依テ曲線ハ前節 (I) ノ種類ニ屬ス

座標軸ノ平行移動ニヨリ中心ヲ索ムルトキハ第 28 節 (3) ニヨリ

$$8x_1+2y_1+4=0$$

$$2x_1+5y_1-8=0$$

之ヨリ中心ノ座標 $(-1, 2)$ ヲ得

又第 29 節 (1) ニヨリ

$$c'=gx_1+fy_1+c$$

$$=4(-1)-8(2)-16=-36$$

故ニ原點ヲ曲線ノ中心ニ移シタルトキノ方程式ハ第 29 節 (3) ニヨリ

$$8x'^2+4x'y'+5y'^2=36$$

次ニ座標軸ヲ回轉シテ其ノ角ヲ θ トスルトキハ第 29 節 (6) ニヨリ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\frac{4}{8-5}=\frac{4}{3}$$

此ノ式ヲ滿足スル最小ナル正ノ角ヲ索ムルトキハ約 $26^\circ\ 34'$ ヲ得

依テ座標軸ヲ回轉シタルトキノ方程式ハ第 29 節 (7) ニヨリ

$$a'X^2+b'Y^2=36$$

此ニ a', b' ハ第 29 節 (11) ニヨリ

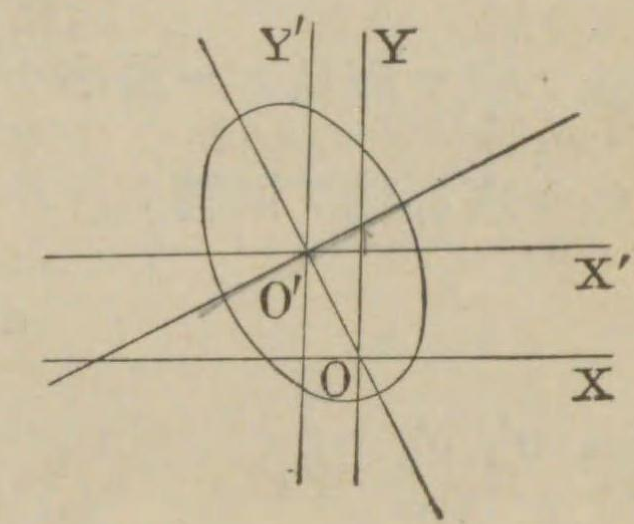
$$z^2-(a+b)z+ab-h^2=0$$

即チ $$z^2-13z+36=0$$

ノ根ニシテ其ノ値ハ 9 及ビ 4 ナリ

然ルニ $h=2>0$ ナルガ故ニ第 29 節 (13) ニヨリ

$$a'=9,\quad b'=4$$



依テ索ムル方程式ハ

$$9X^2+4Y^2=36$$

即チ $$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1$$

トナリ右圖ノ如キ橢圓ヲ表ハス

(ii) 方程式 $x^2+10xy+y^2-12x-12y+6=0$ ノ圖示

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=1,\quad h=5,\quad b=1,\quad g=-6,\quad f=-6,\quad c=6$$

故ニ $$ab-h^2=1-25=-24<0$$

依テ曲線ハ前節 (II) ノ種類ニ屬ス

座標軸ノ平行移動ニヨリ中心ヲ索ムルトキハ

$$x_1+5y_1-6=0$$

$$5x_1+y_1-6=0$$

之ヨリ中心ノ座標 $(1, 1)$ ヲ得

又　$c'=gx_1+fy_1+c$

$$=-6(1)-6(1)+6=-6$$

故ニ原點ヲ中心ニ移シタルトキノ曲線ノ方程式ハ

$$x'^2+10x'y'+y'^2=6$$

次ニ座標軸ヲ回轉シテ其ノ角ヲ θ トスルトキハ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\frac{10}{1-1}$$

此ノ式ヲ滿足スル最小ナル正ノ角ハ 45° ナリ

依テ座標軸ヲ回轉シタルトキノ方程式ハ

$$a'X^2+b'Y^2=6$$

此ニ a', b' ハ

$$z^2-(a+b)z+ab-h^2=0$$

卽チ　$$z^2-2z-24=0$$

ノ根ニシテ其ノ値ハ 6 及ビ -4 ナリ

然ルニ $h=5>0$ ナル故ニ

$$a'=6,\quad b'=-4$$

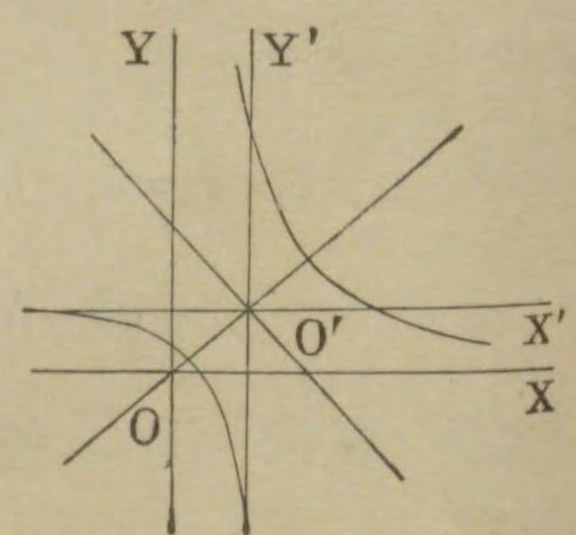
依テ索ムル方程式ハ

$$6X^2-4Y^2=6$$

卽チ

$$\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1$$

トナリ右圖ノ如キ雙曲線ヲ表ハス



(iii)　方程式　$x^2-xy-2y^2-2x+y+1=0$　ノ圖示

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=1,\quad h=-\frac{1}{2},\quad b=-2,\quad g=-1,\quad f=\frac{1}{2},\quad c=1$$

故ニ　$$ab-h^2=-2-\frac{1}{4}=-\frac{9}{4}<0$$

依テ曲線ハ前節 (II) ノ種類ニ屬ス

座標軸ノ平行移動ニヨリ中心ヲ索ムルトキハ

$$2x_1-y_1-2=0$$

$$x_1+4y_1-1=0$$

之ヨリ中心ノ座標 (1, 0) ヲ得

又　$$c'=gx_1+fy_1+c$$

$$=-1(1)+\frac{1}{2}(0)+1=0$$

故ニ原點ヲ中心ニ移シタルトキノ曲線ノ方程式ハ

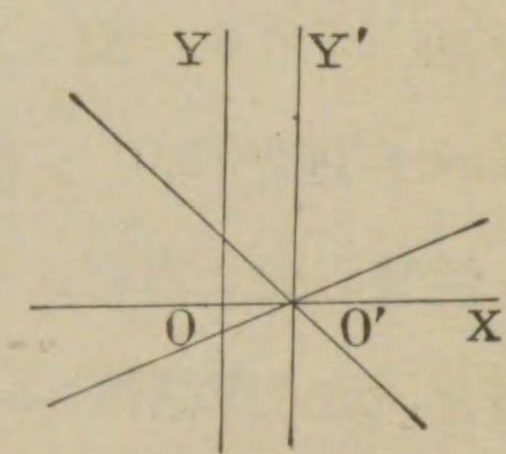
$$X^2-XY-2Y^2=0$$

卽チ　$$(X+Y)(X-2Y)=0$$

トナリ，右圖ノ如ク二ツノ相交ハル直線

$$X+Y=0,\quad X-2Y=0$$

ヲ表ハス



注意　本問題ニ於テハ $ab-h^2<0$ ニシテ且

$$\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}=0$$

故ニ前節ノ注意 (2) ニヨリ此ノ方程式ハ二ツノ直線ヲ表ハスコト明ナリ

(iv) 方程式 $x^2+y^2-2x-4y+5=0$ ノ圖示

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=1,\quad h=0,\quad b=1,\quad g=-1,\quad f=-2,\quad c=5$$

故ニ

$$ab-h^2=1>0$$

依テ曲線ハ前節 (I) ノ種類ニ屬シ

$$a=b,\qquad h=0$$

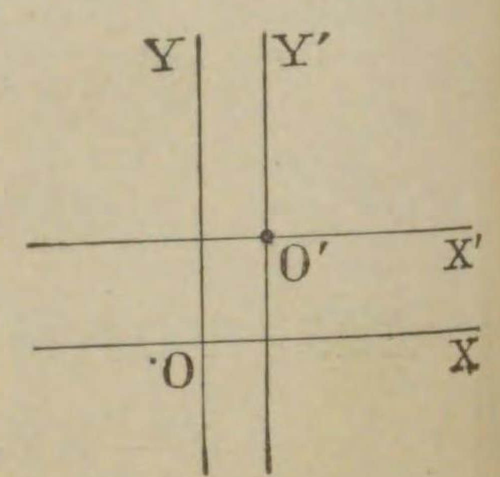
ナルガ故ニ圓ヲ表ハス

中心ノ座標ヲ索ムルトキハ

$$x_1=1,\qquad y_1=2$$

又 $c'=gx_1+fy_1+c$

$=-1(1)-2(2)+5=0$



故ニ原點ヲ中心ニ移シタルトキノ曲線ノ方程式ハ

$$X^2+Y^2=0$$

ニシテ原點 (0,0) ヲ表ハス

注意 元ノ方程式ハ直チニ $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ ト書クコトヲ得ベク，元ノ座標軸ニ關シテ點 (1,2) ヲ表ハスコト明ナリ，依テ之ヲ點 (1,2) ヲ中心トスル點圓ヲ表ハスト云フコトヲ得

又 $\{(x-1)+\sqrt{-1}(y-2)\}\{(x-1)-\sqrt{-1}(y-2)\}=0$

ト書ケバ點 (1, 2) ニ於テ相交ハル二ツノ虛線

$$x-1+\sqrt{-1}(y-2)=0,\quad x-1-\sqrt{-1}(y-2)=0$$

ヲ表ハスト云フコトヲ得ベシ

32. 無心二次曲線

無心二次曲線

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,\quad ab-h^2=0 \qquad (1)$$

ハ確定セル一ツノ中心ヲ有セズ，從テ有心二次曲線ニ於ケルガ如ク座標ノ原點ヲ中心ニ移スコトニヨリテ方程式ヲ簡單ナル形ニ變ズルコト能ハズ，依テ先ヅ

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

ト置キテ座標軸ヲ回轉スルトキハ (1) ハ

$$a(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+2h(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+b(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+2g(x'\cos\theta-y'\sin\theta)$$
$$+2f(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+c=0$$

トナル

即チ $$a'x'^2+2h'x'y'+b'y'^2+2g'x'+2f'y'+c=0 \qquad (2)$$

此ニ
$$a'=a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$$
$$h'=h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(a-b)\sin\theta\cos\theta$$
$$=h\cos 2\theta-\frac{a-b}{2}\sin 2\theta$$
$$b'=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta$$
$$g'=g\cos\theta+f\sin\theta$$
$$f'=-g\sin\theta+f\cos\theta$$

次ニ (2) ヲ簡單ナラシメンガ爲メニ

$$h'=0$$

卽チ
$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b} \tag{3}$$

ヨリ θ ノ値ヲ定ムルトキハ (2) ハ次ノ形ヲ取ル
$$a'x'^2+b'y'^2+2g'x'+2f'y'+c=0 \tag{4}$$

θ ノ値トシテハ第 29 節 (6) ニ於ケルガ如ク (3) ヲ滿足スル最小ナル正ノ角ヲ取ルモノトス

此ノ如クシテ θ ノ値定マルトキハ其ノ値ヲ代入シテ a', b', g', f' ノ値定マル，之ニハ第 29 節 (10) ト全ク同樣ニ次ノ關係ヲ用フルヲ便トス
$$\left.\begin{aligned} a'+b'&=a+b \\ a'b'&=ab-h^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

然ルニ無心二次曲線ニ於テハ $ab-h^2=0$ ナルガ故ニ
$$a'b'=0 \tag{6}$$

又 $h\gtrless 0$ トスレバ $ab=h^2$ ヨリ a, b ハ同符號ヲ有スベク，從テ a ヲ正ナラシムルトキハ b モ亦正ニシテ
$$a+b>0 \tag{7}$$

(5), (6), (7) ヨリ a', b' ノ何レカ一方ハ 0 ニ等シク他ノモノハ $a+b$ ニ等シカラザルベカラズ

又第 29 節 (13) ト同樣ニ
$$2h(a'-b')>0$$

故ニ $h>0$ ナルトキハ $a'>b'$, 又 $h<0$ ナルトキハ $a'<b'$

依テ $h>0$ ナルトキハ
$$a'=a+b, \qquad b'=0$$

(a>0ナル假定ノ下ニ於テ)

$h<0$ ナルトキハ

(a>0ナル假定ノ下ニ於テ)
$$a'=0, \qquad b'=a+b$$

此ノ結果ニヨリ (4) ハ次ノ形ノ何レカ一ツヲ取ルコト明ナリ
$$(a+b)x'^2+2g'x'+2f'y'+c=0 \tag{8}$$
$$(a+b)y'^2+2g'x'+2f'y'+c=0 \tag{9}$$

$h=0$ ナルトキハ $ab-h^2=0$ ヨリ $a=0$ 又ハ $b=0$, 依テ (1) ハ
$$ax^2+2gx+2fy+c=0$$
又ハ
$$by^2+2gx+2fy+c=0$$

卽チ (8) 又ハ (9) ノ形ヲ取リ上ノ變換ヲナスヲ要セズ

次ニ $h\gtrless 0$ トシ, (8) 及ビ (9) ニ於ケル g', f' ヲ a, b, g, f ニテ表ハサンガ爲メニ (3) ヨリ
$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2h}{a-b}$$

卽チ
$$h\tan^2\theta+(a-b)\tan\theta-h=0$$

然ルニ $ab=h^2$ ナルニヨリ
$$h^2\tan^2\theta+(a-b)h\tan\theta-ab=0$$

從テ
$$(h\tan\theta-b)(h\tan\theta+a)=0$$

故ニ
$$\tan\theta=\frac{b}{h} \quad 又ハ \quad \tan\theta=-\frac{a}{h} \tag{10}$$

$ab=h^2$ ナルガ故ニ a, b ハ共ニ正ナラシメ得ベク，又 $0<\theta<90^\circ$ ナルヲ以テ $a>0, b>0$ ニシテ $h>0$ ナルトキハ $\tan\theta=\dfrac{b}{h}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ト取ルベク, $h<0$ ナルトキハ $\tan\theta=-\dfrac{a}{h}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ト取ルベシ

又 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},\qquad \sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

ナルガ故ニ $h>0$ ナルトキハ

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \tag{11}$$

$h<0$ ナルトキハ

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}},\qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \tag{12}$$

$\cos\theta, \sin\theta$ ノ此ノ値ヲ

$$g'=g\cos\theta+f\sin\theta,\quad f'=-g\sin\theta+f\cos\theta$$

ニ代入シテ g', f' ノ値定マル

依テ $h>0$ ナルトキハ (8) 及ビ (11) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} &(a+b)\overset{x'^2}{\cancel{y'^2}}+2g'x'+2f'y'+c=0\\ &\text{此ニ}\quad g'=\frac{g\sqrt{a}+f\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}},\quad f'=\frac{-g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

又 $h<0$ ナルトキハ (9) 及ビ (12) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} &(a+b)y'^2+2g'x'+2f'y'+c=0\\ &\text{此ニ}\quad g'=\frac{g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\quad f'=\frac{-g\sqrt{a}+f\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

トナル

(13) ニ於テ

$$x'=X+x_1,\qquad y'=Y+y_1$$

ト置キテ座標ノ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移ストキハ

$$(a+b)(X+x_1)^2+2g'(X+x_1)+2f'(Y+y_1)+c=0$$

即チ
$$(a+b)X^2+2g''X+2f'Y+c'=0 \tag{15}$$

此ニ
$$g''=(a+b)x_1+g'$$
$$c'=(a+b)x_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c$$

依テ
$$g''=0,\qquad c'=0$$

即チ
$$(a+b)x_1+g'=0$$
$$(a+b)x_1^2+2g'x_1+2f'y_1+c=0$$

ヨリ x_1, y_1 ヲ定ムルコトトシ, $f'\gtrless 0$ トスレバ次ノ値ヲ得

$$x_1=-\frac{g'}{a+b},\qquad y_1=\frac{1}{2f'}\left(\frac{g'^2}{a+b}-c\right)$$

従テ (13) ハ

$$X^2=pY \tag{16$_1$}$$

ノ形トナリ拋物線ヲ表ハス

同様ニ (14) ニ於テ $g'\gtrless 0$ トシテ座標軸ノ平行移動ニヨリ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移シ

$$x_1=\frac{1}{2g'}\left(\frac{f'^2}{a+b}-c\right),\qquad y_1=-\frac{f'}{a+b}$$

ナラシムルトキハ

$$Y^2=qX \tag{16$_2$}$$

ヲ得, $(16)_2$ ハ $(16)_1$ ト同様ニ拋物線ヲ表ハシ, 唯横軸ト縦軸トヲ交換シタルモノトナル

(13) ニ於テ $f'=0$ ナルトキハ上ノ如キ變換ヲ行フコト能ハズ, 然レドモ此ノ場合ニハ (13) ハ

$$(a+b)x'^2+2g'x'+c=0 \tag{17}$$

即チ
$$\left(x'+\frac{g'}{a+b}\right)^2=\frac{g'^2}{(a+b)^2}-\frac{c}{a+b}$$

依テ
$$x'+\frac{g'}{a+b}=\mathrm{X}$$
ト置キテ縦軸ヲ平行ニ移動スルトキハ (17) ハ次ノ形ヲ取ル
$$\mathrm{X}^2=\mathrm{K} \tag{18}$$
此ニ
$$\mathrm{K}=\frac{g'^2-(a+b)c}{(a+b)^2}$$
然ルニ
$$g'=\frac{g\sqrt{a}+f\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}, \quad f'=\frac{-g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}=0$$
依テ
$$g'=\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}}g$$
從テ
$$\mathrm{K}=\frac{g^2-ac}{a(a+b)} \tag{19}$$
$a>0$, $b>0$ ナルガ故ニ $g^2-ac>0$, $=0$, 又ハ <0 ナルニ從ヒ
$\mathrm{K}>0$, $=0$, 又ハ <0

$g^2>ac$ ナルトキハ (18) ハ
$$\mathrm{X}^2-\alpha^2=0 \tag{20$_1$}$$
即チ
$$(x-\alpha)(x+\alpha)=0$$
ノ形トナリ二ツノ平行ナル直線ヲ表ハス

$g^2=ac$ ナルトキハ (18) ハ
$$\mathrm{X}^2=0 \tag{20$_2$}$$
トナリテ二ツノ一致シタル直線ヲ表ハス

$g^2<ac$ ナルトキハ (18) ハ
$$\mathrm{X}^2+\alpha^2=0 \tag{20$_3$}$$
ノ形トナリテ之ヲ滿足スベキ實値ナシ, 然レドモ之ヲ
$$(x-i\alpha)(x+i\alpha)=0, \qquad i=\sqrt{-1}$$
ト書キテ二ツノ平行ナル虚線ヲ表ハストイフコトヲ得

同様ニ (14) ニ於テ $g'=0$ ナルトキ, $y'+\dfrac{f'}{a+b}=\mathrm{Y}$ ト置キテ横軸ヲ平行ニ移動スレバ
$$\mathrm{Y}^2=\frac{f^2-bc}{b(a+b)} \tag{21}$$
ヲ得, $f^2-bc>0$, $=0$, 又ハ <0 ナルニ從ヒ二ツノ平行ナル實線, 二ツノ一致シタル實線, 又ハ二ツノ平行ナル虚線ヲ表ハス

注意 (1) $h=0$ ナル場合ニハ上ニ示シタルガ如ク方程式 (1) ハ
$$ax^2+2gx+2fy+c=0 \tag{i}$$
又ハ
$$by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{ii}$$
トナリ, (i) ハ (13) ニ於テ $b=0$ ト置キタルモノニ等シク, (ii) ハ (14) ニ於テ $a=0$ ト置キタルモノニ等シ

依テ (i) ハ $f\gtrless 0$ ナルトキ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移シテ
$$x_1=-\frac{g}{a}, \qquad y_1=\frac{1}{2f}\left(\frac{g^2}{a}-c\right)$$
ト置ケバ
$$\mathrm{X}^2=p\mathrm{Y}$$
トナリテ拋物線ヲ表ハシ, $f=0$ ナルトキ縦軸ヲ平行移動スレバ
$$\mathrm{X}^2=\frac{g^2-ac}{a^2}$$
トナリテ二ツノ平行ナル直線ヲ表ハス

同様ニ (ii) ニ於テ $g\gtrless 0$ ナルトキ原點ヲ (x_1, y_1) ニ移シテ
$$x_1=\frac{1}{2g}\left(\frac{f^2}{b}-c\right), \qquad y_1=-\frac{f}{b}$$
ト置ケバ
$$\mathrm{Y}^2=q\mathrm{X}$$

トナリテ抛物線ヲ表ハシ，$g=0$ ナルトキ横軸ヲ平行移動スレバ

$$Y^2=\frac{f^2-bc}{b^2}$$

トナリテ二ツノ平行ナル直線ヲ表ハス

注意 (2) 第 30 節ニ於ケル有心二次曲線ノ場合ト同様ニ $\triangle$ ヲ用ヒテ無心二次曲線ヲ分類スレバ次ノ如キ結果ヲ得

$$\begin{aligned}\triangle&=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2\\&=(ab-h^2)c+2fgh-af^2-bg^2\end{aligned}$$

$ab-h^2=0$ ナルガ故ニ

$$\triangle=2fgh-af^2-bg^2$$

$h>0$ ナルトキハ (13) ニヨリ

$$f'^2=\left(\frac{-g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)^2=\frac{af^2+bg^2-2fgh}{a+b}$$

故ニ $ab-h^2=0$, $h>0$ ニシテ $\triangle=0$ ナルトキハ $f'=0$, 又 $\triangle\gtrless0$ ナルトキハ $f'\gtrless0$

$h<0$ ナルトキハ (14) ニヨリ

$$g'^2=\left(\frac{g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)^2=\frac{af^2+bg^2-2fgh}{a+b}$$

故ニ $ab-h^2=0$, $h<0$ ニシテ $\triangle=0$ ナルトキハ $g'=0$, 又 $\triangle\gtrless0$ ナルトキハ $g'\lessgtr0$

依テ $ab-h^2=0$ ニシテ且

(i) $\triangle\lessgtr0$ ナルトキハ抛物線

(ii) $\triangle=0$ ナルトキハ二ツノ平行ナル直線

33. 例題

(i) 方程式 $x^2-2xy+y^2-8x+16=0$ ノ圖示

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=1,\quad h=-1,\quad b=1,\quad g=-4,\quad f=0,\quad c=16$$

故ニ
$$ab-h^2=1-1=0$$

依テ曲線ハ無心二次曲線ニシテ

$$h=-1<0$$

ナルガ故ニ前節 (9) ノ種類ニ屬ス

座標軸ヲ回轉シテ其ノ角ヲ θ トスルトキハ前節 (3) ニヨリ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\frac{-2}{1-1}$$

此ノ式ヲ滿足スル最小ナル正ノ角ハ 45° ナリ

座標軸ヲ回轉シタルトキノ方程式ハ前節 (9) ニヨリ

$$(a+b)y'^2+2g'x'+2f'y'+c=0$$ $(a_{11}+a_{22})y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a_{33}=0$

此ニ
$$a+b=2$$

又前節 (14) ニヨリ

$$g'=\frac{g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}=\frac{-4(1)+0(1)}{\sqrt{1+1}}=-2\sqrt{2}$$

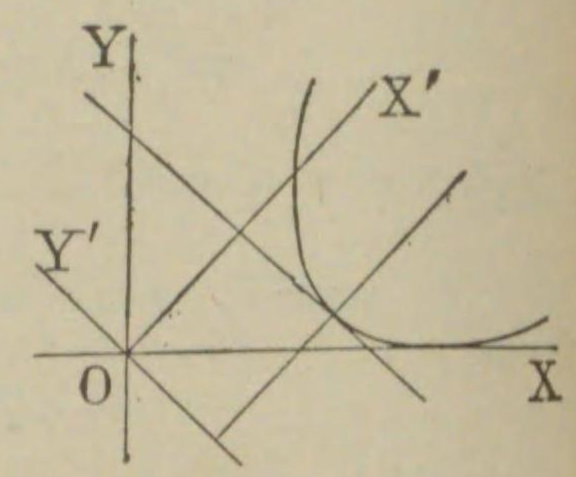
$$f'=\frac{-g\sqrt{a}+f\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}=\frac{4(1)+0(1)}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$$

依テ座標軸ヲ回轉シタルトキノ方程式ハ

$$y'^2-2\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+8=0$$

即チ　$(y'+\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

依テ　$x'-\frac{3}{\sqrt{2}}=X,\quad y'+\sqrt{2}=Y$



ト置キテ原點ヲ　$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}\right)$　＝

移ストキハ曲線ノ方程式ハ

$$Y^2=2\sqrt{2}X$$

トナリ右圖ノ如キ拋物線ヲ表ハス

(ii)　方程式　$4x^2+4xy+y^2-6x-3y+2=0$　ノ圖示

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ト比較スルトキハ

$$a=4,\quad h=2,\quad b=1,\quad g=-3,\quad f=-\frac{3}{2},\quad c=2$$

故ニ　$ab-h^2=4-4=0$

依テ曲線ハ無心二次曲線ニシテ

$$h=2>0$$

ナルガ故ニ前節 (8) ノ種類ニ屬ス

座標軸ヲ回轉シテ其ノ角ヲ θ トスルトキハ

$$\tan 2\theta=\frac{2h}{a-b}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}$$

從テ　$\tan\theta=\frac{1}{2}$

座標軸ヲ回轉シタルトキノ方程式ハ前節 (8) ニヨリ

$$(a+b)x'^2+2g'x+2f'y+c=0$$

此ニ　$a+b=5$

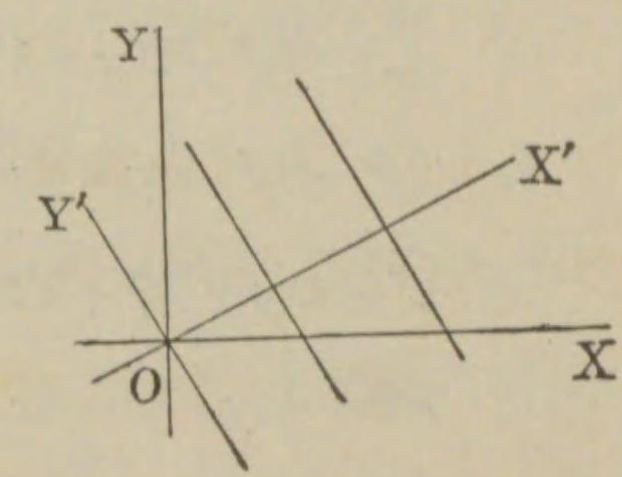
又前節 (13) ニヨリ

$$g'=\frac{g\sqrt{a}+f\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}=\frac{-3(2)-\frac{3}{2}(1)}{\sqrt{4+1}}=-\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$f'=\frac{-g\sqrt{b}+f\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}=\frac{3(1)-\frac{3}{2}(2)}{\sqrt{4+1}}=0$$

故ニ索ムル方程式ハ

$$5X^2-3\sqrt{5}X+2=0$$



即チ　$(\sqrt{5}X-1)(\sqrt{5}X-2)=0$

トナリ，二ツノ平行ナル直線

$$X=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad X=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

ヲ表ハス

注意　$\triangle=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$=8+18-9-9-8=0$

$ab-h^2=4-4=0$

故ニ前節注意 (2) ニヨリ此ノ方程式ハ二ツノ平行ナル直線ヲ表ハスコト明ナリ，實際元ノ方程式

$$4x^2+4xy+y^2-6x-3y+2=0$$

ハ直チニ

$$(2x+y)^2-3(2x+y)+2=0$$

即チ　$(2x+y-1)(2x+y-2)=0$

ト書クコトヲ得ベク，從テ二ツノ直線

$$2x+y-1=0,\quad 2x+y-2=0$$

ヲ表ハスモノトス

問題

1. 次ノ方程式ノ表ハス曲線ヲ圖示セヨ

i $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y+8=0$

ii $x^2+2xy-y^2-2x+2y-4=0$

iii $4x^2+4y^2-20x+12y+18=0$

iv $2x^2-2y^2-xy-6x-7y-4=0$

v $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$

vi $5x^2-4xy+y^2-4x+2y+2=0$

vii $9x^2+24xy+16y^2-9x-12y+2=0$

viii $4x^2-24xy+11y^2+40x+30y-105=0$

ix $8x^2-4xy+5y^2-36x+18y+9=0$

x $2x^2-xy-3y^2-2x+18y-24=0$

xi $x^2+2xy+y^2-6x-2y+4=0$

xii $(y-x)^2=x$

xiii $x^2+axy+y^2=1$

xiv $by\left(1-\dfrac{y}{c}\right)+cx\left(1-\dfrac{x}{b}\right)=xy$

xv $x^2+2xy+2y^2+x+k=0$

2. 次ノ方程式ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ

$ax^2+by^2+2gx+2fy+c=0$

3. $\triangle=0$ ナルトキ二次曲線ヲ分類セヨ

第五章　直線及ビ圓

34. 直線ノ方程式ノ特殊ナル形

一般二元一次方程式 $ax+by+c=0$ ガ直線ヲ表ハスコトハ第8節ニ於テ之ヲ示セリ，本節ニ於テハ $a,\ b,\ c$ ニ特別ノ値ヲ與フルコトニヨリテ一定ノ條件ヲ滿足スル直線ノ方程式ヲ索メントス

先ヅ直線 $ax+by+c=0$ ノ上ニ於ケル二點ヲ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ トスルトキハ $x=x_1,\ y=y_1$ 及ビ $x=x_2,\ y=y_2$ ハ此ノ方程式ヲ滿足セザルベカラズ

依テ

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\\ ax_1+by_1+c&=0\\ ax_2+by_2+c&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(1) ノ第一式及ビ第二式ヨリ

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

(1) ノ第二式及ビ第三式ヨリ

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

故ニ

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\qquad(2)$$

或ハ行列式ヲ用ヒテ (1) ノ三式ヨリ $a,\ b,\ c$ ヲ消去スルトキハ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0\qquad(2)_1$$

(2) 又ハ $(2)_1$ ヨリ

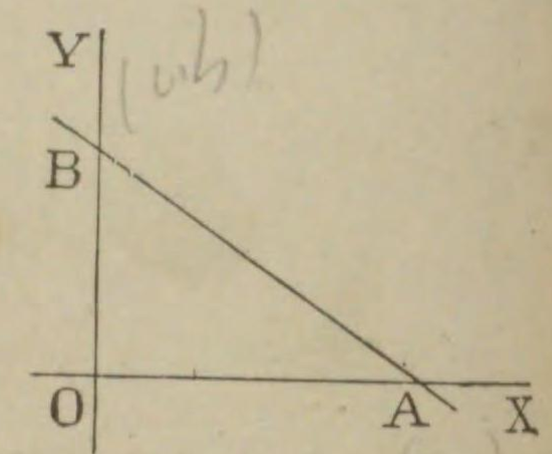
$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0 \qquad (2)_2$$

(2), $(2)_1$, $(2)_2$ ハ結局同一ニシテ二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ナリ

(2) ノ特別ナル場合トシテ $x_1=a$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=b$ ト置クトキハ

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b}$$

即チ
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$



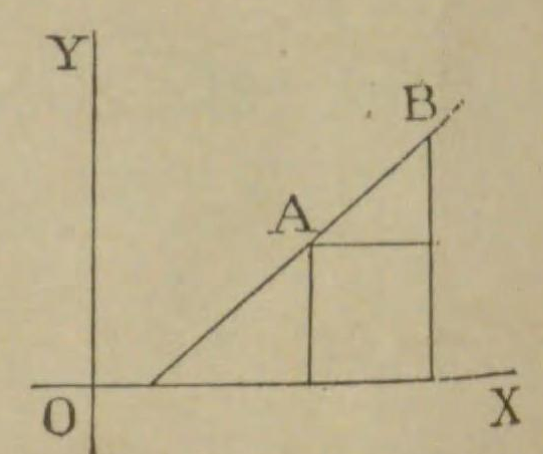
(3) ハ二點 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ニシテ a ハ OA, b ハ OB ニ相當ス, 此ノ a, b ヲ直線 AB ガ横軸上及ビ縱軸上ニ作ル**截片**トイフ

(2) ヨリ次ノ式ヲ得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m$ ト置クトキハ此ノ方程式ハ次ノ形ヲ取ル

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (4)$$



此ノ m ハ直線ガ横軸ノ正方向トナス角ノ正切ニ等シ, 之ヲ直線ノ**方向係數**トイフ

(4) ハ點 $A(x_1, y_1)$ ヲ通過シ, 方向係數ガ m ニ等シキ直線ノ方程式ナリ

(4) ノ特別ナル場合トシテ $x_1=0$ $y_1=k$ ト置クトキハ

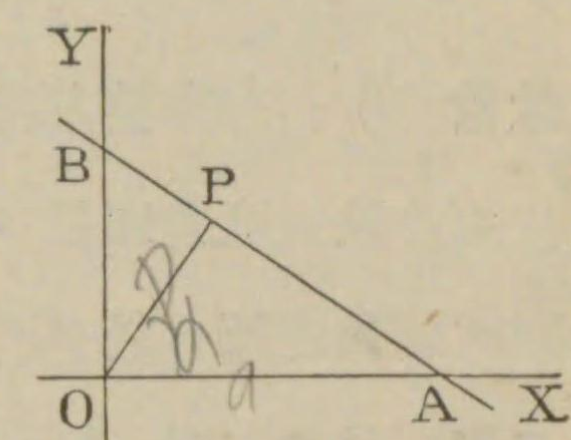
$$y=mx+k \qquad (4)_1$$

トナリ, 點 $(0, k)$ ヲ通過シ方向係數ガ m ナル直線ノ方程式ヲ得

更ニ $(4)_1$ ニ於テ $k=0$ ト置クトキハ

$$y=mx \qquad (4)_2$$

即チ原點ヲ通過シ方向係數ガ m ナル直線ノ方程式ナリ



次ニ原點ヨリ直線 AB ニ至ル垂線 OP ノ長サヲ p トシ, OP ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ

$$a\cos\alpha=p, \qquad b\sin\alpha=p$$

依テ (3) ヨリ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \qquad (5)$$

(5) ハ原點ヨリ下セル垂線ノ長サガ p ニシテ, 垂線ガ横軸ノ正方向トナス角ガ α ナル直線ノ方程式ナリ

$m=\tan\alpha$ ト置クトキハ (4) ヨリ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}$$

今
$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=l$$

ト置クトキハ

$$x=x_1+l\cos\alpha, \quad y=y_1+l\sin\alpha \qquad (6)$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=l^2$$

(6) ハ徑數 l ニテ表ハシタル直線ノ方程式ニシテ, l ハ點 (x_1, y_1) ヨリ直線上ノ任意ノ點 (x, y) ニ至ル距離ヲ示スモノトス

注意 (1) 三點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ガ同一ノ直線上ニアル爲メニハ一ツノ點ガ他ノ二ツノ點ヲ通過スル直線上ニアルコトヲ要ス, 依テ本節 $(2)_1$ ヨリ次ノ條件ヲ得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即チ $$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

注意 (2) 有理整方程式ノ次數ハ座標軸ノ變換ニヨリテ變ズルコトナシ, 故ニ直角座標ニ於ケル直線ノ方程式ガ $ax+by+c=0$ ナルヲ以テ斜角座標ニ於ケル直線モ亦二元一次方程式ニテ之ヲ表ハスコトヲ得, 依テ二點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ハ直角座標ニテモ斜角座標ニテモ同一ニシテ

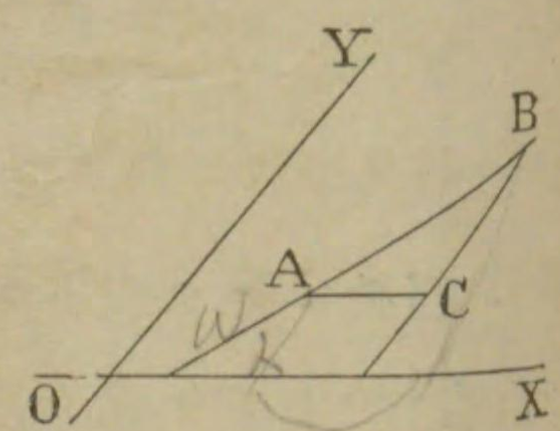
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad (2)'$$

ニテ表ハシ得ベク, 從テ兩軸上ノ截片ガ a, b ナル場合ニモ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)'$$

ヲ用フルコトヲ得ベシ

然レドモ方向係數ヲ用フル場合ニハ座標軸間ノ角ヲ ω トシ, 直線 AB ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ



$$\frac{x_2-x_1}{\sin(\omega-\alpha)}=\frac{y_2-y_1}{\sin\alpha}$$

即チ $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

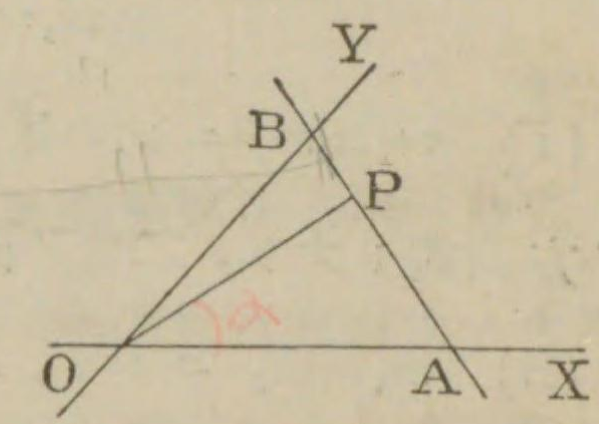
依テ (2)′ ヨリ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (4)'$$

此ニ $$m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

(4)′ ハ斜角座標ニ於テ點 (x_1, y_1) ヲ通過シ, 横軸ノ正方向ト α ナル角ヲナス直線ノ方程式ナリ

又原點ヨリ直線 AB ニ下セル垂線 OP ノ長サヲ p トシ, OP ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ



$$a\cos\alpha=p, \quad b\cos(\omega-\alpha)=p$$

故ニ (3)′ ヨリ

$$x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)=p \qquad (5)'$$

(5)′ ハ斜角座標ニ於テ原點ヨリ下セル垂線ノ長サ及ビ垂線ガ横軸ノ正方向トナス角ニテ表ハシタル直線ノ方程式ナリ

又 (4)′ ヨリ

$$\frac{x-x_1}{\sin(\omega-\alpha)}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=l$$

ト置クトキハ前頁三角形 ABC ニ於テ

$$l=\frac{AB}{\sin\omega}$$

故ニ $$x=x_1+\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}r, \quad y=y_1+\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}r \qquad (6)'$$

(6)′ ハ斜角座標ニ於テ r ヲ徑數トセル直線ノ方程式ニシテ, r ハ點 (x_1, y_1) ヨリ直線上ノ任意ノ點 (x, y) ニ至ル距離ヲ示スモノトス

$\omega=\frac{\pi}{2}$ ナルトキハ (4)′, (5)′, (6)′ ハ夫々 (4), (5), (6) ニ一致ス

35. 二ツノ直線

(I) 二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$y=m_1x+k_1 \qquad (1)$$

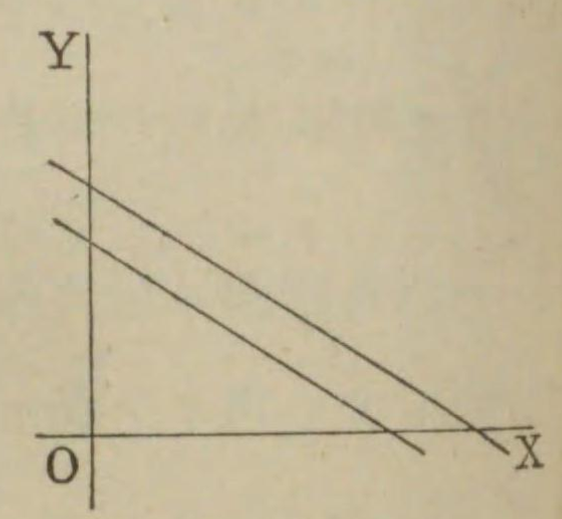
$$y=m_2x+k_2 \qquad (2)$$

トシ, (1) 及ビ (2) ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α_1, α_2 トスルトキハ

$$m_1=\tan\alpha_1, \qquad m_2=\tan\alpha_2$$

(i) $m_1=m_2$ ニシテ且 $k_1=k_2$ ナルトキハ (1) 及ビ (2) ハ全ク同一ノ方程式トナリ, 二ツノ直線ハ相一致ス

(ii) $m_1=m_2$ ニシテ, $k_1\gtrless k_2$ ナルトキハ二ツノ直線ノ方向係數相等シクシテ, 縱軸上ニ於ケル截片ハ等シカラズ, 故ニ (1) 及ビ (2) ハ互ニ平行ナル二ツノ直線ヲ表ハス

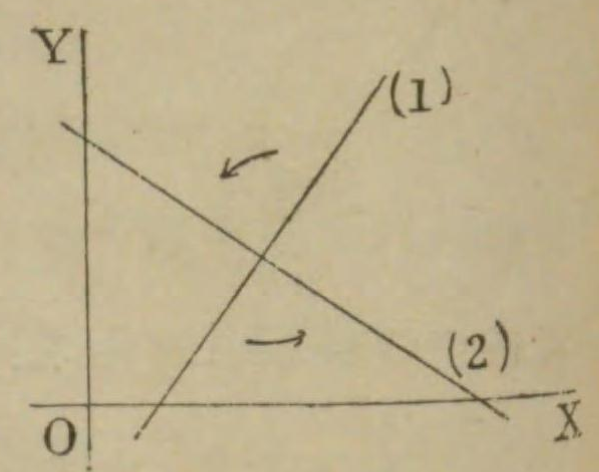


(iii) $m_1\gtrless m_2$ ナルトキハ (1) 及ビ (2) ヨリ

$$x=-\frac{k_1-k_2}{m_1-m_2}, \qquad y=\frac{m_1k_2-m_2k_1}{m_1-m_2}$$

ヲ得, 即チ (1) 及ビ (2) ヲ同時ニ滿足スル x, y ノ一對ノ値存在スルヲ以テ二ツノ直線ハ一點ヲ共有ス, 依テ (1) 及ビ (2) ハ相交ハル二ツノ直線ヲ表ハス

此ノ場合ニ (1) 及ビ (2) ノ交リテ作ル角ヲ (1) ヨリ (2) ニ向テ時計ノ針ノ進行ト反對ノ方向ニ測リタルモノヲ ϕ トスルトキハ



$$\tan\phi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$$

故ニ

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \qquad (3)$$

(3) ニヨリテ (1) 及ビ (2) ノ交點ニ於テ作ル角ヲ索ムルコトヲ得

(3) ノ特別ナル場合トシテ $1+m_1m_2=0$ ナルトキハ $\phi=\frac{\pi}{2}$ トナル

故ニ

$$m_1m_2=-1 \qquad (4)$$

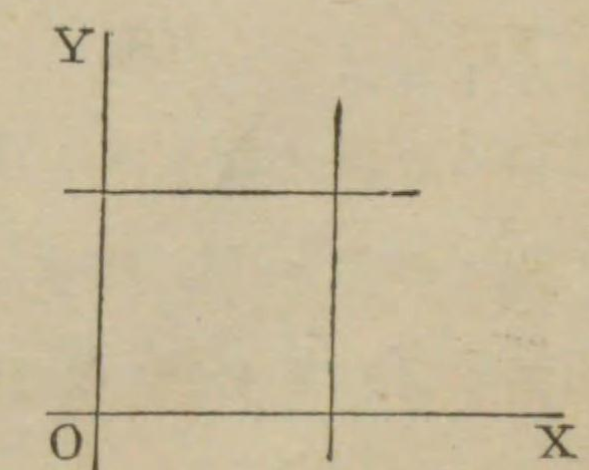
ハ二ツノ直線 $y=m_1x+k_1$, $y=m_2x+k_2$ ガ互ニ垂直ナル條件ナリ

注意 二ツノ直線 $y=m_1x+k_1$, $y=m_2x+k_2$ ガ互ニ垂直ナル條件 $m_1m_2=-1$ ニ於テ m_1, m_2 ハ何レモ有限ナリト假定セリ, 若シ何レカ一方ガ無限大トナル場合ニハ互ニ垂直ナルガ爲メニ必ズシモ $m_1m_2=-1$ ナルコトヲ要セズ, 即チ

$$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{\frac{1}{m_2}+m_1}$$

$$=\frac{\frac{m_2}{m_1}-1}{\frac{1}{m_1}+m_2}$$

故ニ $m_1=0$, $\frac{1}{m_2}=0$ 即チ m_2 ガ無限大ナルトキハ $m_1m_2=-1$ ナル關係ヲ滿足セザルモ $\phi=\frac{\pi}{2}$ トナル, 此ノ場合ニハ二ツノ直線ノ一ツハ横軸ニ平行シ, 他ノ一ツハ縱軸ニ平行シテ互ニ垂直ナルモノトス



$m_2=0$, $\frac{1}{m_1}=0$ ナルトキモ亦同様ナリ

(II) 次ニ二ツノ直線ノ方程式ヲ一般ナル形卽チ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{5}$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{6}$$

トシ, (I) ニ於ケルト同樣ノ順序ニヨリ之ヲ研究スベシ

(i) 此ノ二ツノ方程式ガ同一ノ直線ヲ表ハス場合ニハ (5) ノ上ニ於ケル任意ノ二點ノ座標ハ (6) ヲ滿足セザルベカラズ

(5) ニ於テ $x=0$ ト置ケバ $y=-\frac{c_1}{b_1}$ ヲ得, 又 $y=0$ ト置ケバ $x=-\frac{c_1}{a_1}$ ヲ得, 卽チ $\mathrm{A}\left(0,-\frac{c_1}{b_1}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{c_1}{a_1},0\right)$ ハ (5) ノ上ニ於ケル二點ナリ, A, B ガ又 (6) ノ上ニアリトセバ次ノ關係成立ス

$$a_2(0)+b_2\left(-\frac{c_1}{b_1}\right)+c_2=0$$

$$a_2\left(-\frac{c_1}{a_1}\right)+b_2(0)+c_2=0$$

卽チ
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1} \tag{7}$$

或ハ
$$a_1b_2-a_2b_1=0, \qquad b_1c_2-b_2c_1=0 \tag*{$(7)_1$}$$

(7) 又ハ $(7)_1$ ハ二ツノ直線 (5), (6) ガ同一ノ直線ヲ表ハス條件ナリ

(ii)
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}, \qquad \frac{b_2}{b_1}\gtrless\frac{c_2}{c_1}$$

ナルトキハ

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$$

ト置ケバ (5) 及ビ (6) ヨリ

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_1x+b_1y+\frac{c_2}{k}=0$$

然ルニ $\frac{c_2}{c_1}\lessgtr k$ 卽チ $\frac{c_2}{k}\lessgtr c_1$ ナルガ故ニ此ノ二ツノ方程式ヲ滿足スベキ x, y ノ値ナシ, 依テ二ツノ直線ハ共通ナル點ヲ有セズ

故ニ
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}, \qquad \frac{b_2}{b_1}\gtrless\frac{c_2}{c_1}$$

或ハ
$$a_1b_2-a_2b_1=0, \qquad b_1c_2-b_2c_1\lessgtr 0 \tag{8}$$

ハ (5) 及ビ (6) ガ互ニ平行ナル條件ナリ

(iii) $a_1b_2-a_2b_1\gtrless 0$ ナルトキハ (5) 及ビ (6) ヨリ

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

ヲ得, 二ツノ直線ハ相交ハル, 其ノ交角ヲ ϕ トシ, (5) 及ビ (6) ノ方向係數ヲ夫々 m_1, m_2 トスレバ

$$m_1=-\frac{a_1}{b_1}, \qquad m_2=-\frac{a_2}{b_2}$$

故ニ
$$\tan\phi=\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}}=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2} \tag{9}$$

從テ
$$a_1a_2+b_1b_2=0 \tag{10}$$

ハ二ツノ直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ ガ互ニ垂直ナル條件ナリ

注意 (1) 二ツノ直線ノ一ツガ橫軸ニ平行ニシテ他ノ一ツガ縱軸ニ平行ナルトキハ $a_1=0$, $b_2=0$ 又ハ $a_2=0$, $b_1=0$, 故ニ (10) ハ二ツノ直線ガ座標軸ニ平行ニシテ互ニ垂直ナル場合ヲ含ムモノトス

注意 (2) 二ツノ直線ノ一致スル場合ヲ互ニ平行ナル場合ノ中ニ含ムトスレバ $a_2b_1-a_1b_2=0$ ハ (5) 及ビ (6) ガ互ニ平行ナル條件ナリ

36. 直線ノ群

(I) 二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c_1=0 \qquad (1)$$

$$ax+by+c_2=0 \qquad (2)$$

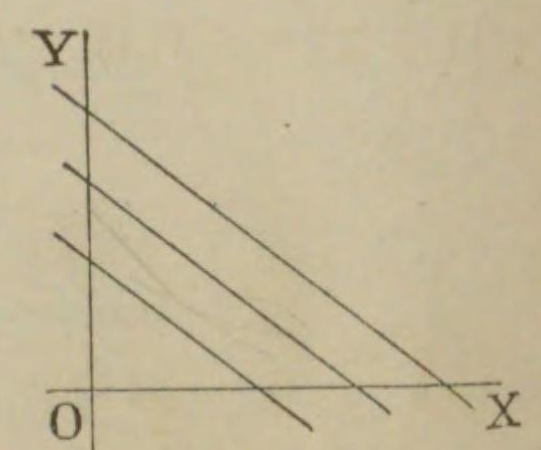
トスルトキハ (1) 及ビ (2) ハ相等シキ方向係數ヲ有スルヲ以テ互ニ平行ナル直線ヲ表ハス

同樣ニ第三ノ直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c_3=0 \qquad (3)$$

トスレバ (3) モ亦 (1) 及ビ (2) ニ平行ナル直線ヲ表ハス

依テ方程式 $ax+by+\alpha=0$ ノ表ハス直線ハ α ノ値如何ニ係ハラズ，何レモ定直線 $ax+by=0$ ニ平行ニシテ α ニ適當ナル値ヲ與フルコトニヨリ横軸又ハ縱軸上ニ於ケル截片ヲシテ任意ノ値ヲ有セシムルコトヲ得ベシ



故ニ

$$ax+by+\alpha=0 \qquad (4)$$

ハ定直線 $ax+by=0$ ニ平行ナル總テノ直線ノ群ヲ表ハス

(II) 二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$ax+b_1y+c=0 \qquad (5)$$

$$ax+b_2y+c=0 \qquad (6)$$

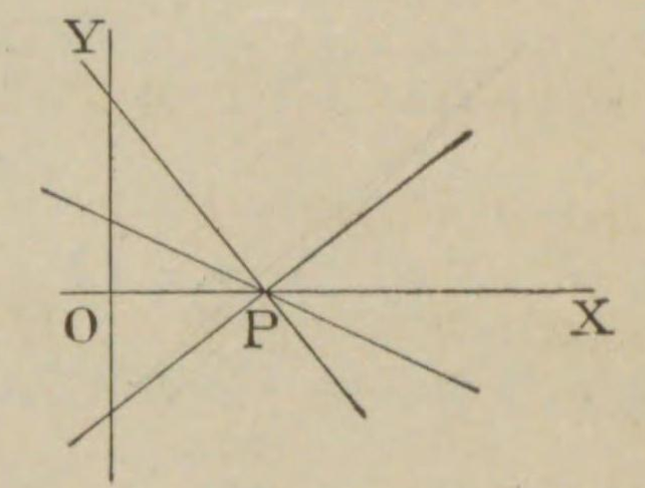
トスルトキハ (5) 及ビ (6) ハ何レモ $y=0$ ノトキ $x=-\dfrac{c}{a}$ トナルガ故ニ同一ノ點 $\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$ ヲ通過スル直線ヲ表ハス

同樣ニ第三ノ直線ノ方程式ヲ

$$ax+b_3y+c=0 \qquad (7)$$

トスレバ (7) モ亦同一ノ點ヲ通過スル直線ヲ表ハス

依テ方程式 $ax+\alpha y+c=0$ ノ表ハス直線ハ α ノ値如何ニ係ハラズ，何レモ定點 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$ ヲ通過シ，α ニ適當ナル値ヲ與フルコトニヨリ任意ノ方向係數ヲ有セシムルコトヲ得ベシ



故ニ

$$ax+\alpha y+c=0 \qquad (8)$$

ハ定點 $\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$ ヲ通過スル總テノ直線ノ群ヲ表ハス

(III) 二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (9)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (10)$$

トシ，k ヲ 0 ニ等シカラザル定數トシテ次ノ方程式ヲ作ル

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \qquad (11)$$

卽チ

$$a_3x+b_3y+c_3=0 \qquad (11)_1$$

此ニ

$$a_3=a_1+ka_2,\quad b_3=b_1+kb_2,\quad c_3=c_1+kc_2$$

$(11)_1$ ハ二元一次方程式ナルヲ以テ一ツノ直線ヲ表ハス

今若シ (9) 及ビ (10) ガ $a_1b_2-a_2b_1=0$ ナル條件ヲ滿足スルトキハ (9) 及ビ (10) ハ互ニ平行ナリ

然ルニ

$$a_1b_3-a_3b_1$$

$$=a_1(b_1+kb_2)-(a_1+ka_2)b_1=k(a_1b_2-a_2b_1)$$

故ニ $$a_1b_3-a_3b_1=0$$

此ノ場合ニハ (11) ハ (9) ニ平行ニシテ從テ又 (10) ニ平行ナリ

若シ $a_1b_2-a_2b_1\gtrless 0$ ナルトキハ (9) 及ビ (10) ハ必ズ相交ハル, 其ノ交點ヲ (x_0, y_0) トスルトキハ

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$$

$$a_2x_0+b_2y_0+c_2=0$$

從テ $$a_1x_0+b_1y_0+c_1+k(a_2x_0+b_2y_0+c_2)=0$$

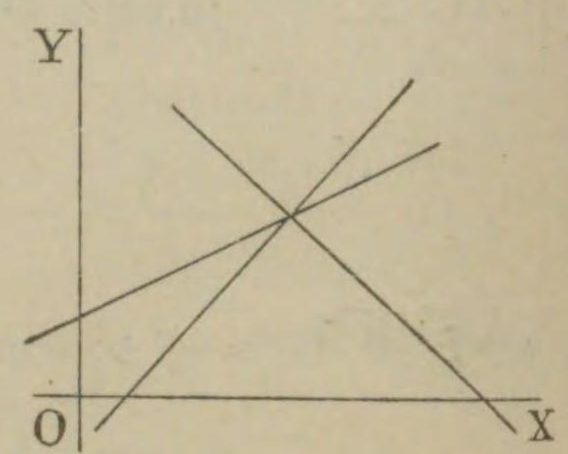
卽チ $$a_3x_0+b_3y_0+c_3=0$$

此ノ場合ニハ (11) ハ (9) 及ビ (10) ノ交點ヲ通過ス

k ハ任意ノ値ヲ取リ得ベキヲ以テ方程式

$$(a_1+ka_2)x+(b_1+kb_2)y+(c_1+kc_2)=0 \qquad (12)$$

ハ (9) 及ビ (10) ガ互ニ平行ナルトキハ之ニ平行ナル總テノ直線ノ群ヲ表ハシ, (9) 及ビ (10) ガ相交ハルトキハ其ノ交點ヲ通過スル總テノ直線ヲ群ヲ表ハス



注意 (1) k ハ任意ナルヲ以テ尙一ツノ條件ヲ與ヘテ其ノ値ヲ定ムルトキハ (11) ノ表ハス直線ノ位置定マル, 例ヘバ (11) ガ (9) 及ビ (10) ノ交點ノ外ニ原點ヲ通過スト假定スレバ (11) ニ於テ $x=0$, $y=0$ ト置キ $$c_1+kc_2=0$$ ヲ得, 之ト (11) ヨリ k ヲ消去スレバ

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0$$

是レ卽チ (9) 及ビ (10) ノ交點ト原點トヲ通過スル直線ノ方程式ナリ

注意 (2) $a_1b_2-a_2b_1\gtrless 0$ ナルトキ

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \qquad a_2x+b_2y+c_2=0$$

ノ交點ヲ (x_0, y_0) トスルトキハ

$$x_0=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y_0=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

故ニ第三ノ直線

$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

ガ點 (x_0, y_0) ヲ通過スル爲メニ x_0, y_0 ハ此ノ方程式ヲ滿足セザルベカラズ

依テ $$a_3\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_2b_1}+b_3\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}+c_3=0$$

卽チ $$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

或ハ $$(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=0 \qquad (13)_1$$

又ハ $$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0 \qquad (13)_2$$

行列式ヲ用ヒテ之ヲ表セバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (13)_3$$

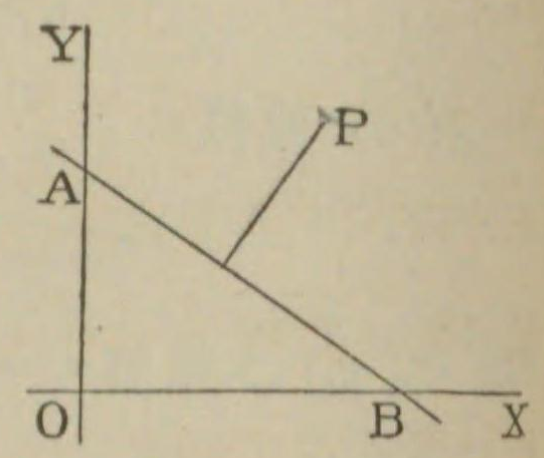
ハ三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ共有スル爲メノ條件ナリ

尙又三ツノ直線ガ互ニ平行ナル場合ニモ $(13)_1$ ハ明カニ成立ス, 故ニ平行ナル直線ハ何レモ無窮遠ニ於ケル一點ニ於テ相交ハルモノト考フルコトヲ得

37. 例題

(i) 定點ヨリ定直線ニ至ル距離

定點 P ノ座標ヲ x_0, y_0 トシ，定直線 AB ノ方程式ヲ $ax+by+c=0$ トス



$$x=X+x_0, \qquad y=Y+y_0$$

ト置キテ座標ノ原點ヲ (x_0, y_0) ニ移ストキハ直線ノ方程式ハ

$$a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=0$$

卽チ
$$aX+bY+ax_0+by_0+c=0 \tag{1}$$

トナル

新原點ヨリ此ノ直線ニ下セル垂線ノ長サヲ p トシ，垂線ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ

$$X\cos\alpha+Y\sin\alpha=p \tag{2}$$

(1) 及ビ (2) ガ同一ノ直線ヲ表ハストスレバ第 35 節 (7) ニヨリ

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{ax_0+by_0+c}{-p}$$

卽チ
$$ap=-(ax_0+by_0+c)\cos\alpha$$
$$bp=-(ax_0+by_0+c)\sin\alpha$$

依テ
$$(a^2+b^2)p^2=(ax_0+by_0+c)^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

故ニ
$$p=\pm\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

此ニ p ハ垂線ノ長サニシテ正ナルヲ以テ $ax_0+by_0+c>0$ ナルトキハ正號ヲ取リ，$ax_0+by_0+c<0$ ナルトキハ負號ヲ取ルベキモノトス

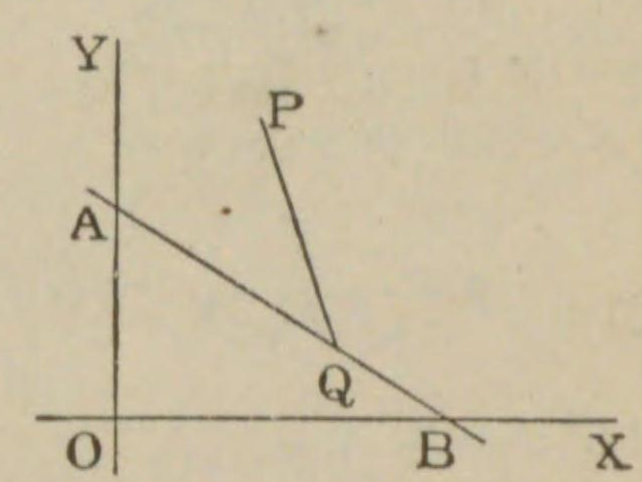
此ノ結果ハ又次ノ如クシテ之ヲ索ムルコトヲ得

定點 $P(x_0, y_0)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ハ第 34 節 (6) ニヨリ

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=l$$

卽チ
$$x=x_0+l\cos\alpha, \qquad y=y_0+l\sin\alpha$$

此ニ l ハ (x_0, y_0) ヨリ (x, y) ニ至ル距離ニシテ，α ハ直線ガ横軸ノ正方向トナス角ナリ



故ニ此ノ直線ト AB トノ交點 Q ノ座標ハ次ノ式ヲ滿足ス

$$a(x_0+l\cos\alpha)+b(y_0+l\sin\alpha)+c=0$$

卽チ
$$l=-\frac{ax_0+by_0+c}{a\cos\alpha+b\sin\alpha}$$

ハ $P(x_0, y_0)$ ヨリ AB 上ノ一點 Q ニ至ル距離ナリ

此ノ特別ナル場合トシテ PQ ガ AB ニ垂直ナルトキハ第 35 節 (10) ニヨリ

$$ax+by+c=0$$

及ビ
$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$$

卽チ
$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha$$

トノ間ニ次ノ關係アリ

$$a\sin\alpha-b\cos\alpha=0$$

依テ
$$(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2=(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha-b\cos\alpha)^2$$
$$=a^2+b^2$$

故ニ垂線ノ長サハ
$$\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

注意 (1) 原點ヨリ定直線 $ax+by+c=0$ ニ至ル垂線ノ長サヲ p トシ，垂線ガ横軸ノ正方向トナス角ヲ α トスルトキハ

$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{-p}$$

即チ $$\cos\alpha=-\frac{a}{c}p,\quad \sin\alpha=-\frac{b}{c}p$$

依テ $$p=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故ニ $c>0$ ナルトキハ

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$c<0$ ナルトキハ

$$p=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

注意 (2) 二ツノ相交ハル直線ノ方程式ヲ夫々 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ トシ，點 (x_0, y_0) ヨリ二ツノ直線ニ下セル垂線ヲ夫々 p_1, p_2 トスルトキハ

$$p_1=\left|\frac{a_1x_0+b_1y_0+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right|,\quad p_2=\left|\frac{a_2x_0+b_2y_0+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right|$$

點 (x_0, y_0) ガ交角ノ二等分線上ニアレバ

$$p_1=p_2$$

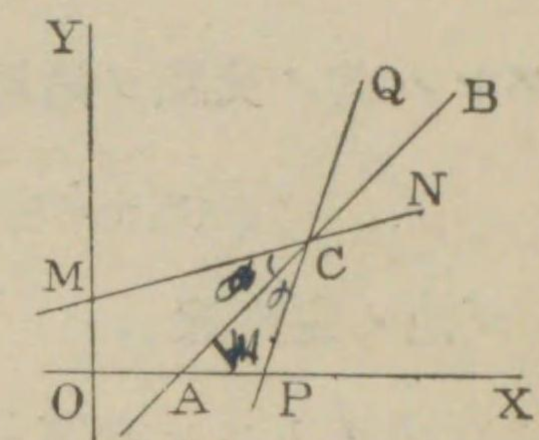
故ニ二等分線ノ方程式ハ下ノ如シ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

(ii) 定直線ト定角ヲナス直線

定直線 AB ノ方程式ヲ $y=mx+k$ トシ，其ノ上ノ一點 C ニ於テ之ト定角 α ヲナス直線 MN 又ハ PQ ノ方程式ヲ $y=m_1x+k_1$ トスルトキハ第 35 節 (3) ニヨリ



$$\tan\alpha=\frac{m_1-m}{1+m_1m}$$

又ハ $$\tan\alpha=\frac{m-m_1}{1+mm_1}$$

$\tan\alpha=a$ ト置クトキハ

$$a(1+m_1m)=m_1-m$$

又ハ $$a(1+m_1m)=m-m_1$$

故ニ $$m_1=\frac{m+a}{1-am}\quad 又ハ\quad m_1=\frac{m-a}{1+am}$$

依テ索ムル方程式ハ

$$y=\frac{m+a}{1-am}x+k_1\quad 又ハ\quad y=\frac{m-a}{1+am}x+k_1$$

此ノ特別ナル場合トシテ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ナルトキハ

$$m_1=\frac{\frac{m}{a}\pm1}{\frac{1}{a}\mp m}$$

ヨリ $m_1=-\frac{1}{m}$ ヲ得，第 35 節 (4) ト一致ス

注意 k_1 ハ他ノ條件ニヨリテ定ムベキモノトス，例ヘバ此ノ直線ガ (x_0, y_0) ヲ通過ストスレバ

$$k_1=y_0-\frac{m+a}{1-am}x_0\quad 又ハ\quad k_1=y_0-\frac{m-a}{1+am}x_0$$

(iii) 二ツノ定直線ノ交點ヲ通過シテ他ノ定直線ニ平行又ハ垂直ナル直線

二ツノ相交ハル直線ノ方程式ヲ $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ トスレバ其ノ交點ヲ通過スル直線ノ方程式ハ第 36 節 (III) ニヨリ

$$(a_1+ka_2)x+(b_1+kb_2)y+(c_1+kc_2)=0 \qquad (1)$$

(1) ガ他ノ定直線 $a_3x+b_3y+c_3=0$ (2)

ニ平行ナリトスレバ第 35 節 (II) ニヨリ

$$\frac{a_1+ka_2}{a_3}=\frac{b_1+kb_2}{b_3}$$

從テ
$$k=\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_2b_3-a_3b_2}$$

依テ (1) ヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$\left(a_1+\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_2b_3-a_3b_2}a_2\right)x+\left(b_1+\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_2b_3-a_3b_2}b_2\right)y+\left(c_1+\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_2b_3-a_3b_2}c_2\right)=0$$

即チ

$$(a_1b_2-a_2b_1)a_3x+(a_1b_2-a_2b_1)b_3y=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2$$

又 (1) ガ (2) ニ垂直ナリトスレバ

$$(a_1+ka_2)a_3+(b_1+kb_2)b_3=0$$

從テ
$$k=-\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}$$

依テ (1) ヨリ次ノ方程式ヲ得

$$\left(a_1-\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}a_2\right)x+\left(b_1-\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}b_2\right)y+\left(c_1-\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_2a_3+b_2b_3}c_2\right)=0$$

即チ

$$(a_1b_2-a_2b_1)b_3x-(a_1b_2-a_2b_1)a_3y=(a_1a_3+b_1b_3)c_2-(a_2a_3+b_2b_3)c_1$$

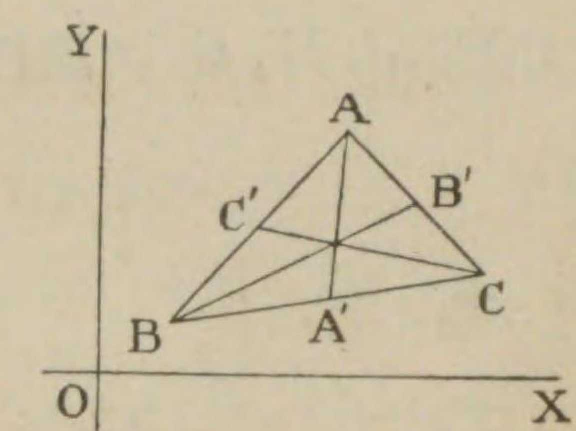
(iv) 三角形ノ中線

三角形ノ頂點ヲ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ トシ, 邊 BC, CA, AB ノ各中點ヲ A′, B′, C′ トスレバ

$$A'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

$$B'\left(\frac{x_3+x_1}{2},\ \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

$$C'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



故ニ第 34 節 (2) ニヨリ中線 AA′ ノ方程式ハ

$$\frac{x-x_1}{x_1-\dfrac{x_2+x_3}{2}}=\frac{y-y_1}{y_1-\dfrac{y_2+y_3}{2}}$$

即チ $(2y_1-y_2-y_3)x-(2x_1-x_2-x_3)y+x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3)=0$ (1)

同様ニ中線 BB′, CC′ ノ方程式ハ夫々次ノ如シ

$$(2y_2-y_3-y_1)x-(2x_2-x_3-x_1)y+x_2(y_3+y_1)-y_2(x_3+x_1)=0 \qquad (2)$$

$$(2y_3-y_1-y_2)x-(2x_3-x_1-x_2)y+x_3(y_1+y_2)-y_3(x_1+x_2)=0 \qquad (3)$$

依テ (1) 及ビ (2) ヲ加フルトキハ

$$(y_1+y_2-2y_3)x-(x_1+x_2-2x_3)y-x_3(y_1+y_2)+y_3(x_1+x_2)=0$$

即チ $(2y_3-y_1-y_2)x-(2x_3-x_1-x_2)y+x_3(y_1+y_2)-y_3(x_1+x_2)=0$

トナリ (3) ト一致ス

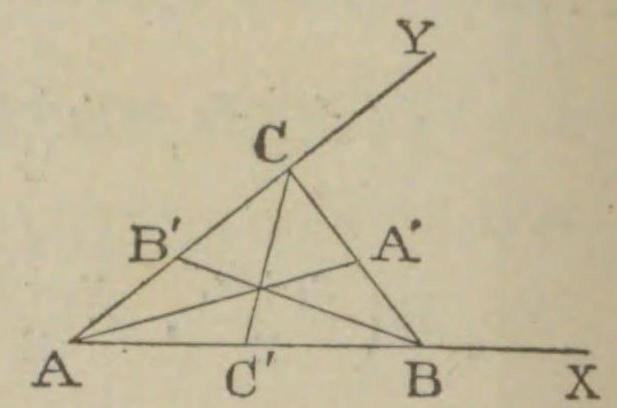
故ニ (1) ハ第 36 節 (9) ニ, (2) ハ (10) ニ, 又 (3) ハ (11) ニ於テ $k=1$ ナル場合ニ相當ス, 依テ (3) ハ (1) 及ビ (2) ノ交點ヲ通過ス, 即チ三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ニ於テ相交ハル

上ノ結果ヲ得ルニハ斜交軸ヲ用ヒテ次ノ如キ順序ヲ取ルモ可ナリ

三角形 ABC ノ頂點 A ヲ座標ノ原點トシ, AB, AC ヲ座標軸トシ,

$$BC=2a,\quad CA=2b,\quad AB=2c$$

トスレバ三頂點 A, B, C 及ビ三邊ノ中點 A′, B′, C′ ノ座標ハ夫々次ノ如シ



$$A(0, 0),\quad B(2c, 0),\quad C(0, 2b)$$

$$A'(c, b),\quad B'(0, b),\quad C'(c, 0)$$

依テ三中線 AA′, BB′, CC′ ノ方程式ハ第 34 節 (2) 及ビ (3) ニヨリ夫々次ノ如シ

$$\frac{x}{c}-\frac{y}{b}=0$$

$$\frac{x}{2c}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{2b}=1$$

即チ

$$bx-cy=0 \tag{1}$$

$$bx+2cy=2bc \tag{2}$$

$$2bx+cy=2bc \tag{3}$$

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$x=\frac{2c}{3},\quad y=\frac{2b}{3}$$

此ノ値ハ明カニ (3) ヲ滿足ス, 故ニ第 36 節注意 (2) ニヨリ (1) 及ビ (2) ノ交點ハ (3) ノ上ニアリ, 卽チ (1), (2), (3) ハ同一ノ點ヲ通過ス

或ハ (1) 及ビ (2) ヲ加フレバ (3) ヲ得, 故ニ第 36 節ニヨリ (1), (2), (3) ハ同一ノ點ニ於テ相交ハル

38. 圓ノ方程式

一定ノ直交軸ニ關シテ定圓ノ中心ノ座標ヲ a, b トシ, 其ノ半徑ヲ r トスルトキハ第 15 節ニヨリ圓ノ方程式次ノ如シ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

此ノ特別ナル場合トシテ $a=0,\ b=0$ ト置クトキハ

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2}$$

又 $a^2+b^2=r^2$ ト置クトキハ

$$x^2+y^2=2(ax+by) \tag{3}$$

(2) ハ原點ヲ中心トスル圓ノ方程式, 又 (3) ハ原點ヲ通過スル圓ノ方程式ニシテ, (3) ニ於テ $a=0$ 若シクハ $b=0$ ト置クトキハ

$$x^2+y^2=2by \tag{4}$$

$$x^2+y^2=2ax \tag{5}$$

(4) ニ於テハ圓ノ中心ハ縱軸上ニアリ, 又 (5) ニ於テハ横軸上ニアリ

尙一般二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ハ $a=b,\ h=0$ ナルトキ

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \tag{6}$$

即チ

$$(x+g_1)^2+(y+f_1)^2=g_1^2+f_1^2-c_1 \tag*{(6)$_1$}$$

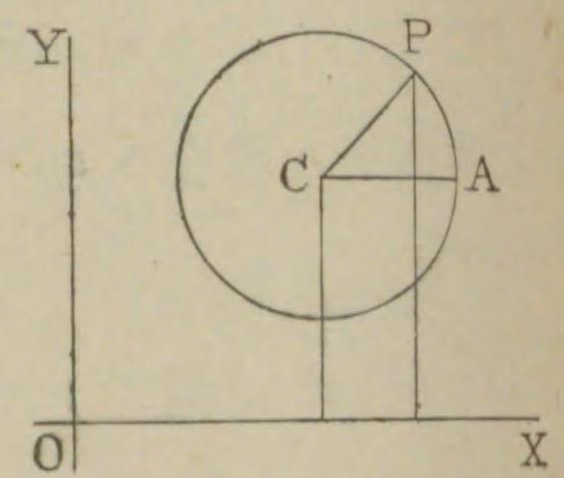
ノ形トナリ, $g_1^2+f_1^2-c_1>0$ ナル場合ニハ中心ノ座標ガ $-g_1,\ -f_1$ ニシテ半徑ガ $\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$ ナル圓ヲ表ハス

$g_1^2+f_1^2-c_1=0$ ナル場合ニハ (6) ハ點 $(-g_1,\ -f_1)$ ヲ表ハシ, 圓ノ半徑ガ零ナルモノト考フルコトヲ得, $g_1^2+f_1^2-c_1<0$ ナル場合ニハ (6) ヲ滿足スベキ點ハ實在セズ

又 $x-a=r\cos\theta$, $y-b=r\sin\theta$ ハ (1) ヲ滿足スルガ故ニ

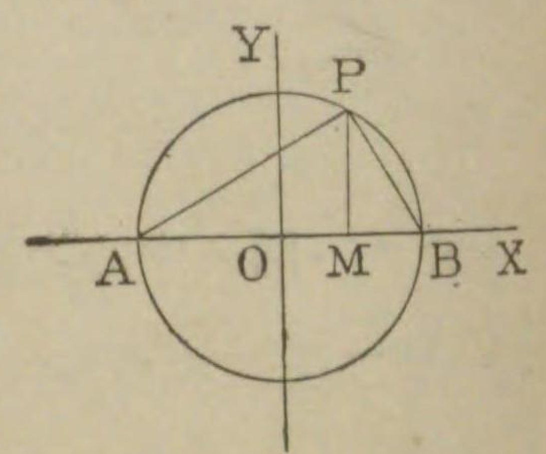
$$\left.\begin{array}{l} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{array}\right\} \qquad (7)$$

ハ θ ヲ徑數トスル圓ノ方程式ニシテ，C(a, b) ヲ中心トシ，CA ヲ横軸ニ平行ナル半徑トスルトキ P(x, y) ヲ圓上ノ一點トスレバ，r ハ半徑又 θ ハ CP ガ C A トナス角ヲ表ハスモノトス



注意 上ニ擧ゲタル圓ノ方程式ヨリ直チニ種々ノ重要ナル關係ヲ誘出スルコトヲ得，例ヘバ (2) ヨリ

$$y^2=r^2-x^2=(r+x)(r-x)$$



圓上ノ一點 P(x, y) ヨリ直徑 AB ニ垂線 PM ヲ引クトキハ

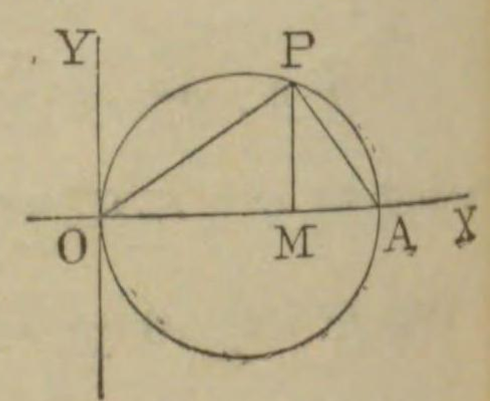
$$AM=r+x,\ MB=r-x,\ PM=y$$

故ニ

$$\overline{PM}^2=\overline{AM}.\overline{MB}$$

又 (5) ヨリ

$$x^2+y^2=2ax$$



圓上ノ一點 P(x, y) ヨリ直徑 OA ニ垂線 PM ヲ引クトキハ

$$OM=x, \qquad OA=2a$$

$$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\overline{PM}^2=x^2+y^2$$

故ニ

$$\overline{OP}^2=\overline{OA}.\overline{OM}$$

39. 直線ト圓トノ交點

半徑ガ r ナル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

又一點 P(x_0, y_0) ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=l \qquad (2)$$

トシ，(1) 及ビ (2) ヲ聯立方程式ト考フルトキハ次ノ式ヲ得

$$(x_0+l\cos\alpha)^2+(y_0+l\sin\alpha)^2=r^2$$

卽チ

$$l^2+2l(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha)+x_0^2+y_0^2-r^2=0 \qquad (3)$$

(3) ハ l ニ關スル二次方程式ニシテ

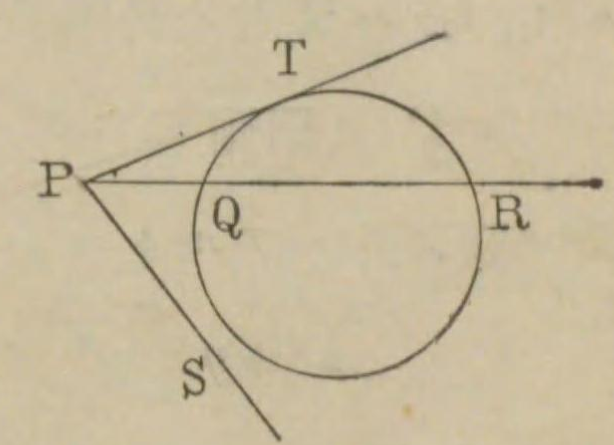
$$\Delta=(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha)^2-(x_0^2+y_0^2-r^2)$$

卽チ

$$\Delta=r^2-(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2$$

ト置クトキハ $\Delta>0$, $\Delta=0$, 又ハ $\Delta<0$ ナルニ從ヒ，二ツノ相異ナル實根，二ツノ等根，又ハ二ツノ虛根ヲ有ス

l ハ P ヨリ圓ノ上ノ一點ニ至ル線分ノ長サナルガ故ニ，$\Delta>0$ ナル場合ニハ直線ト圓トハ二ツノ點 Q, R ニ於テ相交ハリ，$\Delta=0$ ナル場合ニハ Q, R ハ一致シテ一點 T トナリ，$\Delta<0$ ナル場合ニハ直線 PS ト圓トハ全ク共通ナル點ヲ有セズ



原點ヨリ (2) 卽チ

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha$$

ニ至ル垂線ノ長サヲ p トスルトキハ第 37 節ニヨリ

$$p^2=(x_0\sin\alpha-y_0\cos\alpha)^2$$

故ニ
$$\Delta=r^2-p^2$$

依テ上ニ得タル結果ハ之ヲ次ノ如ク言ヒ表ハスコトヲ得

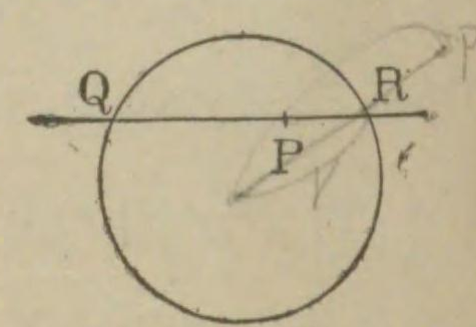
圓ノ中心ヨリ一ツノ直線ニ至ル垂線距離ガ半徑ヨリモ小ナルトキハ直線ト圓トハ二點ヲ共有シ，半徑ニ等シキトキハ一點ヲ共有シ，半徑ヨリモ大ナルトキハ全ク共通ナル點ヲ有セズ

注意 (3) ノ二ツノ根ヲ l_1, l_2 トスルトキハ

$$l_1l_2=x_0^2+y_0^2-r^2$$

ニシテ，$x_0^2+y_0^2-r^2$ ハ圓ノ半徑及ビ其ノ中心ト P トノ位置ニヨリテ定マリ，直線ノ方向ニハ關係ナシ，故ニ圓ノ内又ハ外ニアル一點Pヲ通過スル直線ト圓トノ交點ヲ Q, R トスルトキハ $\overline{PQ}.\overline{PR}$ ハ直線ノ方向ニ關セズ一定ナルコト明ナリ

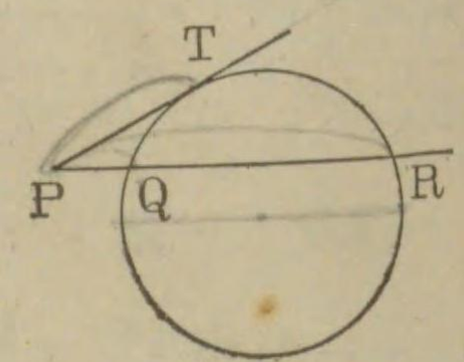
Pガ圓ノ内ニアルトキハ



$$x_0^2+y_0^2<r^2$$

故ニ l_1, l_2 ハ反對ノ符號ヲ有シ，從テ Q, R ハ P ノ兩側ニアリ

Pガ圓ノ外ニアルトキハ



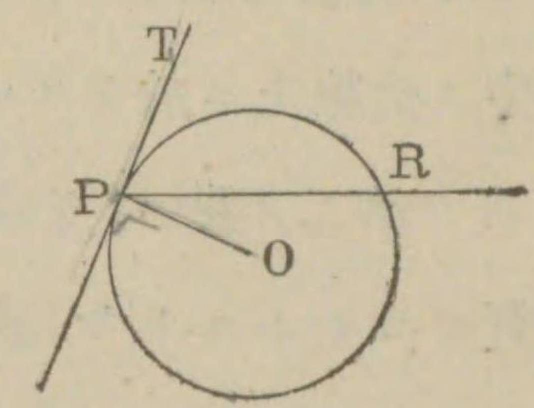
$$x_0^2+y_0^2>r^2$$

故ニ l_1, l_2 ハ同一ノ符號ヲ有シ，從テ Q, R ハ P ノ同側ニアリ

此ノ場合ニ圓ノ中心ヨリ直線ニ至ル垂線距離ガ半徑ニ等シキトキハ Q, R ハ合シテ一點 T トナル，從テ

$$\overline{PQ}.\overline{PR}=x_0^2+y_0^2-r^2=\overline{PT}^2$$

又Pガ圓ノ上ニアルトキハ



$$x_0^2+y_0^2=r^2$$

依テ l_1, l_2 ノ何レカ一ツハ零トナル

今 $l_1=0$ トスレバ (3) ヨリ

$$l_2=-2(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha)$$

$x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha=0$ ヲ滿足スル如ク α ヲ取ルトキハ l_2 モ亦 0 トナル

此ノ場合ニハ直線 PT ノ方程式ハ次ノ如シ

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$$

此ニ
$$\frac{x_0}{\sin\alpha}=\frac{-y_0}{\cos\alpha}$$

此ノ二ツノ式ヨリ α ヲ消去スルトキハ次ノ式ヲ得

$$\frac{x-x_0}{-y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}$$

即チ
$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$$

然ルニ
$$x_0^2+y_0^2=r^2$$

故ニ
$$x_0x+y_0y=r^2 \qquad (4)$$

又 $P(x_0, y_0)$ ト原點トヲ通過スル直線ノ方程式ハ

$$\frac{y}{y_0}=\frac{x}{x_0}$$

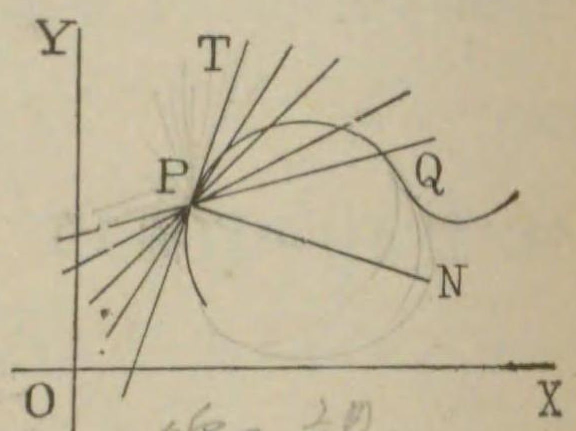
即チ
$$y_0x-x_0y=0 \qquad (5)$$

第35節ニヨリ (4) ト (5) トハ互ニ垂直ナリ

故ニ PT ハ P ヲ通過シテ半徑 OP ニ垂直ナル直線ナリ

40. 切線及ビ法線

一定ノ曲線上ニ於ケル一ツノ定點ヲ P トシ，此ノ曲線上ニ於テ P ニ近ク第二ノ點 Q ヲ取リ，Q ヲシテ此ノ曲線ニ沿ウテ P ニ限リナク近ヅカシムルトキ，直線 PQ ガ一定ノ直線 PT ニ限リナク近ヅクトキハ，此ノ一定ノ直線ヲ P ニ於ケル此ノ曲線ノ**切線**トイヒ，P ヲ其ノ**切點**トイフ



又曲線上ニ於ケル一點 P ヲ通過シ，其ノ點ニ於ケル切線ニ垂直ナル直線 PN ヲ P ニ於ケル此ノ曲線ノ**法線**トイフ 即チ法線ハ切線ニ垂直ニ出ル線ヲ謂フ。

一ツノ曲線上ニ於ケル點 $P(x_0, y_0)$ 及ビ $Q(x_0+h, y_0+k)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ

Q(h+k)

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

トスレバ

$$m=\frac{(y_0+k)-y_0}{(x_0+h)-x_0}=\frac{k}{h}$$

故ニ Q ガ P ニ限リナク近ヅクトキ，即チ h, k ガ共ニ限リナク小ナルトキ，$\frac{k}{h}$ ガ一定ノ値 m_1 ニ限リナク近ヅクトキハ

$$y-y_0=m_1(x-x_0) \qquad \text{(I)}$$

ハ P ニ於ケル切線ノ方程式ナリ

又 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル法線ノ方程式ヲ

$$y-y_0=m_2(x-x_0)$$

トスレバ

$$m_1m_2+1=0$$

故ニ

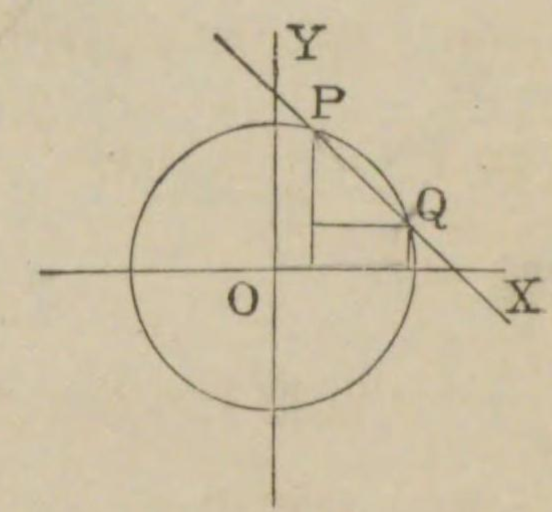
$$y-y_0=-\frac{1}{m_1}(x-x_0) \qquad \text{(II)}$$

ハ P ニ於ケル法線ノ方程式ナリ

今半徑ガ r ナル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トスレバ其ノ上ニ於ケル二點 $P(x_0, y_0)$, $Q(x_0+h, y_0+k)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ハ次ノ如シ



$$y-y_0=m(x-x_0)$$

此ニ

$$m=\frac{k}{h}$$

$$x_0^2+y_0^2=r^2$$

$$(x_0+h)^2+(y_0+k)^2=r^2$$

最後ノ二式ヨリ

$$2hx_0+2ky_0+h^2+k^2=0$$

從テ

$$\frac{k}{h}=-\frac{2x_0+h}{2y_0+k}$$

Q ガ P ニ限リナク近ヅクトキ，即チ h 及ビ k ガ何レモ限リナク 0 ニ近ヅクトキハ $\frac{k}{h}$ ハ限リナク $-\frac{x_0}{y_0}$ ニ近ヅク

即チ

$$m_1=-\frac{x_0}{y_0}$$

故ニ $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ (I) ニヨリ

$$y-y_0=m_1(x-x_0)$$

此ニ

$$m_1=-\frac{x_0}{y_0}$$

m_1 ノ値ヲ代入スレバ切線ノ方程式ハ

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

即チ
$$x_0x+y_0y=r^2 \tag{2}$$

トナリ前節ニ於ケル (4) ト一致ス

又 $P(x_0,\ y_0)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ (II) ニヨリ

$$y-y_0=-\frac{1}{m_1}(x-x_0)$$

此ニ
$$m_1=-\frac{x_0}{y_0}$$

依テ
$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

即チ
$$\frac{y}{y_0}=\frac{x}{x_0} \tag{3}$$

トナリ前節ニ於ケル (5) ト一致ス

次ニ座標軸ヲ平行ニ移動シテ點 $(-a,\ -b)$ ヲ新原點トスルトキハ圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag*{(1)$_1$}$$

トナリ，$P(x_0,\ y_0)$ ニ於ケル此ノ圓ノ切線ノ方程式ハ

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2 \tag*{(2)$_1$}$$

又 $P(x_0,\ y_0)$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$\frac{y-b}{y_0-b}=\frac{x-a}{x_0-a}$$

即チ
$$(y_0-b)x-(x_0-a)y=ay_0-bx_0 \tag*{(3)$_1$}$$

トナル

又
$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \tag*{(1)$_2$}$$

即チ
$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

ヲ圓ノ方程式トスルトキハ切線ノ方程式ハ $(2)_1$ ニヨリ

$$(x_0+g)(x+g)+(y_0+f)(y+f)=g^2+f^2-c$$

即チ
$$x_0x+y_0y+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0 \tag*{(2)$_2$}$$

又法線ノ方程式ハ

$$\frac{y+f}{y_0+f}=\frac{x+g}{x_0+g}$$

即チ
$$(y_0+f)x-(x_0+g)y=fx_0-gy_0 \tag*{(3)$_2$}$$

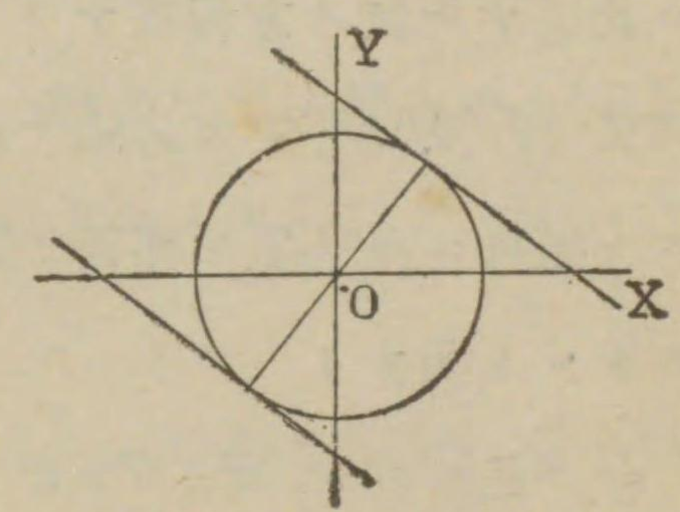
次ニ (2) ニ於テ $x_0=r\cos\phi,\ y_0=r\sin\phi$ ト置クトキハ

$$x\cos\phi+y\sin\phi=r \tag{4}$$

ヲ得

(4) ハ P ニ於ケル半徑ガ横軸ノ正方向トナス角 ϕ ヲ用ヒテ表ハシタル切線ノ方程式ナリ

又 (2) ヨリ



$$y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{r^2}{y_0}$$

$-\dfrac{x_0}{y_0}=m$ ト置クトキハ

$$1+m^2=1+\frac{x_0^2}{y_0^2}$$

從テ
$$r^2(1+m^2)=\left(\frac{r^2}{y_0}\right)^2$$

故ニ
$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2} \tag{5}$$

(5) ハ方向係數ガ m ナル切線ノ方程式ニシテ，縱軸上ニ於ケル截片ガ $r\sqrt{1+m^2}$ 及ビ $-r\sqrt{1+m^2}$ ナル二ツノ平行線ヲ表ハス

41. 二ツノ圓ノ交點

二ツノ圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r_1^2 \tag{1}$$

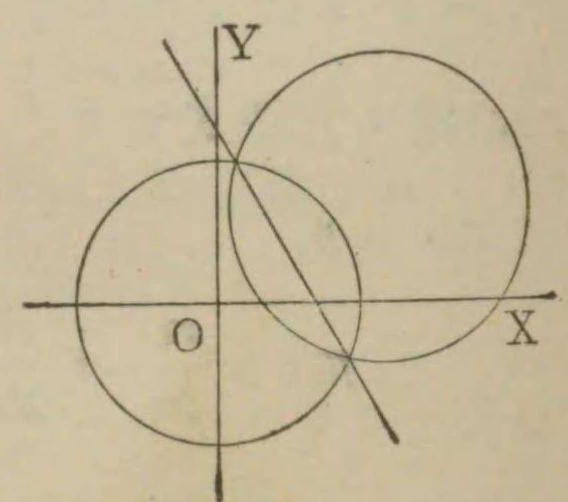
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r_2^2 \tag{2}$$

トシ，之ヲ聯立方程式ト考フルトキハ次ノ式ヲ得

$$2ax+2by=a^2+b^2+r_1^2-r_2^2 \tag{3}$$

$a=0,\ b=0$ ニシテ $r_1 \gtrless r_2$ ナルトキハ (3) ハ成立セズ，此ノ場合ニハ二ツノ圓ハ同心圓ニシテ相交ハルコトナシ，又 $a=0,\ b=0$ ニシテ $r_1=r_2$ ナルトキハ (1) 及ビ (2) ハ全ク同一ノ圓ヲ表ハス

a 及ビ b ノ少クモ一方ガ零ニ等シカラザルトキハ (3) ハ實在セル直線ヲ表ハシ，(1) 及ビ (2 ヲ滿足スル $x,\ y$ ノ値ハ又必ズ (3) ヲ滿足ス，故ニ (1) 及ビ (2) ノ表ハス圓ガ相交ハル場合ニハ (3) ハ二ツノ圓ニ共通ナル弦ノ方程式ナリ



又 (1) 及ビ (3) ガ共通ナル點ヲ有スル場合ニハ (2) モ亦其ノ點ヲ通過スルコト明ナリ

今 $b \gtrless 0$ トシ，$a^2+b^2=d^2$ ト置クトキハ (3) ヨリ

$$y=\frac{d^2+r_1^2-r_2^2-2ax}{2b}$$

ヲ得，之ヲ (1) ニ代入スルトキハ

$$4b^2x^2+(d^2+r_1^2-r_2^2-2ax)^2=4b^2r_1^2 \tag{4}$$

即チ $\quad 4(a^2+b^2)x^2-4a(d^2+r_1^2-r_2^2)x+(d^2+r_1^2-r_2^2)^2-4b^2r_1^2=0$

依テ
$$\Delta=4a^2(d^2+r_1^2-r_2^2)^2$$
$$-4(a^2+b^2)\{(d^2+r_1^2-r_2^2)^2-4b^2r_1^2\}$$

即チ
$$\Delta=4b^2\{4d^2r_1^2-(d^2+r_1^2-r_2^2)^2\}$$

ト置クトキハ $\Delta>0,\ \Delta=0$，又ハ $\Delta<0$ ナルニ從ヒ (4) ハ二ツノ相異ナル實根，二ツノ等根，又ハ二ツノ虛根ヲ有ス

然ルニ x ハ二ツノ圓ノ交點ノ橫座標ナルガ故ニ $\Delta>0$ ナル場合ニハ二ツノ圓ハ二ツノ點ニ於テ相交ハリ，$\Delta=0$ ナル場合ニハ此ノ二ツノ點ハ一致シテ一點トナリ，$\Delta<0$ ナル場合ニハ二ツノ圓ハ全ク共通ナル點ヲ有セズ

又
$$\Delta=4b^2\{2dr_1+(d^2+r_1^2-r_2^2)\}\{2dr_1-(d^2+r_1^2-r_2^2)\}$$
$$=4b^2\{(d+r_1)^2-r_2^2\}\{r_2^2-(d-r_1)^2\}$$
$$=-4b^2(d+r_1+r_2)(d+r_1-r_2)(r_1+r_2-d)(r_1-r_2-d)$$

(i) $r_1>r_2$ トスレバ

$$d+r_1+r_2>0,\quad d+r_1-r_2>0$$

$r_1-r_2<d<r_1+r_2$ ナルトキハ $\Delta>0$，即チ二ツノ圓ノ中心距離ガ半徑ノ差ヨリモ大ニシテ其ノ和ヨリモ小ナルトキハ二ツノ圓ハ二ツノ點ヲ共有ス

$d=r_1-r_2$ 又ハ $d=r_1+r_2$ ナルトキハ $\Delta=0$，即チ二ツノ圓ノ中心距離ガ半徑ノ差又ハ和ニ等シキトキハ二ツノ圓ハ一點ヲ共有ス

$d<r_1-r_2$ 又ハ $d>r_1+r_2$ ナルトキハ $\Delta<0$，即チ二ツノ圓ノ中心距離ガ半徑ノ差ヨリモ小又ハ其ノ和ヨリモ大ナルトキハ二ツノ圓ハ全ク共通ナル點ヲ有セズ

$r_1<r_2$ トスルモ全ク同様ナル結果ヲ得

(ii) $r_1=r_2$ トスレバ

$$\Delta=-4b^2d^2(d+2r_1)(d-2r_1)$$

$d<2r_1$ ナルトキハ $\Delta>0$, $d=2r_1$ ナルトキハ $\Delta=0$, 又 $d>2r_1$ ナルトキハ $\Delta<0$, 即チ二ツノ圓ノ中心距離ガ直徑ヨリモ小ナルトキハ二ツノ圓ハ二點ヲ共有シ，直徑ニ等シキトキハ一點ヲ共有シ，直徑ヨリモ大ナルトキハ全ク共通ナル點ヲ有セズ

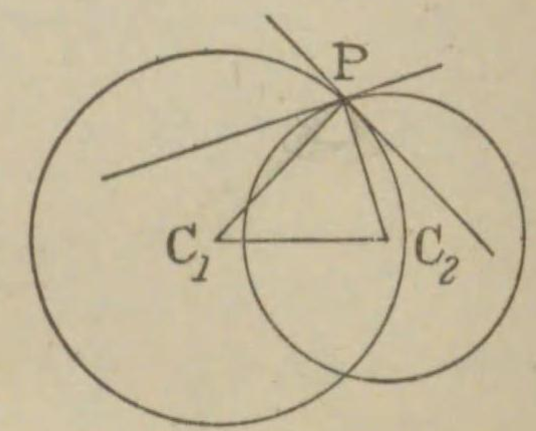
以上ノ結果ハ二ツノ圓ノ半徑及ビ中心ノ距離ニヨリテ定マリ，座標軸ノ位置ニハ關係ナシ，從テ例ヘバ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

ヲ二ツノ圓ノ方程式トスルモ結果ニ於テ何等ノ異ナル所ナシ

次ニ二ツノ圓ガ相交ハル場合ニ於テ，交點ニ於ケル切線ハ其點ニ於ケル半徑ニ垂直ナリ，從テ切線ノナス角ハ其ノ點ニ於ケル半徑ノナス角ニ等シ



今二ツノ圓ノ中心ヲ夫々 $C_1(a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$ トシ，半徑ヲ夫々 r_1, r_2 トシ，交點 P ニ於ケル切線ノナス角ヲ ϕ トスルトキハ

$$\overline{C_1C_2}^2=\overline{C_1P}^2+\overline{C_2P}^2-2\overline{C_1P}\,\overline{C_2P}\cos\phi$$

然ルニ $\quad C_1P=r_1 \qquad C_2P=r_2$

$$\overline{C_1C_2}^2=(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2$$

故ニ
$$\cos\phi=\frac{r_1^2+r_2^2-(a_1-a_2)^2-(b_1-b_2)^2}{2r_1r_2} \tag{5}$$

中心距離ヲ d トスルトキハ

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=d^2$$

故ニ
$$\cos\phi=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2} \qquad (5)_1$$

$r_1^2+r_2^2=d^2$ ナルトキハ $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ トナル，此ノ場合ニ二ツノ圓ハ互ニ直交ストイフ

又二ツノ圓ノ方程式ガ

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0 \tag{6}$$

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \tag{7}$$

即チ
$$(x+g_1)^2+(y+f_1)^2=g_1^2+f_1^2-c_1$$

$$(x+g_2)^2+(y+f_2)^2=g_2^2+f_2^2-c_2$$

ナルトキハ

$$\cos\phi=\frac{g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2-(g_1-g_2)^2-(f_1-f_2)^2}{2\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}}$$

即チ
$$\cos\phi=\frac{2g_1g_2+2f_1f_2-c_1-c_2}{2\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}}$$

故ニ
$$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2 \tag{8}$$

ハ (6) 及ビ (7) ガ互ニ直交スル條件ナリ

注意 (5) ニ於テ ϕ ノ値ハ二ツノ圓ノ半徑ト中心ノ距離ノミニヨリテ定マル，故ニ二ツノ圓ガ相交ハル場合ニ何レノ交點ニ於テモ ϕ ノ値ハ同一ナリ，從テ一方ノ交點ニ於テ互ニ直交スレバ他ノ交點ニ於テモ亦直交スルモノトス

42. 根軸及ビ共軸圓

二ツノ圓ノ方程式ヲ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \qquad (1)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2 \qquad (2)$$

トシ，(1) 及ビ (2) ガ相交ハルトキハ前節ニヨリ

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y=a_1^2-a_2^2+b_1^2-b_2^2-r_1^2+r_2^2 \qquad (3)$$

ハ共通弦ノ方程式ニシテ (3) ハ中心線

$$\frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{y-b_1}{b_1-b_2}$$

ニ垂直ナリ

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2$$

$$S_2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2$$

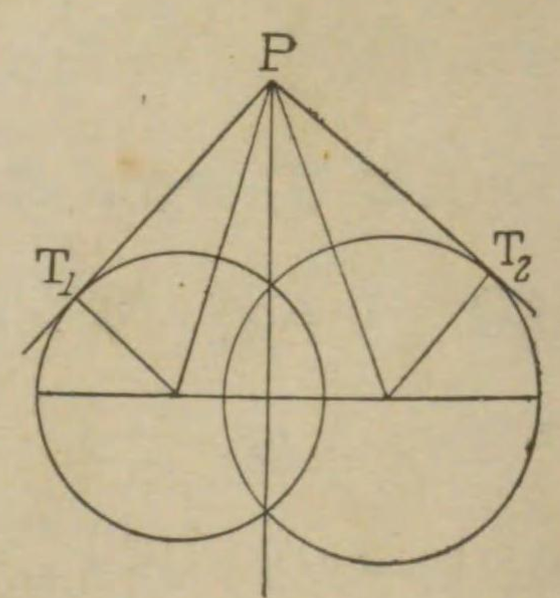
ト置クトキハ (1), (2), (3) ハ夫々次ノ形ヲ取ル

$$S_1=0 \qquad (1)_1$$

$$S_2=0 \qquad (2)_1$$

$$S_1-S_2=0 \qquad (3)_1$$

$(3)_1$ ノ上ニ於ケル一點ヲ $P(x, y)$ トシ，P ヨリ $(1)_1$ 及ビ $(2)_1$ ノ上ニ引キタル切線ノ切點ヲ夫々 T_1, T_2 トスルトキハ



$$\overline{PT_1}^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2$$

$$\overline{PT_2}^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2$$

故ニ

$$\overline{PT_1}^2=\overline{PT_2}^2 \qquad (4)$$

(1) 及ビ (2) ガ相交ハラザル場合ニモ (3) ハ明カニ實在スル直線ニシテ，其ノ上ニ於ケル一點ヨリ二ツノ圓ニ切線ヲ引クトキハ (4) ノ關係ヲ得

二ツノ圓 $S_1=0$, $S_2=0$ ノ位置如何ニ係ハラズ $S_1-S_2=0$ ノ表ハス直線ヲ二ツノ圓ノ**根軸**トイフ

次ニ k ヲ 0 ニ等シカラザル常數トシ

$$S_1+kS_2=0 \qquad (5)$$

ト置クトキハ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2+k\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2\}=0$$

卽チ
$$(1+k)(x^2+y^2)-2(a_1+ka_2)x-2(b_1+kb_2)y$$
$$+\ a_1^2+ka_2^2)+(b_1^2+kb_2^2)-(r_1^2+kr_2^2)=0$$

故ニ $k=-1$ ナル場合ニ限リ (5) ハ直線ヲ表ハシ，其他ノ場合ニハ圓ヲ表ハスベシ

今此ノ圓ノ群中ニ就テ任意ノ二ツノ異リタル圓

$$S_1+\lambda S_2=0,\quad S_1+\mu S_2=0 \qquad (6)$$

卽チ
$$(1+\lambda)(x^2+y^2)-2(a_1+\lambda a_2)x-2(b_1+\lambda b_2)y$$
$$+(a_1^2+\lambda a_2^2)+(b_1^2+\lambda b_2^2)-(r_1^2+\lambda r_2^2)=0$$
$$(1+\mu)(x^2+y^2)-2(a_1+\mu a_2)x-2(b_1+\mu b_2)y$$
$$+(a_1^2+\mu a_2^2)+(b_1^2+\mu b_2^2)-(r_1^2+\mu r_2^2)=0$$

ヲ取リ，此ノ二式ヨリ x^2+y^2 ノ項ヲ消去スルトキハ

$$(1+\mu)(S_1+\lambda S_2)-(1+\lambda)(S_1+\mu S_2)=0$$

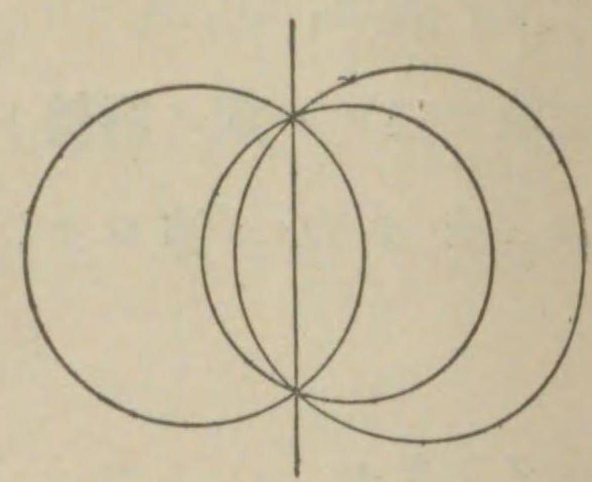
卽チ
$$(\mu-\lambda)(S_1-S_2)=0$$

從テ
$$S_1-S_2=0$$

故ニ $$S_1+kS_2=0$$

ノ表ハス圓ノ群ハ何レモ $S_1-S_2=0$ ナル根軸ヲ有ス

同一ノ根軸ヲ有スル圓ノ群ヲ**共軸圓**トイフ



$S_1=0$, $S_2=0$ ガ相交ハル場合ニハ此ノ二式ヲ滿足スル x, y ノ値ハ又 $S_1+kS_2=0$ ヲ滿足ス，依テ (5) ハ $S_1=0$, $S_2=0$ ノ交點ヲ通過スルコト明ナリ

今三ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

$$S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=0$$

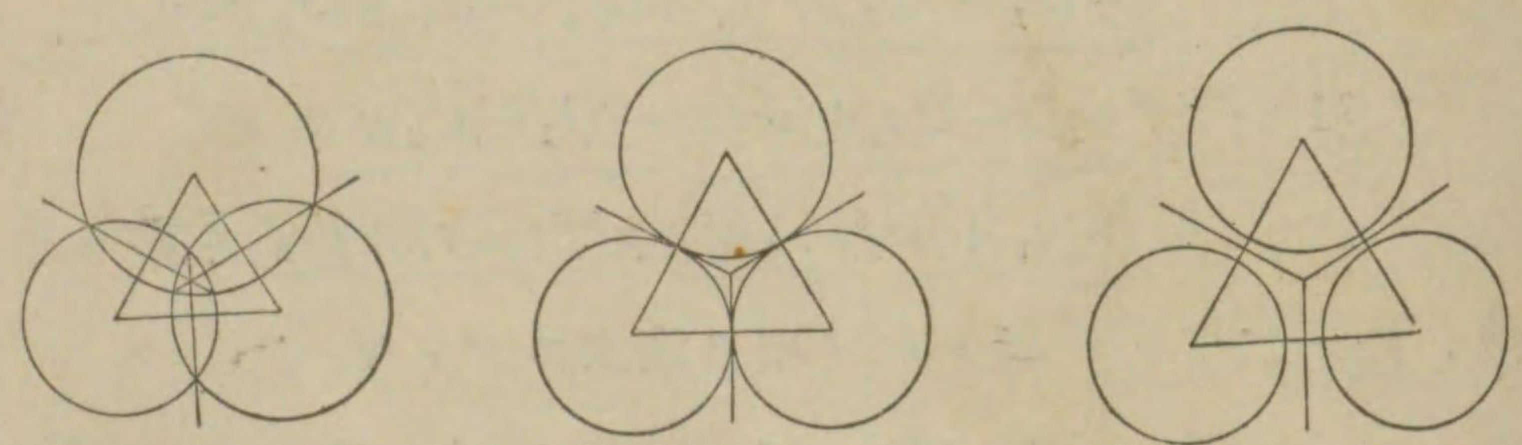
トスルトキハ第一ト第二，第二ト第三，第三ト第一ノ根軸ノ方程式ハ夫々次ノ如シ

$$S_1-S_2=0,\ S_2-S_3=0,\ S_3-S_1=0$$

然ルニ $$(S_1-S_2)+(S_2-S_3)=S_1-S_3$$

故ニ第 36 節ニヨリ三ツノ根軸ハ一點ニ於テ相會ス

此ノ三ツノ根軸ノ相會スル點ヲ三ツノ圓ノ**根心**トイフ

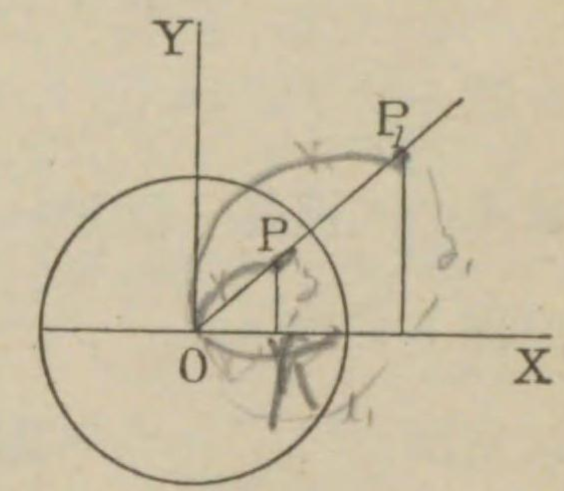


根心ヨリ三ツノ圓ニ切線ヲ引キ得ル場合ニハ切線ノ長サハ何レモ相等シ

43. 反點及ビ反形

定圓ノ中心ヲ O，其ノ半徑ヲ k トシ，O ヨリ引ケル直線上ノ二點 P, P_1 ノ間ニ $\overline{OP}\ \overline{OP_1}=k^2$ ナル關係アルトキ，P, P_1 ハ此ノ圓ニ關シテ互ニ**反點**ナリトイフ

$P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$ ガ定圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ互ニ反點ナルトキ，$OP=r$, $OP_1=r_1$ ト置クトキハ



$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{r}{r_1}=\frac{rr_1}{r_1^2}$$

然ルニ $rr_1=k^2$, $r_1^2=x_1^2+y_1^2$

故ニ $$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{k^2}{x_1^2+y_1^2}$$

依テ $$x=\frac{k^2x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y=\frac{k^2y_1}{x_1^2+y_1^2} \qquad (1)$$

同樣ニシテ $$x_1=\frac{k^2x}{x^2+y^2},\quad y_1=\frac{k^2y}{x^2+y^2} \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ハ x, y ト x_1, y_1 トノ關係ヲ示スモノニシテ，之ニヨリテ一點 P ノ位置ヲ知ルトキ之ニ對應スル反點 P_1 ノ位置ヲ定ムルコトヲ得

P ガ圓ノ中心ニ限リナク近キトキハ P_1 ハ無窮遠ニアリ，P ガ圓ノ內ニアリテ之ニ近ヅクニ從ヒ P_1 ハ圓ノ外ニアリテ之ニ近ヅキ，P ガ圓ノ上ニアルトキハ P_1 ハ之ニ一致スルモノトス

P ガ一ツノ曲線ヲ畫クトキハ P_1 ハ他ノ曲線ヲ畫ク，此ノ第二ノ曲線ヲ定圓ニ關シテ第一ノ曲線ノ**反形**トイヒ，定圓ノ中心ヲ**反形ノ中心**トイフ

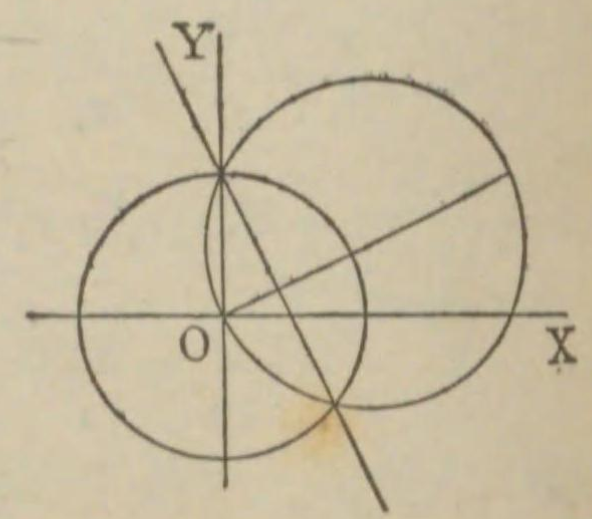
定圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ直線 $ax+by+c=0$ ノ反形ノ方程式ハ

(1) ニヨリ

$$\frac{ak^2x_1}{x_1^2+y_1^2}+\frac{bk^2y_1}{x_1^2+y_1^2}+c=0$$

即チ $$c(x_1^2+y_1^2)+k^2(ax_1+by_1)=0$$

故ニ $c\gtrless 0$ ナル場合即チ原點ヲ通過セザル直線ノ反形ハ原點ヲ通過スル圓トナリ，$c=0$ ナル場合即チ原點ヲ通過スル直線ノ反形ハ元ノ直線ト同一ノ直線トナル



又定圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ圓

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ノ反形ノ方程式ハ

$$\frac{k^4x_1^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}+\frac{k^4y_1^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}+\frac{2gk^2x_1}{x_1^2+y_1^2}+\frac{2fk^2y_1}{x_1^2+y_1^2}+c=0$$

即チ $$c(x_1^2+y_1^2)+2gk^2x_1+2fk^2y_1+k^4=0$$

故ニ $c\gtrless 0$ ナル場合即チ原點ヲ通過セザル圓ノ反形ハ圓トナリ，$c=0$ ナル場合即チ原點ヲ通過スル圓ノ反形ハ直線トナル

極座標ヲ用フルトキハ $rr_1=k^2$ ナル關係ヨリ簡單ニ反形ノ方程式ヲ得ルコトアリ，即チ定圓 $r=k$ ニ關シテ圓 $r=a$ ノ反形ノ方程式ハ

$$rr_1=k^2,\qquad r=a$$

故ニ $$r_1=\frac{k^2}{a}$$

即チ同心圓ヲ得

定圓 $r=k$ ニ關シテ曲線 $r^2\cos2\theta=a^2$ ノ反形ノ方程式ハ

$$rr_1=k^2,\qquad r^2\cos2\theta=a^2$$

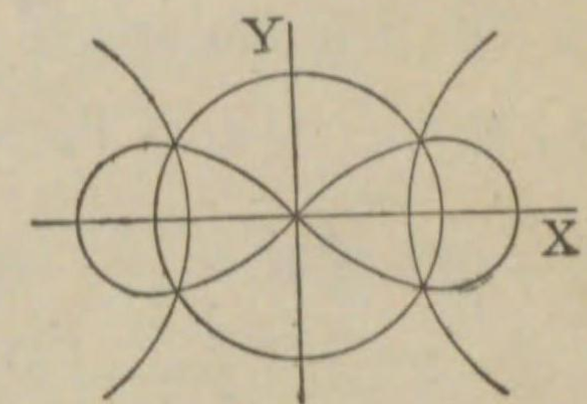
故ニ $$r_1^2=\frac{k^4}{a^2}\cos2\theta$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ ト置キテ直角座標ニテ表ハストキハ第一曲線 $r^2\cos2\theta=a^2$, 即チ $r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=a^2$ ヨリ

$$x^2-y^2=a^2$$

ヲ得，第二曲線 $r_1^2=\frac{k^4}{a^2}\cos2\theta$, 即チ $r_1^4=\frac{k^4}{a^2}(r_1^2\cos^2\theta-r_1^2\sin^2\theta)$ ヨリ

$$(x_1^2+y_1^2)^2=\frac{k^4}{a^2}(x_1^2-y_1^2)$$



ヲ得，故ニ定圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ等邊雙曲線 $x^2-y^2=a^2$ ノ反形ハ雙紐線 $(x_1^2+y_1^2)^2=\frac{k^4}{a^2}(x_1^2-y_1^2)$ ナリ

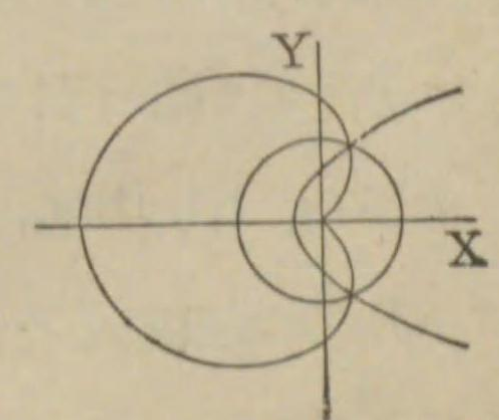
又定圓 $r=k$ ニ關シテ拋物線 $r=\frac{l}{1-\cos\theta}$ ノ反形ノ方程式ハ

$$rr_1=k^2,\qquad r=\frac{l}{1-\cos\theta}$$

故ニ $$r_1=\frac{k^2}{l}(1-\cos\theta)$$

$\frac{k^2}{l}=a^2,\ \theta=\pi+\theta_1$ ト置クトキハ

$$r_1=a^2(\cos\theta_1+1)$$

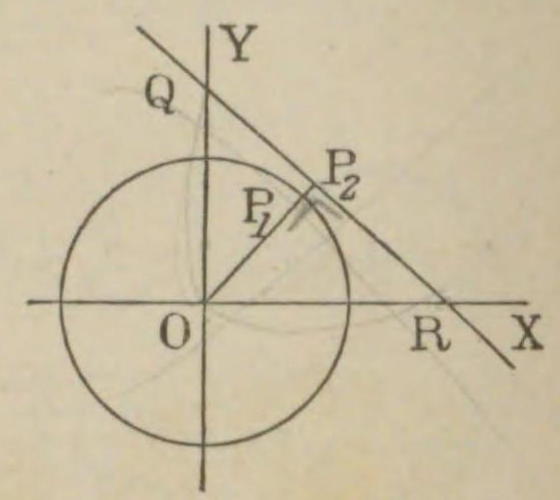


故ニ拋物線 $r=\frac{l}{1-\cos\theta}$ ノ反形ハ心臟線 $r_1=a^2(\cos\theta+1)$ ナリ

44. 極及ビ極線

定圓ノ中心ヲ O, 定點ヲ P_1, 此ノ圓ニ關シテ P_1 ノ反點ヲ P_2 トスルトキ, P_2 ヲ通過シテ OP_1 ニ垂直ナル直線 QR ヲ此ノ圓ニ關シテ P_1 ノ**極線**トイヒ, P_1 ヲ QR ノ**極**トイフ

定圓ノ方程式ヲ $x^2+y^2=r^2$ トシ, P_1 ノ座標ヲ x_1, y_1 トスルトキハ直線 OP_1 ノ方程式ハ



$$y=\frac{y_1}{x_1}x$$

ニシテ, P_2 ノ座標ハ前節 (1) ニヨリ

$$\frac{r^2x_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}},\quad \frac{r^2y_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}$$

ナリ, 然ルニ QR ハ P_2 ヲ通過シテ OP_1 ニ垂直ナルガ故ニ, 其ノ方程式ハ

$$y-\frac{r^2y_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}=-\frac{x_1}{y_1}\left(x-\frac{r^2x_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\right)$$

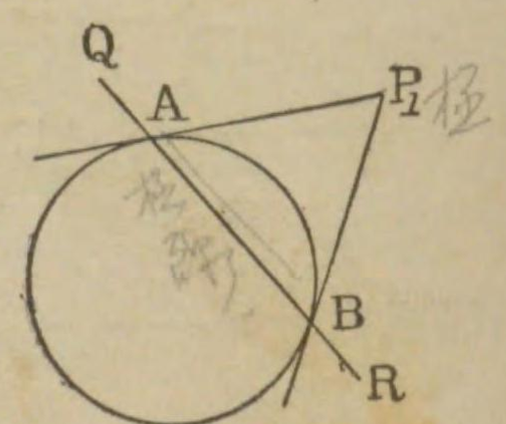
即チ
$$x_1x+y_1y=\frac{r^2x_1^{\ 2}}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}+\frac{r^2y_1^{\ 2}}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}$$

故ニ
$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{1}$$

(1) ハ即チ $P_1(x_1, y_1)$ ノ極線ニシテ P_1 ハ其ノ極ナリ

極線ニ關シテ次ノ如キ解釋ヲナスコトヲ得

(I) $P_1(x_1, y_1)$ ガ圓ノ外ニアル場合ニ於テ P_1 ヨリ圓ニ引キタル切線ノ切點ヲ $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ トスルトキハ AP_1 ノ方程式ハ第 40 節 (2) ニヨリ



$$a_1x+b_1y=r^2$$

然ルニ $P_1(x_1, y_1)$ ハ此ノ直線上ニアル點ナルガ故ニ

$$a_1x_1+b_1y_1=r^2$$

即チ
$$x_1a_1+y_1b_1=r^2 \tag{2}$$

同様ニ BP_1 ノ方程式ハ

$$a_2x+b_2y=r^2$$

從テ
$$x_1a_2+y_1b_2=r^2 \tag{3}$$

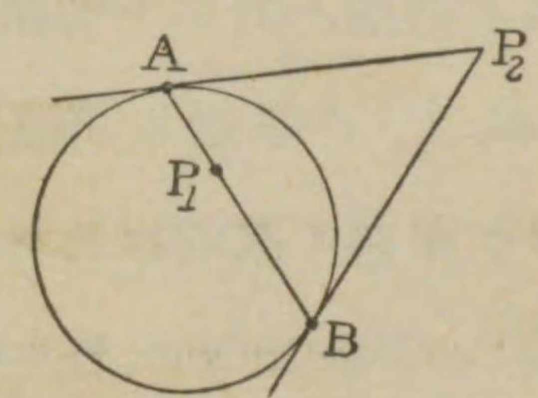
(2) 及ビ (3) ハ $A(a_1, b_1)$ 及ビ $B(a_2, b_2)$ ガ直線

$$x_1x+y_1y=r^2$$

ノ上ニアルコトヲ示ス, 即チ (1) ハ A, B ヲ通過スル直線 QR ノ方程式ナリ

故ニ P_1 ガ圓ノ外ニアルトキハ其ノ極線ハ P_1 ヨリ圓ニ引キタル二ツノ切線ノ切點ヲ兩端トスル弦ト一致ス

(II) $P_1(x_1, y_1)$ ガ圓ノ内又ハ外ニアル場合ニ於テ P_1 ヲ通過スル直線ヲ引キテ圓ト $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$ ニ於テ交ハラシメ, A 及ビ B ニ於ケル切線ノ交點ヲ $P_2(x_2, y_2)$ トスルトキハ AB ノ方程式ハ (I) ニヨリ



$$x_2x+y_2y=r^2$$

然ルニ $P_1(x_1, y_1)$ ハ AB ノ上ニアルガ故ニ

$$x_2x_1+y_2y_1=r^2$$

即チ
$$x_1x_2+y_1y_2=r^2 \tag{4}$$

(4) ハ $P_2(x_2, y_2)$ ガ直線

$$x_1x+y_1y=r^2$$

ノ上ニアルコトヲ示ス，卽チ (1) ハ P_2 ヲ通過スル直線ノ方程式ナリ

故ニ $P_1(x_1, y_1)$ ガ圓ノ內又ハ外ニアルトキ P_1 ヲ通過スル弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ハ卽チ極線ナリ

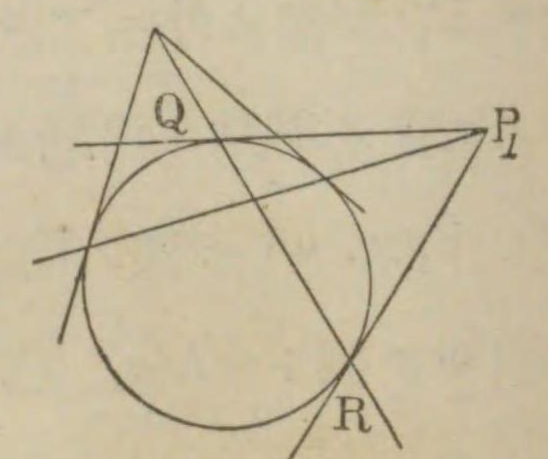
(III) $P_1(x_1, y_1)$ ガ圓ノ上ニアルトキハ第 40 節ニヨリ

$$x_1x+y_1y=r^2$$

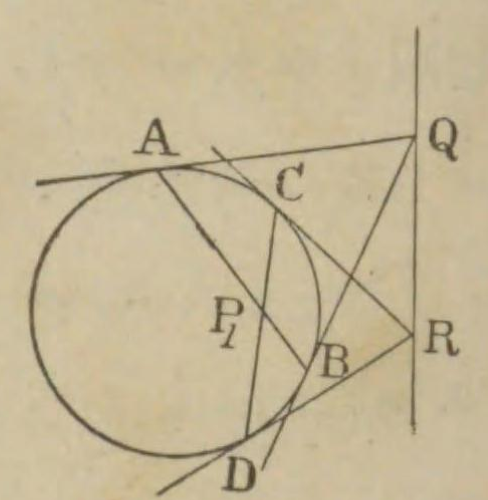
ハ P_1 ニ於ケル切線ノ方程式ニシテ P_1 ノ極線ハ此ノ切線ト一致ス

以上ノ證明ニヨリ一點 P_1 ノ極線ハ次ノ如クシテ之ヲ畫クコトヲ得

P_1 ガ圓ノ外ニアル場合ニハ P_1 ヨリ切線ヲ引キ，其ノ切點ヲ Q,R トスルトキハ QR ハ卽チ P_1 ノ極線ナリ



P_1 ガ圓ノ內又ハ外ノ何レニアル場合ニモ P_1 ヲ通過スル任意ノ弦 AB ヲ引キ其ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ヲ Q トシ，又 P_1 ヲ通過スル他ノ任意ノ弦 CD ヲ引キ其ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ヲ R トスルトキハ上ノ證明ニヨリ，Q, R ハ共ニ P_1 ノ極線上ニアリ，故ニ QR ハ卽チ P_1 ノ極線ナリ



P_1 ガ圓ノ上ニアル場合ニハ其ノ點ヲ切點トスル切線ハ卽チ P_1 ノ極線ナリ

尙極及ビ極線ニ關シテ次ノ重要ナル性質アリ

一ツノ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關シテ一點 $P_1(x_1, y_1)$ ノ極線ノ方程式ヲ

$$x_1x+y_1y=r^2$$

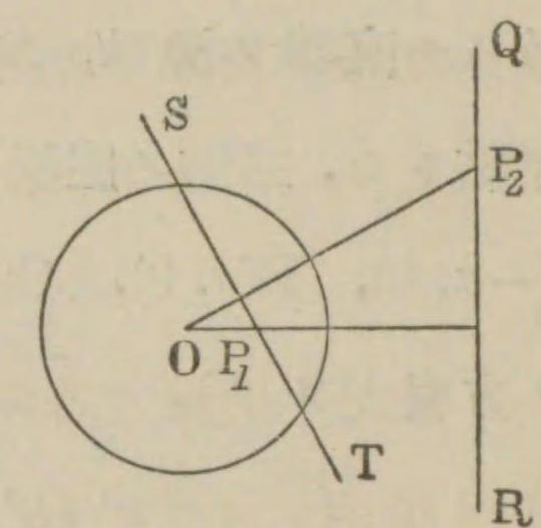
トシ，此ノ極線上ニ一點 $P_2(x_2, y_2)$ ヲ取ルトキハ

$$x_1x_2+y_1y_2=r^2$$

卽チ

$$x_2x_1+y_2y_1=r^2$$

然ルニ同一ノ圓ニ關シテ P_2 ノ極線ノ方程式ハ



$$x_2x+y_2y=r^2$$

ナルガ故ニ上ノ關係ハ $P_1(x_1, y_1)$ ガ直線

$$x_2x+y_2y=r^2$$

ノ上ニアルコトヲ示ス，卽チ P_2 ノ極線ハ P_1 ヲ通過ス

故ニ一ツノ圓ニ關シテ一點 P_1 ノ極線ガ他ノ一點 P_2 ヲ通過スルトキハ同一ノ圓ニ關シテ P_2 ノ極線ハ又 P_1 ヲ通過ス

此ノ如キ性質ヲ有スル二點 P_1, P_2 ヲ其ノ圓ニ關シテ互ニ共軛ナリトイフ

上ノ關係ヨリシテ次ノ結果ヲ導クコトヲ得

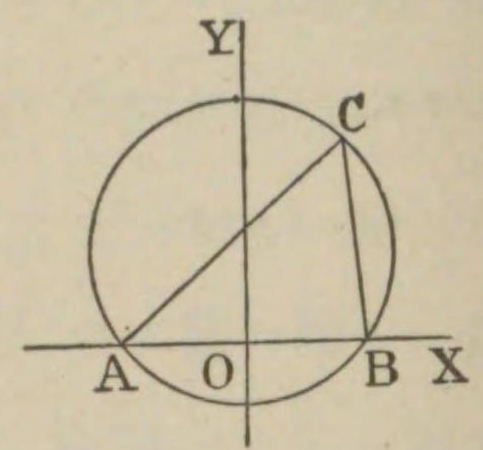
同一ノ圓ニ關シテ二ツノ點 P_1, P_2 ノ極線ノ交點ヲ P_3 トスルトキハ P_3 ハ其ノ圓ニ關シテ P_1 ノ極線ノ上ニアルガ故ニ P_3 ノ極線ハ P_1 ヲ通過ス，同樣ニ P_3 ノ極線ハ又 P_2 ヲ通過ス，卽チ P_3 ノ極線ハ二ツ點 P_1, P_2 ヲ通過ス

故ニ同一ノ圓ニ關シテ二ツノ點 P_1, P_2 ノ極線ノ交點ハ直線 P_1P_2 ノ極ナリ

45. 例題

(i) 三點ヲ通過スル圓

三點 A, B, C ヲ通過スル圓ノ方程式ヲ索ムルニ當リ，成ルベク式ヲ簡單ナラシメンガタメニ A, B ヲ通過スル直線ヲ横軸，AB ノ中點ヲ原點トシ，三點ノ座標ヲ



$A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(h, k)$

又圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad (1)$$

トス

$A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ ガ (1) ノ上ニアルガ故ニ

$$(-a)^2+(0)^2+2g(-a)+2f(0)+c=0$$

$$(a)^2+(0)^2+2g(a)+2f(0)+c=0$$

依テ $\quad g=0, \quad a^2+c=0$

此ノ値ヲ (1) ニ代入スルトキハ

$$x^2+y^2+2fy=a^2 \qquad (2)$$

ヲ得

(2) ハ二點 A, B ヲ通過スル圓ノ方程式ニシテ，f ハ未定係數ナルガ故ニ圓ノ中心ハ縦軸上任意ノ位置ニアリ

$C(h, k)$ ガ (2) ノ上ニアルガ故ニ

$$h^2+k^2+2fk=a^2 \qquad (3)$$

(2) 及ビ (3) ヨリ f ヲ消去スルトキハ

$$k(x^2+y^2)-(h^2+k^2-a^2)y=ka^2 \qquad (4)$$

(4) ハ明カニ三點 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(h, k)$ ヲ通過シ，$k \gtrless 0$ ナルトキハ圓ヲ表ハシ，$k=0$ ナルトキハ直線ヲ表ハス

$k \gtrless 0$ ナルトキハ C ハ直線 AB ノ外ニアリ，$k=0$ ナルトキハ C ハ AB ノ上ニアリ

故ニ三點 A, B, C ガ一直線上ニアラザルトキハ (4) ハ此ノ三點ヲ通過スル圓ニシテ

$$\underline{x^2+y^2-\frac{h^2+k^2-a^2}{k}y=a^2}$$

即チ
$$x^2+\left(y-\frac{h^2+k^2-a^2}{2k}\right)^2=a^2+\left(\frac{h^2+k^2-a^2}{2k}\right)^2$$

ヨリ中心ノ座標ハ $0, \ \dfrac{h^2+k^2-a^2}{2k}$ ニシテ半徑ハ $\sqrt{a^2+\left(\dfrac{h^2+k^2-a^2}{2k}\right)^2}$ ナルコトヲ見ル

注意 (1) 圓ノ方程式ハ三點ノ座標ニヨリテ全ク定マル，故ニ一直線上ニアラザル三點ヲ通過シテ唯一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得

注意 (2) λ ヲ 0 ニ等シカラザル常數トシ

$$x^2+y^2-a^2+\lambda y=0$$

ト置クトキハ此ノ式ハ圓 $x^2+y^2=a^2$ 及ビ直線 $y=0$ ノ交點即チ $(-a, 0)$, $(a, 0)$ ヲ通過スル圓ヲ表ハス

次ニ
$$x^2+y^2-a^2+\lambda y=0$$

$$h^2+k^2-a^2+\lambda k=0$$

ヨリ λ ヲ消去スルトキハ (4) 即チ

$$k(x^2+y^2)-(h^2+k^2-a^2)y=ka^2$$

ヲ得.

(4) ヲ得ルニハ此ノ順序ニヨルヲ簡便トス

(ii) 圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (1)$$

トシ，點 (x_0, y_0) ヲ中點トスル弦ノ方程式ヲ

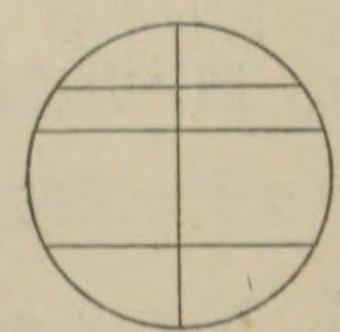
$$\frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta}=l \qquad (2)$$

即チ $x=x_0+l\cos\theta,\qquad y=y_0+l\sin\theta$

トシ，(1) 及ビ (2) ノ交點ヲ索ムルトキハ

$$(x_0+l\cos\theta)^2+(y_0+l\sin\theta)^2=r^2$$

即チ $l^2+2l(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)+x_0^2+y_0^2-r^2=0 \qquad (3)$



l ハ弦ノ中點ヨリ圓ニ至ル距離ナルガ故ニ (3) ノ二根ヲ l_1, l_2 トスレバ，l_1, l_2 ハ其ノ絕對値相等シクシテ符號ハ相反ス

然ルニ $l_1+l_2=-2(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)$

故ニ $x_0\cos\theta+y_0\sin\theta=0 \qquad (4)$

(4) ハ弦ノ中點 (x_0, y_0) ガ直線

$$x\cos\theta+y\sin\theta=0$$

ノ上ニアルコトヲ示シ，(2) ニ平行ナル弦ニ於テハ θ ハ一定ナルガ故ニ直線

$$x\cos\theta+y\sin\theta=0$$

ノ圓內ニアル部分ハ (2) ニ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ニシテ第 35 節ニヨリ (2) ニ垂直ナル直徑ナリ

(iii) 二ツノ圓ニ共通ナル切線

二ツノ圓ノ方程式ヲ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \qquad (1)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2 \qquad (2)$$

此ニ $r_1>r_2$ トシ，(1) 及ビ (2) ノ切線ノ方程式ヲ夫々

$$(x-a_1)\cos\theta_1+(y-b_1)\sin\theta_1=r_1 \qquad (3)$$

$$(x-a_2)\cos\theta_2+(y-b_2)\sin\theta_2=r_2 \qquad (4)$$

トスルトキハ (3) 及ビ (4) ガ (1) 及ビ (2) ノ共通ナル切線ナルガ爲メニハ

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+r_1}{a_2\cos\theta_2+b_2\sin\theta_2+r_2} \qquad (5)$$

(5) ヨリ次ノ關係ヲ得

$$\theta_1=\theta_2 \quad 又ハ \quad \theta_1=\theta_2+\pi$$

(I) $\theta_1=\theta_2$

$$a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+r_1=a_2\cos\theta_1+b_2\sin\theta_1+r_2$$

即チ $(a_1-a_2)\cos\theta_1+(b_1-b_2)\sin\theta_1+r_1-r_2=0$

$\tan\frac{\theta_1}{2}=X$ ト置クトキハ

$$(a_1-a_2)(1-X^2)+(b_1-b_2)2X+(r_1-r_2)(1+X^2)=0$$

即チ $\{(r_1-r_2)-(a_1-a_2)\}X^2+2(b_1-b_2)X+(r_1-r_2)+(a_1-a_2)=0 \quad (6)$

(6) ハ X ニ關スル二次方程式ニシテ

$$(b_1-b_2)^2-\{(r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2\}$$

ガ 0 ヨリモ大ナルカ，之ニ等シキカ，又ハ之ヨリモ小ナルカニ從テ二ツノ異ナル實根，二ツノ等根，又ハ二ツノ虛根ヲ有ス

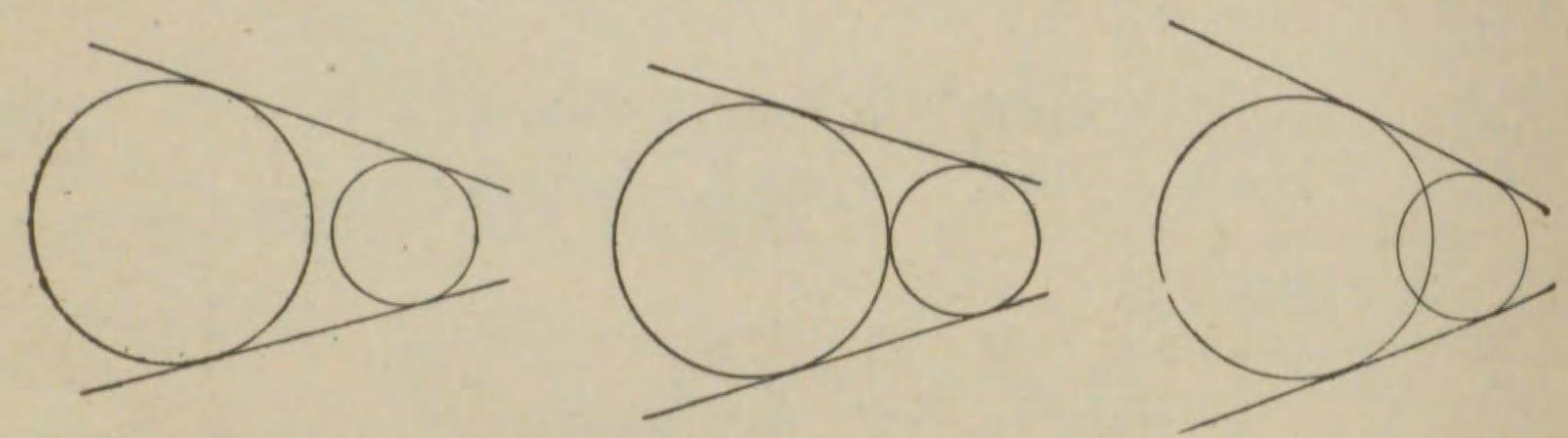
二ツノ圓ノ中心距離ヲ d トスルトキハ

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=d^2$$

故ニ $$(b_1-b_2)^2-\{(r_1-r_2)^2-(a_1-a_2)^2\}=d^2-(r_1-r_2)^2$$

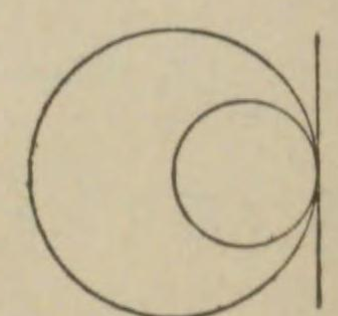
依テ二ツノ圓ハ $d>r_1-r_2$ ナルトキハ二ツノ共通切線，$d=r_1-r_2$ ナルトキハ一ツノ共通切線ヲ有シ，$d<r_1-r_2$ ナルトキハ全ク共通切線ヲ有セズ

一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアルカ，二ツノ圓ガ互ニ外切スルカ，又ハ相交ハルトキハ $d>r_1-r_2$ ニシテ二ツノ共通切線アリ



二ツノ圓ガ互ニ內切スルトキハ $d=r_1-r_2$ ニシテ一ツノ共通切線アリ

一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアルトキハ $d<r_1-r_2$ ニシテ共通切線ナシ



上記ノ共通切線ヲ**共通外切線**トイフ

(II) $\theta_1=\theta_2+\pi$

$$a_1\cos\theta_1+b_1\sin\theta_1+r_1=a_2\cos\theta_1+b_2\sin\theta_1-r_2$$

即チ $$(a_1-a_2)\cos\theta_1+(b_1-b_2)\sin\theta_1+r_1+r_2=0$$

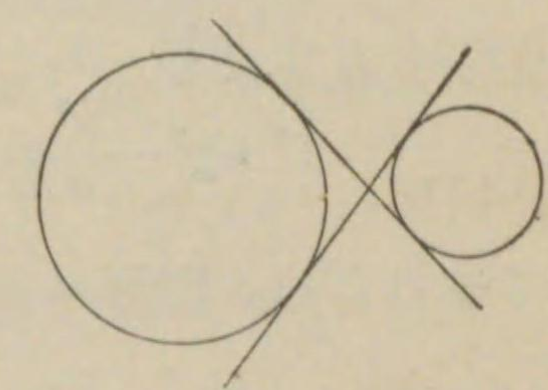
$\tan\dfrac{\theta_1}{2}=X$ ト置クトキハ

$$\{(r_1+r_2)-(a_1-a_2)\}X^2+2(b_1-b_2)X+(r_1+r_2)+(a_1-a_2)=0 \qquad (7)$$

(7) ハ (6) ニ於テ r_2 ノ代リニ $-r_2$ ト置キタルモノニ等シキガ故ニ二ツノ圓ノ中心距離ヲ d トスルトキハ (I) ノ場合ト同樣ニシテ，次ノ結果ヲ得

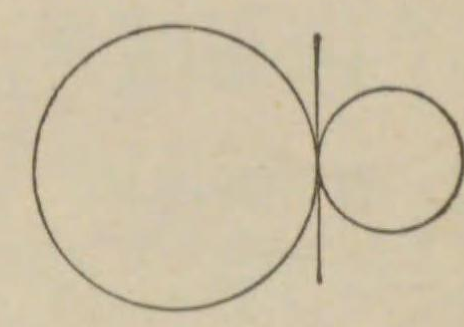
二ツノ圓ガ $d>r_1+r_2$ ナルトキハ二ツノ共通切線，$d=r_1+r_2$ ナルトキハ一ツノ共通切線ヲ有シ，$d<r_1+r_2$ ナルトキハ全ク共通切線ヲ有セズ

一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアルトキハ $d>r_1+r_2$ ニシテ二ツノ共通切線アリ



二ツノ圓ガ互ニ外切スルトキハ $d=r_1+r_2$ ニシテ一ツノ共通切線アリ

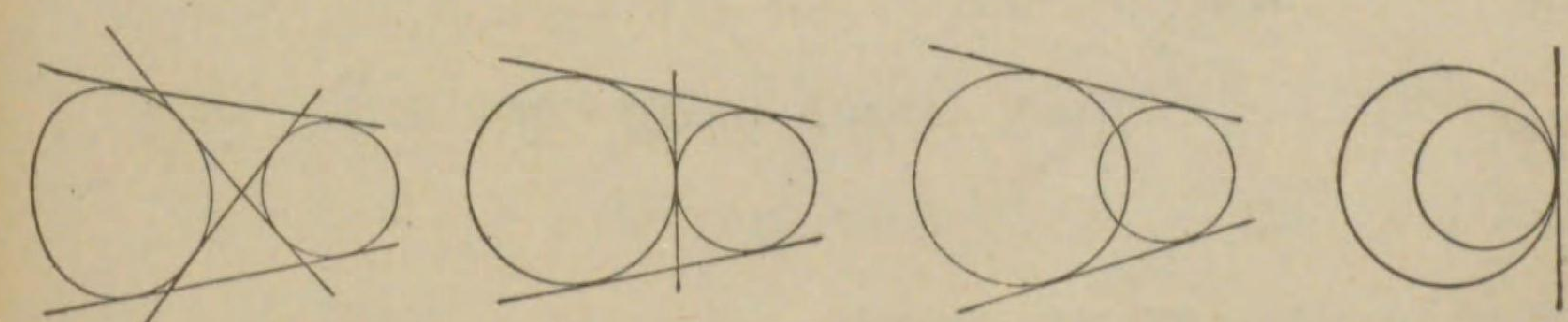
二ツノ圓ガ相交ハルカ，互ニ內切スルカ，又ハ一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアルトキハ $d<r_1+r_2$ ニシテ共通切線ナシ



上記ノ共通線ヲ**共通內切線**トイフ

(I) 及ビ (II) ノ場合ヲ總括スレバ次ノ結果ヲ得

一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ外ニアレバ四ツノ共通切線アリ，二ツノ圓ガ互ニ外切スレバ三ツノ共通切線アリ，二ツノ圓ガ相交ハレバ，二ツノ共通切線アリ，二ツノ圓ガ內切スレバ一ツノ共通切線アリ，一ツノ圓ガ全ク他ノ圓ノ內ニアレバ共通切線ナシ



(iv) 互ニ垂直ナル平行直線群ノ反形

座標軸ニ平行ナル二ツノ直線群ノ方程式ヲ夫々

$$x-a=0 \qquad (1)$$

$$y-b=0 \qquad (2)$$

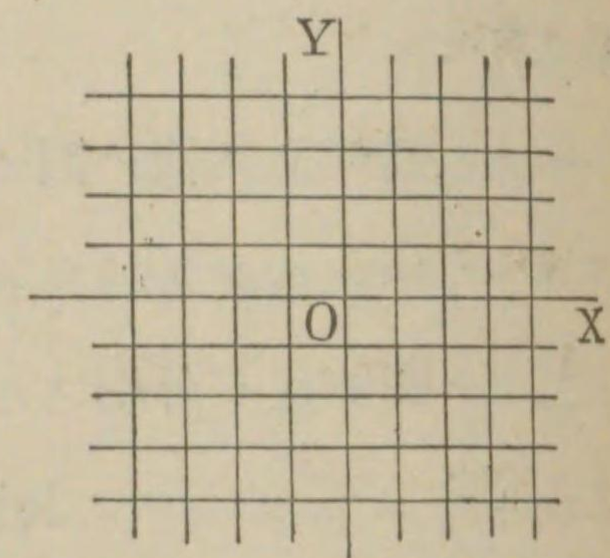
トスルトキハ圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ (1) ノ反形ハ第 43 節ニヨリ

$$\frac{k^2x}{x^2+y^2}-a=0$$

卽チ
$$x^2+y^2-\frac{k^2}{a}x=0 \qquad (3)$$

トナリ，(2) ノ反形ハ

$$x^2+y^2-\frac{k^2}{b}y=0 \qquad (4)$$



トナリテ，(3) 及ビ (4) ハ原點ヲ通過シ，夫々縱軸及ビ橫軸ニ切スル圓ノ群ヲ表ハス

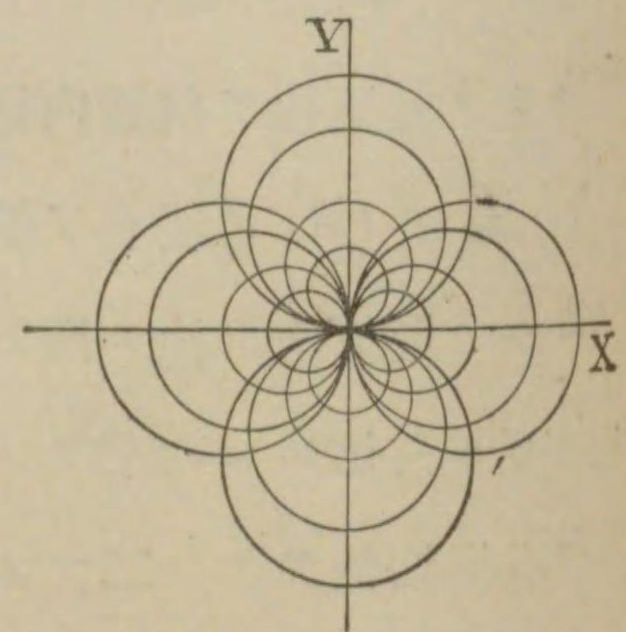
今二ツノ圓

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$$

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$$

ノ交點ニ於テ作ル角ヲ θ トスルトキハ第 41 節ニヨリ

$$\cos\theta=\frac{2g_1g_2+2f_1f_2-c_1-c_2}{2\sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}\sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}}$$



然ルニ (3) 及ビ (4) ニ於テハ

$$2g_1=-\frac{k^2}{a},\quad f_1=0,\quad c_1=0,\quad g_2=0,\quad 2f_2=-\frac{k^2}{b},\quad c_2=0$$

故ニ
$$\cos\theta=0$$

依テ二ツノ圓ノ群ハ互ニ直交ス

問題

1. 二ツノ直線 $x=a+bt,\ y=a_1+b_1t$ 及ビ $x=c+dt,\ y=c_1+d_1t$ ガ互ニ平行ナル條件，互ニ垂直ナル條件，及ビ全ク同一ノ直線ヲ表ハス條件ヲ索メヨ

2. 方程式 $ax^2+2bxy+cy^2=0$ ノ表ハス二ツノ直線ガ互ニ直交スル條件ヲ索メヨ

3. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ニ下セル垂線ハ一點ニ於テ會スルコトヲ證明セヨ

4. n 個ノ點ヨリ一ツノ直線ニ下セル垂線ノ長サノ和ガ一定ナルトキ，其ノ直線ハ定圓ニ切スルコトヲ證明セヨ

5. 直線 $ax+by+c=0$ ガ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ交ハリテ作ル弦ノ中點ヲ索メヨ

6. 圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ上ニ於ケル二點 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, $(r\cos\phi,\ r\sin\phi)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ作レ

7. 圓 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ノ內ニアル一點 $(x_0,\ y_0)$ ヲ通過スル弦中ニテ最短ナルモノノ長サヲ索メヨ

8. 定圓ノ一ツノ弦ノ上ニ立ツ圓周角ハ圓心角ノ半ニ等シキコトヲ證明セヨ

9. 直線 $ax+by+c=0$ ガ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切スル條件ヲ索メヨ

10. 二ツノ圓 $(x-a)^2+y^2=a^2,\ x^2+(y-b)^2=b^2$ ノ共通弦ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ作レ

11. 共軸圓中ノ二ツニ直交スル圓ハ其ノ他ノ總テニ直交スルコトヲ證明セヨ

12. 二ツノ圓 $x^2+y^2=r^2$, $(x-a)^2+y^2=r_1^2$ ノ共通切線ノ方程式ヲ索メヨ

13. 圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ直線 $ax+by+c=0$ ノ極ヲ索メヨ

14. 同一ノ點ヲ通過スル直線ノ極ハ一直線上ニアルコトヲ證明セヨ

15. 同一ノ圓ニ關シテ互ニ直交スル圓ノ反形ハ又互ニ直交スルコトヲ證明セヨ

16. 圓 $x^2+y^2=k^2$ ニ關シテ點 $(0,\ a)$ ヲ通過スル直線ノ群ノ反形ト同一ノ點ヲ中心トスル圓ノ群ノ反形トヲ索メ，互ニ直交スルコトヲ證明セヨ

17. 一定ノ大サヲ有スル角ノ二邊ガ夫々定點ヲ通過スルトキ角ノ頂點ノ軌跡ヲ索メヨ

18. n 個ノ點ヨリノ距離ノ二乘ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ索メヨ

19. 定圓ノ一定ノ長サヲ有スル弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ索メヨ

20. 三角形ノ三邊ハ夫々一直線上ノ定點ヲ通過シ，二ツノ頂點ハ夫々定直線上ニアルトキ第三ノ頂點ノ軌跡ヲ索メヨ

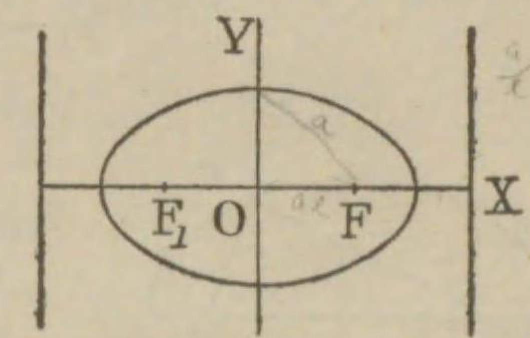
第六章　楕圓，雙曲線及ビ抛物線

46. 楕圓，雙曲線及ビ抛物線ノ方程式

一定ノ直交軸ニ關シテ，點 $F(ae,\ 0)$ 及ビ $F_1(-ae,\ 0)$ ヲ焦點トシ，直線 $x=\frac{a}{e}$ 及ビ $x=-\frac{a}{e}$ ヲ之ニ對應スル準線トスルトキハ第 15 節ニヨリ楕圓及ビ雙曲線ノ方程式次ノ如シ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \qquad (1)$$

楕圓ニ於テハ離心率 e ハ 1 ヨリモ小ニシテ，雙曲線ニ於テハ 1 ヨリモ大ナリ，依テ (1) ニ於テ



$$ae=\sqrt{a^2-b^2}$$

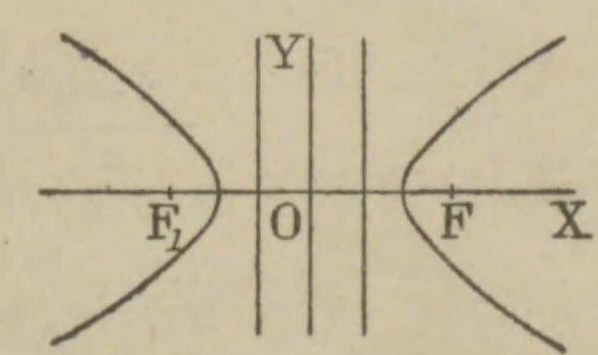
即チ　$b^2=a^2(1-e^2)$

ト置クトキハ楕圓ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

ヲ得，此ニ $2a$ ハ其ノ長軸ノ長サ又 $2b$ ハ其ノ短軸ノ長サナリ

又 (1) ニ於テ



$$ae=\sqrt{a^2+b^2}$$

即チ　$b^2=a^2(e^2-1)$

ト置クトキハ雙曲線ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

ヲ得，此ニ $2a$ ハ其ノ交軸ノ長サ又 $2b$ ハ其ノ共軛軸ノ長サナリ

(2) ニ於テ $e=0$ 即チ $a=b$ ト置クトキハ

$$x^2+y^2=a^2 \tag{2}_1$$

トナリテ半徑ガ a ナル圓ノ方程式ヲ得

(3) ニ於テ $e=\sqrt{2}$ 即チ $a=b$ ト置クトキハ

$$x^2-y^2=a^2 \tag{3}_1$$

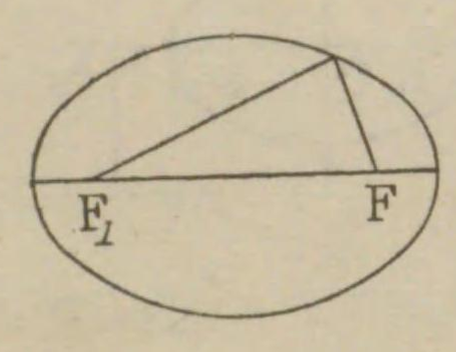
トナリテ等邊雙曲線ノ方程式ヲ得

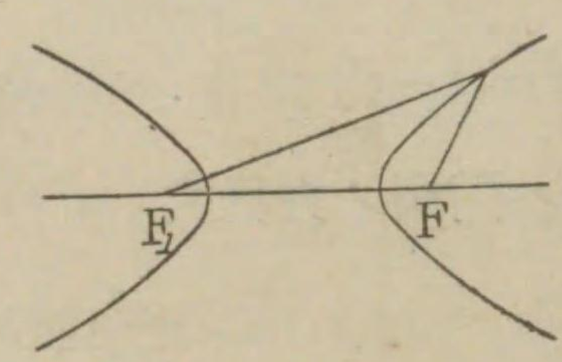
又二ツノ焦點 F, F_1 ヨリ楕圓上ノ一點ニ至ル距離ヲ r, r_1 ニテ表ハストキハ第 15 節ニヨリ

$$r_1+r=2a \tag{4}$$

同樣ニ雙曲線ニ於テハ

$$r_1-r=\pm 2a \tag{5}$$





(2) ニ於テ縱軸ヲ平行ニ移動シ，一ツノ頂點ヲ原點トスルトキハ次ノ式ヲ得

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

即チ
$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2 \tag{6}$$

次ニ
$$d=a-ae=a-\sqrt{a^2-b^2}$$

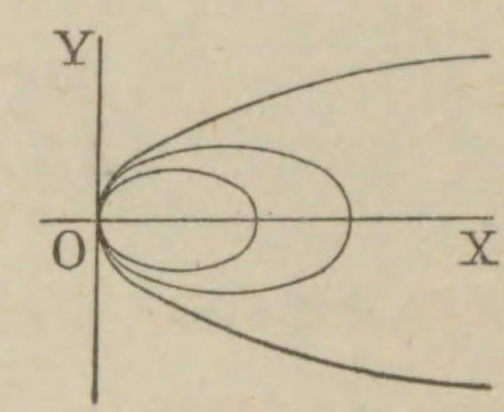
ト置クトキハ

$$b^2=2ad-d^2$$

此ノ値ヲ (6) ニ代入スルトキハ

$$y^2=2\left(2d-\frac{d^2}{a}\right)x-\left(\frac{2d}{a}-\frac{d^2}{a^2}\right)x^2 \tag{6}_1$$

d ガ一定ニシテ a ガ增大スルトキハ x 及ビ x^2 ノ係數ハ次第ニ減少シ，終ニ a ガ限リナク大ナルトキ次ノ式ヲ得



$$y^2=4dx \tag{7}$$

是レ即チ第 15 節ニ於テ得タル如ク點 F$(d, 0)$ ヲ焦點トシ，直線 $x+d=0$ ヲ準線トスル拋物線ノ方程式ナリ

此ノ結果ハ同樣ニシテ (3) ヨリ之ヲ索ムルコトヲ得ベシ

又第 17 節ニ於テ示セル如ク (6) 及ビ (7) ヲ總括シテ

$$y^2=2px+qx^2 \tag{8}$$

ナル式ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得，此ノ場合ニハ $q<0$ ナルトキハ楕圓，$q>0$ ナルトキハ雙曲線，$q=0$ ナルトキハ拋物線トナルモノトス

徑數ヲ用フルトキハ (2), (3), (7) ヲシテ種々ノ異リタル形ヲ取ラシムルコトヲ得，其ノ簡單ナルモノ次ノ如シ

$$x=a\cos\phi, \qquad y=b\sin\phi \tag{2}'$$

$$x=a\sec\phi, \qquad y=b\tan\phi \tag{3}'$$

$$x=dm^2, \qquad y=2dm \tag{7}'$$

此ニ ϕ 及ビ m ハ何レモ徑數ニシテ，(2)′, (3)′, (7)′ ヨリ之ヲ消去スレバ夫々 (2), (3), (7) ヲ得ベシ

尙一般二元二次方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

ニ於テ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}\gtrless 0$$

ニシテ且 $ab-h^2\lessgtr 0$ ナル場合ニハ第 30 節ニ於テ示セル如ク座標軸ノ變換ニヨリテ方程式ヲ

$$Px^2+Qy^2=R \qquad (9)$$

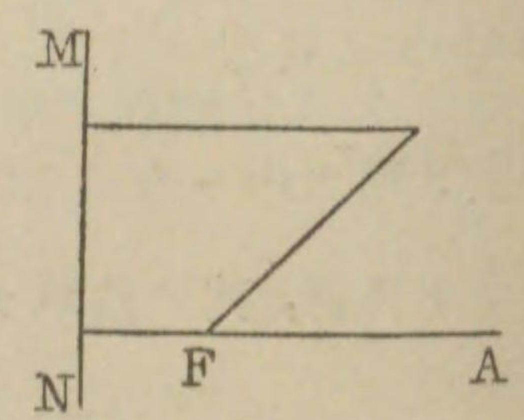
ノ形トナシ得ベク, $ab-h^2>0$ 又ハ <0 ナルニ從ヒ楕圓又ハ雙曲線ヲ表ハス

$\Delta\gtrless 0$ ニシテ且 $ab-h^2=0$ ナル場合ニハ同樣ニシテ方程式ヲ

$$y^2=4dx$$

ノ形トナシ得ベク, 從テ抛物線ヲ表ハス

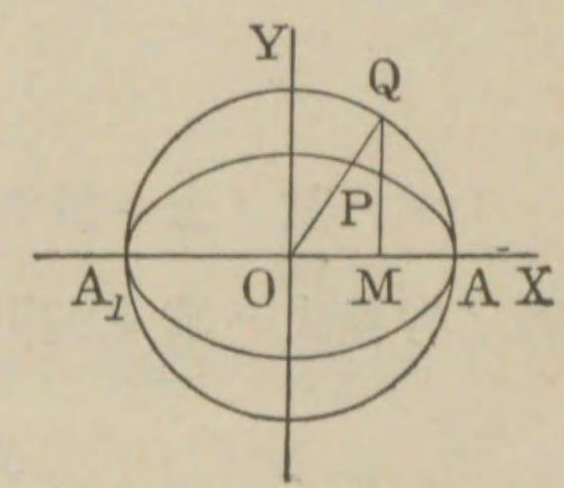
又第 22 節ニヨリ焦點 F ヲ極座標ノ極トシ, F ヲ通過シテ準線 MN ニ垂直ナル直線ヲ原線トスルトキハ, 極方程式



$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta} \qquad (10)$$

ハ $e<1$ ナルトキハ楕圓, $e>1$ ナルトキハ雙曲線, 又 $e=1$ ナルトキハ抛物線ヲ表ハス

注意 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ長軸 AA_1 ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 楕圓上ノ一點 $P(x,\ y)$ ヨリ長軸ニ垂線 PM ヲ引キ, 圓ト交ハル二ツノ點ノ中ニテ長軸ニ對シテ P ト同側ニアルモノヲ Q トシ, OQ ヲ引キ, 角 AOQ ヲ ϕ トスルトキハ



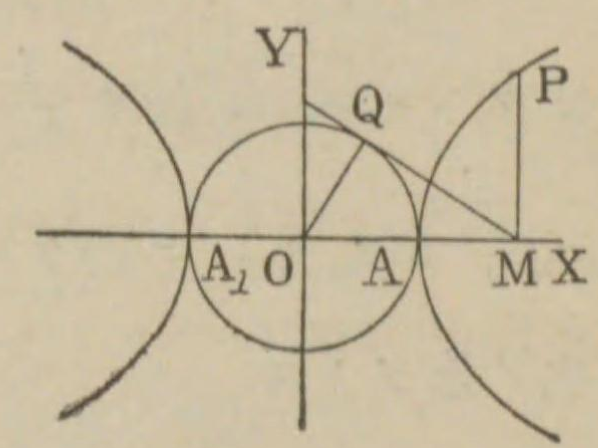
$$x=a\cos\phi$$

從テ $x=a\cos\phi,\ y=b\sin\phi$ ハ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ヲ滿足ス, 卽チ

$$x=a\cos\phi, \qquad y=b\sin\phi$$

ハ上ニ擧ゲタル徑數 ϕ ニテ表ハセル楕圓ノ方程式ニシテ, ϕ ヲ點 P ノ**離心角**トイヒ, AA_1 ヲ直徑トスル圓ヲ**補助圓**トイフ

又雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ交軸 AA_1 ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 雙曲線上ノ一點 $P(x,\ y)$ ヨリ交軸ニ垂線ヲ引キ, 其ノ交點ヲ M トシ, M ヨリ上記ノ補助圓ニ引キタル切線ノ切點中ニテ交軸ニ對シテ P ト同側ニアルモノヲ Q トシ, OQ ヲ引キ, 角 MOQ ヲ ϕ トスルトキハ



$$x=a\sec\phi$$

從テ

$$x=a\sec\phi, \qquad y=b\tan\phi$$

ハ離心角 ϕ ヲ徑數トシテ表ハシタル雙曲線ノ方程式ナリ

47. 切線及ビ法線

二次曲線ノ方程式ヲ

$$y^2=2px+qx^2 \tag{1}$$

トスルトキハ其ノ上ニ於ケル二點 $P(x_0, y_0)$, $Q(x_0+h, y_0+k)$ ヲ通過スル直線ノ方程式ハ第 40 節ニヨリ次ノ如シ

$$y-y_0=m(x-x_0) \tag{2}$$

此ニ
$$m=\frac{k}{h}$$

$$y_0^2=2px_0+qx_0^2$$

$$(y_0+k)^2=2p(x_0+h)+q(x_0+h)^2$$

最後ノ二式ヨリ

$$k(2y_0+k)=h(2p+2qx_0+qh)$$

從テ
$$\frac{k}{h}=\frac{2p+2qx_0+qh}{2y_0+k}$$

Q ガ P ニ限リナク近ヅクトキ, 卽チ h 及ビ k ガ何レモ限リナク 0 ニ近ヅクトキハ m 卽チ $\dfrac{k}{h}$ ハ限リナク $\dfrac{p+qx_0}{y_0}$ ニ近ヅク

故ニ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル二次曲線 $y^2=2px+qx^2$ ノ切線ノ方程式ハ次ノ形ヲトル

$$y-y_0=\frac{p+qx_0}{y_0}(x-x_0)$$

卽チ
$$y_0y=p(x+x_0)+qx_0x+y_0^2-2px_0-qx_0^2$$

然ルニ
$$y_0^2=2px_0+qx_0^2$$

故ニ
$$y_0y=p(x+x_0)+qx_0x \tag{3}$$

此ニ特ニ $p=2d$, $q=0$ ト置クトキハ (1) 及ビ (3) ハ夫々

$$y^2=4dx$$

$$y_0y=2d(x+x_0)$$

トナル

故ニ
$$y_0y=2d(x+x_0) \tag{4}$$

ハ拋物線 $y^2=4dx$ 上ノ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ナリ

又 $p=\dfrac{b^2}{a}$, $q=-\dfrac{b^2}{a^2}$ ト置クトキハ (1) 及ビ (3) ハ夫々

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2 \tag*{$(1)_1$}$$

$$y_0y=\frac{b^2}{a}(x+x_0)-\frac{b^2}{a^2}x_0x \tag*{$(3)_1$}$$

トナリ, 更ニ縱軸ヲ平行ニ移動シテ, 點 $(a, 0)$ ヲ原點トスルトキハ $(1)_1$ ハ

$$y^2=2\frac{b^2}{a}(x+a)-\frac{b^2}{a^2}(x+a)^2$$

$$=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

卽チ
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag*{$(1)_2$}$$

トナリ, $(3)_1$ ハ

$$y_0y=\frac{b^2}{a}(x+x_0+2a)-\frac{b^2}{a^2}(x_0+a)(x+a)$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}x_0x+b^2$$

卽チ
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \tag*{$(3)_2$}$$

トナル

又 $p=\frac{b^2}{a},\ q=\frac{b^2}{a^2}$ ト置キ前同様ノ順序ヲ取ルトキハ (1) 及ビ (3) ハ夫々

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)_3$$

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (3)_3$$

トナル

故ニ
$$\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (5)$$

ハ有心二次曲線 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ナリ

尚 $(3)_2$ ニ於テ $x_0=a\cos\phi,\ y_0=b\sin\phi$ ト置クトキハ

$$\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1 \qquad (6)$$

ヲ得, $(3)_3$ ニ於テ $x_0=a\sec\phi,\ y_0=b\tan\phi$ ト置クトキハ

$$\frac{x}{a}\sec\phi-\frac{y}{b}\tan\phi=1 \qquad (7)$$

ヲ得, (6) 及ビ (7) ハ離心角 ϕ ヲ徑數トシテ表ハシタル橢圓 $(1)_2$ 及ビ雙曲線 $(1)_3$ ノ切線ノ方程式ナリ

次ニ $(3)_2$ ヨリ

$$y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x+\frac{b^2}{y_0}$$

$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=m$ ト置クトキハ

$$m^2a^2+b^2=\frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2}+b^2=\frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)$$

然ルニ
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

從テ
$$m^2a^2+b^2=\left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2$$

故ニ
$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2} \qquad (8)$$

同様ニ $(3)_3$ ニ於テ $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=m$ ト置キ前同様ノ順序ヲ取ルトキハ次ノ式ヲ得

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2} \qquad (9)$$

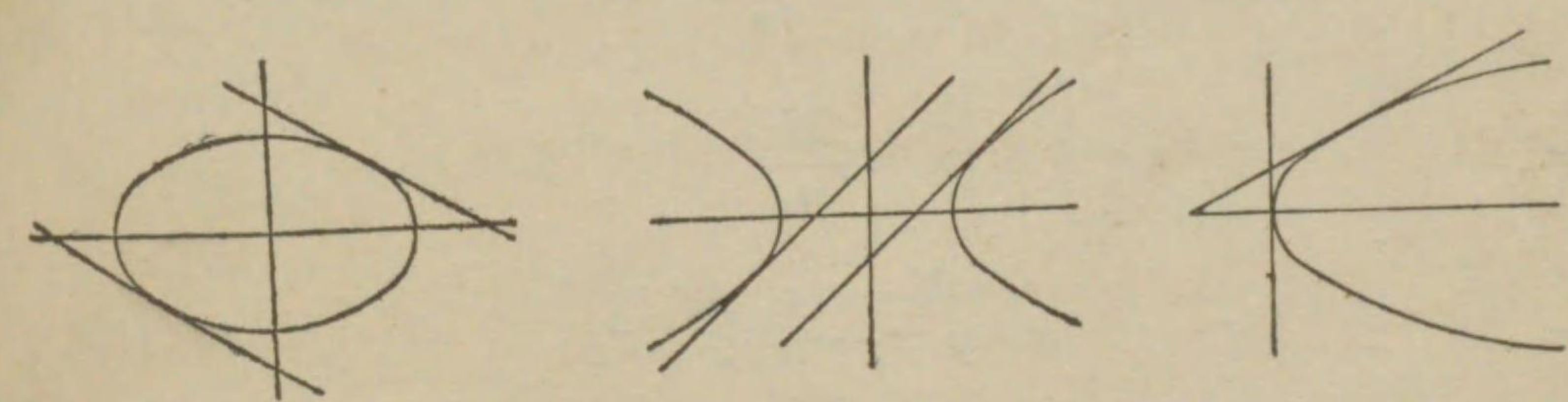
又 (4) ヨリ

$$y=\frac{2d}{y_0}(x+x_0)$$

$\frac{2d}{y_0}=m$ ト置クトキハ

$$\frac{d}{m}=\frac{y_0}{2}=\frac{y_0^2}{2y_0}=\frac{4dx_0}{2y_0}=\frac{2d}{y_0}x_0$$

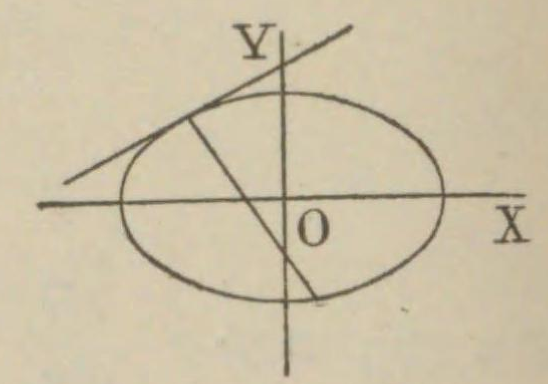
故ニ
$$y=mx+\frac{d}{m} \qquad (10)$$



(8), (9), (10) ハ何レモ方向係數ガ m ナル切線ノ方程式ニシテ, 橢圓及ビ雙曲線ニ於テハ平行ナル二ツノ直線ヲ表ハシ, 抛物線ニ於テハ唯一ツニ止マル

法線ハ曲線上ノ一點ヲ通過シ其ノ點ニ於ケル切線ニ垂直ナルガ故ニ點 (x_0, y_0) ニ於ケル $(1)_2$ ノ法線ハ $(3)_2$ ヨリ

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$



此ニ $$m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

故ニ $$\frac{x-x_0}{b^2x_0}=\frac{y-y_0}{a^2y_0} \qquad (11)$$

同様ニ $(1)_3$ ノ法線ハ $(3)_3$ ヨリ

$$\frac{x-x_0}{-b^2x_0}=\frac{y-y_0}{a^2y_0} \qquad (12)$$

故ニ $$\frac{x-x_0}{\pm b^2x_0}=\frac{y-y_0}{a^2y_0}$$

ハ二次曲線 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル法線ノ方程式ナリ

又 $y^2=4dx$ ノ法線ハ (4) ヨリ

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

此ニ $$m=\frac{2d}{y_0}$$

故ニ $$y-y_0=-\frac{y_0}{2d}(x-x_0) \qquad (13)$$

ハ抛物線 $y^2=4dx$ 上ノ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル法線ノ方程式ナリ

次ニ (11) ヨリ

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

$\frac{a^2y_0}{b^2x_0}=m$ ト置クトキハ

$$\frac{x_0}{a^2}=\frac{y_0}{mb^2}=\lambda$$

依テ $$x_0=a^2\lambda, \qquad y_0=mb^2\lambda$$

故ニ $$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=(a^2+m^2b^2)\lambda^2=1$$

從テ $$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+m^2b^2}}$$

$$x_0=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+m^2b^2}}, \qquad y_0=\pm\frac{b^2m}{\sqrt{a^2+m^2b^2}}$$

故ニ $$y=mx-\frac{(a^2-b^2)m}{\pm\sqrt{a^2+m^2b^2}} \qquad (14)$$

同様ニ (12) ヨリ

$$y=mx-\frac{(a^2+b^2)m}{\pm\sqrt{a^2-m^2b^2}} \qquad (15)$$

又 (13) ヨリ

$$y-y_0=-\frac{y_0}{2d}(x-x_0)$$

$-\frac{y_0}{2d}=m$ ト置クトキハ

$$y_0=-2dm, \qquad x_0=\frac{y_0^2}{4d}=dm^2$$

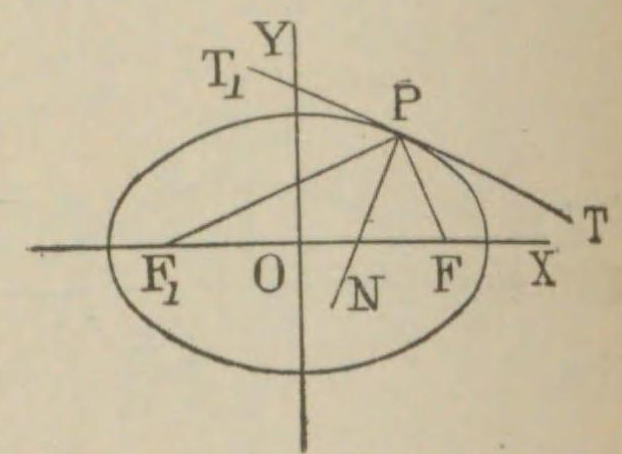
依テ $$y+2dm=m(x-dm^2)$$

故ニ $$y=mx-md(m^2+2) \qquad (16)$$

(14), (15), (16) ハ何レモ方向係數ガ m ナル法線ノ方程式ニシテ, 楕圓及ビ雙曲線ニ於テハ平行ナル二ツノ直線ヲ表ハシ, 抛物線ニ於テハ唯一ツニ止マル

注意 (11) ニ於テ $y=0$ ト置クトキハ

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0=e^2x_0$$



故ニ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル法線ガ楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ長軸ト交ハル點ヲ N トスルトキハ

$$F_1N=ae+e^2x_0=e(a+ex_0)$$

$$NF=ae-e^2x_0=e(a-ex_0)$$

又第 15 節ニヨリ

$$F_1P+FP=2a$$

然ルニ $\overline{F_1P}^2-\overline{FP}^2=(ae+x_0)^2-(ae-x_0)^2=4aex_0$

依テ $F_1P-FP=2ex_0$

從テ $F_1P=a+ex_0, \quad FP=a-ex_0$

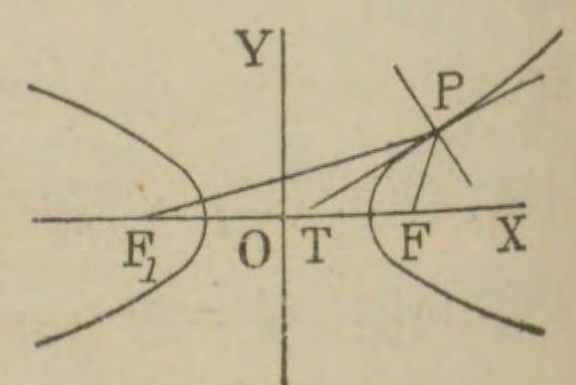
故ニ $\frac{F_1N}{NF}=\frac{F_1P}{FP}$

依テ法線 PN ハ角 F_1PF ヲ二等分ス, 從テ切線 T_1PT ハ其ノ外角ヲ二等分シ且

$$\angle F_1PT_1=\angle FPT$$

次ニ $(3)_3$ ニ於テ $y=0$ ト置クトキハ

$$x=\frac{a^2}{x_0}$$



故ニ點 $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ガ雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ交軸ト交ハル點ヲ T トスルトキハ

$$F_1T=ae+\frac{a^2}{x_0}=\frac{a(a+ex_0)}{x_0}$$

$$TF=ae-\frac{a^2}{x_0}=\frac{a(ex_0-a)}{x_0}$$

第 15 節ニヨリ

$$F_1P-FP=2a$$

又 $\overline{F_1P}^2-\overline{FP}^2=(ae+x_0)^2-(ae-x_0)^2=4aex_0$

依テ $F_1P+FP=2ex_0$

從テ $F_1P=a+ex_0, \quad FP=ex_0-a$

故ニ $\frac{F_1T}{TF}=\frac{F_1P}{FP}$

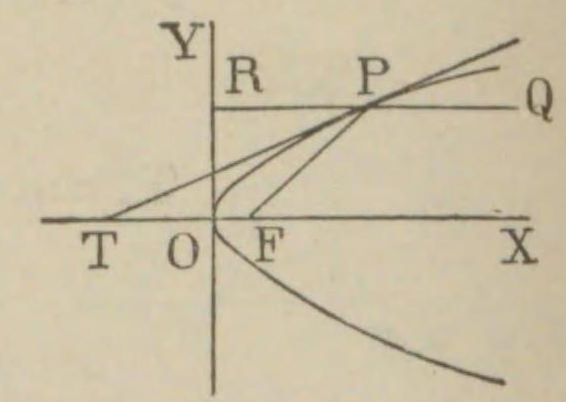
依テ切線 PT ハ角 F_1PF ヲ二等分ス, 從テ P ニ於ケル法線ハ其ノ外角ヲ二等分ス

上記ノ性質ニヨリ楕圓ノ焦點ヲ F, F_1 トシ, 其ノ上ノ一點ヲ P トスルトキ, F_1F ヲ F_1P, FP ノ比ニ內分シタル點ヲ N トシ, PN ヲ引クトキハ P ニ於ケル法線ヲ得, 之ニ垂直ニ PT ヲ引クトキハ P ニ於ケル切線ヲ得, 雙曲線ニ於テハ F_1F ヲ F_1P, FP ノ比ニ內分シタル點ヲ T トスルトキハ PT ハ P ニ於ケル切線ニシテ, 之ニ垂直ナルモノハ卽チ法線ナリ

尙又同一ノ焦點 F, F_1 ヲ共有スル楕圓ト雙曲線トアリテ同一ノ點 P ヲ通過スル場合ニハ其點ニ於ケル一方ノ切線ハ他ノモノノ法線トナルコト明ナリ, 從テ共通點ニ於ケル切線ガ互ニ直交スベキコトハ容易ニ推知セラルベシ

又 (4) ニ於テ $y=0$ ト置クトキハ

$$x=-x_0$$



故ニ F ヲ抛物線 $y^2=4dx$ ノ焦點トシ, $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル切線ト抛物線ノ軸トノ交點ヲ T トスルトキハ

$$TF=x_0+d$$

又 $$FP=\sqrt{y_0^2+(x_0-d)^2}=\sqrt{4dx_0+(x_0-d)^2}$$

故ニ $$FP=x_0+d$$

依テ $$TF=FP$$

從テ $$\angle FPT=\angle FTP$$

又 P ヨリ軸ニ平行ニ直線 RPQ ヲ引クトキハ切線 PT ハ角 FPR ヲ二等分シ且

$$\angle FPT=\angle T_1PQ$$

上記ノ性質ニヨリ抛物線ノ焦點ヲ F トシ, 其ノ上ニ於ケル一點ヲ P トスルトキ, 其ノ軸ノ上ニ FP ニ等シク TF ヲ取リ, PT ヲ引クトキハ PT ハ P ニ於ケル切線ニシテ, 之ニ垂直ナルモノハ卽チ法線ナリ

角 FPT ト角 T_1PQ トノ相等シキコトハ第 45 節ニ於テ示セルガ如ク抛物線ハ楕圓ノ一ツノ頂點ト一ツノ焦點トガ一定シテ他ノ焦點ガ無限ノ距離ニ移リタル場合ナリト考フルコトニヨリ楕圓上ノ一點ニ於ケル切線ト其ノ點及ビ二ツノ焦點ヲ連ヌル直線トノナス角ノ等シキコトヨリ容易ニ推知セラルベキモノトス

48. 同焦點二次曲線

(I) 同一ノ焦點ヲ共有スル二ツノ楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a>b \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \qquad (2)$$

トスルトキハ二ツノ焦點間ノ距離相等シキガ故ニ

$$a^2e^2=a_1^2e_1^2$$

此ニ $$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}, \qquad e_1^2=\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2}$$

故ニ $$a^2-b^2=a_1^2-b_1^2$$

依テ $$a_1^2-a^2=b_1^2-b^2=k$$

ト置クトキハ

$$a_1^2=a^2+k, \qquad b_1^2=b^2+k$$

從テ (2) ハ次ノ形ヲ取ル

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1 \qquad (2)_1$$

此ニ k ハ徑數ニシテ, $k>-b^2$ ナル任意ノ値ニ對シテ $(2)_1$ ハ (1) ト同一ノ焦點ヲ有スル楕圓ヲ表ハスモノトス

今平面上ノ一點ヲ $P(x_0, y_0)$ トシ, 方程式

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}=1 \qquad (3)$$

ノ表ハス曲線ガ此ノ點ヲ通過スト假定スレバ

$$\frac{x_0^2}{a^2+k}+\frac{y_0^2}{b^2+k}=1$$

卽チ $$(a^2+k)(b^2+k)=x_0^2(b^2+k)+y_0^2(a^2+k) \qquad (4)$$

k ニ關スル此ノ二次方程式ノ根ノ値ハ卽チ P ヲ通過スベキ曲線ノ方程式ヲ決定スルモノトス

(4) ヲ變形スレバ

$$k^2+(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2)k+a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2=0 \qquad (4)_1$$

此ニ D= $$(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2)^2-4(a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2)$$
$$=(a^2-b^2-x_0^2+y_0^2)^2+4x_0^2y_0^2$$

故ニ $(4)_1$ ニハ二ツノ實根アリ

$$f(k)=(a^2+k)(b^2+k)-x_0^2(b^2+k)-y_0^2(a^2+k)$$

ト置クトキハ

$$f(-a^2)=x_0^2(a^2-b^2)>0$$
$$f(-b^2)=-y_0^2(a^2-b^2)<0$$
$$f(\infty)>0$$

故ニ二ツノ根ヲ k_1, k_2 トスルトキハ

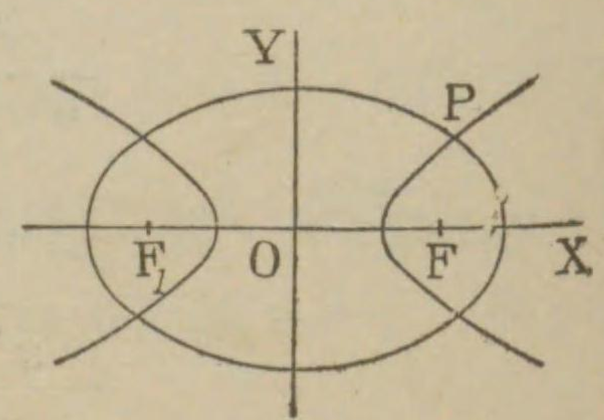
$$k_1>-b^2, \qquad -b^2>k_2>-a^2$$

$k>-b^2$ ナルトキハ $\quad a^2+k>0, \quad b^2+k>0$

$-b^2>k>-a^2$ ナルトキハ $\quad a^2+k>0, \quad b^2+k<0$

最初ノ場合ニハ (3) ハ橢圓トナリ，後ノ場合ニハ雙曲線トナル

故ニ同一ノ點ヲ通過シテ一定ノ橢圓ト同一ノ焦點ヲ共有スル有心二次曲線ノ一ツハ橢圓ニシテ，他ノ一ツハ雙曲線ナリ



次ニ同一ノ焦點ヲ有スル二ツノ有心二次曲線

$$\frac{x^2}{a^2+k_1}+\frac{y^2}{b^2+k_1}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2+k_2}+\frac{y^2}{b^2+k_2}=1$$

ガ何レモ點 $P(x_0, y_0)$ ヲ通過スルトキハ

$$\frac{x_0^2}{a^2+k_1}+\frac{y_0^2}{b^2+k_1}=1, \qquad \frac{x_0^2}{a^2+k_2}+\frac{y_0^2}{b^2+k_2}=1$$

依テ $$x_0^2\left(\frac{1}{a^2+k_1}-\frac{1}{a^2+k_2}\right)+y_0^2\left(\frac{1}{b^2+k_1}-\frac{1}{b^2+k_2}\right)=0$$

卽チ $$\frac{x_0x_0}{(a^2+k_1)(a^2+k_2)}+\frac{y_0y_0}{(b^2+k_1)(b^2+k_2)}=0$$

此ノ關係ハ $P(x_0, y_0)$ ニ於ケル二ツノ曲線ノ切線

$$\frac{x_0x}{a^2+k_1}+\frac{y_0y}{b^2+k_1}=1, \qquad \frac{x_0x}{a^2+k_2}+\frac{y_0y}{b^2+k_2}=1$$

ガ互ニ直角ニ交ハル條件ト一致ス

故ニ同一ノ焦點ヲ有スル橢圓ト雙曲線トノ交點ニ於ケル切線ハ互ニ直角ニ交ハル，之ヲ同焦點有心二次曲線ハ交點ニ於テ互ニ直交スト云フ

(II) 拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4dx \qquad (5)$$

トシ，座標軸ヲ平行ニ移動シテ原點ヲ焦點トスルトキハ次ノ式ヲ得

$$y^2=4d(x+d)$$

故ニ k ガ正又ハ負ノ常數ナルトキ

$$y^2=4k(x+k)$$

ハ (5) ト同一ノ軸及ビ同一ノ焦點ヲ有スル拋物線ノ群ヲ表ハス

原點ヲ焦點トスル拋物線

$$y^2=4k(x+k)$$

ガ點 $(x_0,\ y_0)$ ヲ通過スルトキハ

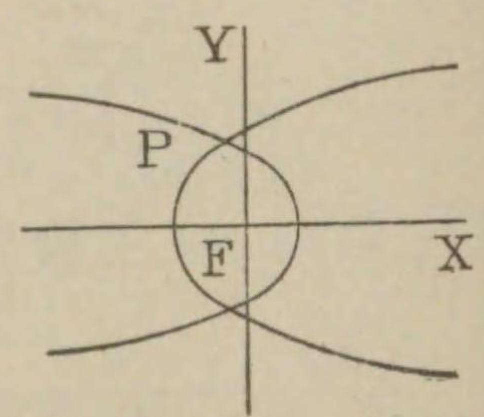
$$y_0^2=4k(x_0+k)$$

即チ

$$4k^2+4x_0k-y_0^2=0 \qquad (7)$$

k ニ關スル此ノ二次方程式ニハ明カニ二ツノ實根アリ，其ノ積ハ $-y_0^2$ ニ等シ，故ニ $y_0\gtrless0$ トシテ根ノ一ツハ正ニシテ一ツハ負ナリ

故ニ同一ノ點ヲ通過シテ同一ノ軸ト同一ノ焦點ヲ有スル拋物線ハ二ツアリ，一ツハ右向ニシテ一ツハ左向ナリ



次ニ同一ノ焦點ヲ有スル二ツノ拋物線

$$y^2=4k_1(x+k_1),\qquad y^2=4k_2(x+k_2),\qquad k_1\gtrless k_2$$

ガ何レモ點 $(x_0,\ y_0)$ ヲ通過スルトキハ

$$y_0^2=4k_1(x_0+k_1),\qquad y_0^2=4k_2(x_0+k_2)$$

依テ

$$(k_2-k_1)y_0^2=4k_1k_2(k_1-k_2)$$

即チ

$$y_0y_0+4k_1k_2=0$$

此ノ關係ハ點 $(x_0,\ y_0)$ ニ於ケル二ツノ拋物線ノ切線

$$y_0y=2k_1(x+x_0)+4k_1^2,\qquad y_0y=2k_2(x+x_0)+4k_2^2$$

ガ互ニ直角ニ交ハル條件ト一致ス

故ニ同一ノ軸ト同一ノ焦點トヲ有スル二ツノ拋物線ノ交點ニ於ケル切線ハ互ニ直角ニ交ハル，之ヲ同焦點拋物線ハ交點ニ於テ互ニ直交ストイフ

49. 共軛徑

有心二次曲線ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

トシ，點 $(x_0,\ y_0)$ ヲ中點トスル弦ノ方程式ヲ

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=l \qquad (2)$$

トシ，(1) 及ビ (2) ヲ聯立方程式ト考フルトキハ

$$\frac{(x_0+l\cos\alpha)^2}{a^2}\pm\frac{(y_0+l\sin\alpha)^2}{b^2}=1$$

即チ

$$l^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}\pm\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+2l\left(\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}\right)+\left(\frac{x_0^2}{a^2}\pm\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad (3)$$

l ハ弦ノ中點ヨリ曲線ニ至ル長サナルガ故ニ (3) ノ二根ハ其ノ絶對値相等シクシテ其ノ符號ハ相反ス

故ニ

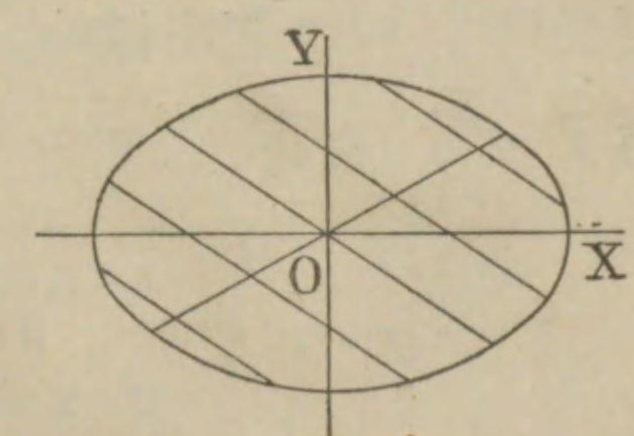
$$\frac{x_0\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y_0\sin\alpha}{b^2}=0 \qquad (4)$$

(4) ハ弦ノ中點 $(x_0,\ y_0)$ ガ直線

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2}\pm\frac{y\sin\alpha}{b^2}=0 \qquad (5)$$

ノ上ニアルコトヲ示ス

依テ (5) ハ (2) ニ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ニシテ，$\tan\alpha=m$ ト置クトキハ次ノ式ヲ得



$$y=\mp\frac{b^2}{a^2m}x \qquad (6)$$

(6) ハ曲線ノ中心ヲ通過スル弦即チ曲線ノ徑ノ方程式ナリ

(6) ノ方向係數ヲ m' トスルトキハ

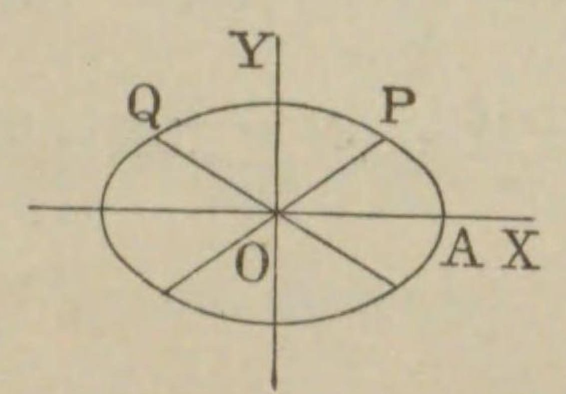
$$m' = \mp\frac{b^2}{a^2 m}$$

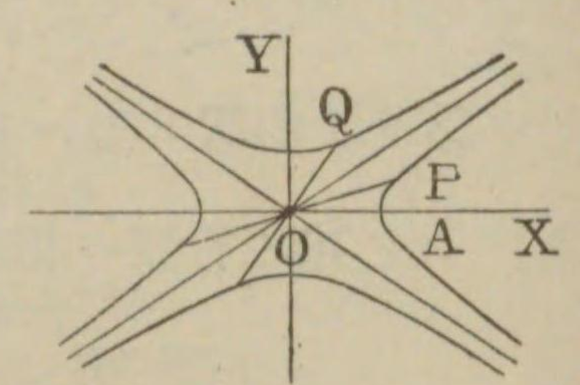
即チ

$$mm' = \mp\frac{b^2}{a^2} \qquad (7)$$

(7) ハ $y=m'x$ ガ $y=mx$ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル條件ニシテ從テ又 $y=mx$ ガ $y=m'x$ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル條件ナリト考フルコトヲ得

二ツノ徑 $y=mx$, $y=m'x$ ノ間ニ $mm'=\mp\frac{b^2}{a^2}$ ナル關係アルトキ之ヲ**共軛徑**トイフ.





楕圓ニ於テハ二ツノ共軛徑ハ縱軸ノ兩側ニアリ，雙曲線ニ於テハ其ノ同側ニアリ

共軛徑 OP, OQ ヲ新座標軸トシ，此ノ座標軸ニ關シテ曲線上ノ點ノ座標ヲ x', y' 又角 AOP ヲ θ, 角 AOQ ヲ θ' トスルトキハ

$$x = x'\cos\theta + y'\cos\theta'$$

$$y = x'\sin\theta + y'\sin\theta'$$

故ニ (1) ハ次ノ形ヲ取ル

$$\frac{(x'\cos\theta+y'\cos\theta')^2}{a^2} \pm \frac{(x'\sin\theta+y'\sin\theta')^2}{b^2}=1$$

即チ

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}\pm\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'^2+2\left(\frac{\cos\theta\cos\theta'}{a^2}\pm\frac{\sin\theta\sin\theta'}{b^2}\right)x'y'$$

$$+\left(\frac{\cos^2\theta'}{a^2}\pm\frac{\sin^2\theta'}{b^2}\right)y'^2=1$$

然ルニ OP, OQ ハ共軛徑ナルガ故ニ

$$\tan\theta\tan\theta' = \mp\frac{b^2}{a^2}$$

故ニ $x'y'$ ノ係數ハ 0 トナル

依テ

$$\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}\pm\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'^2+\left(\frac{\cos^2\theta'}{a^2}\pm\frac{\sin^2\theta'}{b^2}\right)y'^2=1$$

$y'=0$ ニ對應スル x' ノ値即チ OP ヲ a' トシ, $x'=0$ ニ對應スル y' ノ値即チ OQ ヲ b' トスルトキハ

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}\pm\frac{\sin\theta}{b^2}\right)a'^2=1, \quad \left(\frac{\cos^2\theta'}{a^2}\pm\frac{\sin^2\theta'}{b^2}\right)b'^2=1$$

故ニ

$$\frac{x'^2}{a'^2}\pm\frac{y'^2}{b'^2}=1 \qquad (8)$$

即チ共軛徑ヲ座標軸トスル有心二次曲線ノ方程式 (8) ハ (1) ト同一ノ形ヲ取ル

從テ點 (x_0, y_0) ニ於ケル (8) ノ切線ノ方程式ハ

$$\frac{x_0x'}{a'^2}\pm\frac{y_0y_0'}{b'^2}=1$$

ニシテ雙曲線ノ漸近線ノ方程式ハ

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}=0$$

又共軛雙曲線ノ方程式ハ

$$-\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$$

ナリ

注意 拋物線ニ於テ前同樣ノ順序ヲ取ルトキハ次ノ結果ヲ得

拋物線ノ方程式及ビ點 $(x_0,\ y_0)$ ヲ中點トスル弦ノ方程式ヲ夫々

$$y^2=4dx$$

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=l$$

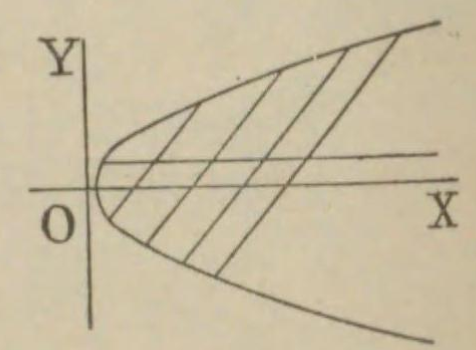
トスルトキハ其ノ交點ニ於テ

$$(y_0+l\sin\alpha)^2=4d(x_0+l\cos\alpha)$$

即チ $$l^2\sin^2\alpha+2l(y_0\sin\alpha-2d\cos\alpha)+y_0^2-4dx_0=0$$

故ニ $$y_0\sin\alpha-2d\cos\alpha=0$$

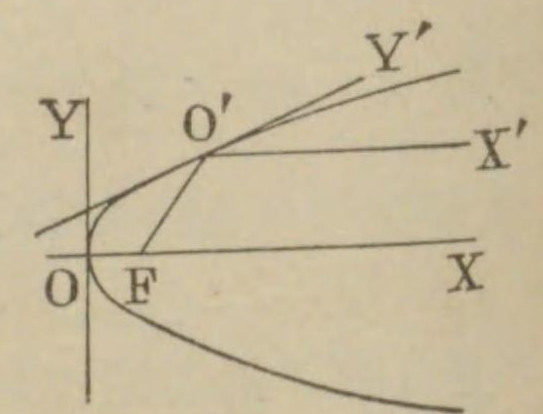
依テ $\tan\alpha=m$ ト置クトキハ $y=mx$ ニ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ



$$y=\frac{2d}{m}$$

即チ軸ニ平行ナル直線ナリ

次ニ拋物線上ノ一點 $O'(h,k)$ ヲ新原點トシ, OX ニ平行ナル O'X' 及ビ O' ニ於ケル切線 O'Y' ヲ新座標軸トシ, 角 X'O'Y' ヲ α トスルトキハ



$$x=h+x'+y'\cos\alpha,\quad y=k+y'\sin\alpha$$

故ニ $$(k+y'\sin\alpha)^2=4d(h+x'+y'\cos\alpha)$$

即チ $$y'\sin^2\alpha+2y'(k\sin\alpha-2d\cos\alpha)=4dx'$$

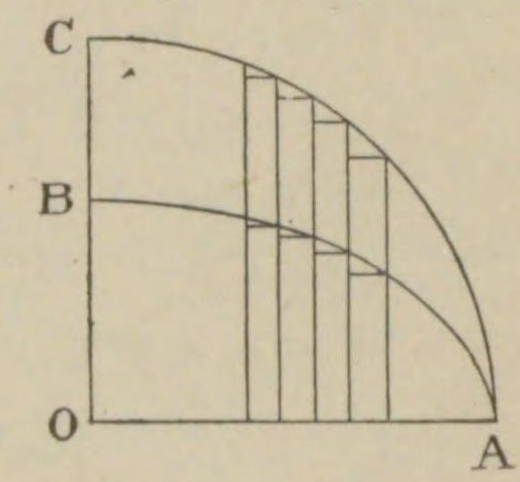
然ルニ $$k\sin\alpha-2d\cos\alpha=0$$

故ニ $$y'^2=4d'x'$$

此ニ $$d'=\frac{d}{\sin^2\alpha}$$

50. 楕圓ノ面積及ビ拋物線ノ弓形ノ面積

楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ノ長軸 OA ヲ半徑トシテ補助圓 $x^2+y^2=a^2$ ヲ畫キ, OA ヲ等分シテ各分點ヨリ OA ニ垂線ヲ引キ, 楕圓及ビ圓トノ交點ヨリ夫夫 OA ニ平行線ヲ引キ, 圖ノ如ク OA ト楕圓及ビ圓トノ間ニ若干ノ矩形ヲ作ルトキハ對應スル矩形ノ底邊ハ相等シク, 其ノ高サノ比ハ $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ト $\sqrt{a^2-x^2}$ トノ比ニ等シ, 即チ $b:a$ ナリ



依テ對應スル矩形ノ面積ノ比ハ $b:a$ ナリ

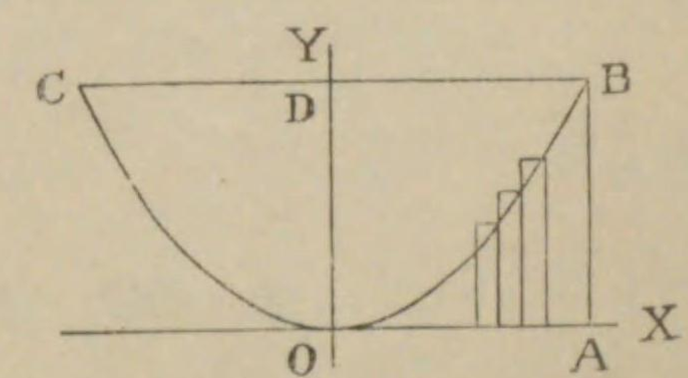
等分點ノ數ヲ增加スレバ一組ノ矩形ノ面積ノ和ハ益半楕圓ノ面積ニ近ヅキ, 他ノ矩形ノ面積ノ和ハ益半圓ノ面積ニ近ヅク

故ニ楕圓ノ面積ト圓ノ面積トノ比ハ $b:a$ ナリ

然ルニ 圓ノ面積 $=\pi a^2$

故ニ 楕圓ノ面積 $=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab$

次ニ拋物線 $x^2=4dy$ ノ弓形 OBC ノ面積ヲ考フルニ, BC ト軸トノ交點ヲ D トスレバ OBC ノ面積ハ OBD ノ面積ノ二倍ニ等シク, 又 OBD ノ面積ハ矩形 OABD ノ面積ヨリ OAB ノ面積ヲ減シタルモノニ等シ, 依テ結局問題ハ OAB ノ面積ヲ索ムルコトニ歸着ス



OA ヲ n 等分シテ各分點ヨリ OA ニ垂線ヲ引キ，拋物線トノ各交點ヨリ OA ニ平行線ヲ引キ，圖ノ如ク n 個ノ矩形ヲ作リ，$OA=a$, $OD=b$, 矩形ノ面積ノ和ヲ S トスルトキハ

$$S=\frac{a}{n}\left(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n\right)$$

$$y_1=\frac{1}{4d}\left(\frac{a}{n}\right)^2,\quad y_2=\frac{1}{4d}\left(\frac{2a}{n}\right)^2,\ldots\ldots\ldots,y_n=\frac{1}{4d}\left(\frac{na}{n}\right)^2$$

依テ　$$S=\frac{a^3}{4dn^3}\left(1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots+n^2\right)$$

然ルニ　$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(1)^3-(0)^3=3(1)^2-3(1)+1$$

故ニ　$$n^3=3(1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots+n^2)-3(1+2+\ldots\ldots\ldots+n)+n$$

又　$$1+2+\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

依テ　$$1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{3}\left\{n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

故ニ　$$S=\frac{a^3}{24d}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

n ガ限リナク大ナルトキ S ハ限リナク次ノ値ニ近ヅク

$$\frac{a^3}{12d}=\frac{1}{3}\cdot a\ \frac{a^2}{4d}$$

然ルニ　$$a^2=4db$$

從テ　$$\text{弓形 OBC ノ面積}=2\left(ab-\frac{ab}{3}\right)=\frac{4}{3}ab$$

51. 例題

(i)　拋物線ノ互ニ垂直ナル法線ノ交點ノ軌跡

拋物線ノ方程式ヲ $y^2=4dx$, 其ノ法線ノ方程式ヲ

$$y=mx-md(m^2+2)$$

トシ，互ニ垂直ナル法線ノ交點ヲ $(x_0,\ y_0)$ トスルトキハ

$$y_0=mx_0-md(m^2+2)$$

即チ　$$dm^3+(2d-x_0)m+y_0=0$$

此ノ m ニ關スル三次方程式ノ根ヲ $m_1,\ m_2,\ m_3$ トスルトキハ

$$m_1+m_2+m_3=0 \tag{1}$$

$$m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1=\frac{2d-x_0}{d} \tag{2}$$

$$m_1m_2m_3=-\frac{y_0}{d} \tag{3}$$

互ニ垂直ナル法線ノ方向係數ヲ $m_1,\ m_2$ トスレバ

$$m_1m_2=-1 \tag{4}$$

(2) 及ビ (4) ヨリ

$$m_3(m_1+m_2)=\frac{2d-x_0}{d}+1=\frac{3d-x_0}{d} \tag{5}$$

(3) 及ビ (4) ヨリ

$$m_3=\frac{y_0}{d} \tag{6}$$

(1), (5), (6) ヨリ

$$\frac{3d-x_0}{y_0}+\frac{y_0}{d}=0$$

即チ　$$y_0^2=d(x_0-3d)$$

故ニ　$$y^2=d(x-3d)$$

ハ即チ索ムル方程式ナリ

(ii)　曲線群 $(9-k)x^2+(25-k)y^2=(9-k)(25-k)$ ノ吟味

$k<9$ ナルトキハ $9-k>0,\ 25-k>0$, 卽チ方程式

$$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$$

ノ表ハス曲線ハ楕圓ニシテ $(25-k)-(9-k)=16=4^2$ ナルガ故ニ焦點ノ座標ハ $(\pm 4,0)$ ナリ

$k=9$ ナルトキハ方程式ハ $y^2=0$ トナリ，直線ヲ表ハス

$9<k<25$ ナルトキハ $25-k>0,\ 9-k<0$ ニシテ方程式

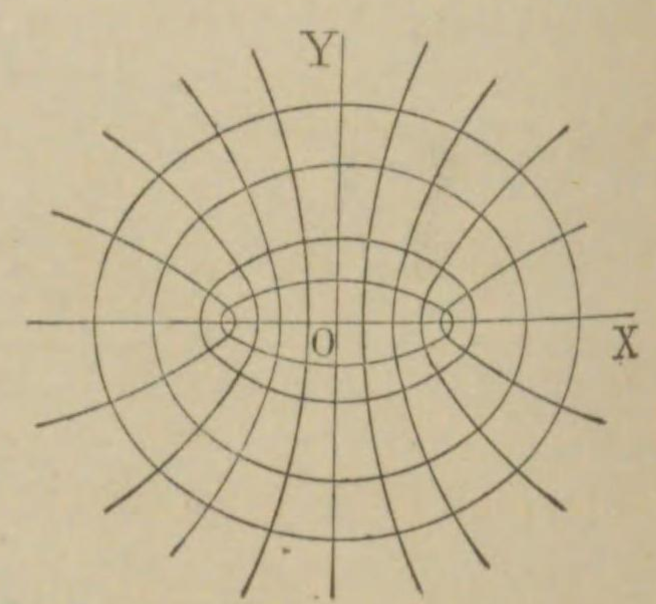
$$\frac{x^2}{25-k}-\frac{y^2}{k-9}=1$$

ハ雙曲線ヲ表ハシ，其ノ焦點ノ座標ハ前同樣 $(\pm 4,0)$ ナリ

$k=25$ ナルトキハ方程式ハ $x^2=0$ トナリ，直線ヲ表ハス

$k>25$ ナルトキハ $25-k<0,\ 9-k<0$, 卽チ元ノ方程式ノ左邊ハ負ニシテ右邊ハ正トナルガ故ニ曲線ハ存在セズ

故ニ此ノ曲線群ハ一般ニ同焦點ナル楕圓及ビ雙曲線ニシテ，k ガ負ノ値ヲ取リ順次增加スルニ從テ楕圓ハ益縮少シ，$k=9$ ノトキ其ノ極限トシテ $y^2=0$ ナル二重ノ直線トナリ，更ニ k ノ値ノ增加スルトキハ雙曲線トナリテ其ノ頂點ハ益原點ニ近ヅキ，$k=25$ ノトキニハ其ノ極限トシテ $x^2=0$ ナル二重ノ直線トナル



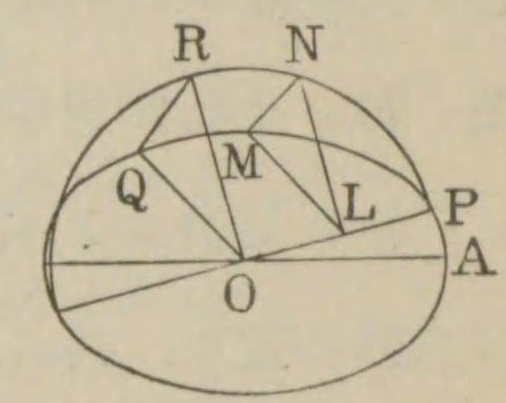
(iii)　共軛徑ヲ知リテ楕圓ノ追跡

共軛徑 OP, OQ ヲ座標軸トスル楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$$

トシ，其ノ上ニ一點 $M(x_1,\ y_1)$ ヲ取ルトキハ

$$\frac{y_1^2}{b'^2}=\frac{a'^2-x_1^2}{a'^2}$$



此ニ　$a'=\mathrm{OP},\qquad b'=\mathrm{OQ}$

$x_1=\mathrm{OL},\qquad y_1=\mathrm{LM}$

O ヲ中心トシ，OP ヲ半徑トシテ圓 $x^2+y^2=a'^2$ ヲ畫クトキハ

$$y^2=a'^2-x_1^2$$

此ニ　$y=\mathrm{LN}$

依テ
$$\frac{y_1^2}{b'^2}=\frac{y^2}{a'^2}$$

卽チ　$\mathrm{LM}:\mathrm{OQ}=\mathrm{LN}:\mathrm{OR}$

故ニ二ツノ三角形 LMN, OQR ハ相似ナリ

依テ共軛徑 OP, OQ ヲ知リテ楕圓ヲ畫クニハ先ヅ O ヨリ OP ニ垂線ヲ引キ圓トノ交點ヲ R トシ，線分 QR ヲ作リ，次ニ L ヨリ OP ニ垂線ヲ引キ圓トノ交點ヲ N トシ，L ヨリ OQ ニ平行ニ LM，又 N ヨリ QR ニ平行ニ NM ヲ引キ，其ノ交點ヲ M トスルトキハ M ハ卽チ楕圓上ノ一點ナリ

此ノ方法ニヨリ順次ニ楕圓上ノ點ヲ索メテ曲線ヲ畫クコトヲ得ベシ