斯蓋二氏

解析幾何學題解

編者 楊執中

科學社

目　　次

第一章　代數及三角之復習

第二章　卡爾的尊坐標

第三章　曲線及方程式

第四章　直線及普通一次方程式

第五章　圓及方程式

第六章　極坐標

第七章　坐標軸之移轉

斯蓋二氏解析幾何學習題詳解

第　一　章

習　題（8頁－9頁）

1. **試於下列諸二次式，計算其判別式，求其兩根之和及積，判定根之性質．（爲實數或虛數或複數）．又將諸二次式，寫爲第4頁(7)之形式**

設 x_1 與 x_2 爲以下各二次式之二根．

(a)　$2x^2-6x+4$．

解．此處 $A=2$，$B=-6$，$C=4$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-6}{2}=3.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{4}{2}=2.$$

因　$\Delta=B^2-4AC=(-6)^2-4\times2\times4=36-32=4>0$，故二根均爲實數而不相等．

又　$2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$．

(b)　$x^2-9x-10$．

解．此處 $A=1$，$B=-9$，$C=-10$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-9}{1}=9.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-10}{1}=-10.$$

因　$\Delta=B^2-4AC=(-9)^2-4\times1\times(-10)=81+40=121>0$，故二根均爲實數而不相等．

又 $x^2-9x-10=(x+1)(x-10)$．

(c)　$1-x-x^2$．

解．將此式皆爲範式如：

$-x^2-x+1$．

此處 $A=-1$，$B=-1$，$C=1$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-1}{-1}=-1.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{1}{-1}=-1.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=(-1)^2-4\times(-1)\times1=1+4=5>0$，故二根均爲實數，而不相等．

又　$-x^2-x+1=-\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

(d)　$4x^2-4x+1$．

解．　此處 $A=4$，$B=-4$，$C=1$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-4}{4}=1.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{1}{4}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=(-4)^2-4\times4\times1=16-16=0$．故二根均爲實數且相等．

又　$4x^2-4x+1=4(x-\frac{1}{2})^2$．

(e)　$5x^2+10x+5$．

解．　此處 $A=5$，$B=10$，$C=5$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{10}{5}=-2.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{5}{5}=1.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=10^2-4\times5\times5=100-100=0$．故二根均爲實數且相等．

又 $5x^2+10x+5=5(x+1)^2$．

(f)　$3x^2-5x-22$．

解．　此處 $A=3$，$B=-5$，$C=-22$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-22}{3}=-7\frac{1}{3}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=(-5)^2-4\times3\times(-22)=25+264=289>0$．故二根均爲實數而不相等．

又 $3x^2-5x-22=3(x+2)(x-\frac{11}{3})$.

(g) $2x^2+13$.

解. 此處 $A=2$, $B=0$, $C=13$.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{0}{2}=0.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{13}{2}=6\tfrac{1}{2}.$$

因 $\triangle=B^2-4AC=0-4\times2\times13=-104$, <0, 故二根均爲虛數.

又 $2x^2+13=2(x^2+\frac{13}{2})$.

(h) $9x^2-6x+1$.

解. 此處 $A=9$, $B=-6$, $C=1$.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-6}{9}=\frac{2}{3}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{1}{9}.$$

因 $\triangle=B^2-4AC=(-6)^2-4\times9\times1=36-36=0$. 故二根均爲實數且相等.

又 $9x^2-6x+1=9(x-\frac{1}{3})^2$.

(i) $5x^2-x-1$.

解. 此處 $A=5$, $B=-1$, $C=-1$.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-1}{5}=\frac{1}{5}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5}.$$

因 $\triangle=B^2-4AC=(-1)^2-4\times5\times(-1)=1+20=21$, >0, 故二根均爲實數而不相等.

又 $5x^2-x-1=5\left(x-\frac{1-\sqrt{21}}{10}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{21}}{10}\right)$

(j) $7x^2-6x-1$.

解. 此處 $A=7$, $B=-6$, $C=-1$.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-6}{7}=\frac{6}{7}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-1}{7}=-\frac{1}{7}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=(-6)^2-4\times7\times(-1)=36+28=64，>0$
故二根均爲實數，而不相等．

又　$7x^2-6x-1=7(x-1)(x+\frac{1}{7})$．

(k)　$3x^2-5$．

解．　此處 $A=3$，$B=0$，$C=-5$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{0}{3}=0.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-5}{3}=-1\frac{2}{3}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=0-4\times3\times(-5)=60>0$，故二根均爲實數而不相等．

又　$3x^2-5=3(x-\sqrt{\frac{5}{3}})(x+\sqrt{\frac{5}{3}})$．

(l)　$2x^2+x-8$．

解．　此處 $A=2$，$B=1$，$C=-8$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{1}{2}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-8}{2}=-4.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=1-4\times2\times(-8)=1+64=65，>0$，故二根均爲實數，而不相等．

又　$2x^2+x-8=2\left(x+\frac{1-\sqrt{65}}{4}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{65}}{4}\right)$．

(m)　$2x^2+x+8$．

解．　此處 $A=2$，$B=1$，$C=8$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{1}{2}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{8}{2}=4.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=1^2-4\times2\times8=-63，<0$，故二根均爲虛數

又　$2x^2+x+8=2[(x+\frac{1}{4})^2+\frac{63}{16}]$．

(n)　$6x^2-x-5$．

解．　此處 $A=6$，$B=-1$，$C=-5$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{-1}{6}=\frac{1}{6}.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{-5}{6}=-\frac{5}{6}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=(-1)^2-4\times6\times(-5)=1+120=121,>0.$ 故二根均爲實數，而不相等．

又　$6x^2-x-5=6(x-1)(x+\frac{5}{6})$．

(o)　$10x^2+60x+90$．

解．此處 $A=10$，$B=60$，$C=90$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{60}{10}=-6.$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{90}{10}=9.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=60^2-4\times10\times90=3600-3600=0$．　故二根均爲實數，且相等．

又　$10x^2+60x+90=10(x+3)^2$．

(p)　$7x^2+7x+\frac{7}{4}$．

解．此處 $A=7$，$B=7$，$C=\frac{7}{4}$．

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{7}{7}=-1,$$

$$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{\frac{7}{4}}{7}=\frac{7}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}.$$

因　$\triangle=B^2-4AC=7^2-4\times7\times\frac{7}{4}=49-49=0$．　故二根均爲實數，且相等．

又　$7x^2+7x+\frac{7}{4}=7(x+\frac{1}{2})^2$．

2．當 k 爲如何之實數值時，則下列諸方程，可有所指定之一根．

(A)　一根爲零：

(a)　$6x^2+5kx-3k^2+3=0$．

解．若二次式之一根爲零，其常數項必爲零．

故　$-3k^2+3=0$，$3k^2-3=0$，$k^2-1=0$，

$k^2=1$，$k=\pm1$．

(b)　$2k-3x^2+6x-k^2+3=0$．

解．將此式書爲範式，如：

$3x^2-6x+k^2-2k-3=0$．

若二次式之一根爲零，其常數項必爲零.

故 $k^2-2k-3=0$.

$(k+1)(k-3)=0$，$k=-1$或3.

(c) $x^2+10x+k^2+3=0$.

解. 若二次式一根爲零，其常數項必爲零.

故 $k^2+3=0$，$k^2=-3$，$k=\pm\sqrt{-3}$.

所以 k 沒有實數值.

(d) $10x^2-mx+3k^2-8k+2=0$.

解. 若二次式之一根爲零，其常數項必爲零.

故. $3k^2-8k+2=0$.

$$k=\frac{8\pm\sqrt{64-24}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{40}}{6}=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}.$$

(B) 一根爲 -2：

設 x_1 爲以下各二次式之其他一根.

(e) $x^2-2kx+3=0$.

解. 令 $A=1$，$B=-2k$，$C=3$.

$$x_1-2=-\frac{B}{A}=-\frac{-2k}{1}=2k,\quad x_1=2k+2.$$

$$-2x_1=\frac{C}{A}=\frac{3}{1}=3,\qquad x_1=-\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ $2k+2=-\frac{3}{2}$,

$2k=-\frac{3}{2}-2=-\frac{7}{2}$,

$k=-\frac{7}{4}=-1\frac{3}{4}$.

(f) $kx^2-x+3k^2-1=0$.

解. 令 $A=k$，$B=-1$，$C=3k^2-1$.

$$x_1-2=-\frac{B}{A}=-\frac{-1}{k}=\frac{1}{k}.$$

$\therefore$ $x_1=\frac{1}{k}+2$.

$$-2x_1=\frac{C}{A}=\frac{3k^2-1}{2k},\qquad \therefore\quad x_1=-\frac{3k^2-1}{2k}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{k}+2=-\frac{3k^2-1}{2k},\qquad \frac{1}{k}+2+\frac{3k^2-1}{2k}=0,$$

$2+4k+3k^2-1=0$，　$3k^2+4k+1=0$.

$(3k+1)(k+1)=0$.

∴ $k=-\frac{1}{3}$或-1.

(g) $k^2x^2+6x=k^2-16$.

解. 將此式書爲範式如下:

$k^2x+6x-k^2+16=0$.

令 $A=k^2$, $B=6$, $C=16-k^2$.

$$x_1-2=-\frac{B}{A}=-\frac{6}{k^2}, \qquad \therefore \quad x_1=2-\frac{6}{k^2};$$

$$-2x_1=\frac{C}{A}=\frac{16-k^2}{k^2}, \qquad \therefore \quad x_1=-\frac{16-k^2}{2k^2},$$

$$\therefore \quad 2-\frac{6}{k^2}=-\frac{16-k^2}{2k^2}, \qquad 2-\frac{6}{k^2}+\frac{16-k^2}{2k^2}=0.$$

$4k^2-12+16-k^2=0$,

$3k^2+4=0$.

由此二次式可知 k 沒有實數值.

(h) $kx^2+2kx=-3$.

解. 將此式書爲範式如:

$kx^2+2kx+3=0$.

令 $A=k$, $B=2k$, $C=3$.

$$x_1-2=-\frac{B}{A}=-\frac{2k}{k}=-2, \qquad \therefore \quad x_1=-2+2=0.$$

$$-2x_1=\frac{C}{A}=\frac{3}{k}, \qquad \therefore \quad x_1=-\frac{3}{2k}.$$

∴ $-\frac{3}{2k}=0$, $\frac{3}{2k}=0$, 此爲不可能.

故 k 沒有值能適合已給之條件.

(i) $10x^2-7kx+k^2+9=0$.

解. 令 $A=10$, $B=-7k$, $C=k^2+9$.

$$x_1-2=-\frac{B}{A}=-\frac{-7k}{10}=\frac{7k}{10}, \qquad \therefore \quad x_1=\frac{7k}{10}+2.$$

$$-2x_1=\frac{C}{A}=\frac{k^2+9}{10}, \qquad \therefore \quad x_1=-\frac{k^2+9}{20}.$$

$\therefore\quad \dfrac{7k}{10}+2=-\dfrac{k^2+9}{20},\qquad \dfrac{7k}{10}+2+\dfrac{k^2+9}{20}=0.$

$14k+40+k^2+9=0,\quad k^2+14k+49=0.$

$(k+7)^2=0,\qquad \therefore\quad k=-7.$

3. 當k及m爲如何之實數值時，則下列諸方程之兩根，俱等於零。

(a) $5x^2+mx+k-5=x$.

解. 將此式書爲範式如下：

$5x^2+(m-1)x+k-5=0.$

若二根皆爲零，未知數之一次項之係數與常數項必須爲零，

$\therefore\quad m-1=0,\ k-5=0.$

$\therefore\quad m=1,\qquad k=5.$

(b) $x^2+(3k-m)x+k^2-4=0.$

解. 若二根皆爲零，必須 $B=C=0$.

$\therefore\quad 3k-m=0, k^2-4=0.$

$\therefore\quad m=3k,\qquad k=\pm 2.$

$m=\pm 6.$

(c) $2x^2+(m^2+1)x+k^2=0.$

解. 若二根皆爲零，必須$B=C=0$.

$\therefore\quad m^2+1=0,\qquad k^2=0.$

$\therefore\quad m=\pm\sqrt{-1}, k=0.$

故 m 沒有實數值.

(d) $x^2+(m^2+2k-3m)x+4k-6m=0.$

解. 若二根皆爲零，必須 $B=C=0$.

$\therefore\quad m^2+2k-3m=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$4k-6m=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由 (2) 式得 $k=\frac{3}{2}m$，將此值代入 (1) 式，得

$m^2+2\times\frac{3}{2}m-3m=0.$

$m^2+3m-3m=0,\ \therefore\ m=0.$

$k=\frac{3}{2}m=0.$

(e) $t^2+(m^2+k^2-5)t+k+m+1=0.$

解. 若二根皆爲零，必須 $B=C=0$.

$\therefore\quad m^2+k^2-5=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$k+m+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由（2）式得 $k=-(m+1)$，代入（1）式得

$m^2+[-(m+1)]^2-5=0,$

$m^2+m^2+2m+1-5==0,$

$2m^2+2m-4=0, m^2+m-2=0,$

$(m+2)\ (m-1)=0,$

$\therefore\quad m=-2, k=1;$

$m=1,\ k=-2.$

4．當 k 為如何之實數值，則下列諸方程之兩根相等；並將所求得 k 之值，代入原方程以證驗之．

(a)　$kx^2-3x-1=0.$

解．令 $A=k,\ B=-3, C=-1.$

$\triangle=B^2-4AC=9+4k.$

若此方程式之二根相等時，必須 $\triangle=0.$

即　$9+4k=0,\ \therefore k=-\frac{9}{4}.$

證驗．以 k 之值代入原方程式．

$-\frac{9}{4}x^2-3x-1=0.\quad \frac{9}{4}x^2+3x+1=0,$

$9x^2+12x+4=0,\ (3x+2)^2=0.$

$\therefore$　二根皆等於 $-\frac{2}{3}.$

(b)　$x^2-kx+9=0.$

解．令 $A=1, B=-k, C=9.$

$\triangle=k^2-4\times9=k^2-36.$

方程式之二根相等時，必須其判別式為零．

$\therefore\quad k^2-36=0,\ \therefore\quad k=\pm6.$

證驗．以 $k=6$ 之值代入原式，得

$x^2-6x+9=0$，或 $(x-3)^2=0.\quad\therefore\quad x=3.$

以 $k=-6$ 之值代入原式得

$x^2+6x+9=0$，或 $(x+3)^2=0,\ \therefore x=-3.$

(c)　$2kx^2+3kx+12=0.$

解．令 $A=2k,\ B=3k,\ C=12.$

$\triangle=9k^2-4\times2k\times12=9k^2-96k.$

若方程式之二根皆爲零，必須其判別式爲零.

$\therefore\quad 9k^2-96k=0,\ 3k(3k-32)=0.$

$\therefore\quad k=\frac{32}{3}.$

證驗. 以 k 之值代入原方程式，則原式變爲

$2\times\frac{32}{3}x^2+3\times\frac{32}{3}x+12=0$，或

$\frac{64}{3}x^2+32x+12=0,\quad 64x^2+96x+36=0;$

$16x^2+24x+9=0,\quad (4x+3)^2=0.$

$\therefore\quad x=-\frac{3}{4}.$

(d) $2x^2+kx-1=0.$

解. 令 $A=2,\ B=k,\ C=-1.$

$\triangle=k^2+8.$

若已知方程之二根相等，則其判別式必爲零. 即

$k^2+8=0.\ k^2=-8$，故 k 無實數值.

(e) $5x^2-3x+5k^2=0.$

解. 令 $A=5,\ C=5k^2,$

$\triangle=9-4\times5\times5k^2=9-100k^2.$

若方程之二根相等，必須$\triangle=0.$

$\therefore\quad 9-100k^2=0$，或 $100k^2=9.$

$\therefore\quad k=\pm\frac{3}{10}.$

證驗. 以 k 之各值代入原方程式.

當 $k=\frac{3}{10}$ 時則原式變爲 $5x^2-3x+\frac{9}{20}=0$，或

$100x^2-60x+9=0$，或 $(10x-3)^2=0.\ \therefore\ x=\frac{3}{10},$

當 $k=-\frac{3}{10}$時，則原式變爲$5x^2-3x+\frac{9}{20}=0$，或

$(10x-3)^2=0,\ \therefore\ x=\frac{3}{10},$

(f) $x^2+kx+k^2+2=0.$

解. 令 $A=1,\ B=k,\ C=k^2+2,$

$\therefore\ \triangle=k^2-4\times(k^2+2)=-3k^2-8$

若方程式之二根相等，必須 $\triangle=0$.

$\therefore\ -3k^2+8=0$，$k^2=-\frac{8}{3}$，故 k 無實數值.

(g) $x^2-2kx-k-\frac{1}{4}=0$.

解. 令 $A=1$，$B=-2k$，$C=-k-\frac{1}{4}$.

$\triangle=4k^2+4(k+\frac{1}{4})=4k^2+4k+1$.

若方程式之二根相等，必須其判別式等於零．即

$4k^2+4k+1=0$ 或 $(2k+1)^2=0$，

$\therefore\ k=-\frac{1}{2}$.

證驗. 以 k 之值代入原式得

$x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=0$，$x^2+x+\frac{1}{4}=0$.

$4x^2+4x+1=0$，$(2x+1)^2=0$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$.

(h) $x^2+2bx+2b^2+3b-4=0$.

解. 令 $A=1$，$B=2b$，$C=2b^2+3b-4$.

$\triangle=4b^2-4(2b^2+3b-4)=4b^2-8b^2-12b+16$.

$\quad=-4b^2-12b+16$.

若方程式之二根相等時，必須其判別式為零． 即

$4b^2+12b-16=0$，$b^2+3b-4=0$

$(b+4)(b-1)=0$，$\therefore b=1$ 或 -4.

證驗. 以 b 之各值代入原方程式.

當 $b=-4$ 時，原式變為 $x^2-8x+32-12-4=0$　$x^2-8x+16=0$.

$(x-4)^2=0$ $\therefore x=4$.

當 $b=1$ 時，原式變為 $x^2+2x+1=0$.

或 $(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$.

(i) $(m+2)x^2-2mx+1=0$.

解. 令 $A=m+2$，$B=-2m$，$C=1$.

$\triangle=4m^2-4(m+2)=4m^2-4m-8$.

若方程式之二根相等必須 $\triangle=0$.

$\therefore 4m^2-4m-8=0$，$m^2-m-2=0$，

$(m-2)(m+1)=0$，$\therefore m=2$ 或 -1.

證驗. 以 m 之各值代入原式.

當 $m=2$ 時，則原式變為 $4x^2-4x+1=0$.

或 $(2x-1)^2=0$，$\therefore x=$

當 $m=1$時，則原式變爲 $x^2+2x+1=0$.

或 $(x+1)^2=0$，$\therefore x=-1$.

(j) $(m^2+4)x^2+3x+2=0$.

解. 令$A=m^2+4$，$B=3$，$C=2$.

$\triangle=9-4\times2(m^2+4)=9-8m^2-32=-8m^2-23$.

此方程之二根旣相等，其判別式必爲零．卽

$-8m^2-23=0$，$-8m^2=23$，$m^2=-\frac{23}{8}$，

故 m 無實數值.

(k) $x^2+(l-3)x-1=0$.

解. 令 $A=1$，$B=l-3$，$C=-1$.

$\triangle=(l-3)^2+4=l^2-6l+9+4=l^2-6l+13$.

已知方程式之二根旣相等，其判別式必爲零．卽

$l^2-6l+13=0$，……………(1)

(1)式之判別式爲$\triangle=36-4\times13=36-52$.

$=-16<0$.

故 l 沒有實數值.

(l) $(c^2-8)x^2-(2c-1)x+\frac{1}{2}=0$.

解. 令 $A=c^2-8$，$B=1-2c$，$C=\frac{1}{2}$.

$\triangle=(1-2c)^2-4(c^2-8)\times\frac{1}{2}$

$=1-4c+4c^2-2c^2+16$.

$=2c^2-4c+17$.

若方程式之二根相等，必須$\triangle=0$．卽

$2c^2-4c+17=0$ ………………(1)

(1)式之判別式爲 $\triangle=16-4\times2\times17=16-136$

$=-120<0$.

故 c 無實數值.

(m) $az^2+2(a+3)z+16=0$.

解. 令$A=a$，$B=2(a+3)$，$C=16$.

$\triangle=4(a+3)^2-4\times a\times16=4a^2+24a+36-64a$.

$=4a^2-40a+36$.

若方程式之二根相等，必須 $\triangle=0$，即

$4a^2-40a+36=0$. $a^2-10a+9=0$.

$(a-1)(a-9)=0$ $\therefore a=1$ 或 9.

證驗. 以 a 之各值代入原式.

當 $a=1$ 時，則原式變爲 $z^2+8z+16=0$.

$(z+4)^2=0$; $\therefore z=-4$.

當 $a=9$ 時，則原式變爲$9z^2+24z+16=0$.

$(3z+4)^2=0$, $\therefore$ $z=-\frac{4}{3}$.

5. 假定下列各方程之兩根相等，試求表各係數間之關係之方式.

(a) $m^2x^2+2kmx-2px=-k^2$.

解. 排列原式爲範式如下:

$m^2x^2+2(km-p)x+k^2=0$.

令 $A=m^2$, $B=2(km-p)$, $C=k^2$.

$\triangle=4(km-p)^2-4m^2k^2=4k^2m^2-8kpm+4p^2-4k^2m^2=4p^2-8kpm$.

若二根相等，其判別式必爲零. 即

$4p^2-8kpm=0$, $p^2-2kpm=0$.

$p(p-2km)=0$,

(b) $x^2+2mpx+2bp=0$.

解. 令$A=1$, $B=2mp$, $C=2bp$.

$\triangle=4m^2p^2-8bp$.

二根既相等,則其判別式必爲零.

$\therefore$ $4m^2p^2-8bp=0$, $m^2p^2-2bp=0$.

$p(m^2p-2b)=0$.

(c) $2mx^2+2bx+a^2=0$.

解. 令 $A=2m$, $B=2b$, $C=a^2$.

$\triangle=4b^2-8ma^2$

二根既相等則其判別式必爲零.

$\therefore$ $4b^2-8ma^2=0$. $b^2-2ma^2=0$.

(d) $(1+m^2)x^2+2bmx+(b^2-r^2)=0$.

解. 令$A=1+m^2$, $B=2bm$, $C=b^2-r^2$,

$$\triangle = 4b^2m^2 - 4(1+m^2)(b^2 - r^2)$$
$$= 4b^2m^2 - 4b^2 + 4r^2 - 4b^2m^2 + 4m^2r^2$$
$$= 4m^2r^2 + 4r^2 - 4b^2.$$

二根即相等，則其判別式必爲零．即

$$m^2r^2 + 4r^2 - 4b^2 = 0,\quad m^2r^2 + r^2 - b^2 = 0.$$
$$r^2(m^2+1) - b^2 = 0.$$

(e) $(b^2 - a^2m^2)y^2 - 2b^2ky = a^2b^2m^2 - b^2k^2.$

解． 將此式寫成範式爲

$$(b^2 - a^2m^2)y^2 - 2b^2ky - a^2b^2m^2 + b^2k^2 = 0.$$

令 $A = b^2 - a^2m^2$，$B = -2b^2k$，$C = b^2k^2 - a^2b^2m^2$.

$$\triangle = 4b^4k^2 - 4(b^2 - a^2m^2)(b^2k^2 - a^2b^2m^2)$$
$$= 4b^4k^2 - 4b^4k^2 + 4a^2b^4m^2 + 4a^2b^2k^2m^2 - 4a^4b^2m^4$$
$$= 4a^2b^4m^2 + 4a^2b^2k^2m^2 - 4a^4b^2m^4.$$

二根既相等，其判別式必爲零 即

$$4a^2b^4m^2 + 4a^2b^2k^2m^2 - 4a^4b^2m^4 = 0,$$
$$a^2b^4m^2 + a^2b^2k^2m^2 - a^4b^2m^4 = 0,$$
$$a^2b^2m^2(b^2 + k^2 - a^2m^2) = 0.$$

(f) $(A + m^2B)x^2 + 2bmBx + b^2B + C = 0.$

解． 令 $A_1 = A + m^2B$，$B_1 = 2bmB$，$C_1 = b^2B + C$.

$$\triangle = B_1^2 - 4A_1C_1 = 4b^2m^2B^2 - 4(A + m^2B)(b^2B + C).$$
$$= 4b^2m^2B^2 - 4Ab^2B - 4AC - 4b^2m^2B^2 - 4m^2BC$$
$$= -4b^2AB - 4AC - 4m^2BC.$$

二根既相等，則其判別式必爲零，即

$$-4b^2AB - 4AC - 4m^2BC = 0,$$
$$b^2AB + AC + m^2BC = 0.$$

6. 當b, c, l, k, m等不定常數，等於任何之實數值時；則下列各對聯立方程之兩組根相同．

(a) $x + 2y = k$ ……………………………(1)

$x^2 + y^2 = 5$ ……………………………(2)

解． 由 (1) 式解 x 得

$x = k - 2y$ ……………………………(3)

代入 (2) 式且書爲範式如：

$$5y^2-4ky+k^2-5=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

假定（4）式之二根爲 y_1 及 y_2，再代入（3）式，則得 x 之二相當值，即

$$x_1=k-2y_1,\ x_2=k-2y_2 \cdots\cdots\cdots(5)$$

故（1），（2）兩方程式有二組根 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2)，但題設二組根相同，故必

$$x_1=x_2 \text{ 與 } y_1=y_2 \cdots\cdots\cdots(6)$$

由（5）若 $x_1=x_2$，則 y_1 必等於 y_2，故（1），（2）之二組根相同，必須（4）之二根相等，即（4）之判別式爲零.

∴ $\Delta=16k^2-4\times5(k^2-5)=0$,

$16k^2-20k^2+100=0$, $4k^2=100$, ∴ $k=\pm5$,

(b) $y=mx-1 \cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2=4y \cdots\cdots\cdots(2)$

解. 以（1）式 y 之值代入（2）式且寫成範式得

$$x^2-4mx+4=0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

（1），（2）之二組根相同必須（3）之判別式爲零.

∴ $(4m)^2-4\times4=0$, $16m^2-16=0$, ∴ $m=\pm1$.

(c) $2x-3y=b \cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+2x=3y \cdots\cdots\cdots(2)$

解. 由（1）解 y 得

$$y=\frac{2x-b}{3} \cdots\cdots\cdots(3)$$

代入（2）式且排列爲範式得

$$x^2+b=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

（1），（2）之二組根相同，必須（4）之判別式爲零.

∴ $\Delta=0-4b=0$, ∴ $b=0$.

(d) $y=mx+10 \cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+y^2=10. \cdots\cdots\cdots(2)$

解. 以（1）式 y 之值代入（2）式，且排列爲範式，得

$$(1+m^2)x^2+20mx+90=0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

（1），（2）之二組根相同，必須（3）之判別式爲零.

$\Delta=400m^2-4\times90\times(1+m^2)=0$,

$400m^2-360-360m^2=0,$

$40m^2-360=0.\qquad \therefore\quad m=\pm 3.$

(e) $lx+y-2=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2-8y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解. 由 (1) 得

$y=2-lx \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式且書爲範式如

$x^2+8lx-16=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)，(2) 之二組根相同，必須 (4) 之判別式爲零.

$\therefore\quad \Delta=64l^2+4\times 16=0.\qquad 64l^2+64=0.$

$l^2+1=0$ 故 l 無實數値.

(f) $x+4y=c \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+2y^2=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解. 由 (1) 式解 x 得

$x=c-4y \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入 (2) 式且寫成範式爲

$18y^2-8cy+c^2-9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)，(2) 之二組根相同，必須 (4) 之判別式爲零.

$\therefore\quad \Delta=64c^2-4\times 18(c^2-9)=0.$

$64c^2-72c^2+648=0,\quad 8c^2=648.$

$\therefore\quad c=\pm 9.$

(g) $x^2+y^2-x-2y=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x+2y=c \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解. 解 (2) 以求 x 得

$x=c-2y, \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入 (1) 式，且書爲範式如:

$5y^2-4cy+c^2-c=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1)，(2) 之二組根旣相同，(4) 之判別式必爲零.

$\therefore\quad \Delta=16c^2-4\times 5(c^2-c)=0,$

$16c^2-20c^2+20c=0,\qquad 4c^2-20c=0,$

$c^2-5c=0,\qquad c(c-5)=0,\qquad \therefore\quad c=0$ 或 $5.$

(h) $x^2+4y^2-8x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$mx - y - 2m = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解. 由（2）解得

$$y = mx - 2m \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入（1）式且書爲範式如:

$$(1+4m^2)x^2 - 8(1+2m^2)x + 16m^2 = 0 \cdots\cdots(4)$$

（1），（2）之二組根既相同，（4）之判別式必爲零，即

$\Delta = 64(1+2m^2)^2 - 4(1+4m^2)\times 16m^2 = 0$,

$64+256m^2+256m^4-(64m^2+256m^4)=0$,

$192m^2+64=0$, $3m^2+1=0$,

$m^2=-\frac{1}{3}$, 故 m 無實數值.

(i) $x^2+y^2-k=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$3x-4y=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解. 由（2）得

$$x=\frac{4y+25}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入（1）式得

$\left(\frac{4y+25}{3}\right)^2+y^2-k=0$, $16y^2+200y+625+9y^2-9k=0$;

$$25y^2+200y+625-9k=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

（1），（2）之二組根既相同，（4）之判別式必爲零．即

$\Delta=40000-4\times25(625-9k)=0$,

$40000-62500+900k=0$,

$900k=22500$, $\therefore k=25$.

(j) $x^2-y^2+2x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$4x+y=c \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解. 由（2）式解得

$$y=c-4x \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入（1）式且寫成範式爲

$$15x^2-(8c+6)x+c^2+c+3=0 \cdots\cdots(4)$$

（1），（2）之二組根既相同，（4）之判別式必爲零．

即 $\Delta=64c^2+96c+36-4\times15(c^2+c+3)=0$,

$64c^2+96c+36-60c^2-60c-180=0$,

$4c^2+36c-144=0$, $c^2+9c-36=0$,

$(c+12)(c-3)=0$; ∴ $c=-12$ 或 3.

(k) $2xy-3x-y=0$ ……………………(1)

$y+3x+k=0$ ……………………(2)

解. 由 (2) 式解得

$y=-3x-k$. ……………………(3)

代入 (1) 式且化爲簡式如:

$6x^2+2kx-k=0$ ……………………(4)

(1), (2) 之二組根旣相同, (4) 之判別式必爲零.

即 $\triangle=4k^2+4\times6k=0$,

$4k^2+24k=0$,

$k^2+6k=0$,

∴ $k=0$, 或 -6.

(l) $x^2+4y^2-8y=0$, ……………………(1)

$x=c$, ……………………(2)

解. 將 (2) 式 x 之値代入 (1) 式, 且排列爲簡式得

$4y^2-8y+c^2=0$. ……………………(3)

(1), (2) 之二組根旣相同, 則 (3) 之判別式必爲零.

∴ $\triangle=64-4\times4c^2=0$, $64-16c^2=0$,

$4-c^2=0$, ∴ $c=\pm2$.

(m) $x^2+2y^2-8y=0$ ……………………(1)

$y=b$ ……………………(2)

解. 將 (2) 式 y 之値代入 (1) 式得

$x^2+4b^2-8b=0$ ……………………(3)

(1), (2) 之二組根旣相同, 則 (3) 之判別式必爲零.

∴ $\triangle=0-4(4b^2-8b)=0$.

$16b^2-32b=0$, $b^2-2b=0$,

∴ $b=0$, 或 2.

(n) $2x^2+3y^2=35$ ……………………(1)

$4x+9y=k$ ……………………(2)

解. 解 (2) 式以求 x, 得

$$x=\frac{k-9y}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

代入（1）式，且書爲範式得

$$105y^2-18ky+k^2-280=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

（1），（2）之二組根旣相同，則（4）之判別式必爲零.

$$\therefore \quad \triangle=324k^2-4\times105(k^2-280)=0,$$

$$324k^2-420k^2+117600=0,$$

$$96k^2=117600, \quad k^2=1225.$$

$$\therefore \quad k=\pm35.$$

(c) $x^2+xy+2x+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$y=-2x+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解. 將（2）式 y 之值代入（1）式，且書爲範式得

$$x^2-bx-b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

（1），（2）之二組根旣相同，則（3）之判別式必爲零.

$$\therefore \quad \triangle=b^2+4b=0. \qquad b(b+4)=0.$$

$$\therefore \quad b=0 \text{ 或 } -4.$$

7. 設下列各對聯立方程之兩組根相同，則表其係數間之關係之方程式.

(a) $bx+ay=ab \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$y^2=2px \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解. 由（1）式解得

$$x=\frac{ab-ay}{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

代入（2）式，且排列爲範式得

$$by^2+2apy-2abp=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

（1），（2）之二組根相同時，必須（4）之判別式爲零.

$$\therefore \quad \triangle=4a^2p^2+8ab^2p=0,$$

$$a^2p^2+2ab^2p=0 \text{ 或 } ap(ap+2b^2)=0.$$

(b) $y=mx+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$Ax^2+By=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解. 以（1）式 y 之值代入（2）式，且書爲範式得

$$Ax^2+mBx+bB=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1)，(2) 之二組根旣相同，則 (3) 之判別式必爲零．

$\therefore \quad m^2B^2-4AbB=0.$

$B(m^2B-4Ab)=0.$

(c) $y=m(x-a)$ ……………………………… (1)

$By^2+Dx=0$ ……………………………… (2)

解． 由 (1) 式解 x 得

$$x=\frac{y+ma}{m} \quad \cdots\cdots (3)$$

代入 (2) 式且書爲範式如：

$mBy^2+Dy+maD=0$ ……………………………… (4)

(1)，(2) 之二組根旣相同，則 (4) 之判式別必爲零．

即 $\triangle=D^2-4m^2aBD=0,$

$D(D-4m^2aB)=0,$

(d) $bx+ay=ab$ ……………………………… (1)

$2xy+c^2=0$ ……………………………… (2)

解． 解 (1) 式以求 y 得

$$y=\frac{ab-bx}{a} \quad \cdots\cdots (3)$$

代入 (2) 式且書爲範式如：

$2bx^2-2abx-ac^2=0$ ……………………………… (4)

(1)，(2) 之二組根旣相同，則 (4) 之判別式必爲零．

$\therefore \quad \triangle=4a^2b^2+8abc^2=0,$

$a^2b^2+2abc^2=0, \qquad ab(ab+2c^2)=0.$

(e) $kx-y=c$ ……………………………… (1)

$Ax^2+By^2=C$ ……………………………… (2)

解． 由 (1) 式解得

$y=kx-c$ ……………………………… (3)

代入 (2) 式且書爲範式得

$(A+k^2B)x^2-2ckBx+c^2B-C=0 \quad (4)$

(1)，(2) 之二組根旣相同，則 (4) 之判別式必爲零．

$\therefore \quad \triangle=4c^2k^2B^2-4(A+k^2B)(c^2B-C)=0,$

$4c^2k^2B^2-4c^2AB+4AC-4c^2k^2B^2+4k^2BC=0.$

$k^2BC+AC-c^2AB=0$.

(f) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ……………………(1)

$x^2+y^2=r^2$ ……………………………(2)

解. 由 (1) 式解得

$$y=\frac{p-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入 (2) 式，且書爲簡式得

$$x^2-2px\cos\alpha+p^2-r^2\sin^2\alpha=0.\quad\cdots(4)$$

(1)，(2) 之二組根旣相同，則 (4) 之判別式必爲零；

$\therefore\quad \triangle=4p^2\cos^2\alpha-4(p^2-r^2\sin\alpha)=0$,

$p^2\cos^2\alpha-p^2+r^2\sin^2\alpha=0$,

$r^2\sin^2\alpha-p^2(1-\cos^2\alpha)=0$,

$r^2\sin^2\alpha-p^2\sin^2\alpha=0$,

$\sin^2\alpha(r^2-p^2)=0$.

$\therefore\quad r^2-p^2=0$.

習　　題 (13頁－14頁)

1. 試以不等式，表明下列諸變數之值.

(a) x之值在0與5之間.

解. $0\leqq x\leqq 5$.

(b) y之值恒爲正.

解. $y>0$.

(c) t之值恒爲負.

解. $t<0$.

(d) x之值小於-2或大於-1.

解. $x<-2$，或 $x>-1$.

(e) r之值，在-3與8之間.

解. $-3\leqq r\leqq 8$.

(f) z之值爲任何負數或爲不能小於3之任何值.

解. $z\leqq 0$，或 $z\geqq 3$.

(g) x之值不小於-8，亦不大於2.

解. $-8\leqq x\leqq 2$.

2. 試就問題1第一題所列諸二次式，將其變數以所有一切之值代之，以定諸二次式之值之符號．

(a) $2x^2-6x+4$.

解． 令 $\Delta=36-4\times4\times2=4>0$， $A=1>0$，且其根爲 1 及 2．

故 當 $1<x<2$ 時，二次式 $2x^2-6x+4<0$．

當 $x<1$ 或 $x>2$ 時，二次式 $2x^2-6x+4>0$．

(b) $x^2-9x-10$.

解． 令 $\Delta=81+4\times10=121>0$， $A=1>0$，且其根爲 10 及 -1．

故，當 $-1<x<10$ 時，則二次式 $x^2-9x-10<0$；

當 $x<-1$ 或 $x>10$ 時，則二次式 $x^2-9x-10>0$．

(c) $1-x-x^2$.

解． 令 $\Delta=1+4=5>0$， $A=-1<0$，且其根爲 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$．

故，當 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，則二次式 $1-x-x^2>0$；

當 $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，則二次式 $1-x-x^2<0$．

(d) $4x^2-4x+1$.

解． 令 $\Delta=16-4\times4=0$， $A=4>0$．

故． x 爲所有之實數値，二次式 $5x^2+10x+5$ 俱爲正．

(e) $5x^2+10x+5$.

解． 令 $\Delta=100-4\times5\times5=0$， $A=5>0$．

故， x 爲任何實數値，二次式 $5x^2+10x+5$ 俱爲正．

(f) $3x^2-5x-22$.

解． 令 $\Delta=25+4\times3\times22=289>0$， $A=3>0$，

且其根爲 -2 與 $\frac{11}{3}$．

故，當 $-2<x<\frac{11}{3}$ 時，二次式 $3x^2-5x-22<0$；

當 $x<-2$ 或 $x>\frac{11}{3}$ 時，二次式 $3x^2-5x-22>0$．

(g) $2x^2+13$.

解. 今 $\triangle=0-4\times2\times13=-104<0$，$A=2>0$.

故，x為任何實數值二次式 $2x^2+13$ 俱為正.

(h) $9x^2-6x+1$.

解. 今 $\triangle=36-4\times9=0$，$A=9>0$.

故，x為任何實數值，二次式 $9x^2-6x+1$ 俱為正.

(i) $5x^2-x-1$.

解. 今 $\triangle=1+4\times5=21>0$，$A=5>0$，且其根為

$\dfrac{-\sqrt{21}}{10}$ 與 $\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$.

故，當 $\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}<x<\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$時，則二次式$5x^2-x-1>0$；

當 $x<\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}$或 $x>\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$時，則二次式

$x^2-x-1>0$.

(j) $7x^2-6x-1$.

解. 今 $\triangle=36+4\times7=64>0$，$A=7>0$. 且其根為 1 與 $-\frac{1}{7}$.

故，當 $-\frac{1}{7}<x<1$ 時，則二次式$7x^2-6x-1<0$；

當 $x<-\frac{1}{7}$ 或 $x>1$ 時，則二次式 $7x^2-6x-1>0$.

(k) $3x^2-5$.

解. 今 $\triangle=0+4\times3\times5=60>0$，$A=3>0$，且其根為

$-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$與 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

故，當$-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 時，二次式 $3x^2-5<0$；

當 $x<-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$或 $x>\dfrac{\sqrt{15}}{3}$時，二次式$3x^2-5>0$.

(l) $2x^2+x-8$.

解. 今 $\triangle=1+4\times2\times8=65>0$，$A=2>0$，且其根為

$\dfrac{-1-\sqrt{65}}{4}$與 $\dfrac{-1+\sqrt{65}}{4}$.

故，當 $\dfrac{-1-\sqrt{65}}{4}<x<\dfrac{-1+\sqrt{65}}{4}$時，則二次式

$2x^2+x-8<0$；

當 $x<\dfrac{-1-\sqrt{65}}{4}$或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{66}}{4}$ 時，則二次式

$2x^2+x-8>0$.

(m) $2x^2+x+8$.

解. 令 $\triangle=1-4\times2\times8=-63$, $A=2>0$.

故, x 爲所有實數值時, 二次式 $2x^2+x+8$ 均 >0.

(n) $6x^2-x-5$.

解. 令 $\triangle=1+4\times6\times5=121>0$, $A=6>0$, 且

其根爲 $-\frac{5}{6}$ 與 1.

故, 當 $-\frac{5}{6}<x<1$ 時, 則二次式 $6x^2-x-5<0$.

當 $x<-\frac{5}{6}$ 或 $x>1$ 時, 則二次式 $6x^2-x-5>0$.

(o) $10x^2+60x+90$.

解. 令 $\triangle=3600-4\times10\times90=3600-3600=0$,

$A=10>0$.

故, x 爲所有一切之實數值, 二次式 $10x^2+60x+90$ 俱爲正.

(p) $7x^2+7x+\frac{7}{4}$.

解. 令 $\triangle=49-4\times7\times\frac{7}{4}=0$, $A=7>0$.

故, x 爲任何實數值, 二次式 $7x^2+7x+\frac{7}{4}$ 俱爲正.

3. 當上題諸二次式之平方根, 俱爲實數時, 試求其變數所有一總之實數值.

(a) $\sqrt{2x^2-6x+4}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=36-4\times2\times4=4>0$. $A=2>0$, 且其根爲 1 與 2.

當 $1<x<2$ 時, 則二次式 $2x^2-6x+4<0$;

當 $x<1$ 或 $x>2$, 則二次式 $2x^2-6x+4>0$.

由題設可知此已知之方程式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq1$ 或 $x\geqq2$.

(b) $\sqrt{x^2-9x-10}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=81+4\times10=121>0$, $A=1>0$, 且其根爲 -1 與 10,

當 $-1<x<10$ 時, 則 $x^2-9x-10<0$;

當 $x<-1$ 或 $x>10$ 時, 則 $x^2-9x-10>0$,

由題設可知此已知之方程式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq-1$ 或 $x\geqq10$.

(c) $\sqrt{1-x-x^2}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=1+4=5>0$，$A=-1$，且其根為 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 與 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

當 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，則 $1-x-x^2>0$；

當 $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，則 $1-x-x^2<0$.

由題設可知此已知方程式之值必為正或零.

故得 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(d) $\sqrt{4x^2-4x+1}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=16-4\times4=0$，$A=4>0$.

x為所有之一切實數值二次式 $4x^2-4x+1$ 均 >0.

故 x 為任何實數，此二次式平方根之值俱為實數.

(e) $\sqrt{5x^2+10x+5}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=100-4\times5\times5=0$，$A=5>0$.

x 為任何實數值，二次式 $5x^2+10x+5$ 均 >0.

故 x 為任何實數，此二次式平方根之值俱為實數.

(f) $\sqrt{3x^2-5x-22}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=25+4\times3\times22=289>0$，$A=3>0$，且其根為 -2 與 $\dfrac{11}{3}$

當 $-2<x<\dfrac{11}{3}$ 時，則 $3x^2-5x-22<0$；

當 $x<-2$ 或 $x>\dfrac{11}{3}$ 時，則 $3x^2-5x-22>0$.

由題設可知，此已知二次式之值必為正或零，

故得 $x\leqq-2$，或 $x\geqq\dfrac{11}{3}$.

(g) $\sqrt{2x^2+13}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\Delta=0-4\times2\times13=-104<0$, $A=2>0$;

x 爲任何實數值，二次式 $2x^2+13$ 均 >0，故此式之平方根恆爲實數.

(h) $\sqrt{9x^2-6x+1}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\Delta=36-4\times9=0$，$A=9$.

x 爲任何實數，二次式 $9x^2-6x+1$ 均 >0. 故此式之平方根恆爲實數.

(i) $\sqrt{5x^2-x-1}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\Delta=1+4\times5=21>0$，$A=5>0$，且其根爲

$\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}$ 與 $\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$.

當 $\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}<x<\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$ 時，則 $5x^2-x-1<0$;

當 $x<\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}$ 或 $x>\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$ 時，則 $5x^2-x-1>0$.

由題設可知，此已知二次式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq\dfrac{1-\sqrt{21}}{10}$，或 $x\geqq\dfrac{1+\sqrt{21}}{10}$.

(j) $\sqrt{7x^2-6x-1}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\Delta=36+4\times7=64$，$A=7$，且其根爲 $-\frac{1}{7}$ 與 1.

當 $-\frac{1}{7}<x<1$ 時，則 $7x^2-6x-1<0$;

當 $x<-\frac{1}{7}$ 或 $x>1$ 時，則 $7x^2-6x-1>0$.

由題設可知，此已知二次式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq-\frac{1}{7}$ 或 $x\geqq1$.

(k) $\sqrt{3x^2-5}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\Delta=0+4\times3\times5=60$，$A=3$，且其根爲 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 與 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

當 $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 時，則 $3x^2-5<0$;

當 $x<-\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{15}}{3}$ 時，則 $3x^2-5>0$

由題設可知，此已知二次式之值必爲正或零，

故得 $x\leqq-\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $x\geqq\frac{\sqrt{15}}{3}$.

(l) $\sqrt{2x^2+x-8}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=1+4\times2\times8=65$，$A=2$，且其根爲

$\frac{-1-\sqrt{65}}{4}$ 與 $\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$，

當 $\frac{-1-\sqrt{65}}{4}<x<\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$ 時，則 $2x^2+x-8<0$；

當 $x<\frac{-1-\sqrt{65}}{4}$ 或 $x>\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$ 時，則 $2x^2+x-8>0$.

由題設可知，此二次式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq\frac{-1-\sqrt{65}}{4}$ 或 $x\geqq\frac{-1+\sqrt{65}}{4}$.

(m) $\sqrt{2x^2+x+8}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=1-4\times2\times8=-63$，$A=2$，

x 爲任何實數值，二次式 $2x^2+x+8$ 皆 >0. 故此式之平方根恆爲實數.

(n) $\sqrt{6x^2-x-5}$;

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=1+4\times6\times5=121$. $A=6$，且其根爲 $-\frac{5}{6}$ 與 1.

當 $-\frac{5}{6}<x<1$ 時，則 $6x^2-x-5<0$；

當 $x<-\frac{5}{6}$ 或 $x>1$ 時，則 $6x^2-x-5>0$.

由題設可知，此二次式之值必爲正或零.

故得 $x\leqq-\frac{5}{6}$ 或 $x\geqq1$.

(o) $\sqrt{10x^2+60x+90}$.

解. 討論根號內之二次式.

$\triangle=3600-4\times10\times90=0$，$A=10$.

x 為所有之一切實數值．二次式 $10x^2+60x+90$ 皆 >0．故此式之平方根恆為實數．

(p) $\sqrt{7x^2+7x+\frac{7}{4}}$．

解． 討論根號內之二次式．

$\triangle=49-4\times7\times\frac{7}{4}=0$，$A=7$．

x 為任何實數，二次式 $7x^2+7x+\frac{7}{4}$ 皆 >0，故此式之平方根恆為實數．

4． 設問題1第4題所列諸方程式之根：(a)俱為實數且不相等；(b)俱為虛數；試求k所有一切之實數值．

(a) $kx^2-3x-1=0$．

解． $\triangle=9+4k$．

由第 3 頁定理 II．

(A) 若 $9+4k>0$，或$k>-\frac{9}{4}$，則二根俱為實數而不相等．

(B) 若 $9+4k<0$ 或 $k<-\frac{9}{4}$，則二根俱為虛數．

(b) $x^2-kx+9=0$．

解． $\triangle=k^2-4\times9=k^2-36$．

由第 3 頁定理 II．

(A) 若 $k^2-36>0$，則二根俱為實數而不相等．

(B) 若 $k^2-36<0$，則二根俱為虛數．

應用第 11 頁定理 III 於二次式 k^2-36．

因 $\triangle=0+4\times36=144$，$A=1$，且其根為 -6 與 6，故當 $-6<k<6$ 時 $k^2-36<0$．

當 $k<-6$ 或 $k>6$，則 $k^2-36>0$．

故 若 $k<-6$ 或 $k>6$，則原式之二根俱為實數而不相等．

又 若$-6<k<6$，則原式之二根俱為虛數．

(c) $2kx+3kx+12=0$．

解． $\triangle=9k^2-4\times2\times12=9k^2-96k$．

由定理 II．

(A) 若 $9k^2-96k>0$，則二根俱為實數，而不相等．

(B) 若 $9k^2-96k<0$，則二根俱為虛數．

應用定理 III 於二次式 $9k^2-96k$．

因 $\triangle=9216$，$A=9$，且其根為 0 與 $\frac{96}{9}$，

當 $0<k<\frac{96}{9}$時，則二次式 $9k^2-96k<0$；

當 $k<0$，或 $k>\frac{96}{9}$時，則二次式 $9k^2-96k>0$.

故 若 $k<0$，或 $k>\frac{96}{9}$，則此二次式之根為實數而不相等.

又 若 $0<k<\frac{96}{9}$，則其根均為虛數.

(d) $2x^2+kx-1=0$.

解. $\triangle=k^2+4\times2=k^2+8$.

由定理 II

(A) 若 $k^2+8>0$，則二根均為實數而不相等.

(B) 若 $k^2+8<0$，則二根均為虛數.

應用定理 III 於二次式 k^2+8.

因$\triangle=0-4\times8=-32$. $A=1$

以任何實數代 k 結果 $k^2+8>0$.

故 k 為任何實數值，原式之二根均為實數而不相等. 且 k 無值能使原式發生虛根.

(e) $5x^2-3x+5k^2=0$.

解. $\triangle=9-4\times5\times5k^2=9-100k^2$.

由定理 II

(A) 若 $9-100k^2>0$，則二根均為實數而不相等.

(B) 若 $9-100k^2<0$，則二根均為虛數.

應用定理 III 於二次式 $9-100k^2$，

因 $\triangle=0+4\times9\times100=3600$，$A=-100$.

且其根為 $-\frac{3}{10}$與$\frac{3}{10}$.

當 $-\frac{3}{10}<k<\frac{3}{10}$時，則二次式 $9-100k^2>0$；

當 $k<-\frac{3}{10}$ 或 $k>\frac{3}{10}$，則二次式 $9-100k^2<0$.

故

若$-\frac{3}{10}<k<\frac{3}{10}$則原式之二根均為實數而不相等.

又　若 $k<-\frac{3}{10}$ 或 $k>\frac{3}{10}$，則原式之根均虛數．

(f)　$x^2+kx+k^2+2=0$．

解．$\triangle=k^2-4(k^2+2)=-3k^2-8$．

由定理 II

(A)　若 $-3k^2-8>0$，　則二根可為實數而不相等．

(B)　若 $-3k^2-8<0$，　則二根均為虛數．

應用定理 III 於二次式 $-3k^2-8$．

因　$\triangle=0-4\times3\times8=-96$，$A=-3$．

以任何實數代 k，而結果 $-3k^2-8<0$．

故 k 為任何實數，原式之二根都是虛數．且 k 無值能使原式發生不相等之實根．

(g)　$x^2-2kx-k-\frac{1}{4}=0$．

解　$\triangle=4k^2+4(k+\frac{1}{4})=4k^2+4k+1$．

由定理 II

(A)　若 $4k^2+4k+1>0$，則二根俱為實數而不相等．

(B)　若 $4k^2+4k+1<0$，則二根俱為虛數．

應用定理 III 於二次式 $4k^2+4k+1$．

因　$\triangle=16-4\times4=0$，$A=4$．

k 為所有一切之實數值，二次式 $4k^2+4k+1$ 皆 >0．

故 k 為任何實數值，已知方程式之二根都是實數而不相等．且 k 無值能使原式發生虛根．

(h)　$x^2+2bx+2b^2+3b-4=0$．

解．$\triangle=4b^2-4(2b^2+3b-4)=-4b^2-12b+16$．

由定理 II

(A)　若 $-4b^2-12b+16>0$，則二根均為實數而不相等．

(B)　若 $-4b^2-12b+16<0$，則二根均為虛數．

應用定理 III 於二次式 $-4b^2-12b+16$．

因　$\triangle=144+4\times16=400$，$A=-4$．且其根為 -4 與 1．

當　$-4<b<1$ 時，原式之根為實數而不相等．

當　$b<-4$，或 $b>1$，原式之根為虛數．

(i)　$(m+2)x^2-2mx+1=0$．

解　$\Delta=4m^2-4(m+2)=4m^2-4m-8$.

由定理 II，

(A)　若 $4m^2-4m-8>0$，則根爲實數而不相等.

(B)　若 $4m^2-4m-8<0$，則根爲虛數.

應用定理 III 於二次式 $4m^2-4m-8$，

因　$\Delta=16+4\times4\times8=144$．$A=4$．且其根爲 -1 與 2.

當　$-1<m<2$ 時，則二次式 $4m^2-4m-8<0$；

當　$x<-1$ 或 $x>2$ 時，則二次式 $4m^2-4m-8>0$.

故，

若　$m<-1$ 或 $m>2$，則原式之根爲實數．而不相等.

又　若 $-1<m<2$，則原式之根爲虛數.

(j)　$(m^2+4)x^2+3x+2=0$.

解　$\Delta=9-4\times2(m^2+4)=-8m^2-23$.

由定理 II.

(A)　若 $-8m^2-23>0$，則根爲實數而不相等.

(B)　若 $-8m^2-23<0$，則根爲虛數，

應用定理 III 於二次式 $-8m^2-23$，

因　$\Delta=0-4\times8\times23=-736$.　$A=-8$.

m 爲任何實數值，二次式 $-8m^2-23$ 均 <0．故已知二次方程式之根恆爲虛數，因其判別式恆爲負故也.

(k)　$x^2+(l-3)x-1=0$.

解．$\Delta=(l-3)^2+4=l^2-6l+13$.

由定理 II

(A)　$l^2-6l+13>0$，則根爲實數而不相等.

(B)　若 $l^2-6l+13<0$，則根爲虛數.

應用定理 III 於二次式於 $l^2-6l+13$.

因　$\Delta=36-4\times13=-16$，$A=1$.

l 爲任何實數值，二次式 $l^2-6l+13$ 均 >0．故已知方程式之根恆爲實數而不相等，且 l 無值能使原式發生虛根.

(l)　$(c^2-8)y^2-(2c-1)y+\frac{1}{2}=0$.

解．$\Delta=(2c-1)^2-4\times\frac{1}{2}(c^2-8)=2c^2-4c+17$.

由定理 II

(A) 若 $2c^2-4c+17>0$，則二根均為實數而不相等.

(B) 若 $2c^2-4c+17<0$，則二根均為虛數.

應用定理 III 於二次式 $2c^2-4c+17$

因 $\triangle=16-4\times2\times17=-120$，$A=2$.

c 為任何實數值，二次式 $2c^2-4c+17$ 均 >0.

故已知方程式之根恆為實數而不相等. 且 c 無値能使原式發生虛根.

(m) $az^2+2(a+3)z+16=0$.

解. $\triangle=4(a+3)^2-4a\times16=4a^2-40a+36$.

由定理 II.

(A) $4a^2-40a+36>0$，則二根均為實數而不相等.

(B) 若 $4a^2-40a+36<0$，則二根均為虛數.

應用定理 III 於二次式 $4a^2-40a+36$.

因 $\triangle=1600-4\times4\times36=1024$，$A=4$. 且其根為 1 與 9.

當 $1<a<9$ 時，則二次式 $4a^2-40a+36<0$;

當 $x<1$，或 $x>9$ 時，則二次式 $4a^2-40a+36>0$.

故

若 $a<1$ 或 $a>9$，則原式之根為實數而不相等.

又 若 $1<a<9$，則原式之根為虛數.

5. 在第 9 頁問題 6 內求不定常數之所有實値，若其公解答為 (a) 實數而不相等，(b) 虛數.

(a) $x+2y=k$ ……………………………(1)

$x^2+y^2=5$ ……………………………(2)

解. 由 (1) 式解得

$x=k-2y$ ……………………………(3)

代入 (2) 式且書為範式得:

$5y^2-4ky+k^2-5=0$. ……………………(4)

由 (3) 式可知 x 根為不相等實數或虛數，須依 y 根為不相等之實數或虛數而定，即 (1) 與 (2) 之二組根，為不相等實數或虛數，須依 (4) 之根為不相等實數或虛數而定.

求 (4) 之判別式，並棄去正因數 4，則得

$-k^2+25$. ……………………………(5)

由定理 II

若 $-k^2+25>0$，則（4）式之根爲實數而不相等．

若 $-k^2+25<0$，則（4）式之根爲虛數．

應用定理 III 於（5）式

$\triangle=0+4\times25=100$，$A=-1$，且其根爲 -5 與 5．

當 $-5<k<5$ 時，則二次式 $-k^2+25>0$；

當 $k<-5$ 或 $k>5$ 時，則二次式 $-k^2+25<0$．

故若 $-5<k<5$；（4）式之根爲實數而不相等；又若 $k<-5$ 或 $k>5$，則（4）式之根爲虛數，

於是（1），（2）之二組根爲不相等實數，若 $-5<k<5$；爲虛數，若 $k<-5$ 或 $k>5$．

(b) $y=mx-1$ ··························(1)

$x^2=4y$ ··························(2)

解．以（1）式 y 之值代入（2）式且書爲簡式得

$x^2-4mx+4=0$ ··························(3)

求（3）式之判別式並棄去正因數 16，則得

m^2-1 ··························(4)

由定理 II，

若 $m^2-1>0$，則（3）之根爲實數而不相等．

若 $m^2-1<0$，則（3）之根爲虛數．

應用定理 III 於二次式（4）．

$\triangle=0+4=4$，$A=1$，且其根爲 -1 與 1．

當 $-1<m<1$ 時，則二次式 $m^2-1<0$；

當 $m<-1$ 或 $m>1$ 時，則二次式 $m^2-1>0$，

故，若 $m<-1$ 或 $m>1$；則（3）之根爲實數而不相等．

若 $-1<m<1$，則（3）之根爲虛數．

由（1）式 y 根爲不相等實數或虛須依 x 根爲不相等實數或虛數而定．即（1），（2）之二組根爲不相等實數或虛數．須依（3）之根爲不相等實數或虛數而定．

故若 $m<-1$ 或 $m>1$ 時，則（1），（2）之二組根爲實數而不相等．

若 $-1<m<1$，則（1），（2）之二組根爲虛數．

(c) [illegible] $3y-$ [illegible] ……………………(1)

x^2+2x [illegible] $3y$ ……………………(2)

解. 由 (1) 式, 將所解得之 y 值代入 (2) 式且書爲範式得

$x^2+b=0$ ……………………(3)

求 (3) 之判別式得

$-4b$.

由定理 II,

若 $-4b>0$ 或 $b<0$ 時, 則 (3) 之根爲不相等實數.

若 $-4b<0$ 或 $b>0$ 時, 則 (3) 之根爲虛數.

故

若 $b<0$, 則 (1) 及 (2) 之二組根爲不相等實數.

若 $b>0$, 則爲虛數.

(d) $y=mx+10$ ……………………(1)

$x^2+y^2=10$ ……………………(2)

解. 將 (1) 式代入 (2) 式且書爲範式如:

$(1+m^2)x^2+2mx+90$. ……………………(3)

求 (3) 之判別式並棄去正因數 40, 則得

m^2-9 ……………………(4)

應用定理 III 於 (4) 式,

$\triangle=0+4\times9=36$, 且其根爲 -3 與 3.

當 $-3<m<3$ 時, 則二次式 $m^2-9<0$;

當 $m<-3$, 或 $m>3$, 則二次式 $m^2-9>0$.

故若 $m<-3$ 或 $m>3$, 則 (3) 之根爲實數而不相等.

若 $-3<m<3$, 則 (3) 之根爲虛數.

於是 (1), (2) 之二組根爲不相等之實數, 若 $m<-3$ 或 $m>3$; 爲虛數, 或 $-3<m<3$.

(e) $lx+y-2=0$ ……………………(1)

$x^2-8y=0$ ……………………(2)

解. 由 (1) 式將 y 之值代入 (2) 式且書爲範式如:

$x^2+8lx-16=0$ ……………………(3)

求 (3) 之判別式, 並棄去正因數 64, 則得

l^2+1 ……………………(4)

因　$\Delta=0-4\times1=-4$，$A=1$，故 l 為任何實數，均使 (3) 式得不相等二實根.

於是 (1)，(2) 之二組根恆為不相等實數，當 l 為任何實數時，且 l 無值能使 (1)，(2) 之二組根為虛數.

(f)　$x+4y=c$ ………………………………(1)

$x^2+2y^2=9$ ………………………………(2)

解.　由 (1) 式解 x 得

$x=c-4y$ ………………………………(3)

代入 (2) 式且排列為範式得

$18y^2-8cy+c^2-9=0$. ………………………………(4)

求 (4) 之判別式並乘去正因數 8. 則得

$-c^2+81$ ………………………………(5)

應用定理 III 於二次式 (5)，

因　$\Delta=0+4\times81=324$，$A=-1$，且其根為 -9 與 9，

故

當　$-9<c<9$ 時，則二次式 $-c^2+81>0$；

當　$c<-9$ 或 $c>9$，則二次式 $-c^2+81<0$.

所以若 $-9<c<9$；(4) 之根為實數而不相等，又若 $c<-9$ 或 >9，為虛數.

於是若 $-9<c<9$；(1)，(2) 之二組根為實數而不相等，又若 <-9 或 $c>9$，為虛數.

(g)　$x^2+y^2-x-2y=0$ ………………………………(1)

$x+2y=c$ ………………………………(2)

解.　由 (2) 式解得

$x=c-2y$ ………………………………(3)

將 (3) 式 x 之值代入 (2) 式且排列為範式得

$5y^2+4cy+c^2-c=0$ ………………………………(4)

求 (4) 之判別式並乘去正因數 4. 則得

$-c^2+5c$ ………………………………(4)

應用定理 III 於 (4) 式.

$\Delta=25$，$A=-1$，且其根為 0 與 5，

當　$0<c<5$ 時，則二次式 $-c^2+5c>0$；

當 $c<0$ 或 $c>0$ 時，則二次式 $-c^2+5c<0$.

所以 (4) 之根為實數而不相等；若 $0<c<5$ 為虛數若 $c<0$ 或 $c>5$.

於是若 $0<c<5$；(1)，(2) 之二組根為實數而不相等，又若 $c<0$，或 $c>5$，為虛數.

(h) $x^2+4y^2-8x=0$ ……………………… (1)

$mx-y-2m=0$ ……………………… (2)

解. 解 (2) 式以求 y 得

$y=m(x-2)$ ……………………… (3)

代入 (1) 式且書為範式得

$(1+4m^2)x^2-8(1+2m^2)x+16m^2=0$ …… (4)

求 (4) 之判別式並棄去正因數 64. 則得

$3m^2+1$ ……………………… (5)

應用定理 III 於 (5) 式.

$\triangle=0-4\times3=-12$，$A=3$.

所以 m 不論是什麼實數. 結果 (4) 之根都是不相等之實數；於是(1)，(2) 之二組根恆為實數而不相等.

(i) $x^2+y^2-k=0$ ……………………… (1)

$3x-4y=25$ ……………………… (2)

解. 由 (2) 式解得

$$y=\frac{3x-25}{4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

代入 (1) 式且排列為範式得

$25x^2-150x+625-16k=0$ ……… (4)

求 (4) 之判別式，並棄去正因數 1600，則得

$k-25$ ……………………… (5)

故 (4) 之根為實數而不相等，若 $k-25>0$ 或 $k>25$；為虛數若 $k-25<0$ 則 $k<25$.

於是 (1)，(2) 之二組根為實數而不相等；若 $k=25$；為虛數若 $k<25$.

(j) $x^2-y^2+2x-y=3$ ……………… (1)

$4x+y=c$ ……………………… (2)

解. 由 (2) 式解 y 得

$y=c-4x$ ……………………(3)

代入 (1) 式且書爲範式得

$15x^2-(6+8c)x+c^2+c+3=0$ ……………(4)

求 (4) 之判別式並棄去正因數 4，則得

$c^2+9c-36$ ……………………(5)

應用定理 III 於二次式 (5)，

$\triangle=81+4\times36=225$，$A=1$，且其根爲 -12 與 3.

當 $-12<c<3$ 時，則二次式 $c^2+9c-36<0$；

當 $c<-12$ 或 $c>3$ 時，則二次式 $c^2+9c-36>0$.

故若 $c<-12$ 或 $c>3$，則 (4) 之根爲實數而不相等；若 $-12<c<3$，則 (4) 之根爲虛數.

於是若 $c<-12$ 或 $c>3$，則 (1)，(2) 之二組根爲實數而不相等. 若 $-12<c<3$，則 (1)，(2) 之二組根爲虛數.

(k) $2xy-3x-y=0$ ……………………(1)

$y+3x+k=0$ ……………………(2)

解. 由 (2) 式解得

$y=-3x-k$ ……………………(3)

代入 (1) 式且書爲範式得

$6x^2+2kx-k=0$ ……………………(4)

求 (4) 之判別式，並棄去正因數 4，則得

k^2+6k ……………………(5)

應用定理 III 於二次式 (5)，

$\triangle=36$，$A=1$，且其根爲 -6 與 0，

當 $-6<k<0$ 時，則二次式 $k^2+6k<0$；

當 $k<-6$ 或 $k>0$ 時，則二次式 $k^2+6k>0$.

故若 $k<-6$ 或 $k>0$，則 (4) 之根爲實數而不相等；若 $-6<k<0$，則 (4) 之根爲虛數.

於是若 $k<-6$ 或 $k>6$，則 (1)，(2) 之二組根爲實數而不相等. 若 $-6<k<0$，則爲虛數.

(l) $x^2+4y^2-8y=0$ ……………………(1)

$x=c$ ……………………(2)

解. 將 (2) 式 x 之值代入 (1) 式且書為範式則得

$$4y^2-8y+c^2=0 \cdots\cdots (3)$$

求 (3) 之判別式並棄去正因數 16 則得

$$4-c^2 \cdots\cdots (4)$$

應用定理 III 於二次式 (4),

$\triangle=0+4\times4=16$, $A=-1$, 且其根為 -2 與 2.

當 $-2<c<2$ 時, 則二次式 $4-c^2>0$;

當 $c<-2$ 或 $c>2$, 則二次式 $4-c^2<0$.

故若 $-2<c<2$, 則 (3) 之根為實數而不相等, 若 $c<-2$ 或 $c>2$, 則 (3) 之根為虛數.

於是若 $-2<c<2$, 則 (1), (2) 之二組根為實數而不相等. 若 $c<-2$ 或 $c>2$ 則 (1), (2) 之二組根為虛數.

(m) $x^2+4y^2-8y=0 \cdots\cdots (1)$

$y=b \cdots\cdots (2)$

解. 以 (2) 式代入 (1) 式且寫成範式為

$$x^2+4b^2-8b=0 \cdots\cdots (3)$$

求 (3) 之判別式, 並棄去正因數 16, 則得

$$-b^2+2b \cdots\cdots (4)$$

應用定理 III 於二次式 (4),

$\triangle=4$, $A=-3$, 且其根為 0 與 2,

當 $0<b<2$ 時, 則二次式 $-b^2+2b>0$;

當 $b<0$ 或 $b>2$ 時, 則二次式 $-b^2+2b<0$.

故若 $0<b<2$, 則 (3) 之根為實數而不相等. 若 $b<0$ 或 $b>2$ 則 (3) 之根為虛數.

於是若 $0<b<2$, 則 (1), (2) 之二組根為實數而不相等, 若 $b<0$ 或 $b>2$, 則 (1), (2) 之二組根為虛數.

(n) $2x^2+3y^2=35 \cdots\cdots (1)$

$4x+9y=k \cdots\cdots (2)$

解. 由 (2) 式解得

$$x=\frac{k-9y}{4} \cdots\cdots (3)$$

代入 (1) 式且書為範式得

$$105y^2-18ky+k^2-280=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

求 (4) 之判別式並棄去正因數 96 則得

$$-k^2+1226 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

應用定理 III 於二次式 (5)，

$\Delta=0+4\times1226=4900$，$A=-1$，且其根爲 -35 與 35.

當 $-35<k<35$ 時，則二次式 $-k^2+1225>0$；

當 $k<-35$ 或 $k>35$，則二次式 $-k^2+1225<0$.

故若 $-35<k<35$，則 (4) 之根爲實數而不相等若 $k<-35$ 或 $k>35$，則 (4) 之根爲虛數.

於是若 $-35<k<35$，則 (1)，(2) 之二組根爲實數而不相等

若 $k<-35$ 或 $k>35$，則 (1)，(2) 之二組根爲虛數.

(o) $x^2+xy+2x+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$y=-2x+b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解. 以 (2) 式 y 之值代入 (1) 式且化爲簡式得

$$x^2-bx-b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

求 (3) 之判別式得

$$b^2+4b \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

應用定理 III 於二次式 (4)，

因 $\Delta=16$，$A=1$，且其根爲 -4 與 0，故

當 $-4<b<0$ 時，則二次式 $b^2+4b<0$；

當 $b<-4$ 或 $b>0$ 時，則二次式 $b^2+4b>0$.

故若 $b<-4$ 或 $b>0$，則 (3) 之根爲實數而不相等；

若 $-4<b<0$，則 (3) 之根爲虛數.

於是若 $b<-4$ 或 $b>0$，則 (1)，(2) 之二組根爲實數而不相等；

若 $-4<b<0$，則 (1)，(2) 之二組根爲虛數.

6. 當 x 爲任何值時試定下列三次式之值之符號.

解. 此三次式之根依大小之順序排列之爲 -1，2，4.

於是

當 $x<-1$ 時，則因三式俱爲負，$\therefore$ 三次式<0；

當 $-1<x<2$ 時，則 $x+1>0$，$(x-2)<0$，$x-4<0$，

$\therefore$ 三次式>0；

當 $2<x<4$ 時，則 $(x+1)>0$，$(x-2)>0$，$(x-4)<0$，

三次式<0；

當 $x>4$ 時，則三因式俱爲正， $\therefore$ 三次式>0.

7．當變數爲任何値時，試定下列諸三次式之値之符號：

(a) $(x+1)(2x^2-4x+7)$.

解. 當 $x<-1$時，則$(x+1)<0$，$(2x^2-4x+7)>0$，$\therefore$原式<0.

應用定理 III 於二次式$2x^2-4x+7$.

因$\Delta=16-4\times2\times7=-40$，$A=2$.

故 x 爲任何實數値二次式 $2x^2-4x+7$ 均 >0，

於是當 $x>-1$ 時，則 $(x+1)>0$，$(2x^2-4x+7)>0$，

$\therefore$ 原式>0.

(b) $(x^2-2x-3)(x^3-4x^2)$.

解. 分析因式得

$x^2(x+1)(x-3)(x-4)$.

因式 x^2恆爲正，且此式之他實根依大小之順序排列爲$-1,3,4$

故

當 $x<-1$ 時，則$(x+1)<0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$，

$\therefore$ 原式<0；

當 $-1<x<3$ 時，則 $(x+1)>0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$，

$\therefore$ 原式>0；

當 $3<x<4$ 時，則 $(x+1)>0$，$(x-3)>0$，$(x-4)<0$，

$\therefore$ 原式<0；

當 $x>4$ 時，則各因式俱爲正， $\therefore$ 原式>0.

(c) $(3x+8)(x^2-4x+4)(x^3-1)$

解. 分析因式得

$(x-2)^2(3x+8)(x-1)(x^2+x+1)$.

因式 $(x-2)^2$ 恆爲正，且此式之其他實根依順序之大小排列爲

$-\frac{8}{3}$，1.故

當 $x<-\frac{8}{3}$時，則 $(3x+8)<0$，$(x-1)<0$，$(x^2+x+1)>0$，

原式>0；

當 $-\frac{8}{3}<x<1$時，則 $(3x+8)>0$，$(x-1)<0$，$(x^2+x+1)>0$，

原式<0.

應用定理 III 於二次式 x^2+x+1，

因 $\Delta=1-4=-3$，$A=1$，

故 x 爲任何實數值，二次式 x^2+x+1 均 >0.

於是當 $x>1$ 時，則各因式俱爲正． $\therefore$ 原式 >0.

(d) $(2x^2+3)(x^2-4)(x^4-1)$.

解．分析因式得：$(2x^2+3)(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

因式 (x^2+1) 與 $(2x^2+3)$ 恆爲正，且原式之他根，依大小順序排列爲 $-2, -1, 1, 2$. 故

當 $x<-2$ 時，則 $(x+2)<0$，$(x+1)<0$，$(x-1)<0$，及 $(x-2)<0$， $\therefore$ 原式 >0；

當 $-2<x<-1$ 時，則 $(x+2)>0$，$(x+1)<0$，$(x-1)<0$，$(x-2)<0$， $\therefore$ 原式 <0；

當 $-1<x<1$，$x+2>0$，$x+1>0$，$x-1<0$，$x-2<0$，$\therefore$ 原式 >0；

當 $1<x<2$ 時，則 $(x+2)>0$，$(x+1)>0$，$(x-1)>0$，$(x-2)<0$， $\therefore$ 原式 <0；

當 $x>2$ 時，則各因式俱爲正， $\therefore$ 原式 >0.

(e) $(2x+3)(x-1)(x+2)(x-3)$.

解 此式之根依大小之順序排列之爲 -2，$-\frac{3}{2}$，1，3. 故

當 $x<-2$ 時，則各因式俱爲負， $\therefore$ 原式 >0；

當 $-2<x<-\frac{3}{2}$ 時，則 $(x+2)>0$，$(2x+3)<0$，$(x-1)<0$，$(x-3)<0$， $\therefore$ 原式 <0；

當 $-\frac{3}{2}<x<1$ 時，則 $(x+2)>0$，$(2x+3)>0$，$(x-1)<0$，$(x-3)<0$， $\therefore$ 原式 >0；

當 $1<x<3$ 時，則 $(x+2)>0$，$(2x+3)>0$，$(x-1)>0$，$(x-3)<0$， $\therefore$ 原式 <0；

當 $x>3$ 時，則各因式俱爲正， $\therefore$ 原式 >0.

(f) $(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$.

解．分析因式

$(x+5)(x+4)(x+3)(x-3)(x-4)(x-5)$

此式之根依大小順序排列之爲 -5，-4，-3，3，4，5. 故

當 $x<-5$ 時，則各因式俱爲負， $\therefore$ 原式 >0；

當 $-5<x<-4$ 時，則 $(x+5)>0$，$(x+4)<0$，$(x+3)<0$，

$(x-3)<0$，$(x-4)<0$，$(x-5)<0$，　∴ 原式<0；

當　$-4<x<-3$ 時，則 $(x+5)>0$，$x+4>0$，$x+3<0$，
$(x-3)<0$，$(x-4)<0$，$(x-5)<0$，　∴ 原式>0；

當　$-3<x<3$ 時，則 $(x+5)>0$，$(x+4)>0$，$(x+3)>0$，
$(x-3)<0$，$(x-4)<0$，$(x-5)<0$，　∴ 原式<0；

當　$3<x<4$ 時，則 $(x+5)>0$，$(x+4)>0$，$(x+3)>0$，
$(x-3)>0$，$(x-4)<0$，$(x-5)<0$，　∴ 原式>0；

當　$4<x<5$ 時，則 $(x+5)>0$，$(x+4)>0$，$(x+3)>0$，
$(x-3)>0$，$(x-4)>0$，$(x-5)<0$，　∴ 原式<0；

當　$x>5$ 時，則各因式俱爲正；　∴ 原式>0.

(g)　$(3x^2-12)(2-x)(3-2x)(5x+4)$.

解．分析因式且改變 $(-2-x)$ 與 $(3-2x)$ 之符號得

$3(x-2)^2(x+2)(5x+4)(2x-3)$.

因式 $(x-2)^2$ 恆爲正，且此式之其他根依大小之順序排列之爲
-2，$-\frac{4}{5}$，$\frac{3}{2}$. 故

當　$x<-2$ 時，則 $(x+2)<0$，$(5x+4)<0$，$(2x-3)<0$，
∴ 原式<0；

當　$-2<x<-\frac{4}{5}$ 時，則 $(x+2)>0$，$(5x+4)<0$，
$(2x-3)<0$，　∴ 原式>0；

當　$-\frac{4}{5}<x<\frac{3}{2}$ 時，$(x+2)>0$，$(5x+4)>0$，$(2x-3)<0$，
∴ 原式<0；

當　$x>\frac{3}{2}$ 時，則各因式俱爲正．　∴ 原式>0.

(h)　$(x-1)^2(3+2x)(4-5x)(6-x)^3$.

解．此式可書爲以下之形式．

$(x-1)^2(6-x)^2(3+2x)(4-5x)(6-x)$.

因式 $(x-1)^2$ 及 $(6-x)^2$ 恆爲正，且此式之他根依大小順序排列之爲 $-\frac{3}{2}$，$\frac{4}{5}$，6. 故

當　$x<-\frac{3}{2}$ 時，則 $(3+2x)<0$，$(4-5x)>0$，$(6-x)>0$，
∴ 原式<0；

當　$-\frac{3}{2}<x<\frac{4}{5}$ 時，則 $(3+2x)>0$，$(4-5x)>0$，$(6-x)>0$，
∴ 原式>0；

當　$\frac{4}{5}<x<6$ 時，則 $(3+2x)>0$，$(4-5x)<0$，$(6-x)>0$.

原式<0;

當 $x>6$ 時，則 $(3+2x)>0$，$(4-5x)<0$，$(6-x)<0$，

原式>0.

(i) $7(x^2-4)(9-x^2)(16-x^2)$.

解: 分析因式且收變 $(9-x^2)$ 與 $(16-x^2)$ 之符號，得

$7(x+4)(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)(x-4)$，

將此式之根依大小順序排列之爲 -4，-3，-2，2，3，4，故

當 $x<-4$ 時，則各因式俱爲負． ∴ 原式>0;

當 $-4<x<-3$ 時，則 $(x+4)>0$，$(x+3)<0$，$(x+2)<0$，$(x-2)<0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式<0;

當 $-3<x<-2$ 時，$(x+4)>0$，$(x+3)>0$，$(x+2)<0$，$(x-2)<0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式>0;

當 $2<x<2$ 時，則 $(x+4)>0$，$(x+3)>0$；$(x+2)>0$，$(x-2)<0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式<0;

當 $2<x<3$ 時，則 $(x+4)>0$，$(x+3)>0$，$(x+2)>0$，$(x-2)>0$，$(x-3)<0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式>0;

當 $3<x<4$ 時，則 $(x+4)>0$，$(x+3)>0$，$(x+2)>0$，$(x-2)>0$，$(x-3)>0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式<0;

當 $x>4$ 時，則各因式俱爲正． ∴ 原式>0;

(j) $(x^2-8)(2x^2-8)(3x^2-27)$.

解．分析因式．

$6(x+3)(x+2\sqrt{2})(x+2)(x-2)(x-2\sqrt{2})(x-3)$.

此式之根依順序之大小排列之爲 -3，$-2\sqrt{2}$，-2，2，$2\sqrt{2}$，3，故

當 $x<-3$ 時，則各因式俱爲負， ∴ 原式>0;

當 $-3<x<-2\sqrt{2}$ 時，則 $(x+3)>0$，$(x+2\sqrt{2})<0$，$(x+2)<0$，$(x-2)<0$，$(x-2\sqrt{2})<0$，$(x-3)<0$， ∴ 原式<0;

當 $-3\sqrt{2}<x<-2$ 時，$(x+3)>0$，$(x+2\sqrt{2})>0$，$(x+2)<0$，$(x-2)<0$，$(x-2\sqrt{2})<0$，$(x-4)<0$， ∴ 原式>0;

當 $-2<x<2$ 時，$(x+3)>0$，$(x+2\sqrt{2})>0$，$(x+2)>0$，$(x-2)<0$，$(x-2\sqrt{2})<0$，$(x-3)<0$， ∴ 原式<0;

當 $2<x<2\sqrt{2}$，$(x+3)>0$，$(x+2\sqrt{2})>0$，$(x+2)>0$，

$(x-2)>0$，$(x-2\sqrt{2})<0$，$(x-3)<0$，　∴ 原式>0；

當 $2\sqrt{2}<x<3$，$(x+3)>0$，$(x+2\sqrt{2})>0$，$(x+2)>0$

$(x-2)>0$，$(x-2\sqrt{2})>0$，$(x-3)<0$，　∴ 原式<0；

當 $x>3$ 時，則各因式俱爲正，　∴ 原式>0，

(k)　$(2x+8)^2(9-3x)(7-6x)(12-11x)$.

解. 改變因式 $(9-3x)$，$(7-6x)$ 與 $(12-11x)$ 之符號.

則此式可書爲

$-3(2x-8)^2(11x-12)(6x-7)(x-3)$.

因式 $(2x+8)^2$ 恆爲正，且原式之他根依順序之大小排列之爲 $\frac{12}{11}$，$\frac{7}{6}$，3.

故

當 $x<\frac{12}{11}$ 時，當 $(11x-12)<0$，$(6x-7)<0$，$(x-3)<0$，
∴ 原式>0；

當 $\frac{12}{11}<x<\frac{7}{6}$ 時，則 $(11x-12)>0$，$(6x-7)<0$，$(x-3)<0$，
∴ 原式<0；

當 $\frac{7}{6}<x<3$ 時，$(11x-12)>0$，$(6x-7)>0$，$(x-3)<0$，
∴ 原式>0；

當 $x>3$ 時，則 $(11x-12)>0$，$(6x-7)>0$，$(x-3)>0$，
∴ 原式<0，

習　　題　16頁

1. 當k至於如何之實數值時，能令下列各方程之一根變爲無限.

(a)　$kx^2-3x+5=0$.

解. 若方程式二次項之係數趨向於零，則一根必增至無窮大. 故 k 必趨向於零.

(b)　$(k^2-1)x^2+6x-5=0$.

解. 若 $k^2-1=0$，則此方程式之一根必增至無窮大，故 k 之值必趨向於 1 或 -1.

(c)　$2x^2-3x+k^2x^2+5=kx^2$.

解. 將方程式書爲範式如下：

$(k^2-k+2)x^2-3x+5=0$，

若 $k^2-k+2=0$，則一根必增無窮大.

因二次式 $k^2-k+2=0$ 無實根，故 k 無實數值能使二項之係數爲零．

(d) $(m^2-4)x^2-3x+8=0$.

解．若 $m^2-4=0$，則一根必增至無窮大．

故 m 必趨向於 2 或 -2.

(e) $(c^2-3)x^2+2cx-6=0$.

解．若 $c^2-3=0$，則一根必增至無窮大．

故 c 必趨向於 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

(f) $2b^2y^2-3y-3by^2+2=-2y^2$.

解．將方程式書爲範式如下：

$(2b^2-3b+2)y^2-3y+2=0$.

若 $2b^2-3b+2=0$，則一根必增至無窮大．

因二次式 $2b^2-3b+2=0$ 無實根，故 b 無實數值能使二次項之係數爲零．

2．當 k 及 m 至於如何之實數值時，能令下列各方程之兩根變爲無窮．

(a) $m^2x^2+(2k-m+1)x+6=0$.

解．由定理 III 得

$m^2=0$ 與及 $2k-m+1=0$.

或 $m=0$ 及 $k=-\frac{1}{2}$.

故 m 必須趨向於零及 k 必須趨向於 $-\frac{1}{2}$.

(b) $(m^2-3m+2)y^2+(3k-2m)y+2=0$.

解．若 $m^2-3m+2=0$ 及 $3k-2m=0$，則二根必俱增至無窮大．

∴ $m=2$ 或 1，及 $k=\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$.

故 m 必須趨向於 2 或 1，及 k 必須趨向於 $1\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$.

(c) $(m^2+k^2-25)t^2+(m-7k+25)t+8=0$.

解．若 $m^2+k^2-25=0$ 及 $m-7k+25=0$，則二根必俱增至無窮大．

由 $m-7k+25=0$ 解得 $m=7k-25$.

代入 $m^2+k^2-25=0$ 式內，得

$49k^2+k^2+350k+600=0$.

$k^2-7k+12=0$.　　$k=4$ 或 3.

$\therefore$　$m=3$ 或 -4.

故 m 必須趨向於 3 或 -4，及 k 必須趨向於 4 或 3.

(d)　$m^2x^2+3kx+k^2x^2-4mx+25x-25x^2=2$.

解.　將此式寫爲簡式得

$(m^2+k^2-25)x^2+(3k-4m+25)x-2=0$.

若　$m^2+k^2-25=0$ 及 $3k-4m+25=0$，　則二根必俱增至無窮大.

由　$3k-4m+25=0$ 解得 $m=\dfrac{3k+25}{4}$.

代入 $m^2+k^2-25=0$ 式內得

$9k^2+16k^2+150k+225=0$，

$k^2+6k+9=0$，$k=-3$.

$\therefore$　$m=4$.

故　m 必須趨向於 4 及 k 必須趨向於 -3.

(e)　$(m^2+3)x^2+(2k-5)x+8=0$.

解.　若 $m^2+3=0$ 及 $2k-5=0$ 則二根必俱增至無窮大.

因方程式 $m^2+3=0$ 無實根，故 m 無實數值能適合於其極限.

習　　題　17頁

1.　試表明下列各方程，俱爲代數方程式，且依 x，y 或 x，y，z 次數遞降排列之. 並識明其爲幾次方程式.

(a)　$x^2+\sqrt{y-5}+2x=0$.

解.　移項得 $x^2+2x=-\sqrt{y-5}$

平方得 $x^4+4x^3+4x^2=y-5$.

移項　$x^4+4x^3+4x^2-y+5=0$，

所以此式爲代數方程式，因所化得之方程式，其變數 x 及 y 之指數俱爲正整數故也.

此方程式爲四次.

(b)　$(x^{\frac{2}{3}})+y+3x=0$.

解　$(x^{\frac{2}{3}})^3=[-(3x+y)]^3$

$x^2=-(27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3)$.

$27x^3+x^2+27x^2y+9xy^2+y^3=0$.

所以此式爲代數方程式，因其變數之指數俱爲正整數故也．

此方程式爲三次．

(c) $xy+3x^4+6x^2y-7xy^3+5x-6+8y=2xy^2$.

解． 移項且依 x 次數之遞降排列之得

$3x^4-7xy^3+6x^2y-2xy^2+xy+5x+8y-6=0$.

此式爲代數方程式，因其變數之指數俱爲正整數故也．

此方程式爲四次．

(d) $x+y+z+x^2z-3xy-2z^2=5$.

解． 移項且依次排列之得

$x^2z-3xy-2z^2+x+y+z-5=0$,

此式爲代數方程式，因其變數之指數俱爲正整數故也

此方程式爲三次．

(e) $y=2+\sqrt{x^2-2x-5}$.

解． 移項 $y-2=\sqrt{x^2-2x-5}$.

平方 $y^2-4y+4=x^2-2x-5$.

移項 $x^2-y^2-2x+4y-9=0$.

同理此式爲代數方程式，且其次數爲 2．

(f) $y=x+5+\sqrt{2x^2-6x+3}$.

解． 移項 $y-x-5=\sqrt{2x^2-6x+3}$.

平方 $y^2+x^2+25-2xy-10y+10x=2x^2-6x+3$.

移項 $x^2+2xy-y^2-16x+10y-22=0$.

故此式爲二次代數方程式．

(g) $x=\frac{1}{2}D+\sqrt{\frac{D^2}{4}-F-Ey-y^2}$

解． 移項 $x+\frac{1}{2}D=\sqrt{\frac{D^2}{4}-F-Ey-y^2}$

平方 $x^2+Dx+\frac{1}{4}D^2=\frac{D^2}{4}-F-Ey-y^2$

移項 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

故此式爲二次代數方程式．

(h) $y=Ax+B+\sqrt{Lx^2+Mx+N}$.

解． 移項 $y-Ax-B=\sqrt{Lx^2+Mx+N}$.

平方 $y^2+A^2x^2+B^2+2ABx-2Axy-2By=Lx^2+Mx+N$

移項 $(A^2-L)x^2-2Axy+y^2+(2AB-M)x-2By+B^2$
$-N=0$,

2. 表明二次式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2$$

可寫成下列各式之一，假如其判別式能適合所示之條件：

I. 若 $\triangle>0$, $Ax^2+Bxy+Cy^2=A(x-l_1y)(x-l_2y)$.

II. 若 $\triangle=0$, $Ax^2+Bxy+Cy^2=A(x-l_1y)^2$

III. 若 $\triangle<0$, $Ax^2+Bxy+Cy^2=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}y^2\right]$

解. $Ax^2+Bxy+Cy^2=A\left(x^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2\right)$

$=A\left(x^2+\frac{B}{A}xy+\frac{B^2}{4A^2}y^2-\frac{B^2}{4A^2}y^2+\frac{C}{A}y^2\right)$

$=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}y^2\right]$.

$=A\left(x-\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y\right)\left(x-\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y\right)$

故

當 $\triangle>0$ 時，則 $\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ 與 $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

為不同之實數值，於是此二次式為下列形式：

$Ax^2+Bxy+Cy^2=A(x-l_1y)(x-l_2y)$;

當 $\triangle=0$ 時，則 $\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ 與 $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

為相同之實數值，於是此二次式可書為下列形式：

$Ax^2+Bxy+Cy^2=A(x-l_1y)^2$;

當 $\triangle<0$ 時，則 $\sqrt{B^2-4AC}$ 為虛數，於是由以上可知此二次式可書為下列形式：

$Ax^2+Bxy+Cy^2=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}y^2\right]$.

習 題 (26頁－27頁)

3. 原點之坐標爲何？

解. 原點之坐標爲 $(0, 0)$.

4 設 a, b 共爲正數，則 $(-a, b)$，$(-a, -b)$，$(b, -a)$，(a, b) 諸點各在何象限內？

解. $(-a, b)$ 在第二象限中.

$(-a, -b)$ 在第三象限中.

$(a, -b)$ 在第四象限中.

(a, b) 在第一象限中.

5. 有四點；(1)共橫坐標爲正；(2)共縱坐標爲正；(3)共橫坐標爲負；(4)共縱坐標爲負；試說明此四點在何象限內？

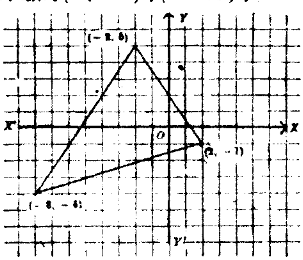
解. (a) 若一點之橫坐標爲正，則此點必在第一或第四象限中.

(b) 若一點之橫坐標爲負，則此點必在第二或第三象限中.

(c) 若一點之縱坐標爲正，則此點必在第一或第二象限中

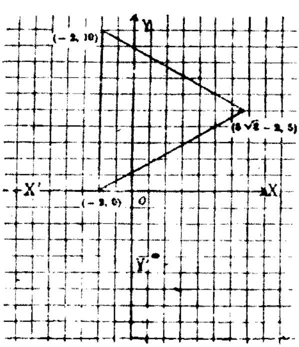
(d) 若一點之縱坐標爲負，則此點必在第三或第四象限中

6. 三角形之頂點爲 $(2, -1)$，$(-2, 5)$，$(-8, -4)$，試作成之.

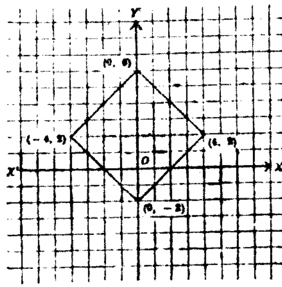


7. 三角形之頂點爲 $(-2, 0)$. $(5\sqrt{3}-2, 5)$，$(-2, 10)$.

試作成之.



8. 四邊形之頂點為$(0,-2)$,$(4,2)$,$(0,6)$,$(-4,2)$,試作成之.



9. 有以與x軸平行之方向移動之一點,其坐標何者為常數?若與y軸平行如何?

解. 若一點移動之方向與X軸平行則此點之縱坐標為常數,若與Y軸平行則橫坐標為常數.

10. 有橫坐標為零之一點?其能移動否?抑在何處?又有縱橫坐標俱為零之一點,其能否移動?抑止在何處?

解. 若一點之橫坐標為零,則此點必沿Y軸移動.

若一點之縱坐標為零,則此點必沿X軸移動.

若一點之縱橫兩坐標俱為零,則此點為原點而不能移動.

11. 橫坐標為2之點在何處?又縱坐標為-3之點在何處?

解. 一點之橫坐標為2,則此點必在Y軸之右2單位而與Y軸平行之直線內.

一點之縱坐標為-3,則此點必在X軸之下3單位,而與X軸平行之直線內.

12. 縱橫兩坐標相等之點,當在何處?

解. 縱橫兩坐標相等之點,在第一與第三兩象限之二分角線內.

13. 有矩形,其兩邊為a,b,且與x,y兩軸相合:(1)在第一象限時,其頂點之坐標如何?(2)在第二象限時,其頂點之坐標如何?(3)在第三象限時,其頂點之坐標如何?(4)在第四象限時,其頂點之坐標如何?

解.(1) 若在第一象限中,則此矩形各頂點之坐標為$(0,0)$,$(a,0)$,(a,b),$(0,b)$.

(2) 若在第二象限中,則此矩形各頂點之坐標為$(0,0)$,$(0,b)$,

$(-a,b)(-a,0)$,

(3) 若在第三象限中,則爲$(0,0)$,$(-a,0)$,$(-a,-b)$,$(0,-b)$,

(4) 若在第四像限中,則爲$(0,0)$,$(0,-b)$,$(a,-b)$,$(a,0)$.

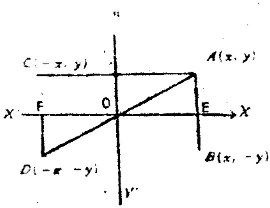
14. 作一四邊形其頂點爲$(-3,6)(-3,0)(3,0)$,$(3,6)$.其爲何種四邊形?

答.正方形.

15. 聯$(3,5)$及$(-3,-5)$,又聯$(3,-5)$,$(-3,5)$.問此兩線之交點之坐標如何?

答.此兩線之交點之坐標爲$(0,0)$.

16. 說明兩點,(x,y),$(x,-y)$對於x軸爲對稱;(x,y),$(-x,y)$對於y軸爲對稱;(x,y),$(-x,-y)$對於原點對稱.



解. 因XX'爲AB之垂直平分線,故$A(x,y)$,$B(x,-y)$兩點對於XX'爲對稱.

因YY'爲AC之垂直平分線,故$A(x,y)$,$C(-x,y)$兩點對於YY'爲對稱.

$\therefore$ $OA=OD$且O,A,D,三點在一直線上,(由幾何學).

$\therefore$ $A(x,y)$,$D(-x,-y)$兩點對於原點爲對稱.

17. 連兩點而成之直線,被原點分爲兩等分,其一端之坐標爲$(a,-b)$,則其他端之坐標如何?

解. 因此兩點對於原點爲對稱,故他端之坐標爲$(-a,b)$.

18. 於縱橫兩軸所成之角之等分線上;任意取一點,其縱橫兩坐標之關係如何?(1)在第一第三兩象限內;(2)在第二第四兩象限內,

解. (a)在第一及第三象限兩坐標軸所成之角之平分線上任取點,其橫坐標與縱坐標相等

(b)在第二及第四象限兩坐標軸所成之角之平分線上任取一點其橫坐標與縱坐標數值相等而符號相反.

19. 有以$2a$為邊之正方形,其中心與原點相合,(1)若其邊與坐標軸平行,其頂點之坐標如何?(2)其對角線與坐標軸相合,頂點之坐標如何?

解. (1) 若正方形之邊與坐標軸平行,
則其頂點之坐標為 (a,a), $(-a,a)$, $(-a,-a)$, $(a,-a)$.

(2) 若正方形之對角線與坐標軸相合,則其頂點之坐標為 $(a\sqrt{2},0)$, $(-a\sqrt{2},0)$, $(0,a\sqrt{2})$, $(0,-a\sqrt{2})$.

∵ 對角線之半為 $\frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=a\sqrt{2}$.

20. 有以a為邊之等邊三角形.其底與x軸相合,其頂點在x軸之上;(1)其底之中心與原點相合,其頂點之坐標如何?(2)其底邊之左端與原點相合,其頂點之坐標如何?

解: (1) 若等邊三角形之底邊中心與原點相合.(圖a.).

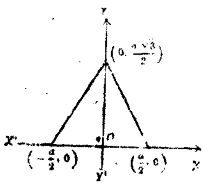


圖 a.

則其頂點之坐標為 $\left(\frac{a}{2},0\right)$, $\left(-\frac{a}{2},0\right)$, $\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

∵ $\text{其高}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

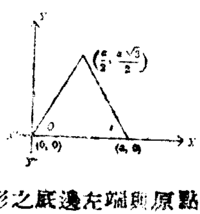


圖 b.

(2) 若等邊三角形之底邊左端與原點相合(圖b).則其頂點之坐標為 $(0,0)$, $(a,0)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ 因其高為$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

習　　題　（29頁）

1.　證明凡向下之直線，則$\cos\beta=-\sin\alpha$.

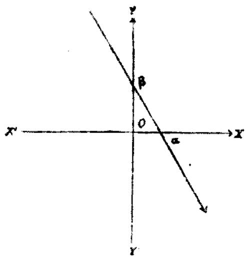


圖 a.

圖 a.　$\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$　$\therefore$　$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

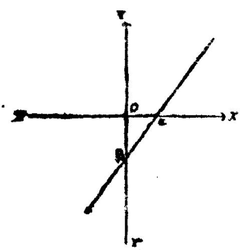
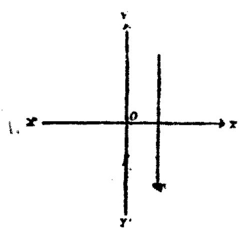


圖 b.

圖 b.　$\beta=\frac{3\pi}{2}-\alpha$,

$\therefore\cos\beta=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

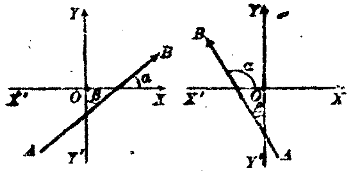
$=-\sin\alpha$,

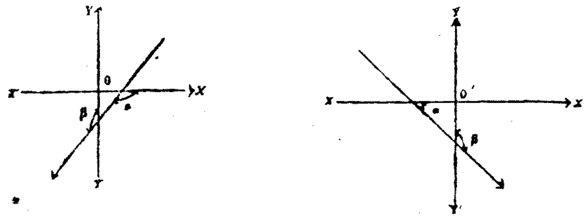


解.

圖 c.　$\beta=\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$,　$\therefore$　$\cos\beta=-1=-\sin\alpha$.

2.　命原點之右，上，左，下，爲東，北，西，南，且以E，N，W，S.表之；今有直線，其方向爲(1)N，E，(2)N，W，(3)S，E.(4)S，W，則α，β之值爲何?

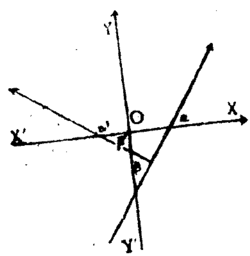




答. (1) 各為 45°, (2) $\alpha=135°$, $\beta=45°$; (3) 各為135°.
(4) $\alpha=40°$, $\beta=135°$.

3. 有向上且互相正交之兩直線,

試求 α, β間之關係.



解. 由圖 $\alpha'-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$;

$$\beta'+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

習 題 (32頁—34頁)

1. 求連下列各兩點之直線之長；並其在坐標軸上之投影.

(a) $(-4,-4)$ 與 $(1,3)$.

解. 命 P_1為$(-4,-4)$ 與 P_2為 $(1,3)$

則 $x_1=-4$, $y_1=-4$ 與 $x_2=1$, $y_2=3$

P_1P_2 在XX' 上之射影$=x_2-x_1=1+4=5$.

P_1P_2 在YY' 上之射影$=y_2-y_1=3+4=7$.

P_1P_2 之長$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(-4-1)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$

(b) $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$ 與 $(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

解. 命$P_1\ (-\sqrt{2},\sqrt{3})$，與 $P_2(\sqrt{3},\sqrt{2})$.

則 $\quad x_1=-\sqrt{2},\ y_1=\sqrt{3}$, 與$x_2=\sqrt{3},\ y_2=\sqrt{2}$.

P_1P_2在XX'上之射影$=x_2-x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

P_1P_2在YY'上之射影$=y_2-y_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

$$P_1P_2\text{之長}=\sqrt{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)}$$

$$=\sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{2+3+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}}=\sqrt{10}.$$

(c) $\quad (0,0)$ 與$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

解. 命 $P_1\ (0,0)$ 與$P_2\left(\frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

則 $\quad x_1=0,\ y_1=0$，與 $x_2=\frac{a}{2},\ y_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

P_1P_2在XX'上之射影$=x_2-x_1=\frac{a}{2}-0=\frac{a}{2}$.

P_1P_2在YY'上之射影$=y_2-y_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}-0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$P_1P_2\text{之長}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=a.$$

(d) $\quad (a+b,\ c+a)$ 與 $(c+a,\ b+c)$.

解. 命 $(a+b,\ c+a)$ 爲P_1，與 $(c+a,\ b+c)$爲P_2.

於是 $x_1=a+b,\ y_1=c+a$，與 $x_2=c+a,\ y_2=b+c$.

P_1P_2在XX'上之射影$=x_2-x_1=c+a-(a+b)=c-b$.

P_1P_2在YY'上之射影$=y_2-y_1=b+c-(c+a)=b-a$.

$$P_1P_2\text{之長}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

$$=\sqrt{[(a+b)-(c+a)]^2+[(c+a)-(b+c)]^2}$$

$$=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}.$$

2. 適下列各三點，各成三角形，試求其各邊在坐標軸之投影.

(a) $(0,6)$, $(1,2)$, $(3,-5)$.

解. 命 $(0,6)$ 爲P_1, $(1,2)$ 爲P_2 與 $(3,-5)$爲P_3.

於是 $x_1=0, y_1=6$, $x_2=1$, $y_2=2$, 與 $x_3=3$, $y_3=-5$,

P_1P_2 在 XX' 上之射影$=1-0=1$.

P_1P_2 在 YY' 上之射影$=2-6=-4$.

P_1P_3 在 XX' 上之射影$=3-0=3$.

P_1P_3 在 YY' 上之射影$=-5-6=-11$.

P_2P_3 在 XX' 上之射影$=3-1=2$.

P_2P_3 在 YY' 上之射影$=-5-2=-7$.

(b) $(1,0)$, $(-1,-5)$, $(-1,-8)$.

解. 命 $(-1,-8)$爲P_1, $(-1,-5)$爲P_2 與 $(1,0)$爲P_3.

於是 $x_1=-1, y_1=-8, x_2=-1, y_2=-5$ 與 $x_3=1, y_3=0$.

P_1P_2 在 XX' 上之射影$=-1+1=0$.

P_1P_2 在 YY' 上之射影$=-5+8=3$.

P_2P_3 在 XX' 上之射影$=1+1=2$.

P_2P_3 在 YY' 上之射影$=0+5=5$.

P_3P_1 在 XX' 上之射影$=-1-1=-2$.

P_3P_1 在 YY' 上之射影$=-8-0=-8$.

(c) (a,b), (b,c), (c,d).

解. 命 (a,b) 爲 P_1, (b,c) 爲 P_2 與 (c,d) 爲 P_3.

於是 $x_1=a$, $y_1=b$, $x_2=b$, $y_2=c$, 與 $x_3=c$, $y_3=d$.

P_1P_2 在 XX' 上之射影$=b-a$.

P_1P_2 在 YY' 上之射影$=c-b$.

P_2P_3 在 XX' 上之射影$=c-b$.

P_2P_3 在 YY' 上之射影$=d-c$.

P_3P_1 在 XX' 上之射影$=a-c$.

P_3P_1 在 YY' 上之射影$=b-d$.

3. 於上題各三角形,求其各邊之長.

(a) $(0,6)$, $(1,2)$, $(3,-5)$.

解. 命 $(0,6)$ 爲P_1, $(1,2)$ 爲P_2, 與 $(3,-5)$ 爲P_3.

於是 $x_1=0$, $y_1=6$, $x_2=1$, $y_2=2$, 與 $x_3=3$, $y_3=-5$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(0-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{17}$.

P_2P_3之長$=\sqrt{(1-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{53}$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(3-0)^2+(-5-6)^2}=\sqrt{9+121}=\sqrt{130}$.

(b) $(1,0)$, $(-1,-5)$, $(-1,-8)$.

解. 命 $(1,0)$ 爲P_1, $(-1,-5)$ 爲P_2, $(-1,-8)$ 爲P_3.

於是 $x_1=1$, $y_1=0$, $x_2=-1$, $y_2=-5$, 與 $x_3=-1$, $y_3=-8$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(1+1)^2+(0+5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$.

P_2P_3之長$=\sqrt{(-1+1)^2+(-5+8)^2}=\sqrt{9}=3$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(-1-1)^2+(-8-0)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$.

(c) (a,b), (b,c), (c,d).

解. 命 (a,b) 爲P_1, (b,c) 爲P_2 與 (c,d) 爲P_3.

於是 $x_1=a$, $y_1=b$, $x_2=b$, $y_2=c$, 與 $x_3=c$, $y_3=d$.

$P_1P_2=\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2}$.

$P_2P_3=\sqrt{(b-c)^2+(c-d)^2}$.

$P_3P_1=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

4. 若(a)$x_1=x_2$,(b)$y_1=y_2$,則(III),(IV)兩式如何?

解. (a) 若 $x_1=x_2$, 則公式 III 與公式 (IV) 變爲:

P_1P_2 在 XX'上之射影$=x_2-x_1=0$.

P_1P_2 在 YY'上之射影$=y_2-y_1$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=y_1-y_2$.

(b) 若 $y_1=y_2$, 則公式 (III) 與公式(IV) 變爲:

P_1P_2 在 XX'上之射影$=x_2-x_1$.

P_1P_2 在 YY'上之射影$=y_2-y_1=0$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=x_1-x_2$.

5. 三角形之頂爲$(4,3)$,$(2,-2)$,$(-3,5)$,求其各邊之長.

解. 命 $(4,3)$爲P_1, $(2,-2)$爲P_2 與 $(-3,5)$爲P_3.

於是 $x_1=4$, $y_1=3$, $x_2=2$, $y_2=-2$, 與 $x_3=-3$, $y_3=5$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(4-2)^2+(3+2)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$.

P_2P_3之長$=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}=\sqrt{(2+3)^2+(-2-5)^2}$

$=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$

$=\sqrt{(-3-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$.

6. 證明(1,4),(4,1),(5,5)爲兩等邊三角形之頂.

解. 命 (1,4)爲P_1, (4,1)爲P_2 與 (5,5)爲P_3.

於是 $x_1=1$, $y_1=4$, $x_2=4$, $y_2=1$, 與 $x_3=5$, $y_3=5$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

P_2P_3之長$=\sqrt{(4-5)^2+(1-5)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(5-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

$\therefore$ $P_2P_3=P_3P_1$,

$\therefore$ $\triangle P_1P_2P_3$爲一等腰三角形.

$\therefore$ (1,4),(4,1), 與 (5,5) 爲等腰三角形之三頂.

7. 證明(2,2),(−2,−2),($2\sqrt{3}$,$-2\sqrt{3}$)爲等邊三角形之頂.

解. 命 (2,2)爲P_1, (−2,−2)爲P_2, 與 ($2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$)爲P_3

於是 $x_1=2$, $y_1=2$, $x_2=-2$, $y_2=-2$, 與 $x_3=2\sqrt{3}$,
$y_3=-2\sqrt{3}$.

P_1P_2之長$=\sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

P_2P_3之長$=\sqrt{(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{4+12+8\sqrt{3}+4+12-8\sqrt{3}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2+(-2\sqrt{3}-2)^2}$

$=\sqrt{12+4-8\sqrt{3}+12+4+8\sqrt{3}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

$\therefore$ $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_1$.

$\therefore$ $\triangle P_1P_2P_3$爲等邊三角形.

故 (2,2),(−2,−2) 與 ($2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$) 三點爲等邊三角形之頂.

8. 證明(3,0),(6,4),(−1,3)爲直三角形之頂; 並求其面積.

解. 命 (3,0)爲P_1,(6,4)爲P_2 與 (−1,3)爲P_3.

P_1P_2之長$=\sqrt{(3-6)^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5$,

P_2P_3之長$=\sqrt{(6+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

P_3P_1之長$=\sqrt{(-1-3)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$\therefore$ $\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_3P_1}^2=25+25=50=\overline{P_2P_3}^2$

$\therefore$ $\triangle P_1P_2P_3$爲直三角形, 且 (3,0),(6,4) 與 (−1,3) 爲其三頂.

$\triangle$ $P_1P_2P_3$之面積$=\frac{1}{2}(5\times5)=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$ 單位面積.

9. 證明(−4,−2),(2,0),(8,6),(2,4) 爲平行四邊形之頂; 並

求其對角線之長.

解. 命 $(-4,-2)$ 爲 P_1, $(2,0)$ 爲 P_2, $(8,6)$ 爲 P_3 與 $(2,4)$ 爲 P_4

P_1P_4 之長 $=\sqrt{(-4-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$

$=6\sqrt{2}$.

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(2-8)^2+(0-6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

∴ $P_1P_4=P_2P_3$,

又 P_1P_4 在 XX' 上之射影 $=2+4=6$.

P_2P_3 在 XX' 上之射影 $=8-2=6$.

∴ $P_1P_4=P_2P_3$.

故 $(-4,-2)$, $(2,0)$, $(8,6)$ 與 $(2,4)$ 爲平行四邊形之頂.

對角線 P_1P_3 之長 $=\sqrt{(-4-8)^2+(-2-6)^2}$

$=\sqrt{144+64}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$.

對角線 P_2P_4 之長 $=\sqrt{(2-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16}=4$.

10. 證明 $(11,2)$, $(6,-10)$, $(-6,-5)$, $(-1,7)$ 爲正方形之頂; 並求其面積.

解. 命 $(11,2)$ 爲 P_1 $(6,-10)$ 爲 P_2, $(-6,-5)$ 爲 P_3 與 $(-1,7)$ 爲 P_4.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(11-6)^2+(2+10)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$.

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(6+6)^2+(-10+5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

P_3P_4 之長 $=\sqrt{(-6+1)^2+(-5-7)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$.

P_4P_1 之長 $=\sqrt{(-1-11)^2+(7-2)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$.

∴ 四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 之四邊相等.

對角線 P_1P_3 之長 $=\sqrt{(11+6)^2+(2+5)^2}=\sqrt{289+49}=\sqrt{338}$.

對角線 P_2P_4 之長 $=\sqrt{(6+1)^2+(-10-7)^2}=\sqrt{49+289}$

$=\sqrt{338}$.

∴ 對角線 $P_1P_3=$ 對角線 P_2P_4.

∴ $P_1P_2P_3P_4$ 爲一正方形, 且 $(11,3)$, $(6,-10)$, $(-6,-5)$ $(-1,7)$ 爲其角頂.

正方形 $P_1P_2P_3P_4$ 之面積 $=13^2=169$ 單位面積.

11. 證明 $(1,3)$, $(2,\sqrt{6})$, $(2,-\sqrt{6})$ 三點, 各與原點之距離相等, 即證明此三點同在一原點爲心之圓周上, 其半徑爲 $\sqrt{10}$.

解. 命 $(1,3)$ P_1, $(2,\sqrt{6})$ P_2, $(2,-\sqrt{6})$ P_3, 及原點爲 O.

OP_1 之長 $=\sqrt{(0-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$.

OP_2 之長 $=\sqrt{(0-2)^2+(0-\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$,

OP_3 之長 $=\sqrt{(0-2)^2+(0+\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$.

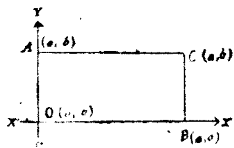
$\therefore\ OP_1=OP_2=OP_3$.

故 $(1,3)$, $(2,\sqrt{6})$ 及 $(2,-\sqrt{6})$ 與原點之距離相等. 換言之即此三點同在以原點爲心，以 $\sqrt{10}$ 爲半徑之圓周上.

12. 證明任何矩形之對角線必相等.

解. 令矩形之相鄰二邊爲坐標軸且設頂 C 之坐標爲 (a,b).

則 A,O,B 三頂之坐標各爲 $(0,b)$, $(0,0)$, $(a,0)$.



對角線 AB 之長 $=\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

對角線 OC 之長 $=\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\therefore\ AB=OC$.

13. 三角形之頂爲 (a,b), $(-a,b)$, $(-a,-b)$；試求其周界之長.

解. 命 (a,b) 爲 P_1, $(-a,b)$ 爲 P_2, $(-a,-b)$ 爲 P_3.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(a+a)^2+(b-b)^2}=\sqrt{4a^2}=2a$.

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(-a+a)^2+(b+b)^2}=\sqrt{4b^2}=2b$.

P_3P_1 之長 $=\sqrt{(-a-a)^2+(-b-b)^2}=\sqrt{4a^2+4b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$.

$\therefore\ \triangle P_1P_2P_3$ 之周界 $=3a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}$,

$$=2(a+b+\sqrt{a^2+b^2}).$$

14. 將 $(6,4)$, $(4,-3)$, $(0,-1)$, $(-5,-4)$, $(-2,1)$, 連成多邊形；試求其周界之長.

解. 命 $(6,4)$ 爲 P_1, $(4,-3)$ 爲 P_2, $(0,-1)$ 爲 P_3, $(-5,-4)$ 爲 P_4, 與 $(-2,1)$ 爲 P_5.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(6-4)^2+(4+3)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$.

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(4-0)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

P_3P_4之長$=\sqrt{(0+5)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$.

P_4P_5之長$=\sqrt{(-5+2)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

P_5P_1之長$=\sqrt{(-2-6)^2+(1-4)^2}=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$.

$\therefore$ 多邊形$P_1P_2P_3P_4P_5$之周界$=\sqrt{53}+2\sqrt{5}+2\sqrt{34}+\sqrt{73}$.

15. 有長13之直線，其一端之坐標為$(-4,8)$，他端之縱坐標為3，求其橫坐標.

解. 命x為此直線他端之橫坐標.

$\therefore$ $13=\sqrt{(x+4)^2+(3-8)^2}$

$169=(x+4)^2-25$.

$169=x^2+8x+16+25$.

$x^2+8x-128=0$.

$(x-8)(x+16)=0$.

$\therefore$ $x=8$ 或 -16.

16. $P(x,y)$點與$(7,-2)$之距離為11，則x,y能適合如何之方程式?

解. $11=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2}$.

$121=(x-7)^2+(y+2)^2$.

$121=x^2-14x+49+y^2+4y+4$.

$x^2+y^2-14x+4y-68=0$.

17. $P(x,y)$與$(2,3)$，$(4,5)$ 兩點之距離相等，問此關係可以如何之方程式表之.

解. 命$(2,3)$為P_1，及$(4,5)$為P_2.

PP_1之長$=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$.

PP_2之長$=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$.

$\therefore$ $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$.

$(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$.

$x^2-4x+4+y^2-6y+9=x^2-8x+16+y^2-10y+25$.

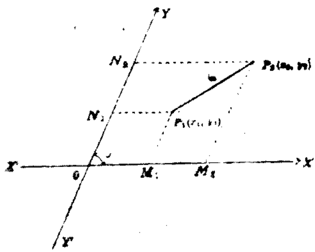
$4x+4y-28=0$.

$x+y-7=0$.

18. 於下圖，命XOY角為α，試證明通$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，.

兩點之直線之長，可以下式表之.

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$



解. $M_1M_2=x_2-x_1$,

$N_1N_2=y_2-y_1$,

$P_1A=M_1M_2$,

$P_2A=N_1N_2$,

$\angle P_1AP_2=\pi-\omega$.

由餘弦定律得

$$l^2=\overline{P_1A}^2+\overline{P_2A}^2-2\overline{P_1A}\times\overline{P_2A}\cos(\pi-\omega)$$

$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(\pi-\omega)$$

$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega.$$

$$\therefore\ l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

19. 若 $\omega=\frac{\pi}{3}$，則 $(-3,3)$，$(4,-2)$ 兩點間之距離幾何？

解. 命 $(-3,3)P_1$，$(4,-2)P_2$.

於是 $x_1=-3$，$y_1=3$，$x_2=4$，$y_2=-2$.

代入前題之公式得

$$l=\sqrt{(-3-4)^2+(3+2)^2+2(-3-4)(3+2)\cos\tfrac{\pi}{3}}.$$

$$=\sqrt{49+25-70\times\tfrac{1}{2}}.$$

$$=\sqrt{74-35}=\sqrt{39}.$$

20. 若 $\omega=\frac{\pi}{3}$，則連 $(1,3)$；$(2,7)$，$(-4,-4)$ 三點之三角形其週長幾何？

解. 命 $(1,3)P_1$，$(2,7)P_2$，與 $(-4,-4)P_3$.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(1-2)^2+(3-7)^2+2(1-2)(3-7)\cos\frac{\pi}{3}}$.

$=\sqrt{1+16+8\times\frac{1}{2}}=\sqrt{21}.$

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(2+4)^2+(7+4)^2+2(2+4)(7+4)\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\sqrt{36+121+132+\frac{1}{2}}=\sqrt{223}.$

P_3P_1 之長 $=\sqrt{(-4-1)^2+(-4-3)^2+2(-4-1)(-4-4)\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\sqrt{25+39+79\times\frac{1}{2}}=\sqrt{109}.$

$\therefore\ \triangle P_1P_2P_3$ 之周界 $=\sqrt{21}+\sqrt{223}+\sqrt{109}.$

21. 若 $\omega=\frac{\pi}{6}$，則連 $(1,2)$，$(-2-4)$，$(5,-5)$ 之三角形其週長幾何？

解. 命 $(1,2)$ 爲 P_1，$(-2,-4)$ 爲 P_2，與 $(3,-5)$ 爲 P_3.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(1+2)^2+(2+4)^2+2(1+2)(2+4)\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\sqrt{9+36+36\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}=3\sqrt{5+2\sqrt{3}}.$

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(-2-3)^2+(-4+5)^2+2(-2-3)(-4+5)\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\sqrt{25+1-10\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\sqrt{26-5\sqrt{3}}.$

P_3P_1 之長 $=\sqrt{(3-1)^2+(-5-2)^2+2(3-1)(-5-2)\cos\frac{\pi}{6}}$

$=\sqrt{4+49-28\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\sqrt{53-14\sqrt{3}}.$

$\therefore\triangle P_1P_2P_3$ 之周界 $=3\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{26-5\sqrt{3}}+\sqrt{53-14\sqrt{2}}.$

22. 證明 $(6,6)$，$(7,-1)$，$(0,-2)$，$(-2,2)$ 同在以 $(3,2)$ 爲心之圓上.

解. 命 $(3,2)$ 爲 P，$(6,6)$ 爲 P_1，$(7,-1)$ 爲 P_2，$(0,-2)$ 爲 P_3 與 $(-2,2)$ 爲 P_4

PP_1 之長 $=\sqrt{(3-6)^2+(2-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

PP_2 之長 $=\sqrt{(3-7)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

PP_3 之長 $=\sqrt{(3-0)^2+(2+2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

PP_4 之長 $=\sqrt{(3+2)^2+(2-2)^2}=\sqrt{25}=5,$

$\therefore\ PP_1=PP_2=PP_3=PP_4=5.$

$\therefore$ $(6,6)$，$(7,-1)$，$(0,-2)$，$(-2,3)$ 四點同在以 $(3,2)$ 爲心及 5 爲半徑之圓上.

23. 若 $\omega=\frac{3\pi}{4}$，則 $(\sqrt{3},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\sqrt{3})$ 間之距離幾何？

解． 命 $(\sqrt{3},\sqrt{2})$ 爲 P_1 與 $(-\sqrt{2},\sqrt{3})$ 爲 P_2．

於是 $x_1=\sqrt{3}$，$y_1=\sqrt{2}$，與 $x_2=-\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{3}$．

代入在第 18 題之公式內得

$$l=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cos\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{3+2+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2(2-3)(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})}\,.$$

$$=\sqrt{10+\sqrt{2}}\,.$$

24． 任何多邊形，若其各邊以由一點起沿各邊依次運行一週之方向爲方向，則其各邊在坐標軸上之投影之總和，必等於零．試證明之．

解． 設 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ ……………………

爲任意多邊形之頂．

P_1P_2 在 XX' 上之射影 $=x_2-x_1$．

P_2P_3 在 XX' 上之射影 $=x_3-x_2$．

…………………………………

$P_{n-1}P_n$ 在 XX' 上之射影 $=x_n-x_{n-1}$．

P_nP_1 在 XX' 上之射影 $=x_1-x_n$．

故此多邊形各邊在 x 軸上射影之總和爲

$x_2-x_1+x_3-x_2+x_4-x_3+$…………………… …

$+x_{n-1}+x_1-x_n=0$．

同樣方法可證此多邊形各邊在 y 軸上之射影之總和亦爲零．

習　　題　(36頁—37頁)

1． 試求過 $(1,3)$，$(2,7)$ 兩點之直線之斜度．

解． 命 $(1,3)$ 爲 P_1 與 $(2,7)$ 爲 P_2．

於是 $x_1=1$，$y_1=3$，與 $x_2=2$，$y_2=7$；

代入公式(V)內得

$$m=\frac{3-7}{1-2}=\frac{-4}{-1}=4.$$

2． 以直線過 $(2,7)$，$(-4,-4)$，求其斜度．

解． 命 $(2,7)$ 爲 P_1 與 $(-4,-4)$ 爲 P_2．

於是 $x_1=2$，$y_1=7$，與 $x_2=-4$，$y_2=-4$.

代入(V)式得

$$m=\frac{7+4}{2+4}=\frac{11}{6}.$$

3. 將$(\sqrt{3},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\sqrt{3})$以直線連之，則其斜度如何？

解. 命$(\sqrt{3},\sqrt{2})$為P_1與$(-\sqrt{2},\sqrt{3})$為P_2.

於是 $x_1=\sqrt{3}, y_1=\sqrt{2}$，與$x_2=-\sqrt{2}, y_2=\sqrt{2}$.

代入 (V) 式得

$$m=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{2+3-2\sqrt{6}}{2-3}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{-1}=2\sqrt{6}-5.$$

4. 直線兩端之坐標為$(a+b,c+a)$，$(c+a,b+c)$求其斜度.

解. 命$(a+b,c+a)$為P_1，與 $(c+a,b+c)$為P_2，

於是 $x_1=a+b$，$y_1=c+a$，與 $x_2=c+a$，$y_2=b+c$.

代入(V)式得

$$m=\frac{c+a-b-c}{a+b-c-a}=\frac{a-b}{b-c}.$$

5. 以直線將$(1,1)$，$(-1,-1)$，$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$連成三角形. 試求其各邊之斜度.

解. 命$(1,1)$為P_1，$(-1,-1)$為P_2與$(\sqrt{3},-\sqrt{3})$為P_3.

$$P_1P_2\text{之斜率}=\frac{1+1}{1+1}=1.$$

$$P_2P_3\text{之斜率}=\frac{-1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\sqrt{3}-2.$$

$$P_3P_1\text{之斜率}=\frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(-\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{-(3+1+2\sqrt{3})}{3-1}=-2-\sqrt{3}.$$

6. 以求斜度，證明 $(-4,-2)$，$(2,0)$，$(8,6)$，$(2,4)$ 爲平行四邊形之頂.

解. 命 $(-4,-2)$爲P_1，$(2,0)$爲P_2，$(8,6)$爲P_3 與 $(2,4)$爲P_4.

$$P_1P_2\text{之斜率}\frac{-2-0}{-4-2}=\frac{1}{3}.$$

$$P_3P_4\text{之斜率}=\frac{6-4}{8-2}=\frac{1}{3}.$$

$$P_1P_4\text{之斜率}=\frac{-2-4}{-4-2}=1.$$

$$P_2P_3\text{之斜率}=\frac{0-6}{2-8}=1.$$

$\therefore$ $P_1P_2 \parallel P_3P_4$ 與 $P_1P_4 \parallel P_2P_3$.

$\therefore$ $P_1P_2P_3P_4$爲一平行四邊形.

故 $(-4,-2)$，$(2,0)$，$(8,6)$；$(2,4)$ 爲平行四邊形之頂.

7. 以求斜度，證明$(3,0)$，$(6,4)$，$(-1,3)$爲直角三角形之頂.

解. 命 $(3,0)$爲P_1，$(6,4)$爲P_2，與 $(-1,3)$爲P_3.

$$P_1P_2\text{之斜率}=\frac{0-4}{3-6}=\frac{4}{3}.$$

$$P_1P_3\text{之斜率}=\frac{0-3}{3+1}=-\frac{3}{4}.$$

因 P_1P_3之斜率爲P_1P_2之斜率的負倒數，故P_1P_3與 P_1P_2互相垂直，且$\triangle P_1P_2P_3$爲一直角三角形.

8. 以求斜度，証明 $(0,-2)$，$(4,2)$，$(0,6)$，$(-4,2)$ 爲矩形之頂. 并引用(IV)，以証明其爲正方形.

解. 命 $(0,-2)$爲P_1；$(4,2)$爲P_2，$(0,6)$爲P_3，與 $(-4,2)$爲P_4.

$$P_1P_2\text{之斜率}=\frac{-2-2}{0-4}=1.$$

P_3P_4 之斜率 $=\frac{6-2}{0+4}=1.$

P_2P_3 之斜率 $=\frac{2-6}{4-0}=-1.$

P_1P_4 之斜率 $=\frac{-2-2}{0+4}=-1.$

因　P_1P_2 與 P_3P_4 之斜率相等，又 P_2P_3 與 P_1P_4 之斜率相等.

且　P_1P_2 與 P_3P_4 之斜率為 P_2P_3 與 P_1P_4 之斜率的負倒數.

故　$P_1P_2P_3P_4$ 為一矩形.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(0-4)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$,

P_2P_3 之長 $=\sqrt{(4-0)^2+(2-6)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$,

∴　$P_1P_2=P_3P_4=P_2P_3=P_1P_4$.

故　$P_1P_2P_3P_4$ 為一正方形.

9.　以求斜度，證明上題矩形之對角線，互相垂直.

解.　對角線 P_1P_3 之斜率 $=\frac{-2-6}{0-0}=-\frac{8}{0}$.

對角線 P_2P_4 之斜率 $=\frac{2-2}{4+4}=\frac{0}{8}$.

因　P_1P_3 與 P_2P_4 之二斜率互為負倒數，故 P_1P_3 與 P_2P_4 互相垂直.

10.　以求斜度法證明 $(10,0)$, $(5,5)$, $(5,-5)$, $(-5,5)$ 為梯形之頂.

解.　命 $(10,6)$ 為 P_1, $(5,5)$ 為 P_2, $(5,-5)$ 為 P_3 與 $(-5,5)$ 為 P_4.

P_1P_2 之斜率 $=\frac{0-5}{10-5}=-1.$

P_3P_4 之斜率 $=\frac{-5-5}{5+5}=-1.$

∴　$P_1P_2 \parallel P_3P_4$.

故　$P_1P_2P_3P_4$ 為一梯形.　且 $(10,0)$, $(5,5)$, $(5-5)$, $(-5,5)$ 為其四頂.

11. 證明連(a,b),$(c,-d)$之直線,與連$(-a,-b)$,$(-a,d)$之直線相平行.

解. 命 (a,b)為P_1,$(c,-d)$為P_2,$(-a,-b)$為P_3與$(-c,d)$為P_4.

P_1P_2之斜率$=\dfrac{b+d}{a-c}$.

P_3P_4之斜率$=\dfrac{-b-d}{-a+c}=\dfrac{b+d}{a-c}$.

P_1P_3之斜率$=\dfrac{b+b}{a+a}=\dfrac{b}{a}$.

因 P_1P_2,P_3P_4 與 P_1P_3 之各斜率不等,故已知之點不同在一直線上.

但 P_1P_2 與 P_3P_4 之斜率相等,故 $P_1P_2 \parallel P_3P_4$.

12. 証明連原點與(a,b)之直線,與連原點與$(-b,a)$之直線互垂直.

解. 命 $(0,0)P_1$,$(a,b)P_2$,與 $(-b,a)P_3$.

P_1P_2之斜率$=\dfrac{0-b}{0-a}=\dfrac{b}{a}$.

P_1P_3之斜率$=\dfrac{0-a}{0+b}=-\dfrac{a}{b}$.

因 P_1P_3 之斜率為 P_1P_2 之斜率的負倒數,故 P_1P_2 與 P_1P_3 彼此垂直.

13. 直線(1)平行YY',(2)垂直$Y'Y$,其傾角為何?

解. (a) 平行YY'之直線之傾斜角為$\dfrac{\pi}{2}$,因此直線垂直XX'.

(b) 垂直YY'之直線,若其正方向與XX'相同,則其傾斜角為0,若其正方向與XX'相反,則其傾斜角為π.

14. 直線(1)平行YY',(2)垂直YY',其斜度為何?

解. (a) 平行YY'之直線之斜率為∞,因其傾斜角為$\dfrac{\pi}{2}$.

(b) 垂直YY'之直線之斜率為0,因其傾斜角為0或π.

15. 連$(2,2)$,$(-2,-2)$兩點之直線,其傾角為何?

解. 設 α 與 m 各為此直線之傾斜角與斜率.

於是 $\tan\alpha=m=\dfrac{2+2}{2+2}=1.$

但 $\tan\dfrac{\pi}{4}=1.$

$\therefore\quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}.$

16. 連$(-2,0)$，$(-5,3)$兩點之直線，其傾角爲何？

解. 設α與m各爲以直線之傾斜角與斜率.

則 $m=\dfrac{0-3}{-2+5}=-1.$

即 $\tan\alpha=-1.$

但 $\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1.$

$\therefore\quad \alpha=\dfrac{3\pi}{4}.$

17. 將$(3,0)$，$(4,\sqrt{3})$以直線連之，求其傾角.

解. 設α與m分別爲此直線之傾斜角與斜率.

$\tan\alpha=m=\dfrac{0-\sqrt{3}}{3-4}=\sqrt{3}$

但 $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

$\therefore\quad \alpha=\dfrac{\pi}{3}.$

18. 連$(3,0)$，$(2,\sqrt{3})$以直線，則其傾角爲何？

解. 設α與m各爲此直線之傾斜角與斜率.

則 $m=\dfrac{0-\sqrt{3}}{3-2}=-\sqrt{3}.$

即 $\tan\alpha=-\sqrt{3}.$

但 $\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$

$\therefore\quad \alpha=\frac{2\pi}{3}.$

19. 通過 $(0,-4)$, $(-\sqrt{3},-5)$ 兩點之直線，求其傾角.

解. 設 α 與 m 各爲此直線之傾斜角與斜率.

$$則\ m=\frac{-4+5}{0+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad m=\tan\alpha=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$但\ \tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{6}.$$

20. 有直線通過 $(0,0)$, $(-\sqrt{3},1)$ 兩點試求其傾角.

解. 設 α 與 m 各爲此直線之傾斜角與斜率.

$$\tan\alpha=m=\frac{0-1}{0+\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$但\ \tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{5\pi}{6}.$$

21. 以求斜度法，證明 $(2,3)$, $(1,-3)$, $(3,9)$ 三點同在一直線內.

解. 命 $(2,3)P_1$, $(1,-3)P_2$ 與 $(3,9)P_3$.

$$P_1P_2\ 之斜率=\frac{3+3}{2-1}=6.$$

$$P_2P_3\ 之斜率=\frac{-3-9}{1-3}=6.$$

因 P_1P_2 與 P_2P_3 之二斜率相同，故已知之三點同在一直線內.

22. 證明 $(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$ 三點同在直線內.

解. 命 $(a,b+c)P_1$, $(b,c+a)P_2$, 與 $(c,a+b)P_3$.

$$P_1P_2\ 之斜率=\frac{b+c-c-a}{a-b}=\frac{b-a}{a-b}=\frac{-(a-b)}{a-b}=-1.$$

P_2P_3 之斜率 $=\frac{c+a-a-b}{b-c}=\frac{c-b}{b-c}=\frac{-(b-c)}{b-c}=-1$.

因 P_1P_2 與 P_2P_3 之二斜率相等故已知之三點同在一直線內.

23. 證明 $(1,5)$ 在連 $(0,2)$, $(2,8)$ 兩點之直線內，但至兩點之距離相等.

解. 命 $(1,5)$ 爲 P, $(0,2)$ 爲 P_1 與 $(2,8)$ 爲 P_2,

PP_1 之斜率 $=\frac{5-2}{1-0}=3$.

PP_2 之斜率 $=\frac{5-8}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3$.

因 PP_1 與 PP_2 之二斜率相等，故 $(1,5)$ 點在 P_1P_2 直線上.

PP_1 之長 $=\sqrt{(1-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

PP_2 之長 $=\sqrt{(1-2)^2+(5-8)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

因 $PP_1=\sqrt{10}=PP_2$，故 $(1,5)$ 爲 P_1P_2 之中點.

24. 證明連 $(3,-2)$, $(5,1)$ 之直線與連 $(10,0)$, $(13,-2)$ 之直線相垂直.

解. 命 $(3,-2)$ 爲 P_1, $(5,1)$ 爲 P_2, $(10,0)$ 爲 P_3 與 $(13,-2)$ 爲 P_4

P_1P_2 之斜率 $=\frac{-2-1}{3-5}=\frac{3}{2}$.

P_3P_4 之斜率 $=\frac{0+2}{10-13}=-\frac{2}{3}$.

因 P_1P_2 與 P_3P_4 之二斜率互爲負倒數故 P_1P_2 與 P_3P_4 彼此垂直.

習　　題　(40頁－42頁)

求連 $(4,-6)$, $(-2,-4)$ 之直綫之中點之坐標.

解. 命 $(4,-6)$ 爲 P_1, $(-2,-4)$ 爲 P_2 及此直線之中點爲 $P(x,y)$

由 39 頁之推論，得

$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(4-2)=1$,

$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(-6-4)=-5$.

故 P_1P_2 之中點坐標爲 $(1,-5)$.

2. 將 $(a+b,c+d)$, $(a-b,d-c)$ 連成直綫，求其中點之坐標.

解. 命 $(a+b,c+d)$ 爲 P_1, $(a-b,d-c)$ 爲 P_2 及此直線之中點爲

$P\,(a,d)$.

由 39 頁之推論，得

$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(a+b+a-b)=a$，

$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(c+d+d-c)=d$.

故 P_1P_2 之中點坐標為 (a,d).

3. 以$(2,3)$，$(4,-5)$，$(-3,-6)$為頂點之三角形，其各邊中點之坐標如何，幷其諸中線之長如何？

解. 命 $(2,3)$ 為P_1，$(4,-5)$為P_2，$(-3,-6)$ 為P_3 且P_1P_2，P_2P_3 與 P_3P_1 之中點各為$P'(x',y')$，$P''(x'',y'')$ 與 $P'''(x''',y''')$.

由 39 頁之推論，得

$x'=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(2+4)=3$，

$y'=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(3-5)=-1$，

$x''=\frac{1}{2}(x_2+x_3)=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}$，

$y''=\frac{1}{2}(y_2+y_3)=\frac{1}{2}(-5-6)=-\frac{11}{2}=-5\frac{1}{2}$，

$x'''=\frac{1}{2}(x_3+x_1)=\frac{1}{2}(-3+2)=-\frac{1}{2}$，

$y'''=\frac{1}{2}(y_3+y_1)=\frac{1}{2}(-6+3)=-\frac{3}{2}=-1\frac{1}{2}$.

故此三角形三邊之中點為 $(3,-1)$，$(\frac{1}{2},-5\frac{1}{2})$ 與 $(-\frac{1}{2},-1\frac{1}{2})$.

由 31 頁公式 (V)，得

$P'P_3$ 之長 $=\sqrt{(3+3)^2+(-1+6)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$.

$$P''P_1\text{ 之長}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2+\left(-5\frac{1}{2}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{289}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{298}.$$

$$P'''P_2\text{ 之長}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-4\right)^2+\left(-1\frac{1}{2}+5\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{49}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{130}.$$

4. 連$(-1,4)$，$(-5,-8)$之直線，被P點所分兩段之比為$1:3$，試求P點之坐標.

解 令 $\lambda=\frac{1}{3}$；P_1 及 P_2 各為 $(-1,4)$ 及 $(-5,-8)$.

由 (VII) 得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{3}(-5)}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=-2.$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+\frac{1}{3}(-8)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=1.$$

5. 連$(-3,-5)$,$(6,9)$之直線，被P點所分兩段之比為$2:5$.試求P點之坐標.

解. 令$\lambda=\frac{2}{5}$；P_1及P_2各為$(-3,-5)$及$(6,9)$

由VII得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{2}{5}\times 6}{1+\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}=-\frac{3}{7};$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-7+\frac{2}{5}\times 9}{1+\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}}=-1$$

6. 連$(2,6)$,$(-4,8)$之直線，被P點分成兩段之比為$-\frac{4}{3}$求P點之坐標.

解. 令$\lambda=-\frac{4}{3}$；P_1及P_2各為$(2,6)$及$(-4,8)$.

由定理VII，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{2-\frac{4}{3}\times(-4)}{1-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{22}{3}}{-\frac{1}{3}}=-22;$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{6-\frac{4}{3}\times 8}{1-\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{14}{3}}{-\frac{1}{3}}=14.$$

7. 上題之兩點為$(3,-4)$,$(5,2)$,其比為$-\frac{2}{3}$;則P之坐標如何?

解. 令$\lambda=-\frac{2}{3}$.P_1與P_2各為$(-3,-4)$與$(5,2)$

由定理VII，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-3-\frac{2}{3}\times 5}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{19}{3}}{\frac{1}{3}}=-19;$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-4-\frac{2}{3}\times 2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}}=-16.$$

8. 連$(-2,-1)$,$(3,2)$之直線，被兩點分成三等分，試求兩分點之坐標.

解. 命$(-2,-1)$為P_1,$(3,2)$為P_2及分此直線成三等分之二分點為P與P'

由題設，P分P_1P_2為二段其比為$1:2$.及P'為PP_2之中點

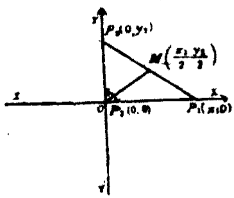
$$\therefore x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-2+\frac{1}{2}\times 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3};$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=0.$$

$$x'=\frac{-2+2\times 3}{1+2}=\frac{-2+6}{3}=\frac{4}{3};$$

$$y'=\frac{-1+2\times 2}{1+2}=1.$$

9. 證明直角三角形弦之中點至三頂點等距離.



解. $\frac{1}{2}P_1P_2$ 之長 $=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-0)^2+(0-y_1)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$$P_3M\text{ 之長}=\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{y_1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$\therefore\quad P_3M=P_1M=P_2M.$

10. 將 $(1,2)$, $(-5,-3)$, $(7,-6)$, $(1,-11)$ 連成平行四邊形. 證明兩對角綫互相平分.

解. 命 $(1,2)P_1$, $(-5,-3)P_2$, $(1,-11)P_3$, $(7,-6)P_4$.

此平行四邊形之對角線爲 P_1P_3 與 P_2P_4.

P_1P_3 之中點坐標爲

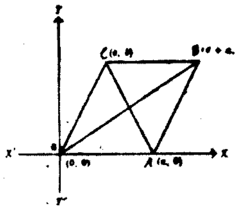
$$x=\frac{1+1}{2}=1;\quad y=\frac{2-11}{2}=-4\frac{1}{2}$$

P_2P_4 之中點坐標爲

$$x=\frac{-5+7}{2}=1;\quad y=\frac{-3-6}{2}=-4\frac{1}{2}$$

故 P_1P_3 之中點與 P_2P_4 之中點相同,換言之即 P_1P_3 與 P_2P_4 在其交點$(1,-4\frac{1}{2})$互相平分.

證明任意之平行四邊形，其兩對角線必互相平分.



解. 以 $O(0,0)$, $A(a,0)$, $C(c,b)$ 表任意四邊之三頂則第四頂為 $B(c+a,b)$.

且 OB 之中點為 $x=\frac{1}{2}(c+a)$, $y=\frac{1}{2}b$

AC 之中點為 $x=\frac{1}{2}(c+a)$, $y=\frac{1}{2}b$

故 O_2B_4 之中點與 AC 之中點相同. 換言之即 OB 與 A_2C_4 彼此平分.

12. 以 $(6,8)$, $(-4,0)$, $(-2,-6)$, $(4,-4)$ 為頂點之四邊形，將其每相對兩邊之中點，各以直線連之；試證明所連線互相平分.

解. 命 $(6,8)$ 為 P_1, $(-4,0)$ 為 P_2, $(-2,-6)$ 為 P_3 及 $(4,-4)$ P_4.

若繪此四邊形之圖，則 P_1P_2 與 P_3P_4 為對邊及 P_2P_3 與 P_4P_1 為樣邊.

由定理 VII 之推論，求得 P_1P_2, P_3P_4 及 P_2P_3 及 P_4P_1 之各中點分別為 $M_1(1,4)$, $M_2(1,-5)$, $M_3(-3,-3)$ 及 $M_4(5,2)$.

M_1M_2 之中點坐標為

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\quad y=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}.$$

M_3M_4 之中點坐標為

$$x=\frac{5-3}{2}=1,\quad y=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

故 M_1M_2 與 M_3M_4 彼此平分.

13. 於上題之四邊形，每相鄰兩邊之中點，各以直線連之，則成平行方形，試求斜度以證明之.

解. 由問題 12，求得

$$M_1M_3 \text{ 之斜率}=\frac{4+3}{1+3}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$$

$$M_2M_4 \text{ 之斜率} = \frac{-5-2}{1-5} = \frac{-7}{-4} = -1\frac{3}{4}$$

$$M_1M_4 = \frac{4-2}{1-5} = -\frac{1}{2}.$$

$$M_2M_3 = \frac{-5+3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

故 $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ 及 $M_1M_4 \parallel M_2M_3$，即 $M_1M_2M_3M_4$ 爲一平行四邊形.

14. 梯形之頂點爲$(-8,0)$，$(-4,-4)$，$(-4,4)$，$(4,-4)$. 將其不平行兩邊之中點，以直線連之，試證明此連線之長，等於平行兩邊和之半. 又證明此連線，必與平行之兩邊平行.

解. 命$(-8,0)$爲P_1，$(-4,-4)$爲P_2，$(-4,4)$爲P_3及$(4,-4)$爲P_4.

若劃此圖梯形之形則P_1P_3與P_2P_4爲不平行邊而P_1P_2與P_3P_4爲平行邊.

由定理 VII 之推論，求得 P_1P_3 之中點爲 $M_1(-6,2)$ 及 P_2P_4 之中點爲 $M_2(0,-4)$.

M_1M_2 之長 $=\sqrt{(6-0)^2+(2+4)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(-8+4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

P_4P_3 之長 $=\sqrt{(4+4)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$.

$\therefore\ M_1M_2=6\sqrt{2}=\frac{1}{2}(4\sqrt{2}+8\sqrt{2})=\frac{1}{2}(P_1P_2+P_3P_4)$

$$M_1M_2 \text{ 之斜率} = \frac{2+4}{-6-0} = -1.$$

$$P_1P_2 \text{ 之斜率} = \frac{0+4}{-8+4} = -1.$$

$\therefore\ M_1M_2 \parallel P_1P_2 \parallel P_4P_3$.

15. 過$(-3,5)$，$(4,-9)$之直線，被$P(-2,3)$分成兩段，其比如何?

解. 因 P，P_1 及 P_2 分別爲$(-2,3)$，$(-3,5)$ 及 $(4,-9)$，

故 $$-2=\frac{-3+\lambda 4}{1+\lambda},\ -2-\lambda=-3+4\lambda$$

$6\lambda=1$, $\therefore\ \lambda=\frac{1}{6}$.

16. 以(16,3)分(−5,0),(2,1)之連線爲兩段，其比如何？

解. 因 P,P_1 及 P_2 分別爲 (16,3),(−5,0) 及 (2,1)

故 $16=\dfrac{-5+2\lambda}{1+\lambda}$, $16+16\lambda=-5+2\lambda$

$14\lambda=-21$, $\therefore\ \lambda=-\frac{3}{2}$.

17. 三角形之頂點爲 (−5,3),(1,−3),(7,5)，將其任意兩邊之中點以直線連之，證明此連線必與第三邊平行，且連線之長，等於第三邊之半.

解，命 (−5,3) 爲 P_1,(1,−3) 爲 P_2,(7,5) 爲 P_3，及 P_1P_2，P_2P_3 與 P_3P_1 之各中點爲 M_1,M_2 與 M_3.

由定理 VII 之推論，求得 M_1,M_2 與 M_3 各點之坐標爲 (2,0),(4,1) 與 (1,4)

M_1M_2 之長 $=\sqrt{(4+2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{37}$.

P_3P_1 之長 $=\sqrt{(7+5)^2+(5-3)^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$

M_1M_2 之斜率 $=\dfrac{1-0}{4+2}=\frac{1}{6}$.

P_3P_1 之斜率 $=\dfrac{5-3}{7+5}=\frac{1}{6}$.

故 $M_1M_2 \parallel P_3P_1$；$M_1M_2=\frac{1}{2}P_3P_1$.

同樣 $M_2M_3 \parallel P_1P_2$；$M_2M_3=\frac{1}{2}P_1P_2$.

$M_3M_1 \parallel P_2P_3$；$M_3M_1=\frac{1}{2}P_2P_3$.

18. 三角形之三邊中點之坐標，爲 (2,1),(3,3),(6,2)，則其諸頂點之坐標如何？

解. 設 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$P_3(x_3,y_3)$，爲三角形之頂且假定 (2,1),(3,3) 與 (6,2) 分別爲 P_1P_2，P_2P_3 與 P_3P_1 之中點.

由定理 VII 之推論，得

$2=\dfrac{x_1+x_2}{2}$； $1=\dfrac{y_1+y_2}{2}$；

$3=\dfrac{x_2+x_3}{2}$； $3=\dfrac{y_2+y_3}{2}$；

$$x=\frac{x_3+x_1}{2};\quad 2=\frac{y_3+y_1}{2}.$$

解以上聯立方程式，得

$x_1=5,\ x_2=-1,\ x_3=7,\ y_1=0,\ y_2=2,\ y_3=4.$

故此三角形之頂為 $(5,0),(-1,2)$ 與 $(7,4)$.

19. 平行四邊形之三頂為$(1,2),(-5,-3),(7,-6)$，求第四頂.

解. 設 $P(x,y)$ 表此平行四邊形之第四頂且命 $(1,2)P_1$, $(-5,-3)P_2$ 及 $(7,-6)P_3$.

第一種情形. 假定 $P(x,y)$ 與 $P_1(1,2)$ 為對頂.

由定理 VI, PP_2 與 P_1P_3 之二斜率相等，又 PP_3 與 P_1P_2 之二斜率亦相等.

$$\therefore\quad \frac{y+3}{x+5}=\frac{2+6}{1-7},\quad \frac{y+6}{x-7}=\frac{2+3}{1+5},$$

$-6y-18=8x+40,\quad 6y+30=5x-35.$

$x=1,\quad y=-11.$

第二種情形. 假定 $P(x,y)$ 與 $P_2(-5,-3)$ 為對頂.

由定理 VI, PP_1 與 P_2P_3 之二斜率相等. 又 PP_3 與 P_1P_2 之二斜率亦相等.

$$\therefore\quad \frac{y-2}{x-1}=\frac{-3+6}{-5-7},\quad \frac{y+6}{x-7}=\frac{2+3}{1+5}$$

$-12y+24=3x-3,\quad 6y+36=5x-35.$

$x=13,\ y=-1.$

第三種情形. 假定 $P(x,y)$ 與 $P_3(7,-6)$ 為對頂.

於是 PP_1 與 P_2P_3 之二斜率相等，及 PP_2 與 P_1P_3 之二斜率亦相等

$$\therefore\quad \frac{y-2}{x-1}=\frac{-3+6}{-5-7},\quad \frac{y+3}{x+5}=\frac{2+6}{1-7}.$$

$-12y+24=3x-3,\quad -6y-18=8x+40.$

$x=-11,\quad y=5$

故 此平行四邊形之第四頂可爲 (1, −11), (13, −1) 或 (−11, 5)

20. 直線之中點爲(6,4), 其一端爲(5,7), 試求其他端.

解. 設 (x, y) 爲此直線他端之坐標.

於是 $6=\dfrac{x+5}{2}$, $x=7$;

$$4=\frac{y+7}{2}, \quad y=1.$$

故 此直線他端之坐標爲 $(7, 1)$.

21. 三角形之頂爲(2,3), (4, −5), (−3, −6). 求其諸中線交點之坐標.

解. 以 P_1 表 $(2, 3)$, P_2 表 $(4, -5)$, P_3 表 $(-3, -6)$ 及 $P(x, y)$ 表此三角形之重心.

由 40 頁例 2, 得

$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{3}(2+4-3)=1$;

$y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=\frac{1}{3}(3-5-6)=-\frac{8}{3}$.

22. 先求底之長及高, 以三角形之面積, 而其頂點爲 (1,5), (5,1) (−9, −9).

解. 命 (1,5) 爲 P_1, (5,1) 爲 P_2, (−9, −9) 爲 P_3 及 P_1P_2 之中點爲 M.

由平面幾何學可知 P_3M 爲此等腰三角之高線.

P_1P_2 之長 $=\sqrt{(1-5)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

由定理 VII 之推論, 求得 M 之坐標爲 $(3, 3)$.

P_3M 之長 $=\sqrt{(3+9)+(3+9)^2}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$.

故 $\triangle P_1P_2P_3$ 之面積 $=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 12\sqrt{2}=48$ 單位面積.

23. 引長 AB 直線至 C, 令 $BC=\frac{1}{2}AB$. 若 A, B 之坐標爲 (5, 6) (1, 2). 則 C 之坐標如何?

解. 令 $\lambda=2$, A 與 C 各爲 P_1 與 P_2.

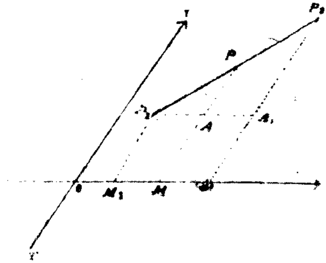
以 (x_2, y_2) 表 P_2 之坐標. 由 VII 得

$$7=\frac{5+2x_2}{1+2}, \quad 21=5+2x_2, \quad \therefore x_2=8;$$

$$2=\frac{6+2\lambda_2}{1+2},\qquad 6=6+2y_2;\qquad \therefore\ y_2=0.$$

故 C 點之坐標爲 $(8,0)$.

24. 證明定理VII引用於斜軸(即 x, y 兩軸非正交者)亦合理，卽證 XOY 角爲任何値皆可也.



解. 由平面幾何學，得

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1A}{AA_1}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda.$$

但 $M_1M=x-x_1$, $MM_2=x_2-x$.

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

化簡分式解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同樣 $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

25. 連 $(5,5)$, $(3,7)$ 之直線之中點，距原點幾何遠，又此直線之斜度幾何?

解. 連 $(5,5)$ 與 $(3,7)$ 所成之直線其中點坐標爲 $(4,6)$.

$(4,6)$ 距原點 $=\sqrt{(4-0)^2+(6-0)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

連 $(4,6)$ 與 $(0,0)$ 之直線之斜率.

$$m=\frac{6-0}{4-0}=\frac{3}{2}.$$

習　題　(45頁—46頁)

三角形之各頂爲(2,3),(1,5),(−1,−2),求其面積.

解. 以P_1表(2,3),P_2表(1,5),P_3表(−1,−2),

則　$x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=1$, $y_2=5$, $x_3=-1$, $y_3=-2$.

代入在公式(X)內.

$\triangle P_1P_2P_3$之面積$=\frac{1}{2}[10-3+(-2)-(-1)\times5+(-1)\times3$

$-2\times(-2)]=\frac{11}{2}$單位面積.

2. 三角形之各頂爲(2,3),(4,−5),(−3,−6),求其面積.

解. 以P_1表(−3,−6),P_2表(4,−5),P_3表(2,3).

於是 $x_1=-3$, $y_1=-6$, $x_2=4$, $y_2=-5$, $x_3=2$, $y_3=3$.

代入(X)式.

$\triangle P_1P_2P_3$之面積$=\frac{1}{2}[(-3)(-5)-4(-6)+4\times3-2(-5)$

$+2(-6)-(-3)\times3]=\frac{1}{2}[15+24+12+10-12+9]=29$單位面積.

3. 三角形之各頂爲(8,3),(−2,3),(4,−5),求其面積.

解. 以P_1表(8,3),P_2表(−2,3),P_3表(4,−5).

則　$x_1=8$, $y_1=3$, $x_2=-2$, $y_2=3$, $x_3=4$ $y_3=-5$.

第一步. 將角頂之坐標依次排列之,

第二步. 將橫坐標分別與其次列之縱坐標相乘而加之,得

8	3
−2	3
4	−5
8	3

$8\times3+(-2)(-5)+4\times3=46$

第三步. 將縱坐標分別與其次列之橫坐標相乘而加之,得

$3\times(-2)+3\times4+(-5)\times8=-34$

第四步. 由第二步所得之結果減去第三步之結果再以 2 除之即得.

面積$=\frac{1}{2}(46+34)=40$單位面積.

4. 三角形之各頂爲(a,o),$(-a,o)$,(o,b),求其面積.

解. 以P_1表(a,o),P_2表(o,b),P_3表$(-a,o)$.

第一步

a	o
o	b
$-a$	o
a	o

第二步　　$ab+o+(-a\times o)=ab$

第三步　　$o+b\times(-a)+o=-ab$

第四步　　面積$=\frac{1}{2}(ab+ab)=ab$ 單位面積.

以(o,o),(x_1,y_1),(x_2,y_2)爲各頂之三角形,其面積幾何?

解. 以P表(o,o),P_1表(x_1,y_1),P_2表(x_2,y_2).

第一步

$$\begin{matrix} o & o \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ o & o \end{matrix}$$

第二步　　$o\times y_1+x_1y_2+x_2\times o=x_1y_2$

第三步　　$o\times x_1+y_1\times x_2+y_2\times o=x_2y_1$

第四步　　面積$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$

6. 求三角形之面積,其各頂爲$(a,1)$,(o,b),$(c,1)$.

解. 以P_1表$(a,1)$,P_2表(o,b),$P_3$$(c,1)$.

則　$x_1=a$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=b$, $x_3=c$, $y_3=1$.

第一步

$$\begin{matrix} a & 1 \\ o & b \\ c & 1 \\ a & 1 \end{matrix}$$

第二步　　$a\times b+o\times 1+c\times 1=ab+c$

第三步　　$1\times o+b\times c+1\times a=bc+a$

第四步　　面積$=\frac{1}{2}(ab+c-bc-a)$

$$=\frac{1}{2}[a(b-1)-c(b-1)]$$

$$=\frac{1}{2}(a-c)(b-1)$$

7. 各頂爲(a,b),(b,a),$(c,-c)$之三角形,其面積幾何?

解. 以P_1表(a,b),P_2表(b,a),P_3表$(c,-c)$.

則　$x_1=a$, $y_1=b$, $x_2=b$, $y_2=a$, $x_3=c$, $y_3=-c$.

代入(X)式

面積$=\frac{1}{2}[a^2-b^2+b(-c)-ca+cb-a(-c)]$

$=\frac{1}{2}(a^2-b^2)=\frac{1}{2}(a+b)(a-b)$.

8. 有三角形,其各頂爲$(3,0)$,$(0,3\sqrt{3})$,$(0,3\sqrt{3})$試求其面積

解. 以 P_1 表$(3,0)$, P_2 表$(6,3\sqrt{3})$, P_3 表$(0,3\sqrt{3})$.

於是 $x_1=3$, $y_1=0$, $x_2=6$, $y_2=3\sqrt{3}$, $x_3=0$, $y_3=3\sqrt{3}$.

代入在公式 X) 內得

$\Delta P_1P_2P_3$之面積$=\frac{1}{2}[9\sqrt{3}-0+6\times\sqrt{3}-0+0-3\times\sqrt{3}]$

$=\frac{1}{2}[27\sqrt{3}-9\sqrt{3}]=9\sqrt{3}$ 單位面積.

9. 證明以$(2,3)$, $(5,4)$, $(-4,1)$爲各頂之三角形, 其面積等於零, 故三點同在一直線內:

解. 以 P_1 表$(2,3)$, P_2 表$(5,4)$, 及 P_3 表$(-4,1)$

於是 $x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=5$, $y_2=4$, 及 $x_3=-4$, $y_3=1$.

代入(X)式

面積$=\frac{1}{2}[2\times4-3\times5+5\times1-(-4)\times4+(-4)\times3-2]$

$=\frac{1}{2}[8-15+5+16-12-2]=0$.

P_1P_2之斜率$=\dfrac{4-3}{5-2}=\dfrac{1}{3}$.

P_1P_3之斜率$=\dfrac{1-3}{-2-4}=\dfrac{1}{3}$.

由定理 VI, $P_1P_2 \parallel P_1P_3$, 但此爲不可能, 因P_1P_2 與 P_1P_3 有公共點 P_1 故 P_1, P_2, P_3 三點同在一直線內.

10. 三角形之各頂爲 $(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$, 試證明其面積等於零, 且三點同在一直線內.

解. 以 P_1 表 $(a,b+c)$, P_2 表 $(b,c+a)$ 與 P_3 表 $(c,a+b)$

於是 $x_1=a$, $y_1=b+c$, $x_2=b$, $y_2=c+a$, $x_3=c$, $y_3=a+b$.

代入在公式 (X) 內

面積$=\frac{1}{2}[a(c+a)-b(b+c)+b(a+b)-c(c+a)+c(b+c)-a(a+b)]$

$=\frac{1}{2}[ac+a^2-b^2-bc+ab+b^2-c^2-ac+bc+c^2-a^2-ab]=0$.

P_1P_2之斜率$=\dfrac{c+a-b-c}{b-a}=\dfrac{a-b}{b-a}=-1$.

P_1P_3之斜率$=\dfrac{a+b-b-c}{c-a}=\dfrac{a-c}{c-a}=-1$.

由定理 VI, $P_1P_2 \parallel P_1P_3$, 但此爲不可能因 P_1P_2 與 P_1P_3 有一公共點 P_1, 故 P_1, P_2, P_3 三點同在一直線內.

11. 若以$(a,c+a)$,$(-c,0)$,$(-a,c-a)$為三角形之各頂,則其面積必等於零,且三點同在一直線內,試證明之.

解. 以P_1表$(a,c+a)$,P_2表$(-c,0)$,與P_3表$(-a,a-c)$

於是$x_1=a$,$y_1=c+a$,$x_2=-c$,$y_2=0$,$x_3=-a$,$y_3=c-a$.

代入(X)式

面積$=\frac{1}{2}[a\times0-(-c)(c+c)+(-c)(c-a)-(-a)\times0+(-a)(c+a)-a(c-a)]$,

$=\frac{1}{2}[c^2+ac-c^2+ac-ac-a^2-ac+a^2]=0$.

$$P_1P_2\text{之斜率}=\frac{c+a-0}{a+c}=1.$$

$$P_1P_3\text{之斜率}=\frac{c+a-c+a}{a+a}=1.$$

由定理VI,$P_1P_2 \parallel P_1P_3$,但此為不可能.

故 P_1,P_2,P_3三點同在一直線內.

12. 四邊形之各頂為$(-2,3)$,$(-3,-4)$,$(5,-1)$,$(2,2)$,求其面積.

解. 第一步. 將頂之坐標依次排列之

−2	3
−3	−4
5	−1
2	2
−2	3

第二步. 將各橫坐標分別與其次列之縱坐標相乘而加之,得

$(-2)(-4)+(-3)(-1)+5\times2+2\times3=27$.

第三步. 將各縱坐標分別與其次列之橫坐標相乘而加之,得

$3(-3)+(-4)5+(-1)\times2+2(-2)=-35$.

第四步. 以第二步所得之結果減去第三步之結果即得.

面積$=\frac{1}{2}(27+35)=31$ 單位面積.

13. 五邊形之各頂為$(1,2)$,$(3,-1)$,$(6,-2)$,$(2,5)$,$(4,4)$,其面積幾何?

解. 如繪此五邊形之圖形,則其頂點相鄰之次序為$(6,-2)$,$(4,4)$,$(2,5)$,$(1,2)$,$(3,-1)$.

第一步．
$$\begin{array}{rr} 6 & -2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{array}$$

第二步． $6\times4+4\times5+2\times2+1\times(-1)+3(-2)=41.$

第三步． $(-2)4+4\times2+5\times1+2\times3+(-1)\times\ =5,$

第四步． 面積$=\frac{1}{2}(41-5)=18$ 單位面積．

14． 平行四邊形之各頂爲$(10,5)$，$(-2,5)$，$(-5,-3)$，$(7,-3)$，其面積幾何？

解． 第一步
$$\begin{array}{rr} 10 & 5 \\ -2 & 5 \\ -5 & -3 \\ 7 & -3 \\ 10 & 5 \end{array}$$

第二步． $10\times5+(-2)(-3)+(-5)(-3)+7\times5=106.$

第三步． $5(-2)+5(-5)+(-3)7+(-3)10=-86.$

第四步． 面積$=\frac{1}{2}(106+86)=96$ 單位面積．

15． 以$(0,0)$，$(5,0)$，$(9,11)$，$(0,3)$ 爲各頂之四邊形，其面積幾何？

解． 第一步
$$\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 9 & 11 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}$$

第二步． $0+5\times11+9\times3+0=82.$

第三步． $0\times5+0\times9+11\times0+3\times0=0.$

第四步． 面積$=\frac{1}{2}(82-0)=41$ 單位面積．

16． 有四邊形其各頂爲 $(7,0)$，$(1\ ,9)$，$(0,5)$，$(0,0)$，試求其面積．

解． 第一步

$$\begin{matrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{matrix}$$

第二步． $7\times9+11\times5+0+0=118$．

第三步． $0\times11+9\times0+5\times0+0\times7=0$．

第四步． 面積$=\frac{1}{2}(118-0)=59$ 單位面積．

17． 以$(4,\ )$，$(2,-4)$，$(-4,2)$ 爲各頂之三角形，將其各邊之中點以直線連成小三角形；試證明大三角形之面積，等於小三角形之四倍．

解． 以 P_1 表 $(4,6)$，P_2 表 $(2,-4)$，P_3 表 $(-4,2)$ 及 M_1，M_2，M_3 分別表 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1 各邊之中點．

由定理 VII 之推論求得

M_1，M_2，M_3 之坐標分別爲 $(3,1)$，$(-1,-1)$，$(0,4)$．

$\triangle M_1M_2M_3$ 之面積$=\frac{1}{2}(3\times4-0+0+4-1+3)=9$．

$\triangle P_1P_2P_3$ 之面積$=\frac{1}{2}(2\times6+4\times4+4\times2+4\times6+4\times4-2\times2)$

$=36=4\times9=4\times\triangle M_1M_2M_3$ 之面積．

18． 自三角形之各頂$(3,-8)$，$(-4,6)$，$(7,0)$ 至其中心，各連以直線，則分原三角形爲三個等面積之三角形，試證明之．

解．以 P_1 表 $(7,0)$，P_2 表 $(-4,6)$，P_3 表 $(3,-8)$ 及 M 表此三角形之重心．

由 40 頁例題 2，求得 M 之坐標爲 $(2,-\frac{2}{3})$．

$\triangle P_1P_2M$ 之面積$=\frac{1}{2}(6\times7-0+4\times\frac{2}{3}-2\times6+0+7\times\frac{2}{3})$

$=\frac{56}{3}$ 單位面積．

$\triangle P_1MP_3$ 之面積$=\frac{1}{2}[7(-\frac{2}{3})-2\times0+2\times(-8)-3\times(-\frac{2}{3})$

$+3\times0-7(-8)]$

$=\frac{1}{2}[-\frac{14}{3}-16+2+56]=\frac{56}{3}$．

$\triangle P_3MP_2$ 之面積$=\frac{1}{2}(-2+16+12-\frac{8}{3}+32-18)=\frac{56}{3}$

$\therefore\ \triangle P_1P_2M=\triangle P_1MP_3=\triangle P_3MP_2$．

19． 四邊形之各頂爲$(0,0)$，$(6,8)$，$(10,-2)$，$(4,-4)$，每相鄰兩邊之中點，各以直線連之，以成一小四邊形，試證明小四邊形之面積，等於大四邊形之半．

解． 以 P_1 表 $(0,0)$，P_2 表 $(4,-4)$ 與 P_3 表 $(10,-2)$，P_4 表

$(6,8)$ 及 M_1，M_2，M_3 與 M_4 分別表 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_4 與 P_4P_1 各邊之中點.

由定理 VII 之推論，求得 M_1，M_2，M_3 與 M_4 之各坐標分別為 $(2,-2)$，$(7,-3)$，$(8,3)$ 與 $(3,4)$.

$$P_1P_2P_3P_4 \text{ 之面積} = \tfrac{1}{2}[(0-8+80+0) - (0-40-12+0)] = \tfrac{1}{2}(72+52) = 62 \text{ 單位面積}$$

0	0
10	−4
10	−2
0	8
0	0

$$M_1M_2M_3M_4 \text{ 之面積} = \tfrac{1}{2}[(-6+21+32-6)-(14-24+9+8)] = \tfrac{1}{2}(41+21) = 31. \text{ 單位面積.}$$

2	−2
7	−3
8	3
3	4
2	−2

$\therefore$ $M_1M_2M_3M_4$ 之面積 $=\tfrac{1}{2}P_1P_2P_3P_4$ 之面積.

習　　題　(49頁—50頁)

1. x軸上有四點，其距原點爲1，3，6，10，試應補理II以求P_1P_4.

解. 由補定理 II 得

$P_1P_4=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4$.

但 $P_1P_2=OP_2-OP_1=3-1=2$；

$P_2P_3=OP_3-OP_2=6-3=3$；

$P_3P_4=OP_4-OP_3=10-6=4$.

$\therefore$ $P_1P_4=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4=2+3+4=9$.

2. 將 $(-1,4)$，$(3,6)$，$(6,-2)$，$(8,1)$，$(1,-1)$ 依次連成折線，試證明投各段之影於x軸上於第二投影定理亦合.

解. 以 P_1 表 $(-1,4)$，P_2 表 $(3,6)$，P_3 表 $(6,-2)$，P_4 表 $(8,1)$ 與 P_5 表 $(1,-1)$.

P_1P_2 在 XX' 上之射影$=3+1=4$；

P_2P_3 在……………………$=6-3=3$；

P_3P_4 在……………………$=8-6=2$；

P_4P_5 在……………………$=1-8=-7$；

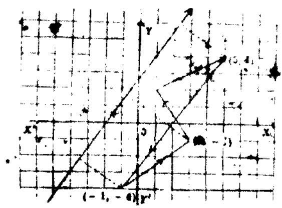
P_1P_5 在……………………$=1+1=2$，

P_1P_2，P_2P_3，P_3P_4，P_4P_5，在 XX' 上各射影之總和

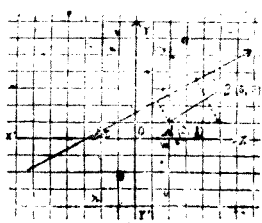
$=4+3+2-7=2=P_1P_5$ 在 XX' 上之射影.

故當此折線各段之射影投射在 y 軸上，射影之第二定理仍合理

3. 將 $(1,2)$，$(5,4)$，$(-1,-4)$，$(3,-1)$，$(1,2)$ 連成折線，試作圖以表明共投在任何直線上之影，必等於零.



4. 通過 $(-1,1)$ 之直線，其傾角爲 $\frac{\pi}{6}$，試求 $A(2,1)$，$B(5,3)$ 直線投在此直線上之投影.



解. 於圖，應用射影第二定理，得

AB 在 DE 上之射影 $=AT$ 之射影 $+TB$ 上之射影.

$$=AT\cos\frac{\pi}{6}+TB\cos\frac{\pi}{3}=(5-2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(3-1)\times\frac{1}{2}$$

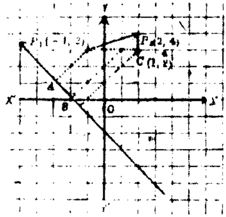
$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}+1\frac{-3\sqrt{3}+2}{2}$$

5. 過二相同點之直線，其在傾斜角爲 $\frac{\pi}{6}$ 之任意線上之射影爲

何?何故?

解. 連二相同點之直線，其在任何線上之射影俱爲零，因此直線爲一點，且此點在任何直線上之射影必爲從此點至那線所作垂線之垂足.

6. 試求$(-1,3)$，及$(2,4)$之連線，在傾角$\frac{3}{4}\pi$之直線上之投影.



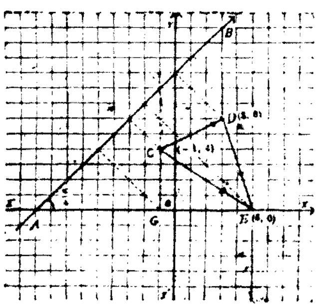
解. 於圖，應用射影之第二定理，得

P_1P_2 在 AB 上之射影 $=P_1C$ 之射影 $+CP_2$ 之射影

$$=P_1C\cos\frac{3\pi}{4}+CP_2\cos\frac{\pi}{4}.$$

$$=(2+1)\times\frac{-\sqrt{2}}{3}+(4-3)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=-\sqrt{2}.$$

7. 連$(-1,4)$，$(3,6)$，$(5,0)$之折線，試求其在傾角爲$\frac{\pi}{4}$之直線上之射影. 並求閉合線之射影以驗之.



解. 於圖，應用射影之第二定理，得

在 AB 上 CDE 之射影$=CE$ 之射影

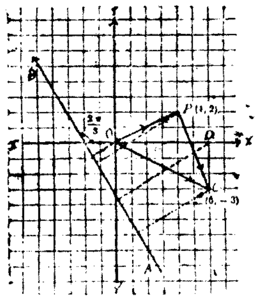
$=CG$ 之射影 $+GE$ 之射影

$$=CG\cos\frac{3\pi}{4}+GE\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=(0+4)\times\frac{-\sqrt{2}}{2}+(5+1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

$\therefore$ $CEAB$ 上之射影 $=CD$ 之射影 $+DE$ 之射影.

8. 將 $(0,0)$, $(4,2)$ 與 $(6,-3)$ 連成折線，試求其傾角為 $\frac{2\pi}{3}$ 之直線上之射影.



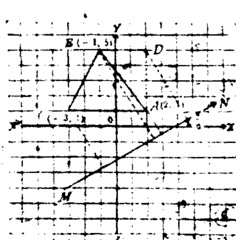
解. 於圖，應用射影之第二定理.

在 AB 上 OPC 之射影 $=OC$ 之射影 $=OD$ 之射影 $+$ DC 之射影

$$=OD\cos\frac{2\pi}{3}+DC\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$=6\times\frac{-1}{2}+3\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{-6-3\sqrt{3}}{2}.$$

9. 證三角形 $(2,1)$, $(-1,5)$, $(-3,1)$ 之行在傾斜為 $\frac{\pi}{6}$ 之直線上之射影為零



解. 於圖，應用射影之第二定理.

三角形之三邊在 MN 上之射影

$=CA$ 之射影 $+BC$ 之射影 $+AB$ 之射影

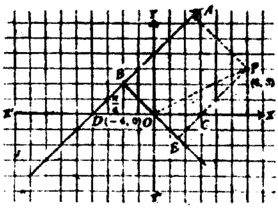
$=BA$ 之射影 $+AB$ 之射影.

$=BD$ 之射影 $+DA$ 之射影 $+AD$ 之射影 $+DB$ 之射影.

$$=BD\cos\frac{\pi}{6}+CA\cos\frac{2\pi}{3}+AD\cos\frac{\pi}{3}+DB\cos\frac{5\pi}{6}.$$

$$=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{-1}{2}+4\times\frac{1}{2}+3\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=0.$$

10. 過 $(-4,0)$ 之直線，其傾斜角為 試求此直線與 $(6,3)$ 之距離.



解. 於圖作 $OB\perp DA$，且應用射影之第二定理.

OP 在 BE 上之射影 $=OC$ 之射影 $+CP$ 之射影.

$$=OC\cos\frac{\pi}{4}+CP\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

但 OP 在 BE 上之射影 $=BE-BO=AP-4\cos\frac{\pi}{4}$.

$$=AP-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=AP-\sqrt{2}$$

$\frac{3}{2}\sqrt{2}=AP-2\sqrt{2}$， $\therefore AP=\frac{3}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

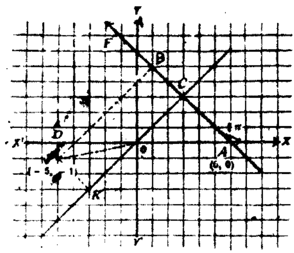
11. 傾斜角為 $\frac{3}{4}\pi$ 且過 $(6,0)$ 之直線，試求其與 $(-5,-1)$ 之距離.

解. 於圖作 $CO\perp AF$，且應用射影之第二定理.

OP 在 OC 上之射影 $=OD$ 之射影 $+DP$ 之射影

$$=OD\cos\frac{\pi}{4}+DP\frac{\pi}{4}\cos,$$

$$=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}.$$



但 OP 在 CO 上之射影 $=CK-CO=BP-OA$ 之射影

$$=BP-6\cos\ \ =BP-3\sqrt{2}$$

$\therefore\ \ 3\sqrt{2}=BP-3\sqrt{2}.$

$\therefore\ \ BP=6\sqrt{2}.$

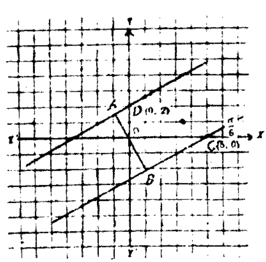
12\. 傾角為 $\frac{\pi}{6}$ 且通過 (5, 0) 之直線，試求其與另一平行且通過 (0, 2) 之直線之距離.

解. 於圖，應用射影之第二定理.

$OA=OD$ 在 OA 上之射影 $=OD\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$

$OB=OC$ 在 OB 上之射影 $=OC\cos\frac{\pi}{3}=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

$$AB\text{ 之長}=\sqrt{3}+\frac{5}{2}=\frac{5+2\sqrt{3}}{2}.$$



第 三 章

習 題 (55頁－57頁)

求下列諸直綫之方程式，俱平行OY，且

(a) 在OY之右相距4.

解. $x=5$.

(b) 在OY之左相距7.

解. $x=-7$.

(c) 在$(3,2)$之右相距2

解. $x=3+2$,

即 $x=5$.

(d) 在$(2,-2)$之左相距5.

解. $x=2-5$

即 $x=-3$.

2. 一線平行OY且至OY之距離爲$a-b$單位，其方程式爲何？若$a>b>0$此線與OY有如何之關係？若$0>b>a$又如何？

解. 與前題同樣方法求得此直線之方程式爲$x=a-b$.

若 $a>b>0$，則此直線在OY之右距離爲$a-b$單位.

若 $0>b>a$，則此直線在OY之左，距離爲$-(a-b)$或$b-a$單位.

3. 求下列諸直線之方程式，俱平行OX，且

(a) 在OX之上相距3.

解. $y=3$.

(b) 在OX之下相距6.

解. $y=-6$

$y+6=0$.

(c) 在$(-2,-3)$之上相距7.

解. $y=-3+7=4$.

故 $y=4$.

(d) 在$(4,-2)$之下相距5

解. $y=-2-5$

即　$y+7=0$.

5. 與直線 $x=4$ 平行之直線，且在其右相距 3 之處，其方程式如何？若在其左相距8之處，又如何？

解. (a) $x=4+3$，　即 $x=7$.

(b) $x=4-8$，　即 $x+4=0$.

6. 與直線 $y=-2$ 平行之直線，(1) 在其下相距4；(2) 在其上相距5；其方程式如何？

解. 與前同樣方法求得

(a)　$y=-2-4=-6$.

(b)　$y=-1+5=3$.

7. (1)若 $a>b>0$，(2)若 $b>a>0$，則直線 $y=a-b$ 之位置如何？

解. 若 $a>b>0$ 時，則此直線在 OX 之上距離為 $a-b$ 單位.

若 $b>a>0$ 時，則此直線在 OX 之下距離為 $b-a$ 單位.

8. x 軸及 y 軸之方程式如何？

解. x 軸之方程式為 $y=0$，因在 x 軸上任何點之縱坐標均為零故也.

y 軸之方程式為 $x=0$，因在 y 軸上任何點之橫坐標均為零故也.

9. 有一動之一點，其至(1) x 軸，(2) y 軸，(3) 直線 $x=-5$，(4) 直線 $y=4$ 之距離，恒為2；試求此點軌跡之方程式.

(1)　$y=2$ 或 $y=-2$.

(2)　$x=2$，或 $x=-2$.

(3)　$x=-5+3$ 或 $x=-5-3$.

即　$x=-2$ 或 $x=-8$.

(4)　$y=4+2$ 或 $y=4-2$.

即　$y=6$，$y=2$.

10. 有一動之一點，其至 (1) 直線 $x=5$ 及 $x=9$，(2)直 $y=3$ 及 $y=-7$ 之距離恒相等，試求此點軌跡之方程式.

解. (1) $x=\frac{1}{2}(5+9)$，　即 $x=7$.

(2) $y=\frac{1}{2}(3-7)$，即 $y=-2$.

11. 以(5,2)，(5,5)，(−2,2)，(−2,5)為頂之矩形，試求各邊之方程式.

解. $(5,2)$ 與 $(5,5)$ 之橫坐標相等，故過此兩點之方程爲 $x=5$

$(-2,5)$ 與 $(-2,2)$ 之橫坐標相等，故過此兩點之方程爲 $x=-2$

$(-2,5)$ 與 $(5,5)$ 之縱坐標相等，故過此兩點之方程爲 $y=5$

$(-2,2)$ 與 $(5,2)$ 之縱坐標相等，故過此兩點之方程 $y=2$

12. 求下列諸直線之方程式:

(a) P 爲 $(0,3)$ 且 $m=-3$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知條件爲 $m=-3$

但由 35 頁定理 V 得 $m=\dfrac{y-3}{x-0}$

故 $-3=\dfrac{y-3}{x}$ 或 $3x+y-3=0$.

(b) P_1 爲 $(-4,-2)$ 且 $m=\frac{1}{3}$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知條件爲 $m=\frac{1}{3}$.

但由 35 頁定理 V 得 $m=\dfrac{y+2}{x+4}$

故 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{y+2}{x+4}$ 或 $x-3y-2=0$.

(c) P_1 爲 $(-2,3)$ 且 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

但由 35 頁定理 V，得 $m=\dfrac{y-3}{x+2}$

故 $\dfrac{y-3}{x+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，或 $\sqrt{2}x-2y+6+2\sqrt{2}=0$

(d) P_1 爲 $(0,5)$ 且 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

但由 35 頁定理 V，得$m=\dfrac{y-5}{x-0}$

$\therefore\ \dfrac{y-5}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{3}x-2y+10=0$.

(e) P_1 爲 $(0,0)$ 而 $m=-\frac{2}{3}$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直定上任意一點.

已知 $m=-\frac{2}{3}$.

但由 35 頁定理V，得 $m=\dfrac{y-0}{x-0}$

$\therefore\ \dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{3}$ 或 $2x+3y=0$

(f) P_1 爲 (a,b) 及 $m=0$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=0$.

但由 35 頁定理 V，得 $m=\dfrac{y-b}{x-a}$

$\therefore\ \dfrac{y-b}{x-a}=0$ 或 $y-b=0$

(g) P_1 爲 $(-a,b)$，$m=\infty$，

解. 設 $P(x,y)$爲直線上任意一點.

已知 $m=\infty$

但由 35 頁定理 V，得 $m=\dfrac{y-b}{x+a}$

$\dfrac{y-b}{x+a}=\dfrac{c}{0}$. 或 $c(x+a)=0$. $c\neq 0$

或 $x+a=0$.

13. 求下列諸直線之方程式.

(a) P_1 爲 $(2,3)$ 及 $a=45^\circ$

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 45^\circ=1$.

但由 35 頁 公式 (V)，得 $m=\dfrac{y-3}{x-2}$，

$$\frac{y-3}{x-2}=1\text{，或 }x-y+1=0.$$

(b) P_1 爲 $(-1,2)$ 及 $\alpha=45°$

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 45°=1$.

但由 35 頁公式(V)，得 $m=\dfrac{y-2}{x+1}$

$$\therefore\ \frac{y-2}{x+1}=1\text{，或 }x-y+3=0.$$

(c) P_1 爲 $(-a,-b)$ 及 $\alpha=45°$

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 45°=1$.

但由 35 頁公式 (V)，得 $m=\dfrac{y+b}{x+a}$.

$$\therefore\ \frac{y+b}{x+a}=1\text{或 }x-y+a-b=0.$$

(d) P_1 爲 $(5,2)$ 及 $\alpha=60°$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 60°=\sqrt{3}$.

但由 35 頁定理 V，得 $m=\dfrac{y-2}{x-5}$.

$$\therefore\ \frac{y-2}{x-5}=\sqrt{3}\text{，或 }\sqrt{3}x-y+2-5\sqrt{3}=0.$$

(e) P_1 爲 $(0,-7)$ 及 $\alpha=60°$.

解.設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知條件爲 $m=\tan\alpha=\tan 60°=\sqrt{3}$.

但由 35 頁定理 V，得 $m=\dfrac{y+7}{x-0}$.

$$\therefore\ \frac{y+7}{x}=\sqrt{3}\text{，或 }\sqrt{3}x-y-7=0.$$

(f) P_1 爲 $(-4,5)$ 而 $\alpha=0°$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 0°=0$，

但由 35 頁公式 (V)，得 $m=\frac{y-5}{x+4}$.

$\therefore\quad \frac{y-5}{x+4}=0$，或 $y-5=0$.

(g) P_1 爲 $(2,\ -3)$ 而 $\alpha=90^\circ$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 90^\circ=\infty$

但由 35 頁公式 V，得 $m=\frac{y+3}{x-2}$.

$\therefore\quad \frac{y+3}{x-2}=\infty$ 或 $x-2=\frac{y+3}{\infty}$

此直線之傾斜角爲 90°，則此線必平行 OY.

$\therefore\quad x-2=\frac{y+3}{\infty}$，變爲 $x-2=0$.

(h) P_1 爲 $(3,\ -3\sqrt{3})$ 及 $\alpha=120^\circ$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$.

但由 35 頁公式 (V)，得 $m=\frac{y+3\sqrt{3}}{x-3}$.

$\therefore\quad \frac{y+3\sqrt{3}}{x-3}=-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}x+y=0$.

(i) P_1 爲 $(0,3)$ 及 $\alpha=150^\circ$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

但由 35 頁公式 (V)，得 $m=\frac{y-3}{x-0}$

$\therefore\quad \frac{y-3}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\sqrt{3}x+3y-9=0$.

(j) P_1 爲 (a,b) 及 $\alpha=135^\circ$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知 $m=\tan\alpha=\tan 135^\circ=-1$.

但由 35 頁公式（V） 得 $m=\dfrac{y-b}{x-a}$.

$\therefore\ \dfrac{y-b}{x-a}=-1$ 或 $x+y-(a+b)=0$.

14. $(3,9)$, $(4,6)$, $(5,5)$ 三點，是否在直線 $3x+2y=25$ 上.

解. 將此三點之坐標數值代入在已知方程式內得

當 $x=3$, $y=9$ 時， $3\times3+2\times9=27\neq25$；

當 $x=4$, $y=6$ 時， $3\times4+2\times4=20\neq25$；

當 $x=5$, $y=5$ 時， $3\times5+2\times5=25$.

故 $(5,5)$ 在直線 $3x+2y=25$ 上，但 $(3,9)$ 與 $(4,6)$ 不在此直線上.

15. 求下列諸圓之方程式：

(a) 圓心在 $(3,2)$ 及半徑 $=4$.

解. 第一步. 設 $P(x,y)$ 爲圓上任意一點.

第二步. 以 C 表 $(3,2)$，則已知之條件爲 $PC=4$.

第三步. 由 31 頁公式 (IV)，得

$$PC=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$\therefore\ 4=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

平方且化簡得 $x^2+y^2-6x-4y-3=0$.

(b) 圓心在 $(12,-5)$ 及 $r=13$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲圓上任意一點.

由題設及 31 頁公式 (IV)，得

$$\sqrt{(x-12)^2+(y+5)^2}=13.$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2-24x+10y=0.$$

(c) 圓心爲 $(0,0)$ 及半徑 $=r$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲圓上任意一點.

由題設及 31 頁公式 (IV)，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2=r^2$$

(d) 圓心為 $(0,0)$ 及 $r=5$.

解. 設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點.

由題設及 31 頁公式 (IV)，得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=5.$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2=25.$$

(e) 圓心為 $(3a,\ 4a)$，及 $r=5a$.

解. 設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點.

由題設及 31 頁公式 (IV)，得

$$\sqrt{(x-3a)^2+(y-4a)^2}=5a.$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2-6ax-8ay=0.$$

(f) 圓心在 $(b+c,\ b-c)$ 及 $r=c$.

解. 設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點.

由題設及 31 頁公式 (IV)，得

$$\sqrt{(x-b-c)^2+(y-b+c)^2}=c.$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2-2(b+c)x-2(b-c)y+2b^2+c^2=0.$$

16. 中心為 $(5,-4)$ 之圓通過 $(-2,3)$，試求其方程式.

解. 設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點.

由 31 頁公式 (IV)，得半徑 r 為

$$r=\sqrt{(5+2)^2+(-4-3)^2}=7\sqrt{2}$$

$$r=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-5)^2-(y+4)^2}=7\sqrt{2}.$$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2-10x+8y-57=0.$$

17. 圓徑之兩端為 $(3,-5)$，$(-2,2)$ 求圓之方程式.

解. 設 $P(x,y)$ 為圓上任意一點.

由 39 頁定理 VII 之推論，求得中心之坐標為 $(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2})$

由 31 頁公式 (IV)，得半徑 r 為

$$r=\sqrt{(3+2)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{74}.$$

$r=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2}$,

$\therefore\ \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{74}$

平方且化簡，得

$x^2+y^2-x+3y-16=0$.

8. 圓周與 x, y 兩軸之切點，距原點俱等於6，求圓之方程式.

解. 設 $P(x, y)$ 爲圓上任意一點.

由題設，若此圓在第一象限，則中心之坐標爲 $(6, 6)$.

若在第二，第三或第四象限，則中心之坐標各爲

$(-6, 6)$，$(-6, -6)$ 或 $(6, -6)$

由 31 頁公式 (IV)，得

$$r=\sqrt{(x-6)^2+(y+6)^2}=\sqrt{x^2+y^2-12x-12y+72}.$$

$$r=\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2}=\sqrt{x^2+y^2+12x+12y+72}.$$

$$r=\sqrt{(x-6)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2+y^2+12x+12y+72}.$$

$$r=\sqrt{(x+6)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2+y^2+12x-12y+72}.$$

$\therefore\ \sqrt{x^2+y^2-12x-12y+72}=6$,

$\sqrt{x^2+y^2+12x+12y+72}=6$,

$\sqrt{x^2+y^2-12x+12y+72}=6$,

$\sqrt{x^2+y^2+12x-12y+72}=6$;

平方且化簡卽得所求之方程式爲

$x^2+y^2-12x-12y+36=0$,

$x^2+y^2+12x+12y+36=0$;

$x^2+y^2-12x+12y+36=0$;

$x^2+y^2+12x-12y+36=0$.

19. 以連 $(-6, 8)$ 與原點之直線之中點爲中心，且圓周通過 $(2, 3)$，求此圓之方程式.

解. 設 $P(x, y)$ 爲圓上任意一點.

由 31 頁定理 VII 之推論，求得中心之坐標爲 $(-3, 4)$

由 31 頁公式 (IV)，得

$r=\sqrt{(2+3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{26}$;

$r=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}$

$\therefore\ \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{26}$

平方且化簡，得

$$x^2+y^2+6x-8y-1=0.$$

20. 一動點，其距固定兩點 $(2,-3)(-1,4)$ 恆相等，求此點軌跡之方程式，並作圖以表之.

解. 設 $P(x,y)$ 為軌跡上任意一點且以 P_1 表 $(2,-3)$，P_2 表 $(-1,4)$

已知 $PP_1=PP_2$

由 31 頁公式 (IV) 得

$PP_1=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$;

$PP_2=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

平方且化簡，得

$3x-7y+2=0.$

21. 試求連下列各兩點之直線之垂直平分線之方程式

(a) $(2,1),(-3,-3)$.

解. 設 $P(x,y)$ 為此垂直平分線上任意一點

且以 A 表 $(2,1)$，B 表 $(-3,-3)$.

已知 $PA=PB$

由 31 頁公式 IV，得

$PA=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$; $PB=\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}$

$\therefore\ \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}$

平方且化簡，得

$10x+8y+13=0$.

(b) $(3,1),(2,4)$.

解. 設 $P(x,y)$ 為此垂直平分線上任意一點且以 A 表 $(3,1)$，B 表 $(2,4)$.

由 31 頁公式 (IV)，得

$PA=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$; $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

$\therefore\ \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$

平方且化簡，得

$x-3y+5=0$.

(c) $(-1,-1),(3,7)$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲此垂直平分線上任意一點，且以 A 表 $(-1,-1)$，B 表 $(3,7)$.

已知 $PA=PB$

由 31 頁公式 (IV) 得

$$PA=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2};\ PB=\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2}$$

平方且化簡，得

$x+2y-7=0$.

(d) $(0,4),(3,0)$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲此垂直平分線上任意一點且以 A 表 $(0,4)$，B 表 $(3,0)$.

已知 $PA=PB$.

由 31 頁公式 (IV)，得

$$PA=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2};\ PB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

平方且化簡，得

$6x-8y+7=0$.

(e) $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

解. 設 $P(x,y)$ 爲垂直平分線上任意一點，且以 P_1 表 (x_1,y_1)，P_2 表 (x_2,y_2).

已知 $PP_1=PP_2$.

由 31 頁公式 (IV)

$$PP_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2};\ PP_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

平方且化簡，得

$$2(x_1-x_2)x-2(y_1-y_2)y-x_1^2+x_2^2-y_1^2+y_2^2=0.$$

22. 於上題證明諸連線中點之坐標，亦能適合垂直平分線之方程式.

(a) 解. 由 39 頁定理 VII 之推論，求得 AB 之中點坐標爲 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$，

以此點之值代入方程式內，

$10\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8(-1)+13=0.$

故 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ 適合於方程式 $10x+8y+13=0$.

(b) 解. 由 39 頁定理 VII 之推論. 求得 AB 之中點坐標爲 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

以此點之值代入方程內.

$\frac{5}{2}-3\times\frac{5}{2}+5=0.$

故 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 適合於方程式 $x-3y+5=0$.

(c) 解. 由 39 頁定理 VII 之推論求得 AB 之中點坐標爲 $(1,3)$.

以此點之坐標代入方程式內，

$1+2\times3-7=0.$

故 $(1, 3)$ 適合方程式 $x+2y-7=0$.

(d) 解. 由 39 頁定理 VII 之推論求得 AB 之中點坐標爲 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

以此點之坐標代入方程式內；

$6\times\frac{3}{2}-8\times2+7=0.$

故 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 適合於方程式 $6x-8y+7=0$.

(e) 解. 由 30 頁定理 VII 之推論求得 P_1P_2 之中點爲

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

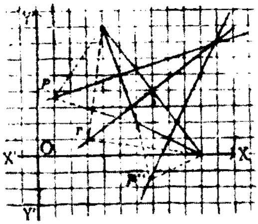
以此點之坐標代入方程式內，

$$2(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2}{2}+2(y_1-y_2)\frac{y_1+y_2}{2}-x_1^2+x_2^2-y_1^2+y_2^2=0.$$

故 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 適合方程式內，

$$2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y-x_1^2+x_2^2-y_1^2+y_2^2=0.$$

23. 試求三角形(4,8)，(10,0)，(6,2) 各邊之垂直平分線之方式，並證明諸平分線同相交於(11,7).



解. 設 $P(x, y)$，$P'(x', y')$ 及 $P''(x'', y'')$ 分別爲 AC，AB 及 BC 三邊之垂直平分線上的任意點.

已知之條件爲 $PA=PC$，$P'A=P'B$ 及 $P''B=P''C$，

由 31 頁公式 (IV)，得

$PA=\sqrt{(x-4)^2+(y-8)^2}$； $PC=\sqrt{(x-10)^2+(y-0)^2}$；

$P'A=\sqrt{(x'-4)^2+(y'-8)^2}$： $P'B=\sqrt{(x'-6)^2+(y'-2)^2}$；

$P''B=\sqrt{(x''-6)^2+(y''-2)^2}$； $P''C=\sqrt{(x''-10)^2+(y''-0)^2}$

$\therefore$ $\sqrt{(x-4)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-10)^2+(y-0)^2}$；

$\sqrt{(x'-4)^2+(y'-8)^2}=\sqrt{(x'-6)^2+(y'-2)^2}$；

$\sqrt{(x''-6)^2+(y''-2)^2}=\sqrt{(x''-10)^2+(y''-0)^2}$

平方且化簡，得

$3x-4y-5=0$； $x'-3y'+10=0$； $2x''-y''-15=0$.

將 (11, 7) 代入在三方程式內.

$3\times 11-4\times 7-5=0$；　　$11-3\times 7+0=0$；

$2\times 11-7-15=0$.

故三垂直平分線在點 (11, 7) 處相交，因點 (11, 7) 適合於垂直平分線的方程式.

24. 試以方程式表明(h, k)距 $(-1, 1)$ 及 $(1, 2)$ 等遠；又距 $(1, 2)$ 及 $(1, -2)$ 等遠. 由此再證明 $(\frac{3}{2}, 0)$ 距 $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, -2)$ 三點俱等遠.

解. 以 P 表 (h, k)，A 表 $(-1, 1)$，B 表 $(1, 2)$，C 表 $(1, -2)$

已知之條件爲 $PA=PB$，$PB=PC$，

由 31 頁公式 (IV)，得

$A=\sqrt{(h+1)^2+(k-1)^2}$; $PB=\sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}$

$PC=\sqrt{(h-1)^2+(k+2)^2}$.

$\therefore \quad \sqrt{(h+1)^2+(k-1)^2}=\sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}$;

$\quad\quad \sqrt{(h-1)^2+(k-2)^2}=\sqrt{(h-1)^2+(k+2)^2}$,

平方且化簡，得

$4h+2k-3=0$，$k=0$.

以 $(\frac{3}{4},0)$ 代入以上二方程式內，

$4\times\frac{3}{4}+2\times0-3=0$， $0=0$.

故 $(\frac{3}{4},0)$ 至 $(-1,1)$, $(1,2)$, $(1,-2)$ 三點爲等距離.

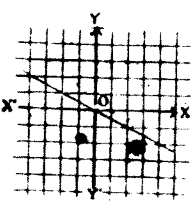
因 $(\frac{3}{4},0)$ 適合於方程式 $4h+2k-3=0$ 及 $k=0$ 故也.

且此二方程式分別爲 AB 及 BC 之垂直平分線.

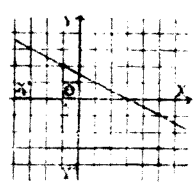
習　　題 (62頁)

試作下列諸方程之軌跡:

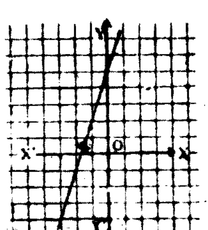
(a) $x+2y=0$.



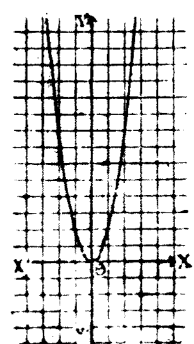
(b) $x+2y=3$.



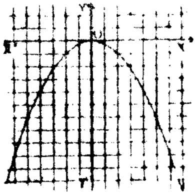
(c) $3x-y+5=0$.



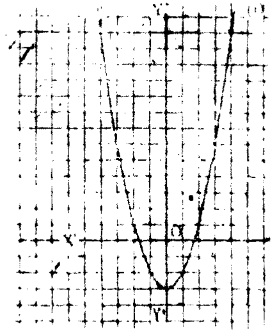
(d) $y=4x^2$.



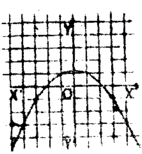
(e) $x^2+4y=0$



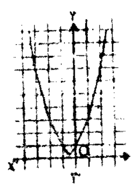
(f) $y=x^2-3$.



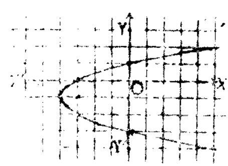
(g) $x^2+4y-5=0$.



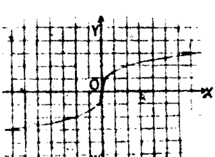
(h) $y=x^2+x+1$



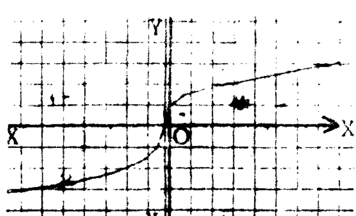
(i) $x=y^2+2y-3$



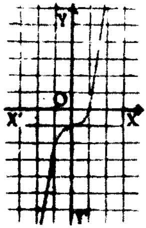
(j) $4x=$



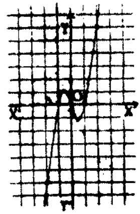
(k) $4x=y^3-1$.



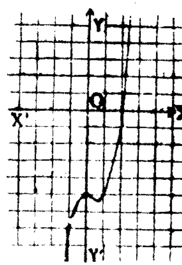
(l) $y=x^3-1$.



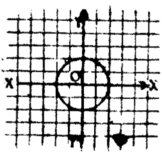
(m) $y=x^5-x$.



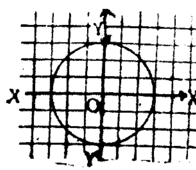
(n) $y=x^3-x^2-5$.



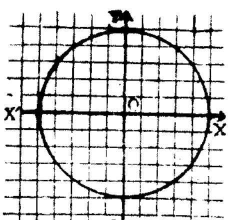
(o) $x^2+y^2=4$.



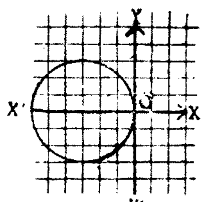
(p) $x^2+y^2=9$.



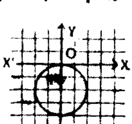
(q) $x^2+y^2=25$.



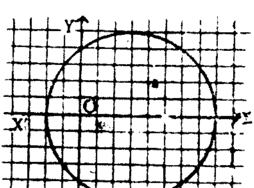
(r) $x^2+y^2+9x=0$.



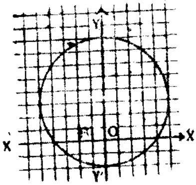
(s) $x^2+y^2+4y=0$.

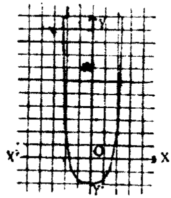


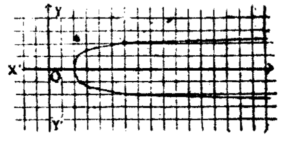
(t) $x^2+y^2-6x-16=0$.



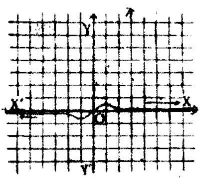
(u) $x^2+y^2-6y-16x=0$. (v) $4y=x^4-8$. (w) $4x=y^4+8$.

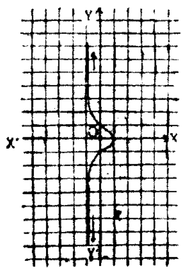


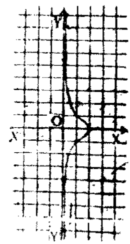




(x) $y=\frac{x}{1+x^2}$ (y) $x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$. (z) $x=\frac{2}{1+y^2}$.







2. 證明下列方程式,不能有軌跡.

(a) $x^2+y^2+1=0$.

解. 當 x 與 y 俱爲實數時,則 x^2 與 y^2 必爲正數或零,且結果 x^2+y^2+1 恆爲正數而不等於零.

故此方程式無軌跡.

(b) $2x^2+3y^2=-8$.

解. 當 x 與 y 俱爲實數時,則 $2x^2$ 與 $3y^2$ 必爲正數或零,且結果 $2x^2+3y^2$ 恆爲正數而不等於 -8.

故此方程式無軌跡.

(c) $x^2+4=0$.

解. 當 x 爲實數時,則 x^2 必爲正數或零,且結果 x^2+4 恆大於零.

故此方程式無軌跡.

(d) $x^4+y^2+8=0$.

解． 當 x 與 y 俱爲實數時，則 x^4 與 y^2 必爲正數或零且結果 x^4+y^2+8 恆爲正數而不等於零．

故此方程式無軌跡．

(e) $(x+1)^2+y^2+4=0$,

解． 當 x 與 y 俱爲實數時，則 $(x+1)^2$ 與 y^2 必爲正數或零且結果 $(x+1)^2+y^2+4$ 恆爲正數而不等於零．

故此方程式軌跡．

(f) $x^2+y^2+2x+2y+3=0$.

解． 解方程式以求 x 得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(y^2+2y+3)}}{2}=-1\pm\sqrt{-y^2-2y-2}$$

應用 11 頁定理 III 於根號內之二次式，

$\Delta=4-4\times(-1)(-2)=4-8=-4$, $A=-1$.

不論 y 爲何實數，二次式 $-y^2-2y-2$ 恆 <0 於是 x 與 y 無適合於此方程式之實數值．

故此方程式無軌跡．

(g) $4x^2+y^2+8x+5=0$.

解． 解方程式得

$y=\sqrt{-4x^2-8x-5}$

應用 11 頁定理 III 於根號內之二次式，

$\Delta=64-4(-4)(-5)=64-80=-16$, $A=-4$.

不論 x 爲何實數，二次式 $-4x^2-8x-5$ 恆 <0.

於是 x 與 y 無適合於此方程式之實數值．

故此方程式無軌跡．

(h) $y^4+2x^2+4=0$

解． 當 x 與 y 均爲實數時，則 y^4 與 $2x^2$ 必爲正數或零，且結果 y^4+2x^2+4 恆爲正數而不等於零．

故此方程式無軌跡．

(i) $9x^2+4y^2+18x+8y+15=0$.

解． 解方程式求 x 得

$$x=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\times9(4y^2+8y+15)}}{18}$$

$$=-1\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{(y-4)^2-8y-15}$$

$$=-1\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{-4y^2-8y-6}$$

應用 11 頁定理 III 於二次式 $-4y^2-8y-6$

$\triangle=64-4(-4)(-6)=64-96=-32$，$A=-4$.

不論 y 爲何實數二次式 $-4y^2-8y-6$ 恆 <0.

於是 x 與 y 無適合於此方程式之實數值.

故此方程式無軌跡.

(i) $x^2+xy+y^2+3=0$.

解. 解方程式求 x，得

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2-4y^2-12}}{2}=\frac{-y\pm\sqrt{-3y^2-12}}{2}$$

應用 11 頁定理 III 於根號內之二次式，

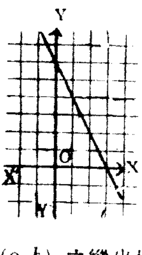
$\triangle=0-4\ (-3)\ (-12)=-144$，$A=-3$，

y 爲所有之實數，二次式 $-3y^2-12$ 均 <0 故 x 與 y 無實數值能適合於此二次式所以此方程式無軌跡.

習 題 (64頁－66頁)

1. 作下列諸方程式之軌跡，並證明俱爲直線，且求 m 及 b 之值.(其圖形均爲直線茲從略)，

(a) $2x+y-6=0$.



解. 作已知方程式爲普通方程 (1) $y=mx+b$ 之形式得

$y=-2x+6$，

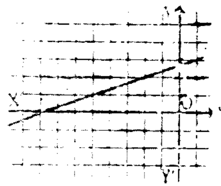
使 x 之係數相等 $m=-2$ ……………………(1)、

使常數項相等 $b=6$ ……………………(2)

方程式 (1) 與 (2) 所給之值均爲可能，因直線之斜率可有任意之實數值，及直線截 y 軸之點 $(0,b)$ 之縱坐標 b 亦可有任意之實數值.

故已知方程式之軌跡爲通過 $(0,b)$ 及其斜率等於 -2 之直線.

(b) $x-3y+8=0$.



解．作已知方程式為普通方程 (I) $y=mx+b$ 之形式，得

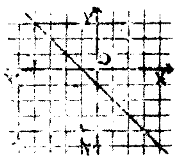
$y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$.

使 x 之係數相等 $m=\frac{1}{3}$ ……………(1)

使常數項相等 $b=\frac{8}{3}$ ……………(2)

由 34 頁 22 節．直線之斜率可爲任意之實數值而 b 爲直線截 y 軸之點 $(0, b)$ 之縱坐標，亦可爲任意之實數值，故由 (1)，(2) 兩式即證 $x-3y+3=0$ 之軌跡爲通過 $(0, \frac{8}{3})$，及其斜率等於 $\frac{1}{3}$ 之直線．

(c) $x+2y=0$.



解．作已知方程式爲普通方程式之 (I) $y=mx+b$ 之形式得

$y=-\frac{1}{2}x$.

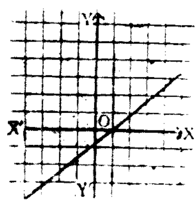
使 x 之係數相等 $m=-\frac{1}{2}$.

使常數項相等，$b=0$；

同上，此方程式爲通過原點，其斜率爲 $-\frac{1}{2}$之直線．

(d) $5x-6y-5=0$.

解．此方程式爲變數 x，y 之一次方程式，故其軌跡爲一直線(參考 86 頁定理 II)，



作已知方程式爲普通方程式 (I) $y=mx+b$ 之形式，得

$y=\frac{5}{6}x-\frac{5}{6}$.

使 x 之係數相等 $m=\frac{5}{6}$.

使常數項相等 $b=-\frac{5}{6}$.

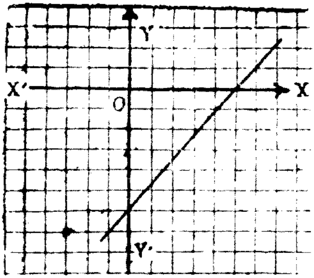
(e) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{6}=0$.

解．此方程式爲變數 x，y 之一次方程式，故其軌跡爲一直線．作已知方程式爲普通方程式 (I) $y=mx+b$ 之形式，得

$y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{12}$,

使 x 之係數相等 $m=\frac{3}{4}$.

使常數項相等 $b=-\frac{3}{12}$



(f) $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}-1=0.$

解　此方程式爲變數 x, y 之一次方程式，故其軌跡爲一直線.

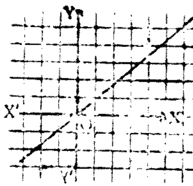
作已知方程式爲普通方程 (I) $y=mx+b$ 之形式，得

$y=\frac{6}{5}x-6$

使 x 之係數相等 $m=\frac{6}{5}$.

使常數項相等　　$b=-6.$

(g)　$7x-8y=0.$



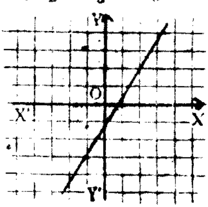
解　此方程式爲變數 x, y 之一次方程式，故此方程式代表一直線.

作已知方程式爲普通方程式 (I) $y=mx+b$ 之形式，由解 y 得 $y=\frac{7}{8}x$

使 x 之係數相等 $m=\frac{7}{8}$.

使常數項相等　　$b=0.$

(h) $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{7}{8}=0.$



解.　同前證法，方程之軌跡爲一直線.

作已知方程式爲普通方程式 (I) $y=mx+b$ 之形式，再與 (I) 式相比較.

由已知方程解 y 得

$$y=\frac{9}{4}x-\frac{21}{16}$$

使 x 之係數相等 $m=\frac{9}{4}$

使常數項相等 $b=-\frac{21}{16}.$

2.　作下列諸方程式之軌跡，並證明俱爲圓，且求圓心 (α, β) 及半徑 r

(下列諸方程之軌跡均爲圓茲從略)

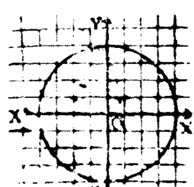
(a)　$x^2+y^2-16=0.$

解.　作已知之方程式爲普通方程式 (II)

$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$

之形式，得

$x^2+y^2-0x-0y-16=0.$



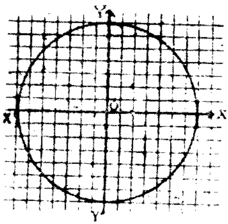
使 x 之係數相等　$\alpha=0.$

使 y 之係數相等　$\beta=0.$

使常數項相等，$\alpha^2+\beta^2-r^2=-16$，或 $r=4$.

α，β 及 r 之值俱爲可能，因一圓之圓坐標及其半徑之長，可爲任何實數，故已知方程式之軌跡爲一圓，其圓心坐標爲 $(0,0)$ 及其半徑之長爲 4.

(b) $x^2+y^2-49=0$.



解. 將已知方程式與普通方程式 (II)

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

相比較.

使 x 之係數相等，$\alpha=0$.

使 y 之係數相等，$\beta=0$.

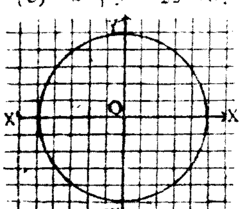
使常數項相等，$\alpha^2+\beta^2-r^2=-49$.

或 $r=7$.

α，β 及 r 之值俱爲可能，因一圓之圓心坐標，及其半徑之長，可有任何實數值.

故此方程式之軌跡爲以 $(0,0)$ 爲圓心，以 7 爲半徑所作之圓.

(c) $x^2+y^2-25=0$.



解. 與普通方程式

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

相比較.

使 x 之係數相等，$\alpha=0$.

使 y 之係數相等，$\beta=0$.

使常數項相等，$\alpha^2+\beta^2-r^2=-25$ 或 $r=5$.

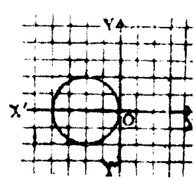
α，β 及 r 之值俱爲可能，因圓心之坐標及圓半徑之長可有任意之實數值.

故此已知方程式之軌跡爲以 $(0,0)$ 爲圓心以 5 爲半徑所作之圓.

(d) $x^2+y^2+4x=0$.

解通. 與普方程式

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$



相比較

使 x，y 之係數及常數項各相等，得

$-2\alpha=8$，$\beta=0$，$\alpha^2+\beta^2-r^2=0$ 或

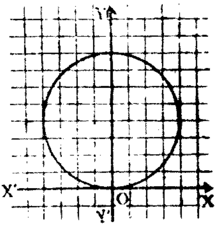
$\alpha=-2$，$\beta=2$，$r=2$.

α, β 及 r 之値俱爲可能因圓心之坐標及其半徑之長可有任何實數值.

故此已知之方程式代表一圓，其圓心坐標爲 $(-2, 0)$ 及其半徑之長等於

(e) $x^2+y^2-8y=0$.

解. 將此方程式與普通方程式



$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

相比較.

使 x, y 之係數及常數項各相等，得

$$-2\alpha=0,\ -2\beta=-8,\ \alpha^2+\beta^2=0 \text{ 或}$$

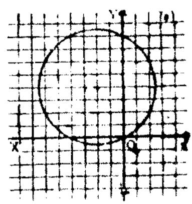
$$\alpha=0,\ \beta=4,\ r=4.$$

α, β 及 r 之値俱爲可能，因一圓之圓心坐標及其半徑之長，可有任何實數值.

故此已知方程式之軌跡爲以 $(0, 4)$ 爲圓心，以 4 爲半徑所作之圓.

(f) $x^2+y^2+4x-8y=0$.

解. 將已知方程式與普通方程式



$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

相比較.

使 x 之係數相等, $-2\alpha=4$ 或 $\alpha=-2$.

使 y 之係數相等, $-2\beta=-8$ 或 $\beta=4$

使常數項相等, $\alpha^2+\beta^2-r^2=0$ 或 $r=\sqrt{20}$.

證法與前題相同.

(g) $x^2+y^2-6x+4y-12=0$

解. 與普通方程式

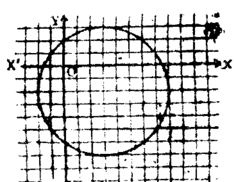
$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

相比較，且使其相當項之係數及常數項各相等得

$$-2\alpha=-6,\ -2\beta=4,\ \alpha^2+\beta^2-r^2=-12$$

$$\alpha=3,\quad \beta=-2,\quad r=5.$$

證法同上.

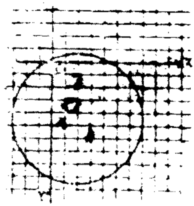


(h) $x^2+y^2-4x+9y-\frac{3}{4}=0$.

解 與普通方程式

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

相比較，使 x, y 之係數及常數項各相等，得



$-2\alpha=-4,\quad -2\beta=8.$

$\alpha^2+\beta^2-r^2=-$[illegible] 或

$\alpha=2\quad \beta=-$[illegible]，$\quad r=5$

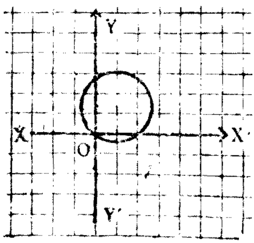
證法同上.

(i) $3x^2+3y^2-6x-8y=0.$

解. 此方程式可變為普通方程式(II)

$$x^2+y^2+2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

之形式，即



$x^2+y^2-2x-\frac{8}{3}y+0r^2=.$

再與(II)式相比較，得

$-2\alpha=-2，-2\beta=-\frac{8}{3}，\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$

或 $\alpha=1,\quad \beta=\frac{4}{3},\quad r=\frac{5}{3},$

證法同上.

3. 有一點，至 XX'，YY' 兩軸距離之比為 $\frac{2}{3}$. 試求此點軌跡之方程式.

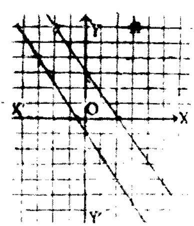
解. 設 $P(x,y)$ 為軌跡上任意一點.

則 $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ 或 $2x-3y=0$

有一點，至兩坐標軸之距離之和，恆等於 10. 試求此點軌跡之方程式.

解. 設 $P(x, y)$ 為軌跡上任意一點

則 $x+y=10.$



5. 一動點至兩點 $(3,0),(0,-2)$ 之距離之平方之差，恆等於8；試求其軌跡並作圖以表之.

解. 設 $P(x, y)$ 為軌跡上任意一點.

由已知之條件及 31 頁公式 (IV) 得

$$\left[\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right]^2-\left[\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}\right]^2=8$$

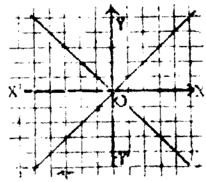
$$\left[\sqrt{(x-0)^2+(y+2)^2}\right]^2-\left[\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right]^2=8.$$

化簡得

$6x+4y+3=0$; $6x+4y-13=0$

6. 一動點距兩坐標軸恒相等，試求其軌跡之方程式，並作其圖.

解. 設 $P(x, y)$ 或 $P'(x', y')$ 為軌跡上任意一點，

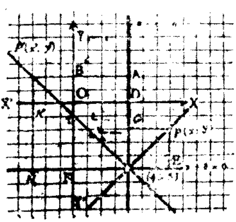


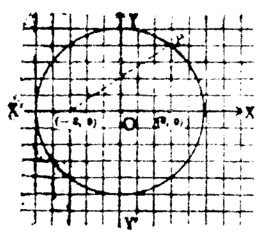
依題意得

$x=y$, 或 $-x'=y'$,

即 $x-y=0$; 或 $x'+y'=0$.

7. 一動點距兩直線 $x-4=0$, $y+5=0$ 恒相等，求其軌跡之方程式，並作其圖.





解. 設 $P(x, y)$ 為軌跡上一點則

習題 8

則 $x-4=y+5$

或 $4-x=-y-5$

即 $x-y-9=0$ 或 $x-y-1=0$

8. 一動點至 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ 之距離平方之和恒等於 68，求其軌跡之方程式，並作圖.

解. 設 $P(x, y)$ 為軌跡上任意一點，

由已給之條件及 31 頁公式 (VII)，得

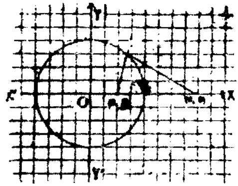
$$[\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}]^2+[\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}]^2=68.$$

化簡，得

$x^2+y^2=25$.

9. 一動點至 $(8, 0)$, $(2, 0)$ 之距離之比恒等於 2，求其軌跡之方程式；並作圖.

解. 設 $P(x, y)$ 爲軌跡上任意一點.



已知 $\dfrac{PA}{PB}=2$.

由 31 頁定理 IV 得

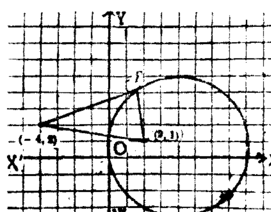
$$\frac{\sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}}=2$$

平方且化簡，得

$x^2+y^2=16.$

10. 一動點至 (2, 1), (−4, 2) 之距離之比恆等於 $\frac{1}{2}$, 求其軌跡之方程式，並作圖.

解. 設 $P(x, y)$ 爲軌跡上任意一點，且以 A 表 (2, 1) 及 B 表 (−4, 2).



已知 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{1}{2}$.

由 31 頁公式 (IV) 得

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}=\frac{1}{2}$$

平方且化簡，得

$3x^2+3y^2-24x-4y=0.$

11. 一動點至互相垂直兩直線之距離之和，恆等於常數，證明其軌跡爲一直線.

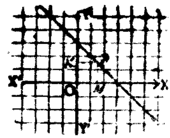
解. 以正交之二直線爲坐標軸且設 $P(x, y)$ 爲軌跡上任意一點.

$\therefore \quad x+y=k$ ……………………(1)

將 (1) 式書爲普通方程式 $y=mx+b$ 之程式，得 $y=-x+k$

$m=-1.$

$b=k$.



故（I）之軌跡爲過斜率等於－1一切的直線.

12. 一動點至固定兩點之距離平方之差，恒等於常數，證明其軌跡爲一直線.

解. 作 $X'X$ 通過固定兩點，作 YY' 通過此兩點之中點且垂直 $X'X$ 則固定兩點之坐標可書爲 $(a, 0)$，$(-a, 0)$ 且假定 k 爲其平方之差.

設 $P(x, y)$ 爲軌跡上任意一點，且以 A 表 $(a, 0)$ 及 B 表 $(-a, 0)$ 已知之條件爲 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=k$.

或 $\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=k$

由31頁公式（IV）得

$$\left[\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}\right]^2-\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}\right]^2=k$$

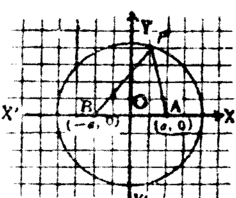
或 $\left[\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}\right]^2-\left[\sqrt{(x-a)^2-(y-0)^2}\right]^2=k$

化簡 得

$4ax+k=0$ 或 $4ax-k=0$.

如將此二式書爲普通方程式 $y=mx+b$ 之形式則 y 之係數爲 0，即 m 及 b 均爲 ∞ 故方程式之軌跡爲二平行於 y 軸之線.

13. 於上題其兩距離平方之和，恒等於常數，試證明其軌跡爲圓.



提示：坐標軸與上題同.

解. 作 XX' 通過固定兩點，作 YY' 通過固定兩點之中點，固定兩點之坐標可書爲 $(a, 0)$ 與 $(-a, 0)$，且假定 k 爲其平方和，

設 $P(x, y)$ 為軌跡上任意一點，且以 A 表 $(a, 0)$ 及 B 表 $(-a, 0)$.

已知 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=k$.

由 31 頁公式 (IV)，得

$$\therefore\ [\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}]^2+[\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}]^2=k.$$

化簡，得

$$x^2+y^2+a^2=\frac{k}{2}$$

此方程式為含變數之 x, y 之二次方程式，且有 x 及 y 之平方和，故其軌跡為一圓.

14. 一動點至固定兩點之距離之比為常數，則其軌跡如何?

解. 設 $P(x, y)$ 為軌跡上任意一點，$A(a, b)$，$B(c, d)$ 為二定點，及 λ 為其距離之比.

由 31 頁公式 (IV)，得

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}}=\lambda.$$

或 $(x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2[(x-c)^2+(y-d)^2]$

或 $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda^2-1)y^2-2(\lambda^2c-a)x-2(\lambda^2d-b)y$
$+\lambda^2(c^2+d^2)-(a^2+b^2)=0$ ……………………(1)

若 $\lambda=\pm 1$，則 (1) 式為一次方程式，故 (1) 式之軌跡為一直線.

若 $\lambda\neq\pm 1$，則 (1) 式為二次方程式，且含 x^2 及 y^2 之和，故 (1) 式之軌跡為一圓.

16. 證明下列諸方程之軌跡為一對直線並描各線.

(a) $x^2-y^2=0$.

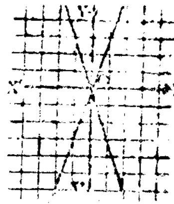
解. 分析因式 $(x+y)(x-y)=0$ ………(1)

使各因式等於零

$x+y=0$ ……………(2)　　$x-y=0$ ……………(3)

方程式 (2) 與 (3) 俱為含變數 x, y 之一次方程式，故由定理，可知方程式 (1) 之軌跡為一對直線.

(b)　$9x^2-y^2=0$.



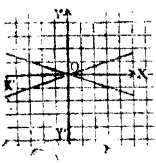
解　分析因式 $(3x+y)(3x-y)=0\cdots\cdots(1)$

使各因式等於零

$(3x+y)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$　　$(3x-y)=0\cdots\cdots(3)$

方程式 (2) 與 (3) 俱爲含 x, y 之一次方程式　故 (1) 式之軌跡爲一對直線.

(c)　$x^2=9y^2$.



解.　移項再分析因式 $(x+3y)(x-3y)=0\cdots(1)$,

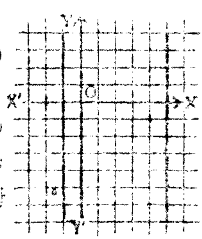
使各因式等於零

$x+3y=0\cdots\cdots\cdots(2)$

$x-3y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

方程式 (2) 與 (3) 俱爲含 x, y 之一次方程式故 (1) 式之軌跡爲一對直線.

(d)　$x^2-4x-5=0$

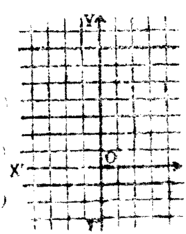


解.　分析因式 $(x-5)(x+1)=0\cdots\cdots(1)$

使各因式等於 0.

$x-5=0\cdots\cdots(2)$　　$x+1=0.\cdots\cdots(3)$

方程式 (2) 及 (3) 俱爲含變數 x 之一次方程式故由第 66 頁之定理可知 (1) 之軌跡爲一對直線.



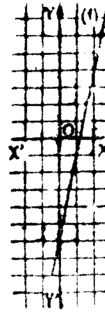
(e)　$y^2-6y=7$

解　移項再分解因式 $(y-7)(y+1)=0\cdots(1)$

使各因式等於 0, $y-7=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$y+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(f) $y^2-5xy+6y=0$.



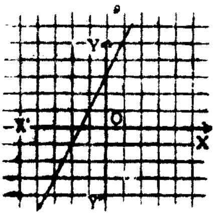
解. 分析因式 $y(y-5x+6)=0\cdots\cdots\cdots(1)$

使各因式等於零

$y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\quad y-5x+6=0\cdots\cdots(3)$

證法同上.

(g) $xy-2x^2-3x=0$.



解. 使分析因式 $x(y-2x-3)=0\cdots(1)$

使各因式等零.

$x=0$, 及 $y-2x-3=0$.

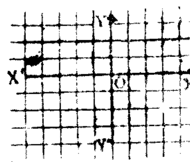
證法同上.

(h) $xy-2x=0$.

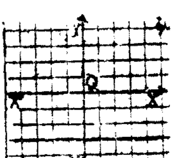
解. 分析因式 $x(y-2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

使各式等於 0, $x=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$y-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$



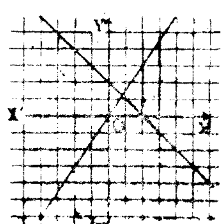
(i) $xy=0$.



解. 分解因式 $(x)(y)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

使各式等於 0, $x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$



(j) $3x^2+xy-2y^2+6x-4y=0$.

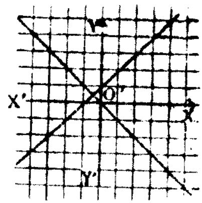
分析因式 $(3x-2y)(x+3y+2)=0$ ………………………(1)

使各因式等於零

$3x-2y=0$ ………………(2)　　$x+3y+2=0$ ………………(3)

由66頁定理可知(1)式之軌跡爲一對直線，因(2)及(3)俱爲含變數 x 及 y 之一次方程式故也.

(k)　$x^2-y^2+x+y=0$.

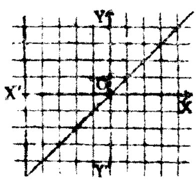


解.　分析因式 $(x-y+1)(x+y)=0$ ……(1)

使各式等於零，$x-y+1=0$ ………(2)

$x+y=0$ ……………………………………(3)

(l)　$x^2-xy+5x-5y=0$.

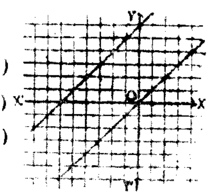


解.　分析因式　$(x+5)(x-y)=0$ ……(1)

使各式等於 0，$x+5=0$ ……………(2)

$x-y=0$ ……………………………………(3)

(m)　$x^2-2xy+y^2+6x-6y=0$

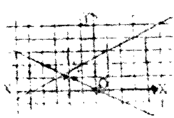


解，　分析因式 $(x-y+6)(x-y)=0$ ……(1)

使各式等於零，$x-y+6=0$ ………(2)

$x-y=0$ ……………………………………(3)

(n)　$x^2-4y^2+5x-10y=0$



解.　分析因式　$(x-2y)(x+2y+5)=0$ …(1)

使各式等於　0，$x-2y=0$ ……………(2)

$x+2y+5=0$ ……………………………(3)

(o)　$x^2+4xy+4y^2+5x+10y+6=0$.

解.　分析因式 $(x+2y+3)(x+2y+2)=0$(1)

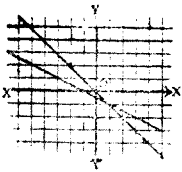
使各因式等於零

$x+2y+3=0$ ………(1)

$x+2y+2=0$ ………(2)

繪法同上

(p) $x^2+3xy+2y^2+x+y=0$

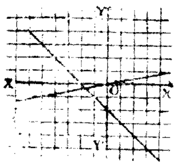


解. 分析因式 $(x+2y+1)\ (x+y)=0 \cdots\cdots(1)$

使各式等於 0, $x+2y+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(q) $x^2-4xy-5y^2+2x-10y=0$

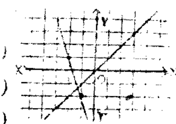


解. 分解因式 $(x-5y)(x+y+2)=0 \cdots\cdots(1)$

使各式等於零 $x-5y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x+y+2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(r) $3x^2-2xy-y^2+5y-5y=0$



解. 分析因式 $(3x+y+5)\ (x-y)=0 \cdots\cdots(1)$

使各式等於零 $3x+y+5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$x-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由第 66 頁 之定理可知 (1) 式之軌跡為一對直線

因 (2) 及 (3) 俱為含變數 x 及 y 之一次方程式故也.

17. 證明 $Ax^2+Bx+C=0$ 之軌跡,或為一對平行直線,或為直線,或不能有軌跡,依 $\triangle=B^2-4AC$ 或為正或為零或為負而定.

解. 若 $\triangle=B^2-4AC>0$, 則已知之方程式可書為

$A(x-l_1)\ (x-l_2)=0$.

或 $x=l_1$ 及 $x=l_2$

故方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 之軌跡為一對平行 x 軸之直線

若 $\triangle=B^2-4AC=0$. 則已知之方程式可書為

$A(x-l_1)^2=0$

或 $x=l_1$.

故方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 之軌跡為一條平行 x 軸之直線.

若 $\triangle=B^2-4AC<0$, 則 x 無適合於方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ 之實數值. 故此方程式無軌跡 (閱 59 頁底註).

18. 證明 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 之軌跡,或為相交之一對直線,或為一直線,或為一點,依 $\triangle=B^2-4AC$ 或為正或為零或為負而定

解. 若$\Delta=B^2-4AC>0$，則已知之方程式可書爲

$A(x-l_1y)(x-l_2y)=0$.

或 $x-l_1y=0$……………………(1)，$x-l_2y=0$……………………(2)

原點之坐標（0，0）旣適合於（1）又適合於（2），故方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 之軌跡爲一對在原點相交之直線.

若$\Delta=B^2-4AC=0$，則已知之方程式可書爲

$A(x-l_1y)^2=0$.

或 $x-l_1y=0$.

故方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 之軌跡爲一條直線.

若 $\Delta=B^2-4AC<0$，則已知之方程式可書爲

$$A\left[\left(x+\frac{B}{2A}y\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}y^2\right]=0.$$

適合此方程式之 x 與 y 之値，只有 0 與 0，

故其軌跡爲一點．卽原點.

問 題 (P. 75－76)

1、 討論下列諸方程．並作圖.

a、 $x^2-4y=0$.

討論：(1) 因方程式無常數項故原點在曲線上.

(2) 因方程式無 x 之奇次項，故其軌跡對 YY' 爲對稱.

(3) 使 $y=0$，得 x 軸上之截線爲 $x=0$.

使 $x=0$，得 y 軸上之截線爲 $y=0$.

(4) 解方程式以求 x，得

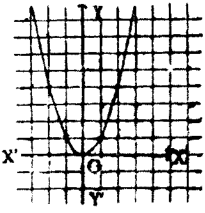
$x=\pm2\sqrt{y}$…………(A)

故 y 之負數値皆須除掉.

解方程式以求 y，得

$y=\frac{1}{4}x^2$ ……………(B)

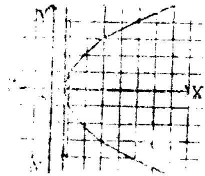
故 x 無可除掉之値.



5. 由（B）式可知，當 x 增大時，y 亦因之而增大，故此曲線可由兩側延至無限遠.

(b) $y^2-4x+3=0$

討論：(1) 因方程式有常數項故原點不在曲線上.



(2) 因無 y 之奇次項故對於 x 軸爲對稱.

(3) 使 $y=0$ 得 x 軸上之截線爲 $x=\frac{3}{4}$.

使 $x=0$, $y^2=-3$, $y=\pm\sqrt{-3}$ 故曲線不與 y 軸相交

(4) 解方程式以求 x, $x=\dfrac{3+y^2}{4}$ ……………………(A)

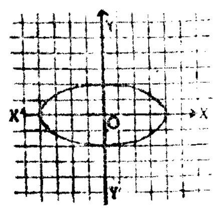
解方程式以求 y, $y=\pm\sqrt{4x-3}$ ……………………(B)

由 A 可知 y 無可除掉之值由 B 可知 x 小於 $\frac{3}{4}$ 一概除掉.

(5) 由 A 可知當 y 增大時 x 亦增大，故此曲線由兩軸延至無限遠.

(c) $x^2+4y^2-16=0$.

討論：(1) 因方程式有常數項，故原點不在曲線上.



(2) 因方程式無 x 與 y 之奇項，故其軌跡對於二軸及原點俱爲對稱.

(3) 使 $y=0$，得 x 軸上之截線爲 $x=\pm 4$.

使 $x=0$，得 y 軸上之截線爲 $y=\pm 2$.

(4) 解方程式求 x，得 $x=\pm 2\sqrt{4-y^2}$ ……………………(A)

故 y 在大於 2 和小於 -2 之値皆須除掉，

解方程式求 y 得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ ……………………(B)

故 x 在大於 4 和小於 -4 之値皆須除掉.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知 y 不能超過 2，亦不能小於 -2 而 x 不能超過 4 亦不能小於 -4. 故其軌跡爲一封閉曲線.

(d) $9x^2+y^2-18=0$

討論：(1) 因方程式有常數項故原點不在曲線上.

(2) 因無 x, y 之奇次項故曲線對 x, y 軸及原點均對稱

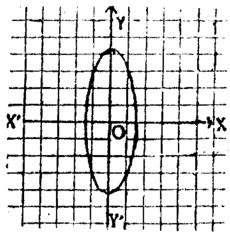
(3) 使 $y=0$ 得 x 之截線爲 $x=\pm\sqrt{2}$.

使 $x=0$ 得 y 軸上之截線爲 $y=\pm3\sqrt{2}$.

(4) 解方程式以求 x 得

$x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{18-y^2}$ ……(A)

故 y 在大於 $3\sqrt{2}$ 或小於 $-3\sqrt{2}$ 之一切值均須除掉.



解方程式以求 y

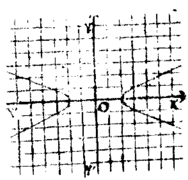
得 $y=\pm3\sqrt{2-x^2}$ ……(B)

故 x 在大於 $\sqrt{2}$ 或小於 $-\sqrt{2}$ 之值均須除掉.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知 y 之值不得超過 $3\sqrt{2}$ 亦不能小於 $-3\sqrt{2}$；x 不得超過 $\sqrt{2}$ 亦不能小於 $-\sqrt{2}$

故其軌跡爲一封閉曲線.

(e) $x^2-4y^2-16=0$.



討論：(1) 此方程式既有常數項，故原點不在曲線上.

(2) 此方程式既無 x, y 之奇次項，故其軌跡對二軸及原點俱爲對稱.

(3) 使 $y=0$，得 x 軸上之截線爲 $x=\pm1$.

使 $x=0$，得 $y=\pm\sqrt{-4}$ 故此曲線不與 y 軸相交

(4) 解方程式求 x，得 $x=\pm2\sqrt{y^2+4}$ ……………(A)

故 y 無可除掉之值.

解方程式求 y 得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ ……………(B)

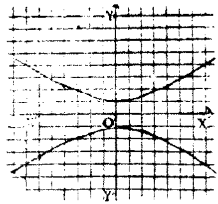
故 x 在 -4 與 4 以外之值皆須除掉.

(5) 由 (A) 可知，當 y 增大時，x 亦因之而增大. 故此曲線可由兩軸延至無限遠.

(f) $x^2-4y^2+16=0$

討論：(1) (2) 與 (d) 同

(3) 使 $y=0$ 得 x 軸之截線爲 $x=\pm\sqrt{-16}$ 故其曲線不與 x 軸相交.



使 $x=0$ 得 y 軸之截線爲

$y=\pm 4$

(4) 解方程式以求 x 得

$x=\pm\sqrt{4y^2-16}$

$=\pm 2\sqrt{y^2-4}$ ……………(A)

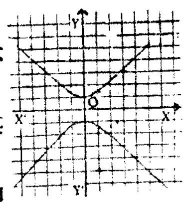
故 y 在 -2 與 2 之間之值皆須除掉

解方程式以求 y 得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2}$ ……………(B)

故 x 無可去掉之值.

(5) 由 (A) 可知當 y 增大 x 亦因之而增大故此曲線由兩軸延至無限遠.

(g) $x^2-y^2+4=0$.



討論: (1) 此方程式既含常數項, 故原點不在曲線上.

(2) 方程式既無 x, y 之奇次項, 故其軌跡對於二軸及原點俱爲對稱.

(3) 使 $y=0$, 得 $x=\pm\sqrt{-4}$ 故此曲線不與 x 軸相交,

使 $x=0$, 得 $y=\pm 2$ 爲 y 軸上之截線.

(4) 解方程式求 x, 得 $x=\pm\sqrt{y^2-4}$ ……………………(A)

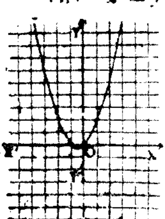
故 y 在 -2 與 2 之間之值, 皆須除掉.

解方程式求 y 得 $y=\pm\sqrt{x^2+4}$ ……………………(A)

故 x 無可除掉之值.

(5) 由 (B) 可知, 當 x 增大時, y 亦因之而增大, 故此曲線可由兩軸延至無限遠.

(h) $x^2-y+x=0$



討論: (1) 因此方程式無常數項故原點在曲線上.

(2) 因有 x, y 之奇次項故對 x, y 軸及原點均不對稱.

(3) 使 $y=0$ 得 $x=0$ 及 $x=-1$ 爲其截線

使 $x=0$ 得 $y=0$.

(4) 解方程式以求 x 得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$ (A

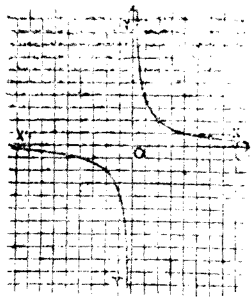
故 y 小於 $-\frac{1}{4}$ 之一切值均須除掉.

解方程式以求 y 得 $y=x^2+x$ ……………………………………(B)

故 x 無可除掉之值.

(5) 與 (f) 之 (5) 同.

(i) $xy-4=0$.



討論：(1) 此方程式既含常數項，故原點不在曲線上.

(2) 以 $(-x,-y)$ 代 (x,y)，方程式之軌跡不變，故此軌跡對於原點爲對稱.

(3) 由原方程式可知，x，y 俱不能等於零，故此軌跡不與二軸相交.

(4) 解方程式求 x，得 $x=\frac{4}{y}$ 故 y 無可除掉之值.

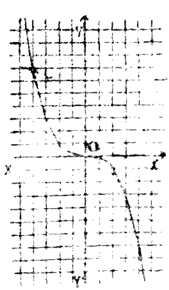
解方程式求 y，得 $y=\frac{4}{x}$，故 x 亦無可除掉之值.

(5) 由 (A) 與 (B) 可知當 y 無限增大時，而 x 漸減且趨向於零；當 x 無限增大時，而 y 漸減且趨向於零，故此曲線向右，向左，向上，向下，俱延至無限遠且漸與兩軸相近.

(j) $9y+x^3=0$

討論：(1) 與 (h) 之 (1) 同.

(2) 因此方程式之 x，y 均爲奇次項故對原點爲對稱.



(3) 使 $y=0$，得 x 軸上之截線爲 $x=0$

使 $x=0$ 得 y 軸上之截線爲 $y=0$.

(4) 解方程式以求 x 得 $x=\sqrt[3]{9y}$

故 y 無可除掉之值.

解方程式以求 y 得 $y=-\frac{x^3}{9}$

故 x 無可除掉之值.

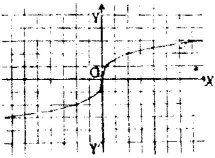
(5) 由 (A) 及 (B) 兩數增大或減小 x 亦因之而增大或減少故此曲線由兩軸延至無限遠.

(k)　$4x-y^3=0$.

討論：(1) 此方程式旣無常數項，故原點在軌跡上．

(2) 此方程式俱爲 x, y 之奇次項故對於原點爲對稱

(3) 使 $y=0$，得 x 軸上之截線爲 $x=0$.



使 $x=0$，得 y 軸上之截線爲 $y=0$.

(4) 解方程式求 x，得 $x=\frac{y^3}{4}$ ……………(A)

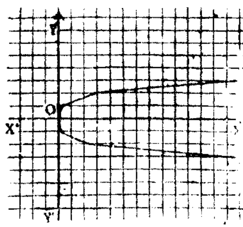
故 y 無可除掉之值．

解方程式求 y，得 $y=\sqrt[3]{4x}$ ………(B)

故 x 無可除掉之值．

由 (A) 及 (B) 可知 y 增大或減小，x 亦因之而增大或減小，故此曲線可由兩軸延至無限遠．

(l)　$6x-y^4=0$



討論：(1) 因此方程式無常數項故原點在曲線上．

(2) 因無 y 之奇次項故對於 x 軸對稱

(3) 使 $y=0$ 得 x 軸上之截線爲 $x=0$

使 $x=0$ 得 y 軸上之截線爲 $y=0$.

(4) 解方程式以求 x 得 $x=\frac{y^4}{6}$ ………………………………(A)

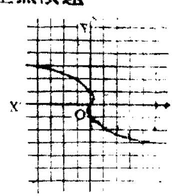
故 y 無可除掉之值

解方程式以求 y 得 $y=\sqrt[4]{6x}$ ………………………………(B)

故 x 小於零之值均除掉．

(5) 由 (A) 可知當 y 增大或減小至無限 x 亦因之而增至無限遠故此曲線可由兩軸延長至無限遠

(m)　$5x-y+y^3=0$,



討論：(1) 因方程式無常數項．故原點在軌跡上．

(2) 此方程式無 x, y 之偶次項故對原點爲對稱．

(3) 使 $y=0$ 得 x 軸上之截線爲 $x=0$;

使 $x=0$，得 y 軸上之截線為 $y=\pm 1$ 及 $y=$

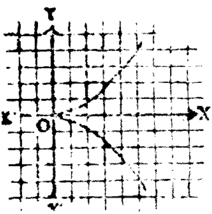
(4) 解方程式求 x，得，$x=\frac{1}{3}(y-y)$．(A)．

故 y 無可除掉之值．

由代數學可知若 x 為實數此變數 y 之三次方程式至少有一實根，故 x 無可除掉之值．

(5) 由 (A)，y 之絕對值增大，x 之絕對值亦因之而增大故此曲線由兩軸延至無限遠．

(n) $9y^2-x^3=0$.



討論：(1) 與 (l) 之 (1) 同

(2) 與 (l) 之 (2) 同

(3) 與 (l) 之 (3) 同

(4) 解方程式以求 x 得

$$x=\sqrt[3]{9y^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

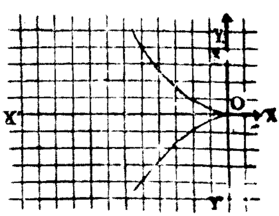
故 y 無可除掉之值．

解方程式以求 y 得，$y=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$，$\cdots\cdots$(B)

故 x 小於零之值均須除掉．

(5) 與 (l) 之 (5) 同．

(o) $9y^2+x^3=0$.



討論：(1) 因方程式無常數項，故原點在曲線上．

(2) 方程無 y 之奇次項，故此曲線對於 x 軸為對稱．

(3) 使 $y=0$，得 $x=0$，為 x 軸上之截線．

使 $x=0$，得 $y=0$，為 y 軸上之截線．

(4) 解方程式求 x，得，$x=\sqrt[3]{-9y^2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$(A)

故 y 無可除掉之值．

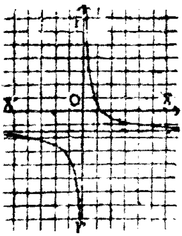
解方程式以求 y，得，$y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{-x^3}$ $\cdots\cdots\cdots$(B)

故 x 之所有正數值皆須除掉．

(5) 由 (A) 及 (B) 可知此曲線由兩軸延至無限遠．

(p) $2xy+3x-4=0$.

討論：(1) 因此方程式有常數項故原點不在此曲線上．



(2) 因無 x, y 之偶次項故對 x, y 軸均不對稱.

(3) 使 $y=0$，得，$x=\frac{4}{3}$ 爲 x 軸上之截線.

因 $x\neq 0$，故此曲線與 y 軸無交點.

(4) 解方程式以求 x，得，$x=\frac{4}{2y+3}$ ……………(A)

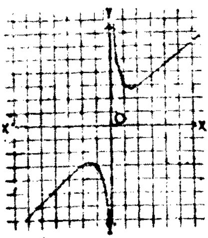
故 y 無可除掉之值.

解方程式以求 y，得，$y=\frac{4-3x}{2x}$ ………(B)

故 x 無可除掉之值.

(5) 與 (o) 之 (5) 同.

(q) $x^2-xy+8=0$.



討論：(1) 與 (p) 之 (1) 同.

(2) 此方程式對 x, y 軸均不對稱而對原點對稱

(3) 由原方程式 x, y 不能等於 0，故不能與 x, y 軸相交.

(4) 解方程式以求 x，得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-32}}{2}\text{ ……………… (A)}$$

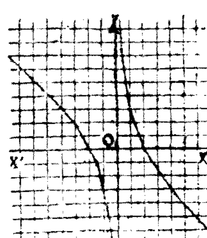
故 y 在 $-4\sqrt{2}$ 與 $4\sqrt{2}$ 之間之值均須除掉.

解方程式以求 y，得 $y=\frac{8+x^2}{x}$ ……………………(B)

故 x 無可除掉之值.

(5) 由 (A) 可知當 y 由 $\sqrt{32}$ 繼續增大或由 $-\sqrt{32}$ 繼續減小，則 x 俱因之而增大. 故此曲線由兩軸延至無限遠.

(r) $x^2+xy-4=0$.



討論：(1) 與 (p) 之 (1) 同

(2) 與 (q) 之 (2) 同

(3) 因 x 不能等於0，故 y 軸與此曲線不相交.

使 $y=0$，得，$x=\pm 2$ 爲 x 軸上之截線.

(4) 解方程式以求 x，得

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+16}}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

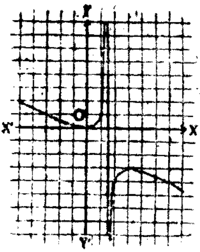
故 y 無可除掉之值，

解方程式以求 y，得 $y=\dfrac{4-x^2}{x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (B)

故 x 亦無可除掉之值，

(5) 由 (A) 及 (B)得知當 y 增大 x 亦因之增大．故此曲線由兩軸延長至無限遠．

(s) $x^2+2xy-3y=0$.



討論：(1) 因方程式不含常數項，故原點在此曲線上．

(2) 將方程式內之 y 俱以 $-y$ 代之；其軌跡改變；仿此，x 俱以 $-x$ 代之，其軌跡改變；x, y 俱以 $-x$，$-y$ 代之其軌跡仍改變，故此軌跡對於二軸及原點均不爲對稱．

(3) 使 $y=0$，得 x 軸之截線爲 $x=0$.

使 $x=0$，得 y 軸之截線爲 $y=0$.

(4) 解方程式求 x，得 $x=-y\pm\sqrt{y^2+3y}$ $\cdots\cdots$ (A)

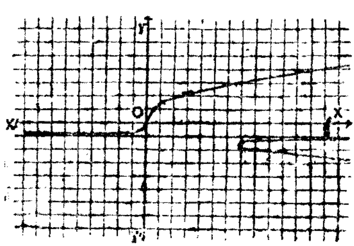
故 y 在 -3 與 0 之間之值皆須除掉．

解方程式求 y 得 $y=\dfrac{x^2}{3-2x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (B)

故 x 無可除掉之值．

(5) 由 (A) 及 (B) 可知此曲線由二軸延至無限遠．

(t) $2xy-y^2+4x=0$.



討論：(1) 因此方程式無常數項，故原點在此曲線上.

(2) 與 x, y 軸及原點均不對稱.

(3) 使 $y=0$，得 $x=0$ 為其截綫.

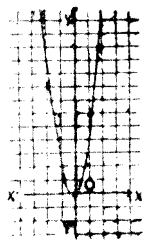
使 $x=0$，得 $y=0$ 為其截綫.

(4) 解方程式以求 x 得 $x=\dfrac{y^2}{2y+4}$ ………………(A)

故 y 無可除掉之值.

(5) 由 (A) 可知當 y 增大 x 亦因之而增大. 故此曲綫由兩軸延至無限遠.

(u) $3x^2-y+x=0$.



討論：(1) 與 (t) 之 (1) 同.

(2) 與 (t) 之 (2) 同.

(3) 使 $y=0$ 得 $x=0$，或 $x=\frac{1}{3}$，為 x 軸之截線；

使 $x=0$，得 $y=0$ 為 y 軸之截綫.

(4) 解方程式以求 x，得；

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+12y}}{6} \quad \cdots\cdots\cdots(A)$$

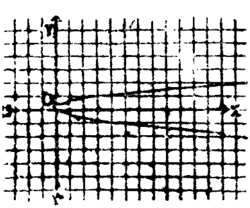
故 y 小於 $-\frac{1}{12}$ 之值均須除掉.

解方程式以求 y，得，$y=3x^2+x$ ………………(B)

故 x 無可除掉之值.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知當 y 增大，x 之絕對值亦增大. 故此曲綫由兩軸延至無限遠.

(v) $4y^2-2x-y=0$.



討論：(1) 與 (t) 之 (1) 同.

(2) 與 (t) 之 (2) 同.

(3) 使 $y=0$ 得 $x=0$ 為其截綫.

使 $x=0$ 得 $y=0$ 及 $y=\frac{1}{4}$ 為其截綫.

(4) 解方程式以求 x，得，

$x=4y^2-y$ ………………………………(A)

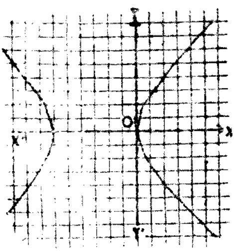
故 y 無可除掉之值.

解方程式以求 y，得，$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+32x}}{8}$. ……………(B)

故 x 小於 $-\frac{1}{32}$ 之値均須除掉.

(5) 由 (A) 可知當 y 增大 x 亦增大. 故此曲綫由兩軸延至無限遠.

(w) $x^2-y^2+6x=0$.



討論：(1) 與 (t) 之 (1) 同.

(2) 因無 y 之奇次項，故對於 x 軸爲對稱.

(3) 使 $y=0$，得 $x=0$ 及 $x=-6$ 爲其截線.

使 $x=0$，得 $y=0$ 爲其截線.

(4) 解方程式以求 x，得，

$x=-3\pm\sqrt{9+y^2}$……………(A)

故 y 無可除掉之值.

解方程式以求 y，得，$y=\pm\sqrt{x^2+6x}$ ……………(B)

$=\pm\sqrt{x(x+6)}$.

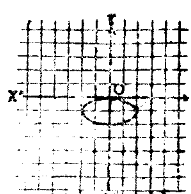
故 x 在 0 與 -6 之間之值均須除掉.

(5) 由 (A) 可知當 y 增大，x 之絕對值亦因之而增大，故此曲線由兩軸延至無限遠.

(x) $x^2+4y^2+8y=0$.

討論：(1) 與 (t) 之 (1) 同.

(2) 因無 x 之奇次項. 故對於 y 軸爲對稱.



(3) 使 $y=0$ 得 $x=0$ 爲 x 軸上之截線.

使 $x=0$ 得 $y=0$ 及 $y=-2$ 爲 y 軸上之截線.

(4) 解方程式以求 x，得，$x=\pm\sqrt{-8y-4y^2}$

$=\pm\sqrt{-4y(2+y)}$ ………(A)

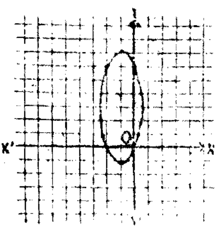
故 y 在大於 0 及小於 -2 之值均須除掉.

解方程式以求 y, 得, $y=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4x^2}}{4}$ ……(B)

故 x 小於 -2 與大於 2 之值均須除掉.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知 x 不能大於 2 亦不能小於 -2, y 不能大於 0 亦不能小於 -2; 故知此曲線為封閉曲線.

(y) $9x^2+y^2+18x-6y=0$.



討論: (1) 因方程式無常數項, 故原點在曲此線上.

(2) 因方程式含 x, y 之奇次項及偶次項, 故此曲綫對於二軸及原點均不對稱.

(3) 使 $y=0$, 得 x 軸上之截線為

$$x=-2 \text{ 及 } x=0.$$

使 $x=0$, 得 y 軸上之截線為 $y=6$ 及 $y=0$.

(4) 解方程式求 x, 得, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-y^2+6y}}{3}$ ……(A)

由 11 頁定理 III 可知 y 小於 $3(1-\sqrt{2})$ 與大於 $3(1+\sqrt{2})$ 之值皆須除掉.

解方程式求 y, 得 $y=\dfrac{6\pm\sqrt{36-72x-36x^2}}{2}$

$$=3\pm3\sqrt{1-2x-x^2}. \quad \text{……(B)}$$

由 11 頁定理 III 可知 x 小於 $-1-\sqrt{2}$ 與大於 $-1+\sqrt{2}$ 之值皆須除掉.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知此曲線為一封閉曲線.

(z) $9x^2-y^2+18x+6y=0$.

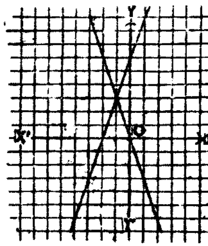
討論: (1) 與 (y) 之 (1) 同.

(2) 與 (y) 之 (2) 同.

使 $y=0$，得 $x=0$，及 $x=-2$ 為其截線

使 $x=0$，得 $y=0$，及 $y=6$ 為其截線.

(4) 解方程式以求 x，得，



$x=-9\pm3\sqrt{9+(y^2-6y)}$

$=-9\pm3(y-3)$ ……(A)

故 y 無可除掉之值.

解方程式以求 y，得，

$y=-3\pm\sqrt{9+9x^2+18x}$

$=-3\pm3(x+1)$ ……(B)

故 x 亦無可除掉之值.

(5) 由 (A) 及 (B) 可知此曲線由兩軸延至無限遠.

2. 於下列諸方程，與常數 (a, b, m, r) 以特別之值，但不能為零，以定其軌跡大略之形狀.

(a) $y^2=2mx$.

解. 設 $m=3$，則已知之方程式變為 $y^2=6x$.

此曲線過原點，因其方程式無常數項.

因無 y 之奇次項，故此曲線對於 x 軸為對稱.

使 $y=0$，得 x 軸上之截線為 $x=0$.

使 $x=0$，得 y 軸上之截線為 $y=0$.

解方程式求 x，得，$x=\frac{1}{6}y^2$……………(A)

故 y 無可除掉之值.

解方程式求 y，得，$y=\pm\sqrt{6x}$ ………(B)

故 x 之負數值皆須除掉.

由 (A) 及 (B) 可知此曲線由兩軸延至無限遠.

(b) $x^2-2my=m^2$

解. 設 $m=2$，則已知之方程式變為 $x^2-4y-4=0$.

再移 y 軸於 $y'=y+1$ 處，則得 $x^2-4y'=0$

因而知其圖形與習題 1 之 (a) 相同.

(c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解. 設 $a=1$, $b=2$, 則已知之方程式變

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1.$$

此曲線不過原點，因其方程式含常數項.

此方程式無 x, y 之奇次項，故其軌跡對於二軸及原點均對稱.

使 $y=0$，得 XX' 軸上之截線爲 $x=\pm 1$

使 $x=0$，得 YY' 軸上之截線爲 $y=\pm 2$

解方程式求 x，得 $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$ ……………………………(A)

故 y 之小於 -2 與大於 2 之値皆須除掉.

解方程式求 y，得 $y=\pm 2\sqrt{1-x^2}$ ……………………………(B)

故 x 之小於 -1 與大於 1 之値皆須除掉.

由 (A) 及 (B) 可知此曲線爲封閉曲線.

(d) $2xy=a^2$.

解. 設 $a=2\sqrt{2}$，則已知之方程式變爲 $xy=4$

因之可知其圖形與第 70 頁例 3. 之圖形相同.

(e) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=$

解. 設 $a=2$; $b=3$; 則已知之方程變爲 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

此曲線不過原點，因其方程式含常數項.

此曲線對於二軸及原點均爲對稱，

因其方程式無 x, y 之奇次項故也.

使 $y=0$，得 XX' 軸之截線爲 $x=\pm 2$.

使 $x=0$，得 $y=\pm\sqrt{-9}$. 故此曲線不與 YY' 軸相截.

解方程式求 x，得 $x=\pm 2\sqrt{1+\frac{y^2}{9}}$ ……………………………(A)

故 y 無可除掉之値.

解方程式求 y，得，$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$. ……………………………(B)

故 x 在 -2 與 2 之間之值皆須除掉.

由 (A) 及 (B)，可知此軌跡沿兩軸延至無限遠.

(f) $x^2-y^2=\alpha^2$.

解. 設 $\alpha^2=-4$ 則已知之方程式變為 $x^2-y^2+4=0$

其圖形與習題 1 之 (g) 之圖形相同.

(g) $x^2+y^2=r$

解. 設 r 為常數則 x 及 y 均不能大于 $\pm r$ 故知其為一射閉曲線.

(h) $x^2+y^2=2xr$.

解. 設 $r=-2$ 則已知之方程式變為 $x^2+y^2+4x=0$

得知其圖形與第 65 頁習題 2 (d) 之圖形相同.

(i) $x^2+y^2=2ry$

解. 設 $r=4$ 則已知之方程式變為 $x^2+y^2-8y=0$

得知其圖形與第 65 頁習題 2. (e) 之圖形相同.

(j) $x^2+y^2=2ax+2by$.

解. 設 $a=1$, $b=2$. 則已知之方程式變為

$x^2+y^2=2x+4y$ ……………………(1)

因方程式無常數項. 故其軌跡過原點. 於 (1) 式以 $(-x,y)$ 代 (x,y)；$(x,-y)$ 代 (x,y) 或 $(-x,-y)$ 代 (x,y) 結果 (1) 式均改變，即其軌跡改變故此軌跡對於二軸及原點均不對稱.

使 $y=0$，得 XX' 軸上之截綫為 $x=2$ 或 $x=0$；

使 $x=0$，得 YY' 軸上之截線為 $y=4$ 或 $y=0$.

解方程式求 x 得 $x=1\pm\sqrt{-y^2+4y+1}$ ……………………(A)

由 11 頁定理 III，可知 y 之小於 $2-\sqrt{5}$ 與大於 $2+\sqrt{5}$ 之值皆須除掉.

解方程式求 $y=2\pm\sqrt{-x^2+2x+4}$ ……………………………………(B)

由 11 頁定理 III 可知 x 之小於 $1-\sqrt{5}$ 與大於 $1+\sqrt{5}$ 之值除掉.

由 (A) 及 (B) 可知此曲線為封閉曲線.

(k) $ay^2=x^3$.

解. 設 $a=1$ 則已知之方程式變為 $y^2=x^3$

因此方程式無常數項故此曲線過原點.

因無 y 之奇次項故對於 x 軸爲對稱.

解之以求 x 得 $x=\sqrt[3]{y^2}$ ....(A)

故 y 無可除掉之值.

解之以求 y 得 $y=\pm\sqrt{x^3}$ ....(B)

故 x 小於零之一切值均須除掉.

由 (A) 可知當 y 增加 x 亦因之而增加. 故知此曲線由兩軸而延長至無限遠.

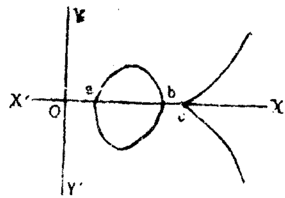
(1) $a^2y=x^3$.

解. 設 $a=2$ 則己知之方程式變爲 $4y=x^3$

故知其圖形與 P. 71. 例 (4) 之圖形式相同.

3. 繪方程式 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 之軌跡.

(a) $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 當 $a<b<c$.



討論: (1) 因 $a, b, c \neq 0$ 故原點不在其軌跡上.

(2) 因無 y 之奇次項故對 x 軸爲對稱.

(3) 使 $y=0$ 得 x 軸上之截線爲 $x=a$, $x=b$, $x=$

使 $x=0$ 得 $y=\pm\sqrt{-abc}$

故 a, b, c 三者全小於 0 或只一值小於 0, 則 y 軸有兩截線, 若全大於零則與 y 軸不相交.

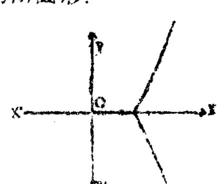
(4) x 小於 a 之値須除掉

x 大於 b 小於 c 之値須除掉.

故 x 在 a 及 b 之值得 y 之爲有限. 卽不得超過或減小一有限之値.

故此圖形在 a, b 之間 爲一封閉圖形.

如果 $x>c$ 而切繼續增加則 y 亦因之而增加 故又可由兩軸延長而至於無限.

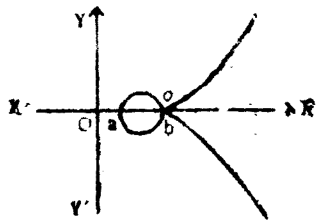


(b) 當 $a=b<c$

同理則其圖形如右.

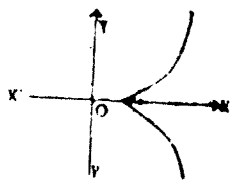
(c) 當 $a<b$, $b=c$.

同理則其圖形如右.



(d) 當 $a=b=c$.

同理則其圖形如右.



4. 證明任何圓錐曲線，必可以含 x, y 之二次方程表之.

解. 以 YY' 與此定直線相合，且作 XX' 通過此定點.

以 $(p, 0)$ 表定點，及 e 表此常數比.

已給之條件為 $\dfrac{PF}{PD}=e$.

但由 31 頁公式 (IV) 得

$$PF=\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2};\ PD=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2}}=e.$$

平方且化簡，得

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

5. 討論上題之方程式，並作圖.

討論: (a) 當 $e=1$ 時，則與方程式可書為 $y^2=2px-p^2$ ......(1)

設 $p=2$, (1) 式變為 $y^2=2x-4$.

(1) 此方程式含常數項，故原點不在曲線上.

(2) 此方程式不含 y 之奇次項，故其軌跡對於 x 軸為對稱.

(3) 使 $y=0$, 得 $x=1$, 爲 XX' 軸上之截線.

使 $x=0$, 得 $y=\sqrt{-4}$, 故此曲線不與 YY' 軸相交.

(4) 解方程式求 x, 得 $x=\frac{1}{4}(y^2+4)$ ……………(A)

故 y 無可除掉之値.

解方程式求 y 得 $y=\pm 2\sqrt{x-1}$ ……………(B)

故 x 小於 1 之一切値皆須除掉.

(5) 由 (A) 可知, 此曲線由兩軸延至無限遠.

其圖形第 71 例 2 之圖形相像.

(b) 當 $e<1$ 時假定 $e=\frac{1}{2}$, $p=1$. 則與方程可書爲

$3x^2+4y^2-8x+4=0$.

(1) 因方程式有常數項. 故原點不在軌跡上.

(2) 因方程式無 y 之奇次項. 故其軌跡對於 x 爲對軸稱

(3) 使 $y=0$, 得 $x=2$ 或 $\frac{2}{3}$, 爲 XX' 軸上之截線.

使 $x=0$, 得 $y=\pm\sqrt{-1}$, 故此曲線不與 YY' 軸相交.

(4) 解方程式求 x, 得, $x=\frac{4\pm\sqrt{21-4y^2}}{3}$ ………(A)

由 11 頁定理 III, 可知 y 小於 $-\frac{1}{2}\sqrt{21}$ 與大於 $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ 之値皆須除掉.

解方程式求 y, 得, $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{8x+3x^2-4}$ ………(B)

由 11 頁定理 III 可知 x 大於 2 與小於 $\frac{2}{3}$ 之一切値皆須除掉

(5) 由 (A) 及 (B) 可知此曲線爲封閉曲線.

其圖形與第 68 頁例 (1) 之圖相像.

(c) 當 $e>1$ 時, 假定 $e=2$, $p=1$. 則其方程式變爲

$3x^2-y^2+2x-1=0$.

(1) 方程式既含常數項, 故其軌跡不通過原點.

(2) 方程式既無 y 之奇次項. 故其軌跡對於 x 軸爲對稱

(3) 使 $y=0$, 得 $x=-1$ 或 $\frac{1}{3}$ 爲 XX' 軸上之截線.

使 $y=0$, 得 $y=\pm\sqrt{-1}$, 故此曲線不與 YY' 軸相交.

(4) 解方程式求 x, 得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{2+[illegible]^2}}{3}$ ……………(A)

故 y 無可除掉之値.

解方程式求 y，得 $y=\pm\sqrt{3x^2+2x-1}$ ....(B)

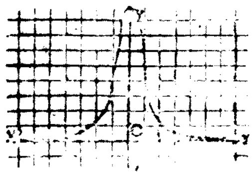
由 11 頁定理 III 可知 x 在 -1 與 $\frac{1}{3}$ 之間之值皆須除掉.

(5) 由 (A) 可知此曲線由兩軸延至無限遠.

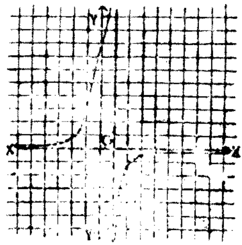
其圖形與第 1 頁例 13 之圖形相像.

6. 作下諸方程式之圖形.

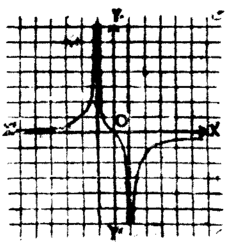
(a) $x^2y-5=0$.



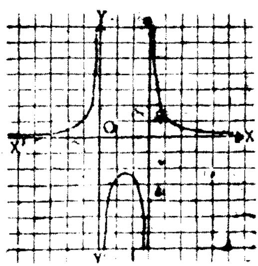
(d) $x^2y-y+8=0$.



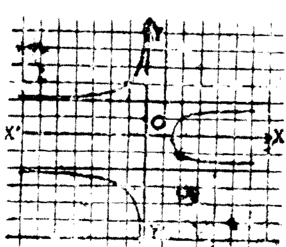
(b) $x^2y-y+2x=0$.



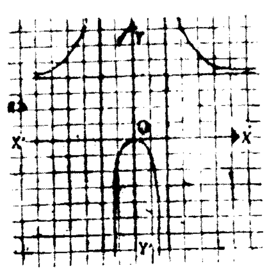
(e) $y=\dfrac{5}{x^2-3x}$



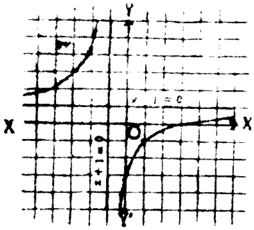
(c) $xy^2-4x+6=0$.



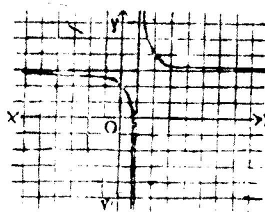
(f) $y=\dfrac{4x^2}{x^3-4}$



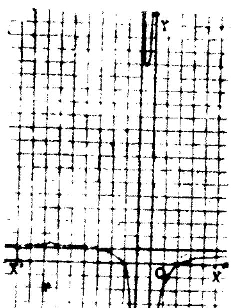
(g) $y = \frac{x-3}{x+1}$.



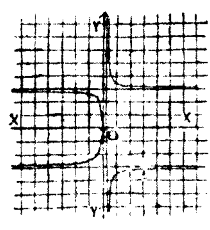
(j) $x = \frac{y-2}{y-3}$



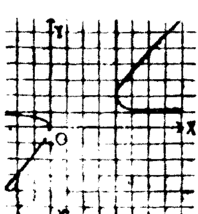
(h) $y = \frac{x^2-4}{x^2+x}$.



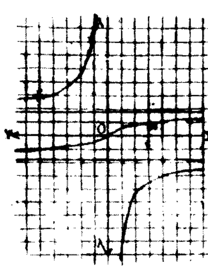
(k) $4x = \frac{y^2}{y^2-9}$.



(i) $x = \frac{y^2}{y-1}$.



(l) $\frac{8y}{3-y^2}$



習　　題 （第78頁－79頁）

求下列諸方程式軌跡之交點．

1．$\left.\begin{array}{l}7x-11y+1=0\\x+y-2=0\end{array}\right\}$．$\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．解 (2) 式求 y，　　$y=2-x\cdots\cdots\cdots(3)$

代入 (1) 式，　　$7x-11(2-x)+1=0$，

$18x=21$，　$x=\frac{7}{6}$．

代入 (3) 式，$y=\frac{5}{6}$．

交點爲 $(\frac{7}{6},\frac{5}{6})$．

2．$\left.\begin{array}{l}x+y=7\\x-y=5\end{array}\right\}$．$\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．(1)＋(2)，　　$2x=12$ 或 $x=6$．

代入 (1) 式，　　$y=1$．

交點爲 $(6,1)$．

3．$\left.\begin{array}{l}y=3x+2\\x^2+y^2=4\end{array}\right\}$．$\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．以 (1) 式 y 之值代入 (2) 式，得

$x^2+(3x+2)^2=4$．

化簡，$10x^2+12x=0$．

$\therefore$　$x=0$ 與 $-\frac{6}{5}$．

代入 (1) 式，得 $y=2$ 與 $-\frac{8}{5}$．

排列 x，y 之值，即得交點 $(0,2)$ 與 $(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$．

4．$\left.\begin{array}{l}y^2=16x\\y-x=0\end{array}\right\}$．$\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．解 (2) 式求 y，　　$y=x\cdots\cdots\cdots(3)$

將 (3) 式 y 之值代入 (1) 式，得

$x^2=16x$，　　$\therefore$　$x=0$ 與 16．

代入 (3)，$y=0$ 與 16．

排列 x，y 之值，即得交點 $(0,0)$ 與 $(16,16)$．

5．$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=a^2\\3x+y+a=0\end{array}\right\}$．$\begin{array}{r}\cdots\cdots\cdots(1)\\\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．由 (2) 求 y，　$y=-3x-a\cdots\cdots(3)$

代入 (1) 式且化簡，得

$10x^2+6ax=0$．　$\therefore$　$x=0$ 與 $-\frac{3}{5}a$．

代入(3)式，　　　$y=-a$，與 $\frac{4a}{5}$.

排列 x, y 之值，即得交點 $(0, -a)$ 與 $\left(-\frac{3a}{5}, \frac{4a}{5}\right)$.

6. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2-4x+6y-12=0 \\ 2y=3x+3 \end{aligned}\right\}$. $\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots(1) \\ &\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}$

解　由(2)式求 y,　　$y=\frac{1}{2}(3x+3)$.

代入(1)式且化簡，得

$13x^2+38x-3=0$　　∴ $x=-3$，與 $\frac{1}{13}$.

代入(3)式，　　　$y=-3$，與 $\frac{21}{13}$.

排列 x, y 之值即得交點 $(-3, -3)$ 與 $\left(\frac{1}{13}, \frac{21}{13}\right)$.

7. $\left.\begin{aligned} x^2-y^2=16 \\ x^2=8y \end{aligned}\right\}$. $\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots(1) \\ &\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}$

解. 將(2)式 x^2 之值代入(1)式，得

$8y-y^2=16$，或 $y^2-8y+16=0$,

∴ $y=4$.

代入(2)式，$x^2=32$,

∴ $x=\pm 4\sqrt{2}$.

排列 x, y 之值即得交點 $(4\sqrt{2}, 4)$ 與 $(-4\sqrt{2}, 4)$.

8. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2=41 \\ xy=20 \end{aligned}\right\}$. $\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots(1) \\ &\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}$

解. 由(2)式求 y,　　$y=\frac{20}{x}$……(3)

代入(1)式且化簡，得

$x^4-41x^2+400=0$.　　∴ $x=\pm 5$ 與 ± 4.

代入(3)式，　　　$y=\pm 4$ 與 ± 5

排列 x, y 之值即得交點 $(5, 4)$ $(-5, -4)$, $(4, 5)$ 與 $(-4, -5)$.

9. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2-6x-2y-15=0 \\ 9x^2+9y^2+6x-6y-27=0 \end{aligned}\right\}$. $\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots(1) \\ &\cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}$

解. (1)×9, $9x^2+9y^2-54x-18y-135=0$ ……(3)

(2)−(3), $60x+12y+108=0$ ……………(4)

解(4)式求 y, $y=-5x-9$……………(5)

代入 (1) 式且化簡，得

$13x^2+47x+42=0.$

$\therefore\quad x=-2$ 與 $-\frac{21}{13}.$

代入 (5) 式，$y=1$ 與 $-\frac{13}{13}$,

排列 x，y 之値旣得交點 $(-2,\ 1)$ 與 $\left(-\frac{13}{13},\ -\frac{21}{13}\right)$.

10. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=49 \\ y=3x+b \end{array}\right\}$. $\begin{array}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}$

當 b 爲何値時則兩軌跡互相切？

解. 以 (2) 式 y 之値代入 (1) 式且化簡，得

$10x^2+6bx+b^2-49=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{-3b\pm\sqrt{490-b^2}}{10}.$$

代入 (2) 式，$$y=\frac{b\pm3\sqrt{490-b^2}}{10}.$$

排列 x，y 之値卽得交點.

$$\left(\frac{-3b+\sqrt{490-b^2}}{10},\ \frac{b+3\sqrt{490-b^2}}{10}\right) 與$$

$$\left(\frac{-3b-\sqrt{490-b^2}}{10},\ \frac{b-3\sqrt{490-b^2}}{10}\right).$$

若 $490-b^2=0$ 或 $b=\pm7\sqrt{10}$，則兩交點相合，卽二軌跡彼此相切.

11. $\left.\begin{array}{l} y^2=2px \\ x^2=2py \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}$

解. 由 (2) 式求 y，$y=\frac{x^2}{2p}$ $\cdots\cdots(3)$

代入 (1) 式且化簡，得

$x^4-8p^3x=0\qquad\therefore\quad x=0$ 與 $2p$.

代入 (3) 式，$\qquad y=0$ 與 $2p$.

排列 x，y 之値卽得交點 $(0,\ 0)$ 與 $(2p,\ 2p)$

12. $\left.\begin{array}{l} 4x^2+y^2=5 \\ y^2=8x \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{array}$

解. 以 (2) 式代入 (1) 式且移項，得

$4x^2+8x-5=0.$

∴ $x=\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{5}{2}$，此處 $-\frac{5}{2}$ 必須除掉．因代入 (2) 式使，之值爲虛數故也．

代 $x=\frac{1}{2}$ 入 (2) 式，得 $y=\pm 2$．

交點爲 $(\frac{1}{2},\ 2)$ 與 $(\frac{1}{2},\ -2)$

13． $x^2=4ay$ ························(1)

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解．以 (2) 式 y 之値代入 (1) 式且化簡，

$x^4+4a^2x^2-32a^4=0$．

x 之實根爲 $2a$ 與 $-2a$．

代入 (2) 式， $y=a$．

交點爲 $(2a,\ a)$ 與 $(-2a,\ a)$．

14． $x^2+y^2=100$············(1)

$y^2=\frac{9x}{2}$ ················(2)

解．以 (2) 式 y^2 之値代入 (1) 式且化簡，得

$2x^2+9x-200=0$．

∴ $x=8$ 與 $-\frac{25}{2}$．此處 $-\frac{25}{2}$ 必須除掉．

代 $x=8$ 入 (2) 式，得 $y=\pm 6$．

排列 x，y 之値卽得交點 $(8,\ 6)$ 與 $(8,\ -6)$．

15． $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5a^2 \\ x^2=4ay \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．以 (2) 式 x^2 之値代入 (1) 式且化簡，得

$y^2+4ay-5a^2=0$．

∴ $y=a$ 與 $-5a$．此處 $-5a$ 必須除掉．因 y 之此値使 x 爲虛數故也．

以 $y=a$ 代入 (2) 式，得

$x=\pm 2a$．

排列 x，y 之値卽得交點 $(2a,\ a)$ 與 $(-2a,\ a)$．

16． $\left.\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}$

解．由 (2) 式求 y^2，得，$y^2=a^2-x^2$······(3)

代入 (1) 式且化簡，得

$x^2-a^2=0$。　　$\therefore\ x=\pm a$.

代入 (3) 式，得 $y=0$

交點爲 $(a,\ 0)$ 與 $(-a,\ 0)$.

17. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 及 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4$ 之軌跡．相交於四點．以直線連成四邊形，試求其各邊及對角綫之長．

解．二式相加，得 $\frac{x^2}{2}=5$.　　$\therefore\ x=\pm\sqrt{10}$.

代入在原二式中任一個，得

$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

排列 x, y 之値卽得交點 $(\sqrt{10},\frac{3}{2}\sqrt{6})$ 與 $(-\sqrt{10},-\frac{3}{2}\sqrt{6})$ $(\sqrt{10},\ -\frac{3}{2}\sqrt{6})$ 與 $(-\sqrt{10},\ \frac{3}{2}\sqrt{6})$.

一邊之長 $=\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{10})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$.

另一邊之長 $=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{10})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

一對角綫之長 $=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{10})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{94}$.

其他一對角綫之長 $=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{10})^2+(-\frac{3}{2}\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{6})^2}$

$=\sqrt{94}$.

將下列各方程式之軌跡連成三角形或多邊形，試求其面積

18. $3x+y+4=0$ ……………………(1)

$3x-5y+34=0$ ……………………(2)

$3x-2y+1=0$ ……………………(3)

解．與聯立方程式 (1) 與 (2)，得

$x=-3$ 與 $y=5$.

解聯立方程式 (1) 與 (3)，得

$x=-1$ 與 $y=-1$.

解聯立方程式 (2) 與 (3)，得

$x=7$，與 $y=11$.

故此三角形之角頂爲 $(-3,\ 5)$，$(-1,\ -1)$ 與 $(7,11)$

依次將各頂之坐標排列之，

$$\begin{array}{rr} -3 & 5 \\ -1 & -1 \\ 7 & 11 \\ -3 & 5 \end{array}$$

三角形之面積 $=\frac{1}{2}[(3-11+35)-(-5-7-33)]=36$.

19． $x+2y=5$ ……………………(1)

$2x+y=7$ ……………………(2)

$y=x+1$ ……………………(3)

解．解聯立方程式 (1) 與 (2)，得

$x=3$ 與 $y=1$.

解聯立方程式 (1) 與 (3)，得

$x=1$ 與 $y=2$.

解聯立方程式 (2) 與 (3)，得

$x=2$ 與 $y=3$.

故方程式 (1)，(2) 及 (3) 之各軌跡所作成之三角形其角頂爲 $(3,\ 1)$，$(2,\ 3)$ 與 $(1,\ 2)$.

依次將各頂之坐標排列之，

$$\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array}$$

∴ 三角形之面積 $=\frac{1}{2}[(9+4+1)-(2+3+6)]=\frac{3}{2}$.

20． $x+y=a$ ……………………(1)

$x-2y=4a$ ……………………(2)

$y-x+7a=0$ ……………………(3)

解．解聯立方程式 (1) 與 (2)，得

$x=2a$，$y=-a$，

解聯立方程式 (1) 與 (3)，得

$x=4a$，$y=-3a$.

解聯立方程式（2）與（3），得

$x=10a$，　$y=3a$.

故（1），（2）及（3）之各軌跡所作成之三角形，其角頂爲（$2a$，$-a$）（$4a$，$-3a$）與（$10a$，$3a$）.

依次將各頂之坐標排列之.

$$\begin{array}{cc} 2a & -a \\ 4a & -3a \\ 10a & 3a \\ 2a & a \end{array}$$

∴　三角形之面積 $=\frac{1}{2}[(-6a^2+12a^2-10a^2)-(-4a^2-30a^2+6a^2)]$

$=\frac{1}{2}(-4a^2+28a^2)=12a^2$.

21．$x=0$……………（1）　　$y=0$……………（2）

　　$x=4$……………（3）　　$y=-6$……………（4）

解．由解聯立方程式（1）與（2），（1）與（4），（2）與（3），（3）與（4）求得（1），（2），（3），（4）之各軌跡所作成之四邊形之角頂爲（0，0）（0，-6），（4，-6），（4，0）.

依次將各頂之坐標排列之.

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -6 \\ 4 & -6 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

∴　面積 $=\frac{1}{2}[(0+0+0+0)-(0-24-24+0)]=24$.

22．$x-y=0$…………（1）　$x+y=0$…………（2）

　　$x-y=a$…………（3）　$x+y=b$…………（4）

若作其圖形，則得直綫（1）與（2）相交，（1）與（4）相交（2）與（3）相交，（3）與（4）相交.

解．解聯立方程式（1）與（2），得

$x=0$，$y=0$.

解聯立方程式（1）與（4），得

$x=\frac{b}{2}$，$y=\frac{b}{2}$.

解聯立方程式（2）與（3），得

$x=\frac{a}{2}$，$y=-\frac{a}{2}$.

解聯立方程式（3）與（4），得

$$x=\frac{a+b}{2},\quad y=\frac{-(a-b)}{2}.$$

故此四邊形之角頂為 (0, 0)，與 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$,

$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{-(a-b)}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}\right)$.

依次將各頂之坐標排列之

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{a+b}{2} & \frac{-(a-b)}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\therefore\ 面積=\tfrac{1}{2}\left[\left(-\frac{a^2-ab}{4}+\frac{ab+b^2}{4}\right)-\left(-\frac{a^2+ab}{4}-\frac{ab-b^2}{4}\right)\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{ab+b^2-a^2}{4}+\frac{2ab+a^2-b^2}{4}\right)=\tfrac{1}{2}ab.$$

23. $y=3x-$ ……………(1) $y=3x+5$……………(2)

$2y=x-6$ ……………(3) $2y=x+14$……………(4)

解. 解聯立方程式 (1) 與 (3)，得

$$x=\frac{12}{5},\ y=-\frac{9}{5}$$

解聯立方程式 (1) 與 (4)，得

$$x=\frac{32}{5},\quad y=\frac{51}{5}.$$

解聯立方程式 (2) 與 (4)，得

$$x=\frac{4}{5}\ 與\ y=\frac{37}{5}.$$

解聯立方程式 (2) 與 (3)，得

$$x=-\frac{16}{5},\quad y=-\frac{23}{5}.$$

故此四邊形之角頂爲 $\left(\frac{12}{5},\ -\frac{9}{5}\right)$, $\left(\frac{32}{5},\ \frac{51}{5}\right)$, $\left(\frac{4}{5},\ \frac{37}{5}\right)$ 與 $\left(-\frac{16}{5},\ -\frac{23}{5}\right)$.

依次將各頂之坐標排列之

$$\begin{array}{cc}
\frac{12}{5} & -\frac{9}{5} \\[2ex]
\frac{32}{5} & \frac{51}{5} \\[2ex]
\frac{4}{5} & \frac{37}{5} \\[2ex]
-\frac{16}{5} & -\frac{23}{5} \\[2ex]
\frac{12}{5} & \frac{-9}{5}
\end{array}$$

∴ 四邊形之面積

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{612}{25}+\frac{1184}{25}-\frac{92}{25}+\frac{144}{25}\right)-\left(-\frac{288}{25}+\frac{204}{25}-\frac{592}{25}-\frac{276}{25}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1848}{25}+\frac{952}{25}\right)=56.$$

24. 求 $3x-2y+6=0$ 與 $x^2+y^2=9$ 二軌跡兩交點間之距離.

解. 解第一式求 y. $y=\frac{3}{2}x+3$, ……………(3)

代入第二式且化簡，得

$13x^2+36x=0$. ∴ $x=0$ 與 $-\frac{36}{13}$.

代入 (3) 式, $y=3$ 與 $-\frac{15}{13}$.

故交點爲 $(0,\ 3)$ 與 $\left(-\frac{36}{13},\ -\frac{15}{13}\right)$.

由 31 頁公式 (IV), 得

二交點間之距離 $=\sqrt{\left(-\frac{36}{13}-0\right)^2+\left(-\frac{15}{13}-3\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{4212}{169}}=\frac{18}{13}\sqrt{13}.$$

25　$y^2=4x$ 與 $2x+3y+2=0$ 之二軌跡是否相交？

解．解第二式求 x，　　$x=-\frac{3}{2}y-1$ ………………………（3）

代入第一式且化簡，得

$$y^2+6y+4=0 \qquad \therefore\ y=-3\pm\sqrt{5}.$$

代入（3）式，　　$x=\dfrac{7\mp3\sqrt{5}}{2}.$

因方程式有二組公解．故其軌跡相交．

26．a 爲何值，$3x+y-2=0$，　$ax+2y-3=0$，　$2x-y-3=0$ 三直線相交於一點．

解．依次命三式爲（1），（2），（3）．

解聯立方程式（1）與（3），得 $x=1$，$y=-1$．

因三直線適能相交於一點，僅當（1），（2），（3）有一組根時．

$\therefore\ a\times1+2\times(-1)-3=0$ 因得 $a=5$．

27．求 $x^2+y^2=13$ 與 $y^2=3x+3$ 之公弦之長．

解．以第二式 y^2 之值代入（　）式且化簡，得

$x^2+3x-10=0$．　$\therefore$　$x=2$ 與 -5 但此處 -5 必須除掉．

代入 $x=2$ 第二式，得 $y=\pm3$．

交點爲 $(2,3)$ 與 $(2,-3)$．

$\therefore$　公弦之長 $=\sqrt{(2-2)^2+(3+3)^2}=6$．

28．若三角形三邊之方程式爲 $x+7y+11=0$，$3x+y-7=0$，$x-3y+1=0$．試求其各中線之長

解．依次命三式爲（1），（2），（3）．

解聯立方程式（1）與（2），得 $x=3$，$y=-2$．

解聯立方程式（1）與（3），得 $x=-4$，$y=-1$．

解聯立方程式（2）與（3），得 $x=2$，$y=1$．

故此三角形之角頂爲 $A(3,-2)$，$B(-4,-1)$，$C(2,1)$．

由 39 頁定理 VII 之推論，求得 AB，BC 與 CA 三邊之中點各爲 $M_1(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$，$M_2(-1,0)$ 與 $M_3(\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$．

由 31 頁公式 IV，得

$$CM_2=\sqrt{(2+\tfrac{1}{2})^2+(1+\tfrac{3}{2})^2}=\tfrac{5}{2}\sqrt{2};$$

$$AM_2=\sqrt{(3+1)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{5};$$

$$BM_3=\sqrt{(-4-\tfrac{5}{2})^2+(-1+\tfrac{1}{2})^2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{170}.$$

證明：下列各對方程式之軌跡之二交點相合，即二軌跡互相切也.

29. $y^2-10x-6y-31=0$ ……………(1)

$2y-10x=47$ ……………………(2)

解. (1)−(2) $y^2-8y+16=0$ $\therefore$ $y=4$ 與 4.

代入 (2) 式，得 $x=-\frac{39}{10}$ 與 $-\frac{9}{10}$.

將 x, y 之值排列即得交點，$(-\frac{39}{10},\ 4)$ 與 $(-\frac{39}{10},\ 4)$.

故 (1) 與 (2) 之軌跡相交於二相合點 $(-\frac{39}{10},\ 4)$.

即兩軌跡互相切也.

30. $9x^2-4y^2+54x-16y+29=0$ ……………(1)

$15x-8y+11=0$ ……………………(2)

解. 由 (2) 式求 y，得 $y=\dfrac{15x+11}{8}$ ……(3)

代入 (1) 式且化簡，得

$9x^2-6x+1=0$. $x=\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{3}$

代入 (3) 式，得 $y=2$ 與 2.

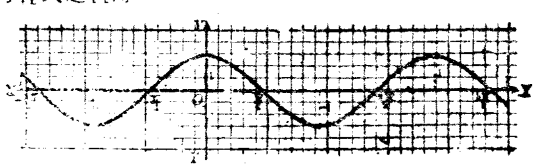
交點為 $(\frac{1}{3},\ 2)$ 與 $(\frac{1}{3},\ 2)$.

故 (1) 與 (2) 之軌跡相交於二相合點 $(\frac{1}{3},\ 2)$ 即二軌跡互相切也.

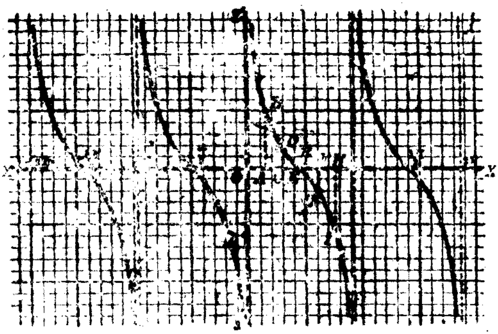
習　　題 (第83頁)

描下列諸方程式之軌跡：

1. $y=\cos x$.

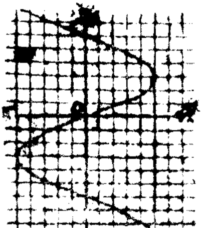


2. $y = \cot x$.

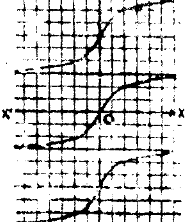


3. $y = \sec x$.

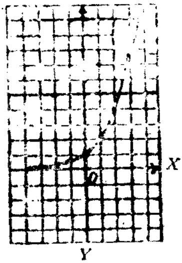
4. $y = \sin^{-1} x$



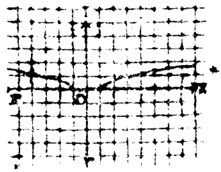
5. $y = \tan^{-1} x$.

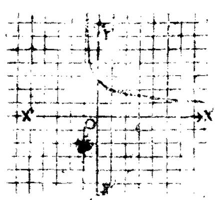


6. $y = 2^x$.



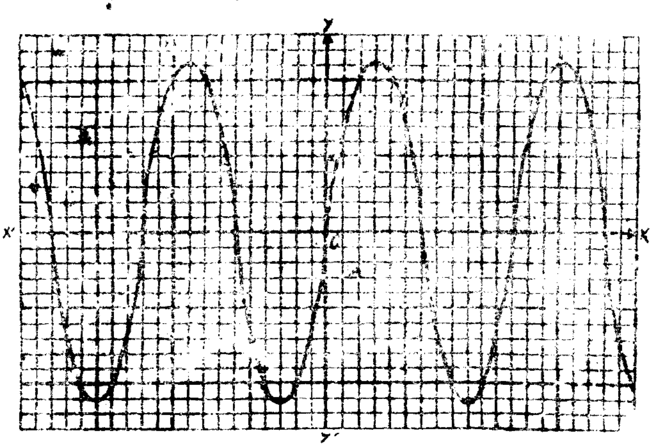
7. $y = \log_{10} x$



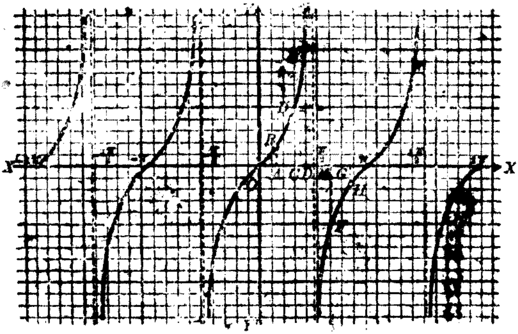


8. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

9. $y = \sin 2x$.

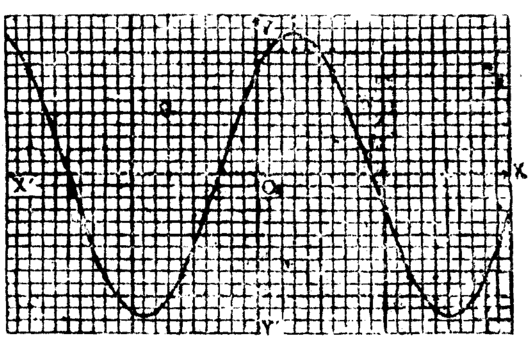


10. $y=\tan^x$ 此圖之 x 軸上每單位代表兩單位.



11. $y=2\cos x$, 此圖與第一題之圖形相同，只是 y 軸上每一單此圖表兩單位. 故從略.

12. $y=\sin+\cos x$.



習　　題（第84頁）

1. 描單利息定律 $A=P(1+rn)$ 之圖形，若

(a) P, n 爲變數,

設 $A=\frac{4}{3}$, $r=\frac{2}{3}$.

或得　　$4=3y+2xy$,

$$2xy+3x-4=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由（1）可知其圖形爲雙曲線在第一象限中之第一部分．與原文第 75 頁習題（1）（p）之圖形相似．

（b） n, r 爲變數，因得

$$xy - \frac{A-P}{P} = 0$$

但 $\frac{A-P}{P}$ 爲常數．設其爲 k

$xy-k=0$，設 $k=4$．

得知其圖形．爲雙曲線在第一象限中之一部分如前．

（c） A, P 爲變數，因得

$y=(1+rn)x$

得知其爲過原點，及斜率爲 $(1+rn)$ 之一直線．

設 $(1+rn)=-\frac{1}{2}$ 得其圖形與原文第 62 頁習題 1．圖形同．

（d） A, r 爲變數

$y=P(1+nx)$

$y=Pnx+P$．

其圖形，亦爲過 $(0, P)$ 一點．其斜率爲 Pr 之一直線

設 $P=12$，$Pn=3$，得其圖形如 $y=3x+12$ 之圖形．

（e） P, r 爲變數

其圖形與（a）相同．

2．描例 2．之定理 $Pv=kt$ 之圖形，若

（a） P, t 爲變數，則

$$y=\frac{k}{v}x.$$

其圖形爲過原點其斜率爲 $\frac{k}{v}$ 之一直線．

設 $\frac{k}{v}=3$ 圖形與第 62 習題 1．（c）相似．

（b） v, t 爲變數，則

$Py=kx$．

$$y=\frac{k}{P}x$$

亦爲過原點，及斜率爲 $\frac{k}{P}$，之一直線．

$\frac{k}{P}=3$ 其圖形與前同．

6. 求本金 P，複利率 r/$_{0}$，n 年之本利和 A 之複利率公式爲 $A=P(1+r)^{n}$ 試繪其圖形，設，

(a)

A，P 爲變數

$y=(1+r)^{n}x$．

爲過原點斜率爲 $(1+r)^{n}$ 之一直線．

設 $(1+r)^{n}=3$ 其圖形與前同．

(b) 變數爲 A 及 r．

$y=P(1+x)^{n}$

$n=1$，爲直線，

$n=$偶數，爲拋物線，

$n=3$，爲三次拋物線．

(c) A，n 爲變數．

$y=P(1+r)^{x}$，

此圖形與原文 83 頁習題 6 之圖形相似．

(d)

P，r 爲變數

$\log A=\log y+n\log(1+x)$．

設 $n=0$，爲一直線；

$n=1$，爲雙曲線之一部．

(e) P，n 爲變數

$\log A=\log P+n\log(1+r)$

$$n=\frac{\log A}{\log(1+r)}-\frac{\log P}{\log(1+r)}$$

$$=\log\frac{A}{P}\quad\log(1+r)$$

$$y=\log\frac{A}{x}\quad \log(1+r)$$

其圖形與 83 頁 習題 7. 相似.

(i) r, n 爲變數

$$\therefore\frac{A}{P}=(1+y)^{x}.$$

$$\log\frac{A}{P}=x\log(1+y),$$

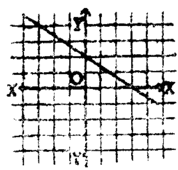
其圖形與習題 1 之 (a) 相似.

第　四　章

習　題　(第90－91頁)

1. 求下方程式之截綫，幷作圖

(a) $2x+3y=6$

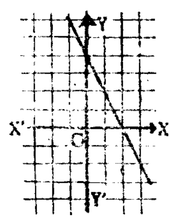


解. 今 $A=2$, $B=3$, $C=-6$.

由 86 頁推論 IV, 得

$$XX'\text{ 上之截綫}=-\frac{C}{A}=-\frac{-6}{2}=3;$$

$$YY'\text{ 上之截綫}=-\frac{C}{B}=-\frac{-6}{3}=2.$$



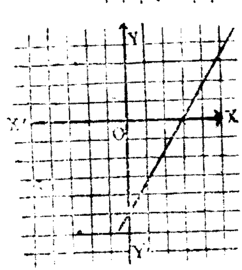
(b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1,$

解. 今 $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=-1$.

由 87 頁推論 IV, 得

$$X'X'\text{ 上之截綫}=-\frac{C}{A}=-\frac{-1}{\frac{1}{2}}=2.$$

$$YX'\text{ 上之截綫}=-\frac{C}{B}=-\frac{-1}{\frac{1}{4}}=4.$$



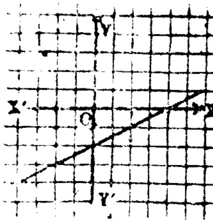
(c) $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1.$

解. 今 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{5}$, $C=-1$

由 87 頁推論 IV, 得

XX' 上之截線 $= -\frac{C}{A} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

YY' 上之截線 $= -\frac{C}{B} = -5.$



(d) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1.$

解. 令 $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -1$

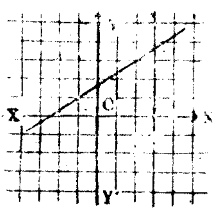
由 87 頁推論 IV，得

XX' 上之截線 $= -\frac{C}{A} = 4;$

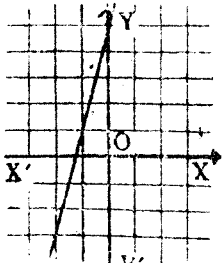
YY' 上之截線 $= -\frac{C}{B} = -2.$

2. 作下方程式之直線.

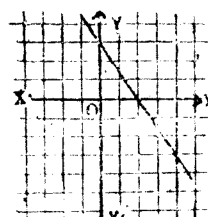
(a) $2x - 3y + 5 = 0.$



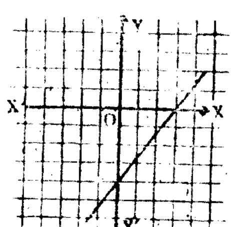
(b) $y - 5 - 4x = 0.$



(c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$



(d) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1.$



求下列諸直線之方程式，并寫成普通形式

(a) $m=2$, $b=-3$.

解. 以 m 與 b 之值代入公式 $y=mx+b$ 內，得

$y=2x-3$.

移項，$2x-y-3=0$.

(b) $m=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$.

解. 以 m 與 b 之值代入公式 $y=mx+b$ 內，得

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

化簡 $x+2y-3=0$.

(c) $m=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{5}{2}$.

解. 以 m 與 b 之值代入公式 $y=mx+b$ 內，得

$y=\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}$.

化簡，$4x-10y-25=0$.

(d) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $b=-2$.

解 $m=\tan\alpha=\tan 45^\circ=1$.

以 m 與 b 之值代入公式 $y=mx+b$ 內，得

$y=x-2$.

移項，$x-y-2=0$

(e) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, $b=3$.

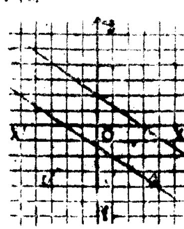
解 $m=\tan\alpha=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.

以 m 與 b 之值代入公式 $y=mx+b$ 內，得

$y=-x+3$.

移項 $x+y-3=0$.

4. 求下列各對方程式之根之組數，并作圖.



(a) $\begin{cases} 2x+3y-6=0. \\ 4x+6y+9=0. \end{cases}$

解. 今 $A=2$, $B=3$, $C=-6$,

及 $A'=4$, $B'=6$, $C'=9$

$$\frac{A}{A'}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{B}{B'}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

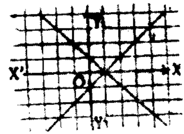
$$\frac{C}{C'} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{1}{2}.$$ 故二方程式無根.

(b) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

解. $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, 及 $A' = 1$, $B' = 1$, $C' = -1$.

$$\frac{A}{A'} = 1, \quad \frac{B}{B'} = -1, \quad \frac{C}{C'} = 1.$$



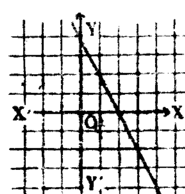
$$\therefore \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}.$$

故二方程式有一組根.

(c) $\begin{cases} 2 - 3x = y \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$

解. 令 $A = -3$, $B = -1$, $C = 2$.

及 $A' = 6$, $B' = 2$, $C' = -4$.



$$\frac{A}{A'} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2},$$

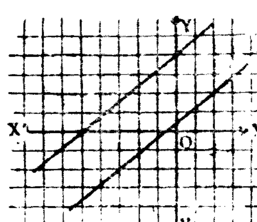
$$\frac{B}{B'} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{C}{C'} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

故二方程式之根有無窮組.

(d) $\begin{cases} 4x - 5y + 20 = 0 \\ 12x - 15y + 6 = 0 \end{cases}$

解. 令 $A = 4$, $B = -5$, $C = 20$,

及 $A' = 12$, $B' = -15$, $C' = 6$.

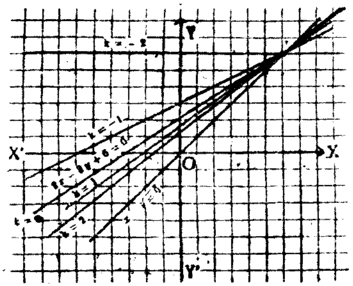


$$\frac{A}{A'} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{B}{B'} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{C}{C'} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} .$$ 故二方程式無根.

5. 作 $2x-3y+6=0$, $x-y=0$ 兩直線，又當 $k=0$, ± 1, ± 2 時，作 $(2x-3y+6)+k(x-y)=0$ 之軌跡.



6. 由下列諸方程，檢出平行或正交之對直線.

(a) $\begin{cases} L_1: \ y=2x-3. \\ L_2: \ y=-3x+2. \\ L_3: \ y=2x+7. \\ L_4: \ y=\frac{1}{3}x+4. \end{cases}$

解. L_1 與 L_3 之斜率均爲 2.

$\therefore \ L_1 \parallel L_3$

因 L_2 與 L_4 之斜率 -3 與 $\frac{1}{3}$ 互爲負倒數.

$\therefore \ L_2 \perp L_4$

(b) $\begin{cases} L_1: \ x+3y=0. \\ L_2: \ 8x+y+1=0. \\ L_3: \ 9x-3y+2=0. \end{cases}$

解. $1\times 9+3(-3)=9-9=0$.

$\therefore \ L_1 \perp L_3$.

(c) $\begin{cases} L_1: \ 2x-5y=8. \\ L_2: \ 5y+2x=8. \\ L_3: \ 35x-14y=8. \end{cases}$

解. $2\times 35+5(-14)=70-70=0$.

$\therefore \ L_2 \perp L_3$.

7. 有四邊形，其邊爲 $2x-3y+4=0$，$3x-y-2=0$，$4x-6y-9=0$，$6x-2y+4=0$；試證明其爲平行四邊形.

解 依次以 L_1，L_2，L_3，L_4 表此四方程式之各軌跡.

因 $\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}\neq\frac{4}{-9}$， $\therefore\ L_1\parallel L_3$；

因 $\frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{4}$， $\therefore\ L_2\parallel L_4$.

故此四邊形爲平行四邊形.

8. 通過 $y=3x+4$，$y=-x+4$ 交點之直線，其斜率爲 -2. 試求其方程式.

解. 以二式爲聯立方程式解之，得

$x=0$，$y=4$ 即交點之坐標.

故交點爲 $(0,4)$

$\therefore\ m=-2,\quad b=4.$

以 m 及 b 之値代入公式 $y=mx+b$，得

$y=-2x+4.$

移項 $2x+y-4=0.$

9. 在 $y=mx+b$ 內若 b 爲常數，m 爲變數，其軌跡爲何？若 m 爲常數，b 爲變數，其軌跡爲何？

解. 若 b 爲常數，m 爲變常數，則方程式 $y=mx+b$ 之軌跡爲通過 $(0,b)$ 之諸直線.

若 m 爲常數，b 爲變常數，則方程式 $y=mx+b$ 之軌跡爲斜率等於 m 之諸平行線.

10. 試作一方程式，以表與下直線平行所有一切之直線.

(a) $y=2x+7$.

解. 由 87 頁推論 II，所求之方程式可寫爲

$Ay=2Ax+C$ 或 $y=2x+k$.

(b) $y=-x+9$.

解. 設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之方程式

由 87 頁推論 II，$\frac{A}{1}=\frac{B}{1}$，$B=A$.

故所求之方程式可書爲

$Ax+Ay+C=0$ 或 $x+y+k=0$.

(c) $y-3x-4=0$.

解. 設 A 及 B 爲所求方程式 x 及 y 之各係數.

由 87 頁推論 II, $\dfrac{A}{-3}=\dfrac{B}{1}$, $A=-3B$.

故所求之方程式爲

$-3Bx+By+C=0$.

或 $y-3x+k=0$.

(d) $2y-4x+3=0$.

解. 設 A 及 B 爲所求方程 x 及 y 之各係數.

由 87 頁推論 II, $\dfrac{A}{-4}=\dfrac{B}{2}$, $A=-2B$

故所求之方程式爲

$-2Bx+By+C=0$ 或 $2x-y+k=0$.

11. 凡與上題 (a), (b), (c), (d) 在 Y 軸之截線相同之一切直線試作一方程式以表之.

解. (a) 設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之方程式.

由 87 頁推論 IV, 得 $-\dfrac{C}{B}=7$, $C=-7B$.

故所求之方程式爲

$Ax+By-7B=0$ 或 $kx+y-7=0$.

(b) 設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之方程式.

由 87 頁推論 IV, 得 $-\dfrac{C}{B}=9$, $C=-9B$.

故所求之方程式爲

$Ax+By-9B=0$ 或 $kx+y-9=0$.

(c) 設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之方程式.

由 87 頁推論 IV, 得 $-\dfrac{C}{B}=4$, $C=-4B$.

故所求之方程式爲

$Ax+By-4B=0$，或 $kx+y-4=0$.

(d) 設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之方程式.

由 87 頁推論 IV，得 $-\frac{C}{B}=-\frac{3}{2}$，$C=\frac{3}{2}B$.

故所求之方程式爲

$Ax+By+\frac{3}{2}B=0$ 或 $kx+2y+3=0$.

12. 與$2x-3y=0$平行之直線，其在Y軸之截線爲-2，試求其方程式.

解. 設 $Ax+By+C=0$.

由 87 頁推論 II 及推論 IV，得

$$\frac{2}{A}=\frac{-3}{B}\text{ 及 }-\frac{C}{B}=-2.$$

$\therefore\ A=-\frac{2}{3}B,\quad C=2B.$

$\therefore\ -\frac{2}{3}Bx+By+2B=0.$

$\therefore\ 2x-3y-6=0.$

13 在 $Ax+By+C=0$ 內若B及C爲常數，A爲變數,其軌跡爲何？若A與B爲常數，C爲變數,其軌跡爲何？

由 87 頁推論 II 及 IV 可知方程式

$Ax+By+C=0$ 在 YY'之截線 $b=-\frac{C}{B}$及其斜率 $m=-\frac{A}{B}$.

故若B及C爲常數而A爲變常數,則其軌跡爲通過$\left(0,-\frac{C}{B}\right)$之一組直線.

若 A 及 B 爲常數而 C 爲變常數，則其軌跡爲斜率等於 $-\frac{A}{B}$ 之一組平行線.

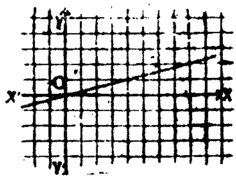
習　題 （第94—95頁）

1. 求下諸直線方程式，并作圖.

(a) 過 (0, 0) 與 (8, 2) 兩點.

解．設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)



因 (0, 0) 在此直線上

$\therefore\quad C=0$ ……………………(2)

又因 (8, 2) 在此直線上

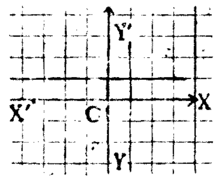
$\therefore\quad 8A+2B+C=0$ ……(3)

解 (2), (3) 以 A 表 B, C 之值，得 $C=0$, $B=-4A$.

代入 (1) 式， $Ax-4Ay=0$.

以 A 除之即得所求之方程

$x-4y=0$.



(b) 過 $(-1, 1)$ 與 $(-3, 1)$ 兩點.

解．設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因 $(-1, 1)$ 在此直線上，

$\therefore\quad -A+B+C=0$ ………(2)

又因 $(-3, 1)$ 在此直線上，

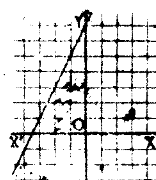
$\therefore\quad -3A+B+C=0$ ……(3)

解 (2), (3) 以 B 表 A, C 之值得 $A=0$, $C=-B$.

代入 (1) 式， $By-B=0$.

以 B 除之即得所求之方程式為

$y-1=0$.



(c) 斜率 $=2$ 且過 $(-3, 1)$.

解．設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因 $(-3, 1)$ 在此直線上，

$\therefore\quad -3A+B+C=0$ ………(2)

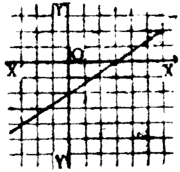
又因其斜率為 2， $\therefore\quad -\dfrac{A}{B}=2$ ……………(3)

解 (2), (3) 以 B 表 A, C 之值得 $A=-2B$, $C=-7B$.

代入 (1) 式， $-2Bx+By-7B=0$.

以 $-B$ 除之即得所求之方程式為

$2x-y+7=0.$



( ) 截線為 $a=3$，$b=-2$.

解. 設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$ ………………(1)

因此直線在 XX' 之截為 3,

$\therefore\quad -\dfrac{C}{A}=3$，………………(2)

因此直線在 YY' 之截為 -2,

$\therefore\quad -\dfrac{C}{B}=-2$，………………(3)

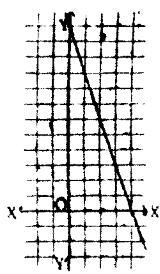
解 (2)，(3) 以 C 表 A，B 之值，得 $A=-C$，$B=\frac{1}{2}C$.

代入 (1) 式， $-\frac{1}{3}Cx+\frac{1}{2}Cy-C=0.$

除以 $-C$ 且化簡即得所求之方程式為

$2x-3y-6=0.$

(e) 斜率 $=-3$，在 XX' 上之截線 $=4$



解. 設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$………………(1)

因其斜率為 -3，即

$-\dfrac{A}{B}=-3$………………(2)

因 $a=4$ 即

$-\dfrac{C}{A}=4$ ………………(3)

解 (2)，(3) 以 A 表 B，C 之値得，$B=\frac{1}{3}A$，$C=-4A$.

代入 (1) 式， $Ax+\frac{1}{3}Ay-4A=0.$

以 A 除之且化簡即得所求之方程式為

$3x+y-12=0.$

(f) 截線 $a=-3$，$b=-4$.

解. 設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$………………(1)

因其在 XX' 之截線爲 -3.　∴　$-\frac{C}{A}=-3$ ……(2)

因其在 YY' 之截綫爲 -4　∴　$-\frac{C}{B}=-4$ ……(3)

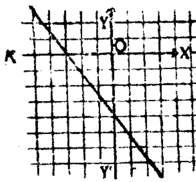
解 (2), (3) 以 C 表 A, B 之值，得

$A=\frac{1}{3}C$, $B=\frac{1}{4}C$.

代入 (1) 式, $\frac{1}{3}Cx+\frac{1}{4}Cy+C=0$.

乘以 $\frac{12}{C}$ 即得所求之方程式爲

$4x+3y+12=0$.



(g) 過 (2, 3) 與 (−2, −3) 兩點.

解. 設所求之方程式爲

$Ax+By+C=0$ ……………(1)

因 (2, 3) 在直線上,　∴　$2A+3B+C=0$ ……(2)

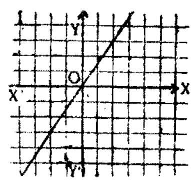
又因 (−2, −3) 亦在 (1) 上,　∴　$-2A-3B+C=0$ ……(3)

解 (2), (3) 以 B 表 A, C 之值, 得 $A=-\frac{3}{2}B$, $C=0$.

代入 (1) 式,　$-\frac{3}{2}Bx+By=0$.

以 $-\frac{2}{B}$ 乘之即得所求之方程式爲

$3x-2y=0$.



(h) 過 (3, 4) 與 (−4, −3) 兩點.

解. 設所求之方程式爲

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因 (3, 4) 在直線 (1) 上.

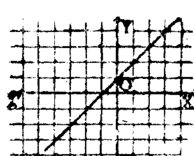
∴　$3A+4B+C=0$ ……………………(2)

又因 (−4, −3) 亦在 (1) 上,

∴　$-4A-3B+C=0$ ……………………(3)

解 (2), (3) 以 B 表 A, C 之值得

$A=-B$,　$C=-B$.



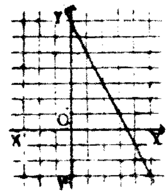
代入 (1) 式，且除以 $-B_1$ 得所求之方程式爲.

$x-y+1=0$

(i) 斜率 $=-2$，且過 (2, 3)

解. 設所求之方程式爲.

$Ax+By+C=0$ ························(1)



因 (2, 3) 在直線 (1) 上，

∴ $2A+3B+C=0$ ························(2)

又因斜率爲 -2,

∴ $-\dfrac{A}{B}=-2$ ························(3)

解 (2), (3) 以 B 表 A, C 之值，得 $A=2B$, $C=-7B$.

代入 (1) 式，$2Bx+By-7B=0$.

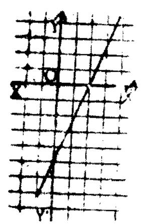
以 B 除之即得所求之方程式爲.

$2x+y-7=0$.

(j) 截線 $a=2$, $b=-5$

解. 設所求之方程式爲.

$Ax+By+C=0$ ························(1)



因直線 (1) 在 XX' 上之截線爲 2,

∴ $-\dfrac{C}{A}=2$ ························(2)

因直線 (1) 在 YY' 上截線爲 -5,

∴ $-\dfrac{C}{B}=-5$ ························(3)

解 (2), (3) 求 A 與 B 將其值以 C 表之，得

$A=-\dfrac{C}{2}$, $B=\dfrac{C}{5}$

代入 (1) 式，$-\dfrac{C}{2}x+\dfrac{C}{5}y+C=0$.

以 C 除之稍移項即得所求之方程式爲

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}=1$

2. 通過原點且平行 $2x-3y=4$ 之直線，其方程式如何.

解. 設所求之方程式爲.

$Ax+By+C=0$ ………………… (1)

因 $(0, 0)$ 在直線 (1) 上， $\therefore\ C=0.$

因直線平行已知之直線 $\therefore \dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{-3}$ ……………(2)

解 (2) 式求 B. 以 A 表其值. 得 $B=-\frac{3}{2}A.$

代入 (1) 式， $Ax-\frac{3}{2}Ay=0.$

除以 A 再化簡，即得所求之方程式爲

$2x-3y=0.$

3. 通過原點且垂直 $5x+y-2=0$ 之直線，其方程式如何.

解. 設所求之方程式爲

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因直線 (1) 過原點， $\therefore\ C=0.$

又因直線 (1) 垂直於已知之直線.

$\therefore\ 5A+B=0$ ……………………(2)

解 (2) 式以求 B 得 $B=-5A$，

代入 (1) 式且除以 A，即得所求之方程式爲，

$x-5y=0.$

4. 平行 $4x-y-3=0$ 且通過 $(3, 2)$ 之直線，求其方程式.

解. 設所求之方程式爲

$Ax+By+C=0$ …………………(1)

因直線 (1) 過 $(3, 2)$， $\therefore\ 3A+2B+C=0$ …………(2)

因 (1) 與已知之直線平行， $\therefore \dfrac{A}{4}=\dfrac{B}{-1}$ ……………(3)

解 (2)，(3) 求 A 及 C，以 B 表其值，得

$A=-4B$， $C=10B.$

代入 (1) 式再除以 $-B$ 卽得所求之方程式爲，

$4x-y-10=0.$

5. 有直線，通過 $(3,0)$ 且垂直 $2x+y-5=0$ 求其方程式.

解. 設所求之方程式爲，

$Ax+By+C=0$ ………………(1)

因 $(3,0)$ 在直線 (1) 上，$\therefore\ 3A+C=0$ ………… (2)

因 (1) 與已知之直線垂直，$\therefore\ 2A+B=0$ ………… (3)

解 (2)，(3) 求 B 與 C，以 A 表其值，得

$B=-2A,\ C=-3A.$

代入 (1) 式再除以 A，即得所求之方程式，爲

$x-2y-3=0.$

6. 截線 $b=5$ 且通過 $(6,3)$ 之直線其方程式如何．

解．設所求之方程式爲．

$Ax+By+C=0$ ………………………… (1)

因 $(6,3)$ 在直線 (1) 上，$\therefore 6A+3B+C=0$ ………… (2)

又因其在 YY' 上之截線爲 5，$\therefore\ -\dfrac{C}{B}=5$ ………… (3)

解 (2)，(3) 求 A 與 C 以 B 表其值，得

$A=\frac{1}{3}B,\ C=-5B.$

代入 (1) 式，$\frac{1}{3}Bx+By-5B=$

以 B 除之再化簡，即得所求之方程式爲

$x+3y-15=0.$

7. 平行 $x-4y+2=0$ 之直線，其截線 $a=3$，試求其方程式．

解．設所求之方程式爲，

$Ax+By+C=0$ ………………… (1)

因其在 XX' 之截線爲 3，$\therefore -\dfrac{C}{A}=3$ ………………… (2)

因其平行於已知之直線，$\therefore\ \dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{-4}$ ………… (3)

解 (2)，(3) 求 B，C 以 A 表其值，得，

$B=-4A,\ C=-3A.$

代入 (1) 式再除以 A，即得所求之方程式爲，

$x-4y-3=0,$

8. 通過 $x-2y+3=0$，$x+2y-9=0$ 之交點及原點之直線其方程式如何．

解．設所求之方程式爲，

$Ax+By+C=0$ ……………………………(1)

解已知之二方程式，得其交點爲 (3, 3)

因 (1) 過 (0, 0)， $\therefore$ $C=0$。

又因 (1) 過 (3, 3)， $\therefore$ $3A+3B+C=0$。

或 $3A+3B=0$ 或 $A+B=0$ ……………………………(2)

解 (2) 式，以 A 表 B 之値，得 $B=-A$.

代入 (1) 式且以 A 除之，即得所求之方程式爲

$x-y=0$

9. 斜度 $=m$ 之直線，且通過 $P_1(x_1, y_1)$，求其方程式.

解. 設所求之方程式爲.

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因直線 (1) 之斜率爲 m， $\therefore -\dfrac{A}{B}=m$ ……………(2)

因 P_1 在直線 (1)，上， $\therefore$ $x_1A+y_1B+C=0$ ……(

解 (2)，(3) 以 B 表 A, C 之値，得

$A=-mB$， $C=(mx_1-y_1)B$.

代入 (1) 式， $-mBx+By+(mx_1-y_1)B=0$.

以 B 除之，再化簡，卽得所求之方程式爲

$y-y_1=m(x-x_1)$.

10. 截線爲 a, b，則此直線之方程式如何.

解. 設所求之方程式爲.

$Ax+By+C=0$ ……………………………(1)

因其在 XX' 之截線爲 a $\therefore$ $-\dfrac{C}{A}$ ……………(2)

又因其在 YY' 之截線爲 b， $\therefore$ $-\dfrac{C}{B}=b$ …………(3)

解 (2)，(3) 求 A，B 以 C 表其値，得.

$A=-\dfrac{C}{a}$，$B=-\dfrac{C}{b}$

代入 (1) 式， $-\dfrac{C}{a}x-\dfrac{C}{b}y+C=0$.

以 C 除之再移項即得所求之方程式爲

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{b}=1.$$

11. 通過 $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 之直線，其方程式如何.

解. 設所求之方程式為

$Ax+By+C=0$ ……………………(1)

因直線 (1) 過 P_1，　∴ $x_1A+y_1B+C=0$ ……………(2)

又因其過 P_2，　∴ $x_2A+y_2B+C=0$ ……………(3)

解 (2), (3) 求 B, C 以 A 表其值，得

$$B=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}A,\quad C=\left(y_1\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}-x_1\right)A.$$

代入 (1) 式 得

$$Ax-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}Ay+\left(y_1\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}-x_1\right)A=0.$$

除以 A 且化簡即得所求之方程式為

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0.$$

12. 證明上題所得之方程式，可寫為

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

解. $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0.$

移項，$-(x_1-x_2)y-x_2y_1=-(y_1-y_2)x-x_1y_2.$

或 $(x_2-x_1)y-x_2y_1=(y_2-y_1)x-x_1y_2$ 兩邊加 x_1y_1，

$(x_2-x_1)y-x_2y_1+x_1y_1=(y_2-y_1)x-x_1y_2+x_1y_1$ 兩邊分析因式，

$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$ 以 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$ 除之即得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-y_1}.$$

習　題　（第98頁－100頁）

1. 於第 94 頁習題 1 所列諸直線，試於 (V), (VI), (VII) 三式中引用相當之式，以求其方程式.

(a) 過 (0, 0) 與 (8, 2) 兩點.

解. 以 P_1 表 (0, 0) 及 P_2 表 (8, 2).

於是 $x_1=0$, $y_1=0$, 及 $x_2=8$, $y_2=2$

代入在第 97 頁公式 (VII) 內，

得 $\dfrac{x-0}{8-0}=\dfrac{y-0}{2-0}$.

化簡，$x-4y=0$.

(b) 過 $(-1,1)$ 與 $(-3,1)$ 兩點.

解. 以 P_1 表 $(-1,1)$ 及 P_2 表 $(-3,1)$.

於是 $x_1=-1$, $y_1=1$, 及 $x_2=-3$, $y_2=1$

代入在第 97 頁公式 (VII) 內，

得 $\dfrac{x+1}{-3+1}=\dfrac{y-1}{1-1}$.

化簡 $y-1=0$.

(c) 斜率 $=2$ 且過 $(-3,1)$.

解. 以 P_1 表 $(-3,1)$.

於是 $x_1=-3$, $y_1=1$, $m=2$.

代入在第 95頁公式 (V) 內，$y-1=2(x+3)$.

$\therefore\quad 2x-y+7=0$.

(d) 截線爲 $a=3$, $b=-2$,

解. 代入在第 96 頁公式 (VI) 內，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$.

$\therefore\quad 2x-3y-6=0$.

(e) 斜率 $=-3$，在 XX' 上之截綫 $=4$.

解. 以 P_1 表 $(4,0)$.

於是 $x_1=4$, $y_1=0$, $m=-3$.

代入在第 95 頁公式 (V) 內，$y-0=-3(x-4)$.

$\therefore\quad 3x+y-12=0$.

(f) 截線 $a=-3$, $b=-4$.

解. 代入在第 96 頁公式 (VI) 內，$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-4}=1$.

$\therefore\quad 4x+3y+12=0$.

(g) 過 $(2,3)$ 與 $(-2,-3)$ 兩點.

解. 以 P_1 表 $(2,3)$ 及 P_2 表 $(-2,-3)$.

於是 $x_1=2$, $y_1=3$, 及 $x_2=-2$, $y_2=-3$.

代入在第 97 頁公式 (VII) 內，$\dfrac{x-2}{-2-2}=\dfrac{y-3}{-3-3}$.

化簡，得 $3x-2y=0$.

(h) 過 (3, 4) 與 (−4, −3) 兩點.

解. 以 P_1 表 (3, 4) 及 P_2 表 (−4, −3).

於是 $x_1=3$, $y_1=4$, 及 $x_2=-4$, $y_2=-3$.

代入在第 97 頁公式 (VII) 內, $\dfrac{x-3}{-4-3}=\dfrac{y-4}{-3-4}$.

$\therefore\quad x-y+1=0$.

(i) 斜率 $=-2$, 且過 (2, 3).

解. 以 P_1 表 (2, 3).

於是 $x_1=2$, $y_1=3$, $m=-2$.

代入在第 95 頁公式 (V) 內, $y-3=-2\ (x-2)$.

$\therefore\quad 5x+y-7=0$.

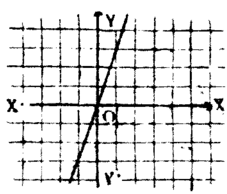
(j) 截綫 $a=2$, $b=-5$.

解. 代入第 96 頁公式 (VI) 內, $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-5}=1$.

$\therefore\quad 5x-2y-10=0$.

2 求下列諸直綫之方程式，並作圖.

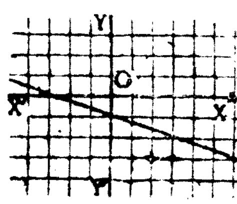
(a) 斜率 $=3$. 且過原點.



解. 以 (0, 0) 代入第 95 頁公式 (V) 之 (x_1, y_1) 及 3 代 m 得 $y-0=3\ (x-0)$.

$\therefore\quad 3x-y=0$.

(b) 通過 (3, −2), (0, −1)



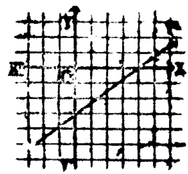
解. 以 $x_1=3$, $x_2=0$, 及 $y_1=-2$, $y_2=-1$ 代入第 97 頁公式 (VII) 得.

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y+2}{-1+2}$$

化簡. 得

$$x+3y+3=0.$$

(c) 截線 $a=4$, $b=-3$.

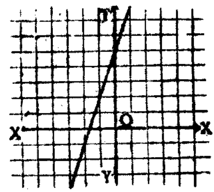


解. 代入第 96 頁公式 (VI) 內，得

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1.$$

∴ $3x-4y-12=0$.

(d) $b=5$, 斜率 $=3$.



解. 以 P_1 表 (0, 5).

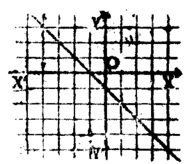
於是 $x_1=0$, $y_1=5$, $m=3$.

代入第 95 頁公式 (VII) 內，得

$$y-5=3(x-0).$$

∴ $3x-y+5=0$.

(e) 過 (1, −2) 與 (3, −4) 兩點.



解. 以 P_1 表 (1, −2), P_2 表 (3, −4).

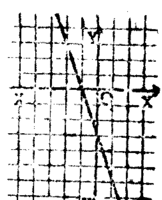
於是 $x_1=1$, $y_1=-2$, $x_2=3$, $y_2=-4$.

代入第 97 頁公式 (VIII) 內，得

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{-4+2}$$

∴ $x+y+1=0$.

(f) $a=-1$, $b=-3$.

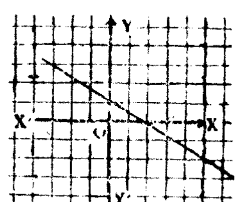


解. 代入第 96 頁公式 (VI) 得

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}=1.$$

化簡得 $3x+y+3=0$.

(g) 通過 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 斜度 $=-\frac{2}{3}$



解. 以 P_1 表 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$,

於是 $x_1=-\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{3}{2}$, $m=-\frac{2}{3}$

代入第 95 頁公式 (V) 得

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

化簡得 $6y+4x-7=0$.

(h) 通過 (0, 0), 斜度 $=m$

解. 與前題同理，得 $y=mx$

設 $m=3$ 其圖與 (a) 相同

3. 三角形之角點爲 $(-3, 2)$, $(3, -2)$, $(0, -1)$ 求其各邊之方程式.

解. 以 $(-3, 2)$ 爲 P_1, $(3, -2)$ 爲 P_2, $(0, -1)$ 爲 P_3.

由 97 頁公式 (VII), 得

$$\frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{-2-2};\quad \frac{x-3}{0-3}=\frac{y+2}{-1+2};\quad \frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+1}{2+1}.$$

化簡得 $2x+3y=0$; $x+3y+3=0$; $x+y+1=0$.

4. 求上題三角形三中線之方程式, 并證明三線過於一點.

解. 由 39 頁之推論求得 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 之中點各爲 M $(0, 0)$, M_1 $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, M_2 $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

由 97 頁公式 (VII) 求得三中線之方程式爲

$$\frac{x-0}{0-0}=\frac{y-0}{-1-0};\quad \frac{x+3}{\frac{3}{2}+3}=\frac{y-2}{-\frac{3}{2}-2};\quad \frac{x-3}{-\frac{3}{2}-3}=\frac{y+2}{\frac{1}{2}+2}.$$

化簡得 $x=0$ .... (1).

$7x+9y+3=0$ .... (2).

$5x+9y+3=0$ .... (3).

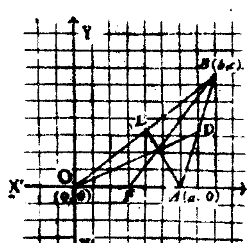
解. 聯立式 (1) 及 (2), 得 $x=0$, $y=-\frac{1}{3}$.

代入 (3) 式 $5\times0+9\times(-\frac{1}{3})+3=0$.

故三中線同過一點 $(0, -\frac{1}{3})$.

5. 證明任三角形之三中線, 必過於一點.

解. 以其一角頂爲原點, 及一邊爲 x 軸. 則其三角頂可命爲 $(0, 0)$, $A(a, 0)$ 及 B (b, c).



由 39 頁之推論, 求得三邊之中點爲

$F\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $E\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$,

由 97 頁公式 (VII) 求得中線

之方程式爲 $\dfrac{x-b}{\frac{a}{2}-b}=\dfrac{y-c}{0-c}$; $\dfrac{x-a}{\frac{b}{2}-a}=\dfrac{y-0}{\frac{c}{2}-0}$ $\dfrac{x-\frac{a-b}{2}}{0-\frac{a-b}{2}}=\dfrac{y-\frac{c}{2}}{0-\frac{c}{2}}$.

化簡得 $2cx+(a-2b)y-ac=0$ ……………………(1)

$cx-(b-2a)y-ac=0$ ……………………(2)

$cx-(a+b)y=0$ ……………………(3)

解 (2), (3), $x=\dfrac{a+b}{3}$, $y=\dfrac{c}{3}$

代入 (1) 式, $2c\times\dfrac{a+b}{3}+(a-2b)\times\dfrac{c}{3}-ac=0$.

故三中線相會於一點 $\left(\dfrac{a+b}{3},\dfrac{c}{3}\right)$.

6. 試檢定下列各三點, 是否各在一直線內.

(a) (0, 0), (1, 1), (7, 7)

解. 以 P_1 表 (0, 0), P_2 表 (1, 1) 及 P_3 表 (7, 7)

於是 $x_1=0$, $y_1=0$, $x_2=1$, $y_2=1$ 及 $x_3=7$, $y_3=7$

$\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{7-0}{1-0}=7$, $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{7-0}{1-0}=7$

$\therefore\quad \dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$

故此三點同在一直線上 (參考 98 頁之推論)

(b) (2, 3), (−4, −6), (8, 12)

解. 以 (2, 3) 爲 P_1, (−4, −6) 爲 P_2 及 (8, 12) 爲 P_3.

於是 $x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=-4$, $y_2=-6$ 及 $x_3=8$, $y_3=12$

$\dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8-2}{-4-2}=-\dfrac{6}{6}=-1$.

$\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{12-3}{-6-3}=-\dfrac{9}{9}=-1$.

$\therefore\quad \dfrac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$

故此三點同在一直線上.

(c) (3, 5), (1, 7) [illegible]

解. 以 P_1 表 $(3, 4)$, P_2 表 $(1, 2)$ 及 P_3 表 $(5, 1)$

於是 $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=1$, $y_2=2$, 及 $x_3=5$, $y_3=1$.

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{1-3}=-1\quad \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{1-4}{2-4}=\frac{3}{2}.$$

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\neq\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

故此三點不同在一直線上.

(d) $(3, -1)$, $(-6, 2)$, $(-\frac{3}{2}, 1)$.

解. 以 $(3, -1)$ 爲 P_1, $(-6, 2)$ 爲 P_2 及 $(-\frac{3}{2}, 1)$ 爲 P_3

於是 $x_1=3$, $y_1=-1$, $x_2=-6$, $y_2=2$, 及 $x_3=-\frac{3}{2}$, $y_3=1$.

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{3}{2}-3}{-6-3}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\neq\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

故此三點不同在一直線上

(e) $(5, 6)$, $(\frac{5}{6}, 1)$, $(-1, -\frac{6}{5})$

解. 命 $(5, 6)$ 爲 P_1, $(\frac{5}{6}, 1)$, 爲 P_2 及 $(-1, -\frac{6}{5})$ 爲 P_3.

於是 $x_1=5$, $y_1=6$. $x_2=\frac{5}{6}$, $y_2=1$. 及 $x_3=-1$, $y_3=-\frac{6}{5}$

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-5}{\frac{5}{6}-5}=\frac{36}{25}$$

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{-\frac{6}{5}-6}{1-6}=\frac{36}{25}$$

$$\therefore\quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

故此三點在同一直線上.

(f) $(7, 4)$, $(2, 1)$ $(6, -2)$

解. 以(7, 6)為 P_1, (2, 1)為 P_2, (6, -2)為 P_3

於是 $x_1=7$, $y_1=6$, $x_2=2$, $y_2=1$, $x_3=6$, $y_3=-2$,

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{6-7}{2-7}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

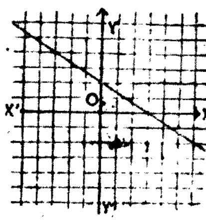
$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{-2-6}{1-6}=\frac{8}{5}$$

$$\therefore\quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\neq\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

故此三點不同在一直線上.

7. 改寫下列諸方程式為截線式,并作其軌跡.

(a) $2x+3y-6=0$.

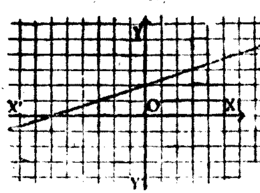


解. 移常數項於右邊, 得

$2x+3y=6$.

以6除之得 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

(b) $x-3y+6=0$.

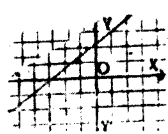


解, 移常數項於右邊. 得

$x-3y=-6$

以-6除之, $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$

(c) $3x-4y+9=0$.

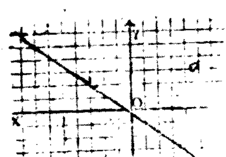


解. 移常數項於右邊, 得.

$3x-4y=-9$.

以-9除之,得 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{9}{4}}=1$

(d) $3x+4y+1=0$.



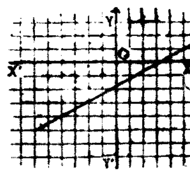
解. 移常數項, 得

$3x+4y=-1$

以-1除之, 得 $-3x-4y=1$,

或 $\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{-\frac{1}{4}}=1$;

(e) $2x-4y-7=0$.



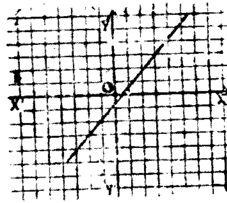
解. 移常數項，得

$2x-4y=7$

以7除之，得 $\frac{2x}{7}-\frac{4y}{7}=1$

或 $\frac{x}{\frac{7}{2}}+\frac{y}{-\frac{7}{4}}=1$.

(f) $7x-6y-3=0$.



移常數項於右邊，

得 $7x-6y=3$.

以3除之，得 $\frac{7}{3}x-2y=1$

或 $\frac{x}{\frac{3}{7}}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}=1$

8. 於前第三題之三角形，將其各邊之中點以直線連之，試求諸連線之方程式，幷證明諸連線與原三角形之邊平行.

解. 由第39頁之推論，求得 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 之各中點爲

$A(0,0)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $C\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

由第97頁公式(VII)，求得中點連線之方程式爲

$$\frac{x-0}{\frac{3}{2}-0}=\frac{y-0}{-\frac{3}{2}-0};\quad \frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{y+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}};$$

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{2}-0}=\frac{y-0}{\frac{1}{2}-0},$$

化簡，得，$x+y=0$ ......(1)

$4x+6y+3=0$ ......(2)

$x+3y=0$ ......(3)

在第三題已求得三邊之方程式爲

$2x+3y=0$ ......(4)　$x+2y+\quad 0$ ......(5)

$x+y+1=0$ ......(6)

(1)與(6)之 x, y 係數成比例

即 $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=1$　∴ $AB \parallel P_3P_1$

同樣 $BC \parallel P_1P_2$，$CA \parallel P_2P_3$.

9　通過 $x+2y=1$，$2x-4y-3=0$ 之交點及原點之直線，其方程式如何？

解. 解已知之二方程式以求其交點，得 $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$

以 P_1 表 $(0, 0)$ 及 P_2 表 $(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$

於是 $x_1=0$，$y_1=0$，及 $x_2=\frac{5}{4}$，$y_2=-\frac{1}{8}$.

代入第 97 頁公式 (VII) 內，卽得所求之方程式爲.

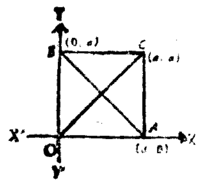
$$\frac{x-0}{\frac{5}{4}-0}=\frac{y-0}{-\frac{1}{8}-0} \text{ 或 } x+10y=0.$$

10. 證明正方形之對角線，互相垂直.

解. 以正方形之邊爲坐標軸，且假定其一邊之長爲 a，於是可得其角頂之坐標爲 $(0, 0)$，$(a, 0)$，(a, a)，$(0, a)$，

以 P_1 表 $(0,0)$，P_2 表 (a, a)，代入第 97 頁公式 (VII) 內，

得 OC 之方程式爲



$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-0}{a-0}，\text{或 } x-y=0.$$

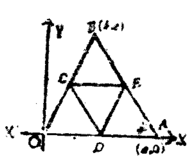
同樣方法求得 AB 之方程式爲

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-a}{0-a}，\text{或 } x+y=a.$$

$\because$ $1\times1+1\times(-1)=1-1=0$.　$\therefore$ $OC \perp AB$.

11　證明連三角形兩邊中點之直線，必平行第三邊.

解. 以一角頂爲原點，　及其一邊爲 x 軸，　則其角頂可書爲 $(0,0)$，$(a,0)$ 與 (b,c)



由第39頁之推論，求得三邊之中點爲$C\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$，$D\left(\frac{a}{2},0\right)$與

$E\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

由第 97 頁公式 (VII)，求得 AB 之方程式爲

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-0}{c-0}，\text{或}\quad cx+(a-b)y-ac=0.$$

同樣方法，求得 CD 之方程式爲

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}=\frac{y-0}{\frac{c}{2}-0}\text{或}\ 2cx+2(a-b)y-ac=0$$

$$\because\quad \frac{c}{2c}=\frac{a-b}{2(a-b)}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad CD=AB.$$

同法可証，$DE \parallel OB$，$CE \parallel OA$.

12．通過 $(3,-4)$ 之直線，且平行 $2x-y=3$，其方程式如何.

解．將已知之方程式移項，得

$y=2x-3\quad\therefore\quad m=2$，

以 P_1 表 $(3,-4)$，於是 $x_1=3$，$y_1=-4$，$m=2$

代入第 95式公式 (V) 內，即得所求之方程式.

$y+4=\ (x-3)$ 或 $2x-y-10=0$.

13．平行 $3x+y+1=0$ 之直線，又通過 $(-1,4)$ 求其方程式.

解．將已知之方程式移項使其爲 $y=mx+b$ 之形式，

$y=-\ x-1\qquad\therefore\quad m=-3$.

因所求之直線平行於已知之直線，故其斜率爲-3.

於第 95 頁 (V) 內，以 -1 代 x_1，4 代 y_1 及 -3 代 m. 即得所求之方程式，

$y-4=-3(x+1)$ 或 $3x+y-1=0$

14．平行四邊形之兩邊爲 $2x+3y-7=0$，$x-3y+4=0$ 又其角點爲 $(3,2)$，試求其他兩邊之方程式.

解．化已知之二方程式爲 $y=mx+b$ 之形式，

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$……………(1)　　$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$……………(2)

於是得所求之二邊平行於 (1) 者爲

$y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ 或 $2x+3y-12=0$,

平形於 (2) 者爲

$y-2=\frac{1}{3}(x-3)$ 或 $x-3y+3=0$.

15. 垂直 $x+2y=1$ 且通過 $(-2, 3)$ 之直線，其方程式如何.

解. 化已知之方程式爲 $y=mx+b$ 之形式，

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

因所求之直線與已知之直綫垂直，故其斜率爲 2.

於第 97 公式 (V)，以 $(-2,3)$ 代 (x_1, y_1) 及 2 代 m，卽得所求之方程式，

$y-3=2(x+2)$ 或

$2x-y+7=0$.

16. 證明無論 k 値如何，$x-2y=0$，$x+2y-8=0$，$x+2y-8+k(x-2y)=0$ 三直線，必相遇於一點.

解. 解前二式，求得其軌跡之交點. 爲 (4,2)

代入第三式，$4+2\times2-8+k(4-2\times2)=0$.

故不論 k 之値如何，此三直線必相遇於一點.

17. 引用第 35 頁定理 V 及第53頁法則，以求(V)(VII)兩式.

解. (a) 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點.

已知之條件爲，斜率 $=m$.

由第 35 頁定理 V, $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ (P 代 P_2)

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)$

(b) 設 $P(x,y)$ 爲直綫上任意一點.

已知之條件爲 $P(x,y)$，$P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 同在一直線上，換言之卽 PP_1 與 P_1P_2 有相同之斜率.

由第 35 定理 V，得

PP_1 之斜率 $=\frac{y-y_1}{x-x_1}$；P_1P_2 之斜率 $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\therefore\ \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 或 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

18. 用第53頁之法則及相似三角形之邊成比例之定理，求(VI).(VIi).

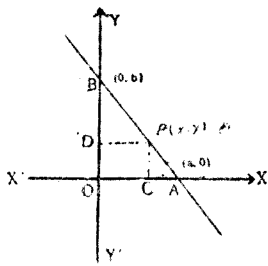
解. (a) 設 $P(x,y)$ 為直線上任意一點且作 $PC\perp OA$. 如

$\triangle AOB \sim \triangle ACP$

$$\therefore \quad \frac{OA}{CA}=\frac{OB}{CP}.$$

但 $OA=a$, $CA=a-x$,

$OB=b$, $CP=y$.



$$\therefore \quad \frac{a}{a-x}=\frac{b}{y}$$

或 $ay=ab-bx$,

$bx+ay=ab$ 除以 ab,

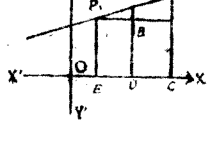
得 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(b) 假定 $P\ (x,y)$ 為直線上任意一點，且作 $PD\perp OX$

$P_2C\perp OX$, $P_1A\parallel OX$. 如圖.

$\triangle AP_1P_2 \sim BP_1P$.

$$\therefore \quad \frac{P_1A}{P_1B}=\frac{AP_2}{BP}.$$



但 $P_1A=x_2-x_1$,

$P_1B=x-x_1$,

$AP_2=y_2-y_1$.

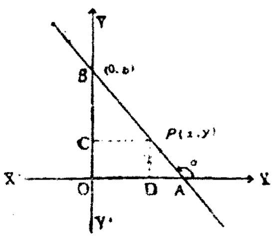
$BP=y-y_1$

$$\therefore \quad \frac{x_2-x_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y-y_1} \text{ 或 } \frac{x-x_1}{x_2-x_2}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

19. 試引用直角三角形銳角正切之定義及第53頁之法則以求 $y=mx+b$ 及 (V)

解. (a) 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點且作 $PC\perp OY$ 如圖

$$\tan\angle ABO=\frac{CP}{CB}$$



但 $\angle ABO=a-90°$,

$CP=x$, $CB=b-y$.

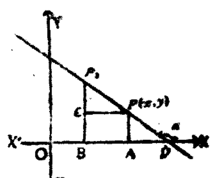
$$\therefore \quad \tan(a-90°)=\frac{x}{b-y}$$

或 $-\cot a=\dfrac{x}{b-y}$ 或 $-\dfrac{1}{\tan a}=\dfrac{x}{b-y}$

或 $-\dfrac{1}{m}=\dfrac{x}{b-y}$ $\quad\therefore\quad y=mx+b$.

(b) 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點且作 $P_1B\perp OX$, $PA\perp OX$, $PC\parallel OX$.

於是 $\dfrac{CP_1}{CP}=\tan\angle CPP_1$



但 $\angle CPP_1=\pi-a$,

$CP_1=y_1-y$,

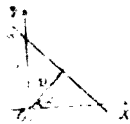
$CP=x-x_1$,

$$\therefore \quad \frac{y_1-y}{x-x_1}=\tan(\pi-a)=-\tan a.$$

$\therefore \quad \frac{y_1-y}{x-x_1}=-m$ 或 $y-y_1=m(x-x_1)$.

20. 求直線之方程式以p及ω表之，而p爲原點至直線之垂直距離，

解. 由圖設A爲x軸上之截點及B爲y軸上之截點.



$$\frac{p}{OB}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$$

$$=\sin\omega.$$

$$\therefore \quad OB=\frac{p}{\sin\omega}$$

$$\frac{p}{OA}=\cos\omega,$$

$$OA=\frac{p}{\cos\omega}.$$

代入第 96 頁公式 VI 內，得

$$\frac{x}{\dfrac{p}{\cos\omega}}+\frac{y}{\dfrac{p}{\sin\omega}}=1.$$

或 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$.

21. 設x及y爲常數m爲變常數，(V)之軌跡爲何？

解. 若x_1，y_1爲常數及m爲變常數，則(V)之軌跡爲一組通過(x_1, y_1)之諸直線.

22. 設a爲常數b爲變常數(VI)之軌跡爲何？又b爲常數及a爲變常數，其軌跡如何？

解. 若a爲常數，b爲變常數 則(VI)之軌跡爲一組通過定點$(a, 0)$之諸直線.

若 b 爲常數，a爲變常數，則(VI)之軌跡爲一組通過定點$(0, b)$之諸直線.

23. 寫通過(2，—)之一切直線之方程式.

解. 設$P_2(x_2, y_2)$為一不定點，且以P_1表$(2, -1)$.

於是$x_1=2$, $y_1=-1$.

代入第9 頁公式 (VII) 內，得

$$\frac{x-2}{x_2-2}=\frac{y+1}{y_2+1}$$

化簡，得$(y_2+1)x+(2-x_2)y-2y_2-x_2=0$.

24. 寫一切之直線方程式，其在x軸上截線為3.

解. 設直線在y軸之不定截線為b.

代入第96頁公式 (VI) 內，得

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}=1, \text{ 或 } bx+3y-3b=0.$$

[別解] 設$P_2(0, b)$為y軸上一不定點，且以P_1表$(3, 0)$.

於是$x_1=3$, $y_1=0$, $x_2=0$, $y_2=b$.

代入第97頁公式 (VII) 內，得

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-0}{b-0}$$

化簡得$bx+3y-3b=0$.

25. 寫兩個形式各異之直線方程式，其在Y軸之截線為-2.

解. (a) 設其不定斜率為m.

於是斜率$=m$, $b=-2$.

代入第58頁公式 (I)，得

$y=mx-2$.

(b) 設直線在x軸上之不定截線為a.

代入第96頁公式 (VI) 內，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-2}=1, \text{ 或 } 2x-ay-2a=0.$$

[別解] (c) 設$P_2(x_2, y_2)$為一不定點且以P_1表$(0, -2)$

於是$x_1=0$, $y_1=-2$.

代入第97頁公式 (VII) 內，得

$$\frac{x-0}{x_2-0}=\frac{y+2}{y_2+2},$$

化簡得 $(y_2+2)x-x_2y-2x_2=0$.

( ) 設其不定斜率為 m，既以P_1表 $(0,-2)$

於是 $x_1=0$, $y_1=-2$，及斜率 $=m$.

代入第 95 頁公式 (V) 內，得

$y+2=mx$ 或 $mx-y-2=0$.

26. 試寫一方程式，以表凡斜度 $=-\frac{1}{2}$之直線.

解. 設 $P_1(x_1, y_1)$ 為一不定點.

以P_1 及 m 之值代入第 95 頁公式 (V) 內，得

$y-y_1=-\frac{1}{2}(x-x_1)$ 或 $x+2y-(x_1+2y_1)=0$.

[別解]設其在 YY' 之不定截線為 b.

於是$m=-\frac{1}{2}$ 而在 YY' 之截線$=b$.

代入第 58 頁公式 (I) 內，得

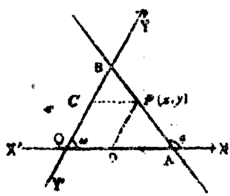
$y=-\frac{1}{2}x+b$. 或 $x+2y-2b=0$.

27. 證明若x, y兩軸非正交而成 ω 角，則 $y=mx+b$變為

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+b.$$

解. 設 $P(x,y)$ 為直線上任意一點且作 $PC\parallel OX$, $PD\parallel OY$.

於圖，由正弦定律，得



$$\frac{CP}{\sin\angle CBP}=\frac{CB}{\sin\angle CPB}$$

但 $\angle CBP=\alpha-\omega$, $\angle CPB=\pi-\alpha$.

$CP=x$, $CB=b-y$.

$$\therefore\quad \frac{x}{\sin(\alpha-\omega)}=\frac{b-y}{\sin(\pi-\alpha)}.$$

$$\frac{x}{-\sin(\omega-\alpha)}=\frac{b-y}{\sin\alpha}$$

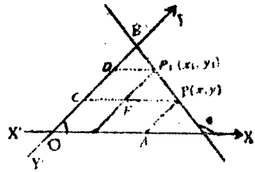
$$\therefore\quad y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+b.$$

28. 證明若x, y兩軸成 ω 角，則傾斜角為 α 且通過$P_1(x_1, y_1)$之直線，其方程式為 $y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1)$.

設$P(x,y)$ 為直線上任意一點，且作$PA\parallel OY$ 及$PC\parallel OX$

由正弦定律得

$$\frac{FP_1}{\sin\angle CPE}=\frac{FP}{\sin\angle FP_1P}$$



因$\angle CPE=\pi-\alpha$，$\angle FP_1P=\alpha-\omega$.

$FP_1=y_1-y$，$FP=x-x_1$

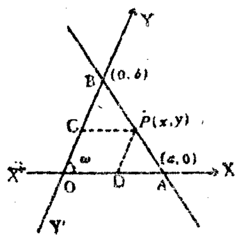
$$\therefore\quad \frac{y_1-y}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{x-x_1}{\sin(\alpha-\omega)}\text{ 或}$$

$$\frac{y_1-y}{\sin\alpha}=\frac{x-x_1}{-\sin(\omega-\alpha)}$$

化簡得 $y-y_1=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1)$

29. 證明(VI)，(VII)兩式，於斜坐標軸亦合。

解． (a) 設$P(x,y)$為直線上任意一點，



且作$PC\parallel OX$，

$DP\parallel OY$，則$\triangle PBC$

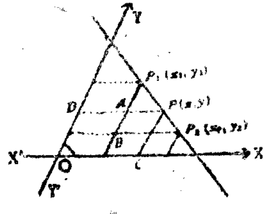
與$\triangle APD$相似.

$$\therefore\quad \frac{CB}{DP}=\frac{CP}{DA}$$

因 $CB=b-y$. $DP=y$，$CP=x$，$DA=a-x$，

$$\therefore\quad \frac{b-y}{y}=\frac{x}{a-x}\text{ 或 } bx+ay=ab$$

以ab除之，即得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.



(b) 設$P(x,y)$為直線上任意一點，且作$PC\parallel OY$，$PD\parallel OX$，

則$\triangle PP_1A$與$\triangle P_2P_1B$相似.

但 $AP=x-x_1$，$BP_2=x_2-x_1$

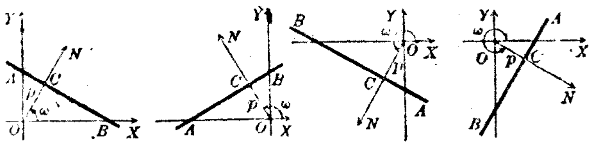
$AP_1=y_1-y$，$BP_1=y_1-y_2$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y}{y_1-y_2}\quad 或\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

習　　題　(104 頁 — 105 頁)

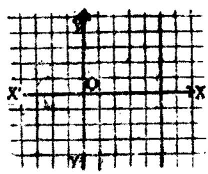
1. 當(1) $\sin\omega$, $\cos\omega$ 俱正. (2) 俱負. (3) $\sin\omega$ 爲正, $\cos\omega$ 爲負. (4) $\sin\omega$ 爲負 $\cos$ 爲正時, ON 當在第幾象限內

(1)在第一象限內. (2)在第三象限內. (3)在第二象限內. (4)在第四象限內.



2. 求下諸直線之方程式. 并作圖.

(i) $\omega=0^\circ$, $p=5$.

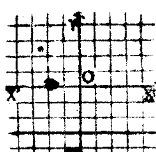


解. 今 $\sin\omega=\sin 0^\circ=0$, $\cos\omega=\cos 0^\circ=1$

代入公式 (VI·I) 內，得.

$-5=0$.

(ii) $\omega=\frac{3\pi}{2}$, $p=3$.



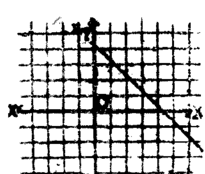
今, $\sin\omega=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

$\cos\omega=\cos\frac{3\pi}{2}=0$.

代入公式 (V, II) 內，得

$-y-3=0$ 或 $y+3=0$.

(iii) $\omega=\frac{\pi}{4}$, $p=3$.



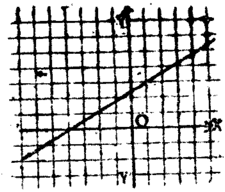
解. 今 $\sin\omega=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\omega=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

代入公式 (V, II) 內，得

$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-3=0$ 或 $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-6=0$

(d) $\omega=\frac{2\pi}{3}, p=2$



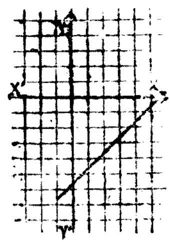
解. 今, $\sin\omega=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\omega=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

代入公式 (VIII) 內，得

$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-2=0$ 或 $x-\sqrt{3}y+4=0$

(e) $\omega=\frac{7\pi}{4}, p=4$



解. 今, $\sin\omega=\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\omega=\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

代入公式 (VIII) 內，得

$\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-4=0$ 或

$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-8=0$.

3. 改下諸方程爲法線式，幷求 p 及 ω.

(a) $3x+4y-2=0$.

解. 今, $A=3$, $B=4$, $C=-2$.

$|\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{9+16}|=5$

因 C 爲負，故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲正.

$\therefore\ \sin\omega=\frac{4}{5}$, $\cos\omega=\frac{3}{5}$, $p=-\frac{-2}{5}=\frac{2}{5}$.

代入公式 (VIII) 內，即得所求之方程式.

$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$.

$\therefore\quad \omega=\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right),\ p=2$.

(b) $3x-4y-2=0$.

解. 令 $A=3$, $B=-4$, $C=-2$,

$$|\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{9+16}|=|5|$$

因 C 爲負，故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲正.

以 5 除已知之方程式即得所求之方程式.

$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0$.

$\therefore\quad \cos\omega=\frac{3}{5},\ \sin\omega=-\frac{4}{5},\ p=\frac{2}{5}$.

$\therefore\quad \omega=\sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $12x-5y=0$.

解. 令 $A=12$, $B=-5$, $C=0$.

$$\therefore\quad \pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm\sqrt{144+25}=\pm 13$$

因 $C=0$, 及 B 爲負，故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲負.

以 -13 除已給之方程式，卽得所求之方程式，

$$-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y=0$$

$$\therefore\quad \cos\omega=-\frac{12}{13},\ \sin\omega=\frac{5}{13},\ p=0.$$

$$\therefore\quad \omega=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right).$$

(d) $2x+5y+7=0$.

解. 令 $A=2$, $B=5$, $C=7$.

$$\therefore\quad |\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{4+25}|=\sqrt{29}$$

因 C 爲正，故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲負

以 $-\sqrt{29}$ 除已知之方程式卽得所求之方程式.

$$-\frac{2}{\sqrt{29}}x-\frac{5}{\sqrt{29}}y-\frac{7}{\sqrt{29}}=0$$

$$\therefore\quad \cos\omega=-\frac{2}{\sqrt{29}},\ \sin\omega=-\frac{5}{\sqrt{29}},\ p=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

$\therefore \quad \omega=\sin^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right).$

(e) $4x-3y+1=0.$

解: 令$A=4$, $B=-3$, $C=1$.

$$\therefore \quad |\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{16+9}|=|5|.$$

因 C 爲正, 故 $\sqrt{A^2+B^2}$爲負

以-5 除已知之方程式, 即得所求之方程式.

$$-\tfrac{4}{5}x+\tfrac{3}{5}y-\tfrac{1}{5}=0.$$

$\therefore \quad \cos\omega=-\frac{4}{5}$, $\sin\omega=\frac{3}{5}$, $p=\frac{1}{5}$.

$\therefore \quad \omega=\sin^{-1}(\frac{3}{5})=\cos^{-1}(-\frac{4}{5}).$

(f) $4x-5y+6=0.$

解. 令$A=4$, $B=-5$ $C=6$

$$\therefore \quad |\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{16+25}|=|\sqrt{41}|.$$

因C爲正, 故 $\sqrt{A^2+B^2}$必須爲負.

以$-\sqrt{41}$ 除已知之方程式即得所求之方程式,

$$-\frac{4}{\sqrt{41}}x+\frac{5}{\sqrt{41}}y-\frac{6}{\sqrt{41}}=0$$

$\therefore \quad \cos\omega=-\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\sin\omega=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $p=\frac{6}{\sqrt{41}}$

$\therefore \quad \omega=\sin^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$

4. 試求由原點至下列諸直線之垂直距離.

(a) $12x+5y-26=0.$

解 令 $A=12$, $B=5$, $C=-26$.

$$\therefore \quad |\sqrt{A^2+B^2}|=|\sqrt{144+25}|=|13|$$

因 C 爲負故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲正.

以 13 除已知之方程式, 得其法式爲

$$\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-2=0.$$

$\therefore$ 所求之距離 $=p=2$.

(b) $x+y+1=0$.

解. 令 $A=1$, $B=2$, $C=2$.

$$\therefore \quad |\sqrt{A^2+B^2}|=\sqrt{2}$$

因 C 爲正，故 $\sqrt{A^2+B^2}$ 必須爲負.

所以已知之方程式其法式爲

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\therefore \quad 所求之距離 =p=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

(c) $3x-2y-1=0$.

解. 化已知方程式爲法式，得

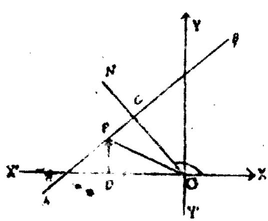
$$\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$$

$$\therefore \quad 所求之距離 =\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{1}{13}\sqrt{13}.$$

5. 當 (a) $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$; (b) $\pi<\omega<\frac{3}{2}\pi$; (c) $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$;

(d) $p=0$ 及 $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ 時，試求 (VIII').

(a) **解.** 設 $P(x,y)$ 爲直線 AB 上任意一點，如圖.



OP 在 ON 上之射影 $=p$

但 OP 在 ON 上之射影

$=OD$ 之射影 $+DP$ 之射影

$$=OD\cos\angle COD+DP\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$$

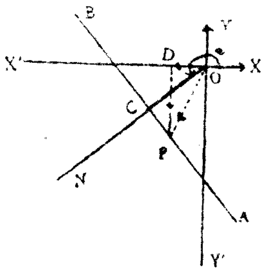
$$=x\cos(\pi-\omega)+y\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-x\cos\omega+y\sin\omega$$

$$\therefore \quad -\cos\omega\, x+y\sin\omega=p.$$

或 $-x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$.

(b) 解. 設 $P(x, y)$ 爲直線 AB 上任意一點.



OP 在 ON 上之射影 $=p$.

但 OP 在 ON 上之射影

$=OD$ 之射影 $+DP$ 之射影

$$=OD\cos(\omega-\pi)+DP\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)$$

$$=-x\cos\omega-y\sin\omega.$$

$\therefore\quad -x\cos\omega-y\sin\omega=p$ 或 $-x\cos\omega-y\sin\omega-p=0$.

(c) 及 (d) 可由與 (a), (b) 同樣方法求出 (VIII) 式.

6 p 及 ω 爲何值時, 則 (VIII) 之軌跡平行 x 軸? y 軸? 通過原點?

解. (a) $p=y, \omega=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$.

(b) $p=x, \omega=0$ 或 π.

(c) $p=0, 0\leqq\omega\leqq\pi$.

7 凡斜度 $=-2$, 且距原點 5 諸直線之方程式如何?

解. 設所求之方程式爲

$Ax+By+C=0$ .... (I)

$\therefore\quad -\frac{A}{B}=-2\qquad A=2B$

$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=5.\quad C=\pm5\sqrt{5}B.$$

代入 (I) 式, $2Bx+By\pm5\sqrt{5}B=0$.

以 B 除之, 即得所求之方程式爲

$2x+y+5\sqrt{5}=0$ 及 $2x+y-5\sqrt{5}=0$.

8. 通過 (5，10) 且距原點 10 諸直線之方程式如何？

解. 設所求之方程式爲

$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$…………(1)

因 (5，10) 在此直線上，及 $p=10$，

故 $5\cos\omega+10\sin\omega-10=0$.

$\cos\omega+2\sin\omega=2$

$\cos\omega=2-2\sin\omega$.

$\sqrt{1-\sin^2\omega}=2-2\sin\omega$,

$1-\sin^2\omega=4(1-\sin\omega)^2$

$(1-\sin\omega)(1+\sin\omega)=4(1-\sin\omega)(1-\sin\omega)$

$\therefore$ $1-\sin\omega=0$ 及 $1+\sin\omega=4(1-\sin\omega)$.

$\therefore$ $\sin\omega=1$ 及 $\sin\omega=\frac{3}{5}$.

又 $\cos\omega=0$ 及 $\cos\omega=\frac{4}{5}$.

代入 (1) 式即得所求之方程式爲

$y-10=0$ 及 $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$.

9. 若 p 爲常數，ω 爲變常數(VIII)之軌跡爲何？若 ω 爲常數，p 爲變常數又如何？

若 p 爲常數，ω 爲變常數，則 VIII，之軌跡爲一切於以 p 爲半徑，以原點爲心之圓周上，之諸直線.

若 ω 爲常數，p 爲變常數，則 (VIII)，之軌跡爲一平行線，而此平行線皆垂直於同 XX' 正方向 OX 成 ω 角之直

10. 試作一方程式以表凡距原點爲 5 之直線.

解. 設所求之方程式爲

$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$…………(1)

因 $p=5$ 故 (1) 變爲

$x\cos\omega+y\sin\omega-5=0$.

在此方程式 ω 爲變常數

習　　題　（第107－109頁）

1. 求其距離 自

(a) $x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ-\sqrt{2}=0$ 至 (5，－7)，

解. 於已知方程式內以 5 代 x 及 -7 代 y，得

$$d=5\cos 45^\circ-7\sin 45^\circ-\sqrt{2}$$

$$=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}-7\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}.$$

(b) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$ 至 $(2,\ 1)$

解. 於已知之方程式內以 $(2,\ 1)$. 代 $(x,\ y)$，得

$$d=2\times\tfrac{3}{5}-\tfrac{4}{5}-1=-\tfrac{3}{5}.$$

(c) $3x+4y+15=0$ 至 $(-2,\ 3)$.

解. 化已知之方程式爲法式. 得

$$-\tfrac{3}{5}x-\tfrac{4}{5}y-3=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以-2 代 x 及 3 代 y 於 (1) 式內，得

$$d=2\times\tfrac{3}{5}-3\times\tfrac{4}{5}-3=-4\tfrac{1}{5}.$$

(b) $2x-7y+8=0$ 至 $(3,\ -5)$

解. 化已知之方程式爲法式. 得

$$-\frac{2}{\sqrt{53}}x+\frac{7}{\sqrt{53}}y-\frac{8}{\sqrt{53}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 3 代 x 及 -5 代 y 於 (1) 式內，得

$$d=-3\times\frac{2}{\sqrt{53}}-5\times\frac{7}{\sqrt{53}}-\frac{8}{\sqrt{53}}=-\frac{49}{\sqrt{53}}.$$

(e) $x-3y=0$ 至 $(0,\ 4)$.

解. 化已知方程式爲法式 得

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 (1) 式內，以 $(0,\ 4)$ 代 $(x,\ y)$，得.

$$d=\frac{3}{\sqrt{10}}\times 4=\frac{12}{\sqrt{10}}.$$

2. 原點與$(3,\ -2)$是否同在 $x-y+1=0$ 之一旁?

解. 化已知之方程式爲法式，得

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 (1) 式內，以 $(3,\ -2)$ 代 $(x,\ y)$ 得

$$d=-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{6}{\sqrt{2}}$$

因 d 之值爲負，故原點與 $(3,\ -2)$ 同在直線之一側．

3. 直線 $2x+3y+2=0$ 是否在原點及 $(-2,\ 3)$ 之間？

解．化已知之方程式爲法式，得

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{2}{\sqrt{13}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 (1) 式內，以 $(-2,\ 3)$ 代 $(x,\ y)$，得

$$d=\frac{6}{\sqrt{13}}-\frac{6}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}=-\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

故此直線不在原點與 $(-2,\ 3)$ 之間．

4. 由 $2x+3y=0$，$x+3y+3=0$，$x+y+1=0$ 三直線合成三角形，試求其高．

解．依次命此三式爲 (1)，(2)，(3)．

解聯立方程式 (1) 與 (2) 得交點 $(3,\ -2)$

解聯立方程式 (1) 與 (3)，得交點 $(-3,\ 2)$，

解聯立方程式 (2) 與 (3)，得交點 $(0,\ -1)$．

化 (1)，(2)，(3)，爲法式，得

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y=0\cdots\cdots(4)\quad -\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{3}{\sqrt{10}}=0\cdots(5)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.\cdots\cdots(6)$$

於 (4) 式，以 $(0\ -1)$ 代 (x,y)，得

$$d_1=0\times\frac{2}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

於 (5) 式，以 $(-3,\ 2)$ 代 $(x,\ y)$，得

$$d_2=\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{6}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

於 (6) 式，以 $(3,-2)$ 代 $(x,\ y)$，得

$$d_3=-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$$

故三高線之長爲 $\frac{3}{\sqrt{13}}$，$\frac{6}{\sqrt{10}}$ 及 $\sqrt{2}$

5. 試求自直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1,y_1)$ 之距離．

解．化已知方程式爲法式，得

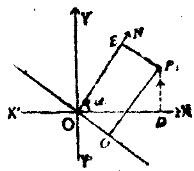
$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 (1) 式，以 (x_1, y_1) 代 (x, y)，得

$$d=\frac{Ax_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

6. 當 (a) $p=0$，$\omega<\frac{\pi}{2}$，(b) $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$，(c) $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$，(d) $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$ 時．試證明定理IX．

(a) 解：由圖得



OP_1 在上之 ON 射影 $=d$．

但 OP_1 在 ON 上之射影

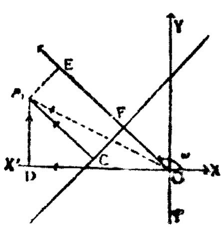
$=OD$ 之射影 $+DP_1$ 之射影

$=OD\cos\omega+DP_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$

$=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega$．

$\therefore\quad d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega$．

(b) 解．由圖，得



OP_1 在 ON 上之射影 $=p+d$

OP_1 在 ON 上之射影 $=OD$ 之射影 $+DP_1$ 之射影．

$=x_1\cos(\pi-\omega)+y_1\cos\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)$

$=-x_1\cos\omega+y_1\sin\omega$．

$\therefore\quad p+d=-x_1\cos\omega+y_1\sin\omega$．

$\quad\quad d=-x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p$，

以上所用之 x_1 僅爲 OD 數值之長，但因其在第二象限而其本身實爲負值．

$\therefore\quad d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p$．

(c)，(d)，可仿 (a)，(b) 解之．

7. 求至 $3x-4y+1=0$ 及 $4x+3y-1=0$ 等距離諸點之軌跡．

解．化已知二方程式爲法式，得

$$-\tfrac{3}{5}x+\tfrac{4}{5}y-\tfrac{1}{5}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\text{ 與}$$

$$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

自已知二直綫至軌跡上任意一點之距離爲，

$d_1=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}$ 與 $d_2=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}$.

因 d_1 與 d_2 之符號可相同或相反．

故由題設．得 $|d_1|=|d_2|$

$\therefore\quad \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}$ 及

$\qquad \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=-\left(-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}\right)$

或．$7x-y=0$ 及 $x+7y-2=0$.

8． 某點距 $12x+5y-1=0$ 爲距 y 軸之兩倍．試求其軌跡之方程式．

解．y 軸之方程式爲 $x=0$.

化已知二方程式爲法式，得

$$\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{1}{13}=0,\quad x=0.$$

自已知直線，y 軸至軌跡上任一點之距離爲

$d_1=\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{1}{13}$ 與 $d_2=x$.

已知之條件爲 $d_1=2d_2$

$$\therefore\quad \frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{1}{13}=2x.$$

化簡即得所求之方程式爲

$14x-5y+1=0$.

9．某點距 $4x-3y+1=0$ 爲距 $5x-12y=0$ 之 k 倍．試求此點軌跡之方程式．

解．化已知二方程式，得

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=0 \text{ 及 } -\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=0$$

由此二直綫至軌跡上任一點之距離爲

$$d_1=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5} \text{ 及 } d_2=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y.$$

已知之條件爲 $d_1=kd_2$

$$\therefore\quad -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=k\left(-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y\right)$$

化簡卽得所求之方程式爲

$(52-25k)x+(60k-39)y+13=0.$

10. 求上題兩直綫之交角之平分線.

解. 由前題，得其法式爲

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=0 \text{ 及 } -\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=0.$$

由已知二直線至軌跡上任一點之距離爲

$$d_1=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5} \text{ 與 } d_2=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y.$$

d_1 與 d_2 之符號相同或相反，須依此點與原點在直綫之同側或異側而定.

註:(d_1與d_2之符號相同或相反，須依此點在內角或外角而定,參考121頁之定義)

已知之條件爲 $|d_1|=|d_2|$

故所求之方程式爲

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y \text{ 及}$$

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=-\left(-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y\right)$$

或 $27x+21y+13=0$. 及 $77x-99y+13=0$.

11. 求下列各對直綫間之距離.

(a) $y=2x+5$, $y=2x-3$.

解. 化此二式爲法式，得

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{5}{\sqrt{5}}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad p_1=\frac{5}{\sqrt{5}} \text{ 及 } p_2=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

因此二直線在y軸之截線之符號相反，故原點必在二直綫之間

$$\therefore \quad d=p_1+p_2=\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

(b) $y=-3x+1$, $y=-3x+4$.

解．化此二式爲法式，得

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{1}{\sqrt{10}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad p_1=\frac{1}{\sqrt{10}},\ p_2=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

因此二平行線在同軸之截線之符號相同，故原點不在二平行線間．

$$\therefore\quad d=p_2-p_1=\frac{4}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

(c) $2x-3y+4=0$, $4x-6y+9=0$.

解．化此二式爲法式，得

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{4}{\sqrt{13}}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-\frac{4}{2\sqrt{13}}x+\frac{6}{2\sqrt{13}}y-\frac{9}{2\sqrt{13}}=0\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\quad p_1=\frac{4}{\sqrt{13}},\ p_2=\frac{9}{2\sqrt{13}}.$$

因其在同軸之截線得相同之符號，故原點不在二平行線間．

$$\therefore\quad d=p_2-p_1=\frac{9}{2\sqrt{13}}-\frac{4}{\sqrt{13}}=\frac{1}{2\sqrt{13}}.$$

(d) $y=mx+3$, $y=mx-3$.

解．化此二式爲法式，得

$$-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x+\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}y-\frac{3}{\sqrt{1+m^2}}=0\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}y-\frac{}{\sqrt{1+m^2}}=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$p_1=\frac{3}{\sqrt{1+m^2}},\ p_2=\frac{3}{\sqrt{1+m^2}}.$$

因其在同軸之截線得相反之符號，故原點在二平行線間．

$$\therefore\quad d=p_1+p_2=\frac{3}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{3}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{6}{\sqrt{1+m^2}}.$$

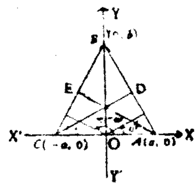
12．試定理 IX，以求直線之法綫式．

解．由定理 IX，自此直線至任一點 $P(x,y)$ 之距離爲

$$d=x\cos\omega+y\sin\omega-p.$$

當 p 在此直線上時，則 d 等於零．

$$\therefore\quad x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$



13．等腰三角形其兩腰上之高必等，試證明之．

解．以底之中點爲原點及底爲 x 軸於是兩腰上 p 之值相等，且其角頂可命爲 $A(a,0)$，$B(0,b)$ $C(-a,0)$ 若 AB 之法式爲

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0.$$

於是則 CB 之法式爲

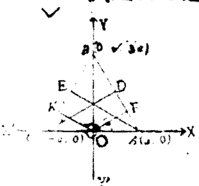
$$x\cos(\pi-\omega)+y\sin(\pi-\omega)-p=0.$$

或 $\quad -x\cos\omega+y\sin\omega+p=0.$

$EA=-a\cos\omega-p$，$\quad DC=-a\cos\omega-p.$

$\therefore\quad EA=DC$；

14．試證明等邊三角形之三高俱相等．



解．以一邊之中點爲原點及一邊爲 XX'；於是其他兩邊 p 之值相等．且其角頂可命爲 $A(a,0)$，$B(0,\sqrt{3}a)$，$C(-a,0)$．

$$\angle AOF=\frac{\pi}{6},\qquad \angle AOK=\frac{5\pi}{6}.$$

AB 之法式，爲

$$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}-p=0.$$

CB 之法式，爲

$$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}-p=$$

CA 之法式，爲

$y=0$.

$DC=-a\times\frac{\sqrt{3}}{2}-p,\quad EA=a\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-p$

$OB=\sqrt{3}a$.

但 $P=a\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

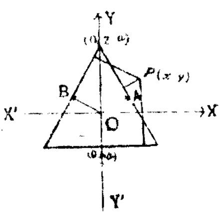
$\therefore\quad DC=-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\sqrt{3}a$.

$EA=-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a=-\sqrt{3}a$.

$\therefore\quad |DC|=|EA|=|OB|$.

15. 証明自等邊三角形之三邊至任意一點之三距離之和必爲常數.

解. 以三角形之中心爲原點且設 XX' 平行其一邊.



於是三邊 p 之值皆等於 a.

$\angle XOA=\frac{\pi}{6}$, $\angle XOB=\frac{5\pi}{6}$

三邊之法式爲

$x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}-a=0\cdots\cdots(1)$

$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}-a=0\cdots\cdots(2)$

$-y-a=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由三邊至任一點 $P(x_1, y_1)$ 之距離爲

$d_1=x_1\cos\frac{\pi}{6}+y_1\sin\frac{\pi}{6}-a$,

$d_2=x_1\cos\frac{5\pi}{6}+y_1\sin\frac{5\pi}{6}-a$.

$d_3=-y_1-a$.

$d_1+d_2+d_3=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{y_1}{2}-a-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{y_1}{2}-a-y_1-a=-3a$.

故距離之和爲一常數即 $-3a$.

16. 試求下列各三直綫所成三角形之面積

(a) $2x-3y+30=0\cdots\cdots\cdots(1)$, $x=\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

$x+y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

解. 解聯立方程式 (1), (2), 得其交點爲 (0,10)

解聯立方程式 (1), (3), 得其交點爲 (−6,6)

解聯立方程式 (2), (3). 得交點 (0,0)

化 (1) 式爲法式，得

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{30}{\sqrt{13}}=0. \quad \therefore \quad p=\frac{30}{\sqrt{13}}.$$

$(-6,\ 6)$ 與 $(0,10)$ 間之長 $=\sqrt{(-6-0)^2+(6-10)^2}=2\sqrt{13}.$

$$\therefore \quad 面積=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{13}\times\frac{30}{\sqrt{13}}\right)=30.$$

(b) $x+y=2,$ ……………( ) $3x+y-12=0$ ……………(2)

$x-y+6=0$ ……………(3)

解. 解聯立方程式 (1), (2). 交點得 (−4,6)

同樣方法求得 (1), (3) 之交點爲 (−2,4)

(2), (3) 之交點爲 $\left(-\frac{12}{7},\ \frac{30}{7}\right)$.

化 (1) 式爲法式，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{2}{\sqrt{2}}=0.$$

$(-4,\ 6)$ 與 $(-2,\ 4)$ 間之距離 $=\sqrt{(-4+2)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$

自 (1) 至 $\left(-\frac{12}{7},\ \frac{30}{7}\right)$ 之距離爲

$$d=-\frac{12}{7}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{30}{7}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{4}{7\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad 面積=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\times\frac{4}{7\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{7}.$$

(c) $3x-4y+12=0$ ……………(1) $x-3y+6=0$ ……………(2)

$2x-y=0$ ……………………(3)

解. 依法求得 (1), (2) 之交點爲 $\left(-\frac{12}{5},\ \frac{6}{5}\right)$; (2), (3) 之交點 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$; (1) (3) 之點爲 $\left(\frac{12}{5},\ \frac{24}{5}\right)$.

化 (3) 式爲法式，得

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y=0.$$

$\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$與$\left(\frac{12}{5},\ \frac{24}{5}\right)$間之距離$=\sqrt{\left(\frac{6}{5}-\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}-\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{6}{\sqrt{5}}$

自(3)式至$\left(-\frac{12}{5},\ \frac{24}{5}\right)$之距離爲

$$d=-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{12}{5}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{6}{5}=\frac{24}{5\sqrt{5}}+\frac{6}{5\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ 面積$=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\times\frac{6}{\sqrt{5}}\right)=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$

(d) $x+3y-3=0$, $5x-y-15=0$, $x-y+1=0$.

解. (1), (2), 得交點 $(3,\ 0)$

解. (2), (3), 得交點 $(4,\ 5)$

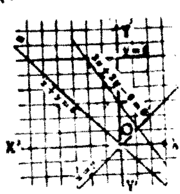
解. (3), (3), 得交點 $(0,\ 1)$

$$\therefore\ 面積=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&0&1\\4&5&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[3\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(12+4)=8.$$

$\therefore$ 面積$=8.$

17. 作下列諸直線合成之四邊形,並求其面積.



(a) $x=y$ ………………………………(1)

$y=6$ ………………………………(2)

$x+y=0$ ……………………………(3)

$3x+2y-6=0$ ………………………(4)

解. (1), (4), 得交點$\left(\frac{6}{5},\ \frac{6}{5}\right)$

解. (2), (4), 得交點$(-2,\ 6)$

解 (2), (3), 得交點 $(-6, 6)$

解 (1), (3), 得交點 $(0, 0)$

將各頂之坐標順次排列之如右：

0	0
$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
-2	6
-6	6
0	0

$$面積 =\frac{1}{2}\left(\frac{36}{5}-12+36+\frac{12}{5}\right)$$

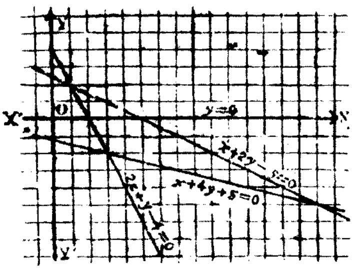
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{48}{5}+24\right)=12+\frac{24}{5}=16\frac{4}{5}$$

(b) $x+2y-5=0$ ......(1)

$y=0$ ......(2)

$x+4y+5=0$ ......(3)

$2x+y-4=0$ ......(4)



解 (1), (2), 得交點 $(5, 0)$

解 (1), (3), 得交點 $(15, -5)$

解 (3), (4), 得交點 $(3, -2)$

解 (2), (4), 得交點 $(2, 0)$

將各頂之坐標順次排列之如右：

2	0
3	-2
5	-5
5	0
2	0

$$面積=\frac{1}{2}(-4-15+25+36)$$

$$=\frac{1}{2}\times 36=18$$

∴ 面積$=18$

(c) $2x-4y+8=0$ ......(1)

$x+y=0$ ......(2)

$2x-y-4=0$ ......(3)

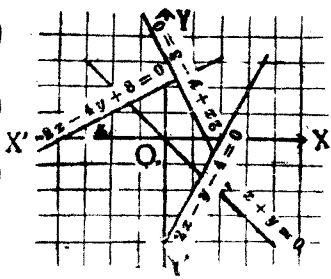
$2x+y-3=0$ ......(4)

解. (1), (4) 得交點 $\left(\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

解. (2), (3), 得交點 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

解. (3), (2) 得交點 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

解. (3), (4) 得交點 $\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right)$



依次將各頂之坐標排列之如右：

$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

$$\text{面積}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{15}+\frac{16}{9}-\frac{2}{3}+\frac{77}{20}+\frac{1}{5}+\frac{7}{3}-\frac{16}{9}+\frac{44}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{96-120+693+36+420+528}{180}\right)$$

$$=4\frac{71}{120}$$

習　　題 (第112頁—113頁)

1. 試求直線 $3x-y+2=0$ (L_1) 與 $2x+y-2=0$ (L_2) 之交角又求 L_2 與 L_1 之交角. 並証明所得之角互爲補角.

解. (a) 設所求之角爲 θ_1.

令　$A_1=3, B_1=-1, A_2=2, B_2=1$.

$$\therefore\ \tan\theta_1=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-2-3}{6-1}=-1.$$

$$\therefore\ \theta_1=\frac{3\pi}{4}$$

(b) 設所求之角爲 θ_2.

令　$A_1=2, B_1=1, A_2=3, B_2=-1$.

$$\therefore\ \tan\theta_2=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{3+2}{6-1}=\frac{5}{5}=1.$$

$$\therefore\ \theta_2=\frac{\pi}{4}.\qquad \theta_1+\theta_2=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi.$$

2. 求下列各第一與第二兩直線之交角.

(a) $2x-5y+1=0$.　$x-2y+3=0$.

解. $A_1=2, B_1=-5, A_2=1, B_2=-2$.

代入 (X)，得

$$\tan\theta=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-5+4}{2+10}=-\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\left(-\tfrac{1}{12}\right).$$

(b) $x+y+1=0$,　$x-y+1=0$.

解. 令 $A_1=1, B_1=1, A_2=1, B_2=-1$.

代入 (X) 得

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{1+1}{1-1} = \infty,$$

$\therefore\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

(c) $3x-4y+2=0$, $x+3y-7=0$.

解. $A_1=3$, $B_1=-4$, $A_2=1$, $B_2=3$.

代入 (X) 式，得

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-4-9}{3-12} = \frac{13}{9}.$$

$$\therefore\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right).$$

(d) $6x-3y+3=0$, $x=6$.

解. $A_1=6$, $B_1=-3$, $A_2=1$, $B_2=0$.

代入 (X) 式，得

$$\tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-3-0}{6} = -\frac{1}{2}.$$

$\therefore\quad \theta = \tan^{-1}(-\frac{1}{2})$

(e) $x-7y+1=0$, $x+2y-4=0$.

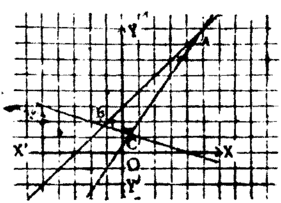
解. $A_1=1$, $B_1=-7$, $A_2=1$, $B_2=2$.

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-7-2}{1-14} = \frac{9}{13}$$

$$\therefore\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{13}\right).$$

3. 三角形之邊爲 $x+3y-4=0$, $3x-2y+1=0$, $x-y+3=0$ 求其三內角

由圖：A 爲第二與第三直線所成之角故第二與 L_1 相當，第三與 L_2 相當.



$$\therefore \quad \tan A = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-2+3}{3+2} = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore \quad A = \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

B 爲第三與第一直線所成之角故第三與 L_1 相當第一與 L_2 相當.

$$\therefore \quad \tan B = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-1-3}{1-3} = 2.$$

$$\therefore \quad B = \tan^{-1}(2).$$

C 爲第一與第二直線所成之角.

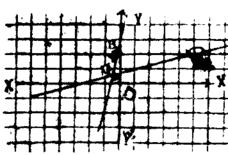
$$\therefore \quad \tan C = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{9+2}{3-6} = -\frac{11}{3}.$$

$$\therefore \quad C = \tan^{-1}\left(-\tfrac{11}{3}\right).$$

由 $5x - y + 3 = 0$, $y = 2$, $x - 4y + 3 = 0$,而成之三角形. 其外角如何.

解. 由圖, $\angle A$ 之外角爲第二與第三所成之角. 故第二直線與 L_1 相當第三直線與 L_2 相當.

於是 $A_1 = 0$, $B_1 = 1$; $A_2 = 1$, $B_2 = -4$.



故 $\tan\angle A$ 之外角 $= \dfrac{1-0}{0-4} = -\tfrac{1}{4}$.

$\therefore$ A 之外角 $= \tan^{-1}\left(-\tfrac{1}{4}\right)$.

B 之外角爲第一與第二直線所成之角.

$\therefore$ $A_1 = 5$, $B_1 = -1$; $A_2 = 0$, $B_2 = 1$.

而 $\tan\angle B$ 之外角 $= \dfrac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2} = \dfrac{0-5}{0-1} = 5$.

$\angle B$ 之外角 $= \tan^{-1}5$.

$\angle C$ 之外角爲第三與第一直線所成之角, 故第三與 L_1 相當, 第一與 L_2 相當.

於是 $A_1 = 1$, $B_1 = -4$; $A_2 = 5$, $B_2 = -1$.

故 $\tan \angle C$之外角$=\dfrac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\dfrac{-20+1}{5+4}=\dfrac{19}{9}$

$\therefore\ \angle C$之外角 $\tan^{-1}\left(-\frac{32}{9}\right)$.

5. 合$2x-3y-6=0$，$3x+4y-12=0$，$x-3y+6=0$三直線，以成三角形．試求其一外角及相對之兩內角，幷引册第20頁(12 以證之．

解． 由圖：$\angle BAC$ 為第一與第三直綫所成之角 故第一與L_1相當第三與L_2相當．

於是$A_1=2$，$B_1=-3$，$A_2=1$，$B_2=-3$．

$$\tan\angle BAC=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-3+6}{2+9}=\frac{3}{11}$$

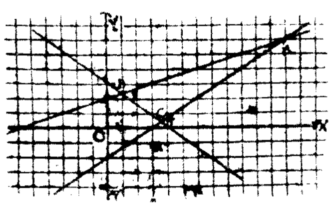
$$\therefore\ \angle BAC=\tan^{-1}\left(\frac{3}{11}\right).$$

$\angle DBA$ 為第三與第二直線所成之角，故第三與 L_1 相當，第二與 L_2 相當．

於是$A_1=1$，$B_1=-3$，$A_2=3$，$B_2=4$．

$$\tan\angle DBA=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-9-4}{3-12}=\frac{13}{9}.$$

$$\therefore\ \angle DBA=\tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right)$$



$\angle DCA$ 為第一與第二所成之角．

$\therefore\ A_1=2$，$B_1=-3$，$A_2=3$，$B_2=4$

而 $$\tan\angle DCA=\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{-9-8}{6-12}=\frac{17}{6}$$

$$\therefore\ \angle DCA=\tan^{-1}\left(\frac{17}{6}\right)$$

$$\tan(\angle BAC+\angle DBA)=\frac{\tan\angle BAC+\tan\angle DBA}{1-\tan\angle BAC\tan\angle DBA}$$

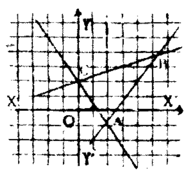
$$=\frac{\frac{3}{11}+\frac{13}{9}}{1-\frac{3}{11}\times\frac{13}{9}}=\frac{17}{6}$$

$\therefore\quad \tan\angle DCA=\tan(\angle BAC+\angle DBA)$

$\therefore\quad \angle DCA=\angle BAC+\angle DBA.$

6. $3x+2y-4=0$，$x-3y+6=0$，$4x-3y-10=0$ 為三角形之邊. 試求其三內角，并以下式證實之.

若 $A+B+C=180^\circ$ 則 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$



解. 由圖:

A 為一與第三直線所成之角.

故若應用公式 $\tan A=\dfrac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}$，

則必須使 $A_1=3$，$B_1=2$；$A_2=4$，$B_2=-3$.

於是 $\tan A=\dfrac{8+9}{12-6}=\dfrac{17}{6}$.

$\therefore\quad A=\tan^{-1}\left(\dfrac{17}{6}\right)$

B 為第三與第二直線所成之角.

同樣若 $\tan B=\dfrac{A_2B_1-A_1B_2}{A_1A_2+B_1B_2}$，

$\therefore\ A_1=4$，$B_1=-3$；$A_2=1$，$B_2=-3$，

於是 $\tan B=\dfrac{-3+12}{4+9}=\dfrac{9}{13}$.

$\therefore\quad B=\tan^{-1}\left(\dfrac{9}{13}\right)$

C 為第二與第一直線所成之角.

$\therefore\quad A_1=1$，$B_1=-3$；$A_2=3$，$B_2=2$.

而 $\tan C = \dfrac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1B_2 + B_1B_2} = \dfrac{-9-2}{3-0} = \dfrac{11}{3}$.

$\therefore \quad C = \tan^{-1}\left(\dfrac{11}{3}\right)$.

$\tan A + \tan B + \tan C = \dfrac{17}{6} + \dfrac{9}{13} + \dfrac{11}{3} = \dfrac{187}{26}$

$\tan A \tan B \tan C = \dfrac{17}{6} \times \dfrac{9}{13} \times \dfrac{11}{3} = \dfrac{187}{26}$.

$\therefore \quad \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

卽. $A + B + C = 180°$.

7. 直線通過下列已知點，並與已知直線成已知角，試求其方程式、

(a) $(2, 1)$, $\frac{\pi}{4}$, $2x - 3y + 2 = 0$.

解. 設 m_1 爲所求直線之斜率.

於是其方程爲 $y - 1 = m_1(x - 2)$ ……………………(1)

已知直線之斜率爲 $\frac{2}{3}$.

由 110 頁之推論，得.

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{m_1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m_1} = \frac{3m_1 - 2}{3 + 2m_1}.$$

$$1 = \frac{3m_1 - 2}{3 + 2m_1}, \quad \therefore \quad m_1 = 5.$$

代入 (1) 式，且化簡卽得所求方程式，

$$5x - y - 9 = 0.$$

(b) $(1, -3)$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $x + 2y + 4 = 0$.

解. 設 m_1 爲所求直線之斜率

於是其方程式爲 $y + 3 = m_1(x - 1)$ ……………………(1)

已知直線之斜率爲 $-\frac{1}{2}$.

由 110 頁之推論，得

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \frac{m_1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m_1}, \quad -1 = \frac{m + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}m},$$

$\therefore \quad m_1 = -3$

代入(1)式，即得所求之方程式，

$3x + y = 0.$

(c) $(2, -5), \frac{\pi}{4}, x + 3y - 8 = 0.$

解. 設m_1為所求直線之斜率

於是其方程式為$y + 5 = m_1(x - 2)$……………………(1)

已知直線之斜率，$m_2 = -\frac{1}{3}$.

由110頁之推論，得

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{m_1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{m_1}{3}}$$

$$1 = \frac{3m_1 + 1}{3 - m_1}. \qquad \therefore \quad m_1 = \frac{1}{2}.$$

代入(1)式，即得所求之方程式，

$x - 2y - 12 = 0.$

(d) $(x_1, y_1), \phi, y = mx + b,$

解. 設m_1為所直線之斜率.

於是其方程式為$y - y_1 = m_1(x - x_1)$……………………(1)

已知直線之斜率，$m_2 = m$

由110頁之推論，得

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}, \quad m_1 = \frac{m + \tan\phi}{1 - m\tan\phi}.$$

代入(1)式，即得所求之方程式

$$y - y_1 = \frac{m + \tan\phi}{1 - m\tan\phi}(x - x_1)$$

(e) $(x_1 y_1)\phi, Ax + By + C = 0.$

解. 設m_1為所求方程式之斜率

於是其方程式為$y - y_1 = m_1(x - x_1)$……………………(1)

已知直線之斜率，$m_2 = -\frac{A}{B}$

由110頁之推論，得

$$\tan\phi = \frac{m_1 + \frac{A}{B}}{1 - \frac{A}{B}m_1} = \frac{Bm_1 + A}{B - Am_1}.$$

$$m_1 = \frac{B\tan\phi - A}{A\tan\phi + B}.$$

代入 (1) 式即得所求之方程式，

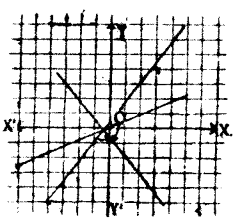
$$y - y_1 = \frac{B\tan\phi - A}{A\tan\phi + B}(x - x_1)$$

8. 依角之定義"第一直線與第二直線所成之角"以圖表明作一直線過二直線之交點且"與此二直線成等角"爲不可能，並以公式證之，又何爲二直線交角之平分線．

解．任取二相交直線．

$4x-3y+1=0$ ……………………………… (1)

及　$5x-12y=0$ ……………………………… (2)



又其一分角線．

$27x+21y+13=0$ ……………………………… (A)

由圖，$\angle DAB$ 與 $\angle CAB$ 之數值相等而實不等

$$\tan\angle DAB = \frac{84+81}{105-63} = \frac{11}{3}$$

$$\tan\angle CAB + \frac{105+324}{135-252} = -\frac{11}{3}$$

$$\therefore\quad \tan\angle DAB + \tan\angle CAB = \frac{11}{3} - \frac{11}{3} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\angle DAB = -\angle CAB$　$\therefore$　$\angle DAB \neq \angle CAB$

由 109 頁定理 X，可求 $\angle CAD$ 之値，

又由 (3) 式，得　$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAD$

因分角線 AB 過 (1)，(2) 之交點 (x_1, y_1) 及其與 AD 所成之角 $\angle DAB$ 均爲已知．

故依 111 頁例 2，分角線之斜率 m 亦爲已知．

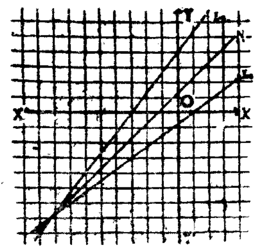
但另一分角線之斜率必為 $-\frac{1}{m}$.

故二分角線之方程式為

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ 及 } y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1).$$

(參考 121 頁之推論).

9. 已知$L_1: 3x-4y-3=0$, $L_2: 4x-3y+12=0$兩直線,另有一直線 N,通過 L_1, L_2 之交點,若N 與 L_1 之角等於 L_2 與 N 之交角. 試求 N 之方程式.



解. 解聯立方程式求得 L_1 與 L_2 之交點為 $(-8\frac{1}{7}, -6\frac{5}{7})$.

設 θ_1為所求直線與 L_1所成之角及 θ_2 為 L_2 與所求直線所成之角則

$$\tan\ \theta_1=\frac{m-\frac{3}{4}}{1+\frac{3m}{4}},\quad \tan\ \theta_2=\frac{\frac{4}{3}-m}{1+\frac{4m}{3}}$$

$$\frac{m-\frac{3}{4}}{1+\frac{3m}{4}}=\frac{\frac{4}{3}-m}{1+\frac{4m}{3}},\quad \frac{4m-3}{4+3m}=\frac{4-3m}{3+4m}.$$

$m=1$.

於公式 $y-y_1=m(x-x_1)$ 內,以$-8\frac{1}{7}$ 代x_1, $-6\frac{5}{7}$代 y_1 及 1 代 m,即得所求之方程式為

$$y+6\frac{5}{7}=x+8 \text{ 或 } 7x+7y+9=0.$$

習　　題　(第 115－116 頁)

1. 試求下列各直線系之方程式.

(a) 過 $(-2, 3)$

解. 於公式 $y-y_1=m(x-x_1)$ 內以 $(-2, 3)$ 代 (x_1, y_1) 得.

$$y-3=m(x+2)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式之 m 為變常數,代表過 $(-2, 3)$ 點之直線系

(b) 斜率$=-\frac{2}{3}$.

解. 於 $y-y_1=m(x-x_1)$ 內,以$-\frac{2}{3}$ 代 m. 得

$$y-y_1=-\frac{2}{3}(x-x_1).$$

此式之 x_1及 y_1 為變常數,代表斜率等於 $-\frac{2}{3}$ 之直線系

(c) 與原點之距離為 3.

解. 於 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ 內以 3 代 p，得所求之方程式為
$$x\cos\omega+y\sin\omega-3=0.$$
此式之 ω 為變常數.

(d) 在 YY' 之截線為 -3.

解. 以 -3 代入 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 式內之 b 即得所求之方程式為
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-3}=1.$$
此式 a 為變常數.

(e) 通過 $(6,-1)$. 同理得 $y+1=m(x-6)$.

(f) x 軸之截線為 6 $\frac{x}{6}+\frac{y}{b}=1$.

(g) 斜度 $=\frac{1}{2}$. $y=\frac{1}{2}x+b$.

(h) y 軸之截線等於 5 $\frac{x}{a}+\frac{y}{5}=1$.

(i) 至原點之距離等于 4 $x\cos\omega+y\sin\omega-4=0$.

2. 以下諸方程式所表之直線系其幾何條件為何?

(a) $2x-3y+4k=0$.

解. 化此式為 $y=mx+b$ 之形式，得
$$y=x\frac{2}{3}+\frac{4k}{3}.$$
故此式代表斜率為 $\frac{2}{3}$ 及不定截線 b 之直線系.

(b) $kx-3y-7=0$.

解. 化此式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 之形式，得
$$\frac{x}{\frac{7}{k}}+\frac{y}{-\frac{7}{3}}=1.$$
故此式代表在 YY' 之截線為 $-\frac{7}{3}$ 及不定截線 a 之直線系.

(c) $x+y-k=0$.

解. $y=-x+k$.

故知其代表斜率為 -1 及不定截 k 之一切直綫.

(d) $x+k=0$.

解. 移常數項，得 $x=-k$.

故此式代表平行 YY' 之直線系.

(e) $x+2k\,y-3=0$.

解. $$\frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{3}{2k}}=1.$$

故知其 x 軸之截線 3 及 y 軸上之截線爲 $\frac{3}{2k}$ 之一切直線.

(f) $2kx-3y+2=0$.

解. $$\frac{x}{-\frac{1}{k}}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1.$$

故知其代表在 x 軸上之截綫爲 $-\frac{1}{k}$ 及在 y 軸截線上之爲 $\frac{2}{3}$ 之一切直線.

(g) $x\cos\alpha+y\sin\alpha+5=0$.

解. 化此式爲 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ 之形式. 得

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}x+\frac{\sin\alpha}{-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}y+\frac{5}{-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=0$$

但因 $-\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=-1$.

$\therefore\quad -x\cos\alpha-y\sin\alpha-5=0$.

故此直線系與原點之距離爲 5.

3. 試求 k 之值.

(a) 直線 $2x-3y+k=0$ 過 $(-2, 1)$.

解. 因 $(-2, 1)$ 在此直線上,

故 $2\times(-2)-3\times1+k=0$ 或 $k=7$.

(b) 直綫 $2kx-5y+3=0$ 之斜率爲 3.

解. 因此直線之斜率爲 3.

故 $\frac{2k}{5}=3$ 或 $k=\frac{15}{2}$.

(c) 直線 $x+y-k=0$ 通過 $(3, 4)$

解. $3+4-k=0\quad\therefore k=7$.

(d) 直線 $3x-4y+k=0$ 在 XX' 之截線 $=2$.

解. 因其在 XX' 之截線爲 2.

故 $-\frac{k}{3}=2$ 或 $k=-6$.

(e) 直線 $x-3ky+4=0$ 在 y 軸之截線 $=-3$.

化已知方程式爲法式 $\frac{x}{-4}+\frac{y}{\frac{4}{3k}}=1$

$\therefore\ \frac{4}{3k}=-3\quad \therefore\ k=-\frac{9}{4}$

(f) 直線 $4x-3y+6k=0$ 與原點之距離爲 3.

解. 化此式爲法式，得

$$\frac{4}{\pm5}x-\frac{3}{\pm5}y+\frac{6}{\pm5}k=0.$$

因其與原點之距離爲 3.

故 $\frac{6}{\pm5}k=3$, 或 $k=\pm\frac{5}{2}$.

4. 求斜度等於 $-\frac{5}{12}$ 且割圓 $x^2+y^2=1$ 於一點之直線之方程式

解. 方程式 $y=-\frac{5}{12}x+b$……………………(A)

表斜率爲 $-\frac{5}{12}$ 之直線系.

以 y 之值代入圓方程式內，得

$x^2+(-\frac{5}{12}x+b)^2=1$ 或

$169x^2-120bx+144(b^2-1)=0$…………(1)

因此直線與圓相切，故 (1) 式之根必須相等.

$\therefore\ \Delta=(-120b)^2-4\times169\times(144b^2-144)=0$,

故 $b=\pm\frac{13}{12}$.

代入 (A) 式且化簡即得所求之方程式,

$5x+12y-13=0$ 與 $5x+12y+13=0$.

5. 求通過 (1,2) 且割圓 $x^2+y^2=4$ 於一點之方程式.

解. 方程式 $y-2=m(x-1)$ …………… (A)

表過 (1,2) 點之直線系.

解．（A）式求 y 之値再代入圓方程式內，得

$x^2+[m(x-1)+2]^2=4$，或

$(1+m^2)x^2-2(m^2-2m)x+m^2-4m=0$ …………（1）

因此直線割圓僅一點，故（1）式之二根必須相等．

$\therefore\quad [-(m^2-2m)]^2-(1+m^2)(m^2-4m)=0$，

$m=0$ 或 $-\frac{4}{3}$

代入（A）式且化簡即得所求之方程式爲

$y-2=0$ 與 $4x+3y-10=0$．

6．通過 $(-2,5)$ 且與 y 軸成 $45°$ 角之直線，其方程式如何？

解．方程式 $y-5=m(x+2)$ ……………（A）

表過（$-2,5$）點之直線系．

YY' 之方程式爲 $x=0$．

由 115 頁之推論，得

$\tan 45°=\frac{m-\infty}{1+\infty m}$ 或 $1=\frac{m-\infty}{1+\infty m}$．

$(1-\infty)m=1+\infty$． $m=\frac{1+\infty}{1-\infty}=\frac{\frac{2}{\infty}+1}{\frac{2}{\infty}-1}=-1$．

代入（1）式，即得所求之方程式爲

$x+y-3=0$．

7．求通過 $(2,-1)$ 且距原點等於 2 之直線之方程式．

解．距原點爲 2 之諸直線其方程式爲

$x\cos\omega+y\sin\omega-2=0$ ……………（1）

因 $(2,-1)$ 在（1）上，故 $2\cos\omega-\sin\omega-2=0$ …………（2）．

$\therefore\quad 2\sqrt{1-\sin^2\omega}=2+\sin\omega$．

即 $4-4\sin^2\omega=4+4\sin\omega+\sin^2\omega$，

$\sin\omega(5\sin\omega+4)=0$．

$\therefore\quad \sin\omega=0$ 與 $\sin\omega=-\frac{4}{5}$．

代入在（2）式內，$\cos\omega=1$，與 $\cos\omega=\frac{3}{5}$．

代入（1），即得所求之直線爲

$x-2=0$ 與 $3x-4y-10=0$．

8．斜度等於 $\frac{3}{4}$ 之直線至 $(2,4)$ 之距離爲 2．試求此直線之方程式

解．凡斜率為 $\frac{3}{4}$ 之直線其方程式皆為 $y=\frac{3}{4}x+b$ ………………(1)

化 (1) 式為法式，得

$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{4}{5}b=0.$

$\therefore\quad -\frac{3\times 2}{5}+\frac{4\times 4}{5}-\frac{4}{5}b=2.$ 故 $b=0.$

代入 (1) 式即得所求之方程式為

$3x-4y=0.$

習　　題　　　　（第 118 頁）

1．求下直線之方程式，通過

(a) (0, 0) 且平行 $x-3y+4=0.$

解．平行已知直線之直線系．其方程式為

$x-3y+k=0$ ………………(1)

因所求之直線過 (0, 0)；故 $k=0.$

代入 (1) 式即得所求之直線為

$x-3y=0.$

(b) (3, −2) 且平行 $x+y+2=0.$

解．平行已知直線之直線系．其方程式為

$x+y+k=0$ ………………(1)

因所求之直線過 (3, −2)；故

$3-2+k=0$，或 $k=-1.$

代入 (1) 式即得所求之方程式為

$x+y-1=0.$

(c) (−5, 6) 且平行 $2x+4y-3=0.$

解．平行已知直線之直線系，其方程式為

$2x+4y+k=0$ ………………(1)

因所求之直線過 (−5, 6)；故

$2(-5)+4\times 6+k=0$ 或 $k=-14.$

以 k 之值代入 (1) 式．即得所求之方程式為

$2x+4y-14=0$，或 $x+2y-7=0.$

(d) (−1, 2) 且垂直 $3x-4y+1=0.$

解．垂直已知直線之直線系，其方程式爲

$4x+3y+k=0$ ……………………(1)

因 $(-1,2)$ 在所求之直線上，故

$4\times(-1)+3\times2+k=0$，或 $k=-2$.

代入（1）式，即得所求之方程式爲

$4x+3y-2=0$.

(e) $(-7,2)$ 且垂直 $x-3y+4=0$.

解．垂直已知直線之直線系，其方程式爲

$3x+y+k=0$ ……………………(1)

因直線（1）過 $(-7,2)$；故

$3\times(-7)+2+k=0$，或 $k=19$.

以 k 之値代入（1）式，即得所求之方程式爲

$3x+y+19=0$.

2．有三角形，其頂點爲 $(-3,2)$，$(3,-2)$，$(0,-1)$；通過此三點作三直線，各與對邊平行，試求此三直線之方程式．

解．以 P_1 表 $(-3,2)$，P_2 表 $(3,-2)$ 及 P_3 表 $(0,-1)$

P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1 三邊之方程式分別爲

$2x+3y=0$，$x+3y+3=0$，$x+y+1=0$.

方程式：$2x+3y+k_1=0$ ……………………(1)

$x+3y+k_2=0$ ……………………(2)

$x+y+k_3=0$ ……………………(3)

各表平行 P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1 之直線系．

因 $(0,-1)$ 在（1）上；$(-3,2)$ 在（2）上；在 $(3,-2)$ 在（3）上．故

$-3+k_1=0$；　$-3+6+k_2=0$；　$3-2+k_3=0$.

$\therefore$ $k_1=3$；　$k_2=-3$；　$k_3=-1$.

以 k_1，k_2，k_3 之値分別代入（1），（2），（3）各式．

即得所求之方程式爲

$2x+3y+3=0$，　$x+3y-3=0$．　$x+y-1=0$.

3．於上題三角形，通過頂點作三直線各垂直其對邊，則此三直線之方程式如何，并證明此三直線相遇於一點．

解. 垂直三邊之直線系爲

$3x-2y+k_1=0$ ……………(1)

$3x-y+k_2=0$ ……………(2)

$x-y+k_3=0$ ……………(3)

因 $(0,-1)$ 在 (1) 上, $(-3,2)$ 在 (2) 上; 及 $(3,-2)$ 在 (3) 上. 故

$2+k_1=0$; $-9-2+k_2=0$; $3+2+k_3=0$.

$\therefore$ $k_1=-2$, $k_2=11$, $k_3=-5$.

以 k_1, k_2, k_3 之值分別代入 (1), (2), (3) 卽得所求之方程式爲

$3x-2y-2=0$, $3x-y+11=0$, $x-y-5=0$.

此三式中任取二式解之得其交點爲 $(-8,-13)$

再以 $(-8,-13)$ 代入第三式得

$-8-(-13)-5=0$.

故此三直線相遇於一點 $(-8,-13)$.

4. 於第二題三角形三邊之中點, 各作垂線, 試求三垂線之方程式, 幷證明其相遇於一點.

解. P_1P_2 之中點爲 $(0,0)$; P_2P_3 之中點爲 $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ 及 P_3P_1 之中點爲 $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.

垂直於邊之直線其方程式爲

$3x-2y+k_1=0$ ……………(1) $3x-y+k_2=0$ ……………(2)

$x-y+k_3=0$ ……………(3).

因 $(0,0)$ 在 (1) 上; $(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})$ 在 (2) 上; 及 $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ 在 (3) 上, 故 $k_1=0$; $\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+k_2=0$; $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+k_3=0$.

$\therefore$ $k_1=0$, $k_2=-6$, $k_3=2$.

以諸值代入 (1), (2), (3). 卽得所求之方程式爲

$3x-2y=0$ ……………(4) $3x-y-6=0$ ……………(5)

與 $x-y+2=0$ ……………(6)

解聯立方程式 (4), (5) 得其交點爲 $(4,6)$.

代入 (6) 式, $4-6+2=0$.

故直線 (4) (5), (6) 相遇於一點.

5. 平行四邊形之兩邊為 $3x-4y+6=0$ $x+5y-10=0$ 其餘兩邊之交點為 $(4,9)$. 試求其方程式.

平行 $3x-4y+6=0$ 之直線系，其方程式為

$3x-4y+k_1=0$ ……………………(1)

平行 $x+5y-10=0$ 之直線系，其方程式為

$x+5y+k_2=0$ ……………………(2)

$(4,9)$ 既在 (1) 上又在 (2) 上；故

$4\times3-4\times9+k_1=0$; $4+5\times9+k_2=0$, 或 $k_1=24$; $k_2=-49$.

代入 (1) 及 (2) 即得所求之方程式為

$3x-4y+24=0$ 及 $x+5y-49=0$.

6. 三角形之頂點為 $(2,1)$, $(-2,3)$, $(4,-1)$. 試求 (a) 三邊之方程式. (b) 三邊中點之垂線方程式. (c) 由三頂點至對邊之垂線方程式. 並於 (b), (c) 兩步證明其各相遇於一點.

(a) $\dfrac{x-2}{-2-2}=\dfrac{y-1}{3-1}$ 或 $\begin{matrix}2x+4y=8\\ x-2y=4\end{matrix}$ ……………………(1)

$\dfrac{x+2}{4+2}=\dfrac{y-3}{-1-3}$ 或 $\begin{matrix}4x+6y=10\\ 2x+3y=5\end{matrix}$ ……………………(2)

$\dfrac{x-4}{2-4}=\dfrac{y+1}{1+1}$ 或 $x+y=3$ ……………………(3)

(b) 中點為 $(0,2)$ $\begin{matrix}y-2=2x\\ \text{或 } 2x-y+2=0\end{matrix}$ ……………………(1)

$(1,1)$ $y-1=\frac{3}{2}(x-1)$

或 $3x-2y-1=0$ ……………………(2)

$(3,0)$ $y=x-3$

或 $x-y-3=0$ ……………………(3)

(c) $y+1=2(x-4)$ 或 $2x-y-9=0$ ……………………(1)

$y-1=\frac{3}{2}(x-2)$ 或 $3x-2y-4=0$ ……………………(2)

$y-3=x+2$ $x-y+5=0$ ……………………(3)

因 $(-5,-8)$ 適合 (b) 之 (1), (2), (3)

∴ (b) 之 (1) (2) (3) 相遇於一點.

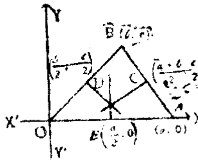
又因 $(14,19)$ 適合於 (c) 之 (1) (2) (3)

∴ (c) 之 (1) (2) (3) 相遇於一點.

於任意三角形內，其各邊中點之垂線，必相遇於一點，試說明之．

解．以一角頂為原點及其一隣邊為 x 軸．於是角頂之坐標可命為 $(0,0)$ $(a,0)$，(b,c)．

由 39 頁之推論，求得 OA 之中點為 $E\left(\frac{a}{2},0\right)$；$AB$ 之中點為 $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 及 OB 之中點為 $D\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$



由第 97 頁公式 (VII)，得

AB 之方程式為 $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-0}{c-0}$，或 $cx+(a-b)y-ac=0$.

OB 之方程式為 $\frac{x-0}{b-0}=\frac{y-0}{c-0}$，或 $cx-by=0$；及

OA 之方程式為 $y=0$.

方程式 $(a-b)x-cy+k_1=0$ ……………(1) 表垂直 AB 之直線系

方程式 $bx+cy+k_2=0$ ……………(2) 表垂直 OB 之直線系

因 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 在 (1) 上；及 $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 在 (2) 上，

故 $(a-b)\times\frac{a+b}{2}-c\times\frac{c}{2}+k_1=0$;

$b\times\frac{b}{2}+c\times\frac{c}{2}+k_2=0$.

$\therefore\ k_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$，$k_2=-\frac{b^2+c^2}{2}$

代入 (1) 式及 (2)，得

$(a-b)x-cy+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=0$，及 $bx+cy-\frac{a^2+c^2}{2}=0$.

由圖得，OA 中垂線之方程式為 $x=\frac{a}{2}$.

解聯立方程式 $x=\frac{a}{2}$ 及 $bx+cy-\frac{b^2+c^2}{2}=0$.

得其交點爲 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$.

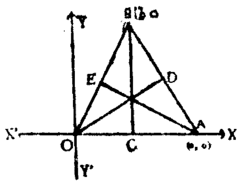
以此交點坐標之值代入在 $(a-b)x-cy+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=0$. 得

$$\frac{(a-b)a}{2}-\frac{c(b^2+c^2-ab)}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

$$=\frac{a^2-ab-b^2-c^2+ab+b^2+c^2-a^2}{2}=0.$$

故此三直線相遇於一點 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$.

8. 於任意三角形內，自角點至對邊之垂線，必相遇於一點，試證明之.



解. 以一角頂爲原點及一邊爲 x 軸.

於是角頂之坐標可命爲 $O(0, 0)$,

$A\ (a, 0)$, $B\ (b, c)$

由第 97 頁公式 (VII), 得

AB 之方程式爲 $\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-0}{c-0}$ 或 $cx+(a-b)y-ac=0$;

OB 之方程式爲 $\frac{x-0}{b-0}=\frac{x-0}{c-0}$ 或 $cx-by=0$

OA 之方程式 $y=0$.

垂直 AB 之直線系爲

$(a-b)x-cy+k_1=0$ ……………………(1)

垂直 OB 之直線系爲

$bx+cy+k_2=0$ ……………………(2)

因 $(0, 0)$ 在 (1) 上, $\therefore\ k_1=0$.

又因 $(a, 0)$ 在 (2) 上， $\therefore\ k_2=-ab$

以 k_1 之值代入 (1) 式及 k_2 之值代入 (2) 式，得

$(a-b)x-cy=0$，及 $bx+cy-ab=0$.

由圖，BC 之方程式爲 $x=b$.

解聯立式 $x=b$ 及 $bx+cy-ab=0$. 得其交點爲 $\left(b, \dfrac{b(a-b)}{c}\right)$.

以交點之坐標代入在

$(a-b)x-cy=0$，得

$(a-b)b-c\times\dfrac{b(a-b)}{c}=0$.

故直線 $(a-b)x-cy=0$ 過 $\left(b, \dfrac{(b(a-b)}{c}\right)$.

故任意三角形之三高線相遇於一點.

9. 設直線 $Ax+By+C=0$ 通過已知點 $P_1(x_1, y_1)$；試以 A, B 表 C 之值. 并證明通過 P_1 之直線方程式爲

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$. ……………………………………(1)

解. 直線 (1) 過 $P_1(x_1, y_1)$，故

$Ax_1+By_1+C=0$ 或 $C=-(Ax_1+By_1)$.

代入 (1) 式，得

$Ax+By-(Ax_1+By_1)=0$，或 $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$

習　　題　(第121—123頁)

1. 試應用本節諸定理以求下列諸直線之方程式，但通過直線 $2x-3y+2=0$，$3x-4y-2=0$之交點，且

(a) 通過原點.

解. 過已知二直線交點之直線系爲

$2x-3y+2+k(3x-4y-2)=0$ ………(1)

因 $(0, 0)$ 在此直綫上，故

$2+k(-2)=0$，　$\therefore\ k=1$.

以 k 之值代入 (1) 式，且化簡即得所求之方程式爲

$5x-7y=0$.

(b) 平行 $5x-2y+3=0$.

解. 過已知二直線交點之直線系爲

$2x-3y+2+k(3x-4y-2)=0$, 或

$(2+3k)x-(3+4k)y+2-2k=0$ ………(1)

因直線(1)平行 $5x-2y+3=0$.

故 $\frac{2+3k}{5}=\frac{-3-4k}{-2}$. ∴ $k=-\frac{11}{14}$

以 k 之値代入(1)式,且化簡卽得所求之方程式爲

$5x-2y-50=0$.

(c) 垂直 $3x-2y+4=0$.

解. 過已知二直線交點之直線系爲

$2x-3y+2+k(3x-4y-2)=0$, 或

$(2+3k)x-(3+4k)y+2-2k=0$ ……………(1)

若(1)與 $3x-2y+4=0$ 垂直,則必須

$3(2+3k)+2(3+4k)=0$. ∴ $k=-\frac{12}{17}$

以 k 之値代入(1)式且化簡,卽得所求之方程式爲

$2x+3y-58=0$.

2. 三角形之三邊爲 $2x-3y+1=0$, $x-y=0$, $3x-4y-2=0$ 通過頂點作三直線,(a)各與對邊平行.(b)各與對邊垂直,試求其方程式

解. (a) 過 $2x-3y+1=0$ 與 $x-y=0$ 交點之直線系爲

$2x-3y+1+k(x+y)=0$ 或

$(2+k)x-(3+k)y+1=0$ ……………(1)

因(1)平行 $3x+4y-2=0$,

故 $\frac{2+k}{3}=\frac{-3-k}{4}$. ∴ $k=-\frac{17}{7}$

代入(1)式且化簡,卽得一條所求之直線爲.

$3x+4y-7=0$.

同樣方法求得其餘二條所求之直線爲

$14x-21y-2=0$, $17x-17y+5=0$.

(b) 因(1)垂直於 $3x+4y-2=0$,

故 $3(2+k)-4(3+k)=0$，　　∴ $k=-6$.

代入(1)式，得一條所求之直線為

$4x-3y-1=0$.

同樣方法求得其餘二條所求之直線為

$12x-14y-10=0$，　　$17x-17y-9=0$.

3. 試求 $4x-3y-1=0$，$3x-4y+2=0$ 所作諸角之平分線之方程式．并証明此兩直線互相垂直．

解 化已知之方程式為法式，得

$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=0$ 與 $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0$，

此二式相加與相減，即得分角線之方程式為

$x+y-3=0$ 與 $7x-7y+1=0$

$7\times1+(-7)\times1=7-7=0$.

故二分線角彼此垂直．

4. 試求 $5x-12y+10=0$，$12x-5y+15=0$ 所作諸角之平分線之方程式並由定理 X 証此結果．

解． 化已知二方程式為法式，得

$$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{10}{13}=0 \text{ 與 } -\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{15}{13}=0$$

將此二式相加與相減，再化簡即得所求之方程式為

$17x-17y+25=0$ 及 $7x+7y+5=0$

證驗： 以 θ_1 表 $7x+7y+5=0$ 與 $5x-12y+10=0$ 所成之角及 θ_2 表 $12x-5y+15=0$ 與 $7x+7y+5=0$ 所成之角．

由定理 X．

$$\tan\theta_1=\frac{5\times7-7(-12)}{5\times7+7(-12)}=-\frac{17}{7};$$

$$\tan\theta_2=\frac{7(-5)-12\times7}{7\times12+(-5)7}=-\frac{17}{7}.$$

∴ $\theta_1=\theta_2$.

同樣 $17x-17y+25=0$ 為另一對角頂之分角線．

5. 自 $4x-3y+4=0$，$5x+12y-8=0$ 兩直線至其點之距離之比，恒為 13 比 5．試求此點軌跡之方程式．

解． 化此二式為法式，得

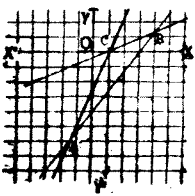
$$\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{8}{13}=0 \text{與} -\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}=0.$$

由題設，得
$$\frac{-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}}{\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{8}{13}}=\frac{13}{5}.$$

化簡即得所求之方程式爲 $9x+9y-4=0$.

6　三角形之三邊爲 $4x-3y=12$，$5x-12y-4=0$，$12x-5y-13=0$；試求其三內角之兩等分線，并証明諸平分線相遇於一點．

解．化已知之方程式爲法式，得



$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{4}{13}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由圖 $\angle ACB$，$\angle CAB$ 與 $\angle CBA$ 爲內角

(2)，(3) 相減即得 $\angle ACB$ 二等線之方程式爲

$7x+7y-9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(1) +(3) 即得 $\angle CAB$ 二等分線之方程式爲

$112x-64y-221=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(1) +(2)，即得 $\angle CBA$ 二等分線之方程式爲

$7x-9y-16=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

解聯立方程式 (4)，(6) 得其交點坐標爲

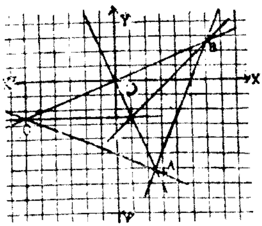
$$\left(\frac{193}{112},\ -\frac{7}{16}\right).$$

代入 (5) 式，$112\times\frac{193}{112}-46\left(-\frac{7}{16}\right)-221=0.$

故分角線相遇於一點 $\left(\frac{193}{112},\ -\frac{7}{16}\right)$

7.　以 $5x-12y=0$，$5x+12y+60=0$，$12x-5y-60=0$ 爲邊之

三角形，其諸內角之平分線之方程式如何．并證明其相遇於一點．



解．化已知之方程式爲法式，得

$$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{60}{13}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-\frac{60}{13}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由圖，原點在 $5x-12y=0$ 上，且 A 爲一內角．

故 (1)，(2) 相減；(2)，(3) 相減；(1)，(3) 相減．即得三內分角線之方程式爲

$2y+5=0$，$17x+7y=0$，$17x-17y-60=0$．

解聯立式，$2y+5=0$ 與 $17x+7y=0$，得其交點爲

$\left(\frac{35}{34}, -\frac{5}{2}\right)$．

於 $17x-17y-6=0$ 式內以 $\frac{35}{34}$ 代 x 及 $-\frac{5}{2}$ 代 y，得

$$17\times\frac{35}{34}+7\times\frac{5}{2}-60=\frac{35}{2}+\frac{85}{2}+60=0.$$

故三分角線相遇於一點 $\left(\frac{35}{34}, -\frac{5}{2}\right)$．

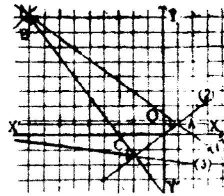
8．三角形之邊爲 $3x+4y-12=0$，$3x-4y=0$，$4x+3y+2_4=0$．証明首兩邊所作內角之平分線必與其他兩外角之平分線相遇於一點．

解，化已知之方程式爲法式，得

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{12}{5}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{24}{5}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$



由圖，$\angle B$ 爲一外角，且原點在（2）上，故由第105頁可知在 $\angle A$ 之直線其 k 爲正，在 $\angle C$ 之直線其 k 爲負.

故（1）+（2）；（1）+（3），及（2），（3）相減即得所求之直線爲

$2y-3=0$，　$x-y+36=0$，　$x+7y+24=0$.

解聯立式 $2y-3=0$ 與 $x-y+36=0$，得其交點爲 $\left(-\frac{69}{2},\frac{3}{2}\right)$.

以交點之坐標代入在 $x+7y+24=0$ 式內，得

$$-\frac{69}{2}+7\times\frac{3}{2}+24=-\frac{69}{2}+\frac{21}{2}+\frac{48}{2}=0.$$

故此三直線相遇於一點 $\left(-\frac{69}{2},\frac{3}{2}\right)$.

9．求直綫通過 $x+y-2=0$，$x-y+6=0$ 之交點．又通過 $2x-y+3=0$，$x-3y+2=0$ 之交點之方程式.

解．過前者之交點之直綫爲

$$x+y-2+k(x-y+6)=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

過後者之交點之直線系爲

$$2x-y+3+k'(x-3y+2)=0\cdots\cdots(2)$$

因其代表同一直線故

$$\frac{1+k}{2+k'}=\frac{1-k}{-1-3k'}=\frac{-2+6k}{3+2k'}=\lambda$$

解之以求 $k=\frac{8}{11}$

$$\frac{19}{11}x+\frac{3}{11}y+\frac{48-22}{11}=0$$

$$19x+3y+26=0$$

10．某直線通過 $2x+5y-3=0$，$3x-2y-1=0$ 之交點．又通

過 $x-y=0$, $x+3y-6=0$ 之交點，求其方程式.

解. 過此兩對直線之交點之直線系之方程式爲

$$2x+5y-3+k(3x-2y-1)=0 \text{ 及}$$

$$x+3y-6+k'(x-y)=0.$$

因此二直線相合，故

$$\frac{2+3k}{1+k'}=\frac{5-2k}{3-k'}=\frac{-3-k}{-6}=\lambda.$$

$\therefore\quad 2+3k=\lambda+\lambda k'$, $5-2k=3\lambda-\lambda k'$, $3+k=6\lambda$.

自此三式消去 $\lambda k'$ 及 λ, 得 $k=-15$ 以 k 之値代入即得所求之方程式爲

$$43x-35y-12=0.$$

11. 完全四邊形之邊爲 $x+2y=0$, $3x-4y+2=0$, $x-y+3=0$, $3x-2y+4=0$; 試求其三對角線之方程式.

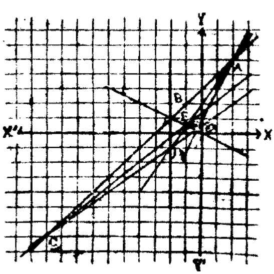
解. 依題中次序命其邊爲 L_1, L_2, L_3 及 L_4.

用第 76 頁之法則. 求得 L_1 與 L_2 之交點 $F\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$;

L_3 與 L_4 之交點 $A(2, 5)$; L_1 與 L_3 之交點 $B(-2, 1)$;

L_2 與 L_3 之交點 $C(-10, -7)$; L_2 與 L_4 之交點 $D(-2, -1)$;

L_1 與 L_4 之交點 $E\left(-1, \frac{1}{2}\right)$



由圖可知此完全四邊形之三對角線爲 AF 及通常之二對角線 BD 與 CE.

於是由第 97 頁公式 (VII), 得

AF 之方程式爲 $\dfrac{x+\frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}}=\dfrac{y-\frac{1}{5}}{5-\frac{1}{5}}$,

或 $2x-y+1=0$;

BD 之方程式爲 $\dfrac{x+2}{-2+2}=\dfrac{y+1}{1+1}$, 或 $x+2=0$;

CE 之方程式爲 $\dfrac{x+10}{1+10}=\dfrac{y+7}{\frac{1}{2}+7}$, 或 $5x-6y+8=0$.

12. 證明任意二直線之交角之平分線必互相垂直.

解. 設方程式 $x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1=0$ 及 $x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2=0$ 代表任意二直線.

使此二式相加與相減. 則得所求之方程式為

$$(\cos\omega_1+\cos\omega_2)x+(\sin\omega_1+\sin\omega_2)y-p_1-p_2=0,$$

$$(\cos\omega_1-\cos\omega_2)x+(\sin\omega_1-\sin\omega_2)y-p_1+p_2=0,$$

因 $(\cos\omega_1+\cos\omega_2)(\cos\omega_1-\cos\omega_2)+(\sin\omega_1+\sin\omega_2)(\sin\omega_1-\sin\omega_2)=\cos^2\omega_1-\cos^2\omega_2+\sin^2\omega_1-\sin^2\omega_2=(\cos^2\omega_1+\sin^2\omega_1)-(\cos^2\omega_2+\sin^2\omega_2)=1-1=0.$

故二分角線彼此垂直.

13. 求 k 在XI, XII 中之幾何意義.

解. 在XI中之 k 為變常數表示諸式為一組斜率為 $-\frac{A}{B}$ 之一切平行線.

在XII中之 k 變常數表示與前式垂直之一切直線，即表示斜率為 $\frac{B}{A}$ 之一切直線.

14. 當 L_1 及 L_2 不為法式時 k 在XIII中之幾何意義如何?

解. 在XIII中 k 為變常數則表示其為過

$A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 之交點之一切直線.

15. 於任何三角形，其諸內角之二等分線，必相遇於一點.

解. 設三角形三邊之方程式為

$$x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1=0,$$

$$x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2=0,$$

$$x\cos\omega_3+y\sin\omega_3-p_3=0.$$

以三角形內任一點 O 為原點,

於是其諸內角分角線之方程式為

$$(\cos\omega_1-\cos\omega_2)x+(\sin\omega_1-\sin\omega_2)y-p_1+p_2=0,$$

$$(\cos\omega_2-\cos\omega_3)x+(\sin\omega_2-\sin\omega_3)y-p_2+p_3=0,$$

$$(\cos\omega_3-\cos\omega_1)x+(\sin\omega_3-\sin\omega_1)y-p_3+p_1=0.$$

假定 $P_1(x_1,y_1)$ 為前二分角線之交點. 於是

$$(\cos\omega_1-\cos\omega_2)x_1+(\sin\omega_1-\sin\omega_2)y_1-p_1+p_2=0\cdots\cdots(1)$$

$$(\cos\omega_2-\cos\omega_3)x_1+(\sin\omega_2-\sin\omega_3)y_1-p_2+p_3=0\cdots\cdots(2)$$

(1)－(2)，得

$(\cos\omega_3-\cos\omega_1)x_1+(\sin\omega_3-\sin_1)y_1-p_3+p_1=0.$

即 $P_1(x_1,y_1)$ 亦在第三分角線上.

故三分角線相遇於一點.

16. 試證三角形二外角之平分線與其他一內角之平分線相遇於一點.

解. 設三角形三邊之方程式為

$$x\cos\omega_1+y\sin\omega_1-p_1=0,$$

$$x\cos\omega_2+y\sin\omega_2-p_2=0,$$

$$x\cos\omega_3+y\sin\omega_3-p_3=0.$$

以三角形內任一點為原點.

於是一內角平分線之方程式為

$$(\cos\omega_1-\cos\omega_2)x+(\sin\omega_1-\sin\omega_2)-p_1+p_2=0,$$

及其二外角平分線之方程式為

$$(\cos\omega_1+\cos\omega_3)x+(\sin\omega_1+\sin\omega_3)-p_1-p_3=0,$$

$$(\cos\omega_2+\cos\omega_3)x+(\sin\omega_2+\sin\omega_3)-p_2-p_3=0.$$

假定 $P_1(x_1,y_1)$ 為二外角平分線之交點.

於是

$$(\cos\omega_1+\cos\omega_3)x_1+(\sin\omega_1+\sin\omega_3)y_1-p_1-p_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(\cos\omega_2+\cos\omega_3)x_1+(\sin\omega_2+\sin\omega_3)y_1-p_2-p_3=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)－(2)，得

$$(\cos\omega_1-\cos\omega_2)x_1+(\sin\omega_1-\sin\omega_2)y_1-p_1+p_2=0.$$

即 $P_1(x_1,y_1)$ 亦在內角平分線上.

故此三分角線相遇於一點.

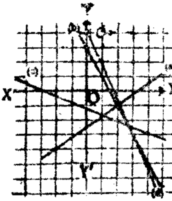
習　題　(第 127 頁)

1. 作下列諸直線.

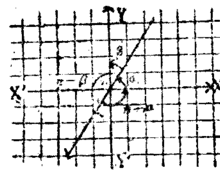
(a) $\begin{cases}x=2+\frac{3}{5}\rho,\\ y=-1+\frac{4}{5}\rho.\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x=1-\dfrac{5}{13}\rho,\\ y=2+\dfrac{12}{13}\rho.\end{cases}$

(c) $\begin{cases} x=-3-\dfrac{12}{13}\rho, \\ y=\dfrac{5}{13}\rho. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x=-1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\rho, \\ y=5+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\rho. \end{cases}$



2．某直線，若取其向上之方向，方向餘弦爲 $\cos\alpha$, $\cos\beta$. 則取其向下之方向，其方向餘弦，必爲 $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$; 試證明之.



解．設 $\cos\alpha$ 與 $\cos\beta$ 爲向上方向直線之方向餘弦. 則此直線向下方向之方向角爲 $\pi-\alpha$ 與 $\pi-\beta$.

故其方向餘弦爲 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, 與 $\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$.

3．於直線 $x=3-\frac{4}{5}\rho$, $y=-2+\frac{3}{5}\rho$ 上，試求 $\rho=3,-2,4$，諸點之坐標.

解．以所與 ρ 之值代入直線之補徑式，即得這些點之坐標，爲 $\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{23}{5},-\frac{16}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ 與 (XV) 相比較，可知 $P_1(3,-2)$ 爲直線上之一點.

以 P_2 表 $(\frac{3}{5},-\frac{1}{5})$, P_3 表 $\left(\frac{23}{5},-\frac{16}{5}\right)$ 及 P_4 表 $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ 由31頁定理IV，得

$$P_1P_2=\sqrt{(3-\tfrac{3}{5})^2+(-2+\tfrac{1}{5})^2}=3=|\rho|;$$

$$P_1P_3=\sqrt{\left(3-\frac{23}{5}\right)^2+\left(-2+\frac{16}{5}\right)^2}=2=|\rho|;$$

$$P_1P_4=\sqrt{(3+\tfrac{1}{5})^2+(-2-\tfrac{2}{5})^2}=4=|\rho|.$$

故 P_1 與 P_2; P_1 與 P_3; P_1 與 P_4 中間之長與 ρ 之數值相等.

4．試求自 $P_1(2,1)$ 至直線 $x=2-\frac{3}{5}\rho$, $y=1+\frac{4}{5}\rho$ 與副

$x^2+y^2=25$ 兩交點之距離之積，並說明所得之結果之符號

解．由定理 XV，直線上任一點之坐標為 $(2-\frac{3}{5}\rho,\ 1+\frac{4}{5}\rho)$．$\rho$ 乃自 P_1 至此任意點之距離．

若此任意點在圓周上．則有

$(2-\frac{3}{5}\rho)^2+(1+\frac{4}{5}\rho)^2=25$ 或 $\rho^2-\frac{4}{5}\rho-20=0$

其二距離為此方程式之根．

故此距離之積為 -20

此負符號乃示 $P_1(2,1)$ 在此圓內．

5．已知橢圓 $x^2+4y^2=16$ 及直線 $x=x_1-\frac{4}{5}\rho$，$y=y_1+\rho$；試求一方程式，其兩根等於自 $P_1(x_1,y_1)$ 至橢圓與直線兩交點之距離．

解．由定理 XV．直線上任意一點之坐標為 $(x_1-\frac{4}{5}\rho,\ y_1+\frac{3}{5}\rho)$，$\rho$ 乃自 P_1 至此任意點之距離．

若此任意點在橢圓上，則有

$(x_1-\frac{4}{5}\rho)^2+4(y_1+\frac{3}{5}\rho)^2=16$．或

$$\frac{52}{25}\rho^2-\frac{8x_1-24y_1}{4}\rho+x_1^2+4y_1^2-16=0.$$

此即所求之方程式，因其二根為自 P_1 至橢圓與直線二交點之距離．

6．在問題 5 內若 P_1 為弦之中點求其條件．

解．若 P_1 為弦之中點，則自 P_1 至直線與橢圓二交點之二距離必須數值相等．而符號相反．換言之即方程式

$$\frac{52}{25}\rho^2-\frac{8x_1-24y_1}{5}\rho+x_1^2+4y_1^2-16=0.$$

ρ 之二值必須數值相等．而符號相反．

由第 4 頁第 4 節，$-\dfrac{8x_1-24y_1}{5}=0$，或 $x_1=3y_1$

7．已知拋物線 $y^2=4x$，及直線 $x=2+\rho\cos\alpha$，$y=-4+\rho\cos\beta$；若直線遇拋物線於一點；求 $\cos\alpha$ 與 $\cos\beta$ 所適合之條件．

解．由定理 XV．直線上任意一點之坐標為

$(2+\rho\cos\alpha,\ -4+\rho\cos\beta)$．$\rho$ 乃自 P_1 至此任意一點之距離．

若此任意點在拋物線上．則有

$$(-4+\rho\cos\beta)^2=4(2+\rho\cos\alpha)$$ 或
$$\rho^2\cos^2\beta-4\rho(\cos\alpha+2\cos\beta)+8=0.$$

若此直線與拋物線只相遇於一點，ρ 之二值必須相等.

由第 3 頁定理 II，得

$$\triangle=[-4(\cos\alpha+2\cos\beta)]^2-4\times 8\cos^2\beta=0$$ 或
$$\cos^2\alpha+4\cos\alpha\cos\beta+2\cos^2\beta=0$$

8. 設 a,b 爲兩數，且 $a^2+b^2=1$，試証明 a,b 可爲直綫之方向餘弦.

因設 a 爲 $\sin\alpha$.

則由 $a^2+b^2=1$.

得 $b=\sqrt{1-a^2}=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$

因 $\sin x$ 及 $\cos x$ 可爲直綫之方向餘弦；

∴ 若 a,b 爲兩數且 $a^2+b^2=1$. 則

a,b 即可爲直綫之方向餘弦.

9. 用定理 V(第 95 頁)及定理 I(第 28 頁) 求出公式 (XVI)

解. 過 $P_1\ (x_1,\ y_1)$ 之直綫其方程式爲 $y-y_1=m(x-x_1)$

但 $m=\tan x$

$$\therefore\quad y-y_1=\tan x(x-x_1),\quad y-y_1=\frac{\sin x}{\cos x}(x-x_1)$$

由第 28 頁定理 I， $\sin\alpha=\cos\beta$.

$$\therefore\quad y-y_1=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-x_1).$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}.$$

10. 證明在(XVI)內之比之公共值爲 P_1P 之長.

解，平方 (XVI)，得

$$\frac{(x-x_1)^2}{\cos^2\alpha}=\frac{(y-y_1)^2}{\cos^2\beta}.\quad\therefore\quad\frac{(x-x_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

$$\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos^2\beta},$$

$$\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(y-y_1)^2}=\frac{1}{\cos^2\beta}$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{(y-y_1)^2}{\cos^2\beta}.$$

$$\therefore\quad \frac{y-y_1}{\cos\beta}=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}.$$

由第31頁公式(IV)，可知$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$即爲$P_1P$之長

1．用習題10之方法，由(XVI)求出公式(XV)．

解．由第10題，得

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\alpha}=P_1P=\rho$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\rho \text{ 及 } \frac{y-y_1}{\cos\alpha}=\rho$$

解．此二式求x及y，得

$x=x_1+\rho\cos\alpha$、及 $y=y_1+\rho\cos\beta$

雜　　題

1．　求一點在線$3x-5y+6=0$內至兩點$(3,-4)$及$(2,1)$等距離．

解．連已知二點所成之直線其垂直平分線之方程式爲，

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}.$$

平方且化簡，$x-5y-10=0$，

解聯立方程式 $3x-5y+6=0$ 與 $x-5y-10=0$．

得其交點爲 $\left(-8,-\dfrac{18}{5}\right)$

即爲所求之點，

2．　通過 $7x+y-3=0$，$3x+6y-11=0$ 兩直線交點之直線，又與連此交點及原點之直線垂直，試求其方程式．

解．過已知二直線交點之直線系爲

$7x+y-3+k(3x+6y-11)=0$……………………(1)

若原點在此直線上，則

$-3-11k=0$ 或 $k=-\dfrac{3}{11}$.

代入 k 之値且化簡，得過交點及原點之直綫之方程式爲

$$68x-7y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若 (1) 與 (2) 垂直　則

$68(7+3k)-7(1+6k)=0$，或 $k=-\dfrac{469}{102}$

代入 k 之値且化簡，即得所求之方程式爲

$273x+265y-4673=0$.

3. 通過$(2,5)$之直綫，其在x,y兩軸之間之一段，被此點分成兩等分．試求此直線之方程式．

解．過 $(2,5)$ 之直綫系其方程式爲

$y-5=m(x-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

在 XX' 上之截線爲 $a=\dfrac{2m-5}{m}$

在 YY' 上之截線爲 $b=5-2m$.

由題設及第 39 頁之推論，得

$$2=\frac{\dfrac{2m-5}{m}+0}{2}\text{ 及 }5=\frac{5-2m}{2}$$

$\therefore\quad m=-\frac{5}{2}$;

以 m 之値代入 (1) 式．即得所求之方程式爲

$5x+2y-2=0$.

4. 通過$(2,-3)$之直線，其在 $3x+y-2=0$，$x+5y+10=0$兩直線間之一段，被此點分爲兩等分，試求此直線之方程式．

解．方程式$y+3=m(x-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

代表過 $(2,-3)$ 之直線系

解聯立式 (1) 與 $3x+y-2=0$．得交點 $\left(\dfrac{5+2m}{3+m},-\dfrac{9+4m}{3+m}\right)$,

解聯立式(1)與$x+5y+10=0$．得交點$\left(\dfrac{5+10m}{1+5m},-\dfrac{3(1+4m)}{1+5m}\right)$

由題設得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5-10m}{1+5m}+\frac{5+2m}{3+2m}\right)=2\text{ 及}$$

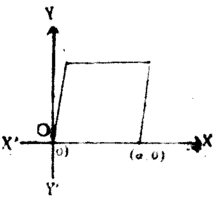
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{3(1+4m)}{1+5m}-\frac{-4m}{3+m}\right)=-3$$

$\therefore\quad m=4.$

以 m 之値代入 (1) 式即得求之方程式爲

$$4x-y-11=0.$$

5. 証明斜方形之兩對角線互相垂直.



証. 對角線之方程式爲

$$\frac{x}{x_2}=\frac{y}{y_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x-x_1}{a-x_1}=\frac{y-y_1}{-y_1}$$

$$-y_1x-ay+yx_1+ay_1=0.$$

$$y_1x+y(a-x_1)-(a)y_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 $(x_2-a)+y_2^2=a^2$, $x_2^2-2ax_2+y_2^2=0$, 及 $x_1^2+y_1^2=a^2$.

又因. $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=a^2$,

$$x_2^2+y_2^2-2x_1x_2-2y_1y=0.$$

$$2ax_2-2x_1x_2=2y_1y_2.\quad (a-x_1)x_2=y_1y_2$$

$$\frac{y_1}{a-x_1}=\frac{y_2}{x_2}\qquad\therefore\quad\frac{x}{y}=\frac{y_1}{a-x_1}$$

$$x(a-x_1)-y_1y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 (2) 與 (3) 垂直, 且 (3) 即 (1)

$\therefore$ (1) 與 (2) 垂直.

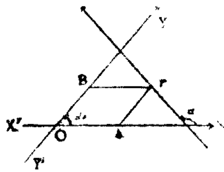
6. 設 x, y 兩軸非垂直, 而作 ω 角, 試求以在 y 軸之截線 b 及傾

角 α 所表之直線方程式

解. 設 $P\ (x,y)$ 爲直線上任意一點且作 $PB \parallel OX$

並設 C 爲 y 軸上之截點.

於是由正弦定律，得



$$\frac{CB}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{BP}{\sin(\alpha-\omega)}$$

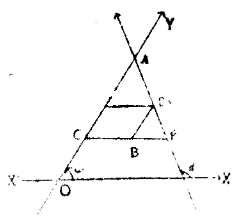
但 $CB=b-y$ 及 $BP=x$

$$\therefore\quad \frac{b-y}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin(\alpha-\omega)} \text{ 或 } y=-\frac{\sin\alpha\ x}{\sin(\alpha-\omega)}+b.$$

7. 設 x, y 兩軸作 ω 角，試求傾角爲 α，且通過 $P_1(x_1,y_1)$ 之直線方程式.

解. 設 $P(x,y)$ 爲直線上任意一點

且作 $PC \parallel OX$，



於是由正弦定律，得

$$\frac{P_1B}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{BP}{\sin(\alpha-\omega)}.$$

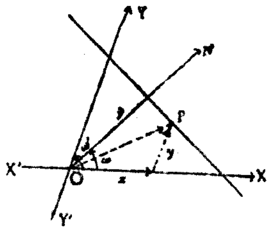
$P_1B=y_1-y;\quad BP=x-x_1.$

代入 P_1B 及 BP 之值，卽得所求之方程式爲

$$y_1-y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}(x-x_1) \text{ 或}$$

$$y-y_1=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}(x-x_1).$$

8. 設 x, y 兩軸作 ω' 角，試求直線之法線式.



解. 設 $P(x, y)$ 爲直線上任意一點.

並設 D 爲 x 軸上之截點.

OP 在 ON 上之射影 $=p$

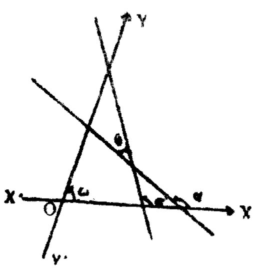
OP 之射影 $=OD$ 之射影 $+DP$ 之射影

$= x\cos\omega + y\cos(\omega-\omega')$

$\therefore\ x\cos\omega + y\cos(\omega-\omega') = p$ 或

$x\cos\omega + y\cos(\omega-\omega') - p = 0.$

9. 當 x, y 兩軸非乘直時, 試求一直線與他直線所作之角之正切.



$$_1 = \frac{-\sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}, \qquad m_2 = \frac{-\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\omega)}.$$

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\alpha'-\omega)} - \dfrac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\omega)}}{1 + \dfrac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\alpha'-\omega)\sin(\alpha'-\omega)}}$$

$$= \frac{-\sin\alpha'\cos\alpha\sin\omega + \sin\alpha\cos\alpha'\sin\omega}{(\sin\alpha'\cos\omega - \cos\alpha'\sin\omega)(\sin\alpha\cos\omega - \text{[illegible]}) + \sin\alpha\sin\alpha'}$$

$$\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'(\cos^2\omega+1)+\sin^2\omega\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\omega\cos\omega\sin(\alpha+\alpha')}$$

因 當 $\omega=\frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta=\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'+\cos\alpha\cos\alpha'}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\alpha'+\cos\alpha\cos\alpha'}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\omega\sin(\alpha-\alpha')}{\sin\alpha\sin\alpha'(\cos^2\omega+1)+\sin^2\omega\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\omega\cos\omega\sin(\alpha+\alpha')}.$$

10．證明凡 $m=b$ 之直線，必通過相同之一點，幷求此點之坐標．

解．方程式 $y=mx+b$ 表過 $(0, b)$ 點之直線系

因 $m=b$，故 $y=bx+b$ 或 $y-b(x+1)=0$

此方程式之形式與

$A_1x+B_1y+C_1+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$．相同．

故凡 $m=b$ 之直線俱過 $y=0$ 與 $x+1=0$，之交點．

解此二式，即得所求點之坐標爲 $(-1, 0)$．

11．證明凡 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ 常數之直線，必通過相同之一點，幷求此點之坐標．

解．方程式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$……………(1)代表一直線系．其在 XX' 之截線爲 a，在 YY' 之截線爲 b．

因 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$，或 $\frac{1}{a}=k-\frac{1}{b}$．

代入(1)式，則(1)式變爲

$\left(k-\frac{1}{b}\right)x+\frac{y}{b}=1$，或 $kx-1-\frac{1}{b}(x-y)=0$

此方程式之形式與

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 相同

故直線系 (1)之所有直線俱過 $kx-1=0$ 與 $x-y=0$ 之交點.

解此二式即得所求點之坐標爲 $\left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right)$

12. 證明凡 $Ax+By+C=0$ 所表之直線，若 $A+B+C=0$ 必通過相同之一點，幷求此點之坐標.

解. 因 $A+B+C=0$. 故 $A=-(B+C)$

代入在 $Ax+By+C=0$ 內，得

$-(B+C)x+By+C=0.$

$\therefore\quad C(x-1)+B(x-y)=0$, 或 $(x-1)+\frac{B}{C}(x-y)=0$

此方程式之形式與

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$. 相同.

故凡 $Ax+By+C=0$ 所表之直線當 $A+B+C=0$ 時俱過

$x-1=0$ 與 $x-y=0$ 二直線之交點.

解此二式即得所求點之坐標爲 $(1,1)$.

13. 求 $2x-3y=0$, $x+4y-2=0$, $2x-3y+\lambda(x+4y-2)=0$, $2x-3y-\lambda(x-4y-2)=0$ 割 x 軸之割點. 又將前兩直線之兩割點，以直線連之，証明後兩直線之兩割點內分及外分此連綫於相等之比.

解. 於各式內使 $y=0$，即得截點之橫坐標因截點在 x 軸上其縱坐標爲零.

故四截點爲 $(0,0)$. $(2,0)$, $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2},\ 0\right)$ 及 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda-2},\ 0\right)$.

設 k_1 及 k_2 各爲

$\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2},0\right)$ 及 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda-2},0\right)$ 兩點分 $(0,0)$ 與 $(2,0)$ 連線之比.

$$\therefore\quad \frac{2\lambda}{\lambda+2}=\frac{2k_1}{1+k_1};\quad \frac{2\lambda}{\lambda-2}=\frac{2k_2}{1+k_2}$$

$$\therefore\quad k_1=\frac{\lambda}{2};\quad k_2=\frac{-\lambda}{2}.$$

$$\therefore |k_1|=|k_2|.$$

因 k_1 爲正而 k_2 爲負故 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+2},0\right)$ 內分此直線而 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda-2},0\right)$ 外分此直線.

14. 試證若 P_1, P_2 落於方程式 $Ax+By+C=0$ 之軌跡上, 且分 P_1P_2 爲 λ 之點亦落於此軌跡上, 則此方程式代表一直線.

設 P_1 爲 (x_1, y_1), P_2 爲 (x_2, y_2) 則

$$Ax_1+By_1+C=0$$

$$Ax_2+By_2+C=0$$

$$P_3\begin{cases} x_3=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\[2ex] y_3=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+B\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+C=0$$

$$\frac{Ax_1+By_1+C+A\lambda x_2+B\lambda y_2+C\lambda}{1+\lambda}=0$$

因 $P_3(x_3, y_3)$ 分 P_1P_2 爲 λ 則 $P_1P_2P_3$ 在一直線上. 又 λ 爲變常數.

即 P_3 爲連 P_1P_2 之一直線上之任何一點.

又因 P_1, P_2, P_3 適合於此軌跡而 $P_1P_2P_3$ 在一直線上所以此軌跡代表一直線.

15. 三角形之邊爲 $2x-3y+120=0$, $x+y=0$, $3x+4y-6=0$; 求其三外角之平分綫, 又引長諸平分線, 各與對邊相交, 證明此三交點, 同在一直線內.

解. 化已知之式爲法式, 得,

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{120}{\sqrt{13}}=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\tfrac{3}{5}x+\tfrac{4}{5}y-\tfrac{6}{5}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1), (3); (1), (2); 各相減. 及 (2) + 3 即得各外角平分線之方程式爲

$(\sqrt{13}$ [illegible] $100\sqrt{2}$ [illegible] ……(4)

$(3\sqrt{13}+13)x+(2\sqrt{13}+15)y-(6\sqrt{13}+100)=0$ ……(5)

$(5-5\sqrt{2})x+(5+4\sqrt{2})y-6\sqrt{2}=0$ ……(6)

解諸邊及分角線之方程式，得其三交點為

$$P_1\left(\frac{-6(100+77\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}},\ \frac{6(100+62\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}}\right),$$

$$P_2\left(\frac{-6(77\sqrt{2}+\sqrt{13})}{\sqrt{13}+17\sqrt{2}},\ \frac{6(62\sqrt{2}+\sqrt{13})}{\sqrt{13}+17\sqrt{2}}\right),$$

$$P_3\left(\frac{6(100-\sqrt{13})}{\sqrt{13}-25},\ \frac{6(\sqrt{13}-100)}{\sqrt{13}-25}\right).$$

由第 98 之推論，得

$$\frac{\dfrac{6(100-\sqrt{13})}{\sqrt{13}-25}+\dfrac{6(100+77\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}}}{\dfrac{6(100+77\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}}-\dfrac{6(77\sqrt{2}+\sqrt{13})}{\sqrt{13}+17\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\dfrac{(6\sqrt{13}-100)}{\sqrt{13}-25}-\dfrac{6(100+62\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}}}{\dfrac{6(62\sqrt{2}+\sqrt{13})}{\sqrt{13}+17\sqrt{2}}-\dfrac{6(100+62\sqrt{2})}{25+17\sqrt{2}}}.$$

化簡，得

$$\frac{\sqrt{13}+17\sqrt{2}}{\sqrt{13}-25}=\frac{\sqrt{13}+17\sqrt{2}}{\sqrt{13}-25}，\text{或 } 1=1.$$

故此三點同在一直線上.

16. 求一直線之方程式，此線通過 $Ax+By+C=0$ 及 $A'x+B'y+C'=0$ 之交點，並 (a) 通過原點；(b) 平行於 X 軸；(c) 平行於 Y 軸.

解. 通此二直線交點之直線系其方程式為

$$Ax+By+C+k(A'x+B'y+C')=0 \text{ 或}$$

$$(A+kA')x+(B+kB')y+(C+kC')=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

(a) 因 (0, 0) 在直線 (1) 上，故

$C+kC'=0$ 或 $k=-\dfrac{C}{C'}$.

代入 k 之此值再化簡卽得所求之方程式爲

$(C'A-CA')x+(C'B-CB')y=0$.

(b) 直線 (1) 既平行 X 軸.故

$$\frac{0}{A+kA'}=\frac{1}{B+kB'};\text{或}k=-\frac{A}{A'}$$

代入 k 之此値化簡卽得所求之方程式爲

$(A'B-AB')y+(A'C-AC')=0$.

(c) 直線 (1) 平行 Y 軸，故

$$\frac{1}{A+kA'}=\frac{0}{B+kB'};\text{或}k=-\frac{B}{B'}.$$

代入 k 之此值再化簡卽得所求之方程式爲

$(AB'-A'B)x+(B'C-BC')=0$.

17. 若 λ 爲變常數，其餘字母爲常數，證明諸直線 $(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$ 經過一點.

解. 寫已知方程式爲以下之形式:

$Ax+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0$.

此方程式代表一直線系，其所有之直線俱過 $Ax+By+C=0$ 與 $A'x+B'y+C'=0$ 之交點. λ 爲一變常數，而 A, B, C, A', B', C'. 爲常數 故 $(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$ 經過一點.

18. 設已知三直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ 合成一三角形，証明任意直線之方程式 $Ax+By+C=0$ 必可寫爲

$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)+\gamma(A_3x-B_3y+C_3)=0$.

解. 寫最後之方程式爲以下之形式.

$(\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3)x+(\alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3)y+(\alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3)=0$ ………………(1) 　此處 α, β, γ, 爲有限常數

若 $Ax+BY+C=0$ 與 (1) 有相同軌跡，則

$$\frac{\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3}{A}=\frac{\alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3}{B}=\frac{\alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3}{C}$$

設其比值爲 k 則

$\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3=kA$，$\alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3=kB$，
$\alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3=kC$.

若解此三式求 α，β 與 γ 則必有以下之條件

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

因已知三線合成一三角形，故

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

今 $\Delta\neq 0$ 之條件既滿足，則二方程式

$$Ax+By+C=0 \text{ 及}$$

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3)=0.$$

必有相同之軌跡，亦即任何直線之方程式可書爲以下形式

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3)=0$$

19 以直線連 $P_1(1,3)$，$P_2(7,2)$ 兩點，求此連線被直線 $2x-5y+8=0$ 分成兩段之比.

解 設 λ 爲所求之比，故得分點之坐標爲

$$\left(\frac{1+7\lambda}{1+\lambda},\ \frac{3+2\lambda}{1+\lambda}\right)$$

因此點在已知直線上，故代入之得

$$2\times\frac{1+7\lambda}{1+\lambda}-5\times\frac{3+2\lambda}{1+\lambda}+8=0,$$

$2+14\lambda-15-10\lambda+8+8\lambda=0$，或 $12\lambda-5=0$.

$$\lambda=\frac{5}{12}.$$

20 求直線 $x+3y-6=0$ 分 $(-3,2)$，$(6,1)$ 之連線兩段之比.

解 設 λ 爲所求之比，故得分點之坐標爲 $\left(\dfrac{-3+6\lambda}{1+\lambda},\dfrac{2+\lambda}{1+\lambda}\right)$.

因此點在已知直線上，故

$$\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda}+3\times\frac{2+\lambda}{1+\lambda}-6=0. \qquad \therefore \quad \lambda=1.$$

21. 直線 $y=mx-7$ 分 $(3,2)$, $(1,4)$ 之連線兩段之比等於3:2，求 m.

解. 今 $P_1(x_1, y_1)$ 爲 $(3,2)$, $P_2(x_2, y_2)$ 爲 $(1,4)$ 及 $\lambda=\frac{3}{2}$.

故由第 39 頁公式 (VII) 得分點之坐標爲 $\left(\frac{9}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

因此點在直線 $y=mx-7$ 上，故

$$\frac{16}{5}=\frac{9m}{5}-7. \qquad \therefore \quad m=\frac{51}{9}=\frac{17}{3}.$$

22. 通過$(2,-3)$之直線，且分 $(6,3)$，$(2,-1)$之連線兩段之比等於 2:5，求此直線之方程式.

解. 今 $(6,3)$ 爲 P_1, $(2,-1)$ 爲 P_2 及 $\lambda=\frac{2}{5}$.

代入第39 頁公式 (VII) 內，求得分點之坐標爲 $\left(\frac{34}{7}, \frac{13}{7}\right)$.

代入 37 頁公式 (VII) 內，得

$$\frac{x-2}{\frac{34}{7}-2}=\frac{y+3}{\frac{13}{7}+3}.$$ 化簡即得所求之方程式爲

$$17x-10y-64=0.$$

23. 証明自直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 兩距離之比爲 $\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

解. 化此方程式爲法式 得

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

由第100 頁公式 (IX)，自已知直線至 P_1 與 P_2 之二距離爲

$$d_1=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \text{ 與 } d_2=\frac{Ax_2+By_2+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d_1}{d_2}=\frac{\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}{\dfrac{Ax_2+By_2+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

24. 證明直線 $Ax+By+C=0$ 分連兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 之直線爲兩段，其比爲 $-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

解. 由第 39 頁公式 (VII)，得分點之坐標爲

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right).$$

若此點在直線 $Ax+By+C=0$ 上，則

$$A\times\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+B\times\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+C=0.$$

$$\therefore \quad Ax_1+\lambda Ax_2+By_1+\lambda By_2+C+\lambda C=0.$$

$$-(Ax_2+By_2+C)\lambda=Ax_1+\ \ y_1+C.$$

$$\therefore \quad \lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

25. 由上題以證明任何直線割三角形之三邊 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 於 L, M, N 三點則

$$\frac{P_1L}{LP_2}\times\frac{P_2M}{MP_3}\times\frac{P_3N}{NP_1}=-1.$$

解. 設 $Ax+By+C=0$ 爲割三角形之邊於 L, M, N 三點之任一直綫.

於是由第 24 題，得

$$\frac{P_1L}{LP_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C};$$

$$\frac{P_2M}{MP_3}=-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_3+By_3+C};$$

$$\frac{P_3N}{NP_1}=-\frac{Ax_3+By_3+C}{Ax_1+By_1+C}.$$

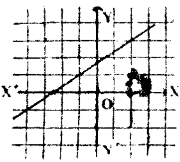
$$\therefore \quad \frac{P_1L}{LP_2}\times\frac{P_2M}{MP_3}\times\frac{P_3N}{NP_1}=$$

$$= \left(-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}\right)\times\left(-\frac{Ax_2+By_2+C}{Ax_3+By_3+C}\right)\times\left(-\frac{Ax_3+By_3+C}{Ax_1+By_1+C}\right)$$

$= -1.$

26. 作直線 $2x-3y+5=0$. 並表明使 $2x-3y+5>0$ 之一切點.

解. 與原點在同旁之諸點皆能使 $2x-3y+5>0$.



27. 求以 $A_ix+B_iy+C_i=0$ $(i=1, 2, 3)$ 爲邊所成之三角形之面積.

解. 設 P_1, P_2, P_3 爲其頂點, 其坐標各爲

$$\left(-\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\ -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}\right)$$

$$\left(-\frac{\begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},\ -\frac{\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}\right)$$

$$\left(-\frac{\begin{vmatrix} C_3 & B_3 \\ C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}},\ -\frac{\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}\right)$$

$$
\text{面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}
-\dfrac{\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}} & -\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}} & 1\\[3ex]
-\dfrac{\begin{vmatrix}C_2 & B_2\\ C_3 & B_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}} & -\dfrac{\begin{vmatrix}A_2 & C_2\\ A_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}} & 1\\[3ex]
-\dfrac{\begin{vmatrix}C_3 & B_3\\ C_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}} & -\dfrac{\begin{vmatrix}A_3 & C_3\\ A_1 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}} & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\\[2ex]
\begin{vmatrix}C_2 & B_2\\ C_3 & B_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_2 & C_2\\ A_3 & C_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\\[2ex]
\begin{vmatrix}C_3 & B_3\\ C_1 & B_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_3 & C_3\\ A_1 & C_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}
\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}
$$

$$
=\frac{\Delta^2}{2\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}\quad\left(\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\right)
$$

第　五　章

習　題 (134頁－136頁)

1.　求下列諸圓之方程式，其圓心爲

(a)　(0, 1) 與其半徑＝3.

解. 設所求圓之方程式爲

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.$

以 (0, 1) 代 (α, β) 及 3 代 r，得

$(x-0)^2+(y-1)^2=9.$

化簡，$x^2+y^2-2y-8=0.$

(b)　(－2, 0) 與其半徑＝2.

解. 設所求圓之方程式爲

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

以 －2 代 α, 0 代 β 及 2 代 r，得

$(x+2)^2+(y-0)^2=4.$

化簡，$x^2+y^2+4x=0.$

(c)　(－3, 4). 半徑＝5.

解. 設所求圓之方程式爲

$(x-\alpha)^2+y(-\beta)^2=r^2.$ ……………………………… (1)

今 $\alpha=-3$,　$\beta=4$,　$r=5$.

故以 α, β, 及 r 之值代入 (1) 式內即得所求之方程式爲

$(x+3)^2+(y-4)^2=25$ 或 $x^2+y^2+6x-8y=0$

(d)　$(\alpha, 0)$ 半徑＝α

解. 設所求圓之方程式爲

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

以 $(\alpha, 0)$ 代 (α, β) 及 α 代 r 即得所求之方程式爲

$(x-\alpha)^2+(y-0)^2=\alpha^2$ 或 $x^2+\ ^2-2\alpha x=0$

(e)　$(0, \beta)$，半徑＝β.

解. 設所求圓之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

以 $(0, \beta)$ 代 (α, β) 及 β 代 r 即得所求之方程式爲 $(x-0)^2+(y-\beta)^2=\beta^2$ 或 $x^2+y^2-2\beta y=0$.

(f) $(0, -\beta)$, 半徑 $=\beta$.

解. 設所求圓之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=r^2$$

以 0 代 α, $-\beta$ 代 β, 及 β 代 r 即得所求之方程式爲

$$(x-0)^2+(y+\beta)^2=r^2 \text{ 或 } x^2+y^2+2\beta y=0.$$

2. 求下列諸方程式之軌跡

(a) $x^2+y^2-6x-16=0$

解. 此已知方程式之形式與

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 相同.

於是 $D=-6$, $E=0$, $F=-16$, 及

$Ⓗ=D^2+E^2-4F=36+64=100>0$

故其軌跡爲一圓其心爲 $(3, 0)$ 及半徑爲 5

(b) $3x^2+3y^2-10x-24y=0$

$$x^2+y^2-\frac{10}{3}x-8y=0$$

解, 因 $Ⓗ=D^2+E^2-4F$

$$=\frac{100}{9}+64-4\times 0>0$$

故其軌跡爲圓, 圓心爲 $(\frac{5}{3}, 4)$

半徑爲 $\frac{13}{3}$.

(c) $x^2+y^2=0$.

解. 此已知方程式之形式與

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相同.

於是 $D=0$, $E=0$, $F=0$ 及

$Ⓗ=D^2+E^2-4F=0$

故其軌跡爲一點 $(0, 0)$.

(d) $x^2+y^2-8x-6y+25=0$

解. 因 $Ⓗ=D^2+E^2-4F$

$=64+36-100=0$

故其軌跡爲一點.

(e) $x^2+y^2-2x+2y+5=0$

解. 已知方程式與

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之形式相同.

於是 $D=-2$, $E=2$, $F=5$ 及

判 $=D^2+E^2-4F=4+4-4\times5=-4<0$

故此方程式無軌跡

(f) $x^2+y^2-6x+4y-5=0$.

故其軌跡爲一圓. 圓心爲 $(3, -2)$ 半徑爲 $3\sqrt{2}$.

解. 因判 $=D^2+E^2-4F=36+16+20>0$

(g) $(x+1)^2+(y-2)^2=0$.

解. 已知方程式之形式與

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ 相同

由比較得 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $r=0$.

故其軌跡爲一點 $(-1, 2)$.

別解. 化此方程式爲以下之形式

$x^2+y^2+2x-4y+5=0$

再與 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相比較, 得

$d=2$, $E=-4$, $F=5$

於是判 $=D^2+E^2-4F=4+16-4\times5=0$.

故其軌跡爲一點 $(-1, 2)$.

(h) $7x^2+7y^2-4x-y=3$

解. 因 判 $=D^2+E^2-4F=\frac{16}{49}+\frac{1}{49}+\frac{12}{7}>0$

故其軌跡爲一圓, 圓心爲 $\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{14}\right)$ 半徑爲 $\frac{\sqrt{101}}{14}$

(i) $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$

解. 已知之方程式爲以下方程式之形式:

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

今 $D=2a$, $E=2b$, $F=a^2+b^2$

故 判 $=4a^2+4b^2-4(a^2+b^2)=0$

故軌跡爲一點 $(-a, -b)$.

(j) $x^2+y^2+16x+100=0$

解 因 $\textcircled{H}=D^2+E^2-4F=256+400>0$

故其軌跡仍爲一圓，圓心爲$(-4,\ 0)$，半徑爲$2\sqrt{41}$.

3. 求下諸圓之方程式

(a) 心爲 $(2,\ 3)$ 且過 $(3,\ -2)$

解. 設所求之方程式爲

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ………………………(1)

因 $(3,\ -2)$ 在軌跡上且其心爲 $(2,\ 3)$，故得

$\alpha=2$, $\beta=3$. 及 $r^2=(3-2)^2+(-2-3)^2$ $\therefore$ $r^2=26$

以 α, β 及 r^2 之值代入 (1) 式且化簡即得所求之方程式爲

$x^2+y^2-4x-6y-13=0$.

(b) 通過三點 $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(0,\ -6)$

設 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 爲所求之圓

則因 過原點 $\therefore$ $F=0$.

$8^2+8D=0$. $\therefore$ $D=-8$

$(-6)^2-6E=0$ $\therefore$ $E=6$.

故所求圓之方程式爲

$x^2+y^2-8x+6y=0$.

(c) 過 $(4,\ 0)$, $(-2,\ 5)$, $(0,\ -3)$

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

因 $(4,\ 0)$, $(-2,\ 5)$, $(0-3)$ 在此圓上. 故得

$16+4D+F=0$……(1) $4+25-2D+5E+F=0$……(2)

$9-3E+F=0$……(3)

解 (1), (2), (3) 得

$$D=\frac{2}{19},\ E=-\frac{47}{19},\ F=-\frac{312}{19},$$

代入 D, E, F 之值再化簡即得所求之方程式爲

$19x^2+19y+2x-47y-312=0$

(d) 通過兩點 $(3,\ 5)$, $(-3,\ 7)$ 其圓心在x軸上.

設 $x^2+y+Dx+Ey+F=0$. 爲所求之圓

因 圓心在 x 軸上所以 $E=0$.

$3^2+5^2+3D+F=0.$

$(-3)^2+7^2-3D+F=0.$

$$\therefore\quad F=\frac{3^2+5^2+3^2+7^2}{2}=3^2+\frac{25+9}{2}=46,$$

$$\therefore\quad D=\frac{+46-9-25}{3}=4$$

故所求之圓之方程式爲

$x^2+y^2+4x-46=0.$

(e) 過 (4, 2), (−6, −2) 且其圓心在 Y 軸上

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ .... (1)

因 (4, 2), (−6, −2) 在此圓上故得

$16+4+4D+2E+F=0$ .... (2)

$36+4-6D-2E+F=0$ .... (3)

圓 (1) 之心爲 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ 且因其在 Y 軸上，

故 $-\frac{D}{2}=0$ 或 $D=0$.

解 (2), (3), 得 $E=5$, $F=-30$.

以 D, E, F 之值代入 (1) 式卽得所求之方程式爲

$x^2+y^2+5y-30=0.$

(f) 過 (5, −3), (0, 6) 兩點且其心在直線 $2x-3y-6=0$ 上.

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ .... (1)

因 (5, −3) 及 (0, 6) 在 (1) 之軌跡上，故得

$25+9+5D-3E+F=0$ .... (2)

$36+6E+F=0$ .... (3)

圓 (1) 之心爲 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$，因其在已知直線上，得

$-D+\frac{3E}{2}-6=0$ .... (4)

解 (2), (3), (4), 得

$D=-38$, $E=-\frac{64}{3}$, $F=92$.

代入 (1) 式且化簡，卽得所求之方程式爲

$3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$.

(g) 其心爲 $(-1,-5)$ 且與 x 軸相切.

解. 設所求之方程式爲

$(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ……………… (1)

因 (1) 之圓心爲 $(-1,-5)$ 故得

$(x+1)^2+(y+5)^2=r^2$ ……………… (2)

因 (1) 切於 x 軸，故得

$(x+1)^2+(0+5)^2=r^2$ 此方程式之判別式必須等於零.

$\therefore\quad \Delta=4-4(26-r^2)=0$ 或 $r^2=25$.

代入 (2) 式且化簡，卽得所求之方程式爲

$x^2+y^2+2x+10y+1=0$.

(h) 通過兩點 $(1,0)$, $(5,0)$，且與 y 軸相切.

設 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

爲所求之圓則

$(1-\alpha)^2+\beta^2=r^2$

$(5-\alpha)^2+\beta^2=r^2$

$(5-\alpha)^2-(1-\alpha)^2=0$

$(5-\alpha)+(1-\alpha)=0$

$\alpha=3$.

因切於 Y 軸所以 $r=\alpha=3$.

$\beta=\pm\sqrt{r^2-(1-\alpha)^2}=\pm\sqrt{9-4}=\pm\sqrt{5}$

故所求之圓方程式爲

$(x-3)^2+(y\pm\sqrt{5})^2=9$.

$x^2-6x+y^2\pm2\sqrt{5}\,y+5=0$.

(i) 通過三點 $(0,1)$, $(5,1)$, $(2,-3)$

設 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 爲所求之圓之方程式

則 $1+E+F=0$ ……………………………… (1)

$25+1+5D+E+F=0$ ……………… (2)

$4+9+2D-3E+F=0$ ……………… (3)

由 (1) (2) 得 $D=-5$.

而 (3) 變爲 $13-10-3E+F=0$.

$3-3E-F=0$ ……………………(4)

(4)+(1) $-4E+2=0$.

$\therefore\ E=\frac{1}{2}$.

$\therefore\ F=-\frac{3}{2}$.

所以 $2x^2+2y^2-10x+y-3=0$.

(j) 以連 $(3,2)$, $(-7,4)$ 兩點之直線爲直徑.

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ……………(1)

(1) 之圓心爲 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$, 成爲 $(3,\ 2)$, $(-7,\ 4)$ 兩點連線之中點，故得

$$-\frac{D}{2}=\frac{3-7}{2},\quad -\frac{E}{2}=\frac{4+2}{2} \text{ 或 } D=4,\ E=-6,$$

因其軌跡過 $(3,\ 2)$ 點, 又得

$9+\ +2E+3D+F=0$, 或 $F=-13$.

以 D, E, F 之值代入 (1) 式，即得所求之方程式爲

$x^2+y^2+4x-6y-13=0$.

(k) 以連二點 $(3,\ -4)$, $(2,\ -5)$ 之直線爲直徑.

設 $(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=r^2$ 爲所求之圓

則 $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=-\frac{9}{2}$.

$r^2=[-3-\frac{5}{2}]^2+(-4+\frac{9}{2})^2=\frac{1}{2}$.

$(x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{2}=0$.

$4x^2+4y^2-5x+9y+26=0$.

(l) 求三角形之外切圓，而此三角形之邊爲 $x-6=0$, $x+2y=6$, $x-2y=8$.

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ……………(1)

依法解各對方程式，求得三角形之角頂爲 $(6,-3)$, $(6,-1)$, $(4,-2)$.

因此三點在圓上，故得

$36+9+6D-3E+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$36+1+6D-E+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$16+4+4D-2E+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

解. (2)，(3) 與 (4) 得

$$D=-\frac{21}{2},\ E=4,\quad F=30.$$

代入 (1) 式且化簡卽得所求之方程式爲

$$2x^2+2y^2-21x+8y+60=0.$$

(m) 通過三點 $(1,-2)$，$(-2,4)$，$(3,-6)$ 幷引用第 98 頁之推論以解釋所得之結果.

$$\text{因}\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

故三點在一直線上. 因而不能求得此圓.

(n) 內切於一三角形而此三角形由 $4x+3y-12=0$，$y-2=0$ $x-10=0$ 三邊合成之.

解. 設所求之方程式爲

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots (1)$

解已知之式求 x 或 y，得

$$x=10,\ y=2,\ y=\frac{12-4x}{3}.$$

各自代入 (1) 式，得

$y^2+Ey+10D+F+100=0 \cdots\cdots (2)$

$x^2+Dx+2E+F+4=0 \cdots\cdots (3)$

$x^2+Dx+E\left(\frac{12-4x}{3}\right)+\left(\frac{12-4x}{3}\right)^2+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

因 (1) 切於三角形之三邊，於是 (2)，(3)，(4) 之各根必須相等故由第 3 頁定理 II，得

$E^2-4(10D+F+100)=0 \cdots\cdots\cdots (5)$

$D^2-4(2E+F+4)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

$$\left(D-\frac{4}{3}E-\frac{32}{3}\right)^2-4\left(1+\frac{16}{9}\right)\left(F+4E+16\right)=0 \cdots\cdots\cdots (7)$$

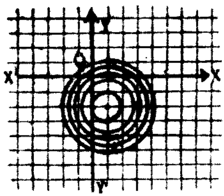
解. (5), (6), (7) 三式，得

$$D=-\frac{86}{6},\quad E=\frac{10}{6},\quad F=\frac{1585}{36}.$$

代入 (1) 式且化簡，卽得所求之方程式爲

$36x^2+36y^2-516y+60y+1585=0.$

4. 試作 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 之軌跡，命 $k=0,2,4,5-2,-4,-8$，幷說明 k 之何值須略去.



解. 解之以求 x $\qquad x=1\pm\sqrt{1-(y^2+4y+k)}$

得 $1-(y^2+4y+k)<0$ 必須略去.

$-(y^2+4y+k-1)<0$

$y^2+4y+k-1>0$

$y-\left(-2\pm\sqrt{4-k+1}\right)>0.$

$y-2\pm\sqrt{5-k}>0$

因 x, y 均爲實數

故 $k>5$ 之數必須略去.

5. 設 D,E 不變，而 F 漸變，則 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡如何?

解. 若 D,E 爲定值而 F 爲變值時，則此方程式之軌跡爲一同心 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ 圓系.

6. 當 k 爲何值，則 $x^2+y^2-4x+2ky+10=0$ 可有軌跡.

解．將已知方程式與

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相比較，得

$D=-4,\ E=2k,\ F=10$ 故 Ⓗ$=16+4k^2-40=4k^2-24$

棄去正因數4則爲 k^2-6.

應用定理 II 於二次式 k^2-6，得

$\triangle=0+4\times16=64>0$，$A=1>0$ 且其根爲 $\pm\sqrt{6}$.

故當 $k>\sqrt{6}$ 或 $k<-\sqrt{6}$ 時則二次式 $k^2-6>0$.

所以當 $k>\sqrt{6}$ 或 $k<-\sqrt{6}$ 時，則此方程式有軌跡.

7. 當(a) F 爲正,(b) F 爲零,(c) F 爲負時,則 k 爲何值,而 $x^2+y^2+kx+F=0$ 可有軌跡.

解. 已知方程式爲下列式之形式.

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

今 $D=k,\ E=0,\ F=F$. 而 Ⓗ $=k^2-4F$.

若此方程有軌跡，則必須 Ⓗ>0.

由第11頁定理 III, 若 F 爲正,當 $k>2\sqrt{F}$ 與 $k<-2\sqrt{F}$ 時，則 Ⓗ>0.

當 F 爲零及 F 爲負時，而 k 不論爲何數可知Ⓗ$=k^2-4F$ 均>0.

8. 上題之方程式，其點圓有若干?

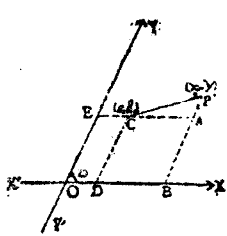
解. 此方程式之軌跡爲點圓時，必須且只須Ⓗ$=k^2-4F=0$.

當 F 爲正時，則 $k=\pm2\sqrt{F}$, 故此式有二點圓.

當 F 爲零時，則 $k=0$. 故此式有一點圓.

當 F 爲負時，而 k 無實數値，故此式無點圓.

9. 設 ω 爲 x,y 兩軸之交角而不等於 $90°$；試求圓之方程式,



解. 設 $C(\alpha,\beta)$ 爲圓心及 $CP=r$ 爲半徑

於是由餘弦定律，得

$\overline{CP}=r$. $CA=x-\alpha$, $AP=y-\beta$. $\angle PAC=\pi-\omega$, 得

$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-2(x-\alpha)(y-\beta)\cos(\pi-\omega)$.

或 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2$.

10. 凡以 5 爲半徑. 其心在(a) x 軸上，(b) y 軸上之任何圓，試求一方程式以表之

解. 設 $(\alpha,0)$ 爲 XX' 上任何一點及 $(0,\beta)$ 爲 YY' 上任何一點.

於是得方程式 $(x-\alpha)^2+y^2-25=0$.

代表半徑爲 5，及其圓心在 XX' 上之任何圓.

又 $x^2+(y-\beta)^2-25=0$ 代表半徑爲5，及其圓心在 YY' 上之任何圓.

11. 當下列三方程式之軌跡爲點圓時，試求 k 可有之值之個數

(a) $x^2+y^2+4kx-2y+5k=0$.

解. 今 Ⓗ $=16k^2+4-20k$.

若此方程式之軌跡爲點圓時則

Ⓗ $=16k^2+4-20k$ 必須爲零.

$\therefore$ $16k^2-20k+4=0$ 或 $k=1$ 與 $k=\frac{1}{4}$ 故 k 可有二值.

(b) $x^2+y^2+4kx-2y-k=0$.

解. 今 Ⓗ $=16k^2+4+4k$.

使 Ⓗ $=0$，得 $4k^2+k+1=0$ 或 $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{8}$.

故 k 無實數值.

(c) $x^2+y^2+4kx-2y+4k=0$.

解. 今 Ⓗ $=16k^2+4-16k$.

使 Ⓗ 等於零，得

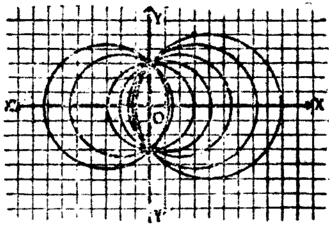
$4k^2-4k+1=0$ 或 $k=\frac{1}{2}$.

故有一值.

12. 設 $k=\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{3},-5,-\frac{1}{5}$; 試作三圓 x^2+y^2+4x-5

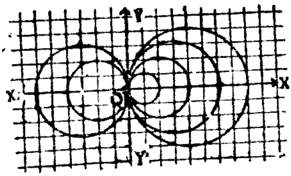
$=0, x^2+y^2-4x-9=0, x^2+y^2+4x-9+k(x^2+y^2-4x-9)=$ 并0，說明 k 有無當略去之值.

解. k 無可略去之值

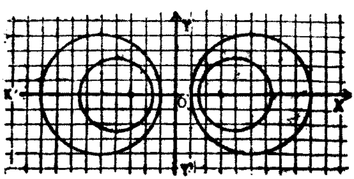


13. 設 k 值與上題同，試作三圓 $x^2+y^2+4x=0$，$x^2+y^2-4x=0$，$x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-4x)=0$，并說明 k 有無當略去之值.

解. k 無可略去之值



14. 設 $k=-3, -\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{3}, -\frac{3}{7}, -1$，試作三圓 $x^2+y^2+4x+9=0$，$x^2+y^2-4x+9=0$，$x^2+y^2+4x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$ 說明 k 之何值當略去.

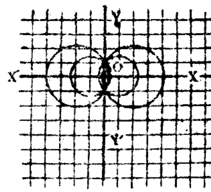


解. $k>5$ 及 $k<\frac{1}{5}$ 之值均須略去.

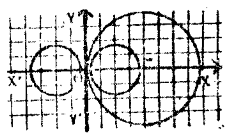
習　　題　(第146－147頁)

1. 試應用定理 VII，以作成下列諸圓系.

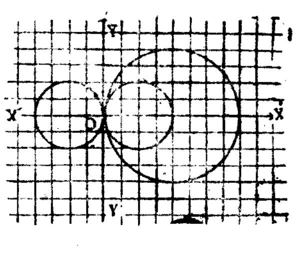
(a) $x^2+y^2+4x-1+k(x^2+y^2-2x-1)=0$



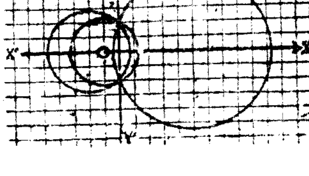
(b) $x^2+y^2+4x+1+k(x^2+y^2-x+1)=0$



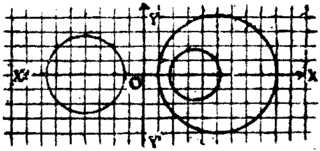
(c) $x^2+y^2+4x+k(x^2+y^2-2x)=0$



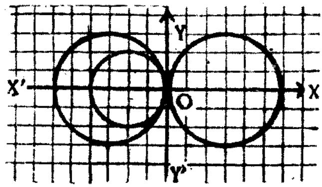
(d) $x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+6x-4)=0$



(e) $x^2+y^2+2x+9+k(x^2+y^2-4x+9)=0$



(f) $x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2+8x)=0$



2. 試求下諸切線之長.

(a) 自 $(5,\ 2)$ 至 $x^2+y^2-4=0$.

解. 設 t 爲切線之長.

於是 $t^2=5^2+2^2-4=25$ $\quad\therefore\quad t=5$.

(b) 自 $(-1,\ 2)$ 至 $x^2+y^2-6x-2y=0$.

解. 設 t 爲切線之長.

$t^2=(-1)^2+2^2-6(-1)-2\times2=7$ $\quad\therefore\quad t^2=7$

(c) 自 $(2,\ 5)$ 至 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0$.

解. 設 t 爲所求切線之長.

化已知之方程式爲下式之形式

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

得 $x^2+y^2+x+2y-\frac{1}{2}=0$.

$$\therefore\quad t^2=2^2+5^2+2+2\times5-\tfrac{1}{2}=\frac{81}{2}$$

$$或\ t=\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

(d) 自 $(1,\ 2)$ 至 $x^2+y^2=25$.

解. 設 t 爲所求切線之長.

由第 144 頁定理 IX，得

$t^2 = 1^2 + 2^2 - 25 = -20$　∴　$t = \sqrt{-20}$.

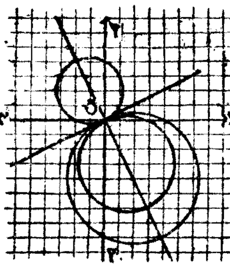
通過（1，2）點之任意直線與已知圓相交於兩點而 t^2 爲自（1，2）至此二交點所成兩線段之積.

故知（1，2）在已知圓內.

3.　試定下列諸圓系之性狀:

(a)　$x^2+y^2+2x-4y+k(x^2+y^2-2x+4y)=0$

圓心在 $2x+y=0$ 而且互相切於原點.

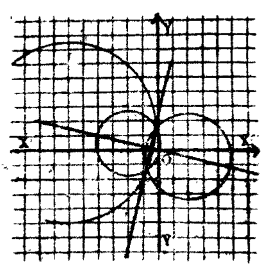


(b)　$x^2+y^2+4x-y+k(x^2+y^2-4x+y-4)=0$

圓心在連 $(-2, -\frac{1}{2})$ $(2, \frac{1}{2})$ 之一直線上且過通

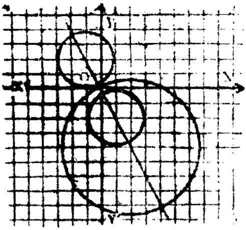
$x^2+y^2+4x-y=0$ 及

$x^2+y^2-4x+y-4=0$ 之二交點.



(c)　$x^2+y^2+2x-4y+1+k(x^2+y^2-2x+4y+1)=0$

圓心在連（−1，2）及（1，−2）之直線上且不相切亦不相



4. 一圓通過兩圓 $x^2+y^2-1=0$，$x^2+y^2+2x=0$. 之交點且通過 (3,2)，求其方程式.

解. 過已知二圓交點之圓系其方程式為

$$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2+2x)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 (1) 過 (3, 2)，故得

$$3^2+2^2-1+k(3^2+2^2+2\times3)=0 \text{ 或 } k=-\frac{12}{19}.$$

以 k 之值代入 (1) 式再化簡，即得所求之方程式為

$$7x^2+7y^2-24x-19=0.$$

5. 一圓通過兩圓 $x^2+y^2-6x=0$，$x^2+y^2-4=0$ 之交點，又通過 (2,−2)，試求其方程式.

解. 過已知二圓交點之圓系其方程式為

$$x^2+y^2-6x+k(x^2+y^2-4)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 (2, −2) 在 (1) 上，故得

$$2^2+(-2)^2-6\times2+k[2^2+(-2)^2-4]=0 \text{ 或 } k=1.$$

代入 (1) 式再化簡即得所求之方程式為

$$x^2+y^2-3x-2=0$$

6. 圓系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 中之一圓，其心在直線 $x-y-4=0$ 上，試求此圓之方程式.

解. 此圓系之心為

$$\left(\frac{2}{1+k},\ \frac{2k}{1+k}\right).$$

因此點在直線 $x-y-4=0$ 上故得

$$\frac{2}{1+k}-\frac{2k}{1+k}-4=0\text{，或 } k=-\frac{1}{3}.$$

代入 k 之值再化簡即得所求之方程式 $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

7. 一圓通過兩圓 $x^2+y^2-4x+2y=0$, $x^2+y^2-2y-4=0$ 之交點其圓心在直線 $2x+4y-1=0$ 上. 試求此圓之方程式.

解. 過已知二圓交點之圓系，其方程式爲

$$x^2+y^2-4x+2y+k(x^2+y^2-2y-4)=0 \text{ 或}$$

$$x^2+y^2-\frac{4}{1+k}x+\frac{2(1-k)}{1+k}y-\frac{4k}{1+k}=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(1) \text{ 之圓心爲 } \left(\frac{2}{1+k},\ -\frac{1-k}{1+k}\right).$$

因此點在已知直線上，故

$$2\times\frac{2}{1+k}-4\times\frac{1-k}{1-k}-1=0 \text{ 或 } k=\frac{1}{3}.$$

以 k 之值代入 (1) 式再化簡，即得所求之方程式爲

$$x^2+y^2-3x+y-1=0.$$

8. 通過兩圓 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2+2x-3=0$ 之交點之諸圓，其半徑俱等於 4，求其方程式

解. 過二已知圓交點之圓系，其方程式爲

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2+2x-3)=0 \text{ 或}$$

$$x^2+y^2+\frac{2k}{1+k}x-\frac{4+3k}{1+k}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{圓 (1) 半徑之平方爲，} r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

$$=\frac{\left(\frac{2k}{1+k}\right)^2+4\times\frac{4+3k}{1-k}}{4} \qquad \therefore\ \frac{\left(\frac{2k}{1+k}\right)^2+4\times\frac{4+3k}{1+k}}{4}=16,$$

$$\frac{4k^2}{(1+k)^2}+\frac{16+12k}{1+k}=64,$$

$$4k^2+(1+k)(16+12k)=64(1+k)^2$$

$$4k^2+12k^2+28k+16=64k^2+128k+64,$$

$$48k^2+100k+48=0,\quad 12k^2+25k+12=0$$

$$\therefore\quad k=-\tfrac{4}{3} \text{ 與 } k=-\tfrac{3}{4}.$$

以 k 之二値各代入 (1) 式再化簡，即得所求之方程式爲

$x^2+y^2-6x-7=0$ 與 $x^2+y^2+8x=0$.

9. 試求 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2+6x-8y=0$ 及 $x^2+y^2+6x-8=0$ 每兩圓之根軸．並証其相交於一點

解. $x^2+y^2-4x=0$ ……………………(1)

$x^2+y^2+6x-8y=0$ ……………………(2)

$x^2+y^2+6x-8=0$ ……………………(3)

(1), (2) 之根軸爲 $6x+4x-8y=0$

即 $5x-4y=0$ ……………………(4)

(2), (3) 之根軸 $y=1$ ……………………(5)

(1), (3) 之根軸 $10x-8=0$

即 $5x-4=0$ ……………………(6)

因 $(\frac{4}{5}, 1)$ 在 (4), (5) 之上亦在 (6) 之上.

故交於一點.

10. 試求 $x^2+y^2-9=0$ $3x^2+3y^2-6x+8y-1=0$ $x^2+y^2+8y=0$，各兩圓之根軸．並証其相交於一點，

解．命 $x^2+y^2-9=0$ 爲 C_1，$3x^2+3y^2-6x+8y-1=0$ 爲 C_2 及 $x^2+y^2+8y=0$ 爲 C_3.

由第 138 頁推論 II：C_1 與 C_2 之根軸爲

$(0+6)x+(0-8)y+(-9+1)=0$ 或

$6x-8y-8=0$ 或 $3x-4y-4=0$;

C_2 與 C_3 之根軸爲

$(-6-0)x+(8-8)y+(-1-0)=0$ 或

$6x+1=0$;

C_1 與 C_3 之根軸爲

$(0-0)x+(0-8)y+(-9-0)=0$ 或 $8y+9=0$.

解 $6x+1=0$ 與 $8y+9=0$ 二式求得其交點爲．

$(-\frac{1}{6}, -\frac{9}{8})$.

代入在 $3x-4y-4=0$ 內，得

$3(-\frac{1}{6})-4(-\frac{9}{8})-4=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}-4=0$

故三根軸相遇於一點 $(-\frac{1}{6}, -\frac{9}{8})$.

11．任意三圓，其各兩圓間之根軸，必相遇於一點，試證明之．

解. 設 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$,

$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 及

$x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0$. 爲任意三圓之方程式.

由第 138 頁推論 II, 各對根軸之方程式爲

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$, ……………………(1)

$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-(F_3)=0$ ……………………(2)

$(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+(F_3-F_1)=0$. ……………………(3)

過(1), (2), 之交點之直線系爲

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)$

$+k[(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+(F_2-F_3)]=0$ ………(4)

當 $k=1$, 則 (4) 變爲 (3)

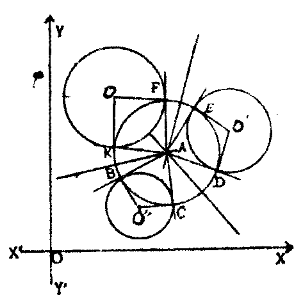
卽 (3) 亦過 (1), (2) 之交點

故任意三圓共各二圓之根軸必相交於一點.

12. 應用前題證明可作一圓與任意三圓成直角.

解. 由前題, 任意三圓共各二圓之根軸相遇於一點如圖所示.

由第 146 頁推論 II, 由此點向圓所作各切線均相等, 且由切點所



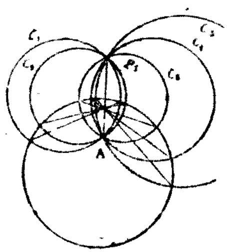
作半徑與切線均垂直.

故以此點爲心及切線之長爲半徑可必作一圓割已知之任意圓於直角.

13 數圓經過兩定點又與一定圓相交之弦必通過一定點,用問題11之法證明之.

解. 由習題 11. 及第 (4) 之推論 C, C_1, C_2, 各二圓之根軸亦相交於一點; C, C_1, C_3 各二圓之根軸亦相交於一點, 又 C C_1, C_4 各二圓之根軸亦相交於一點.

但這些點均相合, 故諸公弦相交於一點.



14 自一圓上任一點 P_1 至他圓之切線之平方與 P_1 至兩圓之根軸之距離成比例.

解. 設 P_1 所在之圓爲

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$ 及其他一圓爲

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於是其根軸爲

$$(D-D_1)x+(E-E_1)y+(F-F_1)=0$$

自 P_1 至 (2) 爲

$$t^2=x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1.$$

因 P_1 在 (1) 上, $x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F_1=0$ 或

$$Dx_1+Ey_1+F=-(x_1^2+y_1^2)$$

化根軸之方程式爲法式, 得

$$\frac{(D-D_1)x+(E-E_1)y+(F-F_1)}{\pm\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}}=0$$

自根軸至 P_1 之距離爲

$$d=\frac{(D-D_1)x_1+(E-E_1)y_1+(F-F_1)}{\pm\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}}$$

$$=\frac{-(x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1)}{\pm\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}}$$

$$=\frac{-t^2}{\pm\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}}$$

$\therefore\quad t^2=\mp d\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}.$

$\therefore\quad \frac{t^2}{d}=\mp\sqrt{(D-D_1)^2+(E-E_1)^2}.$

故 t^2 與 d 成正比.

15. 於定理 III，若 C_1, C_2 爲同心圓，則 (III) 所表之圓系俱同心，試證明之.

解. 若 C_1 與 C_2 爲同心圓，其方程式變爲

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$,

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_2=0$

於是 (III) 變爲

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_2)=0.$

或 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+\frac{F_1+kF_2}{1+k}=0$

此圓系之心爲 $\left(-\frac{D_1}{2},\ -\frac{E_1}{2}\right)$，故所有此圓系之圓俱同心.

16. 於定理 III，若 C_1, C_2 兩圓同心，則 (III) 不能寫成 (VI) 之形式，試證明之.

解. 當 C_1 與 C_2 爲同心圓時，則其方程式變爲

$x^2+y_2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 與

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_2=0$

若 C_1 與 C_2 之心在 x 軸上，則 $E=0$

故其根軸爲 $(D_1-D_1)x+F_1+F_2=0\quad\therefore\quad F_1=F_2$

方程式 (III) 變爲

$x^2+y^2+D_1x+F_1+k(x^2+y^2+D_1x+F_1)=0$ 或

$x^2+y^2+D_1x+F_1=0$，此則 C_1 之心在 x 軸上時之方程式

故在此種條件下方程(III)不能書爲

$x^2+y^2+k'x+F=0$ 之形式.

17. 證明(III)所表之圓系中任意一對圓之根軸,必同於 C_1 與 C_2 之根軸.

解. 設圓系(III)中任一對圓之方程式爲

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k_1(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k_2(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

於是由第 138 頁推論 II,此二圓根軸之方程式爲

$$\left(\frac{D_1+k_2D_2}{1+k_2}-\frac{D_1+k_1D_2}{1+k_1}\right)x+\left(\frac{E_1+k_2E_2}{1+k_2}-\frac{E_1+k_1E_2}{1+k_1}\right)$$

$$+\left(\frac{F_1+k_2F_2}{1+k_2}-\frac{F_1+k_1F_2}{1+k_1}\right)=0.$$

化簡,得

$$(k_1-k_2)(D_1-D_2)x+(k_1-k_2)(E_1-E_2)y+(k_1-k_2)(F_1-F_2)=0$$

以 (k_1-k_2) 除之得

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

故此二圓之根軸爲 C_1 與 C_2 之根軸.

18. 於上11題之三圓俱爲點圓時,如何.

解. 由第 146 頁推論 II,可知二點圓之根軸卽此二點連線之垂直平分線.

故習題 11 變爲任意三點同每兩個連線之垂直平分線相遇於一點.

雜　　題

1. 三角形之邊爲 $x+2y=0$, $3x-2y=6$, $x-y=5$ 試求其外接圓之方程式.

解. 設 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 爲所求圓之方程式

解各對已知方程式,求得此三直線所合成之三角形之角頂之坐

標爲 $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$，$\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$，$(-4, -9)$

因此三點在圓上，故得

$$\frac{9}{4}+\frac{9}{16}+\frac{3}{2}D-\frac{3}{4}E+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{10}{3}D-\frac{5}{3}E+F=0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$16+81-4D-9E+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

解 (1)，(2)，(3) 得

$$D=-\frac{1}{4},\quad E=\frac{139}{12},\quad F=\frac{25}{4}.$$

代入 D, E, F 之值再化簡卽得所求之方程式爲

$$12x^2+12y^2-3x+139y+75=0.$$

2. 試求上題三角形之內切圓方程式

解： 設 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$

爲所求之圓之方程式.

則與三角形之三邊俱相切因而

得 $(2D-E)^2=20F \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$(72+2D+3E)^2=52(4+2D+F) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

及 $(10+D+E)^2=8(25+5D+F) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

解. (1)，(2)，(3) 求 D, E, F 之値代入 (A) 卽得所求之方程式.

3. 由 $x^2+y^2=25$，$x^2+y^2-16x+39=0$ 兩圓之一交點至兩圓心作兩半徑，試求此兩半徑所作之角

解. 前者之半徑爲 5. 而後者之半徑亦爲 5.

連心距爲 8.

$$\cos\theta=\frac{5^2+5^2-8^2}{2\times5\times5}=-\frac{14}{50}=-\frac{7}{25} \quad \therefore\ \theta=\cos^{-1}\left(-\frac{7}{25}\right)$$

4. 由 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 兩圓之一交點，作兩半徑，求此兩半徑之交角，

解. 設 ϕ 爲所求之角

$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 之圓心爲 $\left(-\frac{D_1}{2},\ -\frac{E_1}{2}\right)$及 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1}$；

$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 之圓心爲 $\left(-\frac{D_2}{2}\ \ -\frac{E_2}{2}\right)$及 $r'=\frac{1}{2}\sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2}$.

由第 3 頁公式 (IV)，得

$$AB=\sqrt{\left(-\frac{D_1}{2}+\frac{D_2}{2}\right)^2+\left(-\frac{E_1}{2}+\frac{E_2}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(D_2-D_1)^2}{4}+\frac{(E_2-E_1)^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{D_1^2+D_2^2-2D_1D_2+E_1^2+E_2^2-2E_1E_2}.$$

由餘弦定律，得

$$AB^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\phi$$

代入 AB，r,r' 之値，得

$$\frac{1}{4}(D_1^2+D_2^2-2D_1D_2+E_1^2+E_2^2-2E_1E_2)$$
$$=\frac{1}{4}(D_1^2+E_1^2-4F_1+D_2^2+E_2^2-4F_2).$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{(D_1^2+E_1^2-4F_1)(D_2^2+E_2^2-4F_2)}\cos\phi$$

化簡 $-\frac{1}{2}\sqrt{(D_1^2+E_1^2-4F_1)(D_2^2+E_2^2-4F_2)}\cos\phi$
$=\frac{1}{2}(D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2)$，或

$$\cos\phi=\frac{D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2}{\sqrt{(D_1^2+E_1^2-4F_1)(D_2^2+E_2^2-4F_2)}}$$

$$\therefore\quad \phi=\cos^{-1}\left(\frac{D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2}{\sqrt{(D_1^2+E_1^2-4F_1)(D_2^2+E_2^2-4F_2)}}\right)$$

5. 當上題兩半徑之交角爲直角時，其必要之要件如何.

解. 於前題，若 ϕ 爲一直角，則 $\cos\phi=0$

$$\therefore\quad \frac{D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2}{\sqrt{(D_1^2+E_1^2-4F_1)(D_2^2+E_2^2-4F_2)}}=0$$

$$\therefore\quad D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2=0$$

6. 自圓上任意一點至其直徑之兩端，作兩直線，試證明此兩直線之交角必爲直角.

解．以半圓之心爲原點及其直徑爲 x 軸．

於是　此圓之方程式爲 $x^2+y^2=a^2$

設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲半圓周上任意一定點．

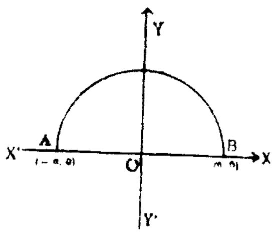
由第31頁公式（IV），得

$AP_1=\sqrt{(-a-x_1)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{a^2+2ax_1+x_1^2+y_1^2}$

$BP_1=\sqrt{(a-x_1)^2+(0-y_1)^2}=\sqrt{a^2-2ax_1+x_1^2+y_1^2}$.

因 $P_1(x_1, y_1)$ 在此圓上，故得

$x_1^2+y_1^2=a^2$.



以 a^2 代 $x_1^2+y_1^2$，得

$AP_1=\sqrt{2a^2+2ax_1}$ 及 $BP_1=\sqrt{2a^2-2ax_1}$.

由餘弦定律，得

$(2a)^2=2a^2+2ax_1+2a^2-2ax_1-2\sqrt{2a^2+2ax_1}$

$\quad\times\sqrt{2a^2-2ax_1}\cos\angle AP_1B$

$\therefore\quad 2\sqrt{2a^2+2ax_1}\times\sqrt{2a^2-2ax_1}\cos\angle AP_1B=0$.

$\therefore\quad \cos\angle AP_1B=0$.

$\therefore\quad \angle AP_1B=\dfrac{\pi}{2}$.

7．自圓上任意一點作直徑之垂線，分直徑爲兩段，試證明此垂線爲直徑兩段之比例中項．

解．以圓心爲原點及直徑爲 x 軸，

於是　此圓之方程式爲 $x^2+y^2=a^2$.

設 $P_1(x_1, y_1)$ 爲圓上任意一點且作 $P_1C\perp AB$.

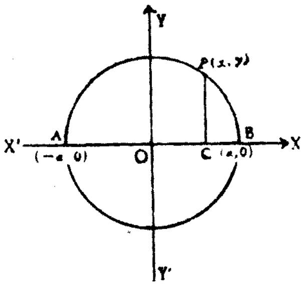
於是 $AC=a+x_1$, $CB=a-x_1$, $P_1C=y_1$.

因 P_1 在此圓上，故得

$x_1^2+y_1^2=a^2$，或 $y_1^2=a^2-x_1^2$.

$\therefore\quad \overline{P_1C}^2=y_1^2=a^2-x_1^2=(a+x_1)(a-x_1)=AC\times CB$.

故 P_1C 爲 AC 與 CB 之比例中項.



8. 設 ω 爲 x, y 兩軸所作之角，則方程式 $x^2+2\cos\omega\, xy+y^2+Dx+Ey+F=0$ 之軌跡爲一圓，試證明之.

解. 由第 136 頁習題 9，於斜坐標軸. 圓之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega=r^2,$$ ω 乃二坐標軸所成之角.

化此方程式，得

$$x^2+2\cos\omega\, xy+y^2+(-2\alpha-2\beta\cos\omega)x+(-2\beta-2\alpha\cos\omega)y$$
$$+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\omega-r^2=0$$

使 $(-2\alpha-2\beta\cos\omega)=D$, $(-2\beta-2\alpha\cos\omega)=E$,

及 $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\omega-r^2=F$，則得

$$x^2+2\cos\omega\, xy+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$\therefore$ 已知之方程式代表一圓.

9. 已知一圓 C: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 及一直線 L: $Ax+By+C=0$ 通過圓 C: 之心，作一直線 L'，與 L 垂直，試證明凡心作直線 L' 上之圓，俱包括於方程式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ 之內.

解. 方程 $Bx-Ay+k'=0$ 代表垂直 L 之一切直線 C: 之圓心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 在直線 $Bx-Ay+k'=0$ 上

則 $-\frac{BD}{2}+\frac{AE}{2}+k'=0$，或 $k'=\frac{BD-AE}{2}$

代入 k 之値，得

$$Bx-Ay+\frac{BD-AE}{2}=0$$

曲線系之方程式可書爲下式

$$x^2+y^2+(D+kA)x+(E+kB)y+F+kC=0$$

由第 131 頁定理 1，若此方程式之判別式爲正，且當 k 爲變常數時則此式卽表一圓系，

此圓系之心爲 $\left(-\frac{D+kA}{2},-\frac{E+kB}{2}\right)$

以 $-\frac{D+kA}{2}$ 代 x 及 $-\frac{E+kB}{2}$ 代 y 於方程式

$Bx-Ay-\frac{BD-AE}{2}=0$ 內，得

$$-\frac{BD+kAB}{2}+\frac{AE+kAB}{2}+\frac{BD-AE}{2}=0$$

或 $0=0$

故圓系 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ 中之諸圓其心俱在直線 $Bx-Ay+\frac{BD+AE}{2}=0$ 上

10. 由上題諸圓，求其任意兩圓之根軸.

解. 設 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k_1(Ax+By+C)=0$ 及

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F-k_2(Ax+By+C)=0$$

爲前題圓系中之任意二圓.

由第 138 頁推論 II. 得其根軸之方程式爲

$$[(D+k_1A)-(D+k_2A)]x+[(E+k_1B)-(E+k_2B)]y$$
$$+[(F+k_1C)-(F+k_2C)]=0.$$

化簡， 得 $Ax+By+C=0$.

11. 試以幾何定理解釋第 9 題第三方程式內 k 之意義.

解. 若 k 爲變常數則代表一圓系經過

$x^2-y^2+Dx+Ey+F=0$ 及 $Ax+By+C=0$

之交點而其圓心則在垂直於

$Ax+By+C=0$ 之一直線上.

12. 設於第 9 題 (a) Y 軸與 L 符合，X 軸通過 C_1 之心. (b) C_1 之心與原點符合，且 Y 軸平行 L，則其第三方程式變為如何形式.

解. (a) 若 YY' 為 L 線，則其方程式變為 $x=0$；且 XX' 過 C_1 圓之心，則 $E=0$

故方程式變為 $x^2+y^2+(D+k)x+F=0$.

(b) 若原點為 C_1 之心，且 YY' 平行 L，則 $D=0$，$E=0$，

及 $\frac{1}{A}=\frac{0}{B}$ 或 $B=0$.

故方程式變為 $x^2+y^2+kAx+kC+F=0$.

13. 當 (a) $r<a$，(b) $r=a$，(c) $r>a$ 時，則圓系 $x^2+y^2-r^2+k(x-a)=0$ 應如何作法.

(a) 當 $r<a$ 　以 $\left(-\frac{k}{2},0\right)$ 為圓心.

以 $\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4ka+4r^2}$ 為半徑作圓即得.

(b) 當 $r=a$ 　以 $\left(-\frac{k}{2},0\right)$ 為圓心.

以 $(k+2r)$ 為半徑

作圓卽得

(c) 當 $r>a$. 　以 $\left(-\frac{k}{2},0\right)$ 為圓心. 以 $\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4ka+4r^2}$

為半徑作圓即得.

14. 試證明 (III) 之判別式. 為

$$\frac{r_2^2k^2-(d^2+r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}$$

但式中 r_1，r_2 為 C_1、C_2 之半徑，d 為二圓連心線之長.

解. 方程式 (III) 可書為

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+\frac{E_1+kE_2}{1+k}y+\frac{F_1+kF_2}{1+k}=0.$$

(III) 之判別式為

$$=D^2+E^2-4F=\left(\frac{D_1+kD_2}{1+k}\right)^2+\left(\frac{E_1+kE_2}{1+k}\right)^2$$

$$-4\times\frac{F_1+kE_2}{1+k}=\frac{D_1^2+2kD_1D_2+k^2D_2^2+E_1^2+2kE_1E_2+k^2E_2^2}{(1+k)^2}$$

$$\frac{-4F_1-4kF_2-4kF_1-4k^2F_2}{(1+k)^2}$$

$$=\frac{k^2(D_2^2+E_2^2-4F_2)-(-2D_1D_2-2E_1E_2+4F_1+4F_2)k+D_1^2+E_1^2-4F_1}{(1+k)^2}$$

$$=\frac{k^2(D_2^2+E_2^2-4F_2)-[(D_1^2+D_2^2+E_1^2+E_2^2-2D_1D_2-2E_1E_2)}{(1+k)^2}$$

$$\frac{-(D_1^2+E_1^2-4F_1)-(D_2^2+E_2^2-4F_2)]k+D_1^2+E_1^2-4F_1}{(1+k)^2}$$

但 $r_1^2=\dfrac{D_1^2+E_1^2-4F_1}{4}$，$r_2^2=\dfrac{D_2^2+E_2^2-4F_2}{4}$，

及 $d^2=\left(\dfrac{D_1-D_2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{E_1-E_2}{2}\right)^2$

$$=\tfrac{1}{4}(D_1^2+D_2^2+E_1^2+E_2^2-2D_1D_2-\ E_1E_2).$$

$$\therefore \text{Ⓗ}=\frac{4k^2r_2^2-4(d^2-r_1^2-r_2^2)k+4r_1^2}{(1+k)^2}$$

$$=\frac{4[k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2]}{(1+k)^2}$$

正因數 4 可棄去.

$$\therefore \text{Ⓗ}=\frac{k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}.$$

15. 試由上題證明若圓系(III)無點圓時，則 C_1，C_2 兩圓則互相交；有一點圓，則兩圓互相切，有兩點圓，則兩圓不相遇.

解. 於 (III) 式，若無點圓時則 k 不論爲何實數而

$$\frac{k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}>0 \text{ 或}$$

$$k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2>0.$$

應用第 11 頁定理 III 之逆定理. 於此二次式，得

$A=r_2^2>0$，　$\triangle=(d^2-r_1^2-r_2^2)^2-4r_1^2r_2^2<0$，或

$(d_1-r_1^2-r_2^2)^2<4r_1^2r_2^2$.

$\therefore\ d^2-r_1^2-r_2^2<r_1r_2$ 或 $d^2<r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$.

∴ $d^2<(r_1+r_2)^2$. ∴ $d<r_1+r_2$.

故 C_1 與 C_2 相交.

若有一點圓於 (III) 式，則 $\dfrac{k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}=0$

或 $k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2=0$ 式內之 k 值應相等.

由第 3 頁定理 II. 得

$\triangle=(d^2-r_1^2-r_2^2)^2-4r_1^2r_2^2=0$.

∴ $(d^2-r_1^2-r_2^2)^2=4r_1^2r_2^2$.

$d^2-r_1^2-r_2^2=2r_1r_2$

$d^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$

$d^2=(r_1+r_2)^2$.

∴ $d=r_1+r_2$.

故二圓相切.

若有二點圓於 (III) 式，則

$$\frac{k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2}{(1+k)^2}=0 \text{ 或}$$

$k^2r_2^2-(d^2-r_1^2-r_2^2)k+r_1^2=0$ 式內之 k 應有二如此之值.
換言之即 k 有二不同之根.

由第 3 頁定理 II，得

$\triangle=(d^2-r_1^2-r_2^2)^2-4r_1^2r_2^2>0$，或

$(d^2-r_1^2-r_2^2)^2>4r_1^2r_2^2$.

$d^2-r_1^2-r_2^2>2r_1r_2$

$d^2>r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$

$d^2>(r_1+r_2)^2$.

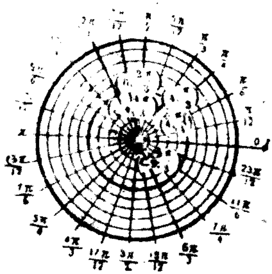
∴ $d>r_1+r_2$.

故 C_1 與 C_2 不相交.

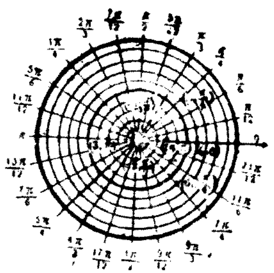
第六章

習題 (150 頁)

1. 試作 $\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-2,\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-4,\frac{4\pi}{3}\right)$ $(5,\pi)$.



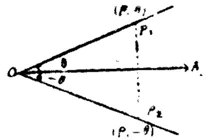
2. 試作 $\left(6,\pm\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-2,\pm\frac{\pi}{2}\right)$, $(3,\pi)$, $(-4,\pi)$, $(6,0)$, $(-6,0)$



3. 證明兩點 (ρ,θ), $(\rho,-\theta)$, 對於極軸爲對稱.

解. 連 P_1 與 P_2.

設與極軸之交點爲 B，則



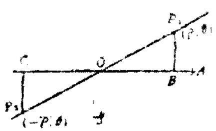
由平面幾何學

$\triangle OBP_1 \cong \triangle OBP_2$

$\therefore\quad BP_1 = BP_2$，$P_1P_2 \perp OA$.

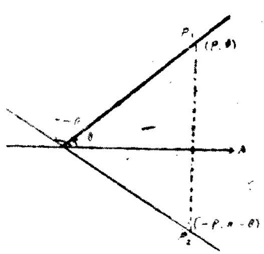
故點 (ρ, θ) 與 $(\rho, -\theta)$ 對於極軸 OA 爲對稱.

4. 證明兩點 (ρ,θ)，$(-\rho,\theta)$，對於極點對稱.



解. 因 $OP_1 = OP_2 = |\rho|$ 且 P_1OP_2 爲一直線故由幾何學，點 (ρ,θ) 與 $(-\rho, \theta)$ 對於極點 O 爲對稱.

5. 證明兩點 $(-\rho, \pi-\theta)$，(ρ,θ)，對於極軸對稱.



解. 連接 P_1 與 P_2，設與極軸之交點爲 B. 由平面幾何學，$\triangle OBP_1 \cong \triangle OBP_2$.

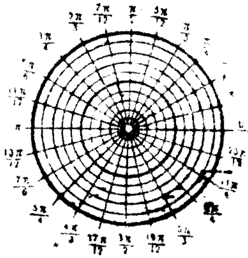
$\therefore\quad BP_1 = BP_2$，及 $P_1P_2 \perp OA$

故 $(-\rho, \pi-\theta)$ 與 (ρ,θ) 對於極軸 OA 爲對稱.

習　　題　　(153 − 154 頁)

討論下列各方程式之軌跡.

1. $\rho=10$, $\theta=\tan^{-1}1$.



解. $\rho=10$ 之軌跡截極軸於右於左均爲 10 單位. 此軌跡對於極與極點二者均爲對稱.

此軌跡爲一封閉曲線.

θ 無可除掉之值.

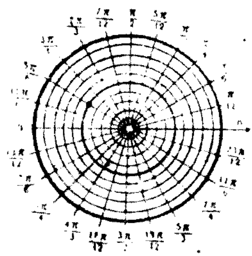
$\theta=\tan^{-1}1$ 之軌跡過極點.

此軌跡對於極點爲對稱.

此軌跡於二方向延伸至無限遠.

其圖則前者爲一圓後者爲一直線而圖上之點爲其交點

2. $\rho=5$. $\theta=\frac{5\pi}{6}$.



討論與第一題相同,

其圖則前者爲一圓

後者爲一直線

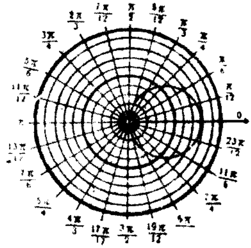
而圖上之點爲

其交點.

3. $\rho=16\cos\theta$.

解. 因 $\theta=0$, 則 $\rho=16$ 又 $\theta=\pi$, 則 $\rho=-16$,

故此曲線截極軸之右於 16 單位處.



因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$

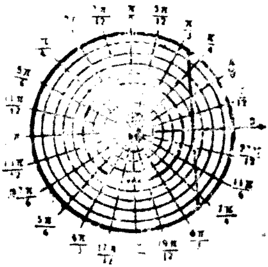
故此曲線對極軸對稱.

因 $\cos\theta$ 永遠不能使 ρ 增至無限大.

故此曲線爲一封閉曲線

θ 無可除掉之值.

4. $\rho\cos\theta=6$



討論. 1. $\theta=0$, $\rho=6$ 且. $\theta=\pi$ $\rho=-6$

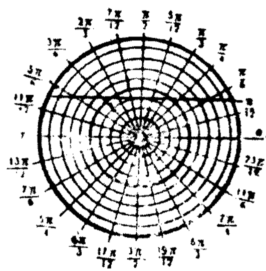
故此曲線交極軸於極之右 6 單位之處

2. 因 $\cos\theta=\cos(-\theta)$ 故對於極軸爲對稱.

3. ρ 當 $\cos\theta=0$ 或 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 而以兩方向增至無限遠.

4. ρ 無虛值.

5. $\rho\sin\theta=4$.



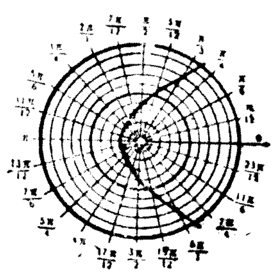
解. 因 $\theta=0$ 或 π 則 $\rho=\frac{4}{0}$.

故此曲線在無限遠之處截極軸.

θ 無可除掉之值.

此軌跡於二方向延伸至無限遠.

6. $\rho=\frac{4}{1-\cos\theta}$.



討論 1. $\theta=0$, $\rho=\infty$; $\theta=\pi$, $\rho=2$.

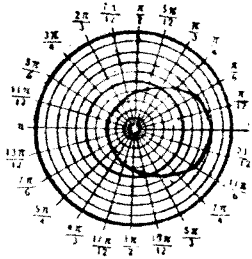
故此曲線交極軸於極之左 2 單位之處.

2. 與習題 4 之 (2) 同.

3. ρ 當 $\theta=0$ 而以此方向增至無限遠.

4. ρ 無虛值.

7. $\rho=\dfrac{8}{2-\cos\theta}$



解. 因 $\theta=0$，則 $\rho=8$. 又 $\theta=\pi$,則 $\rho=\frac{8}{3}$.

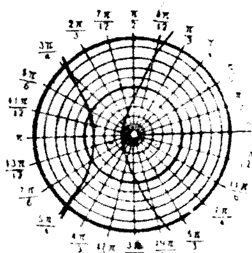
故此曲線截極軸之右於 8 單位處，而截極軸之左於 $\frac{8}{3}$ 單位處

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$. 故此曲線對於極軸爲對稱，

此曲線爲一封閉曲線，因 $\cos\theta<2$ 故也.

θ 無值能使 ρ 爲虛值.

8. $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$



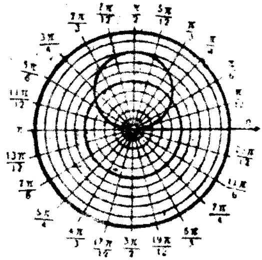
討論 1. $\theta=0$，$\rho=-8$ 且 $\theta=\pi$，$\rho=\frac{8}{3}$. 故此曲線截極軸於極之左 8 或 $\frac{8}{3}$ 單位之處.

2. 與習題 4 之 (2) 同.

3. ρ 當 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 而依其方向延無至限遠，

4. ρ 無虛值

9. $\rho=a\sin\theta$.



解. 因 $\theta=0$，則 $\rho=0$ 且 $\theta=\pi$，ρ 仍 $=0$.

故此曲線過極點

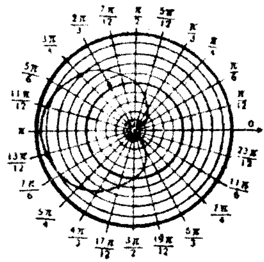
因 $\sin\theta$ 永不能使 ρ 爲無限大，故此曲線爲一封閉曲線.

θ 無值能使 ρ 爲虛值.

10. $\rho=a(1-\cos\theta)$

討論 1. $\theta=0$, $\rho=0$, $\theta=\pi$ $\rho=2a$.

故此曲線交極軸於極點或其左 $2a$ 單位之處.



2. 與習題 4 之 (2) 相同.

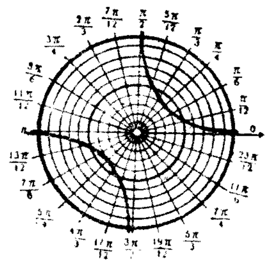
3. θ 無値可使 ρ 增至無限遠 故此曲線爲封閉曲線.

4. ρ 無虛值

11. $\rho^2 \sin 2\theta=16$.

解. 因 $\theta=0$, 則 $\rho^2=\dfrac{16}{0}$ 又 $\theta=\pi$,

則 $\rho^2=\dfrac{16}{0}$



故此曲線不截極軸.

當 2θ 在第三象限或第四限象時.

即當 $2\pi>2\theta>\pi$ 時, $\sin 2\theta$ 爲負.

故 θ 在 $\dfrac{\pi}{2}$ 與 π 之間之一切值皆須除掉.

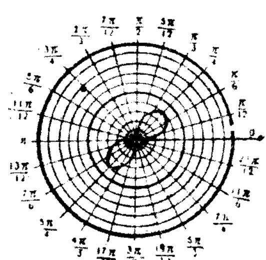
此曲線對於極點爲對稱因 $(-\rho)^2=\rho^2$ 故也.

此曲線於二方向延伸至無限遠.

12. $\rho^2=10\sin^2\theta$

討論 1. $\theta=0$, $\rho=0$, $\theta=\pi$, $\rho=0$ 故此曲線過極點.

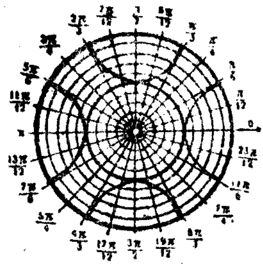
2. 當 2θ 在 2π 與 π 之間時 則 $\sin 2\theta$ 爲負故在 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 之値必須除掉.



3 因 $(-\rho)^2=\rho^2$ 故此曲線對於極點爲對稱.

4. 與習題 10 之 (3) 同.

13 $\rho^2\cos^2 2\theta = a^2$



討論 1. $\theta=0$ $\rho=\pm a$, $\theta=\pi$, $\rho=\pm a$, 故此曲交極軸於極之左或右於 a 單位之處。

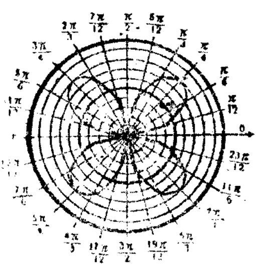
2. 對於極與極軸均對稱.

3. ρ 當 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ 時而依其方向增至無限遠.

4. ρ 無虛值.

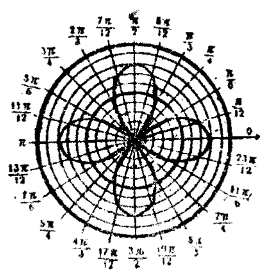
14 $\rho=a\sin 2\theta$

討論與第 9 題同.



$\rho=a\cos 2\theta$.

討論與第 3 題同.



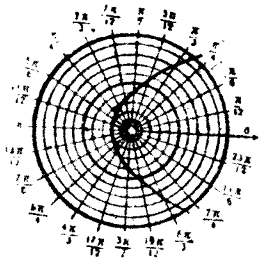
15. $\rho=\dfrac{8}{1-e\cos\theta}$

討論 1. $\theta=0$, $\rho=\dfrac{8}{1-e}$, $\theta=\pi$, $\rho=\dfrac{8}{1+e}$ 故此曲線交極軸於極之左在 $\dfrac{8}{1+e}$ 之處右在 $\dfrac{8}{1-e}$ 之處.

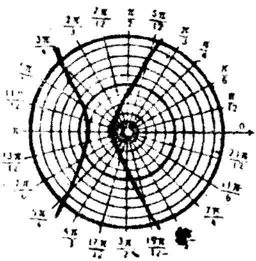
2. 對於極軸對稱.

3. ρ 當 $\theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{e}$ 而依其方向增至無限遠.

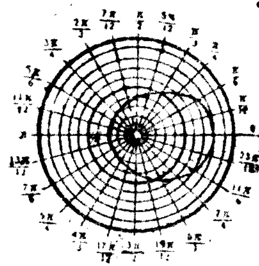
4. ρ 無虛值.



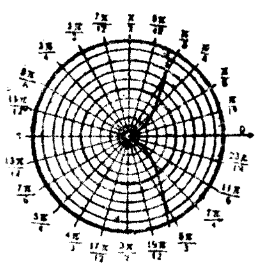
$e=2$.



$e=\frac{3}{2}$.



16. $\rho\cos\theta=a\sin^2\theta$.



解. 因 $\theta=0$, $\rho=0$, 及 $\theta=\pi$, $\rho=0$

故此曲線截極軸於極點.

因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 及

$\sin^2(-\theta)=\sin^2\theta$.

故此曲線對於極軸爲對稱

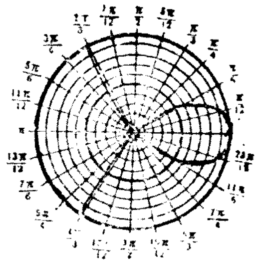
當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta=0$, $\rho=\infty$. 時則此曲線於二方向延伸至無限遠.

θ 無可除掉之值.

17. $\rho\cos\theta=a\cos2\theta$.

解 因 $\theta=0$, $\rho=a$, 及 $\theta=\pi$, $\rho=-a$.

故此曲線截極軸之右爲 a 單位.



此曲線對於極軸爲對稱，因 $\cos(-\theta)=\cos\theta$,

$\cos(-2\theta)=\cos 2\theta$ 故也.

θ 無可除掉之值.

此曲線於二方向延伸至無限遠.

18. $\rho=a(4+b\cos\theta)$

討論 1. $\theta=0$, $\rho=a(4+b)$, $\theta=\pi$, $\rho=a(4-b)$ 故此曲交極軸於極之右在 $a(4+b)$ 之處，而左在 $a(4-b)$ 之處.

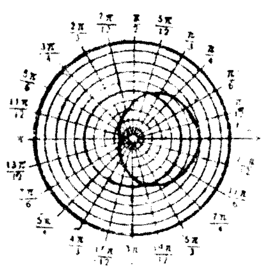
2. 對於極軸爲對稱，

3. 爲一封閉曲線；

4. ρ 無過值.

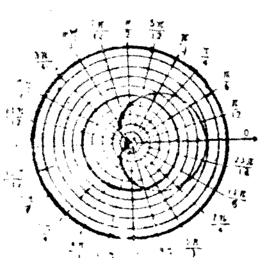
$a=1$,

$b=3$.

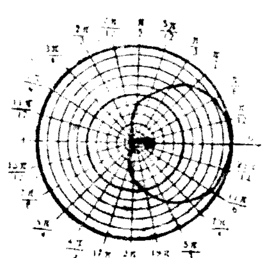


$a=1$,

$b=4$.

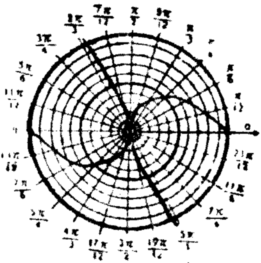


$a=1$, $b=6$.



19. $\rho=\dfrac{10}{1+\tan\theta}$.

討論 1. $\theta=0$, $\rho=10$, $\theta=\pi$, $\rho=10$ 故此曲線交極軸於極之左右各 10 單位之處.



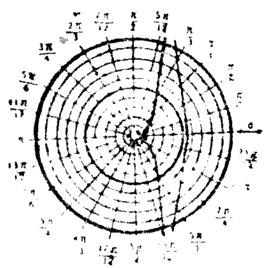
2. 對極與極軸均不對稱.

3. ρ 當 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 時而依其方向延伸至無限遠,

4. ρ 無虛值.

20. $\rho=a\sec\theta\pm b$

$a>b$,



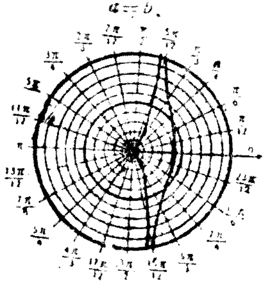
討論 1. $\theta=0$, $\rho=a\pm b$, $\theta=\pi$, $\rho=-a\pm b$. 故此曲線交極軸於極之右爲 $a\pm b$ 左爲 $a\pm b$ 之處,

2. 對極軸對稱,

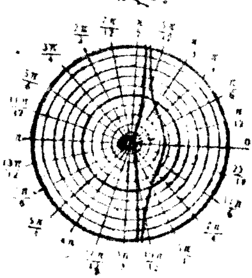
3. ρ 當 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 而依其方向增至無限遠.

4. ρ 無虛值.

$a=b$,



$a<b$,

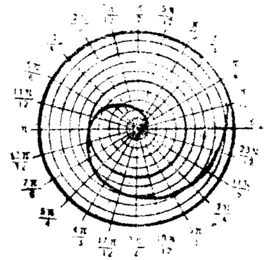


21. $\rho=a\theta$.

解. 在極軸上之截線爲 $0, \pi a, 2\pi a, 3\pi a, 4\pi a$………, $-\pi a$, $-2\pi a$, $-3\pi a$, $-4\pi a$, ………

此曲線伸張至無限遠

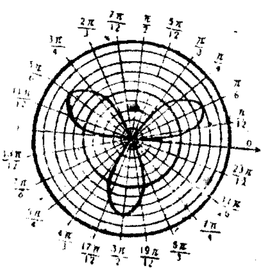
θ 無可除掉之值.

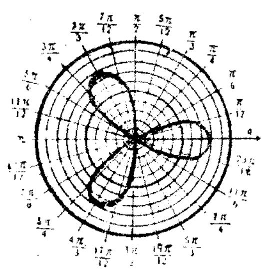


$\rho = a\cos\ 3\theta$

22. $\rho = a\sin\ 3\theta$

討論與習題 14 同.

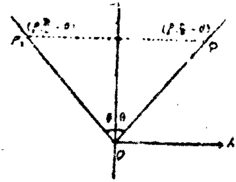




23. 在一方程式內以 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 代 $\frac{\pi}{2}+\theta$，若方程式僅變其形式而不變其值，則其軌跡必對於直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱，試証明之.

解. $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之軌跡爲一過極點且垂直極軸之直線.

因 $P(\rho, \frac{\pi}{2}-\theta)$ 與 $P_1(\rho, \frac{\pi}{2}+\theta)$ 爲一方程式之軌跡上任一點，且由圖 P 與 P_1 對於直線 $\theta=$ 爲對稱，故此軌跡對於直線 $\theta=$ 爲對稱.



24. 用第 23 題以試 4,5,10,11,1 諸題之軌跡，是否對稱.

解. 於已知方程式內以$\frac{\pi}{2}-\theta$與$\frac{\pi}{2}+\theta$，得$\rho\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=4$與

$\rho\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=4$ 或 $\rho\cos\theta=4$，與 $\rho\cos\theta=4$.

故此軌跡對於直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$為對稱.

又 $\rho^2=16\sin(\pi-2\theta)$. 與 $\rho^2=16\sin(\pi+2\theta)$

或 $\rho^2=16\sin 2\theta$. 與 $\rho^2=16\sin(-2\theta)$

$\rho^2=16\sin 2\theta$. 與 $\rho^2=-16\sin 2\theta$.

故此軌跡對於直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$不對稱.

習　　題　（第157頁）

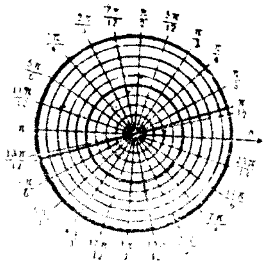
1. 改下列諸方程式爲極坐標，并作其軌跡.

(a) $x-3y=0$

解. 於已知方程式內以 $\rho\cos\theta$ 代 x，$\rho\sin\theta$ 代 y，得

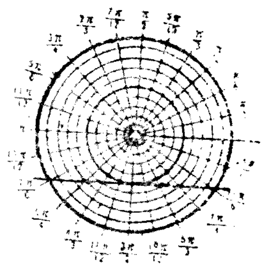
$\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta=0$.

$\tan\theta=\frac{1}{3}$. $\therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{1}{3}$.



(b) $y+5=0$

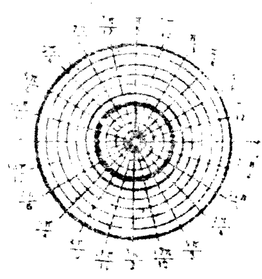
解. 將 $y=\rho\sin\theta$ 之 y 值代入已知方程式內得 $\rho\sin\theta+5=0$.



$\therefore\quad \rho=-\frac{5}{\sin\theta}$.

(c) $x^2+y^2=16$

解. 將 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 之值代入已知方程式內 得



$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=16$ 或

$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=16$

或 $\rho^2=16\quad\therefore\quad\rho=\pm4$.

(d) $x^2+y^2-ax=0$

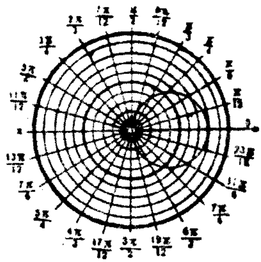
解. 於已知方程式內以 $\rho\cos\theta$ 代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-a\rho\cos\theta=0$, 或

$\rho^2-a\rho\cos\theta=0$.

$\therefore\quad \rho(\rho-a\cos\theta)=0$.

$\therefore\quad \rho=a\cos\theta$.



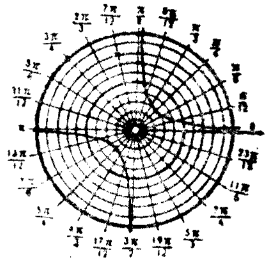
(e) $2xy=7$,

解. 於已知方程式內以 $\rho\cos\theta$ 代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$2\rho^2\sin\theta\cos\theta=7$.

但 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

∴ $\rho^2\sin 2\theta=7$



(f) $x^2-y^2=a^2$.

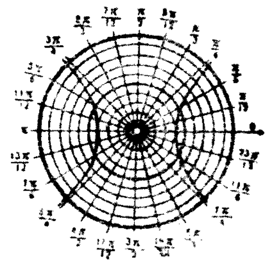
解. 已知方程式內，以 $\rho\cos\theta$ 代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=a^2$ 或

$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)a^2$.

但 $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$

∴ $\rho^2\cos 2\theta=a^2$



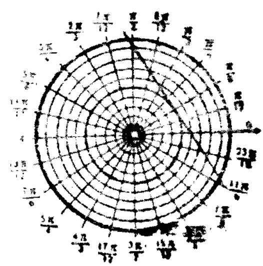
(g) $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$.

解. 於已知方程式內以 $\rho\cos\theta$ 代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$\rho\cos\theta\cos\omega+\rho\sin\theta\sin\omega-p=0$ 或

$\rho(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)$

$p=5$, $\omega=$[illegible]

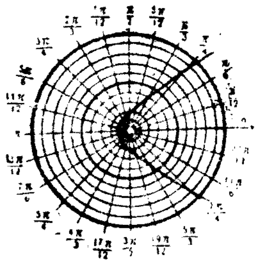


$p=0$.

因 $\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega=\cos(\theta-\omega)$.

$\therefore\quad \rho\cos(\omega-\theta)-p=0$.

$e=1$.



(h) $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$

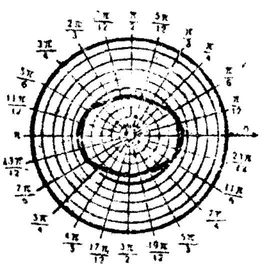
解. 於已知方程式內以 $\rho\cos\theta$ 代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$\rho^2(1-e^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2e^2p\rho\cos\theta-e^2p^2=0$

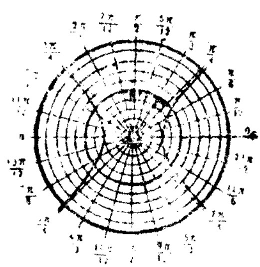
化簡, $\rho^2-\rho^2e^2\cos^2\theta-2\rho e^2p\cos\theta-e^2p^2=0$

解此式求 ρ, 得 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$.

$e>1$.



$e<1$.



(i) $2xy+4y^2-8x+9=0$

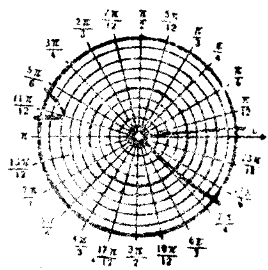
解. 於已知方程式內式 $\rho\cos\theta$代 x, $\rho\sin\theta$ 代 y, 得

$2\rho^2\cos\theta\sin\theta+4\rho^2\sin^2\theta-8\rho\cos\theta+9=0$

因 $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

$\therefore\quad \rho^2\sin 2\theta+4\rho^2\sin^2\theta-8\rho\cos\theta+9=0$

或 $\rho^2(\sin 2\theta+4\sin^2\theta)-8\rho\cos\theta+9=0$



. 試將 153 頁問題中自 1 至 21 諸方程式, 改爲矩坐標.

(1) $\rho=10$, $\theta=\tan^{-1}1$.

解. 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代 ρ，$\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 代 θ，則已知之方程式變為

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=10;\quad \tan^{-1}\frac{x}{y}=\tan^{-1}1.$$

$$x^2+y^2=100;\quad \tan\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x}\text{ 或 }1=\frac{y}{x}.$$

$$\text{或 } x-y=0$$

(2) $\rho=5$，$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

解. 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代 ρ；$\tan^{-1}\frac{x}{y}$ 代 θ，則已知之方程式變為

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=5;\quad \tan^{-1}\frac{x}{y}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=25;\quad \tan\frac{5\pi}{6}=\frac{x}{y}\text{ 或 }-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{y}{x}$$

$$\text{或}\quad x+\sqrt{3}\,y=0.$$

(3) $\rho=16\cos\theta$.

解. 於已知方程式內以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代 ρ，及 $\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 代 $\cos\theta$，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{16x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

化簡，$x^2+y^2-16x=0$.

(4) $\rho\cos\theta=6$.

解. 於已知之方程式內以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代 ρ 及 $\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 代 $\cos\theta$

得 $\pm\sqrt{x^2+y^2}\times\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}=6$ 或 $x=6$.

(5) $\rho\sin\theta=4$.

解. 於已知之方程式內，以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代 ρ 及 $\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 代 $\sin\theta$，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}\times\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}=4\text{ 或 }y=4.$$

(6) $\rho=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$.

解. 於已知之方程式內，將 ρ 及 $\cos\theta$ 之值代入之則得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4}{1-\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$$

化簡 $\pm\sqrt{x^2+y^2}-x=4$.

平方. $x^2+y^2=x^2+8x+16$, 或 $y^2=8(x+2)$.

(7) $\rho=\dfrac{8}{2-\cos\theta}$.

解. 將 ρ 及 $\cos\theta$ 之值代入已知方程式內，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{8}{2-\dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$$

化簡，$\pm2\sqrt{x^2+y^2}-x=8$，移項，$\pm2\sqrt{x^2+y^2}=8+x$

平方，$4(x^2+y^2)=x^2+16x+64$.

移項，$3x^2+4y^2-16x-64=0$.

(8) $\rho=\dfrac{8}{1-2\cos\theta}$.

解. 將 ρ 及 $\cos\theta$ 之值代入已知方程式內，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{8}{1-\dfrac{2x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$$

化簡，$\pm\sqrt{x^2+y^2}-2x=8$,

移項，$\pm\sqrt{x^2+y^2}=2x+8$.

平方，$x^2+y^2=4x^2+32x+64$.

移項，$3x^2-y^2+32x+64=0$.

(9) $\rho=a\sin\theta$.

解. ρ 及 $\sin\theta$ 之值代入已知方程式內，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ay}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2+y^2=ay, \text{ 或 } x^2+y^2-ay=0.$$

(10) $\rho=a(1-\cos\theta)$.

解、ρ 及 $\cos\theta$ 之值代入在已知方程式內，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a\left(1+\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a-\frac{ax}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2+y^2=\pm a\sqrt{x^2+y^2}-ax,$$

$$x^2+y^2+ax=\pm a\sqrt{x^2+y^2},$$

$$x^4+y^4+2ax^3+2x^2y^2+2axy^2+a^2x^2=a(x^2+y^2),$$

$$x^4+y^4+2ax^3+2x^2y^2+2axy^2+(a^2-a)x^2-ay^2=0.$$

3. 求 (3,4),(−4,3),(5,−12),(4,5) 四點之極坐標.

解. 將已知點之坐標代入第 155 頁公式 (2) 得，

$$\rho=\pm\sqrt{9+16}=\pm5;\ \theta=\tan^{-1}\tfrac{4}{3}.$$

故 (3, 4) 之極坐標爲 $(\pm5, \tan^{-1}\frac{4}{3})$

$$\rho=\pm\sqrt{16+9}=\pm5;\ \theta=\tan^{-1}(-\tfrac{3}{4}).$$

故 (−4, 3) 之極坐標爲 $[\pm5, \tan^{-1}(-\frac{3}{4})]$.

$$\rho=\pm\sqrt{25+144}=\pm13,\ \theta=\tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right).$$

故 (5, −12) 之極坐標爲 $\left[\pm13, \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right)\right]$

$$\rho=\pm\sqrt{16+25}=\pm\sqrt{41},\ \theta=\tan^{-1}\tfrac{5}{4}.$$

故 (4, 5) 之極坐標爲 $(\pm\sqrt{41}, \tan^{-1}\frac{5}{4}$

4. 求 $\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-2,\frac{3\pi}{4}\right)$, $(5,\pi)$ 三點之直坐標.

解. 由第 155 頁公式 (1)，得

$$x=\rho\cos\theta=5\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad y=\rho\sin\theta=5\sin\frac{\pi}{2}=5.$$

$$x=\rho\cos\theta=-2\cos\frac{3\pi}{4}=-2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

$y=\rho\sin\theta=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$.

$x=\rho\cos\theta=3\cos\pi=-3$, $y=\sin\pi=0$.

故 $\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-2,\frac{3\pi}{4}\right)$; $(3,\pi)$ 之矩坐標各爲:

$(0,5)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-3,0)$.

5. 改 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 爲矩坐標之方程式.

解. 將 $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 及 $\cos\theta=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$ 之值代入已知方程式內，得

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ep}{1-e\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}$$

化簡，$\pm\sqrt{x^2+y^2}-ex=ep$.

移項，$\pm\sqrt{x^2+y^2}=ex+ep$.

平方，$x^2+y^2=e^2x^2+2e^2px+e^2p^2$.

合併同類項，得

$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$.

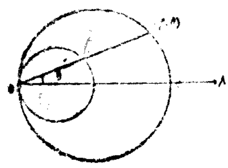
習 題 (第158–159頁)

1. 凡通過圓周上一定點之弦，各引長一倍，試求其一端所作成之軌跡.

解. 以定點爲極點，以定點與圓心之連線爲極軸，於是由第156頁之推論即得此圓之方程式爲 $\rho-2r_1\cos\theta=0$, r_1 乃圓之半徑也.

設 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點.

由題設 $OP=\rho=2OA$, 此處 A 爲圓上一點.



但 $OA=2r_1\cos\theta$

∴ $OP=\rho=4r_1\cos\theta$

∴ $\rho-4r_1\cos\theta=0$

故由第 156 頁之推論可知其軌跡爲一半徑等於 $2r_1$ 之圓.

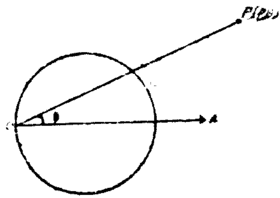
2. 有圓 $\rho=10\cos\theta$ 其通過極之弦, 各引長 10, 試求諸弦之一端所作成之軌跡.

解. 設 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點, 於是由題設,

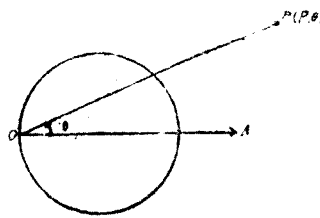
$OP=OP_1+10$, P_1 乃已知圓上一點

但 $OP=\rho$ 及 $OP_1=10\cos\theta$

故 $\rho=10+10\cos\theta$, 或 $\rho=10(1+\cos\theta)$



3. 有圓 $\rho=2a\cos\theta$ 其通過極點之弦, 各引長 $2b$, 試求諸弦之一端所作成之軌跡.



解. 設 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點.

由題設 $OP=OP_1+2b$, P_1 乃已知圓上一點.

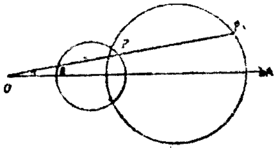
但 $OP=\rho$ 及 $OP_1=2a\cos\theta$.

故 $\rho=2b+2a\cos\theta$.

或 $\rho=2(b+a\cos\theta)$.

4. 由一定點至一已知圓上, 作直線, 試求諸直線中點之軌跡.

解. 以定點爲極點，再設極軸通過圓心.



由第 156 頁定理 III，可知已知圓之方程式爲

$$\rho'^2+\rho' D\cos\theta+F=0.$$

設 $P(\rho,\theta)$ 爲軌跡上任意一點.

由題設 $OP=\frac{1}{2}OP_1$，P_1 乃已知圓上一點.

但 $OP=\rho$ 及 $OP_1=\rho'$. 故 $\frac{1}{2}\rho'=\rho$ 或 $\rho'=2\rho$.

$\therefore\quad (2\rho)^2+2\rho D\cos\theta+F=0$

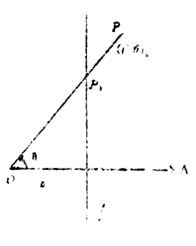
$\therefore\quad 4\rho^2+2\rho D\cos\theta+F=0$

或 $\rho^2+\frac{1}{2}\rho D\cos\theta+\dfrac{F}{4}=0$

故此軌跡爲一圓其半徑爲已知圓半徑之半且其圓心在極點與已知圓心之中點.

5. 通過定點 O 之直線，遇另一定直線於 P_1，於 OP_1 直線上取一點 P，令其恆有 $OP_1\cdot OP=a^2$ 之關係，試求 P 點之軌跡.

解. 以定點 O 爲極點，且設極軸垂直已知直線，於是已知直線之方程式爲



$$b=\rho\cos\theta \text{ 或 } \rho=\frac{b}{\cos\theta}.$$

由題設 $OP_1\times OP=a^2$，P_1 乃已知直線上任一點.

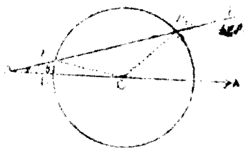
但 $OP_1=\frac{b}{\cos\theta}$ 及 $OP=\rho$

故 $\frac{b\rho}{\cos\theta}=a^2$ 或 $\rho=\frac{a^2}{b}\cos\theta$.

故由第 155 頁知其軌跡爲一圓.

6. 通過定點 O 之直線，遇另一定圓於 P_1 及 P_2，於此直線上取一點 P，令其恆有 $OP=2\frac{OP_1\cdot OP_2}{OP_1+OP_2}$ 之關係，則 P 之軌跡如何.

解. 以定點 O 爲極點且設極軸通過已知圓心



設 $OB=a$, $BC=r$, $OP_2=\rho'$.

由餘弦定律，得

$r^2=\rho'^2+(a+r)^2-2\rho'(a+r)\cos\theta$,

$r^2=\rho'^2+a^2+2ar+r^2-2\rho'(a+r)\cos\theta$,

$\rho'^2-2\rho'(a+r)\cos\theta+(a^2+2ar)=0$,

此方程式之根即 OP_1 與 OP_2 之長

故由 3 頁定理 1，得

$$OP_1\times OP_2=a^2+2ar \text{ 及 } OP_1+OP_2=2(a+r)\cos\theta$$

$$\therefore\quad \rho=OP=2\frac{a^2+2ar}{2(a+r)\cos\theta}=\frac{a^2+2ar}{(a+r)\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \rho(a+r)\cos\theta-(a^2+2ar)=0,$$

故由第 156 頁知此軌跡爲一直線.

第 七 章

習 題 第 161 頁

1. 所移之新原點爲 $(3,6)$. 試求 $(3,-5)$, $(-4,2)$ 之新坐標.

解. 今 $h=3$ 與 $k=6$.

$\therefore \quad 3=x'+3, \quad -5=y'+6,$

或 $x'=0, \quad y'=-11.$

故 $(3-5)$ 之新坐標爲 $(0,-11)$.

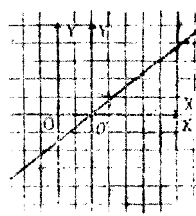
又 $-4=x'+3, \quad 2=y'+6$

或 $x'=-7, \quad y'=-4$

故 $(-4,2)$ 之坐坐標爲 $(-7,-4)$

2. 所移之新原點如下所示.試改所列各方程式爲新軸方程式並各作新舊軸及曲線以顯明之.

(a) $3x-4y=6$, $(2,0)$.



解. 今 $h=2$ 與 $k=0$

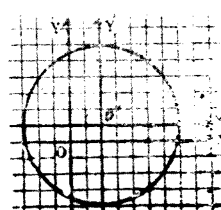
$\therefore \quad x=x'+2, \quad y=y'$

代入已知之方程式內，得

$3(x'+2)-4y'=6$

化簡 $3x'-4y'=0$

(b) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2,1)$.



解. 今 $h=2$, $k=1$.

$\therefore \quad x=x'+2, \quad y=y'+1.$

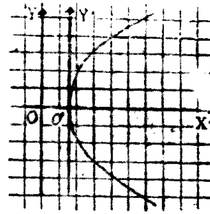
代入已知之方程式內，得

$(x'+3)^2+(y'+1)^2-4(x'+2)$

$-2(y'+1)=0.$

化简，$x'^2+y'^2-5=0$.

(c) $y^2-6x+9=0$，$(\frac{3}{2},\ 0)$.



解. 令 $h=\frac{3}{2}$ $k=0$.

由 160 頁方程式 (1) 得

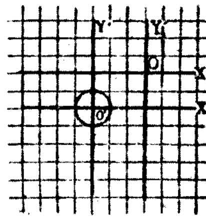
$x=x'+\frac{3}{2}$，$y=y'$，

代入已知方程式內，得

$y'^2-6(x'+\frac{3}{2})+9=0$

化简，$y'^2-6x'=0$.

(d) $x^2+y^2-1=0$，$(-3,-2)$.



解. 令 $h=-3$，$k=-2$，

$\therefore\quad x=x'-3$，$y=y'-2$.

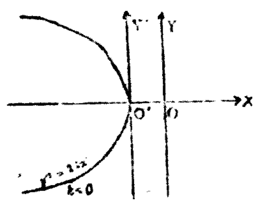
代入已知方程式內，得

$(x'-3)^2+(y'-2)^2-1=0$ 或

$x'^2+y'^2-6x'-4y'+12=0$

(e) $y^2-2kx+k^2=0$，$(\frac{k}{2},\ 0)$.

解. 令 $h=\frac{k}{2}$，$k=0$.

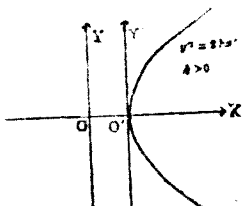


$\therefore\quad x=x'+\frac{k}{2}$，$y=y'$.

代入已知方程式內，得

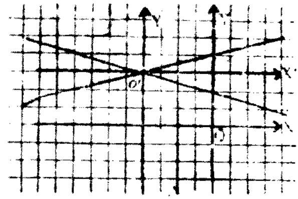
$y^2-2k(x'+\frac{k}{2})+k^2=0$.

化简，$y'^2-2kx=0$.



(1) $x^2-4y^2+8x+24y-20=0$ $(-4,\ 3)$

解. 令 $h=-4$, $k=3$.



$\therefore$ $x=x'-4$,

$y=y'+3$.

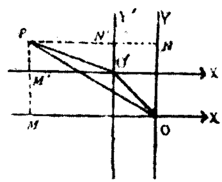
代入在已知之方程式內，

得

$(x'-4)^2-4(y'+3)^2+8(x'-4)+24(y'+3)-20=0$.

化簡，得 $x'^2-4y'^2=0$.

3. 設 O' 在(a)第二象限內，(b)第三象限內，(c)第四像限內；試求方程式 (1).



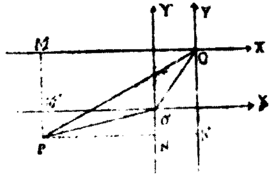
解. a) 設 O' 之坐標爲 $(-h,\ k)$ 且設任一點 P 之坐標在移軸前與移軸後分別爲 $(-x,y)$, $(-x',\ y')$.

投射 OP 與 $OO'P$ 之影於 OX 上. 如圖，得

$-x=-x'-h$, 或 $x=x'+h$.

同樣，$y=y'+k$.

(b) 設 O' 之坐標爲 $(-h,-k)$ 又任一點P之坐標在移軸前與移軸後分別爲 $(-x,-y)$ 與 $(-x',-y')$.

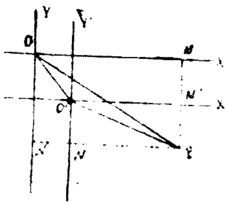


投射 OP 與 $OO'P$ 之影於 OX 上，如圖，得

$-x=-x'-h$，或 $x=x'+h$.

同樣，$y=y'+k$.

(c) 設 O' 之坐標爲 $(h,-k)$ 又任一點 P 之坐標在移軸前與移軸後分別爲 $(x,-y)$ 與 $(x',-y')$.



投射 OP 與 $OO'P$ 之影於 OX 上，如圖，得

$x=x'+h$，與 $-y=-y'-k$，或 $y=y'+k$.

習　　題　　163 頁

1. 使軸轉 $\frac{\pi}{2}$，試求 $(3,1)$，$(-2,6)$，$(4,-1)$ 之新坐標.

解．因 $\sin\frac{\pi}{2}=1$ 與 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，

則第 162 頁方程式 (II) 變爲 $x=-y'$，$y=x'$，

代 x，y 之值，得

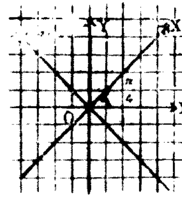
$x'=1$，$y'=-3$；$x'=6$，$y'=2$；$x'=-1$，$y'=-4$.

故 $(3,1)$；$(-2,6)$；$(4,-1)$ 之新坐標分別爲

$(1,-3)$；$(6,2)$；$(-1,-4)$.

2. 兩軸迴轉之角，如下所示，試改下列諸方程爲新軸方程式，並作新舊軸及曲線以表明之.

(a) $x-y=0$，$\frac{\pi}{4}$.



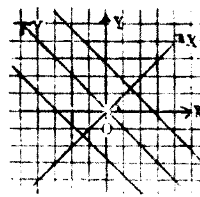
解. 因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\quad x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

代入已知方程式内，得

$\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}-\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}=0$ 化简 $y'=0$.

(b) $x^2+2xy+y^2=8$, $\frac{\pi}{4}$.



解. 因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

则第 162 頁方程式 (II) 變爲

$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

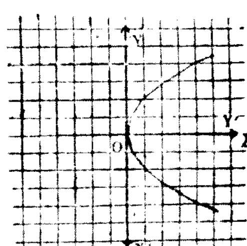
代入已知方程式内，得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\times\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=8$$

$$\frac{(x'-y')^2}{2}+(x'-y')(x'+y')+\frac{(x'+y')^2}{2}=8$$

化简，$x'^2-4=0$

(c) $y^2=4x$, $-\frac{\pi}{2}$



解. 因 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$,

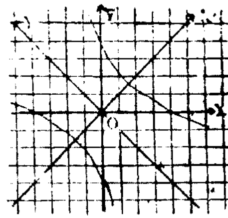
$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-0$,

$\therefore\quad x=y',\ y=-x'$

代入已知方程式内，得

$(-x')^2=4y'$ 或 $x'^2=4y'$.

(d) $x^2+4xy+y^2=16$, $\frac{\pi}{4}$.



解. 因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

故由 162 頁 (II) 式得

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

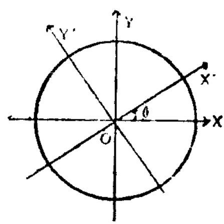
代入已知方程式內，得

$$\frac{(x'-y')^2}{2}+2(x'-y')(x'+y')+\frac{(x'+y')^2}{2}=16$$

化簡 $3x'^2-y'^2-16=0$

(e) $x^2+y^2=r^2$, θ.

解. 將 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 與 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$ 之 x, y 之值代入已知方程式內，得



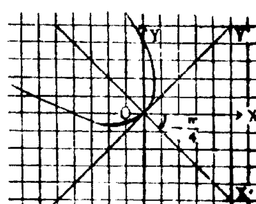
$$(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=r^2$$

化簡 $x'^2+y'^2=r^2$

(f) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0$, $-\frac{\pi}{4}$.

解. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

由 162 頁 (II) 式，得



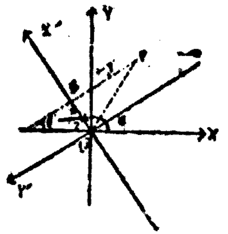
$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \text{ 與 } y=\frac{y'-x'}{\sqrt{2}}$$

代入已知方程式內，得

$$\frac{(x'+y')^2}{2}+(x'+y')(y'-x')^2+\frac{(y'-x')^2}{2}+4\times\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+4\times\frac{y'-x'}{\sqrt{2}}=0$$

化簡，$\sqrt{2}\,y'^2+4x'=0$.

3. 設 $\theta>\frac{\pi}{2}$ 試求 (II)。



解. 設 P 點之新舊坐標各爲 $(x', -y')$ 與 (x, y)

且作 OP 與 $PB \perp OX'$

OP 在 OX 上之射影 $= x$.

但 OP 在 OX 上之射影 $= OB$ 之射影 $+ BP$ 之射影

$$= x' \cos\theta + (-y') \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = x' \cos\theta - y' \sin\theta.$$

OP 在 OY 上之射影 $= y$

但 OP 在 OY 上之射影 $= OB$ 之射影 $+ BP$ 之射影

$$= x' \cos\angle AOB + (-y') \cos\angle PAY$$

$$= x' \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - y' \cos(\pi - \theta)$$

$$= x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

$\therefore\quad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$

習　　題　　168 頁

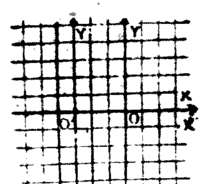
1. 試移軸化簡下列諸方程式, 並作曲綫新舊軸, 以表明之.

(a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

解. 設 $x = x' + h$

代入之得 $(x' + h)^2 + 6(x' + h) + 8 = 0$. 或

$$\left.\begin{array}{l|l} x'^2 + 2h & x' + h^2 \\ \quad +6 & \quad +6h \\ & \quad +8 \end{array}\right| = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



使 x' 之係數等於零, 得

$2h + 6 = 0$, 或 $h = -3$

代入 (1) 式, 得 $x'^2 - 1 = 0$

(b) $x^2-4y+8=0$,

解. 設 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$

代入之得

$(x'+h)^2-4(y'+k)+8=0$ 或

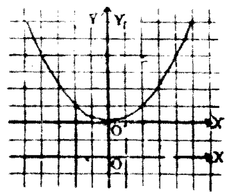
$x'^2+2hx'-4y'+(h^2-4k+8)=0$ ……………(1)

使 x' 之係數及常數項等於零，得

$2h=0$, 及 $h^2-4k+8=0$ 或

$h=0$ 及 $k=2$.

代入 (1) 式，得 $x'^2-4y'=0$



(c) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

解. 設 $x=x'+h$, $y=y'+k$

代入之得 $(x'+h)^2+(y'+k)^2+4(x'+h)-6(y'+k)-3$
$=0$

$$\text{或}\quad x'^2+y'^2+\left.\begin{array}{r}2h\\+4\end{array}\right|x'+\left.\begin{array}{r}2k\\-6\end{array}\right|y'+\left.\begin{array}{l}h^2\\+k^2\\+4h\\-6k\\-3\end{array}\right|=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

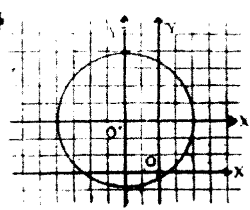
使 x' 及 y' 之係數各等於零，得

$2h+4=0$ ……………………(2)

$2k-6=0$ ……………………(3)

解. (2), (3) 得 $h=-2$, $k=3$.

代入(1)式，得 $x'^2+y'^2-16=0$.



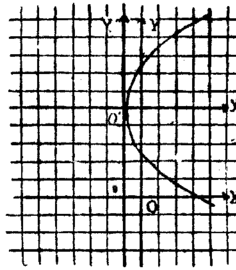
(d) $y^2-6x-10y+19=0$

解. 設 $x=x'+h$, $y=y'+k$.

代入之得

$(y'+k)^2-6(x'+h)-10(y'+k)+19=0$ 或

$$\begin{array}{r|r|l}
y'^2-6x'+2k & y'+k^2 & =0\cdots\cdots\cdots(1) \\
-10 & -6h & \\
 & -10k & \\
 & -19 &
\end{array}$$



使 y' 之係數及常數項等於零

得

$2k-10=0$，及

$k^2-6h-10k+19=0$.

解此二式得 $k=5$，$h=-1$.

代入 (1) 式，得 $y'^2-6x'=0$.

(e) $x^2-y^2+8x-14y-33=0$.

解. 使 $x=x'+h$ 及 $y=y'+k$.

代入之得

$(x'+h)^2-(y'+k)^2+8(x'+h)-14(y'+k)-33=0$.

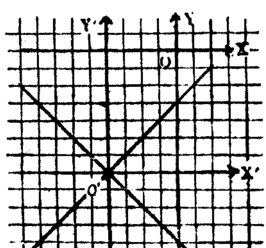
或
$$\begin{array}{r|r|r|l}
x'^2-y'^2+2h & x'-2k & y'+h^2 & =0. \\
+8 & -14 & -k^2 & \\
 & & +8h & \\
 & & -14k & \\
 & & -33 &
\end{array}$$

使 x' 及 y' 之係數各等於零. 得

$2h+8=0\cdots\cdots(2)$，$-2k-14=0\cdots\cdots(3)$

解. (2)，(3) 得 $h=-4$ 及 $k=-7$.

代入 (1) 式，得 $x'^2-y'^2=0$.



(f) $x^2+4y^2-16x+24y+84=0$.

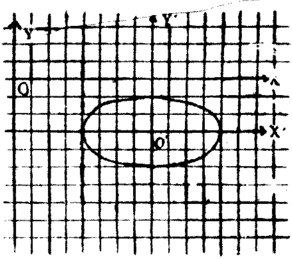
設 $x=x'+h, y=y'+k$ 代入得

$x'^2+4y'^2+(2h-16)x'+(8k+24)y'$

$+h^2+4k^2-16h+24k+84=0$ ……………………………… (1)

使 x' 及 y' 之係數爲零得 $h=8, k=-3$ 代入 (1) 式.

得 $x'^2+4y'^2=16$.



(g) $y^3+8x-40=0$

解. 設 $x=x'+h, y=y'+k$.

代入之得 $(y'+k)^3+8(x'+h)-40=0$

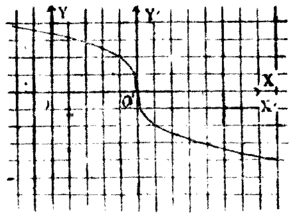
$$y'^3+3ky'^2+3k^2y'+8x'+\left.\begin{matrix}k^3\\+8h\\-40\end{matrix}\right|=0.$$

使 y' 之係數及常數項等於零，得

$3k^2=0$，及 $k^3+8h-40=0$.

解此二式，得 $k=0$ 及 $h=5$.

代入(1)式，得 $y'^3+8x'=0$.



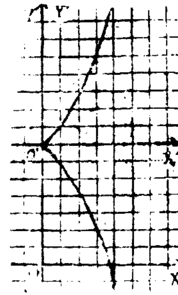
(h) $x^3-y^2+14y-49=0$.

解. 設 $x=x'+h$, 及 $y=y'+k$.

代入之得

$(x'+h)^3-(y'+k)^2+14(y'+k)-49=0$, 展

$$
\left.\begin{array}{r|l|}
x'^3+3hx'^2-y'^2+3hx'-2k & y'+h^3 \\
+14 & -k^2 \\
 & +14k \\
 & -49
\end{array}\right.=0\cdots\cdots\cdots(1)
$$



使 x' 之係數及常數項等於零，得

$$2h=0 \text{ 及 } h^3-k^2+14k-49=0.$$

解此二方程式，得 $h=0$，$k=7$.

代入 (1) 式，得 $x'^3-y'^2=0$.

(i) $4x^2-4xy+y^2-40x+20y+99=0$.

解. 設 $x=x'+h$，$y=y'+k$.

代入之得

$4(x'+h)^2-4(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2-40(x'+h)$

$+20(y'+k)+99=0$，或

$$
\left.\begin{array}{r|r|r|}
4x'^2+y'^2-4x'y'+8h & x'+2k & y'+4h^2 \\
-4k & -4h & +k^2 \\
-40 & +20 & -4hk \\
 & & -40h \\
 & & +20k \\
 & & +99
\end{array}\right.=0\cdots\cdots\cdots(1)
$$

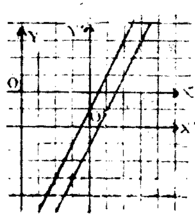
使 x' 及 y' 之係數等於零，得

$8h-4k-40=0\cdots\cdots\cdots(2)$ $\qquad$ $2k-4h+20=0\cdots\cdots\cdots(3)$

解 (2) 與 (3)，得 $h=4$，$k=-2$.

代入 (1) 式，得

$4x'^2-4x'y'+y'^2-1=0$ 或 $(2x'-y')^2-1=0$.



2. 用轉軸法消去下列諸方程式之xy項，並作新舊軸及其曲線.

(a) $x^2-2xy+y^2=12$.

解. 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.

代入之得 $(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2-2(x'\cos\theta-y'\sin\theta)$
$(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=12$.

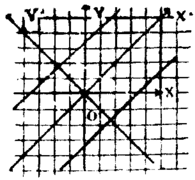
或
$$\begin{array}{l|l|l|l} \cos^2\theta & x'^2-2\sin\theta\cos\theta & x'y'+\sin^2\theta & y'^2=0\cdots(1)\\ -2\sin\theta\cos\theta & -2\cos^2\theta & +2\sin\theta\cos\theta & \\ +\sin^2\theta & +2\sin^2\theta & +\cos^2\theta & \\ & +2\sin\theta\cos\theta & & \end{array}$$

使 $x'y'$ 之係數等於零，得

$2\sin^2\theta-2\cos^2\theta=0$, $\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$.

故 $\cos 2\theta=0$, $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

代入(1)式，得 $2y'^2=12$ 或 $y'^2=6$.



(b) $x^2-2xy+y^2+8x+8y=0$.

解. 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及
$y=y'\sin\theta+y'\cos\theta$.

代入得

$(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2-2(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$
$+(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+8(x'\cos\theta-y'\sin\theta)+8(x'\sin\theta+y'\cos\theta)=0$.

或
$$\begin{array}{l|l|l|l} \cos^2\theta & x'^2+\sin^2\theta & y'^2-2\sin\theta\cos\theta & x'y'\\ -2\sin\theta\cos\theta & +2\sin\theta\cos\theta & -2\cos^2\theta & \\ +\sin^2\theta & +\cos^2\theta & +2\sin^2\theta & \\ & & +2\sin\theta\cos\theta & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} +8\cos\theta & x'-8\sin\theta & y'=0\cdots\cdots\cdots(1)\\ +8\sin\theta & +8\cos\theta & \end{array}$$

使 $x'y'$ 之係數於零，得

$-2\cos^2\theta+2\sin^2\theta=0$,

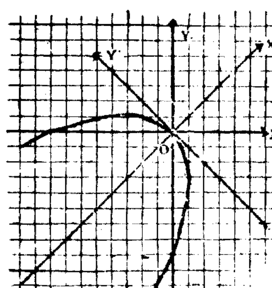
$\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$ 或

$\cos 2\theta=0$, $\therefore\ 2\theta=\frac{\pi}{2}$;

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$.

代入 (1) 式，因

$\sin\frac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



故得 $x'^2+\frac{16}{\sqrt{2}}y'=0$ 或化简 $\sqrt{2}x'^2+8y'=0$.

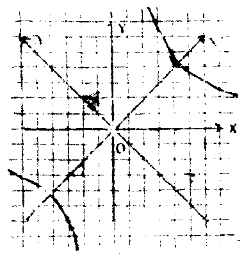
(二) $xy=18$.

解. 设 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.

代入得,

$(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)=18$ 或

$$\sin\theta\cos\theta x'^2-\sin\theta\cos\theta y'^2+\left|\begin{matrix}\cos^2\theta\\-\sin^2\theta\end{matrix}\right| x'y'=18\cdots\cdots\cdots(1)$$



使 $x'y'$ 之係数等於零,得

$\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$ 或 $\cos 2\theta=0$,

故 $2\theta=\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

代入(1),因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

故得 $x'^2-y'^2=36$.

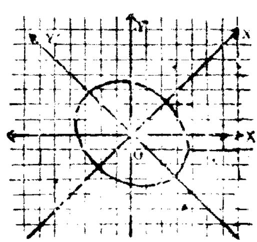
(三) $25x^2+14xy+25y^2=288$.

解. 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.

代入得

$$25(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+14(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+25(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=288$$

$$\text{或}\left|\begin{matrix}25\cos^2\theta\\+14\sin\theta\cos\theta\\+25\sin^2\theta\end{matrix}\right| x'^2+\left|\begin{matrix}25\sin^2\theta\\-14\sin\theta\cos\theta\\+25\cos^2\theta\end{matrix}\right| y'^2+\left|\begin{matrix}-50\sin\theta\cos\theta\\+14\cos^2\theta\\-14\sin^2\theta\\+50\sin\theta\cos\theta\end{matrix}\right| x'y'=288\cdots\cdots\cdots(1)$$



使 $x'y'$ 係数等於零得,

$14\cos^2\theta-14\sin^2\theta=0$; $\therefore\cos 2\theta=$

或 $\cos 2\theta=0$

故 $2\theta=\frac{\pi}{2}$ $\theta=\frac{\pi}{4}$,

代入(1)式

又因 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 故得

$32x'^2+18y'^2=288$ 或 $16x'^2+9y'^2=144$.

(e) $3x^2-10xy+3y^2=0$.

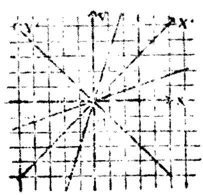
解. 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$

代入得

$$3(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2-10(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+3(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=0$$

或
$$\left.\begin{array}{l}3\cos^2\theta\\-10\sin\theta\cos\theta\\+3\sin^2\theta\end{array}\right|x'^2+\left.\begin{array}{l}3\sin^2\theta\\+10\sin\theta\cos\theta\\+3\cos^2\theta\end{array}\right|y'^2+\left.\begin{array}{l}-6\sin\theta\cos\theta\\-10\cos^2\theta\\+10\sin^2\theta\\+6\sin\theta\cos\theta\end{array}\right|x'y'$$
$$=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

使 $x'y'$ 之係數等為零，得



$-10\cos^2\theta+10\sin^2\theta=0$, $\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$,

即 $\cos2\theta=0$.

故 $2\theta=\frac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$.

代入(1)式得

$-2x'^2+8y'^2=0$ 或 $x'^2-4y'^2=0$.

(f) $6x^2+20\sqrt{3}xy+26y^2=324$.

解. 設 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ 及 $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$

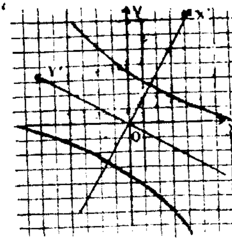
代入得

$$6(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+20\sqrt{3}(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+26(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=324.$$

或
$$\left.\begin{array}{l}6\cos^2\theta\\+20\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\\+26\sin^2\theta\end{array}\right|x'^2+\left.\begin{array}{l}6\sin^2\theta\\-20\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\\+26\cos^2\theta\end{array}\right|y'^2$$
$$\left.\begin{array}{l}-12\sin\theta\cos\theta\\+20\sqrt{3}\cos^2\theta\\-20\sqrt{3}\sin^2\theta\\+52\sin\theta\cos\theta\end{array}\right|x'y'=32\cdots\cdots\cdots(1)$$

使 $x'y'$ 之係數等於零，得

$$2\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4\sin\theta\cos\theta=0$$



$$\sqrt{3}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta=0.$$

$$\sqrt{3}\cos2\theta+\sin2\theta=0.$$

故 $\dfrac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=-\sqrt{3}$　$\tan2\theta=-\sqrt{3}$

$\therefore$　$2\theta=\dfrac{2\pi}{3}$　或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

代入 (1) 式，因 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，

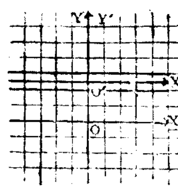
得　$36x'^2-4y'^2=324$ 或 $9x'^2-y'^2=81$.

雜　　題

1．化簡並作圖．

(a) $y^2-5y+6=0$ ……………………(1)

設　$y=y'+k$ 代入 (1)



則 $y'^2+2ky'-5y'+k^2-5k+$

$6=0$ ……………………………………(2)

使 y' 之係數爲零得 $k=\frac{5}{2}$

代入 (2) 得．

$$y'^2+\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+6=0.$$

$$y'^2-\tfrac{1}{4}=0.$$

(b) $x^2+2xy+y^2-6x-6y+5=0$ ………………(1)

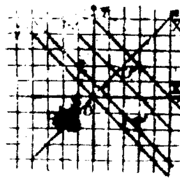
設　先轉 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 之角，即設 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$，

$$y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}};$$

代入 (2) 並化簡，得

$$2x'^2 - \frac{12x'}{\sqrt{2}} + 5 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

再設 $x' = x'' + h$ 代入 (2)



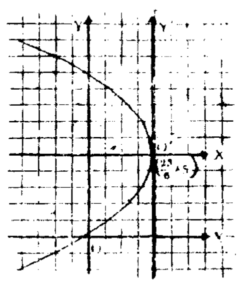
得 $2x''^2 + 4x''h + 2h^2 - \frac{12x''}{\sqrt{2}} - \frac{12}{\sqrt{2}}h + 5 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

使 x'' 之係數等於零得 $h = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 代入 (3) 化簡

得 $x''^2 - 2 = 0$.

(c) $y^2 + 6x - 10y + 2 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

設 $x = x' + h$, $y = y' + k$. 代入 (1)



得 $y'^2 + 2ky' + k^2 + 6x' + 6h - 10y' - 10k + 2 = 0 \cdots\cdots(2)$

使 y' 之係數及常數項等於零

得

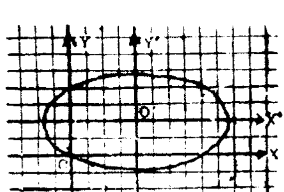
$$k = 5, h = \frac{25 - 50 + 2}{-6} = \frac{23}{6}$$ 代入 (2)

得 $y'^2 + 6x' = 0$.

(d) $x^2 + 4y^2 - 8x - 16y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

設 $x = x' + h$, $y = y' + k$

代入 (1)



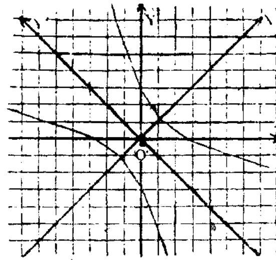
得 $x'^2 + 2hx' + h^2 + 4y'^2 + 8ky' + 4k^2 - 8x' - 16y' - 8h - 16k = 0 \cdots(2)$

使 x' 及 y' 之係數爲零，得

$$x''^2+4y''^2-32-32=0.$$

$$x''^2+4y''^2-64=0.$$

(e) $x^2+4xy+y^2=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$



解 轉軸$\dfrac{\pi}{4}$即設 $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$

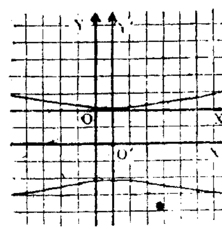
$y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$代入 (1)

得 $\dfrac{x'^2+y'^2-2x'y'}{2}+4\dfrac{x'^2-y'^2}{2}$

$+\dfrac{x'^2+y'^2+2x'y'}{2}=8$

$$6x'^2-2y'^2=4$$

$$3x'^2-y'=2.$$



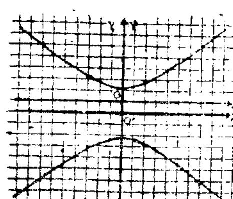
(f) $x^2-9y^2-2x-36y+4=0 \cdots (1)$

設 $x=x'+1$，$y=y'-2$ 代入(1)得

$$x'^2-9y'^2+1-36-2+72+4=0.$$

$$x'^2-9y'^2+39=0.$$

(g) $25y^2-16x^2+50y+19=0 \cdots\cdots\cdots (1)$



解 設 $x=x'$ $y=y'+k$ 代入 (1)

得 $25y'^2+50ky'+25k^2-16x'^2$

$+50y'+50k+19=0$

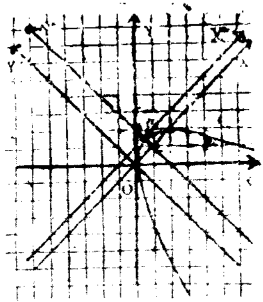
使 y' 之係數爲零，得

$$k=-1.$$

$25y'-16x'^2-144=0$

(h) $x^2+2xy-y^2-8x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

解. 先轉軸$\dfrac{\pi}{4}$，即設$x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$. 代入 (1) 得



$$2x'^2-4x'+4y'=0,$$

$$x'^2-2x'+2y'=0\cdots\cdots(2)$$

再設 $x'=x''+h,\ y'=y''+k$ 代入(2),

$$x''^2+2hx''+h^2-2x''-2h+2y''+2k=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

使 x'' 之係數及常數項等於零，得

$h=1$, $k=\frac{1}{2}$. 代入……(3)

得 $x''^2+2y''=0$.

2. 將二次方程式之諸一次項消去，求所移後之原點(定理VII).

解. 將方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之 x, y 各以 $x'+h$ 及 $y'+k$ 代之，得

$A(x'+h)^2+B(x'+h)(y'+k)+C(y'+k)^2+D(x'+h)+E(y'+k)+F=0$. 或

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+\left.\begin{array}{l}2Ah\\+Bk\\+D\end{array}\right|x'+\left.\begin{array}{l}Bh\\+2Ck\\+E\end{array}\right|y'+\left.\begin{array}{l}Ah^2\\+Bhk\\+Ck^2\\+Dh\\+Ek\\+F\end{array}\right|=0.$$

使 x' 及 y' 之係數各等於零，得

$2Ah+Bk+D=0\cdots\cdots\cdots(1)$　　$Bh+2Ck+E=0\cdots\cdots\cdots(2)$

解(1)(2)二式，得

$$h=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},\quad k=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

故所求之點為 $\left(\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},\ \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\right)$

3. 由軸之移轉以改 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$ 爲 $(1-e^2)x^2+y^2+2e^2px-e^2p^2=0$ 時，原點當移至何處，試求其坐標 (h,k).

解. 將第一式之 x 及 y 各以 $x'+h$ 及 $y'+k$ 代之，得

$(1-e^2)(x'+h)^2+(y'+k)^2-2p(x'+h)+p^2=0$ 或

$$(1-e^2)x'^2+y'^2+\left.\begin{array}{l}2(1-e^2)h\\-2p\end{array}\right| x'+2ky'+\left|\begin{array}{l}(1-e^2)h^2\\+k^2\\-2ph\\+p^2\end{array}\right|=0$$

使 x' 之係數等於 $-2e^2p$ 及常數項等於 $-e^2p^2$，得

$2(1-e^2)h-2p=-2e^2p$ ……………………………(1)

$(1-e^2)h^2+k^2-2ph+p^2=-e^2p^2$ ………… (2)

解 (1)，(2)，得 $h=p$，$k=0$.

故所求之點爲 $(p,0)$

4. 試將上題之第二方程式化簡之.

解. 設 $x=x'+h$， $y=y'+k$.

代入得

$(1-e^2)(x'+h)^2+(y'+k)^2-2e^2p(x'+h)-e^2p^2=0$ 或

$$(1-e^2)x'^2+y'^2+\left.\begin{array}{l}2(1-e)h\\-2e^2p\end{array}\right| x'+2ky'+\left|\begin{array}{l}(1-e^2)h^2\\+k^2\\-2e^2ph\\-e^2p\end{array}\right|=0 \cdots\cdots(1)$$

使 x'，y' 之係數各等於零，得

$2k=0,\quad 2(1-e^2)h-2e^2p=0$

故 $h=\dfrac{e^2p}{1-e^2};\quad k=0.$

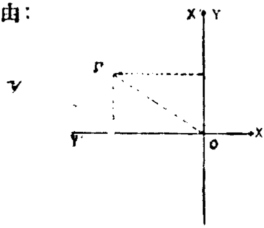
代入 (1) 式，得

$(1-e^2)^2x'^2+(1-e^2)y'^2-e^2p^2=0$

5. 試作圖以求轉軸方程式，其所轉之角爲 $+\dfrac{\pi}{2}$ 及 $-\dfrac{\pi}{2}$，並代入第 162 頁之 (II) 以證之.

解. 作 $PB \perp OY$. $PB \perp OX$

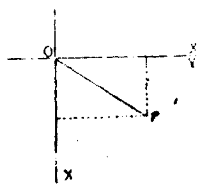
(a) 圖由:



$OB=-x$, $OA=y$, $OB=y'$, $OA=x'$

故 $x=-y'$, $y=x'$.

(b) 由圖



$OA=x$, $OB=-y$; $OA=y'$, $OB=x'$

故 $x=y'$ $y=-x'$

證驗 (a). 將第 162 頁 (II) 式之 θ 以$\frac{\pi}{2}$代之, 得

$$x=x'\cos\frac{\pi}{2}-y'\sin\frac{\pi}{2}=-y'$$

$$y=x'\sin\frac{\pi}{2}+y'\cos\frac{\pi}{2}=x'$$

(b) 以 $-\frac{\pi}{2}$代 (I) 式之 θ 得

$$x=x'\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-y'\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y'$$

$$y=x'\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-y'\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-x'$$

6　證明將軸移之，任何一次方程式，必可改爲 $y'=0$.

解.　將 $Ax+By+C=0$ 式內之 x 及 y 各以

$x'\cos\theta-y'\sin\theta+h$ 及 $x'\sin\theta+y'\cos\theta+k$ 代之，則得

$$\left.\begin{array}{l|l|l|}A\cos\theta & x'\ -A\sin\theta & y'\ +Ah \\ +B\sin\theta & \quad +B\cos\theta & \quad +Bk \\ & & \quad +C\end{array}\right.=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

使 x' 之係數及常數項等於零，得

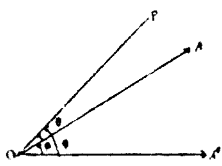
$A\cos\theta+B\sin\theta=0\cdots\cdots(2)$　　$Ah+Bk+C=0\cdots\cdots(3)$

由 (2) 得 $\tan\theta=-\frac{A}{B}$，或 $\theta=\tan^{-1}\left(-\frac{A}{B}\right)$

由 (3) 可得很多對 h 與 k 之值. $\begin{cases}h=-\frac{C}{A}\\ k=0\end{cases}$

代入 (1) 式，再以 y' 之係數除之得 $y'=0$.

7.　極坐標軸迴轉 φ 角時，其方程式爲 $\theta=\theta'+\varphi$. 試證之.



解.　設 P 爲任意一點，其舊坐標及新坐標各爲 (ρ,θ) 與 $(B\cdot\theta')$.

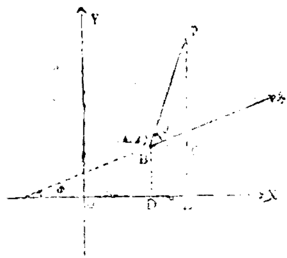
由圖，得 $\theta=\theta'+\varphi$

8.　設極坐標之極點爲 (h,k)，極軸與 x 軸成 φ 角，則由直角軸坐標改爲極坐標時. 其方程式爲

$x=h+\rho\cos(\theta+\varphi)$

$x=k+\rho\sin\ \theta+\varphi)$

試證明之.



解. 設P爲任意一點，其直角坐標與極坐標各爲(x, y)與(ρ, θ)

作$PE \perp OX$，$BD \perp OX$，$BC \perp PE$.

於是$x = OD + DE = OD + BC = h + BC$

但$BC = BP \cos \angle CBP = \rho \cos(\theta + \phi)$.

故 $x = h + \rho \cos(\theta + \phi)$

$y = EC + CP = k + CP$

但 $CP = BP \sin \angle CBP = \rho \sin(\theta + \phi)$.

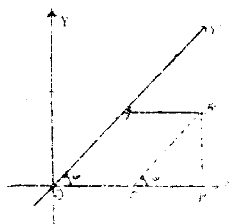
故 $y = k + \rho \sin(\theta + \phi)$.

9. 設x軸不動，斜軸角爲ω，試證明由直角軸，改爲斜軸之方程式，爲

$$x = x' + y' \cos \omega$$

$$y = y' \sin \omega$$

解. 設P爲任一點其直角坐標及斜坐標分別爲(x, y)與(x', y').



作$BP \perp OX$，$CP \parallel OY'$.

於是$x = OB = OC + CB = x' + CB$

但 $CB = CP \cos \omega = y' \cos \omega$

故 $x=x'+y'\cos\omega$.

$y=BP=CP\sin\omega=y'\sin\omega$.

故 $y=y'\sin\omega$.

10. 設原點不動，則由一種斜角軸，改為他種斜角軸之方程式，為

$$x=x'\frac{\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}+y'\frac{\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}$$

$$y=x'\frac{\sin\phi}{\sin\omega}+y'\frac{\sin\psi}{\sin\omega}$$

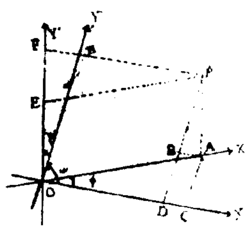
試證之. 但式中 ω 為原點之斜軸角. 即 OX 與 OY 所作之角，ϕ 乃 OX 與 OX' 所作之角，ψ 乃 OX 與 OY' 所作之角.

解. 設 P 為任意一點，其對於OX，OY，及 OX' OY' 之斜坐標分別為 (x,y)，(x',y').

作 $DP\parallel OY$，$FP\parallel OX$，$EP\parallel OX'$，$AP\parallel OY'$，$CA\parallel OY$ $BA\parallel OX$，於是由正弦定律，得

$$\frac{OC}{\sin(\omega-\phi)}=\frac{OA}{\sin(\pi-\omega)}，\text{或 } OC=\frac{OA\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}$$

但 $OA=x'$，$OC=OD+DC=x+BA$.



$$\therefore\quad x+BA=\frac{x'\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}.$$

因 $$\frac{BA}{\sin(\psi-\omega)}=\frac{AP}{\sin\omega},$$

$$BA=\frac{AP\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega}=-\frac{y'\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}$$

代入 BA 之值，得

$$x-y'\frac{\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}=x'\frac{\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}$$

$$x=x'\frac{\sin(\omega-\phi)}{\sin\omega}+y'\frac{\sin(\omega-\psi)}{\sin\omega}.$$

在 $\triangle OCA$ 内，得

$$\frac{AC}{\sin\phi}=\frac{OA}{\sin(\pi-\omega)}，或\ CA=OA\frac{\sin\phi}{\sin\omega}.$$

但 $CA=DP-BP=y-BP$，$OA=x'$

故 $y-BP=x'\dfrac{\sin\phi}{\sin\omega}.$

在 $\triangle BAP$ 内

$$\frac{BP}{\sin\psi}=\frac{AP}{\sin\omega}，或\ BP=AP\frac{\sin\psi}{\sin\omega}.$$

但 $AP=y'$，故 $BP=y'\dfrac{\sin\psi}{\sin\omega}.$

代入 BP 之值，得

$$y-y'\frac{\sin\psi}{\sin\omega}=x'\frac{\sin\phi}{\sin\omega},$$

或 $y=x'\dfrac{\sin\phi}{\sin\omega}+y'\dfrac{\sin\psi}{\sin\omega}.$