大學用書

應用力學

Poorman著
曾鶴蓀譯

大 學 用 書

應 用 力 學

（原 本 第 四 版）

漢 譯 增 補 本

原 著 者 Alfred P. Poorman

編 譯 者 曹 鶴 蓀

中 國 科 學 圖 書 儀 器 公 司

印 行

大學用書

應用力學

APPLIED MECHANICS

原本第四版漢譯增補本

中華民國三十七年三月初版

原著者 Alfred P. Poorman

編譯者 曹鶴蓀

發行人 楊孝述

發行所 中國科學圖書儀器公司
上海中正中路五三七號

分發行所 中國科學圖書儀器公司
南京 廣州 重慶 北平 漢口

基價650

E1 1/1—0.075

初版原序

此應用力學,係專供工程學校大學部教課之用,假定讀者已學過大學物理及微積分,編纂此書之主要用意在闡述力學上之基本原理,使平均程度之學生易於遵循,所舉例題,亦得明釋此等原理在索解工程問題上之應用。

本書有兩點與他書不同,編者希冀因此而對於讀者,有所裨益,一爲圖解法之普遍應用,據編者之經驗,圖解法之優點,不僅對於索解某種問題,較爲便捷,並有助於代數法之了解。此兩種方法之原理對照講述,藉以說明其間之關係,設用圖解法後,能使題解益顯明瞭者,則靡不用之。

另一特點,爲列舉大量之例題,並詳爲演出,以說明原理與應用問題間之關係。

設本書在一學期內習完,則本書習題比之通常所指定者未免較多,在各節後所附之習題,必須演習,在每章後所附之總習題,得由教師自由指定,各題均附答案,讀者得據以核對其解答是否準確,以增加演題之興趣,設教師不願公佈答案,得將題內之數據加以適宜之更改。

本書承杜克斯教授(Prof. Richard G. Dukes)校讀,對於形式與內容,頗多指示,至爲感激。

普爾曼(A. P. Poorman)

誌於普渡大學(Purdue University)

一九一七年三月

四版原序

四版之應用力學，對於內容之編排，略有更改，並有若干新材料之插入，共面力系之解，較簡於非共面力系者，故先行講述。

為改良教材之連續性，故將所有運動學，或有關純粹運動之問題集中於一章內，關於功與能之教材，亦儘量集中於一章內。本書後部所用之功與能原理之部分，則屬例外。

較近結構學上，載荷以〔仟磅〕計算，而不用〔磅〕計算，故本書亦沿用之。

工程之範圍，日益推廣，故各習題均改用新數據。並有新習題增入，各習題後均附有答案，與以前數版無異。

承普渡大學諸同仁，對於內容，編排方法，頗多指示，至為感激，過去畢業同學施迺克(P.H. Schneck)君，現供職於冠蒂斯萊特工廠(Curtiss Wright)，供給許多關於機翼，螺旋槳及轉動體之重量，維持材料，及慣矩等數據，尤為感激。

普爾曼誌於普渡大學。

一九四〇年三月

譯　序

中國科學圖書儀器公司楊孝述先生，鑒於我國過去各學校採用歐美教本，以價格奇高，一般學子，無力購買，且依賴外國教本，不適我國國情，終非善策，故際此國步艱難，百業凋零，仍不惜巨資，編纂大學用書，以爲倡導。 其辦法以譯爲第一步，編爲第二步，著爲第三步，所謂譯，係選取國外大學教本中最習用者，譯成中文，以介紹國內讀者，此法比較輕而易舉；凡教材中有不完備者，加以註釋，及補充；有不適用者，加以删改；以期適於我國之需要。

普爾曼應用力學一書，我國沿用最久，說理簡單，舉例詳盡，爲其特色。 編者復於其書末，加增附卷附錄；在附卷內，介紹牽力係數法，虛功原理，勢理論，科賴奧來定律，蘭格倫日方程式及維解析等，以應現代工程界之需要，並訓練讀者作進修研究之準備。 附錄內有度量衡制換算表，各種形體之形心位置，惯矩，及迴轉半徑表，以備演題之參攷。

附卷內之材料，得斟酌補充正文內之不足，以其所用數學較深，故能與高等微積分同時講授，最爲理想。

本書倉促脫稿，錯漏難免，尙望學者時加指正是幸。

曹鶴蓀序於上海交通大學。

民國卅六年十月

目 次

第一編 靜力學

第二編 運動力學

附卷

附錄

第一編　靜力學

第一章

定義及一般的原理

1. 定義. **力學**(mechanics)爲物理科學(physical science)之一部份，研究力對於質體之運動，及其狀態之效應. 包括**物理學**(physics)，**天體力學**(celestial mechanics)，**流體力學**(fluid mechanics)，**應用力學**(applied mechanics)，以及**材料力學**(strength of materials)，等.

本書所討論之應用力學，包括各種工程問題中，研究質點及剛體運動時，所應用之力學各定律. 靜的狀態可以視作動的極限狀態.

質點(particle)爲一物體，或物體之一部分. 其維(dimension)極小，如與周圍物體之維，或與運動之範圍比較，可以略去不計. 作用於其上之力，可假定集中於一點. **剛體**(rigid body)爲許多質點之集合體，而這許多質點間之距離，及相互之位置，永遠維持不變. 實在的物體，均非絕對的剛體. 但在若干情況中，例如在平衡之情況中，分析此等物體之情態，可以略去其形態上及大小上之變化，而不致產生可以覺察的誤差.

應用力學可分爲兩部：**靜力學**(statics)與**運動力學**(dynamics). 運動力學又可分爲兩部，即，**運動學**(kinematics)與**動力學**(kinetics)[1]. 靜力學所討論之範圍，爲平衡(equilibrium)之物體. 此時之物體，對於某參考線或面而言，可能爲靜止，或以等速度運動.

運動力學所討論之對象，爲對於某參考線或面，正在運動之質點及物體。運動學爲運動力學之一部分，祇討論質點及剛體之運動，而不涉及產生此等運動或運動變化之力。動力學亦爲運動力學之一部分，討論力與運動之關係；研究質點及剛體受力後所產生之運動，以及產生某種運動變化時所受之外力。物體成等速度運動者，亦即在平衡中者，得視爲動與靜兩種情况之極限，故在動力學及靜力學中均可討論及之。

2. **基本量及其單位**. 時間，空間，力，與質量，爲力學上所用之基本量. 時間，空間，力，與質量既爲基本概念，任何一者均不能利用其他概念或任何更簡單之量，加以解說. 本書假定讀者，從過去之經驗，對於此四項基本概念，均已明瞭.

任何一種基本量，均可用簡單手續量出之，即對於每一種基本量，設定其一標準量，作爲單位(unit)，再與此單位比較，即可量出其大小.

通常所用之單位制，計有兩種：一爲**厘米·克·秒制**(centimeter-gram-second system 即 c. g. s. system)，**又稱國際度量衡制**；一爲**呎·磅·秒制**(foot-pound-second system 即 f.p.s. system)，**或稱英美制**. 本書採用英美制. 附錄內附有此兩制之換算表.

從承續發生之事件，可以認識'時間'. 通常所用之時間之單位爲〔秒〕，〔分〕，〔時〕.

從各方向之開展，可資以認識'空間'. 通常所用之空間之單位爲〔呎〕，〔吋〕，〔哩〕.

(1)〔譯注〕 部頒物理學名詞上，對於 dynamics 及 kinetics 兩字，均譯作動力學. 本書譯 dynamics 爲運動力學，表示包含運動學與動力學兩部，而 kinetics 仍譯爲動力學，以示區別.

力得從其使運動變化之趨向，或物體形狀及大小變化之趨向，以認識之．**力之定義爲一物體對於另一物體之作用．**力對於被作用之物體，使其產生運動上之變化，或有產生此種變化之傾向．從此點可見力均成對產生，但在一對中，通常祇研究其一力．在我等經驗中最普通之力，爲重力(gravitational force)，亦卽地球對於一切物體之引力．此種引力，謂之物體之**重量**(weight)，得以彈簧秤量出之．重量隨所在地之緯度及高出海面之高度而微有變化．但此變量甚小，故在各工程問題中，幾可略去不計．工程上所通用之力之單位爲〔磅〕．美國華盛頓之標準局(Bureau of Standards)，以及英國惠斯民斯德(Westminster)之標準局(Standards Office)，均保存有'標準磅'(standard pound)，地球對於此標準器之引力，卽爲力之單位"磅"．

在問題中討論較大之力時，須用較大之單位．如〔仟磅〕(kip)(= 1000〔磅〕)，或〔噸〕(ton)(= 2000〔磅〕)[1]．結構上之載荷，通常所用之單位爲〔仟磅〕．基礎下之土壤承壓力(bearing pressure)，通常所用之單位爲〔噸/呎^2〕．

從占有一部分空間之物體，可以認識質量(mass)．一物體之質量，卽爲其所含物質之量．此量之大小，並不隨其位置而變．質量通常用天平計量之．因自由落體之加速度 g，與重量 W 對於地球上之緯度，及高出海面之高度之變化爲相同者，故自同地測得之 W 與 g 之比，亦可求得物體之質量；卽

$$M = \frac{W}{g} \tag{1,1}$$

工程上所用之質量單位，爲**導出單位**(derived unit)，此單位卽等

(1) 【譯注】 本書中所用之〔噸〕，係指〔短噸〕(short ton)而言，一〔長噸〕(long ton)等於 2240〔磅〕．

於受單位力時,產生單位加速度之物質之量. 對於質量單位之討論,詳見第十二章.

3. 力之分類. 力可以分爲**集中力**(concentrated force)與**分布力**(distributed force)兩種. 分布力之作用處爲一面. 集中力之作用處極小,得視作一點. 在許多情況中,分布力亦得視作爲一集中力,此集中力之作用點在作用面之中心,或在此力系之中心[1].

有時亦可將力分爲**遠距力**(force at a distance)及**接觸力**(force by contact). 磁力,電力,萬有引力,均屬遠距力. 重力,卽物體之重量,爲應用力學論究之力中之一主要者. 氣缸內汽之壓力,機車輪與鐵軌間之壓力,均屬接觸力之例.

4. 非矢量與矢量. 祇有大小之量,謂之**非矢量**(scalar quantity). 體積與質量,爲非矢量[2]之例.

有方向有大小之量,謂之**矢量**(vector quantity). 力,速度,加速度,與動量等,均屬矢量. 矢量得用定長與定向之直線,所謂**矢**(vector)者表示之. 此矢之長度,若用適當之比例尺量計,卽表示矢量之大小;所繪矢之方向,卽表示矢量之方向.

在圖 1 內, 矢量 a 表示大小等於 16〔呎/秒〕, 方向下指之速度. 矢量 b 表示等於 12〔呎/秒〕之向上速度. 矢量 c 表示等於 6〔呎/秒〕之向左速度. 在圖 2 內,矢量 a_n 表示等於 80〔呎/秒$^{(2)}$〕而指向中心 O之加速度;a_t表示等於 20〔呎/秒^2〕而切於圓周上加速度.

力爲矢量. 此矢量除有大小及方向外,並有作用線之位置.

---

(1)【譯注】 許多分布力,組合成一力系(system of forces).

(2)【譯注】 非矢量亦作無向量,矢量亦作向量.

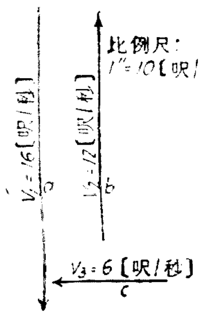


圖 1

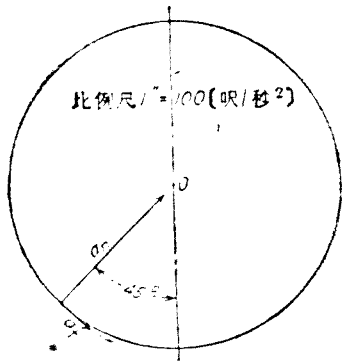


圖 2

在任何空間圖(space diagram)上，力之矢量必須畫在其適當之位置上，如圖 3(*b*)所示。

5. 解析問題之三種方法。 一個力學之問題，爲若干已知諸量與已知關係一種之陳述。據其關係以求出其他之某未知量，及未知關係。

解析問題計有三種普通方法，即：**圖解法**(graphical method)，**三角法**(trigonometrical method)及**代數法**(algebraic method)。在圖解法內，諸量均各以對應之線與面表示之。諸量之關係，以圖上諸部分之關係表示之。若依據已知之關係，完成圖上之其餘各部分，即能得其解答。未知量之大小，可據圖上所得之線，面，或角，之量度而決定。

在三角法內，諸量均各以對應之線與面表示之，與圖解法無異。所不同者，即此等量毋須用比例尺畫出。根據圖上各部分間已知之三角或幾何關係，即能求得其解。

在代數法內，諸量均以字母代數而表示之。各量間之關係，以運算符號聯成之算式表示。所得之方程式，以算術，代數，及微積分

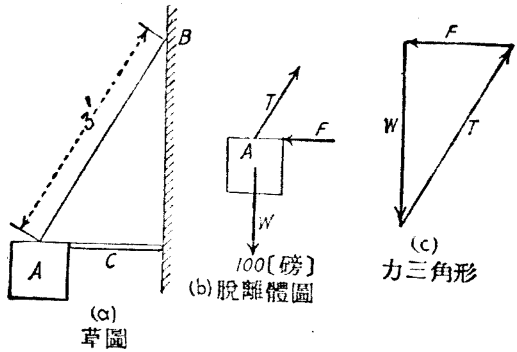


圖 3

之方法解之，卽能求得解答.

本書求解各問題時，上述三種方法，均須用到. 讀者對於此三種方法，須均能應用熟練. 並在解決任何所舉問題時，須能選擇最適當而簡便之方法.

6. 脫離體圖. 本書解析問題時，主要採用脫離體(free body)法. 應用此法時，將整個物體，或物體之一部分，當做與其餘部分脫離. 再將此脫離部分以草圖畫出. 移除之部分對於畫出之脫離體之諸作用力，無論已知或未知者，均以矢量表示之. 於是據已知條件及已知力，求出未知關係與未知力.

圖 3(a)爲據比例尺畫出之草圖. A 爲每邊 8〔吋〕之立方塊，重 100〔磅〕. 用 3〔呎〕長之繩，懸於一鉛直牆上之點 B. 再用一 14〔吋〕長之桿 C，使 A 與牆隔離. 圖 3(b)爲脫離體圖. 在此圖上，塊 A 與其他部分脫離. 矢量 W 表示其重量(力)，亦卽地球對於塊 A 有 100〔磅〕之拉力. 矢量 T 表示繩向右上方之牽力. 矢量 F 表示桿 C 在水平方向之推力. 在此圖上，矢量 T 與 F 之大小，均爲未知量，不能依照比例尺畫出；故已知的矢量 W 亦無須依照比例尺畫出. 圖3(c)表示力三角形. 用第 19 節之原理，卽

可求得未知力 T 與 F 之解答。在此力三角形上，則各力均依照比例尺畫出。

故重要者，讀者先須熟練對於任何問題，會畫草圖及畫脫離體圖之本領。因為準確繪出脫離體圖是求解的一個重要步驟。

有一點須注意者，即脫離體對於地球，繩，桿三者所施之力，與前述之值等而向反者，均未論及。所討論者，僅為其餘諸部作用於脫離體上之諸力。

7. 力之可傳性. 從實驗結果，證明作用於一剛體上之外力，若將其作用點，沿其作用線移至任何可能之點上，其對整個剛體之效應不變。因此在問題，認為力可沿其作用線前後移動。這稱做**力之可傳性**(transmissibility of forces)。

外力對於物體內部之效應——例如因外力而產生之**應力**(stress)與**形變**(deformation)——，則隨外力其在作用線上之作用點位置而變。

8. 齊次方程式 說明諸物理量間關係之代數方程式，應為**齊次方程式**(homogeneous equation)。亦即，諸物理量須各以其相當之單位表示之。此事至屬必要，蓋以單位既如此採定，便得同種單位之量，即可施行加減運算。方程式的兩邊各項之量，亦即可具同一之維也。

今試舉一例以說明之。一物體以初速 v_0 下落，其在時間 t 內所動過之距離 s 之方程式為：

$$s = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

上式中，g 為重力加速度 (acceleration of gravity)。此 $s,a,t,$ 諸量必須用對應之單位表示。假定 g 之單位為〔呎/秒^2〕，v_0 之單

位必須爲〔呎/秒〕，t 之單位必須爲〔秒〕。 s 之單位必須爲〔呎〕。如將方程式內之各量，以其單位代替之，所得之**維方程式** (dimensional equation) 爲

$$[\text{呎}] = \left[\frac{\text{呎}}{\text{秒}}\right][\text{秒}] + \left[\frac{\text{呎}}{\text{秒}^2}\right][\text{秒}]^2$$

等號右邊兩項內，分子分母之〔秒〕，適可消去，故得

$$[\text{呎}] = [\text{呎}] + [\text{呎}].$$

如速度 v_0 之單位，須用〔哩/時〕，則加速度 g 之單位，必須爲〔哩/時^2〕，t 之單位爲〔時〕，s 之單位爲〔哩〕。

9. 題解. 讀者欲徹底明瞭應用力學一學科，必須解過相當數目之習題. 本書於應用理論解題之處，往往選舉例題，並示詳解，以資說明. 此等例題，讀者務須研究透徹，並愼加注意其中之要點. 在演算習題之前，讀者最好閉卷而單獨再將例題演算一次，如是對於本書所述之原理，有更深切之了解.

每節後所附之習題，一般爲此節內所講過之原理之直接應用，故必須遵以解題. 每章後所附之總習題，常包括以前數節所講過之原理. 解題時，讀者可在各種方法中，選擇一最適當之方法. 如時間有餘，再可用另一方法解之，以覆核第一方法所求得之結果.

如書中習題，未附圖說明時，最好能畫一適當之草圖，則於解題時，頗多助益. 在較簡單之題中，此草圖即可當作脫離體圖. 在較複雜之題中，必須另畫諸脫離體圖.

脫離體圖，在任何習題中務須畫出。

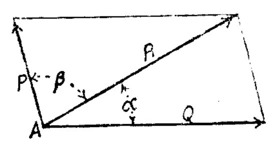
第二章

共面共點力

10. 定義. **力系**(force system)由兩個或兩個以上之力所組成，此力均作用於同一脫離體上. 假定一力系內所有之力，均在同一平面中，謂之**共面力系**(coplanar force system). 假定一力系內所有之力之作用線，均經過同一點，謂之**共點力系**(concurrent force system).

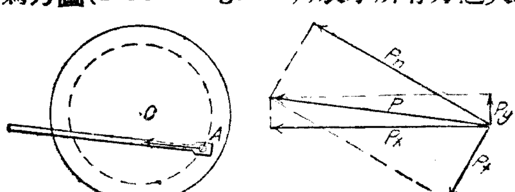
本章所討論之力系，祇限於**共面共點力系**(coplanar concurrent force system).

11. 力之圖示. 第 4 節內曾述及，力可將矢量作圖解的表示. 在比較簡單之題內，祇須一圖；圖內每一矢量，可以表示其所代表之力之作用線，方向，及大小，如圖 4 所示. 在比較複雜之題中，則需要兩圖. 一為空間圖(space diagram)，表示所有力之作用線；一為力圖(force diagram)，表示所有力之大小，如圖5所



合併之空間圖與力圖

圖 4.



(a)
空間圖

(b)
力圖

圖 5.

示．力之方向，可在任一圖上表示出來，但通常在兩圖上都已將其畫出。

習 題

1. 在圖 4 內，試求力 P,Q,R 之值，假定比例尺爲 1〔吋〕＝100〔磅〕．又，試量出角 α 與 β 之大小。 答：60〔磅〕；116〔磅〕；118〔磅〕．

2. 在圖 5 內，設力 P 之值爲 3000〔磅〕． 試求用同一比例尺所量得之 P_x, P_y, P_n, P_t 之值。 答：2950〔磅〕；435〔磅〕；2760〔磅〕；1200〔磅〕．

12. 兩力之合力，圖解法． **平行四邊形定律**(parallelogram law)：——假定以兩矢量，分別表示兩共點力，並假定兩矢量之矢首，都指向其交點，或同背離其交點，若以此兩矢量爲鄰邊，作一平行四邊形，則自兩矢量交點畫出之對角線，即表示其合力(resultant)． 在圖 6 內，矢量 MN 及 KL 表示兩力． O 爲其作用線

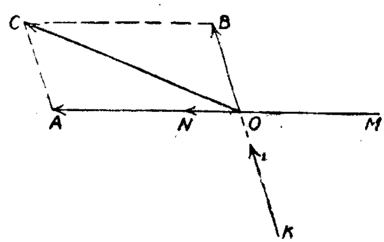


圖 6.

之交點． 自第 7 節所述原理，此兩力得沿其作用線移動而至 OA 與 OB 兩位置．作線 AC 與 OB 平行，線 BC 與 OA 平行，因此繪得平行四邊形 $OACB$． 對角線 OC，爲兩矢量 OA 與 OB 之矢量和，亦即表示兩力之合力．

如矢量 MN 及 KL 之矢首，均爲指向其交點者，則得合矢量之大小，方向，與作用線，仍舊不變．

三角形定律(triangle law)：——如將代表兩共點力之矢量，依次畫爲一個三角形之兩邊，則自始點至終點所畫出之三角形之第三邊，即爲兩力之合力．圖 7 表示求出圖 6 內兩力 KL，MN 之合

力之兩種方法。 在下面的一個三角形內，矢量 OA 及 AC 代表兩力；矢量 OC 代表其合力。在上面的一個三角形內，矢量 OB 及 BC 代表兩力，矢量 OC 代表其合力，與前相同。

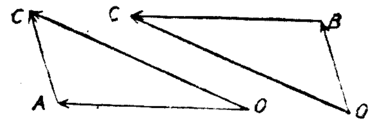


圖 7.

圖 7 所示之兩圖，祇是力圖。 在力圖上看不出力的作用線。合力之作用線，必須經過在空間圖上兩力之作用線之交點。

若兩力之作用線相同，方向亦相同，則力三角形即變成連續之一直線。 此兩分力之矢量和之絕對值，即等於其算術和(arithmetic sum)。 若兩力之作用線相同，方向相反，則力三角形仍爲一直線。 兩分力之矢量和之絕對值，等於其算術差(arithmetic difference)。

若所要合併之兩力，差不多互相平行，則在圖上便不易求得其交點，如圖 8 之力 P 與力 Q 所示。 其合力 B 之大小，方向，雖可用

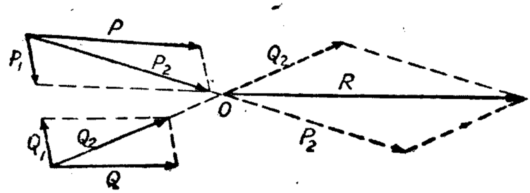


圖 8.

三角形定律求出，但不能知其位置。若欲求其位置，有一變相之平行四邊形定律，極爲有用。在此力系上，得加上值等而向反之任意兩**共線力**(collinear force)，其效應不變。 在力 P 與 P_1 之交點，求得其合力 P_2。 同理，在力 Q 與 Q_1 之交點，求得其合力 Q_2。P_2，Q_2 爲交於點 O 之同點力，故能以平行四邊形定律，求出其合力 R。 R 之位置，即爲 P 與 Q 兩力之合力之正確位置。

若將 P, Q 兩力之作用線延長至圖紙外，則所得之交點，必在合力 R 之作用線上。

例題

有一 150〔磅〕之力，以水平方向向右作用。另有一70〔磅〕之力，係向左上方作用，並與鉛直線成角 15°。試求其合力 R 之大小，及 R 與 150〔磅〕之力間之角 θ.

【解】 自圖 9 之點 O，以 1〔吋〕= 100〔磅〕之比例尺，作分別等於兩力之矢量 OA，OB. 作平行於 OB 之線 AC，及平行於 OA 之線 BC，得一平行四邊形，其對角線 OC 即表示其合力。據比例尺量出其大小為 148〔磅〕。又量出角 θ 為 27°.

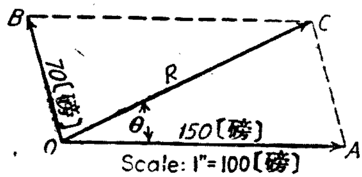


圖 9.

自圖可見任用三角形 OAC 或 OBC，均可求得合力 R 之大小與方向。

習題

1. 圖 10 表示闊 6〔呎〕，高 4〔呎〕之平板，其平面上，有如圖所示之諸力。試用平行四邊形定律，將 40〔磅〕力及 60〔磅〕力合併。並從圖上量出此合力與 X 軸間之角。 比例尺用 1〔吋〕= 20〔磅〕。 答：87.6〔磅〕；22°.

2. 據三角形定律，將圖10 之40〔磅〕力與〔20〕磅力合併。從圖上量出合力與軸 X 間之角。 比例尺用：1〔吋〕= 10〔磅〕。 答：28.6〔磅〕；14°05′.

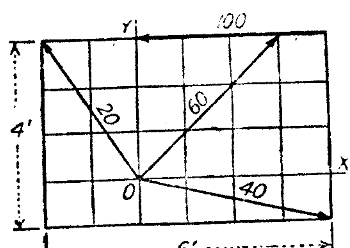


圖 10.

3. 試求圖 10 內 40〔磅〕力與 100〔磅〕力之合力。並求其合力與軸 Y 之交點。 答：62〔磅〕；4.9〔呎〕.

13. 兩力之合力，三角法. 在圖 11 內，P 與 Q 爲會於點 O 之兩力．α 爲兩力間之角．據三角學之餘弦定律，

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \tag{2.1}$$

又，

$$\begin{cases} \tan\theta_P = \dfrac{S}{P+T} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \\ \tan\theta_Q = \dfrac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha} \end{cases} \tag{2.2}$$

在 $\alpha = 0°, 90°, 180°$，之特殊情形中，以上兩式，均可簡化。

$\alpha = 0°$，則

$$R = P + Q; \qquad \theta = 0°$$

$\alpha = 90°$，則

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad \theta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$$

$\alpha = 180°$，則

$$R = P - Q; \qquad \theta = 0° \text{ 或 } 180°.$$

例　　題

在圖 11 內，設力 $P = 100$〔磅〕，力 $Q = 80$〔磅〕，$\alpha = 150°$．試求 R 與 θ_P。

【解】

$$R^2 = 10{,}000 + 6400 - 2 \times 100 \times 80 \times 0.866$$

$$R = 50.4 \text{〔磅〕}$$

$$\tan\theta_P = \frac{40}{100 - 69.3} = 1.303$$

$$\theta_P = 52°30'.$$

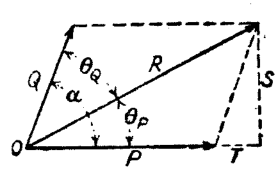


圖 11.

習　題

1. 在圖 11 內，設力 $P = 520$〔磅〕，力 $Q = 120$〔磅〕，$\alpha = 75°$。試求 R 與 θ_P 之值。　答：563〔磅〕；11°53′.

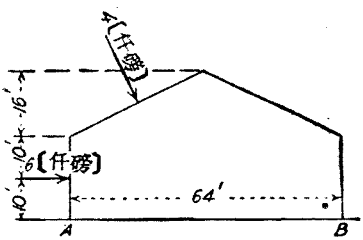


圖 12.

2. 用本節所述之方法，試求圖 10 內 20〔磅〕力與 60〔磅〕諸力之合力，並求合力與 X 軸間之角。

答：66.8〔磅〕；62°05′.

3. 試求圖 12 所示諸力之合力，並求此合力與底線 AB 之交點至點 A 間之距離。　答：8.57〔仟磅〕；46.8〔呎〕.

14. 三個或多個力之合力 圖解法.

將第 12 節內之三角形定律推廣，卽可求得任何個共點力之合力。在圖 13 內，AB 與 BC 兩力，合併爲力 AC；AC 與 CD 兩力，合併爲力 AD；最後，將 AD 與 DE 兩力，合併爲力 AE。AE 便是此整個力系之合力，其作用線經過此力系之公點 O.

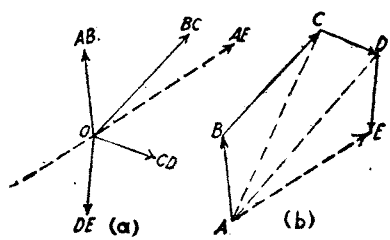


圖 13

由此可見若將諸力 AB, BC, CD, DE 依次排列，直接卽能求得其合力 AE，無須用到中間之合力 AC 與 AD. 圖 13(b) 謂之**力多邊形**(force polygon)。任意變換力之次序，可得形狀不同之力多邊形，但其合力不變。

習　題

1. 在圖 10 內，試求點 O 上三個共點力之合力。　答：85.8〔磅〕；35°05′.

2. 試求下列諸力之合力．角 α 爲力與 X 軸正方向間之夾角．$F_1 = 600$〔磅〕，$\alpha_1 = 30°$；$F_2 = 400$〔磅〕，$\alpha_2 = 225°$；$F_3 = 300$〔磅〕，$\alpha_3 = 285°$．

答：416〔磅〕；319°．

15．力之分解爲分力． 如適用上述之平行四邊形定律，或三角形定律，卽能將任一個力，分解爲其二個分力．其情形計有下述四種：

1. 已知兩分力之方向，求其大小．
2. 已知一分力之方向及大小，求另一分力之方向及大小．
3. 已知兩分力之大小，求其方向．
4. 已知一分力之大小及另一分力之方向．求前者之方向及後者之大小．

1. 第一種情形．命圖 14 內之 R 爲所設力．θ 爲此力與 X 軸間之角．試將 R 分解爲兩分力．一分力平行於與軸 X 成角 α 之線 P．另一分力平行於與軸 X 成角 β 之線 Q．圖 14(*b*)說明其作圖法．先畫與軸 X 成角 θ 之矢量 $AC = R$．經點 A 作與 P 平行之矢量 AB．經點 C 作與 Q 平行之矢量 BC．自交點 B，可求得兩分力之大小．若經點 A 畫矢量 Q，經點 C 畫矢量 P，卽能得到另

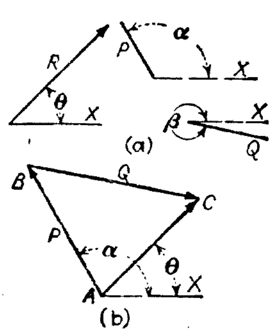


圖 14.

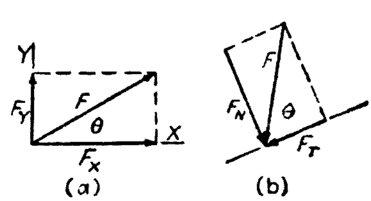


圖 15.

一個三角形，以完成平行四邊形.

通常所需要之分力，爲平行於互成直角之兩所設軸之分力. 例如圖 15(a) 之 F_x 與 F_y，或圖 15(b) 之 F_N 與 F_T. 圖 15(a) 內，$F_x = F\cos\theta$，及 $F_y = F\sin\theta$. 分力 F_x 與 F_y，分別謂之力 F 在軸 X,Y 上之射影 (projection). 在圖 15(b) 內，$F_T = F\cos\theta$，$F_N = F\sin\theta$.

2. 第二種情形. 命圖 16(α) 之 R 爲與軸 X 成角 θ 之所設力，P 爲與軸 X 成角 α 之分力之大小. 圖 16(b) 示其解答. 先畫與 X 軸成角 θ 之矢量 $AC = R$. 再畫與 X 軸成角 α 之矢量 $AB = P$. 則與 X 軸成角 β 之矢量 BC 卽爲所求之另一分力 Q.

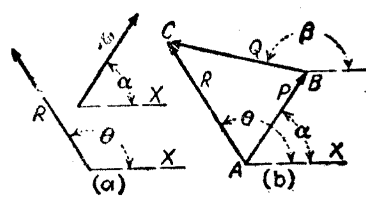


圖 16.

3. 第三種情形. 命圖 17(a) 之 R 爲所設力. 線段 P,Q 分別代表所求兩分力之大小. 求解時先畫矢量 $AB = R$，見圖 17(b). 以

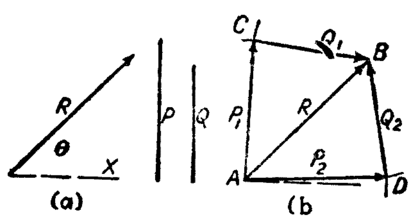


圖 17.

A 爲圓心，線段 P 爲半徑，作一圓弧. 再以 B 爲圓心，線段 Q 爲半徑，作一圓弧. 自兩圓弧之交點求得 C. 矢量 P_1,Q_1 卽爲其一解. 同理，相交於點 D 之兩矢量 P_2,Q_2，又爲另一解. 若 P 與 Q 之絕對值之和或差，恰好等於 R 之值時，則祇有一個可能的解，卽分力 P 與 Q 必與 R 在同一作用線上. 若 P 與 Q 之對値之和，小

於 R 之值，或其絕對值之差，大於 R 之值時，則無解。

4. 第四種情形，命圖 18(a)之 R 為所設力。 命線段 P 代表一分力之大小。直線 Q 代表另一分力之方向。求解時，如圖 18(b)，先畫矢量 $AB=R$。經點 A 作與線 Q 平行之線AC。再以 B 為圓

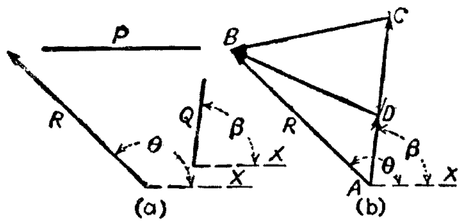


圖 18.

心，線段 P 為半徑，作短弧，與線 AC 交於 C,D 兩點。因此得到兩個可能的解。 AC,CB，或 AD,DB 中任何一對矢量，均適合於所設條件。 若線段 P 之長度，適等於自點 B 至線 AC 之法向距離，則祇有一解。 若線段 P 之長度，短於自點 B 至線 AC 之法向距離，則無解。

例　題

在圖 19 內，試將 100〔磅〕力分解為一與線 AB 平行，及一與線 AB 垂直之兩分力。

【解】 所設力與線 AB 間之角為 55°， 其平行於線 AB 之分力為

$$F_T = 100\cos 55° = 57.36\text{〔磅〕},$$

垂直於線 AB 之分力為

$$F_N = 100\sin 55° = 81.92\text{〔磅〕}.$$

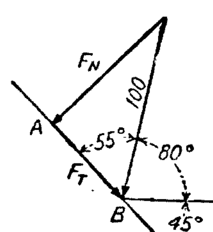


圖 19.

習　題

1. 在圖 19 內，試將 100〔磅〕力，分解為在水平及鉛直方向之兩分力。

答：17.37〔磅〕；98.48〔磅〕。

2. 在圖 19 內，試將 100〔磅〕力，分解爲兩分力，一爲水平向左之 60〔磅〕力，試求另一分力。　答：107.4〔磅〕；與鉛直線成 23°30′ 角.

3. 將 10〔磅〕之鉛直力分解爲兩分力。一爲 20〔磅〕，一爲 25〔磅〕。試求此兩分力與水平線所成之角。　答：18°10′；40°30′.

4. 將 10〔磅〕之鉛直力，分解爲兩分力。一分力之大小爲 25〔磅〕，另一分力係在水平方向。試求 25〔磅〕分力之方向，及水平分力之大小。

答：23°35′；22.9〔磅〕.

16. 三個或多個力之合力，代數法. 據第 15 節之原理，可見共面共點力系中之任何力，均可於其公點上分解爲其兩分力 X, Y。將所有沿 X 方向之分力，求得其代數和 ΣF_x. 再將沿 Y 方向之分力，求得其代數和 ΣF_y. 則將此兩力 ΣF_x、ΣF_y 合併，便得此力系最後之合力 R.

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \tag{2.3}$$

R 與 X 方向間所成之角 θ，爲

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \tag{2.4}$$

例　題

試求圖 20 內所示四力之合力之大小與方向.

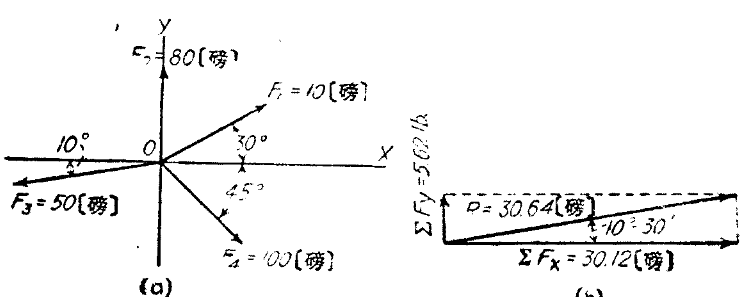


圖 20.

【解】 先依次將各力以其兩分力 X, Y, 替代之,即 $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$, 並列表如下:

F	F_x	F_y
10	8.66	5.
80	0.	80.
50	−49.24	−8.68
100	70.7	−70.7
	$\Sigma F_x = +30.12$	$\Sigma F_y = +5.62$

將所有各力之分力 X 相加,得其代數和 +30.12〔磅〕,此即爲合力沿方向 X 之分力 ΣF_x。同理將諸分力 Y 相加,得其代數和 +5.62〔磅〕。此爲合力沿方向 Y 之分力 ΣF_y。再取此兩分力之平方之和,求其平方根,即得力系之合力。

$R = \sqrt{30.12^2 + 5.62^2} = \sqrt{938.8} = 30.64$〔磅〕,如圖 20($b$)所示。合力 R 與軸 X 所成之角 θ,爲

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_x}{\Sigma F_y} = \tan^{-1}\frac{5.62}{30.64} = 10°30'$$

習 題

1. 以 100〔磅〕力之作用線作爲軸 X,複核上述例題所求得之結果。
2. 試求圖 21 所示之三力之合力。 答:801〔磅〕; 69°05′.

17. 力關於一點之力矩.

力關於一點之力矩(moment),等於此力與自點至其作用線之垂直距離之積。此垂直距離,謂之**力臂**(arm)。此點,謂之**力矩中心**(center of moment)。

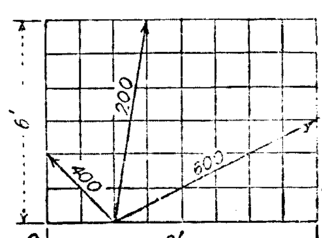


圖 21.

命 F 爲力, d 爲自任一點 O 至此力之作用線之垂直距離。則得力 F 關於點 O 之力矩,爲

$$M_0 = Fd \tag{2.5}$$

由此可見關於一定點之力矩，與關於經過此定點之軸之力矩相同；此軸必須垂直於力與定點所定之平面．

力矩之單位，隨所用力與長度之單位而定．例如〔磅·呎〕，〔磅·吋〕，〔仟磅·呎〕．

假定從坐標軸之正端向負端看出去，則產生反時針向旋轉之傾向之力矩，謂之**正力矩**(positive moment)．反之，有產生順時針向旋轉傾向之力矩，謂之**負力矩**(negative moment)．相反之規定，亦可以用．但在同一習題內，必須用同種之規定．

習　題

1. 在圖 21 內，試分求三力中各力關於點 O 之力矩．

答：400〔磅〕力之 $M_0 = +565.6$〔磅·呎〕；200〔磅〕力之 $M_0 = +394.6$〔磅·呎〕；600〔磅〕力之 $M_0 = +536$〔磅·呎〕．

2. 在圖 20 內，試分求四個力關於 X 軸上在點 O 右方 6〔吋〕處一點之力矩．

答：-33.7〔磅·吋〕．

18. 力矩原理：萬立乃定理． 試證明：兩共點力關於在其平面上一點之力矩之代數和，即等於其合力關於同一點之力矩．

命圖 22 之 P, Q 代表會於點 A 之共點力．R 爲其合力．O 爲其平面上之任一點．畫出線 AO，並將其延長至點 F．自 P 與 R 之矢首，作線 CE, DF 垂直於 AF 並作 CG 垂直於 DF．再自點 O，作分別垂直於力 P, Q, R 之線 p, q, r．命 α, β, θ 爲線 AO 分別與力 P, Q, R 所成之角．於是

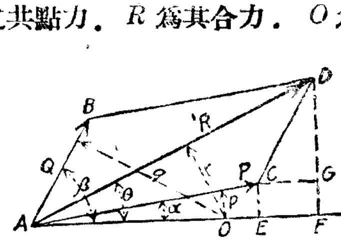


圖 22.

$$\overline{FD} = \overline{FG} + \overline{GD}$$

故

$$R\sin\theta = P\sin\alpha + Q\sin\beta$$

若將上式乘以 $\overline{OA}$,得

$$R\cdot\overline{OA}\sin\theta = P\cdot\overline{OA}\sin\alpha + Q\cdot\overline{OA}\sin\beta$$

故得

$$Rr = Pp + Qq \tag{2.6}$$

上式中 p,q,r 代表自點 O 至力 P,Q,R 間之垂直距離。因 Rr 爲合力 R 關於 O 點之力矩。 Pp 與 Qq 爲 P,Q 兩力關於同一點之力矩。 故得**萬立乃定理**(Varignon's theorem)如下:'兩共點力關於在其平面上任一點之力矩之代數和,等於其合力關於同一點之力矩'.

在求一所設力關於一點之力矩時,得將所設力分成兩分力,再求兩分力關於此點之力矩。此法較直接求所設力之力臂爲簡單。

以上之證明,可應用至三個或多個之共點力。 故得比較普徧之定理如下:'在一平面上之任何個共點力,關於此平面上任一點之力矩之代數和,等於其合力關於同一點之力矩。

習 題

1. 假定圖 21 所示三力之合力等於 801〔磅〕,並與軸 X 成 $69°05'$ 角(見第 16 節之習題 2.),試求此合力關於點 O 之力矩。再求第 17 節習題 1 所得三個分力力矩之代數和。試覆核其結果。 答: 1497.2〔磅.呎〕.

2. 假定點 O 在力 P 與合力 R 之間。試述證明萬立乃定理之方法。

19. 三個或多個力之平衡,圖解法. 設於圖 13 所示之力系中,最後一力之矢量之矢首,又回至其起始點時,則其合力 $R=0$,而此力系成平衡。 在任何情況中,設經一力系之公點,再加上一與

R 等值而反向之力，則此力系卽能平衡。

反之，假定一力系平衡，其力多邊形必須閉合。

最普通之情形，爲在一平衡力系中有兩個未知大小，但知其方向之力。求解時，先將表示各已知力之矢量首尾相銜，在圖上畫出。再經最末矢量之終點，及第一矢量之始點，畫兩直線平行於兩未知力之方向，得一閉合之力多邊形。據此力多邊形，可以量出兩未知力之大小。

若有一個力之大小與方向均爲未知，則自最末矢量之終點至第一矢量之始點之矢量，卽代表此未知力之矢量。從此矢量，可以求得未知力之大小與方向。

若有兩個力之大小爲已知，但不知其方向。則可以未知方向之兩力之大小爲半徑，以第一矢量之始點及最末矢量之終點爲圓心，作兩圓弧。自兩弧之交點，得決定兩力之方向。在此種情形中通常可能有兩個不同之解。

因畫閉合之力多邊形時，祇有兩個條件，故祇能決定兩個未知元素（每力有二元素，卽其大小與方向）。若任一所設共面共點力系有三個未知元素，例如三個力之大小，或一個力之大小及另一個力之大小與方向時，則此題不能求解。

在三個力成平衡之特殊情形中，可應用下述之重要原理：

假定有三個不平行力之平衡力系，此三力必須經過一公點。

因爲假定將此力系之任何二力，合併爲一合力。此合力必經過其交點。又因第三力與此合力平衡，此第三力必須與其餘兩力之合力在同一作用線上，故第三力必經過其餘兩力之交點。

例 題

設在 30° 之斜面上有一塊狀物，重 50〔磅〕，如圖 23 所示。若運動之摩擦力爲 15〔磅〕。試求使此物塊以等速度在斜面上向上移

動時，所需與斜面平行之力 P。並求此物塊與斜面間之正反力。

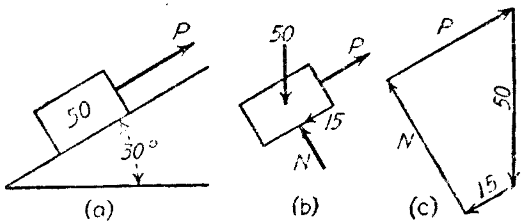


圖 23.

【解】 圖 23(a) 示此物塊停在斜面上之情形。P 爲作用於此物塊上之外力。圖 23 (b) 爲脫離體圖，其餘部分作用於此物塊上之力，均以矢量表示之。重量爲鉛直向下之 50〔磅〕力。摩擦力爲平行於斜面而向下之 15〔磅〕力。斜面之反力爲垂直於接觸面之力 N，指向左上方。至於向右上方且平行於斜面之力 P，即爲所求之未知力。力 N 與 P 之方向爲已知，但不知其大小。

此物體以等速度運動，故所有之力必須平衡。力多邊形必須閉合。在圖 23(c) 內，代表重量之 50〔磅〕矢量，先依照比例尺畫出。自其矢首，畫出代表摩擦力之 15〔磅〕力之矢量。自 15〔磅〕力之矢首，畫與力 N 平行之直線，並自 50〔磅〕力之矢尾，畫與力 P 平行之直線。自此兩直線之交點，決定 N 與 P 之大小。從圖上量出矢量 N 爲 43.3〔磅〕，矢量 P 爲 40〔磅〕。

習 題

1. 設於上述之例題中，運動之摩擦力爲 30〔磅〕。試求此物體以等速度沿斜面下落時，力 P 之大小。 答：5〔磅〕.

2 有一重 600〔磅〕之重量，懸於長 80〔呎〕之纜上。再以與水平線成 45° 角之力，拉此重量使與經過支點之鉛直線相距 20〔呎〕。試求此拉力及纜內牽力之大小。 答：295〔磅〕；835〔磅〕.

3. 圖 24 示一重 800〔磅〕之重量，懸於兩繩上。一繩長 12〔呎〕，一繩長 26〔呎〕。兩支點間之距離爲 30〔呎〕。試求兩繩內之牽力各有若干。

答：1150〔磅〕；1065〔磅〕.

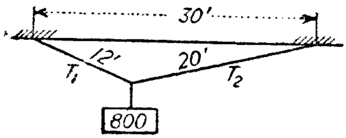


圖 24

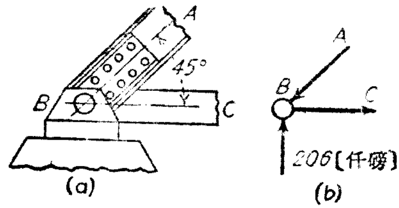


圖 25.

4. 圖 25 示一鐵路橋桁架(truss)之左柱脚。 在桁端之反力為 206〔仟磅〕。 試求端弦(end chord) AB 內之壓縮力及下弦(lower chord) BC 內之牽力。　　　答：291.3〔仟磅〕；206〔仟磅〕.

5. 試求圖 26 所示繩系內每繩內之牽力，及角 θ 之值。

答：$T_1 = 440$〔磅〕；$T_2 = 538$〔磅〕；$T_3 = 786$〔磅〕；
$T_4 = 1205$〔磅〕；$T_5 = 1200$〔磅〕；$\theta = 13°50'$.

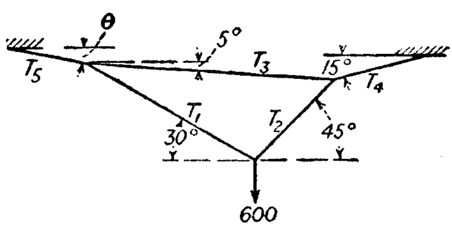


圖 26.

6. 有一長 40〔呎〕之伸臂 (boom)，一端銷住，另一端繫於一纜上. 纜之另一端則在經過銷之同一鉛直線上，且比銷高 20〔呎〕。 若不計伸臂本身之重量，試求伸臂在水平方向，並在其自由端有 4000〔磅〕之載荷時，在伸臂內及纜內之內力各有若干。 又設將纜縮短，使伸臂之自由端升高至與纜之支點在同一水平線上時，試求在伸臂內及纜內之力各有若干。 試證明伸臂與水平線成任何角時，無論在水平線之上或下，在伸臂內之力為一常數。

答：8000〔磅〕；8944〔磅〕；8000〔磅〕；6928〔磅〕.

20. 三個或多個力之平衡，三角解法.

在許多習題中，從力多邊形各矢量間之三角學關係，或幾何學關係，及空間圖中各部分間

之幾何學關係，可以提供極簡單之求解法。 在第 19 節習題 4 之解中，力三角形爲直角二等邊三角形。故三個力之大小之關係，即等於此三角形三邊之長度之關係。 力 BC 之大小，應等於鉛直方向之反力；力 AB 之大小，應等於上力 BC 之 1.414 倍。

又在求 T_1，T_2 之解時(圖 26)，力三角形之角爲 45°, 60°, 75°。據正弦定律，得

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 60} = \frac{600}{\sin 75^\circ}$$

$$\frac{T_1}{0.707} = \frac{T_2}{0.866} = \frac{600}{0.966}$$

$$T_1 = 439\,〔磅〕;\quad T_2 = 538\,〔磅〕.$$

同理，可以求得 T_3, T_4 之值。 在次一力三角形內求 T_5 時，用餘弦定律，$T_5^2 = T_1^2 + T_3^2 - 2T_1 \times T_3 \cos 155^\circ$，則更爲簡單。

例 題 1

圖 27 示一重 1500〔磅〕之載荷，懸於長 12〔呎〕之伸臂 AB 之一端；並將一端固定於牆上之繩 BC，繫住此伸臂。 角 ABC 爲 20°。 若不計伸臂重量，試求在 AB 內之壓縮力 P，及在 BC 內之牽力 T。

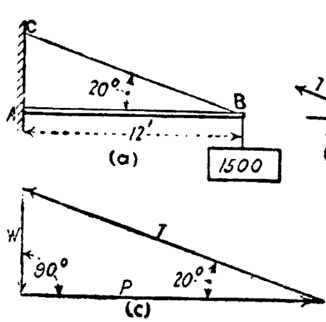


圖 27.

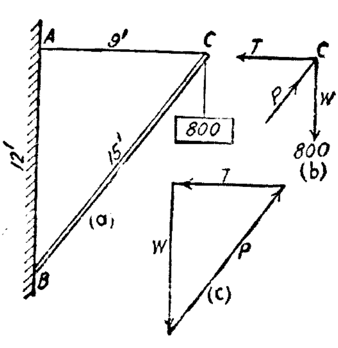


圖 23.

【解】 圖 27(*b*) 爲點 *B* 之脫離體。圖 27(*c*)爲力三角形。 據力三角形，應用三角法，得

$$T = \frac{W}{\sin 20^\circ}$$

$$T = \frac{1500}{0.342} = 4386\text{〔磅〕}$$

同理，

$$P = \frac{W}{\tan 20^\circ}$$

$$P = \frac{1500}{0.364} = 4120\text{〔磅〕}.$$

例 題 2

圖 28(*a*)示一重 800〔磅〕之載荷，懸於 15〔呎〕長之伸臂 *BC* 之一端，並以長 9〔呎〕之水平方向之 *AC* 繩牽住之。 試求因此載荷而在伸臂與繩內產生之內力。

【解】 圖 28(*b*)示點 *C* 之脫離體圖。圖 28(*c*)爲力三角形。 力三角形與空間圖之三角形 *ABC* 相似，故其對應邊成正比例。

$$\frac{P}{W} = \frac{15}{12}$$

$$P = 800 \times \frac{15}{12} = 1000\text{〔磅〕}$$

$$\frac{T}{W} = \frac{9}{12}$$

$$T = 800 \times \frac{9}{12} = 600\text{〔磅〕}$$

習 題

1. 假定所有表面均爲光滑，試求圖 29 所示圓柱體與槽間之反力 *A* 與 *B*.

答：1115〔磅〕，299〔磅〕.

2. 一物重 3000〔磅〕，懸於長 50〔呎〕之繩上． 以一水平力推此物，使其

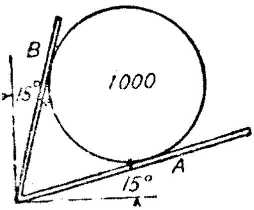


圖 29.

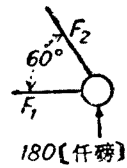


圖 30.

與經過懸點之鉛直線距離 20〔呎〕。試求此水平力之大小，及纜內之牽力。

答：1310〔磅〕；3275〔磅〕。

3. 圖 30 示一橋樑桁架右端之銷上之反力，及底弦與端弦之方向。試求內力 F_1 與 F_2。

答：牽力 104〔仟磅〕；壓縮力 208〔仟磅〕。

4. 圖 31 示吊桶之張開物，試求 P 等於 5000〔磅〕時，構件 AC 與 AB 之內力。

答：牽力 4000〔磅〕；壓縮力 3125〔磅〕。

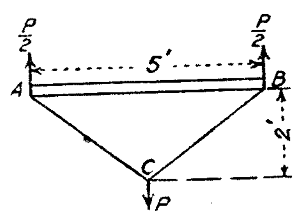


圖 31.

5. 一伸臂長 20〔呎〕，一端軸定於銷上，他端懸於纜上。若不計伸臂本身之重量，試求當其在水平線之上方並成角 30°，而有載荷加於其自由端時，纜與水平線間所成之角應等於若干，方可使纜內所生之內力為極小值？假定在自由端之載荷為 2000〔磅〕，試求此位置時在纜與伸臂內之內力。又若纜在水平方向時，問纜與伸臂之內力各有若干？

答：60°；1732〔磅〕；1000〔磅〕；3464〔磅〕；4000〔磅〕。

6. 在圖 32 內，AB 代表伸臂之一端，BC 代表支持伸臂之纜，AB 與 BC 之方向均屬固定。作用於點 B 之 3000〔磅〕力，能在經過 A B C 之鉛直平面中轉動。角 θ 變動之範圍為自 0° 至 150°。試求在 BC 內產生極大牽力時角 θ 之值，並求在此位置時，BC 及 AB 之內力。若欲 AB 內產生極大壓縮力時，θ 之值應等於若干，並求此位置時 BC 及 AB 之內力。

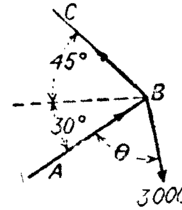


圖 32.

答：90°，3106〔磅〕；804〔磅〕；15°；804〔磅〕，3106〔磅〕。

21. 三個或多個力之平衡；應用力和之代數解法. 在任一所設共面共點力系內，若：

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0, \\ \Sigma F_y = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

則必

$$R = 0, \tag{2.8}$$

故此力系成為平衡.

反之，若一共面共點力系平衡，即

$$R = 0, \tag{2.8A}$$

則必須

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0, \\ \Sigma F_y = 0. \end{cases} \tag{2.7A}$$

因(2.7)與(2.7A)祗有兩個獨立的方程式，故祗能求得兩個未知元素. 通常為已知兩個力之方向，求其大小. 有時亦有求一個力之大小與方向者.

所採取之坐標軸之方向，可以泛定，軸 X 與軸 Y 之間之角度，亦屬隨便.

例 題

有一直徑長 1〔呎〕之熟鐵球，置於 8〔吋〕×8〔吋〕之角鐵[1]上. 角鐵之一肢，與水平線成角 30°，如圖 33(a)所示. 假定所有之面，均屬平滑，試求 A，B 兩點作用於球上之反力.

【解】 球之體積 $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.5236$〔呎^3〕. 其重量為 $0.5236 \times 450 = 235.6$〔磅〕.（每〔呎^3〕的熟鐵重 450〔磅〕）. 圖 33(b)示熟鐵球之脫離體圖. 作用於此脫離體上之力，為其重量與在 A，B 兩點之反力. 據 $\Sigma F_x = 0$，得

$$0.866A - 0.5\,B = 0$$

〔譯注〕(1) 所謂 8〔吋〕×8〔吋〕之角鐵，即指此角鐵之兩肢(leg)，均長 8〔吋〕.

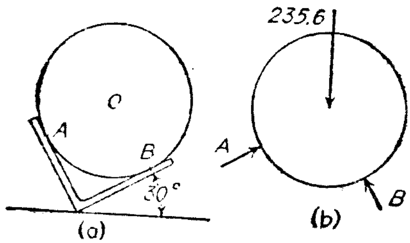


圖 33.

據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$0.5A + 0.866B - 235.6 = 0$$

此兩方程式之解爲

$$A = 117.8\,〔磅〕; \quad B = 204\,〔磅〕$$

若求平行於力 A 之方向之力和，在力程式中即無力 B，故立即求得力 A.

$$A - 235.6 \times 0.5 = 0.$$

$$A = 117.8\,〔磅〕$$

若求平行於力 B 之方向之力和，則

$$B - 235.6 \times 0.866 = 0.$$

$$B = 204\,〔磅〕$$

習　題

1. 設於上述之例題中，有一水平力加於圓球之中心。試求使點 B 之反力等於零時，此水平力之大小。並求點 A 之反力。

答：408〔磅〕; 471〔磅〕.

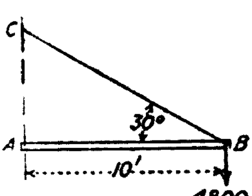


圖 34.

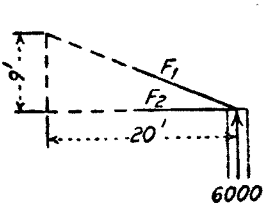


圖 35.

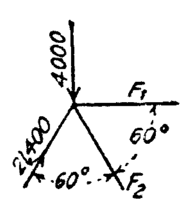


圖 36

2. 圖 34 所示之伸臂 AB，一端銷於 A，他端繫於纜 BC 上。試求因載荷 4800〔磅〕而在 AB 及 BC 內所產生之內力。

答：壓縮力 8315〔磅〕；牽力 9600〔磅〕.

3. 圖 35 表示屋頂桁架之一端。牆對於屋頂之向上反力為 6000〔磅〕. 試求內力 F_1 及 F_2 之值。 答：壓縮力 14,620〔磅〕；牽力 13,330〔磅〕.

4. 設已知圖 36 所示之力系為平衡者，試求力 F_1 與 F_2 之值。

答：壓縮力 19,090〔磅〕；牽力 16,780〔磅〕.

5. 假定在第 19 節第 5 題內，已知 T_1，T_3 之值。試用本節之方法，求 T_5 與 θ 之值。

22. 三個或多個力之平衡，應用力矩之代數解法。 若一共面共點力系為平衡者，合力 $R=0$，此合力 R 關於此力系平面上任一點之力矩為零。因合力 R 之力矩，即等於此力系各力之力矩之代數和。故此力系之所有各力，關於在其平面上任一點之力矩之代數和，亦必等於零。

設已知此力系平衡，並設不知其絕對值之力，不超過兩個。則此兩力即可求得。若所取之力矩中心，在一未知力之作用線上，但並不在兩未知力之作用線之交點上，則據方程式

$$\Sigma M_0 = 0 \tag{2.9}$$

可求得另一未知力之值。

若所取之力矩中心，並不在任何一未知力之作用線上，則力矩方程式內，必含有兩個未知量，故必須另立一獨立之方程式，方可求解。如另立之獨立方程式，亦為力矩方程式，則所取之第二個力矩中心，不能在聯結第一力矩中心與諸力之公點之直線上，否則兩力矩方程式相同。據同理，如另一獨立方程式，為類於 (2.7) 式之力和方程式，則在力和方程式內之各分力，不能在垂直於上述所聯直線的方向上。

例 題

長 32〔呎〕之伸臂 AB 與水平線成角 60°。有一重 8000〔磅〕之載荷，懸於其一端，如圖 37(a)所示。拉住此伸臂之纜 CB 係在水平方向。試求 AB 及 CB 之內力。

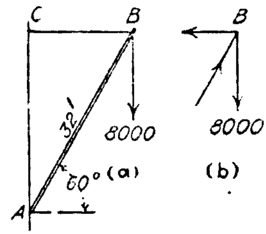


圖 37.

【解】設以點 B 爲脫離體。圖 37(b)即示此點之脫離體圖。CB 之距離爲 $32 \times 0.5 = 16$〔呎〕，距離 AC 爲 $32 \times 0.866 = 27.71$〔呎〕。

據力矩方程式 $\Sigma M_A = 0$，得

$$CB \times 27.71 = 8000 \times 16$$

$$CB = 4620\text{〔磅〕}。$$

據力矩方程式 $\Sigma M_O = 0$，得

$$AB \times 16 \times 0.866 = 8000 \times 16$$

$$AB = 9240\text{〔磅〕}。$$

習　題

1. 若在上述例題中，8000〔磅〕之力與 AB 成 60° 角，並同在一鉛直平面中。試求 CB 及 AB 之內力。

答：$CB = 8000$〔磅〕拉力，$AB = 8000$〔磅〕壓縮力。

2. 在上述例題中，若點 C 向下移動 6〔呎〕，CB 之長度不變，但伸臂與水平線間之角度增加。試解之。

答：$CB = 5900$〔磅〕拉力；$AB = 11{,}800$〔磅〕壓縮力。

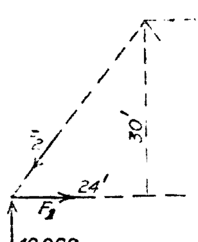


圖 39.

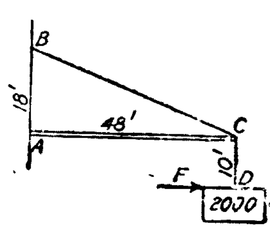


圖 40.

3. 圖 38 表示橋樑桁架左端之第一節間(panel)。求內力 F_1 及 F_2 之值。

答: 32,000〔磅〕牽力; 51,200〔磅〕壓縮力.

4. 有一長 48〔呎〕之伸臂,支持一重 2000〔磅〕之載荷,如圖 39 所示,試求載荷鉛直懸掛時,AC 與 BC 之內力。

答: 5330〔磅〕壓縮力; 5700〔磅〕牽力.

5. 若有水平力 F,施於圖 39 所示之重量 D 上,因此將重量自鉛直線推過 3〔呎〕。試求 CD 與 AC 之內力。設不用計算法,試證明 BC 之內力不因水平推力而變更。 答: 630〔磅〕; 2095〔磅〕; 4700〔磅〕.

共面共點力之總習題

1. 有一重 1000〔磅〕之重量,懸於兩繩上。一繩與水平線成 15°角,他繩與水平線成 5°角。試求此兩繩內之牽力。 答: 2910〔磅〕; 2830〔磅〕.

2. 一線之左右兩端間,沿水平方向之距離爲 80〔呎〕。左端比右端低 15〔呎〕。線上置一鬆線器,此器重 140〔磅〕,與左端間之水平距離爲 20〔呎〕,並比左端之準位低 3〔呎〕。假定此線可撓屈,並不計其重量。試求此線兩端之內力。

答: 左端 315〔磅〕; 右端 325〔磅〕.

3. 圖 40 所示之兩圓柱,直徑相等。但圓柱 1 重 800〔磅〕,圓柱 2 重 1200〔磅〕。假定所有之面均屬光滑,試求在 A,B,C,D 之反力。

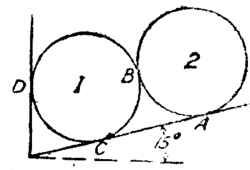


圖 40.

答: $A = 1159$〔磅〕; $B = 311$〔磅〕; $C = 911$〔磅〕; $D = 536$〔磅〕.

4. 圖 41 之圓柱 1 與 3 之直徑,均等於 2〔呎〕,其重量均等於 400〔磅〕。圓柱 2 之直徑爲 3〔呎〕,重 900〔磅〕。假定所有面均爲光滑者,試求在 A,B,C,D,E,F 之反力。

答: $A = 387$〔磅〕; $B = 204$〔磅〕; $C = 606$〔磅〕;

$D = 664$〔磅〕; $E = 970$〔磅〕; $F = 982$〔磅〕.

5. 在圖 41 內,若有一作用於圓柱 3 之中心,並向左之水平力。試求使點 A 之反力爲零,此水平力應有之值。並求在 B,C,D,E,F 之反力。

答：1195〔磅〕；$B=1260$〔磅〕；$C=183$〔磅〕；

$D=1720$〔磅〕；$E=1780$〔磅〕；$F=2180$〔磅〕.

6. 一幅畫重 80〔磅〕，懸於一迴線上。此迴線經過固定於畫後之四個螺釘環，並掛在 A 點之鈎上，如圖 42 所示，試求線內之牽力。又分求在每一螺釘環上之合力之大小與方向。

答：48〔磅〕；上面的兩環，27.8〔磅〕，與軸 X 成 $16°40'$角；

下面兩環，67.9〔磅〕，與軸 X 成角 $45°$.

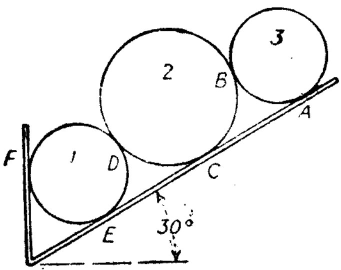


圖　41.

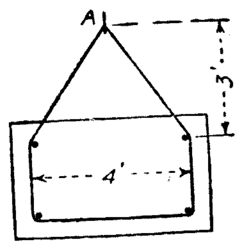


圖　42.

7. 假定所有表面都是光滑，試求圖 43 上所示兩圓柱上 A, B, C, D 各點之反力。　答：$A=124$〔磅〕；$B=159$〔磅〕；$C=400$〔磅〕；$D=124$〔磅〕.

8. 有一重 10,000〔磅〕之重量，懸於兩纜上。一纜與水平線成 $30°$角，其內力不得超過 15,000〔磅〕。試求另一纜與水平線可能有之極小角度，並求此時纜中之內力。　答：$10°55'$；13,240〔磅〕.

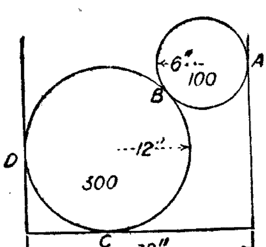


圖　43.

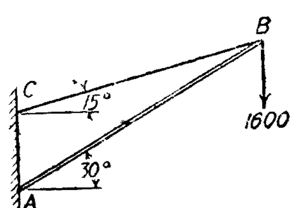


圖　44.

9. 若於第 8 題內，兩纜之內力均不得超過 12,000〔磅〕。試求各纜與水平線可能有之極小角度。　答：$24°40'$.

10. 在圖 44 內，伸臂 AB 銷於牆上之點 A。試求因 1600〔磅〕之載荷所產生之 AB 與 BC 之內力。　　答：5970〔磅〕；5350〔磅〕.

11. 圖 45 示一簡單之起重機．試求 AB 及 AC 之內力．

答：$AB = 4500$〔磅〕，牽力；$AC = 4500$〔磅〕，壓縮力.

12. 假定在圖 45 內，3000〔磅〕之拉力，能在經過 AC 之鉛直平面內轉動．試求在 AB 內可能造成之極大內力，及此時在 AC 中之內力．

答：$AB = 4770$〔磅〕，拉力；$AC = 3710$〔磅〕，壓縮力.

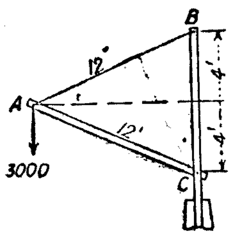


圖　45.

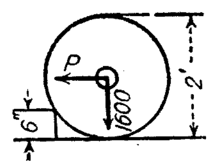


圖　46.

13. 假定圖 46 所示之直徑 2〔呎〕之輪上，有一重 1600〔磅〕之載荷．試求此輪開始滾過 6〔吋〕高之木塊時，作用於輪中心之水平力 P 應等於若干．在木塊上之反力爲若干．又若 P 之方向可以變動，試求當此輪開始滾過上述木塊時，力 P 之極小值等於若干．此時 P 與水平線間之角等於若干，又在木塊上之反力爲若干．

答：2771〔磅〕；3200〔磅〕；1386〔磅〕；60°；800〔磅〕.

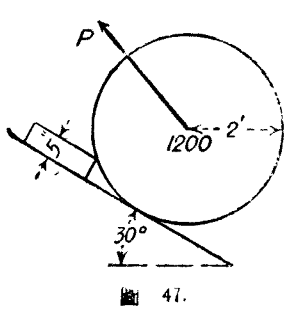


圖　47.

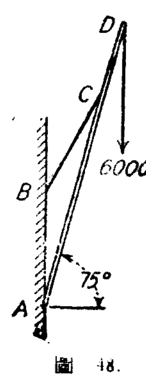


圖　48.

14. 假定輪之直徑爲 6〔呎〕。試解題 13。

答：1061〔磅〕；1920〔磅〕；884〔磅〕；35°30′；1333〔磅〕.

15. 試求使圖 47 內的輪開始滾過木塊時，極小牽力 P 應有之大小與方向，並求木塊上之反力。 答：1110〔磅〕；67°40′；456〔磅〕.

16. 圖 48 所示之起重機內，$AB=30$〔呎〕，$AD=80$〔呎〕，$CD=20$〔呎〕。設載荷爲 6000〔磅〕。試求繫桿(tie rod)BC 內之內力。並求鉸(hinge) A 之反力之大小與方向。 答：8530〔磅〕；14,060〔磅〕；72°50′.

第三章

共面平行力

23. 空間圖與力圖. 鮑氏記號 (Bow's notation). 在第11節內曾經說明,用圖解法時,最好將空間圖與力圖分別畫出,比較的方便。極簡單之問題則屬例外。若在此兩圖上用鮑氏記號,則覆核其結果時,非常有效。本書各習題均沿用此方法。

在空間圖上,介於兩作用線間之空間,註以一小寫字母。任一力之作用線,註以爲此作用線所分隔之兩空間之字母。其次序與空間圖上順時針向之字母次序相同。例如在圖49內,bc 表示空

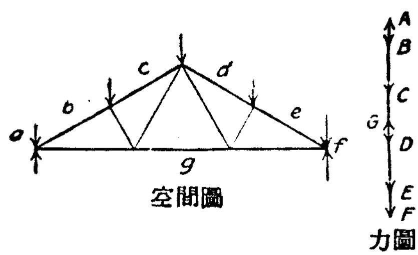


圖 49.

間 b 與空間 c 之間之作用線。大寫字母寫在力圖上對應矢量之兩端。例如,矢量 BC 代表空間圖上沿線 bc 作用之力之大小。其方向係自 B 向 C,換言之,卽向下。矢量 GA 代表空間圖上沿線 ga 作用之支座反力之大小。其方向係自 G 向 A,卽向上。

24. 兩平行力之合力.圖解法. 求兩平行力之合力時,可用第22節內所述兩共點力不在圖紙上相交時,求合力之方法求之。在

圖 50 內，命矢量 AB 與 CD 代表兩平行力，欲求此兩平行力之合力． 若在此力系上，加上值等而向反之兩共線力 AE 與 CF,其結果不變．今將矢量 AB 與 AE 合併，成其合力 AG，再將矢量 CD 與 CF 合併成其合力 CH． 如是所得此力系之兩力，AG 與 CH，相交於點 M． 若將此兩力沿其作用線移至 ML 及 MK 之位置，應用平行四邊形定律，即得其合力 MN． 此合力卽爲原有力系之合力．換言之，矢量 MN 卽等於原有矢量 AB 與 CD 之矢量和．

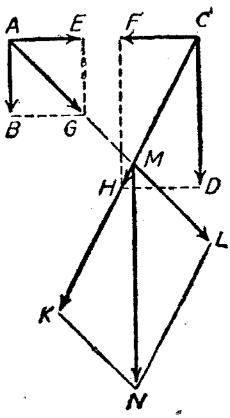


圖 50.

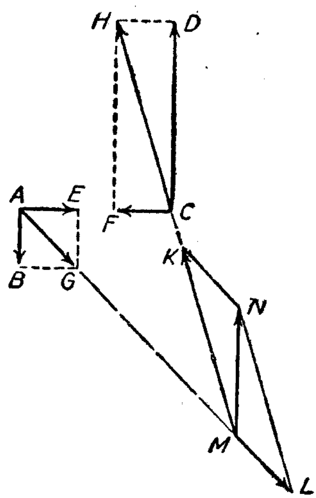


圖 51.

圖 51 示方向相反、大小不等之兩平行力，求其合力之方法． 此法與圖 50 所示合力之求法相同． 矢量 MN 之值，等於原有矢量 AB 與 CD 之代數和．

若方向相反之兩力之大小相等，則構成一**力偶**(couple)，將於第 31 節內討論之． 此時之兩力不能合併成獨個的力．

習 題

1. 在圖 50 內，命 $AB = 60$〔磅〕，$CD = 140$〔磅〕，距離 $AB = 6$〔呎〕。試求其合力之大小，及與作用線 AB 間之距離。 答：200〔磅〕；4.2〔呎〕。

2. 若將習題 1 之各項已知量，應用於圖 51 上。 試求各解。

答：80〔磅〕；10.5〔呎〕。

25. 兩共面平行力之力矩原理. 若應用第 18 節內關於兩共點力之力矩原理，可知無論圖 50 或圖 51 內之力 AB 與 CD，關於在其平面上任一點之力矩之代數和，即等於力 AG 與 CH 關於同一點之力矩之代數和，因另加力 AE 與 CF 之力矩之代數和爲零故也。根據同一原理，力 AG 與 CH (或力 ML 與 MK) 關於其平面上任一點之力矩和，等於其合力 MN 關於同一點之力矩。因此可得下述之兩平行力之力矩原理：

兩平行力關於在其平面上任一點之力矩之代數和，等於其合力關於同一點之力矩.

在圖 52 內，命 MN 爲力 AB 與 CD 之合力. 此合力 MH 關於其作用線上之任一點 O 之力矩爲零. 故據力矩方程式，得其兩分力 AB 與 CD 關於點 O 之力矩之代數和應等於零.

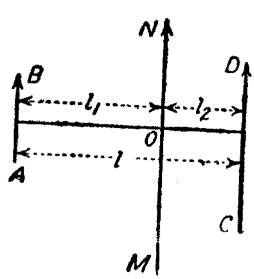


圖 52.

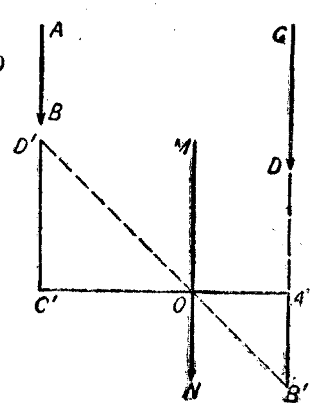


圖 53.

$$AB \times l_1 - CD \times l_2 = 0$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{l_2}{l_1} \tag{3.1}$$

據(3.1)式可得下述之原理：自合力至其兩分力之垂直距離，與兩分力之大小成反比例.

據幾何學，三平行線得按同一之比截分任何兩相交直線. 自圖53，可知 $\frac{OA'}{OC'}=\frac{OB'}{OD'}=\frac{A'B'}{C'D'}$

應用此原理於圖解上，頗多便利. 假定圖53上之 AB，CD，爲兩所設之平行力. 在此兩力之作用線間，任引直線 $C'A'$. 在作用線 AB 上，再以適當之比例尺，取線段 $C'D'$，代表力 CD. 在作用線 CD 上，再以同樣之比例尺，在反方向取線段 $A'B'$，代表力 AB. 聯結 B'，D'. 則兩直線 $B'D'$ 與 $C'A'$ 交於點 O，此即合力 MN 應經過之一點.

假定兩力之方向相反，所取之線段 $C'D'$ 與 $A'B'$ 應在基線 $C'A'$ 之同一側，而不在異側. 故基線 $C'A'$ 與聯結 D'，B' 之直線之交點，將在兩力線之外，且在絕對值較大之力之一邊.

此種由圖解法求合力之方法，謂之**反比例法** (method of inverse proportion).

上述問題之逆問題，爲將一所設力，分解爲經過兩所設點之兩平行分力. 設將圖54之力 AB，分解爲經過兩點 M，N 之兩平行分力. 畫線 CM 與線 DN，均與線 AB 平行. 經點 A，畫一線 AC，與線 CM 上之任一點 C 相聯. 再經點 B 畫線 BD，與線 AC 相平行，且與線 ND 相交於點 D. 聯結兩點 C，D，設 CD 與矢量 AB 相交於點 O. 矢量 AO 表示經過點 N 之分力，矢量 OB 表示經過點 M 之分力.

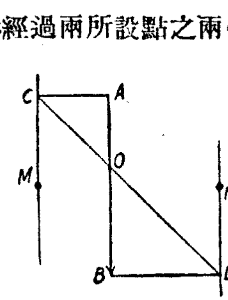


圖 54.

習題

1. 在圖 52 內，命 $AB = 8000$〔磅〕，$CD = 10.000$〔磅〕，長度 $l = 25$〔呎〕，試求其合力與距離 l_1. 答：18,000〔磅〕；13.89〔呎〕.

2. 試用反比例法解第 24 節第 2 題.

26. 兩平行力之合力，代數法. 兩平行力之合力之大小與方向，可以從兩力矩之代數和求得. 利用力矩原理，可求得其合力關於所取力矩中心之作用線. 若兩平行力之大小相等，方向相同，則其合力必作用於此兩力間之中途.

習題

1. 有兩平行力，其值分別爲 600〔磅〕與 2200〔磅〕，作用方向相同，其間之距離爲 20〔呎〕. 試定合力關於 600〔磅〕力之位置. 答：15.71〔呎〕.

2. 若習題 1 兩力之方向相反，試解之. 答：27.5〔呎〕.

27. 三個或多個平行力之合力，圖解法. 第 24 節內所討論之圖解法，可將其推廣至同平面上三個或多個平行力之場合. 若有兩個以上之力時，兼用空間圖與力圖，則比較方便. 如圖 55 所示，AB，BC，CD 三力，按序在力圖上畫出. 其在空間圖上之作用線分別爲 ab，bc，cd. 如在力圖上，任加大小相等方向相反之兩共線力 BO 與 OB：此兩力之作用線爲經過空間圖上點 m 之線 bo. 增加此兩力後，對於原有之力系毫無影響. 沿 ab 與 bo 之力 AB 與 BO，合併爲力 AO，在空間圖上力 AO 之作用線，係沿線 ao，設再加上大小相等方向相反之共線力 CO 與 OC，其作用線爲經過點 m 之線 co. 則力 CO 將 OB，BC 二力平衡，故此三力相銷. 其次，沿 oc 與 cd 之力 OC 與 CD，即合併爲沿線 od 之合力 OD.

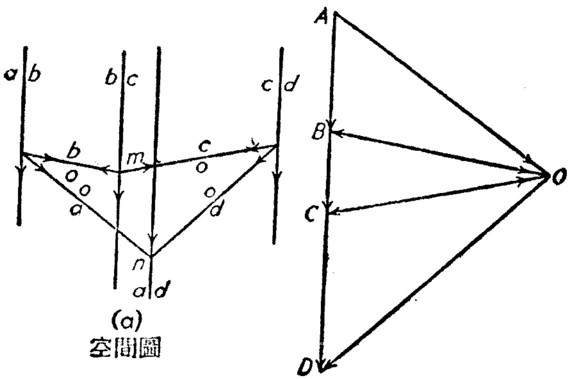


圖 55.

因此將原有力系，簡化為兩共點力 AO 與 OD，其作用線為相交於點 n 之線 ao 與 od。 此兩共點力再合併為力 AD，其作用線沿空間圖之線 ad。故經點 n 之力 AD 即為原有力系之合力。

仿此，在上述平行力系內，無論增加多少個平行力，且所增加之力祇須作用線平行無須方向相同，其合力可用類似方法求得。

力圖內之 AO,BO 等線，謂之**射線**(ray)。空間圖內之 ao,bo 等線，謂之**索**(string)。 以索聯成之多邊形，謂之**索多邊形**(funicular polygon)。 圖解時在射線與索上，無須將箭頭畫出。 求解之步驟如下：

1. 畫空間圖。
2. 畫力多邊形，並標出其合力。
3. 取一適當之極(pole) O，畫各射線。
4. 平行於力圖之射線，在空間圖上畫出索多邊形之對應索。
5. 自第一索與最後索之交點，決定合力之位置。

如用鮑氏記號，索與其對應之射線，用同樣之字母註出。 例如，索 ob 與射線 OB 平行，畫於兩線 ab, bc 間之空間 b 內。 第一索 oa 與最末索 od 之交點，決定合力之作用線之位置。

若力多邊形上之終點與始點相重合，則其合力 R 爲零．　但若第一索與最末索不相重合時，則此力系相當於一力偶．　關於此點將於第 31 節內討論之．

第 25 節內所述之反比例法，亦可應用於三個或多個平行力．其法先將任何兩力，合併成一合力．　再將此合力與第三力合併成一合力．餘類推，至將所有平行力合併成一合力時爲止．

例　題

試將圖 56 所示之五力，併成一合力．

【解】　先畫出空間圖，如圖 57(a)，以顯示各力之作用線．　作用於桁架上

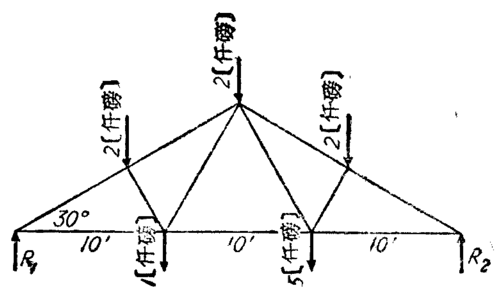


圖 56.

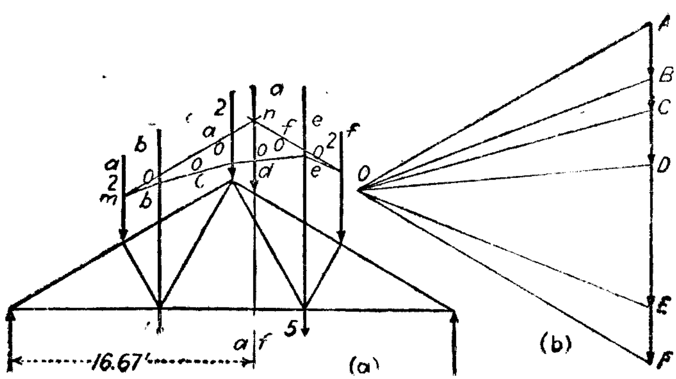


圖 57.

面之兩反力之作用線，將其向上延長，於是五條作用線所註字母，均在桁架之上方．在圖 57(b)上，依照比例尺將五個矢量自 A 至 F 畫出．矢量 AF 即爲此力系之合力，自比例尺量得其大小爲 12〔仟磅〕，其方向爲自 A 至 F．任選擇一點 O，畫射線 OA，OB，等．自線 ab 上之點 m 開始，先畫平行於 AO 之索 ao．再分別畫出與力圖上對應射線平行之索 ob，oc，od，oe 等．其最末索 of 與 OF 平行．則 ao 與 of 之交點 n，決定合力 AF 之作用線 af．此作用線與桁架左端之距離，用比例尺上量出，得 16.67〔呎〕．

習　題

1. 在長 30〔呎〕之水平梁上向下作用之鉛直載荷如下：離左端之 5〔呎〕處有400〔磅〕；在其中點有 900〔磅〕；在其右端有 1200〔磅〕．試求合力之大小與位置．　　答：2500〔磅〕，與左端相距 20.6〔呎〕．

2. 在上述例題中，若 1〔仟磅〕之力之方向係向上而非向下．試求其合力之大小與位置．　　答：10〔仟磅〕；與左端相距 18〔呎〕．

28．三個或多個平行力之合力，代數法． 三個或多個平行力之合力之大小與方向，可據其代數和求得．欲求合力之位置時，則須將第 25 節所述之力矩原理，推廣至三個或多個之力．兩平行力關於其平面上任一點之力矩之代數和，即等於其合力關於同一點之力矩．平行力系中之任何兩者，可併成一合力；再求此合力與第三力之合力，仿此類推．至將此力系之所有各力，併成獨一合力爲止．

任何個之共面平行力，關於其平面上任一點之力矩之代數和，等於其合力關於同一點之力矩．

命 a 爲合力 R 與任一參考點間之垂直距離，而 a_1，a_2……等爲平行力 F_1，F_2……等關於同一參攷點之垂直距離，則

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i a_i = F_1 a_1 + F_2 a_2 + \cdots = Ra \quad (n = \text{任一正整數})$$

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i a_i}{R} \tag{3.2}$$

例 題

試求圖 58 所示四力之合力之大小、方向、及位置。

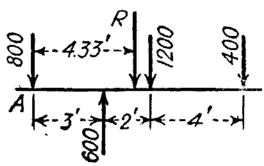


圖 58.

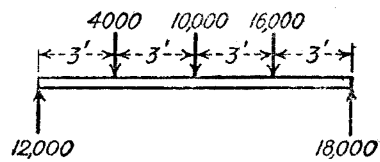


圖 59.

【解】 四力之和爲 800 + 1200 + 400 − 600 = 1800〔磅〕，指向下方。命 a 爲自點 A 至合力之作用線間之距離，則

$$1800 \times a = (1200 \times 5) + (400 \times 9) - (600 \times 3)$$

$$a = 4.33 \text{〔呎〕}.$$

習 題

1. 試求圖 59 所示三個向下力之合力之位置。 答：與左端相距 7.2〔呎〕.
2. 試求圖 59 所示兩個向上力之合力之位置。
3. 若將圖 58 內 400〔磅〕力之方向倒轉，試求其合力之大小方向及位置。
   答：1000〔磅〕，向下，在 A 點之右 0.6〔呎〕.

29. 平行力之平衡，圖解法。 在第 27 節前部所說明之圖解法內，若力多邊形之終點與始點相合，則此力系之合力 R 等於零。又若於空間圖內，索多邊形之最末索與起始索相重合。則此力系之合力矩必等於零，故此力系平衡。

反之，若一共面平行力系平衡，則其力多邊形必須閉合，索多邊形

亦必須閉合。

應用上述之平衡之兩個條件，可求得兩未知力。

第 27 節末段所述之方法，可將其推廣至求出平衡之平行力系中兩未知力之値。用反比例法，可將所有諸已知力，合併爲一合力。因原有之力系係在平衡狀態中，故此合力與兩未知力必須平衡。若利用第 25 節之方法，將合力分解爲沿兩未知力之作用線之兩分力，則此新成立之四力力系必須平衡。故各未知力必與在其同一作用線上之分力，大小相等，方向相反，因得全部決定。

例題 1

試求圖 60 所示之梁之反力 R_1 與 R_2。

【解】 先依比例尺，畫出圖 60(a) 所示之空間圖。再將各已知力，如 AB,

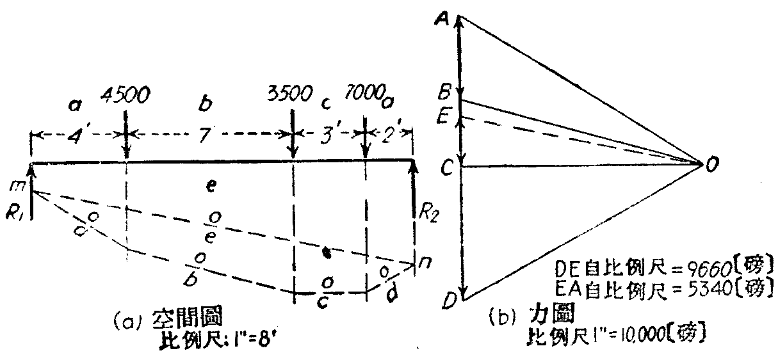


圖 60.

BC,CD，儘量依照比例尺將力多邊形畫出，如圖 60(b)所示。因爲此力系平衡，故 A 又須爲終點，但 E 爲一未知點。點 E 之位置，可利用索多邊形必須閉合之事實求之。選擇一適當之極 O，作射線 OA,OB,OC,OD. 索多邊形可自任一力上之一適當點開始；例如於 R_1 上之點 m 開始。索 oa 畫過空間 a，平行於射線 OA。自 oa 與 ab 之交點畫索 ob 通過空間 b；此索與射線 OB 平行。索 oc 及 od 可用同樣方法畫出。因索多邊形必須閉合，故索 oe 必須自點 m 至點 n。在力圖上畫射線 OE，平行在空間圖之索 oe，因此

決定點 E。 矢量 DE 代表反力 R_2，矢量 EA 代表反力 R_1。 此兩矢量之值，均可用比例尺量出。

例 題 2

試求圖 61 所示梁之反力 R_1 與 R_2。

【解】 圖 61(b)內，在2000〔磅〕力之作用線上，按比例尺取線段 AB，代表

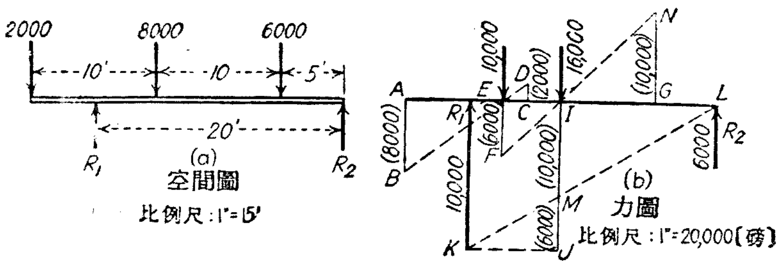


圖 61.

8000〔磅〕之力。 在 8000〔磅〕力之作用線上，並在基線 AL 之另一邊，按比例尺取線段 CD，代表 2000〔磅〕之力。 線 BD 截基線於點 E，此即定出 10,000〔磅〕合力之位置。 用同樣方法，求 10,000〔磅〕力與 6000〔磅〕力之合力之位置，此合力經過基線之點 I。 取線段 IJ，代表 16,000〔磅〕之力。 畫水平線 JK，與 R_1 之作用線相交於點 K。 畫水平線 IL，與 R_2 之作用線相交於點 L。聯結 K,L,則直線KL與 IJ 相交於點 M。此點將 IJ 分為兩段。 IM = 10,000〔磅〕，MJ = 6000〔磅〕。分力 IM 係沿 R_1 作用，分力 MJ 係沿 R_2 作用。故反力 R_1 必等於向上之 10,000〔磅〕力。反力 R_2 等於向上之 6000〔磅〕力。

習 題

1. 解例題 1，但假定在離左端 2〔呎〕處，增加一向下而等於 5000〔磅〕之力。 答：10,280〔磅〕；9720〔磅〕。

2. 有一長 20〔呎〕之均梁，重 3600〔磅〕，支於其兩端。離左端 5〔呎〕處，有載荷 6400〔磅〕，離右端 4〔呎〕處，有載荷 8000〔磅〕。試求兩支座上之反力。

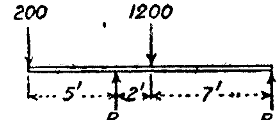


圖 62.

答：8200〔磅〕；9800〔磅〕.

3. 試求圖 62 所示伸出梁(overhanging beam)之反力。

答：1244〔磅〕；156〔磅〕.

30. 平行力之平衡，代數解法。

若任一共面平行力系中，

$$\Sigma F = 0, \tag{3.3}$$

即其合力為零，故此力系為**移動平衡**(equilibrium in translation)者. 又若關於此力平面之任何垂直軸之力矩和

$$\Sigma M = 0, \tag{3.4}$$

即其合力矩為零，則此力系為**轉動平衡** (equilibrium in rotation)者。

反之，若一共面平行力系平衡，則其合力

$$\Sigma F = 0, \tag{3.3A}$$

其關於任何軸之合力矩

$$\Sigma M = 0. \tag{3.4A}$$

若於一已知之平衡力系內，有若干之力為未知者，則此等未知力，可據平衡條件求之。 但未知力之數，不得超過可能列出之獨立方程式之個數。 對於共面平行力系，祇得解出兩個未知量.

若將此力系中一未知力作用線上之某點，作為力矩中心. 則在方程式中，祇含有一個未知量，而此未知量即能求得。 他一未知量，可用另外一力矩方程式，或用力和方程式求之。

用反比例法求雙支梁(simply supported beam)之未知反力，頗為便利. 若雙支梁之支座及載荷均屬對稱者，則無須解方程式，即知每一反力等於載荷總量之半。

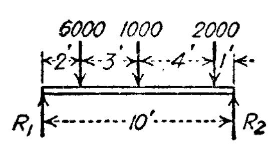


圖 63.

例 題

一梁長 10〔呎〕，支於其兩端。 梁上

有三個載荷，如圖 63 所示。試求反力 R_1 與 R_2 之值。

【解】 以 R_2 上之任一點爲力矩中心，據 $\Sigma M = 0$，得

$$10R_1 - (2000 \times 1) - (1000 \times 5) - (6000 \times 8) = 0$$

$$R_1 = 5500 \text{〔磅〕。}$$

若將 R_1 上任一點爲力矩中心，則據力矩方程式得

$$10R_2 - (6000 \times 2) - (1000 \times 5) - (2000 \times 9) = 0$$

$$R_2 = 3500 \text{〔磅〕。}$$

如不用第二個力矩方程式，則可據 $\Sigma F = 0$，得

$$R_2 + 5500 = 9000$$

$$R_2 = 3500 \text{〔磅〕。}$$

兼用兩方程式，可以覆核其解是否正確。

如用反比例法，則

$$R_1 = {}^8/_{10} \times 6000 + {}^5/_{10} \times 1000 + {}^1/_{10} \times 2000 = 5500 \text{〔磅〕。}$$

$$R_2 = {}^9/_{10} \times 2000 + {}^5/_{10} \times 1000 + {}^2/_{10} \times 6000 = 3500 \text{〔磅〕。}$$

以上兩式，實即兩個力矩方程式，各除以 R_1 或 R_2 之力臂時所得者。

習　題

1. 試求圖 64 所示之梁之反力 R_1 與 R_2。　　答：5667〔磅〕；4333〔磅〕

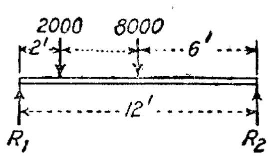


圖　64.

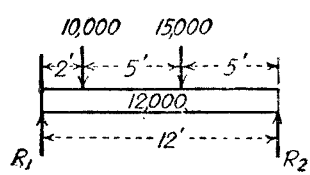


圖　65.

2. 試求圖 65 所示之梁之反力 R_1 與 R_2. 梁本身之重量，假定爲平均分布者。　　答：20,580〔磅〕．16,420〔磅〕.

3. 試求圖 66 所示伸出梁之反力 R_1 與 R_2.　答：−550〔磅〕；4550〔磅〕.

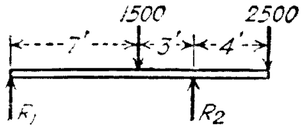


圖 66.

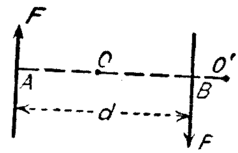


圖 67.

31. 力偶. 大小相等,方向相反,而作用線不同之兩個平行力,構成一**力偶**(couple);例如圖 67 之 F, F. 此兩力間之垂直距離 d, 謂之此力偶之**臂**(arm). 力偶之任一力與臂之積,謂之**力偶之轉矩**(moment of the couple),簡稱**力矩**;即

$$力矩 = Fd \tag{3.5}$$

力偶,關於其平面上之任何點之力矩爲一常數. 其證明如下:命 O, O' 爲在此力偶平面上之任何兩點(圖 67).

$$\Sigma M_0 = F \times \overline{OA} + F \times \overline{OB} = F \times \overline{AB} = Fd.$$

及

$$\Sigma M_0' = F \times \overline{O'A} - F \times \overline{O'B} = F \times \overline{AB} = Fd.$$

因力偶之合力 R 爲零,故力矩爲力偶所產生之唯一效應. 故據以上兩原理,可見力偶可在其平面上移至任何地方或轉過任何角度,其效應不變.

因力矩爲力偶之唯一效應,故任何力偶,得以在同一平面上而力矩值相等之任意力偶替代之. 例如各等於 8〔磅〕,相距 3〔呎〕之兩力所組成之力偶,與各等於 4〔磅〕,相距 6〔呎〕之兩力所組成之力偶,若其轉動方向相同,則兩者之轉動效應相同.

一個力不能平衡一個力偶. 因力偶之合力 R 爲零,故一力偶與另外一力之合力,決不等於零.

一力偶可以移至與原來平面相平行之任何平面中,而不變其效

應．因力偶關於其平面上之任一點 O 之力矩，與關於經過點 O 而與其平面垂直之軸之力矩，完全相同．故力矩與其力偶平面在軸上之位置無關．例如用兩鐵管扳鉗 (wrench)，將一汽管旋入一套筒內，無論旋鉗夾在管上之何處，其效應不變．

因力偶除其大小及方向外，並無其他性質，故圖解時能以矢量表示之．矢量之長度，按某比例尺代表力偶之大小，矢量之方向，表示力偶平面之方向及其轉動之方向．此矢量與力偶平面垂直．矢首之方向，通常用下述之慣例決定之．卽假定從矢首向矢尾看去，則力偶之轉動方向須爲反時針向，或正向．

矢量之位置，可以隨便．因力偶關於垂直於其平面之任何軸之力矩，爲一常數．

在同一平面中，或在許多平行平面中之任何個之力偶，其合力偶之力矩，卽等於各力偶之力矩之代數和．

力偶可以合併．其法祇須將其矢量合併．因力偶之矢量之位置可以隨便，故能使各力偶之矢量，都經過一所設點．然後用圖解法求其矢量和．此合矢量卽可完全代表合力偶．

習　題

1．試求圖 68 所示兩力，關於點 C 之力矩．　　答：$+12,470$〔磅·呎〕．

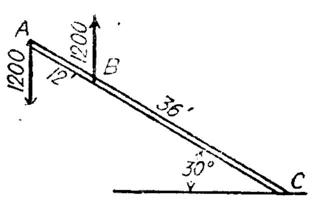


圖　68.

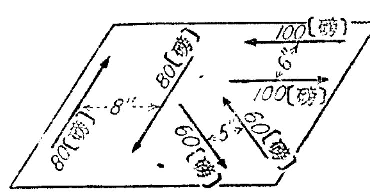


圖　69.

2．圖 69 表示水平方向之一平板，有三個力偶作用於其平面上．假定用 1〔吋〕= 10〔磅·吋〕之比例尺，將此等力偶用矢量畫出．試求代表此三力偶

之合力偶之矢量，其長度與方向如何？　　　　答：2.6〔吋〕；向上。

32. 分解一力爲經過所設點之一力及一力偶. 在解若干問題之時，若將所設力以經過某所設點之一力及一力偶替代之，時感便利。在圖 70 內，F 爲過一定點 A 之所設力。O 爲任一所擇點。若於點 O，加上方向相反之兩共線力 F_1，F_2，各力的大小均等於 F，且與 F 平行。則原有之力系並不受影響。力 F 與 F_1 構成一力偶，其力矩爲 Fd。此力偶可在其平面上移至任何地方，亦可移至任一平行之平面上。所餘下之力 F_2，爲過點 O 者，其方向與 F 相同，大小與 F 相等，但其作用線不同。

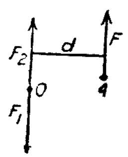


圖 70.

例　題

試將圖 71(a)所示之力，分解爲經過點 O 之一力，及一力偶。圖上所示之長方形，濶 3〔呎〕，高 1〔呎〕。

【解】 過圖 71(b)之點 O，增加兩力。一爲 F_2，平行於 F，大小相等，方向相同。一爲 F_1，亦平行於 F，大小相等，方向相反。此三力所成之力系，因 F_1 與 F_2 互相抵銷，故與原有之力系完全相等。若將 F_1 與 F 合成一力偶，其力矩爲 -6000〔磅•呎〕。所餘之力，爲與 F 大小相等，方向相同，但經過點 O 之力 F_2。由此可見，分解後之力與原有之力大小相等，方向相同。分解後之力偶之力矩，與原有之力關於點 O 之力矩，大小相等，方向相同。

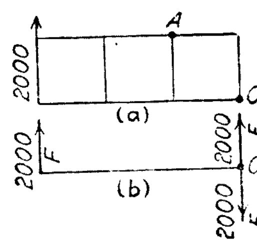


圖 71.

習　題

1. 將圖 71 之 2000〔磅〕力，分解爲經過點 A 之一力及一力偶。設將力偶在其平面上移動，使力偶之力一經點 O，一經點 A，試求此力偶之力之極

小值。 答：-4000〔磅•呎〕;2828〔磅〕.

2. 圖 72 示煤氣管之一段 ABC，一端固定於 A，在另一端以力 40〔磅〕，使管扭轉。此力與煤氣管垂直，且在經過點 C 之水平面中。 試將作用於點 C 之力，分解爲經過 B 點之一力及一力偶。 試求在 AB 段上之扭轉效應，及在點 A 之彎曲效應。

答：640〔磅·吋〕;800〔磅•吋〕.

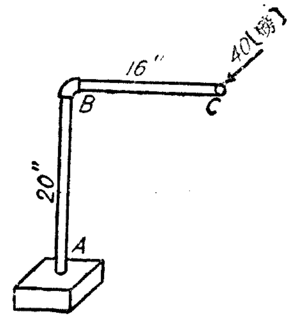


圖 72.

共面平行力之總習題

1. 試求圖 73 所示懸臂式桁架(cantilever truss)上諸載荷之合力之大小與位置。 答：15〔仟磅〕; 離線 AB 7.6〔呎〕.

2. 圖 74 內，B 爲 AE 之中點，BC 與 AB 垂直。 試求三個載荷之合力之大小與位置。 答：12〔仟磅〕; 離點 A 12.65〔呎〕.

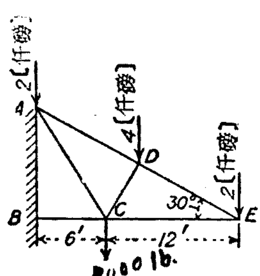


圖 73.

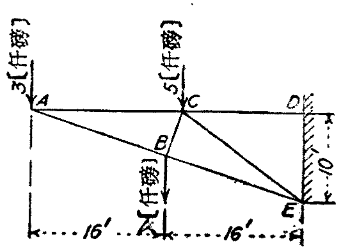


圖 74.

3. 試求圖 75 所示之桁架上諸載荷之合力之大小與位置，並求反力 R_1 與 R_2. 答：23〔仟磅〕; 離 R_1 1[illegible].3〔呎〕; 10.67〔仟磅〕; 12.33〔仟磅〕.

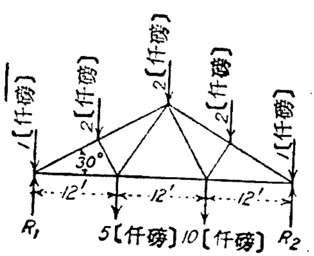
4. 試求圖 76 所示桁架上五力之合力之大小，並定其作用綫與下弦 BC 之交點之位置。 答：18〔仟磅〕; 12.2〔呎〕.

5. 試求圖 77 所示梁上之反力 R_1 與 R_2. 答：4625〔磅〕; 3375〔磅〕.

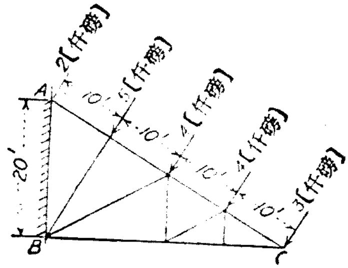
6. 試求圖 78 所示伸出梁之反力 R_1 與 R_2.

答：22,750〔磅〕; 31,250〔磅〕.

7. 試求圖 79 內所示梁之反力 R_1 與 R_2. 若使 R_2 等於零，在左端上之載荷何應增加若干？　　答：26,840〔磅〕；4960〔磅〕；10,540〔磅〕.



75



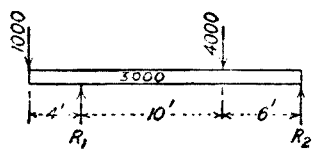


圖 77.

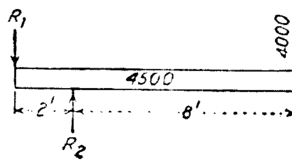


圖 78.

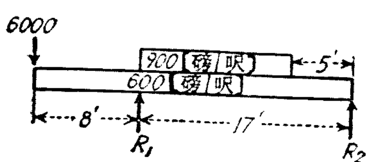


圖 79.

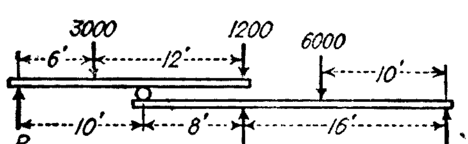


圖 80.

8. 一秤之錘重 4〔磅〕，秤之短臂長 2〔吋〕. 問此秤上磅之刻度之間隔應等於若干？　　答：$\frac{1}{2}$〔吋〕.

9. 試求圖 80 所示梁系，因集中載荷而產生之反力 R_1，R_2，與 R_3.

答：240〔磅〕；9690〔磅〕；270〔磅〕.

10. 圖 81 表示三馬分擔器(three-horse evener)。若依照圖上所注之尺寸,並設總牽輓力(total tractive power)爲 P, 試求 A,B,C 三馬,各分擔輓力百分之幾. 答: 34.3; 30.9; 34.8.

11. 在圖 81 所示之分擔器內,馬 B 落在後面,至其牽輓力爲零爲止。 試求 A,C兩馬,每馬分擔總牽輓力百分之幾. 答: 46.9; 53.1.

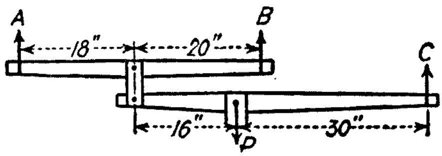


圖 81.

12. 一裝有橡皮輪胎之農具牽引機,重 2500〔磅〕。 前後輪之軸間距離爲 80〔吋〕,重心在主動輪前 30〔吋〕。聯接被拖載荷之點,比地面高 20〔吋〕。如輪胎與地面間之摩擦係數爲 0.4,試求可能產生之極大牽輓力。 又在前後兩輪上之鉛直反力爲若干? 若牽輓力爲零時,在前後兩輪上之反力應各爲若干? 答: 695〔磅〕; 765〔磅〕 1735〔磅〕; 940〔磅〕; 1560〔磅〕.

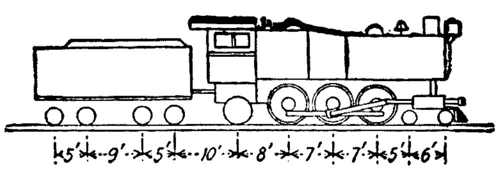
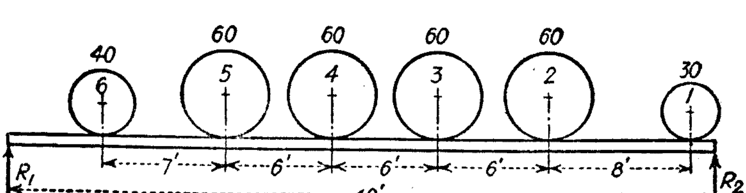


圖 82.

13. 圖 82 爲 A.T. & S.F. 之客車用機車之草圖,圖中注有尺寸。 主動輪上之載重爲 147,400〔磅〕。 主動輪前之導輪(front truck)上之載重爲



28,600〔磅〕。 主動輪後之從輪(trailer)上之載重爲38,600〔磅〕。所拖煤水車(tender)之重量爲128,000〔磅〕。設有直徑80〔呎〕之轉盤(turn-table),欲在其上得到完全之平衡,試求機車最前之導輪中心與轉盤邊間之距離。 答:8.7〔呎〕.

14. 假定有一串如圖83所示之輪載荷,在一梁上滾過。設任一輪之中心在梁中點之一側,而整個輪系之重心在梁中點之他側,且那輪的中心與梁中點間之距離,等於輪系重心與梁中點之距離時,則在此輪下之彎曲力矩達極大値。試求在輪4下產生極大力矩時,此輪與梁左端間之距離;並求在此位置時之反力 R_1 與 R_2,圖上載荷之單位爲〔仟磅〕。

答:18.7〔呎〕;144.9〔仟磅〕;165.1〔仟磅〕.

15. 假定在題14內,並無從輪(即輪6),但其餘諸輪之載荷不變。試求其解。 答:17.56〔呎〕;118.5〔仟磅〕;151.5〔仟磅〕.

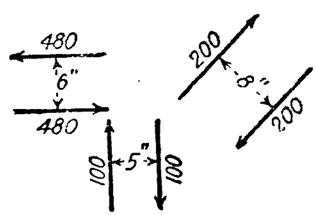


圖 84.

16. 將圖84所示之三個力偶併成一合力偶。若與此等力偶平衡之力偶,兩力間相隔4〔吋〕,試求各力之大小。 答:780〔磅·吋〕;195〔磅〕.

17. 一工人用力關閉閘閥(gate valve)。在一直徑2〔呎〕之手輪之對邊上,每隻手須用力30〔磅〕。有時工人將一桿穿入此手輪中,並在此桿之一邊,離開中心40〔吋〕之處用力。問此力應等於若干? 又,此兩種情形之作用,不同之點何在? 答:18〔磅〕.

第四章

共面非共點力

33. 二力構件與多力構件. 在解析普通之屋頂桁架或橋梁桁架時，通常假定其內力係沿各構件(member)之軸作用. 整個桁架之各構件假定用銷(pin)接合. 換言之，卽假定每一構件之長度，祗從一個接頭(joint)到次一接頭，而諸構件之間，均用銷相互聯接. 構件本身之重量，與作用於構件上之其他各力比較，往往得略去不計. 有時若重量不能略去，則假定其平均分攤於構件之兩端. 適合於此等假設之構件，謂之**二力構件**(two-force member)，因所有之外力，祗作用於此構件兩端之兩點上也. 作用於一端之諸力之合力既與他端之合力平衡，故此兩合力之作用線，必沿構件之軸向. 因二力構件之內力必係軸向者，故可在此構件之任何處作一截面，以取脫離體.

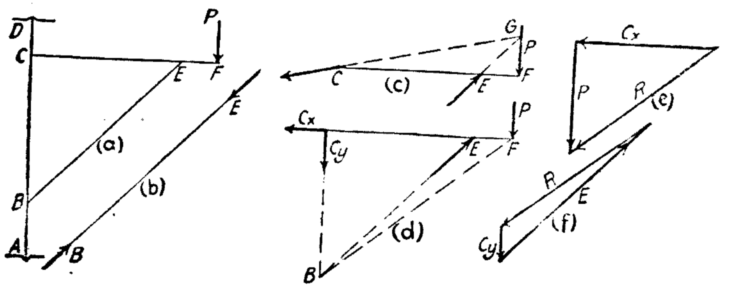


圖 85.

在圖 8 (a)所示之起重機內，若撐臂 BE 本身之重量，與 B,E 兩端所受之力比較時，可以略去不計，則 BF 爲二力構件. 圖85(b)爲其脫離體圖. 但在解題時，此種脫離體圖無須畫出.

實際上，許多橋梁桁架之接頭，都用鉚接合，若干屋頂桁架之接

合頭亦用鉚接，並且許多構件是經過幾個接頭者，但在解析時，都視作二力構件。惟爲安定性(stability)而必須有承受彎曲力之能力時，則不能視作二力構件。無彎曲力時之安定性條件，爲結構之所有構件，均須構成三角形，外來之載荷，必須作用於三角形之諸頂點上。

假定結構構件所構成之形狀，非三角形時，或外來之載荷，不在三角形之頂點上時，則有若干構件，其受力點在三個或三個以上。此種構件，謂之**多力構件**(multiple-force member)。在此種構件內之內力，一部分係軸向力，但同時尚有彎曲力與剪力，故必須將整個構件，視作一脫離體。求解時爲求出其他部分對於此脫離體作用之力，而非爲在構件本身之內力[1]。

假定一物體受有三個外力，而成平衡，則此三力必須交於一點或互相平行。任何兩個力之合力，必須與第三力之大小相等方向相反。圖 85(a)所示之伸臂 CEF 爲多力構件，圖 85(c)爲其脫離體圖。作用於點 F 之力爲外來之載荷 P. 作用於點 E 之力，與作用於撑臂 BE 上點 E 之力大小相等，方向相反。因而兩力之方向爲已知，其交點 G 即決定在點 C 之力之作用線上之另一點。同理，如將整個起重機作爲一脫離體，則自力 P 之作用線，與在點 D 之水平方向反力之作用線之交點，決定在點 A 之反力之方向。

假定一物體受有四個外力而成平衡，則任何兩個外力之合力，必須與另外兩個外力之合力，大小相等，方向相反。若在四力之中，有一力之大小及方向已全知，其餘三力，祇知其方向。則其餘三力之大小，可以求得。

如將作用於點 C 之反力，分解爲 X, Y 兩分力。則上述之伸臂，即爲四力成平衡之力系之一例。普通解題之手續，係將 P, E 兩力

【譯注】(1)　多力構件本身之內力之解法，將於材料力學內討論之。

合併，及將 C_x，C_y 合併。在此情形中，其解與圖 85(c)之解相同。所不同者，卽爲將力 C分解爲兩個分力。

如將 C_x 與 P 合併，C_y 與 E 合併，則可得不同之解法。圖 85(d)之線 BF，爲兩對力之合力之公共作用線。圖 85(e) 爲解在點 F 之力三角形者。據此三角形，可以求得 C_x 與 R，而 R 爲 C_x 及 P 之矢量和。合力 R 應與力 E 及 C_y 平衡，故此三力必成一閉合三角形，如圖 85 (f)所示。假定在平衡之物體上，有五個或多個力作用，通常能將其兩個力或兩個以上的力合併，因此能將所設力系化爲四力力系，然後再用上法解之。

34. 贅餘力系. 假定一結構之構件，較多於得到安定性所必需之個數，則多餘之構件，謂之**贅餘構件**(redundant member)。若於取脫離體時，將贅餘構件切截，則其未知量，較多於自平衡條件所能寫出之獨立方程式個數。故此力系謂之**靜不定力系** (statically indeterminate force system)。

假定一結構之支座，較多於平衡條件所必需之支座時，則此結構亦可能爲**靜不定結構** (statically indeterminate structure)。放在平地上之桌子，有四個，五個，或更多個等長之脚者，卽爲靜不定結構之例。因欲使桌子平衡，三脚已經足夠。超過此數之脚，均爲贅餘。

爲求解計，有時另加合理之假定。例如一圓桌有六個等長之脚。假定此六脚以相等的間隔排列在一個圓周上，再假定桌面上之載荷，在圓周之中心。此可有合理之假定，卽每桌脚之載荷，爲總載荷六分之一。在圖 86 所示之桁架中，設 a，b 兩構件，均能承受牽力或壓縮力；則非構件 a 或 b，爲一贅餘構件。假定 a,b 兩構件，祇能承受牽力；則在圖上所示載荷情況中，b 爲有作用之構

件，a 之內力為零。

35. 共面非共點力之合力，圖解法. 假定圖 87 之 F_1，F_2，F_3，等為所欲合併之諸力. 將 F_1，F_2 沿其作用線移動至其交點 m，然

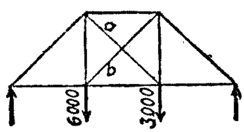


圖 86.

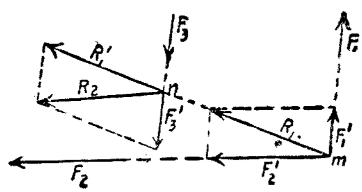


圖 87.

後將其合併為其合力 R_1. 再將 R_1 與 F_3 沿其作用線移動至其交點 n，求其合力 R_2. 此 R_2 即為 F_1，F_2，F_3 之合力. 如尚有其他之諸力，則可用同樣手續將其逐一合併，以得最後之合力.

若諸力約略平行時，在圖紙上不能得其交點，則可應用第27節內求平行力之合力法. 在圖 88 內，沿作用線 ab，bc，cd 之力 AB，BC，CD，可以合併為沿空間圖上線 ad 作用之合力 AD.

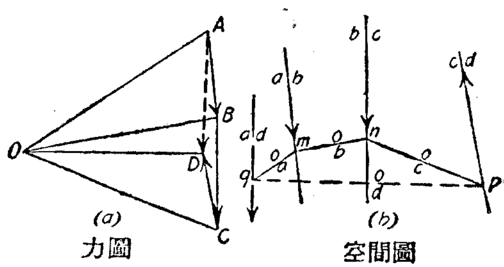
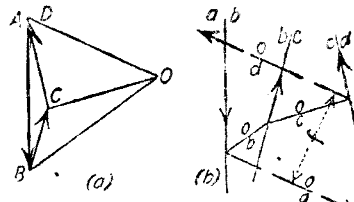


圖 88.

假定力多邊形閉合，而索多邊形不閉合，則合併之結果為一力偶. 在圖 89 內，力矢量 AB，BC，CD 形成一閉合多邊形. 其點 D 與點 A 相併合. 諸力在空間圖上之作用線分別為 ab，bc，cd. 在力

圖上任取一點 O，畫射線 OA, OB, OC, OD. 在空間圖上，畫其對應索 oa, ob, oc, od。其中 oa, od 兩索平行，但並不共線。故所設力系可以簡化爲大小相等，方向相反，但相隔距離 f 之兩平行力 AO 與 OD.



力圖　空間圖

圖 89.

例 題 1

假定有六個力作用於圖 90 (a) 所示之伸臂上. 力四個爲已知兩個爲未知. 試將四個已知力，合併爲一合力.

【解】 在圖 90(a)上，6000〔磅〕之水平力及 4000〔磅〕之鉛直力，沿其作

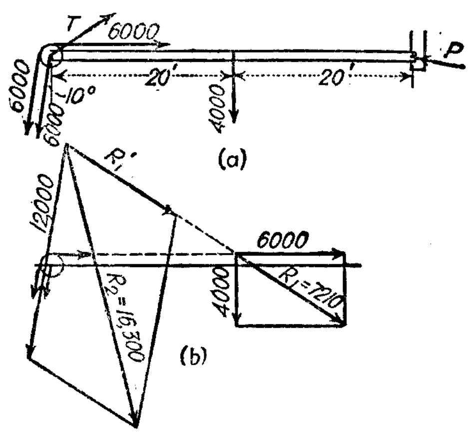


圖 90.

用線移動至其交點. 用平行四邊形法將其合併，得合力 $R_1 = 7210$〔磅〕. 其餘兩個 6000〔磅〕之平行力，合併爲經過兩力中點之合力 12,000〔磅〕. 再將力 R_1 與 12,000〔磅〕力沿其作用線移動至其交點，於是合併成合力 $R_2 =$ 16,300〔磅〕. R_2 即爲四個已知力之合力.

例 題 2

試將圖 91(*a*)所示作用於桁架上之風載荷與死載荷之合力.

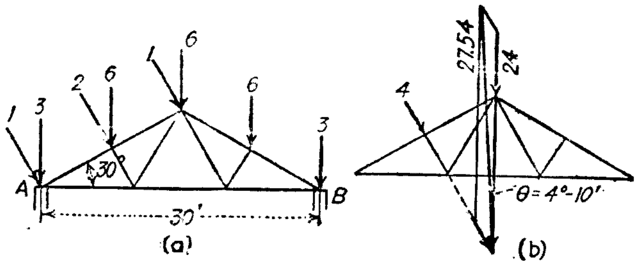


圖 91.

【解】 從力之對稱上,可看出五個鉛直力之合力,爲經過桁架中點之 24〔仟磅〕之力. 三個風載荷之合力爲 4〔仟磅〕,其作用線與 2〔仟磅〕風力之作用線相同. 此兩合力之作用線,位置見圖 91(*b*). 再用平行四邊形法,求其合力,量得 27.54〔仟磅〕. 此合力與鉛直線間之角 θ 量得爲4°10′.

習 題

1. 試求圖 92 所示框架(bent)上諸載荷之合力之大小,方向,與位置.

答: 22.56〔仟磅〕;與水平線成 77°10′角;R 在 BD 上之交點,距點 B 25.9〔呎〕.

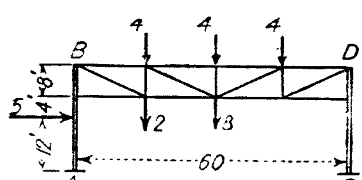


圖 92.

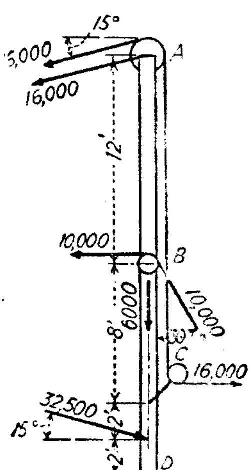


圖 93.

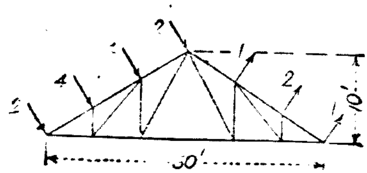


圖 94.

2. 求圖 93 挖泥機(dredge)之桅(mast)上，七個載荷之合力之大小，方向與位置，滑輪 A 之直徑爲 2〔呎〕。滑輪 B 與 C 之直徑爲 1〔呎〕。

答：33,390〔磅〕，向右下方，與水平線成 69°55′ 角；
R 與地平線之交點，在點 D 之左 21.5〔呎〕。

3. 試求圖 94 所示桁架上風載荷之合力之大小，方向，與位置。

答：11.1〔仟磅〕，向右下方，與水平線成角 36°50′；
R 與桁架下弦之交點，離其左端 4.86〔呎〕。

36. 共面非共點力之合力，代數法． 對於任何共面非共點力系可擇取 X，Y 兩軸。每一個力，可在其作用線上之任一點，分解爲 X，Y 兩分力。此兩分力之大小，與所取分解點之位置無關。因合力對於移動上之效應，與其諸分力之總效應同。故此力系之合力之大小，爲

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \tag{4.1}$$

此合力與 X 軸所成之方向角 θ 爲

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \tag{4.2}$$

此合力關於任一所設點之位置，可據第 37 節之力矩原理求出。

有時將一所設之共面非共點力系，化爲經過一所設點之一力及一力偶，更屬方便。據第 32 節所述原理，可將每個力各別分解爲經過所設點之一力，及一力偶。再將經過所設點之共面共點力系合併成其合力 R。同樣，所有之力偶，得由其代數和，併爲一合力偶。

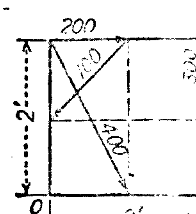


圖 95

習 題

1. 試求圖 95 所示四個力之合力之大小與方向。

答：334〔磅〕；$\Theta = 337°20'$.

2. 試將圖95所示之100〔磅〕,400〔磅〕,600〔磅〕三力，化爲經過點 O 之一力，及一力偶。 答：168〔磅〕; $\Theta = 310°10'$; 313〔磅·呎〕.

37. 共面非共點力之力矩原理. 與第28節內所述關於三個或多個平行力之力矩原理一樣，此時易將力矩定理，推廣爲：

在一平面上之任何力系，其各個力關於任一點之力矩之代數和，即等於其合力關於同一點之力矩.

應用此原理，祇須寫出關於任一點之力矩方程式，即能求得合力 R 之位置. 設命合力之力臂爲 a，其各個力之力臂分別爲 $a_1, a_2, \cdots$ 等，則

$$Ra = F_1a_1 + F_2a_2 + \cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} F_i a_i \qquad (i = \text{正整數}) \qquad (4.3)$$

例　題

試求圖95所示四個力之合力離開點 O 之垂直距離，及合力與 X 軸之交點離開點 O 之距離.

【解】 據第36節習題1，得 $R = 334$〔磅〕。因合力係向右下方，若假定合力與軸 Y 之交點在點 O 之上方，則其關於點 O 之力矩爲負.

$$-334a = (300 \times 2) + (70.7 \times 1) - (200 \times 2) - (358 \times 1)$$

$$a = 0.262 \text{〔呎〕}.$$

若命 x 爲合力與 X 軸之交點至點 O 之距離，則得 $x = \dfrac{a}{\sin 22°40'} = 0.68$〔呎〕.

距離 x 又可自方程式

$$\Sigma M_0 = \sum_{i=1}^{i=n} F_{yi}x_i \qquad (i = \text{正整數}) \qquad (4.4)$$

求得. F_{yi} 爲每個力之 Y 分力，x_i 分別爲諸分力與 X 軸之交點之橫坐標. 因 X 分力之作用線係沿 X 軸，故其力矩爲零.

$$-128.7\,x = (300 \times 2) + (70.7 \times 1) - (200 \times 2) - (358 \times 1)$$

$x = 0.68$〔呎〕，與前得結果相同。

習　題

1. 在圖 95 內，試求 100〔磅〕，200〔磅〕，300〔磅〕力之合力之大小，方向，與位置。　答：$R = 263$〔磅〕；$\Theta = 60°30'$；$a = 1.03$〔呎〕；$x = 1.18$〔呎〕.

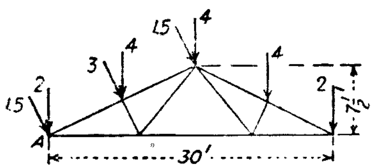


圖 96.

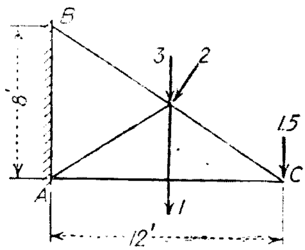


圖 97.

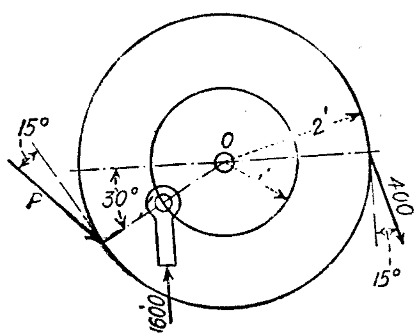


圖 98.

2. 試求圖 96 所示桁架上，風載荷與死載荷之合力之大小，方向，與位置。

答：$R = 21.53$〔仟磅〕；$\Theta = 277°10'$；$a = 13.5$〔呎〕；$x = 13.6$〔呎〕.

3. 試求圖 97 所示四個力之合力之大小，方向，與位置。

答：$R = 7.245$〔仟磅〕；$\Theta = 261°10'$；$a = 6.57$〔呎〕；$x = 6.65$〔呎〕.

4. 圖 98 所示之齒輪，以軸 O 爲中心而轉動。 力 P 關於點 O 之力矩，適與其餘兩力關於點 O 之力矩相互平衡，試求力 P 之大小。 並求三個力之合力之大小，方向，與位置。

答：$P = 1118$〔磅〕；$R = 989$〔磅〕，經過點 O；$\Theta = 25°20'$.

38. 共面非共力點之平衡，圖解法.　設共面非共點力系之力多邊形閉合，則其合力 R 爲零．　若其索多邊形亦閉合，則其合力矩 M 爲零，故此力系平衡．

反之，若共面非共點力系爲平衡者，其力多邊形必須閉合，其索多邊形亦必須閉合．

據閉合的力多邊形，可得兩個獨立之平衡條件，對應於

$$\Sigma F_x = 0, \text{ 及 } \Sigma F_y = 0 \tag{4.5}$$

據閉合的索多邊形，可得第三個獨立之平衡條件，對應於

$$\Sigma M = 0, \tag{4.6}$$

故所能決定之未知量，不能超過三個．此三個未知量中，可能爲三個力之大小，其方向則假定爲已知．亦可能爲兩個力之大小(其方向假定爲已知)及一個力之方向(其大小假定爲已知)．

如將所有之已知力，用適當方法，併爲一合力，則所設之力系可簡化爲共面共點力系．　因爲此合力與一個未知力之交點，必爲餘下之未知力(或餘下之二力之合力)所通過也．

例題 1

圖 99 所示之水平梁 AB 一端支於銷 A 上，他端支於繫桿 BC 上．　求繫桿 BC 內之牽力，及銷 A 之反力之大小與方向．

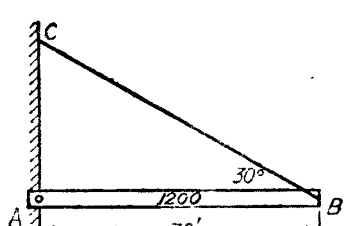


圖　99.

【解】　圖 100 (a) 爲水平梁之脫離體圖．梁之重量 1200 [磅]，係鉛直向下之力，並作用於梁之重心．繫桿 BC 內之牽力係自點 B 向左上方作用，銷 A 之反力，必須經過點 A，並須經過其餘兩力之交點 D．從對稱上，可見 $\theta = 30°$．　圖 100(b)爲力三角形．從

此三角形上，得量出 BC 之內力與 A 之反力均等於 1200〔磅〕。

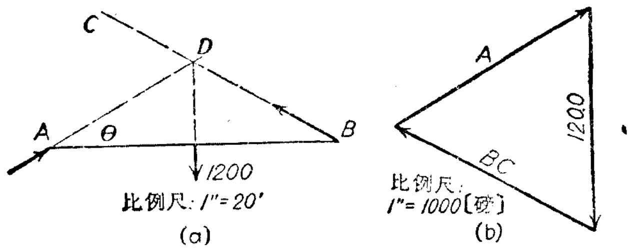


圖 100.

例題 2

圖 101 所示之懸臂桁架係銷聯接者，其上有五個載荷。試求在 A 及 B 之反力。

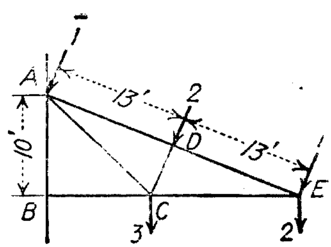


圖 101.

【解】 圖 102(a) 爲脫離體圖。設取基線 MN，並取 MP 等於 2〔仟磅〕，NQ 等於 3〔仟磅〕。線 PQ 與線 MN 之交點 O，即決定其 5〔仟磅〕合力之作用線。從對稱上可看出三個風載荷之大小爲 4〔仟磅〕，並且經過點 D。此合力與 5〔仟磅〕合力相交於點 R。自點 R 取矢量 RS = 4〔仟磅〕，RT = 5〔仟磅〕。作平行四邊形，求得其合力爲 RU = 8.81〔仟磅〕。

此時五個已知力，已併成一合力。在點 B 之反力，應沿構件 BC 之軸:

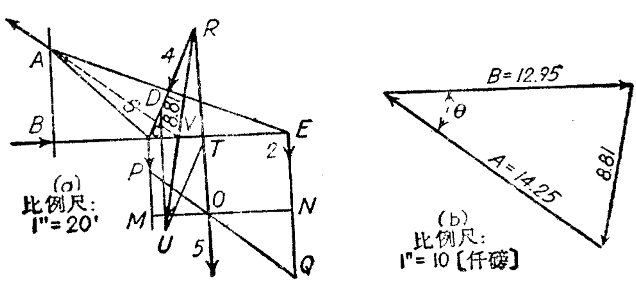


圖 102

此兩力相交於點 V. 因在點 A 之反力與此兩力平衡，故其作用線亦須經過點 V. 圖102(b)為此三個力之力三角形. 從圖上可量出 A,B 兩反力之大小. 反力 A 與水平線間之角，自圖上量得為 38°.

例題 3

試求圖 103 所示懸臂桁架之反力 GH 及 HA.

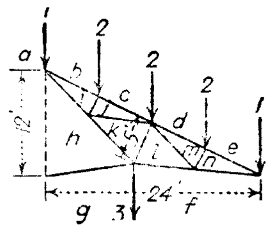
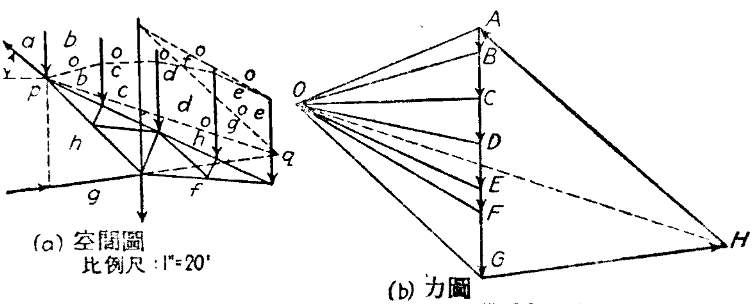


圖103.

【解】 在圖 104(a)上，用 1〔吋〕= 20〔呎〕之比例尺畫空間圖. 在圖 104(b)上，以 1〔吋〕= 8〔仟磅〕之比例尺，將所有之已知力，畫出力圖. 在此力圖上，須再加上 GH，HA 兩力，方能得一閉合力多邊形. 但沿線 GH 上之點 H 之位置為未知者. 假定取一極 O，並引射線 OA, OB, …等. 在空間圖上，自上鉸 p 開始，畫出索多邊形，因點 p 為反力



(a) 空間圖 比例尺：1"=20'

(b) 力圖 比例尺：1"=8〔仟磅〕

圖 104.

ha 作用線上唯一之已知點也. 索 oa 之長度為零，因為此索係畫於線 ha 與 ab 之間. 其餘之索 ob,oc,od,oe,of,og，須分別與 $OB,OC,$…平行. 索 og 與 gh 相交於點 q. 因力系為平衡，故索多邊形必須閉合. 是以索 oh 必須為聯結 p,q 兩點者. 在力圖中作 OH 線，與空間圖之 oh 平行. 自 OH 與 GH 之交點 H，決定反力 GH 之大小，與反力 HA 之大小與方向. 從圖上量出 GH 為 10.57〔仟磅〕; HA 為 14〔仟磅〕; 角 θ 為 42°.

習 題

1. 在圖 105 上，有一長方塊，長 4〔呎〕，截面爲 1〔呎〕平方，重 640〔磅〕. 用力 P 及在斜面上之反力，將此塊支持於水平位置上. 試求力 P，及反力 A 之法線分力與切線分力.

答：$P = 310$〔磅〕；$A_N = 335$〔磅〕；$A_T = 101$〔磅〕.

2. 圖 106 所示起重機之 $AB = 40$〔呎〕，$AC = 60$〔呎〕，$CD = 20$〔呎〕. 伸臂 AD 之重量爲 3200〔磅〕，其重心與點 A 相距 30〔呎〕. 試求在 BC 內之內力，及在 A 點之反力之鉛直與水平分力.

答：$BC = 13{,}200$〔磅〕；$A_V = 20{,}930$〔磅〕；$A_H = 6550$〔磅〕.

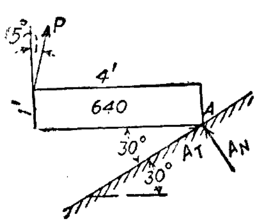


圖 105.

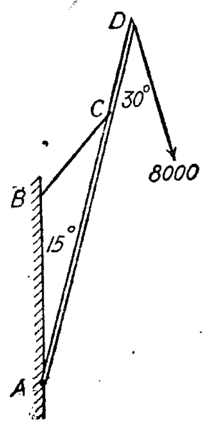


圖 106.

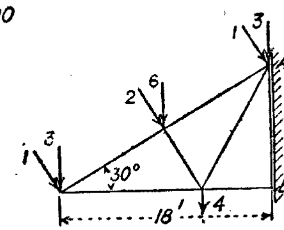


圖 107.

3. 圖 107 所示之懸臂桁架之每個接頭，均係銷聯接. 試求在點 B 之反力，及在點 A 之反力之鉛直與水平分力.

答：$B = 16.7$〔仟磅〕；$A_V = 19.46$〔磅〕；$A_H = 14.7$〔磅〕.

39. 共面非共點力之平衡，代數解法. 若共面非共點力系之合力 R 爲零，其關於垂直於力平面之任一軸之合力矩 M 亦爲零，則此整個力系之效應爲零，而此力系呈平衡.

反之，若共面非共點力系平衡，則其合力 R 爲零，而其關於平面上任一點之合力矩亦爲零．

因合力爲零，故沿任一軸之分力之和必等於零．

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M = 0. \tag{4.7}$$

據此三個獨立方程式，可求得三個未知元素．此三個未知元素，往往爲三個力之大小，卽其方向爲已知者．若兩個未知力爲平行者，則據與此兩力方向垂直之分力和之方程式，可求得其第三個未知力之大小．但在任何情況中，據關於兩未知力之交點之力矩方程式，可求得第三個未知力之大小．

但在若干情況中，三個未知元素，包括一個力之大小與方向，及另一個力之大小．若取關於大小與方向均未知之力之作用線上一已知點之力矩方程式，則可求得另一未知力之大小．方向與大小均屬未知之力，亦得將兩個成直角之分力替代之．因此將三個未知元素，均化爲三個未知力之大小，而與上述第一種情形相同．

例題 1

試求 108圖 (a) 內所示懸臂桁架上在 C, E 兩點之反力．桁架之所有接頭，均爲銷聯接．

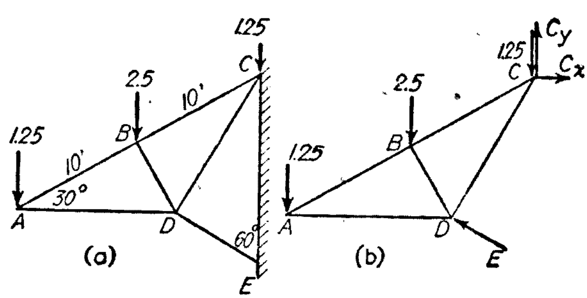


圖 108.

【解】 因構件 DE 爲二力構件，故其內力必沿軸向．在點 E 之反力，與

在 DE 內之內力，大小，方向，均應相同。在點 C 之反力，以其水平及鉛直分力 C_x 與 C_y 替代之。據關於點 C 之方程式 $\Sigma M = 0$，得

$$11.55E - (1.25 \times 17.32) - (2.5 \times 8.66) = 0$$

$$E = 3.75 \text{〔仟磅〕}$$

據方程式 $\Sigma F_x = 0$，得

$$C_x - (3.75 \times 0.866) = 0$$

$$C_x = 3.25 \text{〔仟磅〕}$$

據方程式 $\Sigma F_y = 0$，得

$$C_y + (3.75 \times 0.5) - 5 = 0$$

$$C_y = 3.125 \text{〔仟磅〕}$$

$$C = \sqrt{(3.25)^2 + (3.125)^2} = 4.51 \text{〔仟磅〕}$$

命 Θ 爲在點 C 之反力與水平線所成之角度，得

$$\tan\Theta = \frac{3.125}{3.25} = 0.96$$

$$\Theta = 43°50'$$

例 題 2

在圖 109(a) 所示 A 形架之構件 BD 之中點，支一 8000〔磅〕之載荷。試求因此載荷而在 B, C, D 各銷上所產生之反力，地板假定爲光滑者。

【解】 先將整個桁架當作脫離體。因地板爲光滑者，故在 A, E 兩點之反力，必沿鉛直方向。因桁架與載荷均爲對稱者，故每個反力爲 4000〔磅〕。假定桁架或載荷爲不對稱者，則據關於一個反力之作用線之上一點之力矩方程式，可求得另一反力之大小。

因所有構件均爲多力構件，故取脫離體時，必須將任一構件之整體，視爲一脫離體。其次，將橫桿 BD 作爲一脫離體；如圖 109(d) 所示。已知力爲8000〔磅〕，向下作用於其中點。因聯接於 B, D 兩點之構件 ABC 與 CDE，均爲多力構件，故在此兩點之反力，必須取其水平與鉛直分力。無論據力矩方程式或據對稱條件，均可求得

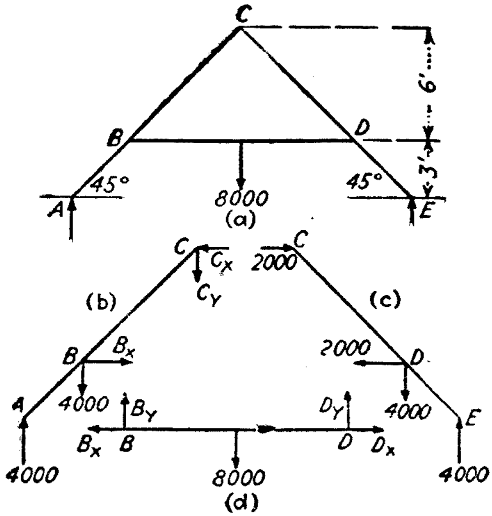


圖 109.

$$B_y = D_y = 4000 \text{〔磅〕}.$$

據方程式 $\Sigma F_x = 0$,得 $B_x = D_x$. 因此兩力爲共線者,故不能自此脫離體上求得其大小。

再其次以構件 AC 爲一脫離體. 其脫離體圖如圖 109 (b). 在此脫離體上,兩力 A 與 B_y 爲已知者,故將此兩力之大小,註於其矢量上。 B_x, C_y, C_x 均爲未知力。據 $\Sigma F_y = 0$, 得

$$C_y + 4000 - 4000 = 0,$$

$$C_y = 0.$$

若桁架爲非對稱者,或載荷爲非對稱者,一般而論, C_y 不等於零。

據 $\Sigma M_B = 0$,得

$$(C_x \times 6) - (4000 \times 3) = 0.$$

$$C_x = 2000 \text{〔磅〕}$$

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$B_x = C_x = 2000 \text{〔磅〕}.$$

再自構件 BD,得

$$D_x = B_x = 2000\text{〔磅〕}.$$

因 C_y 為零,故在點 C 之銷反力為水平方向之 2000〔磅〕. 在 B,D 兩點之銷反力為

$$B = D = \sqrt{(2000)^2 + (4000)^2} = 4472\text{〔磅〕}.$$

此兩反力與水平線間之角各為

$$\theta = \tan^{-1}\frac{4000}{2000} = 63°30'$$

此時構件 CE 上之所有各力,均已求知,如圖 109(c) 所示. 若應用平衡之三個方程式即可覆核其解,是否正確.

習 題

1. 圖 110 所示之伸臂 AB 重 400〔磅〕,其重心即在其中點. 一端以銷聯接於牆上之點 B,他端支於纜 AC 上. 在端 A 尚有一 2000〔磅〕之拉力,如圖所示. 試求 AC 之內力,及銷 B 之反力之鉛直與水平分力.

答: $AC = 8400$〔磅〕; $B_x = 6940$〔磅〕; $B_y = 3810$〔磅〕,向下.

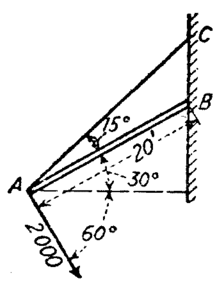


圖 110.

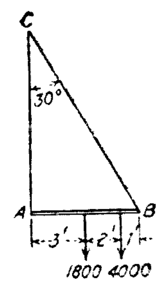


圖 111.

2. 圖 111 所示平臺之橫檔 AB,一端以鉸聯接於牆上之點 A. 他端支於繫桿 BC 上. AB 上之載荷如圖所示. 試求 BC 之內力,及在點 A 之鉸反力之大小與方向. 答: $BC = 4890$〔磅〕; $A = 2905$〔磅〕; $\theta = 32°40'$.

3. 圖 112 所示之懸臂桁架之各個接頭,假定都是銷聯接. 試求在點 B 之反力,及在點 A 之反力之水平與鉛直分力.

答: $B = 25.3$〔仟磅〕; $A_x = 23.23$〔仟磅〕; $A_y = 17.73$〔仟磅〕.

4. 試求圖 109 所示A形架之諸反力，假定8000〔磅〕載荷向左移過 4〔呎〕.

答：$A = 5780$〔磅〕；$E = 2220$〔磅〕；$B = 6960$〔磅〕，與 X 軸成 $73°20'$ 角.

$D = 2400$〔磅〕，與 X 軸成 $33°40'$角；$C = 4190$〔磅〕，與 X 桿成$24°$角.

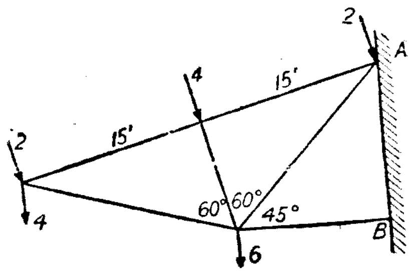


圖 112.

5. 試求圖 109 所示 A 形架之所有反力，假定將 8000〔磅〕載荷移去，而斜傌構件每〔呎〕重 100〔磅〕. 水平構件每〔呎〕重 150〔磅〕.

答：$A = 2170$〔磅〕；$B = 1665$〔磅〕，與 X 軸成角 $32°40'$. $C = 1400$〔磅〕，水平.

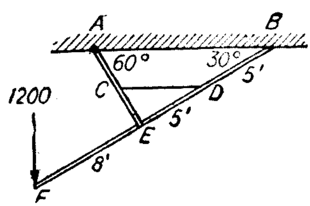


圖 113.

6. 圖 113 所示之架，以銷聯接於 A,E 兩點，並爲繫桿 CD 所撐住；另一端支於頂板上之點 B. 試求因 1200〔磅〕載荷而產生之 A,B,E 諸反力，及 CD 之內力.

答：$A = 1620$〔磅〕；$B = 420$〔磅〕；$E = 2475$〔磅〕，與 X 軸成 $40°55'$角；$CD = 1870$〔磅〕，壓縮力.

40. 桁架之內力，圖解法. 在第 33 節內，曾經說明普通屋頂桁架與橋梁桁架，假定均係二力構件所構成，其內力均沿軸向者. 對於簡單桁架，在解出各內力前，至少須求得一個反力. 若載荷與反力爲平行者，則可用第 29 節之方法. 若不相平行，則用第 38 節之方法. 至於懸臂桁架，在解出各內力前，可不必先求其反力.

但在任何一種情形中，可輪流將各個接頭作為脫離體，再按比例尺繪出其力多邊形。據力多邊形必須閉合之事實，若未知之力不超過二個，卽可求得其值。

若在任一接頭上，有三個未知力，則無法求得其解。此時須將幾個接頭，聯合成一脫離體，求得三個未知力中之任何一者始可。若將幾個接頭聯合而成之脫離體之力系，並非共點力系。則據第38節之方法，可得三個未知力。若將所有諸已知力併成一合力，並不方便，則索解時，可將原題分為兩個或多個部分，每部分僅就一已知力求解。從諸部分所求得之內力之矢量總和，方為構件內之眞正內力。此法謂之**重疊原理**(principle of superposition)。此時在一個接頭上之未知力，可減至兩個。於是卽可從此接頭開始，逐一索解其餘各接頭。

在畫出任何接頭之力多邊形時，最好用鮑氏記號，以避免錯誤，並可隨時覆核。用鮑氏記號，有一規定。在空間圖上，無論內力或外力之兩邊之空間，均註以小寫字母，如圖114(a)。圖上之任何一力，卽以此力之作用線兩邊之字母名之。兩邊字母之先後次序，亦有一定之規定。在任一接頭上之力，以繞此接頭順時針向之次序決定之。例如圖114(a)上之6〔仟磅〕力，其次序係自b至c,故謂之力BC。在空間圖上力之方向，可從力圖上所註對應之兩字母之矢量之方向決定之。例如圖115(b)上自B至C之矢量方向係向下。故在空間圖114(a)上b與c間之力，亦係向下。

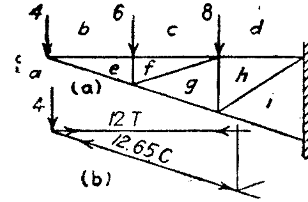


圖 114.

如將桁架上各個接頭之力多邊形畫出。例如圖115之(a),(b),(c)等，再將其併合，可得一內力圖。如圖116所示。

例題 1

試求圖 114(a)所示懸臂桁架之各構件之內力。桁架長 30〔呎〕。在牆上兩支點相距 10〔呎〕。

【解】因桁架爲懸臂式，故無須先求在牆上之反力。先將桁架最左端之一接頭作爲脫離體。在圖 114(b) 之左端部分即示表示此脫離體之方法。在構件 be 上之箭頭，

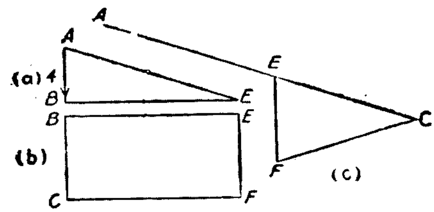


圖 115.

自此接頭指向右方。此即表示構件 be 對於接頭之銷所施之拉力。在構件 ea 上之箭頭，以左上方指向接頭，此即表示構件 ea 對於接頭之銷所施之推力。

圖 115(a)爲此接頭上之力多邊形。先用比例尺畫出等於 4〔仟磅〕向下之矢量 AB。自點 B 畫線 BE 平行於作用線 be。自點 A 引經過點 A 之線 EA，其方向平行於作用線 ea。力多邊形應行閉合，故據 BE 與 EA 之交點 E，決定力 BE 與力 EA 之方向與大小。（見圖 115(a)）。各力之次序爲繞接頭依照順時針轉向而取定，例如此時各力之次序爲 AB, BE, EA。從字母之次序，可知力之作用線，此次序亦恒依順時針轉向。

圖 115(a) BE 之長度，對應於 12〔仟磅〕。因自 B 至 E 之方向係自左向右，表示由構件 be 作用於接頭 abe 之力亦自左向右，爲一拉力，即構件之內力爲一牽力，故在空間圖上，畫上自左向右之箭頭，並註上 12 T 字樣。（見圖 114(b)）。在構件 be 之另一端，畫自右向左之箭頭，表示構件 be 作用於另一接頭之力爲自右向左，並等於 12〔仟磅〕。

圖 115 (a) EA 之長度對應於 12.65〔仟磅〕，其方向係自 E 向 A，表示構件 ea 受一壓縮力。在空間圖上(圖 114(b))，畫向左上方之箭頭，並註上 12.65 C 字樣。在構件 ea 之另一端，畫出向右下方之箭頭，表示構件 ea 作用於接頭之力爲推力。

用上述之方法，可得一極有用之結論如下：若在一構件兩端之箭頭向內，則此構件之內力爲牽力。若兩端之箭頭向外，則此構件之內力爲壓縮力。

(見圖 114(*b*))。 即箭頭所示者，爲構件對於接頭所作用之力。

其次以桁架上弦之第二接頭(即接頭 *ebcf*)爲脫離體。*EB*，*BC* 兩力均爲已知者，得將其依次畫出，如圖 110(*b*)所示。 矢量 *CF* 必須與構件 *cf* 平行，矢量 *FE* 必須與構件 *fe* 平行。*EBCF* 成一閉合力多邊形。據此力多邊形，量出 *CF* 爲12〔仟磅〕之牽力，*FE* 爲 6〔仟磅〕之壓縮力。 圖115(*b*)之線 *BE* 與圖 115(*a*)之線 *BE*，顯然可以重合，因此可將兩個力多邊形，聯合爲一。

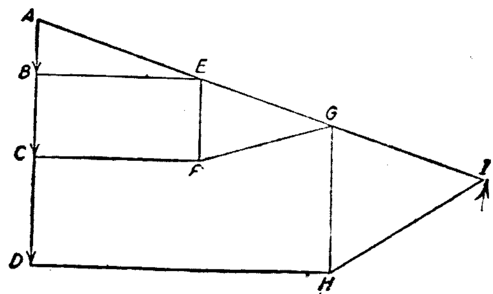


圖 116.

再取接頭 *aefg* 爲脫離體. 在此接頭上，力 *AE* 與 *EF* 均爲已知者，故畫出平行於 *fg* 之矢量 *FG*，及平行於 *ga* 之矢量 *GA*，即可得一閉合力多邊形，如圖115(*c*)所示。 據此圖可以量出矢量 *FG* 爲 9.49〔仟磅〕之牽力，矢量 *GA* 爲 22.1〔仟磅〕之壓縮力。 此力多邊形，亦可與前兩力多邊形，聯合爲一.

將此桁架所有之五個接頭完全索解，並將所有之力多邊形聯合起來，以形成一個內力圖，即如圖116所示。 再按比例尺量計，可得矢量 *DH* 爲 21〔仟磅〕之牽力；矢量 *HG* 爲 11〔仟磅〕之壓縮力；矢量 *HI* 爲 13.2〔仟磅〕之牽力；矢量 *IA* 爲 33.7〔仟磅〕之壓縮力.

例 題 2

在圖 117 所示之桁架內，兩端最初三個接頭上之力，不難求得。在其餘之各接頭上，每接頭有三個未知力。 取桁架之左半部爲脫離體，求出構件 *pi* 之內力。 若在桁端之最初三個接頭已解出，則此時即能解接頭 *pilm* 之未知力。

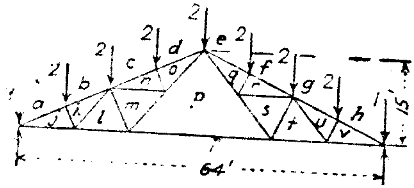


圖 117.

【解】 從對稱上,可知各支座之反力爲 8〔仟磅〕。 在半個桁架上之總載荷,亦爲 8〔仟磅〕。故在桁架左半部之已知力系之合力爲一力偶。欲平衡此力系,必須倚有一力偶。因在 pi 內之力成水平方向,故在此桁架頂點之鉸反力,亦應成水平方向。圖 118 示此桁架左半之脫離體圖。但所有之鉛直載荷,已以其合力替代。在 ep 內之力與在支座向上之反力,相交於點 A。其合力必須與會於點 B 之 pi 之力及鉛直載荷之合力,互相平衡。AB 爲此兩合力之公作用線。在鉛直線上取矢量 BD,代表8〔仟磅〕

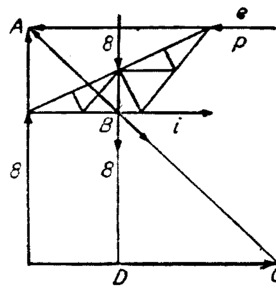


圖 118.

之鉛直載荷。經點 D 引線 DC 平行於 pi。線 DC 與延線 AB 相交於點 C。矢量 DC 即爲在 pi 內之內力,由比例尺量出此力爲 8.53〔仟磅〕。在 ep 內之內力,應與此力大小相等,方向相反。

習 題

1. 應用例題 2 所求得之 pi 之內力,試解圖 117 所示桁架左半部分所有構件之內力。

答: $AJ = 16.5$〔仟磅〕,壓縮力; $JI = 14.93$〔仟磅〕,牽力; $BK = 15.65$〔仟磅〕,壓縮力; $KJ = 1.81$〔仟磅〕,壓縮力; $KL = 2.15$〔仟磅〕,牽力; $LI = 12.83$〔仟磅〕,牽力; $LM = 3.62$〔仟磅〕,壓縮力; $MP = 4.3$〔仟磅〕,牽力; $CN = 14.8$〔仟磅〕,壓縮力; $NM = 2.15$〔仟磅〕,牽力; $DO = 13.95$〔仟磅〕,壓縮力; $ON = 1.81$〔仟磅〕,壓縮力; $OP = 6.4$〔仟磅〕,牽力.

2. 在圖119 所示之塔上,若載荷加於塔之右邊,則假定虛線所繪出之對角

構件之內力爲零。 設塔之各個接頭均爲銷聯接者。試求各構件之內力。

答：$AD=1$〔仟磅〕，壓縮力；$AE=1.14$〔仟磅〕，壓縮力；$DE=1.47$〔仟磅〕，牽力；$DB=0$；$EF=1.66$〔仟磅〕，壓縮力；$AG=2.80$〔仟磅〕，壓縮力；$FG=2.27$〔仟磅〕，牽力；$FC=1.14$〔仟磅〕，牽力。

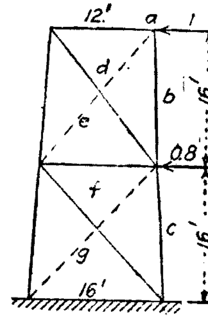


Fig. 119

圖 119.

3. 試解圖 120 所示桁架之反力 R_1,R_2 及所有各內力。

答：$R_1=21$〔仟磅〕；$R_2=10$〔仟磅〕；$AG=18.97$〔仟磅〕，牽力；$GB=18$〔仟磅〕，壓縮力；$GH=1$〔仟磅〕，牽力；$AI=20.55$〔仟磅〕，牽力；$IH=1.58$〔仟磅〕，壓縮力；$HC=18$〔仟磅〕，壓縮力；$IJ=2.50$〔仟磅〕，牽力；$JD=19.5$〔仟磅〕，壓縮力；$AK=23.19$〔仟磅〕，牽力；$KJ=3.01$〔仟磅〕，壓縮力；$AL=22.70$〔仟磅〕，牽力；$LK=12.84$〔仟磅〕，壓縮力；$LM=10.88$〔仟磅〕，壓縮力；

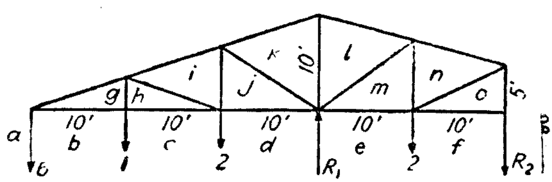


圖 120.

$ME=13.32$〔仟磅〕，壓縮力；$AN=13.74$〔仟磅〕，牽力；$NM=8.68$〔仟磅〕，牽力；$NO=14.91$〔仟磅〕，壓縮力；$OF=0$。

41. 桁架之內力，代數解法. 求出懸臂桁梁各構件之內力時，無須先求其反力；但求一般之簡單桁架之內力時，必須用本章或第三章內所述方法，先求其反力。解求構件之內力時，輪流將各個接頭作爲脫離體。 作用於每個接頭上之諸力，組成平衡之共面共點力系，可用第二章所述方法之一種解之。 但有若干特殊情形，不在此例。

取得一脫離體後，各未知內力之方向，往往可從觀察上決定之。但如不能決定時，可先假定一個方向，而在代表力之矢量上，先依假定畫一箭頭。若據平衡方程式所得之解，爲一正數，則所假定之方向爲正確者。若所得之值爲負，則所假定之方向，適屬相反，而須將箭頭倒轉。

若在任一接頭上有三個未知力，因祇有兩個獨立的平衡條件，故無法求得其解。此時如所有不滿三個未知力之接頭均已解出，則必須選擇包含若干接頭之一脫離體，作用於此脫離體上之力系，須爲共面非共點力系，且此力系中之未知力不超過三個。於是據此脫離體，可解出一個未知力。以後再循正常方法，逐一以各接頭爲脫離體，求出解答。

例題 1

試求圖 121 所示銷聯接之橋梁桁架之各構件內之力。

【解】 因桁架與載荷，均爲對稱者，故每個支座上之反力，爲 10〔仟磅〕之載荷總量之半數。

$R_1 = R_3 = 5$〔仟磅〕。

因所有構件均爲二力構件。故取脫離體時，得隨需要於任何場所引截線。若沿線 mn 引桁架之截線，

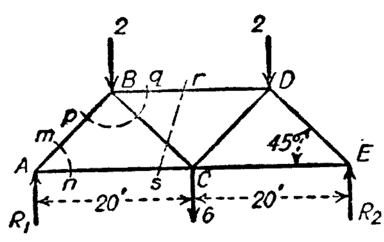
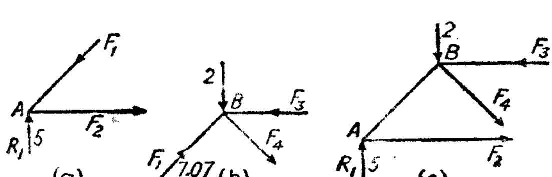


圖 121.

即將部分 A 作爲脫離體；如圖 122(a)所示。F_1 爲 AB 之內力，但對此脫



離體則爲外力。 因 R_1 向上,在此脫離體上能有鉛直分力之外力爲F_1,故據平衡條件,F_1 必須向左下方,換言之,F_1 爲壓縮力。 同理,力 F_2 爲 AC 之內力,而須將F之水平分力平衡,可知 F_2 必須爲一牽力。

因脫離體爲平衡者,故 $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$. 據 $\Sigma F_y = 0$, 得

$$5 - F_1 \sin 45° = 0$$

$$F_1 = 7.07 \text{〔仟磅〕,壓縮力。}$$

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$F_2 - 7.07 \cos 45° = 0$$

$$F_2 = 5 \text{〔仟磅〕,牽力。}$$

其次,取沿線 pq 截切之接頭 B 之脫離體,如圖 122 (b)。 作用於此脫離體上之兩已知力,爲 2〔仟磅〕之載荷與 AB 之內力。 構件 AB 作用於 B 上之內力應與其作用於 A 上之內力,大小相等而方向相反。 故作用於 B上之 F_1,應等於 7.07〔仟磅〕,並向右上方,如圖 122 (b)所示。 從脫離體 B 鉛直方向之已知分力觀察,可知向上之分力大於向下之分力,故據平衡條件,可知 F_4 必具有向下之鉛直分力,則 F_4 爲一牽力,如圖所示。 再據水平方向之平衡條件,可知 F_3 必爲壓縮力。從 $\Sigma F_y = 0$,得

$$7.07 \sin 45° - 2 - F_4 \sin 45° = 0$$

$$F_4 = 4.24 \text{〔仟磅〕,牽力。}$$

從 $\Sigma F_x = 0$,得

$$7.07 \cos 45° + 4.24 \cos 45° - F_3 = 0$$

$$F_3 = 8 \text{〔仟磅〕,壓縮力。}$$

實際上在求解前,無須應用上述之方法,定出未知力之確實方向。 如於上述之兩個力圖上,所假定未知力之方向不正確,則所得結果之絕對值不變,但符號相反。

因桁架與載荷,均爲對稱者。 故桁架兩半邊對應構件之內力相等。 求解時至此已够,不必繼續求至他半桁架。 除非要核對結果,纔須繼續做完。

若祇須求出一個構件之內力,例如,求 BD 之內力,則可用下述簡捷方法。取圖 121 所示之截線 rs,並將此截線以左之部分作爲脫離體。 圖122(c)即

爲此脫離體圖。 圖上計有三個未知力,但並非共點力。 故能求得其解。

據 $\Sigma M_C = 0$,得

$$(F_3 \times 10) - (5 \times 20) + (2 \times 10) = 0$$

$$F_3 = 8 \text{〔仟磅〕,壓縮力。}$$

若有需要,F_2, F_4 此時亦可求得。據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$F_4 \sin 45° + 2 - 5 = 0$$

$$F_4 = 4.24 \text{〔仟磅〕。}$$

據 $\Sigma M_B = 0$,得

$$(F_2 \times 10) - (5 \times 10) = 0$$

$$F_2 = 5 \text{〔仟磅〕。}$$

例題 2

試求圖 123 所示桁架之各構件之內力,設 J 爲 ID 之中點。

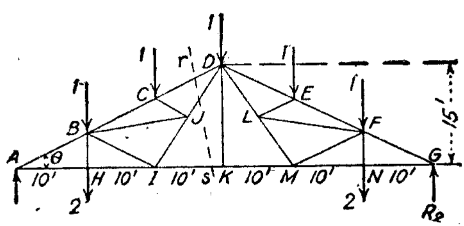


圖 123.

【解】 因桁架與載荷,均屬對稱,故各支座上之反力,等於 9〔仟磅〕載荷總量之半。

$$R_2 = R_2 = 4.5 \text{〔仟磅〕。}$$

BH 之長度爲 5〔呎〕, AB 之長度爲 $\sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18$〔呎〕。

$$\sin\theta = \frac{5}{11.18} = 0.447$$

$$\cos\theta = \frac{10}{11.18} = 0.894$$

先取接頭 A 爲脫離體。據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$0.447\,AB - 4.5 = 0$$

$$AB = 10.06 \text{〔仟磅〕,壓縮力。}$$

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$AH - 10.06 \times 0.894 = 0$$

$$AH = 9 \text{〔仟磅〕,牽力。}$$

其次,取接頭 H 爲脫離體。據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$HI = 9 \text{〔仟磅〕,牽力。}$$

據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$HB = 2 \text{〔仟磅〕,牽力。}$$

在 B,I 兩接頭處,均有三個未知力,故均不能用以求解。若取桁架上截線 rs 以左之部分,作爲脫離體,則可求得爲此截線所截之任一構件之內力。圖124(a)爲此部分之脫離體圖。據此脫離體之 $\Sigma M_D = 0$,得

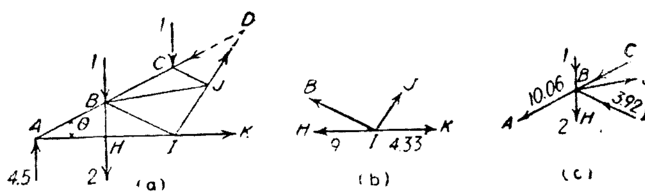


圖 124.

$$15\, IK + (1 \times 10) + (3 \times 20) - (4.5 \times 30) = 0$$

$$IK = 4.33 \text{〔仟磅〕,牽力}$$

於是在接頭 I 上之未知力,減爲兩個,故能求解。圖 124 (b) 爲此接頭之脫離體圖。內力 IB 與 IJ 之方向均爲未知,設先假定其均爲牽力。

$$\sin JIK = 0.833$$

$$\cos JIK = 0.555$$

角 HIB 與角 Θ 相等,故據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$9 + 0.894\, IB - 0.555\, IJ - 4.33 = 0$$

據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$0.447\, IB + 0.833\, IJ = 0$$

解此兩方程式,得

$$IB = -3.92 \text{〔仟磅〕}$$

$$IJ = +2.1 \text{〔仟磅〕}$$

所得 IJ 之正號,表示所假定之牽力為正確。IB 之負號,表示所假定之方向適得其反,即其內力為壓縮力。

在接頭 B 上,祇有兩個未知力。因 IB 之內力已知為壓縮力,故在圖 124 (c) 所示之脫離體圖內,畫其正確方向。因簡單桁架受鉛直載荷時,其上弦之內力,通常為壓縮力,故 BC 之內力方向為已知。BJ 之內力方向,可從接頭 C 與 J 決定。在接頭 C 上,內力 CJ 因須平衡載荷垂直於 BC 之分力,故為壓縮力。於是在接頭 J 上,內力 BJ 因須平衡 CJ 之壓縮力,故為牽力。據接頭 B 之 $\Sigma F_x = 0$,得

$$(10.06 \times 0.894) + 0.988JB - (3.92 \times 0.894) - 0.894BC = 0,$$

據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$3 + 0.447BC - (10.06 \times 0.447) - (3.92 \times 0.447) - 0.1644JB = 0,$$

解以上兩方程式,得

$$JB = 1.55 \text{〔仟磅〕},\text{牽力。}$$

$$BC = 7.85 \text{〔仟磅〕},\text{壓縮力。}$$

用同樣方法,解接頭 C 及 J,得答數如下:

$$CD = 6.73 \text{〔仟磅〕},\text{壓縮力。}$$

$$CJ = 1.12 \text{〔仟磅〕},\text{壓縮力。}$$

$$JD = 3 \text{〔仟磅〕},\text{牽力。}$$

從觀察上,或據接頭 K 為脫離體之 $\Sigma F_y = 0$,可知 DK 之內力為零。從對稱條件,可知桁架右半部各構件之內力,與左半部對應各構件之內力相同。

習　題

1. 試解圖 125 所示懸臂桁架所有構件之內力。

答:$AB = 11.59$〔仟磅〕,牽力;$AE = 11.59$〔仟磅〕,壓縮力;$BE = 1.93$〔仟磅〕,壓縮力;$BC = 12.11$〔仟磅〕,牽力;$EC = 1.93$〔仟磅〕,牽力;$EF = 13.52$〔仟磅〕,

壓縮力；$CF = 2.90$〔仟磅〕，壓縮力；$CD = 14.30$〔仟磅〕，牽力；$FD = 2.56$〔仟磅〕，牽力；$FG = 15.46$〔仟磅〕，壓縮力。

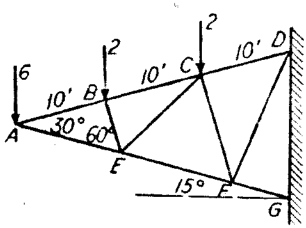


圖 125.

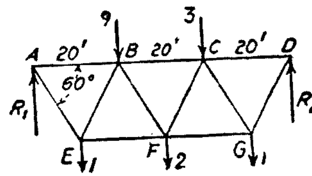


圖 126.

2. 試解圖 126 所示簡單桁架內所有構件之內力。

答：$AB = 5.2$〔仟磅〕，壓縮力；$AE = 10.4$〔仟磅〕，牽力；$BE = 9.25$〔仟磅〕壓縮力；$EF = 9.83$〔仟磅〕，牽力；$BF = 1.16$〔仟磅〕，壓縮力；$BC = 9.25$〔仟磅〕壓縮力；$FC = 3.46$〔仟磅〕，牽力；$FG = 7.52$〔仟磅〕，牽力；$CG = 6.93$〔仟磅〕壓縮力；$CD = 4.04$〔仟磅〕，壓縮力；$GD = 8.08$〔仟磅〕，牽力。

3. 試求圖 127 所示桁架之左半部分各構件之內力。假定在全桁架上，等間隔中之載荷相等。

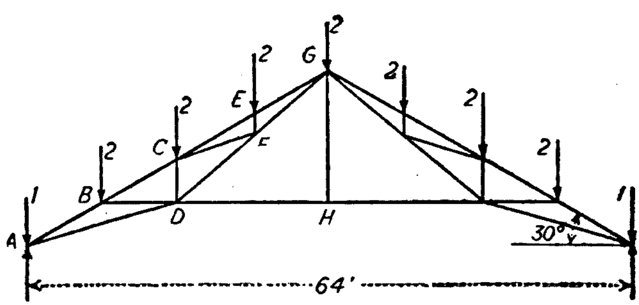


圖 127.

答：$AB = 28.05$〔仟磅〕，壓縮力；$AD = 25.25$〔仟磅〕，牽力；$BC = 24.05$〔仟磅〕，壓縮力；$BD = 3.46$〔仟磅〕，壓縮力；$CD = 2.98$〔仟磅〕，壓縮力；$CE = 28.0$〔仟磅〕，壓縮力；$CF = 3.62$〔仟磅〕，牽力；$DF = 15.5$〔仟磅〕，牽力；$EF = 2$〔仟磅〕，壓縮力；$EG = 28.0$〔仟磅〕，壓縮力；$FG = 20.0$〔仟磅〕，牽力；$DH = 9.24$〔仟磅〕，牽力；$GH = 0$.

42. 曲架之內力：代數解法 廠房建築之**曲架**(bent)，計有兩柱，其間架有屋頂桁架，如圖 128 所示。 構件 ABC 與 HGF 為柱。

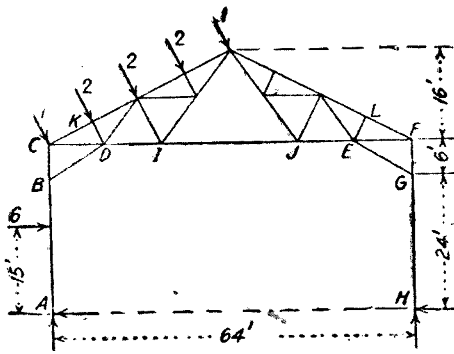


圖 128.

屋頂桁架用銷及**角拉條** (knee brace) BD 與 EG 支於兩柱之頂端。角拉條及屋頂桁架之所有構件，均為二力構件． 但兩柱除承受直接之鉛直載荷外，倘有彎曲內力，故為多力構件．柱可以分為兩種：(1)得認為柱底銷聯接者，(2) 得認為柱底固定者． 若柱底為固定者，則任何側向之載荷，能使曲架在載荷方向變位． 但 CB 與 GF 保持鉛直，在 A 與 H 兩點對於柱之切線亦保持鉛直。兩柱之**反撓點**(point of counterflexure)係在 AB 及 HG 之中點。此兩反撓點，相當於銷聯接柱之柱底。故有固定柱底者，與在此柱之柱底及角拉條聯點之中點，假定裝有鉸者之解法，完全相同。

兩柱之反力之水平分力間，應如何分配，本無一定。故須有若干假設． 通常所用之假設有二種： (1) 兩柱之反力之水平分力，係平均分配． (2) 一柱承受反力之全部水平分力． 另一柱之水平分力為零． 在設計時，以第二種假設比較安全。

索解曲架之反力及內力時，先將整個曲架，當作一脫離體，以求

柱底之反力。其次，將任一柱作為脫離體，以求出角拉條之內力，及與柱之頂端聯結之兩構件之內力。於是自屋頂桁架之兩端開始，求其餘各構件之內力方法，與假定桁架之二端，支於牆上時相同。

例 題

在圖 128 所示之曲架內，試求柱底反力之水平分力與鉛直分力；角拉條之內力；及構件 CK，CD，IJ 之內力。假定在 A 及 H 兩點反力之水平分力相等。

【解】 屋頂上斜角方向之風載荷之合力為 8〔仟磅〕，作用於其中點。此 8〔仟磅〕力之水平分力為 $\frac{8}{2.236}=3.58$〔仟磅〕。故總水平載荷為 $6+3.58=9.58$〔仟磅〕。

$$A_x=H_x=\frac{9.58}{2}=4.79\text{〔仟磅〕。}$$

屋頂上之載荷之鉛直分力為 $8\times\frac{2}{2.236}=7.16$〔仟磅〕。據方程式 $\Sigma M_A=0$，並用屋頂上載荷之鉛直與水平分力，得

$$64\,H_y-(6\times15)-(3.58\times38)-(7.16\times16)=0$$

$$H_y=5.32\text{〔仟磅〕。}$$

據 $\Sigma F_y=0$，得

$$A_y+5.32-7.16=0$$

$$A_y=1.84\text{〔仟磅〕。}$$

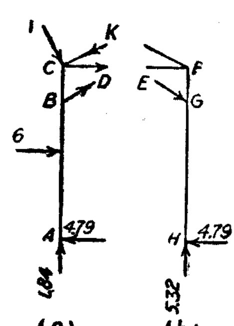


圖 129.

其次取柱 ABC 為脫離體。圖 129(a) 即其脫離體圖。在此脫離體上，有三個未知力。因其力系為非共點力系，故能求出其解。據 $\Sigma M_C=0$，得

$$(BD\times5.15)+(6\times15)-(4.79\times30)=0$$

$$BD=10.4\text{〔仟磅〕，牽力。}$$

據 $\Sigma F_y=0$，得

$$1.84+\frac{6}{11.66}\times 10.4-\frac{2}{2.236}-\frac{CK}{2.236}=0$$

$CK=14.1$〔仟磅〕,壓縮力。

據 $\Sigma F_x=0$,得

$$CD+\left(10.4\times\frac{10}{11.66}\right)-4.79+6+\frac{1}{2.236}-\left(14.1\times\frac{2}{2.236}\right)=0$$

$CD=2.0$〔仟磅〕,牽力。

再其次,取柱 FGH 爲脫離體,如圖 129(b)所示。據 $\Sigma M_F=0$,得

$$(EG\times 5.15)-(4.79\times 30)=0$$

$EG=27.9$〔仟磅〕壓縮力。

求構件 IJ 之內力時,最簡單之脫離體可取曲架之右半部分。假定此內力爲牽力,則據關於曲架頂點之力矩方程式,得

$$(IJ\times 16)+(4.79\times 46)-(5.32\times 32)=0$$

$IJ=-3.13$〔仟磅〕

因內力之符號爲負,故所假定之方向,與實際相反。換言之,IJ 之內力實爲壓縮力。

習 題

1. 試求圖 128 之構件 EF 及 LF 之內力。

答: $EF=1.1$〔仟磅〕,牽力; $LF=20.2$〔仟磅〕,牽力。

2. 試求圖 128 之角拉條 BD 及 EG 之內力。假定:(1)所有之水平反力,作用於點 A,(2)所有之水平反力,均作用於點 H。

答: (1) $BD=38.3$〔仟磅〕,牽力; $EG=0$.

(2) $BD=17.5$〔仟磅〕,壓縮力; $EG=55.7$〔仟磅〕,壓縮力.

3. 假定圖 128 內,角拉條係聯結 B,I 與 J,G 者。試求此等角拉條之內力。假定所有之水平反力,均作用於點 H。

答: $BI=15.66$〔仟磅〕,壓縮力; $JG=50.0$〔仟磅〕,壓縮力.

43. 曲架之內力:圖解法。 用圖解法求一曲架之反力及內力時,

所取之脫離體,與在代數解法內所用者相同(見第 42 節). 先取整個曲架爲脫離體,求出柱底之反力. 再取左柱爲脫離體,求出角拉條之內力. 然後求出桁架上最初六個構件之內力. 至於其餘之兩個接頭上,均有三個未知力,故必須先取半個曲架爲脫離體,以求出下弦之內力.

例題 1

在圖 130 所示之曲架內,兩柱均受到水平方向之風力. 水平方向之反力,則假定全部作用於右柱上. 試求反力,左角拉條之內力,及下弦 qi 之內力.

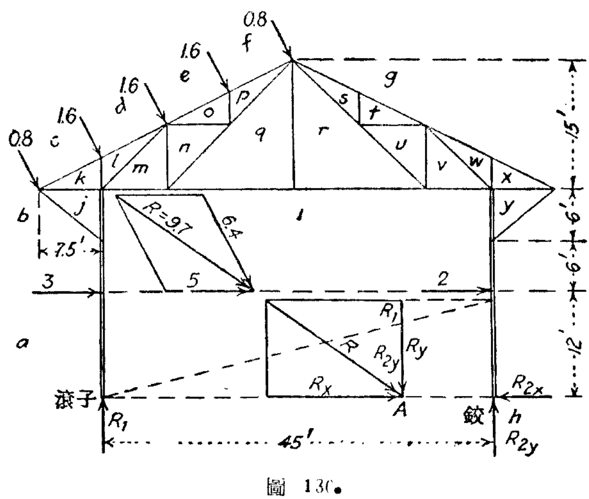


圖 130.

【解】 先取整個曲架爲脫離體(圖 130),將所有已知載荷併爲一合力 $R=9.7$〔仟磅〕. 此合力沿其作用線移至點 A (即作用線與兩柱底之聯線之交點). 在此點將 R 分解爲其鉛直分力與水平分力 R_y, R_x. 其水平分力 R_x 之值量出爲 7.86〔仟磅〕,須與 R_{2x} 平衡. 其鉛直分力 R_y 可用反比例法分解爲作用於兩柱之分力. 反力 R_1 及 R_{2y} 必須與此兩分力平衡. 自圖上可量出 R_1 爲 1.43〔仟磅〕, R_{2y} 爲 4.29〔仟磅〕.

圖 131 表示左柱之角拉條內力之解法. 反力 R_1 與載荷 3〔仟磅〕合併爲其

合力 3.32〔仟磅〕。此合力與角拉條內力之作用線相交於點 A。則所有作用於柱之頂端之力之合力須經過點 A。據圖 131(b) 之力三角形 BCD,即可求得代表角拉條內力之矢量 CD 之值,爲 7.68〔仟磅〕之牽力。

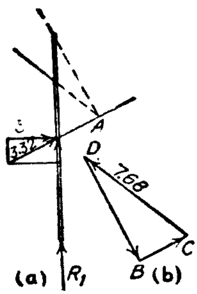


圖 131.

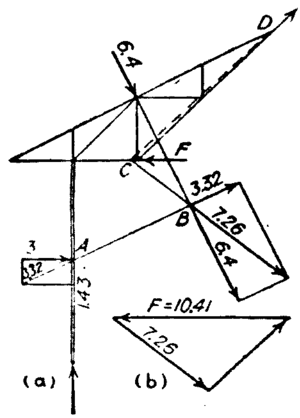


圖 132.

圖 132(a)爲曲架左半部分之脫離體圖。據此圖,可求得下弦之內力 F。3〔仟磅〕力與 1.43〔仟磅〕之反力,於其交點 A 併成 3.32〔仟磅〕之合力。此合力復與屋頂上 6.4〔仟磅〕之載荷,於其交點 B 併成 7.26〔仟磅〕之合力。因此將作用於此脫離體上之力,簡化爲三力。一爲 7.26〔仟磅〕之合力,一爲 F,爲作用於 D 之反力。F 與 7.26〔仟磅〕之合力相交於點 C。故點 D 之反力,亦必須經過此點。據圖 132(b) 之力三角形,得 $F=10.41$〔仟磅〕。此後桁架上其餘各構件之內力,包括右柱之角拉條之內力,均可求出。

習 題

1. 以上述例題之曲架之右半部分,作爲脫離體,試求下弦內之內力。以覆核例題內所得之結果。

2. 試取圖 130 之曲架之右柱爲脫離體,求角拉條 yg 之內力。並求構件 iv, vw, wx, xy 之內力。

答:$YG=35.2$〔仟磅〕,牽力;$IV=23.56$〔仟磅〕,壓縮力;$VW=37.2$〔仟磅〕,

壓縮力；$WX = 0$；$XY = 71.5$〔仟磅〕,壓縮力.

3. 圖 133 所示之曲架內,假定兩柱之下端爲完全固定者,故其反撓點在角拉條之聯點與柱底之中途。(見第 42 節)。水平風載荷,祇作用於左柱上,其值爲柱之鉛直方向上每〔呎〕0.3〔仟磅〕。假定作用於兩反撓點之反力之水平分力相等。試求曲架左半部分各二力構件之內力。

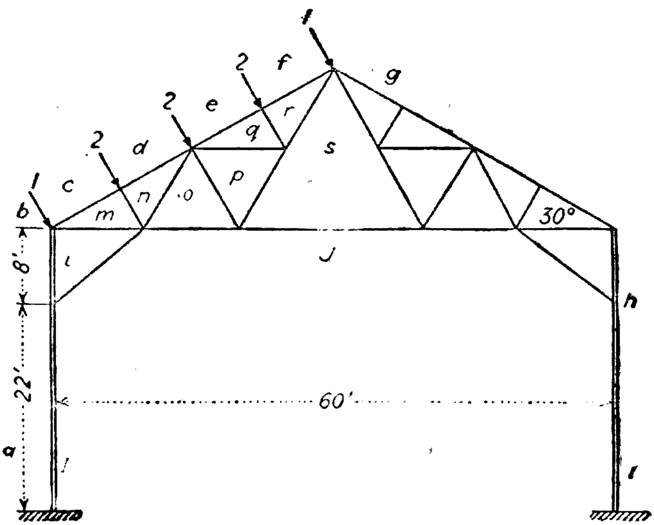


圖 133.

答：$LJ = 6.08$〔仟磅〕,牽力；$CM = 10.71$〔仟磅〕,壓縮力；$ML = 3.23$〔仟磅〕,牽力；$SJ = 2.40$〔仟磅〕,壓縮力；$DN = 10.77$〔仟磅〕,壓縮力；$NM = 2$〔仟磅〕,壓縮力；$NO = 6.38$〔仟磅〕,牽力；$OJ = 3.79$〔仟磅〕,牽力；$OP = 6.19$〔仟磅〕,壓縮力；$PS = 6.19$〔仟磅〕,牽力；$EQ = 6.97$〔仟磅〕,壓縮力；$QP = 2$〔仟磅〕,牽力；$FR = 6.97$〔仟磅〕,壓縮力；$RQ = 2$〔仟磅〕,壓縮力；$RS = 8.19$〔仟磅〕,牽力.

44. 撓性索：水平方面的等布載荷. 假定有一撓性索 (flexible cord),懸於兩點,並假定其載荷在水平方面平均分布；則此索所取之形狀爲拋物線(證明見後文)。拉緊之水平的線,繩,鏈,或纜,

假定其截面積不變,則其情形與水平方面等布的載荷狀況,非常接近. 甚至其鬆垂(Sag)等於其跨距(Span)之 10 % 時(如圖 134

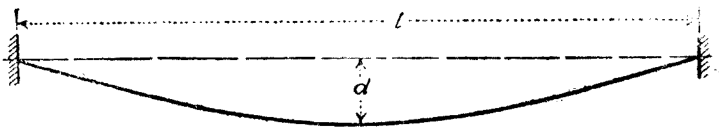


圖 134.

所示),假定其載荷在水平方面仍成爲等布者,所產生之誤差亦不過 1.5%.

假定在索上之載荷,爲許多等重之集中載荷,此等集中載荷在水平方面之間距相等,而兩個相鄰載荷之間距與跨距比較,假定爲極小時,則經過載荷各作用點所聯之平滑曲線亦爲一拋物線,至於索本身之形狀,與拋物線稍微不同.普通用纜、鏈、或環首桿(eyebar)作爲懸索之懸橋(suspension bridge)(圖 135),即爲等間距分布

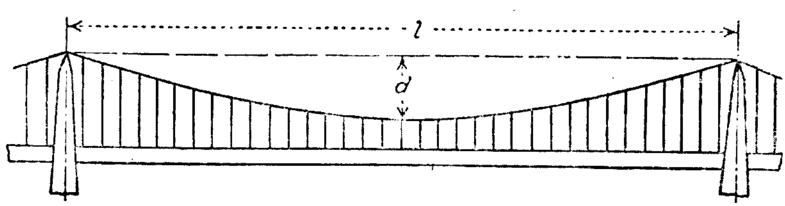


圖 135.

之集中載荷之一例. 靠近跨距兩端之索與懸桿(suspender)之重量略大. 但若不計此等重量上之差異,所產生之差誤極微.

圖 136(a)爲一撓性索. 其跨距爲 l,鬆垂爲 d. 每單位水平距離上之載荷爲 w. 取 X,Y 坐標軸如圖所示,並取索之 OC 段爲脫離體,如圖 136(b). 此段之索所載之重量爲 wx,其作用線與 C 間之距離爲 $x/2$. 作用於此脫離體上之三個力爲 H,wx,及 T,且均經過點 D. 因此力系爲平衡者,故據 $\Sigma M_C = 0$,得

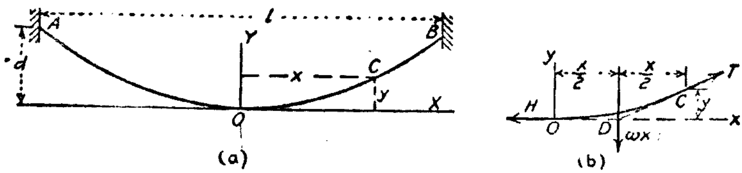


圖 136.

$$Hy = \frac{wx^2}{2}$$

$$x^2 = \frac{2H}{W}y \qquad (4.8)$$

式(4.8)爲一拋物線之方程式. 鉛直線 OY 卽此拋物線之軸.

在圖 137 (a) 內, 取索之右半部分爲脫離體. 其所支持之重量爲 $\frac{wl}{2} = \frac{W}{2}$. 此重量之作用線與 B 間之距離爲 $\frac{l}{4}$. H 爲在點 O

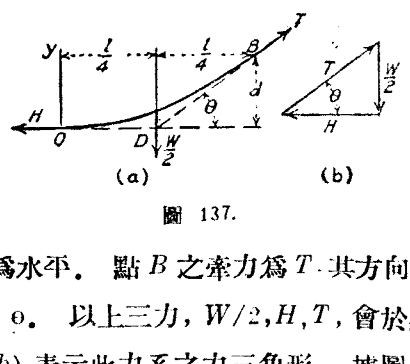


圖 137.

之牽力,其方向爲水平. 點 B 之牽力爲 T. 其方向與曲線相切,而與水平線間成角 θ. 以上三力, $W/2, H, T$, 會於點 D,且成平衡力系. 圖 137(b) 表示此力系之力三角形. 據圖137(a),得

$$\tan\theta = \frac{4d}{l}$$

據圖 137(b),得

$$\tan\theta = \frac{W}{2H}$$

以上兩式之 $\tan\theta$ 值相等,故

$$\frac{4d}{l}=\frac{W}{2H}$$

$$H=\frac{Wl}{8d} \tag{4.9}$$

據力三角形三邊之關係，

$$T=\sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2+H^2} \tag{4.10}$$

假定 $T>>W$ 時，則

$$T \fallingdotseq H. \tag{4.10a}$$

在鬆垂爲跨距之 1% 時，H 與 T 祇相差 0.08%。鬆垂爲跨距之 5% 時，H 與 T 之差小於 2%． 故在鬆垂之百分率甚小時，即可假定 H 等於 T，不致有何顯著之誤差。

命 s 爲在兩懸點(point of suspension)間之索之長度。

$$s=\int ds=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{wx}{H}$，而 $H=\dfrac{wl^2}{8d}$，故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8d}{l^2}x$.

$$s=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+\frac{64d^2}{l^2}x^2}\,dx$$

$$s=\frac{l}{2}\sqrt{1+\frac{16d^2}{l^2}}+\frac{l^2}{8d}\sinh^{-1}\frac{4d}{l} \tag{4.11}$$

如用馬克勞林級數(Maclaurin's sevies)展開．若 $d<\dfrac{l}{4}$，則此級數爲收斂者．

$$s=l+\frac{8d^2}{3l}-\frac{32d^4}{5l^3}+\frac{256d^6}{7l^5}-\cdots \tag{4.11a}$$

對於通常之 l 與 d 之值，若取此級數之最前三項，已足夠正確。

若長度以 W 與 H 之函數表示之，則得

$$s = l + \frac{W^2 l}{24H^2} - \frac{W^4 l}{640H^4} + \frac{W^6 l}{7168H^6} - \cdots \quad (4.11b)$$

若已知 s 與 H，欲求 l，則據(4.11b)式，可得 l 之近似值如下：

$$l \doteqdot s - \frac{W^2 s}{24H^2} + \frac{W^4 s}{640H^4} - \frac{W^6 s}{7168H^6} + \cdots \quad (4.12)$$

若索之兩端之懸點不在相同之準位上時，如圖 138 之 A 與 B，則

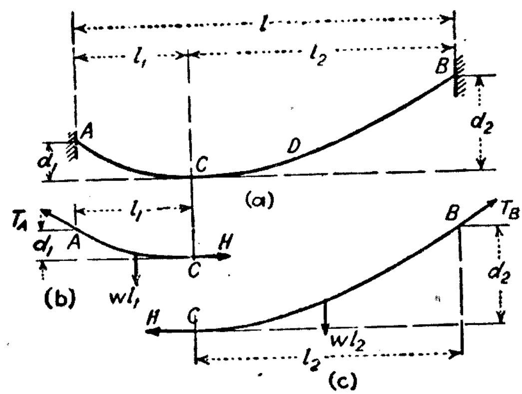


圖 138.

必須將其分爲兩個脫離體 AC 與 CB. 並分別列出兩個力矩方程式 $\Sigma M_A = 0$ 與 $\Sigma M_B = 0$.

$$Hd_1 = \frac{wl_1^2}{2} \quad (4.9a)$$

$$Hd_2 = \frac{wl_2^2}{2} \quad (4.9b)$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \quad (4.13)$$

若將 $l - l_1$ 替代 l_2，則據(4.13)式，得 l_1 之值爲

$$l_1 = \frac{\sqrt{d_1 d_2} - d_1}{d_2 - d_1} l \quad (4.14)$$

若拋物線之頂點，不在索之兩懸點之間，例如圖 138 之索 BD，則曲線必須延長至頂點 C. 此時 C 與 D 間之水平距離爲 l_1，C 與

B 間之水平距離爲 l_2. 故在(4.14)式內，長度 l 應以所設水平跨距加 $2l_1$ 代之。

例 題 1

一纜之跨距爲 800〔呎〕，鬆垂爲 50〔呎〕，所支持之載荷爲在水平方面之每〔呎〕內有 600〔磅〕，試求此纜最低點之牽力，纜兩端之牽力，以及在兩懸點間纜之總長。

【解】 在圖 137(a)內，$\frac{l}{4} = 200$〔呎〕，$d = 50$〔呎〕，$\frac{W}{2} = 400 \times 600 = 240{,}000$〔磅〕。據(4.9)式，得

$$H = \frac{Wl}{8d} = \frac{240{,}000 \times 200}{50} = 960{,}000\text{〔磅〕}.$$

據(4.10)式，得

$$T = \sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2 + H^2} = \sqrt{(240{,}000)^2 + (960{,}000)^2} = 989{,}600\text{〔磅〕}.$$

據(4.11a)式，得

$$s = l + \frac{8d^2}{3l} - \frac{32d^4}{5l^3} + \frac{256d^6}{7l^5} - \cdots$$

$$= 800 + \frac{8 \times 50^2}{3 \times 800} - \frac{32 \times 50^4}{5 \times 800^3} + \frac{256 \times 50^6}{7 \times 800^5}$$

$$= 800 + 8.333 - 0.078 + 0.002 = 808.257\text{〔呎〕}$$

自上式，可見祇須最前之兩項，實際上已相當準確。

例 題 2

一鋼線之直徑爲 0.12〔吋〕，張於同一準位，但相距 100〔呎〕之兩點間. 設鋼線之許用應力爲 12,000〔磅/吋^2〕. 試求線之鬆垂及其長度. 但鋼之重量爲 490〔磅/呎^3〕。

【解】 線之截面積爲 0.0113〔吋^2〕. 線之重量之半數，約略爲

$$\frac{W}{2} = 0.0113 \times 50 \times \frac{490}{144} = 1.923\text{〔磅〕}.$$

線之許用牽力爲

$$T = 0.0113 \times 12{,}000 = 135.6\text{〔磅〕}.$$

圖 139 爲線之右半部分之脫離體圖。自其關於點 O 之力矩方程式，得

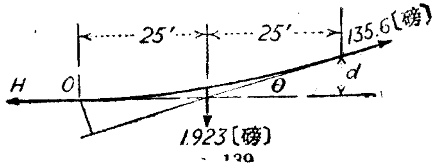


圖 139.

$$135.6 \times 25 \sin\theta - 25 \times 1.923 = 0$$

$$\sin\theta = 0.01418$$

因此角度甚小，故其正弦與正切之值，可假定爲相等，即 $\tan\theta = 0.01418$.

$$d = 25 \times 0.01418 = 0.3545 \text{〔呎〕}.$$

因此線之鬆垂極小，故在(4.11a)式內，祇取最前之兩項，已經足够.

$$s = l + \frac{8d^2}{3l}$$

$$= 100 + \frac{8 \times 0.3545^2}{3 \times 100} = 100.03 \text{〔呎〕}.$$

例 題 3

一纜之重量爲每〔呎〕2〔磅〕，兩懸點間之水平距離爲 600〔呎〕，其鉛直距離爲 20〔呎〕. 纜之最低點在低懸點下 10〔呎〕. 試求纜之兩端之牽力，及纜之全長.

【解】 $d_1 = 10,\ d_2 = 30,\ w = 2,\ l = 600.$

據(4.14)式，得

$$l_1 = \frac{\sqrt{d_1 d_2} - d_1}{d_2 - d_1} l = \frac{\sqrt{300} - 10}{30 - 10} \times 600 = 219.6 \text{〔呎〕}$$

$$l_2 = l - l_1 = 600 - 219.6 = 380.4 \text{〔呎〕}.$$

據(4.9a)式，得

$$H = \frac{w l_1^2}{2d_1} = \frac{2 \times 219.6^2}{2 \times 10} = 4822 \text{〔磅〕}$$

$$w l_1 = 439 \text{〔磅〕}$$

$$w l_2 = 761 \text{〔磅〕}$$

據(4.10)式,得

$$T_A = \sqrt{4822^2 + 439^2} = 4842\ [\text{磅}]$$

$$T_B = \sqrt{4822^2 + 761^2} = 4886\ [\text{磅}]$$

用(4.11)式求全長時,因鬆垂甚小,故取三項已經足够。

$$s_1 = 219.6 + \frac{8 \times 100}{3 \times 219.6} - \frac{32 \times 10{,}000}{5 \times 219.6^3}$$

$$= 219.6 + 1.214 - 0.006 = 220.808\ [\text{呎}]$$

$$s_2 = 380.4 + \frac{8 \times 900}{3 \times 380.4} - \frac{32 \times 81{,}000}{5 \times 380.4^3}$$

$$= 380.4 + 6.309 - 0.094 = 386.615\ [\text{呎}]$$

$$s = s_1 + s_2 = 607.423\ [\text{呎}]。$$

習 題

1. 纜之跨距爲240〔呎〕,鬆垂爲32〔呎〕,在水平方面的每〔呎〕上之載荷爲500〔磅〕。試求纜之最大內力及其長度。 答:127,500〔磅〕;250.942〔呎〕.

2. 輸電銅線之直徑爲$\frac{1}{4}$〔吋〕,最大之許用應力爲6000〔磅/吋^2〕。如線外結冰,以至直徑爲1〔吋〕。試求鬆垂不超過4〔呎〕時,兩電桿間之距離應等於若干? 銅之重量爲556〔磅/呎^3〕,冰之重量爲55〔磅/呎^3〕。 答:141〔呎〕.

3. 舊金山金門大橋(Golden Gate bridge)之跨距爲4200〔呎〕,鬆垂爲475〔呎〕每纜之載荷在水平方面爲每〔呎〕12,500〔磅〕。試求纜之極大牽力,及兩塔間纜之長度。在全長s之方程式中,祇用最前之三項。試求溫度變化爲50°F時,鬆垂之變化爲若干。線之線膨脹係數ϵ爲6.7×10^{-6}.

答:6.37×10^7〔磅〕;4339〔呎〕;2.31〔呎〕.

4. 一纜重5〔磅/呎〕,張於在水平方面相距500〔呎〕,在鉛直方面相距40〔呎〕之兩點間。自低懸點量起之鬆垂爲8〔呎〕。試求纜之最大牽力及其長度。 答:6805〔磅〕;517.815〔呎〕.

5. 在吊橋之一端塔與繫留點間之纜,其載荷爲水平方面的每〔呎〕內1500〔磅〕。繫留點與塔間之距離爲80〔呎〕,比塔頂低60〔呎〕。纜曲線之頂點

比繫留點低 5〔呎〕. 試求纜在繫留點及塔頂之牽力.

答: 148,300〔磅〕; 217,800〔磅〕.

45. 撓性索: 沿索之等布載荷. 若載荷係沿着索長平均分布時,則索所取的曲線謂之**懸鏈線**(catenary). 以下說明如何求得懸鏈線之方程式.

命 w 爲索之每單位長度之重量. 圖 140 之點 O 爲索之最低點. A 爲索上之其他任一點. s 爲自 O 至 A 之索之長度. H 爲在點 O 之牽力. T 爲在點 A 之牽力. H 爲長度等於 c 之虛索(imaginary cord)之重量,即

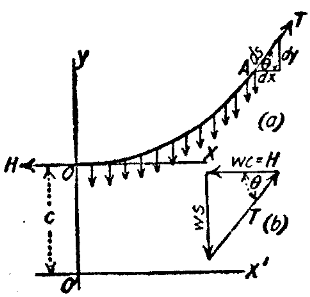


圖 140.

$$H = wc \qquad (4.15)$$

在圖 140(a)內,取長度 s 之索爲平衡之脫離體. 圖 140(b)爲此脫離體之力三角形. 據此三角形可得如下之關係.

$$\frac{ws}{wc} = \tan\theta,$$

或

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}. \qquad (4.16)$$

因

$$dy^2 = ds^2 - dx^2,$$

故得

$$\frac{s}{c} = \frac{\sqrt{ds^2 - dx^2}}{dx}.$$

兩邊平方之,再解 dx 之值,得

$$dx = \frac{c\,ds}{\sqrt{c^2 + s^2}}$$

或

$$\int_c^x dx = c\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{c^2+s^2}}$$

積分之，得

$$x = c\log_e \frac{s+\sqrt{c^2+s^2}}{c} \qquad (4.17)$$

上式中之 e 爲納氏對數(Napierian logarithm，自然對數)之底數(base)，其値爲 2.71828. 據下述關係，可化爲常用對數 (common logarithm).

$$0.4343\log_e A = \log_{10} A \qquad (4.18)$$

若將(4.17)式化爲指數式，得

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s+\sqrt{s^2+c^2}}{c}$$

解 s 之値，得

$$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \qquad (4.19)$$

若將式(4.19)之 s 值，代入式(4.16)，得

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)dx$$

若以 O 爲原點，dy 之積分極限爲自 0 至 y，則所得之式，至爲複雜. 若取 O' 爲原點，則得較簡之式. 於是 dy 之積分限自 c 至 y.

$$\int_c^y dy = \frac{c}{2}\left[\int_0^x \frac{1}{c}e^{\frac{x}{c}}dx - \int_0^x \frac{1}{c}e^{-\frac{x}{c}}dx\right]$$

積分之，得

$$y - c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) - c$$

即

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \tag{4.20}$$

將(4.19)(4.20)兩式平方後相減，得

$$y^2 = s^2 + c^2 \tag{4.21}$$

自(4.17)(4.21)兩式，得

$$x = c \log_e \frac{s + y}{c} \tag{4.22}$$

據圖 140(*b*)之力三角形之三邊關係，得

$$T^2 = w^2c^2 + w^2s^2 = w^2(c^2 + s^2) = w^2y^2$$

$$T = wy \tag{4.23}$$

以上所述有關之量如下：

長度	單位重量	牽力	跨距	變位
$2s$	w	T	$2x_1 = l$	$y - c$

最有用之問題為已知長度，跨距，及重量；或已知變位，跨距及重量．其餘之未知量，因對數方程式之關係，祇能用試算法求出．

假定索之兩端，不在同樣高的準位上時，必須將曲線分為兩部分再行索解． 假定 x_1, x_2 為曲線頂點與兩懸點間之水平距離，跨距為 $l = x_1 + x_2$. 曲線兩部分之 c 值相等．曲線之長度為 $s = s_1 + s_2$.

習　題 1

一纜長 800〔呎〕，重量為 2〔磅/呎〕，張於在同一準位之兩點間．試求其鬆垂與跨距．假定牽力 T 為 1200〔磅〕．

【解】

$$w = 2,\ T = 1200,\ 2s = 800$$

自式(4.23)，得

$$y = 600\text{〔呎〕}$$

自式(4.21)，得

$$c = 447.2 \text{〔呎〕}.$$

其鬆垂為

$$y - c = 152.8 \text{〔呎〕}$$

自(4.22)式,得跨距為

$$2x = 2 \times 447.2 \log_e \frac{1000}{447.2}$$

$$= 719.8 \text{〔呎〕}.$$

習 題 2

一纜重 2〔呎/磅〕,張於相距 800〔呎〕之兩點間. 其鬆垂為 100〔呎〕. 試求此纜之牽力及長度.

【解】 此問題祇可用試算法解之.

$$y = c + 100$$

自式(4.21),得

$$c^2 + 200c + 10000 = s^2 + c^2$$

$$s = 10\sqrt{2c + 100}$$

自式(4.22),得

$$400 = c \log_e \frac{10\sqrt{2c + 100} + c + 100}{c}$$

用試算方法求得適合於上式之 c 值約略為

$$c \doteqdot 810$$

從此 c 值,得

$$y = 915; \quad T = 1820$$

據式(4.21),得

$$s^2 = y^2 - c^2$$

$$s = 414.7 \text{〔呎〕}$$

索之總長為 $\qquad 2s = 829.4 \text{〔呎〕}$

習 題 3

一纜重 4〔磅/呎〕,張於在水平方面相距 800〔呎〕,鉛直方面相

距 100〔呎〕之兩點間. 假定從低懸點起量得之鬆垂爲 200〔呎〕. 試求在纜之兩端之牽力,及其全長.

【解】 此問題祇能用試算法解之.

$$y_1 = c + 200;\ y_2 = c + 300$$

自式(4.21),得

$$s_1 = 20\sqrt{c + 100};\ s_2 = 20\sqrt{1.5c + 225}$$

自式(4.22),得

$$800 = c\left[\log_e \frac{20\sqrt{c+100}+c+200}{c} + \log_e \frac{20\sqrt{1.5c+225}+c+300}{c}\right]$$

用試算法,求得適合於上式之 c 值,約略爲

$$c \doteqdot 360$$

自此 c 值,得

$$y_1 = 560\,〔呎〕;\quad T_1 = 2240\,〔磅〕$$

$$y_2 = 660\,〔呎〕;\quad T_2 = 2640\,〔磅〕$$

$$s_1 = \sqrt{560^2 - 360^2} = 429\,〔呎〕$$

$$s_2 = \sqrt{660^2 - 360^2} = 553\,〔呎〕$$

$$s = 429 + 553 = 982\,〔呎〕.$$

習題

1. 一纜長 500〔呎〕,重 0.094〔磅/呎〕. 在兩端之牽力各爲 30〔磅〕. 試求其跨距與鬆垂. 答: 418〔呎〕; 121〔呎〕.

2. 一鏈長 100〔吋〕,重 2〔磅/呎〕. 張於同一準位而相距 60〔呎〕之兩點間. 試求其兩端之牽力及鬆垂. 答: 105.1〔磅〕; 36.35〔呎〕.

3. 一纜重 1.6〔磅/呎〕,其上掛有共重 4.2〔磅/呎〕之電話纜及掛鈎. 兩塔間之跨距爲 600〔呎〕,鬆垂爲 75〔呎〕. 試求纜之長度及最大牽力. 假定在支掛電話之纜上承受所有之內力.

答: 622〔呎〕; 1910〔磅〕.

4. 一纜重 1〔磅/呎〕,張於在水平方面相距 300〔呎〕,在鉛直方面相距 40

〔呎〕之兩點間。從低懸點量起之鬆垂爲 20〔呎〕。試求在兩端之牽力，及纜之長度。 答: 328〔呎〕; 368〔呎〕; 314〔呎〕.

共面非共點力之總習題

1. 試解圖 141 所示桁架[1]之構件 AB, AC, BC 之內力。

答: $AB = 11.2$〔仟磅〕,壓縮力; $AC = 11.6$〔仟磅〕,牽力; $BC = 6$〔仟磅〕,壓縮力.

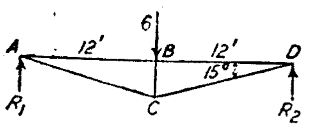


圖 141.

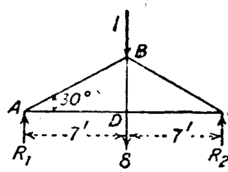


圖 142.

2. 試解圖 142 內所示各構件之內力。

答: $AB = 9$〔仟磅〕,壓縮力; $AD = 7.79$〔仟磅〕,牽力; $BD = 8$〔仟磅〕,牽力.

3. 在圖 143 所示之桁架上，點 B 之反力，係在水平方向。點 A 之反力，有水平與鉛直兩分力。試求各個反力之分力，及各構件之內力。

答: $B = 6.928$〔仟磅〕; $A_x = 6.928$〔仟磅〕; $A_y = 7$〔仟磅〕; $AB = 4$〔仟磅〕,牽力; $AC = 6$〔仟磅〕,牽力; $AD = 1.732$〔仟磅〕,牽力; $BC = 8$〔仟磅〕,壓縮力; $DC = 2$〔仟磅〕,壓縮力; $CE = 2$〔仟磅〕,壓縮力; $DE = 1.732$〔仟磅〕,牽力.

4. 在圖 143 內，假定 4〔仟磅〕之力，係在水平方向，並且向右。其餘各力不變。試求其反力，及有變動之內力。

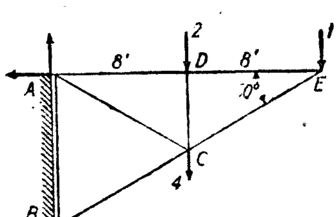


圖 143.

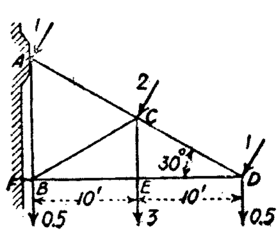


圖 144.

(1)【譯注】 在總習題內，各桁架之接頭，假定均爲銷聯接.

答: $B = 1.46$〔仟磅〕; $A_x = 5.46$〔仟磅〕; $A_y = 3$〔仟磅〕; $AB = 0.845$〔仟磅〕,牽力; $AC = 4.31$〔仟磅〕,牽力; $BC = 1.69$〔仟磅〕,壓縮力.

5. 在圖 144 所示之桁架內,短支桿 FB 之反力係在水平方向。試求 FB 之壓縮力;在點 A 之反力之水平與鉛直分力;及所有各內力。

答: $FB = 7.46$〔仟磅〕,壓縮力; $A_x = 5.46$〔仟磅〕; $A_y = 7.46$〔仟磅〕; $AB = 3.15$〔仟磅〕,牽力; $AC = 6.89$〔仟磅〕,牽力; $BC = 5.31$〔仟磅〕,壓縮力; $BE = ED = 2.87$〔仟磅〕,壓縮力; $CE = 3$〔仟磅〕,牽力; $CD = 2.732$〔仟磅〕,牽力.

6. 試求圖 145 所示桁架之各內力。

答: $AB = 10.06$〔仟磅〕,壓縮力; $AC = 9$〔仟磅〕,牽力; $BC = 2.68$〔仟磅〕,壓縮力; $BD = 8.72$〔仟磅〕,壓縮力; $CD = 3$〔仟磅〕,牽力; $CE = 6$〔仟磅〕,牽力.

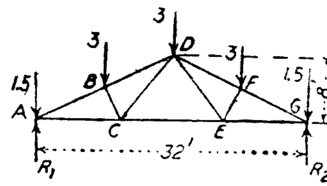


圖　145.

7. 假定在圖 145 所示桁架之點 E 加一載荷。試從觀察上決定此桁架之那幾個構件,可能因此而變動內力。假定此載荷為 4〔仟磅〕,試求此等構件之內力之增量。

答: $AB = BD = 2.8$〔仟磅〕,壓縮力; $AC = CE = 2.5$〔仟磅〕,牽力; $DE = 5$〔仟磅〕,牽力; $DF = FG = 6.15$〔仟磅〕,壓縮力; $EG = 5.5$〔仟磅〕,牽力.

8. 試求圖 146 所示懸臂桁架各構件之內力。

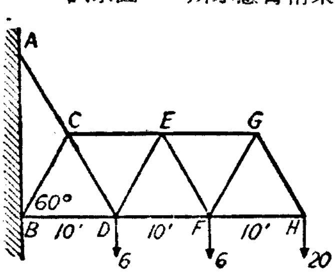


圖　146.

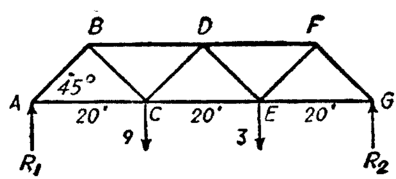


圖　147.

答: $AC = 90.1$〔仟磅〕,牽力; $BC = 53.1$〔仟磅〕,牽力; $BD = 71.6$〔仟磅〕,壓縮力; $CD = 37$〔仟磅〕,牽力; $CE = 53.1$〔仟磅〕,牽力; $DE = 30$〔仟磅〕,壓縮力; $DF = 38.1$〔仟磅〕,壓縮力; $EF = 30$〔仟磅〕,牽力; $EG = 23.1$〔仟磅〕,牽力; $FG = 23.1$〔仟磅〕,壓縮力; $FH = 11.55$〔仟磅〕,壓縮力; $GH = 23.1$〔仟磅〕,牽力.

9. 試求圖 147 所示桁架之所有內力。

答：$AB = 9.9$〔仟磅〕，壓縮力； $AC = 7$〔仟磅〕，牽力； $BD = 14$〔仟磅〕，壓縮力； $BC = 9.9$〔仟磅〕，牽力； $CD = 2.83$〔仟磅〕，牽力； $CE = 12$〔仟磅〕，牽力； $DE = 2.83$〔仟磅〕，壓縮力； $DF = 10$〔仟磅〕，壓縮力； $EF = 7.07$〔仟磅〕，牽力； $EG = 5$〔仟磅〕，牽力； $FG = 7.07$〔仟磅〕，壓縮力。

10. 試求圖 148 所示桁架上在點 I 之反力之大小與方向，並求在所有構件內之內力。

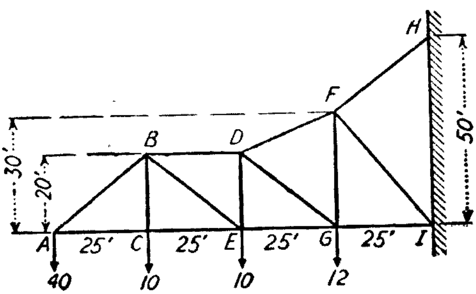


圖 148.

答：$I = 112$〔仟磅〕，與 X 軸成 $8°35'$ 之角； $AB = 64$〔仟磅〕，牽力； $AC = CE = 50$〔仟磅〕，壓縮力； $BC = 10$〔仟磅〕，牽力； $BD = 112.5$〔仟磅〕，牽力； $BE = 80$〔仟磅〕，壓縮力； $DE = 60$〔仟磅〕，牽力； $EG = 112.5$〔仟磅〕，壓縮力； $DF = 134.5$〔仟磅〕，牽力； $DG = 16$〔仟磅〕，壓縮力； $FG = 22$〔仟磅〕，牽力； $GI = 125$〔仟磅〕，壓縮力； $FH = 142$〔仟磅〕，牽力； $FI = 21.9$〔仟磅〕，牽力。

11. 在圖 149 所示之桁架內，試求構件 AB，AC，BD，BE 內之內力。假定 DG 與 EF 兩構件內，祇能有牽力。問那一構件內有力，並求此力之大小。

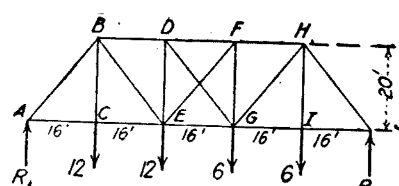


圖 149.

答：$AB = 26.12$〔仟磅〕，壓縮力； $AC = 16.32$〔仟磅〕，牽力； $BD = 23.04$〔仟

磅〕,壓縮力; $BE = 10.76$〔仟磅〕,牽力, $EF = 4.61$〔仟磅〕,牽力.

12. 試求圖 150 所示桁架內所有構件之內力。對角構件 DG, EF, FI, GH 內祇能有牽力。

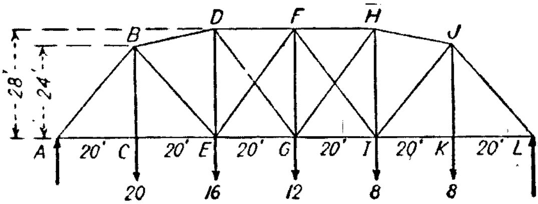


圖 150.

答: $AB = 48.5$〔仟磅〕,壓縮力; $AC = CE = 31.1$〔仟磅〕,牽力; $BC = 20$〔仟磅〕,牽力; $BE = 12.42$〔仟磅〕,牽力; $BD = 39.82$〔仟磅〕,壓縮力; $DE = 6.45$〔仟磅〕,牽力; $DF = 40.05$〔仟磅〕,壓縮力; $EG = 39.06$〔仟磅〕,牽力; $DG = 1.64$〔仟磅〕,牽力; $FG = 0$; $FH = 40.05$〔仟磅〕,壓縮力; $GH = 13.1$〔仟磅〕,牽力; $GI = 32.4$〔仟磅〕,牽力; $HI = 4.2$〔仟磅〕,壓縮力; $HJ = 33.1$〔仟磅〕,壓縮力; $IJ = 15.9$〔仟磅〕,牽力; $IK = KL = 22.22$〔仟磅〕,牽力; $IK = 8$〔仟磅〕,牽力; $JL = 34.71$〔仟磅〕,壓縮力.

13. 試求圖 151 所示桁架中,構件 a, b, c, d 之內力。

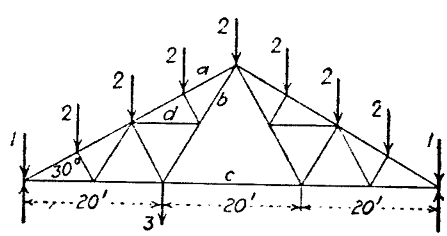


圖 151.

答: $a = 15$〔仟磅〕,壓縮力; $b = 8.66$〔仟磅〕,牽力; $c = 8.66$〔仟磅〕,牽力; $d = 1.732$〔仟磅〕牽力.

14. 試求圖 152 所示屋頂桁架之反力,及所有內力。

答: $R_1 = 13.58$〔仟磅〕; $R_2 = 15.85$〔仟磅〕; $R_3 = 2.97$〔仟磅〕; $AB = 34.06$〔仟磅〕,壓縮力; $AC = CE = 31.25$〔仟磅〕,牽力; $BC = 4$〔仟磅〕,牽力; $BD =$

26.59〔仟磅〕,壓縮力; $BE = 8.27$〔仟磅〕,壓縮力; $DE = 7.08$〔仟磅〕,牽力; $DF = 19.05$〔仟磅〕,壓縮力; $DG = 9.98$〔仟磅〕,壓縮力; $EG = 23.66$〔仟磅〕,牽力; $FG = 12.23$〔仟磅〕,牽力; $FH = 10.3$〔仟磅〕,壓縮力; $FI = 14.10$〔仟磅〕,壓縮力; $GI = 15.88$〔仟磅〕,牽力; $HI = 18.74$〔仟磅〕,牽力; $HJ = 18.70$〔仟磅〕,壓縮力; $IJ = 6.93$〔仟磅〕,牽力。

15. 在圖 152 內,試求僅由於下弦之載荷,在構件 DF,DG,與 EG 內之內力。但不得先求其他構件內之內力。

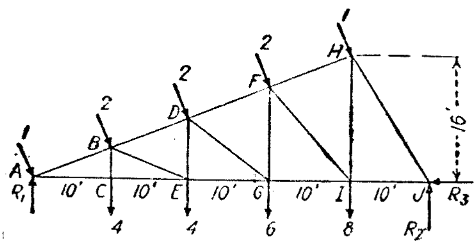


圖 152.

答: $DF = 15.05$〔仟磅〕,壓縮力; $DG = 6.4$〔仟磅〕,壓縮力; $EG = 19$〔仟磅〕,牽力。

16. 在圖 153 所示之曲架內,假定反力 R_1 沿鉛直方向。試求構件 a,b,c,d,e,f,g 內之內力。

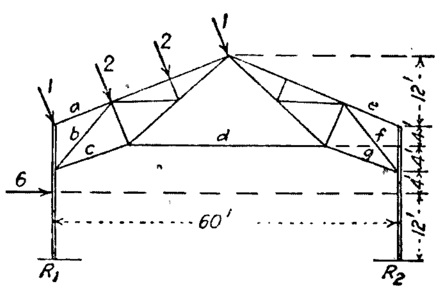


圖 153.

答: $a = 2.82$〔仟磅〕,牽力; $b = 1.30$〔仟磅〕,牽力; $c = 10.22$〔仟磅〕,壓縮力; $d = 11.55$〔仟磅〕,壓縮力; $e = 17.7$〔仟磅〕,牽力; $f = 4.80$〔仟磅〕,壓縮力; $g = 22.7$〔仟磅〕,壓縮力。

17. 在圖 154 所示之曲架內，假定兩反力之水平分力相等。試求構件 a, b, c, d, e, f, g 之內力。

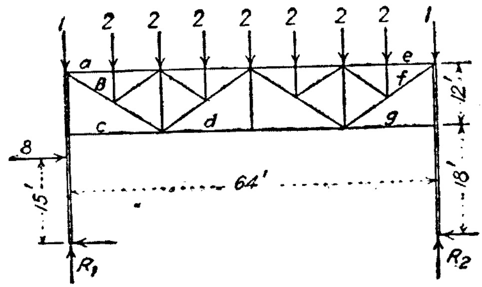


圖 154.

答：a = 10.83〔仟磅〕,壓縮力；b = 8.54〔仟磅〕,牽力；c = 0；d = 5.67〔仟磅〕,牽力；e = 5.83〔仟磅〕,壓縮力；f = 14.79〔仟磅〕,牽力；g = 10〔仟磅〕,壓縮力.

18. 在圖 155 所示之曲架內，假定所有之水平反力均作用於右柱上，試求構件 a, b, c, d, e, f, g 之內力。

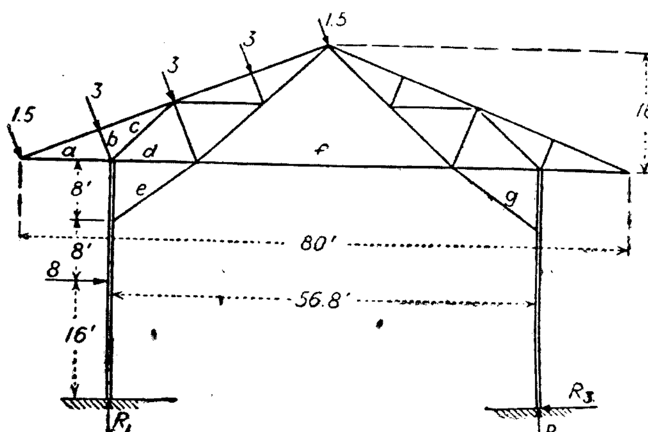


圖 155.

答：a = 4.03〔仟磅〕,壓縮力；b = 3〔仟磅〕,壓縮力；c = 14.1〔仟磅〕,牽力；d = 7.36〔仟磅〕,壓縮力；e = 19.44〔仟磅〕,壓縮力；f = 24.9〔仟磅〕,壓縮力；g = 60.5〔仟磅〕,壓縮力.

19. 圖 156 表示重 600〔磅〕之輪,支於點 O 之軸上。捲在此輪之索上之載荷為 1800〔磅〕。試求將此載荷平衡之力 P,並求其反力 R_x 與 R_y.

答: $P = 3720$〔磅〕; $R_x = 3600$〔磅〕; $R_y = 3365$〔磅〕.

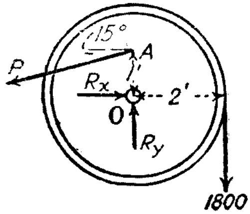


圖 156.

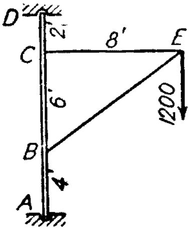


圖 157.

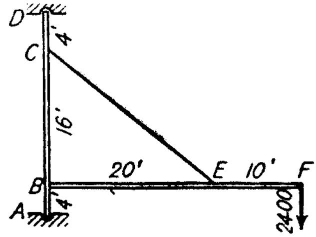


圖 158.

20. 如圖 157 所示,作用於起重機上之 1200〔磅〕拉力,能在經過 CE 之鉛直平面上,繞點 E 轉動。試求使 CE 內之牽力成極大值時,拉力之位置。並求此極大牽力之值;BE 之內力;及在 A,D 之反力。

答: 與鉛直線成 36°52′; $CE = 2000$〔磅〕; $BE = 1600$〔磅〕; $A = 1090$〔磅〕,與 X 軸成 61°30′ 角; $D = 1240$〔磅〕.

21. 在圖 158 所示之起重機內,試求因 2400〔磅〕載荷而在 A,B 產生之反力之水平與鉛直分力;在 D 點之反力;及 CE 之內力。

答: $A_x = 3000$〔磅〕; $A_y = 2400$〔磅〕; $D = 3000$〔磅〕; $B_x = 4500$〔磅〕; $B_y = 1200$〔磅〕; $CE = 5760$〔磅〕,牽力.

22. 假定在第 21 題內,伸臂與柱之重量各為 40〔磅/呎〕,試求各項解答。

答: $A_x = 3750$〔磅〕; $A_y = 4560$〔磅〕; $D = 3750$〔磅〕; $B_x = 5625$〔磅〕; $B_y = 900$〔磅〕; $CE = 7200$〔磅〕,牽力.

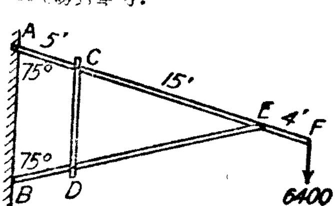


圖 159.

23. 在圖 159 所示之桁架內,A,C,D,E 均為銷,B 端則支於光滑之鉛直

牆上。 設點 F 之鉛直載荷爲6400〔磅〕。 試求在 A, E 兩點反力之鉛直與水平分力；CD 之內力；及在 B 之反力。

答：$A_x=14{,}340$〔磅〕; $A_y=6400$〔磅〕, $E_x=14{,}340$〔磅〕; $E_y=5130$〔磅〕; $CD=5130$〔磅〕; $B=14{,}340$〔磅〕.

24. 假定在圖159內之各構件之重量爲30〔磅/呎〕。 試求在各點之反力之鉛直與水平分力。

答：$A_x=15{,}800$〔磅〕; $A_y=7953$〔磅〕; $B=15{,}800$〔磅〕; $C_x=0$; $C_y=6280$〔磅〕; $D_x=0$; $D_y=6050$〔磅〕; $E_x=15{,}800$〔磅〕; $E_y=5450$〔磅〕.

25. 圖160表示營房所用之櫈，置於光滑之地面上之 D 及 E 處。 試求在 D, E 之反力，及在 A, B, C 三個銷上之水平與鉛直分力。

答：$D=96$〔磅〕; $E=64$〔磅〕; $A_x=206$〔磅〕; $A_y=102.9$〔磅〕; $B_x=206$〔磅〕; $B_y=57.1$〔磅〕; $C_x=206$〔磅〕; $C_y=38.9$〔磅〕.

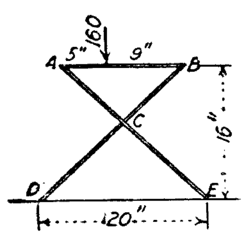


圖 160.

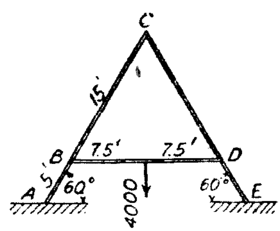


圖 161.

26. 圖161所示之A形架之 E 端係銷聯接，A 端置於光滑之地板上。設載荷爲4000〔磅〕，試求在 A, E 兩點之反力，及在 B, C, D 之銷上之鉛直與水平分力。

答：$A=E=2000$〔磅〕; $E_y=D_y=2000$〔磅〕; $B_x=C_x=D_x=385$ 磅; $C_y=0$.

27. 試求圖161所示A形架之反力，及在銷上之力，假定各構件之重量爲40〔磅/呎〕。

答：$A=E=3100$〔磅〕; $B_y=D_y=2300$〔磅〕; $B_x=C_x=D_x=750$〔磅〕; $C_y=0$.

28. 試求圖161所示A形架之反力，及作用於銷上之力，假定不計算構件

之重量，但將4000〔磅〕載荷向右移至與 D 相距 2〔呎〕之處。

答: $A = 900$〔磅〕; $E = 3100$〔磅〕; $B_y = 533$〔磅〕; $D_y = 3467$〔磅〕; $C_y = 367$〔磅〕; $B_x = C_x = D_x = 385$〔磅〕.

29. 一步行懸橋長 120〔呎〕，闊 4〔呎〕，橋面上每〔呎²〕之載荷爲 160〔磅〕。此橋懸於鬆垂爲 15〔呎〕之兩纜上。試求纜之極大牽力，及在兩懸點間纜之長度。 答: 42,900〔磅〕; 124.82〔呎〕.

30. 一線之安全牽力爲 250〔磅〕，其重量爲 0.06〔磅/呎〕。若許有鬆垂爲 3〔吋〕，試求兩木桿間之極大距離。(假定 $H = T$)

31. 圖 162 所示之橋之下弦成拋物線形。 兩橋脚間之每桁架載重 2400〔仟磅〕。 試求在中點及靠近橋脚之下弦之內力。 (此橋相當於倒置之懸橋)。 答: 1875〔仟磅〕; 2226〔仟磅〕.

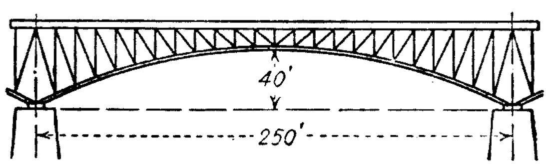


圖 162.

32. 一鏈長 60〔呎〕，重 1.2〔磅/呎〕，兩端之牽力各爲 40〔磅〕。試求跨距及鬆垂。 答: 跨距 = 42.8〔呎〕; 鬆垂 = 18.8〔呎〕.

33. 一輸電纜長 1200〔呎〕，重 1.5〔磅/呎〕，懸於同一準位並相距 1180〔呎〕之兩點上。試求鬆垂及兩端之牽力。

答: 103〔呎〕; 2704〔磅〕.($C = 1700$〔呎〕)

34. 一纜長 800〔呎〕，重 1.5〔磅/呎〕。 兩端之牽力各爲 750〔磅〕。 試求鬆垂及兩懸點間之距離。 答: 200〔呎〕; 660〔呎〕,($C = 300$〔呎〕)

第五章

空間之共點力

46. 將一力分解爲三個直角分力. 將一空間力分解爲三個分力之最普通情形,爲三個分力分別平行於三個直角坐標軸者.

若已知此力與三個直角坐標軸間之角,卽:α 爲力與 X 軸間之角,β 爲力與 Y 軸間之角,γ 爲力與 Z 軸間之角,則據三角學,可求得沿三軸之直角分力爲(見圖 163):

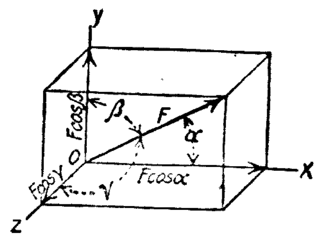


圖 163.

$$\left\{\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha \\ F_y &= F\cos\beta \\ F_z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

設欲用圖解法將力分解時,可作一平面,經過力之作用線與任一軸(三軸輪流),則在此平面上之角之大小,卽爲其實際之大小,而此力之矢量在軸上之射影,卽爲沿軸之分力.

設已知量爲力之作用線上之兩點之直角坐標,而非 α,β,γ 之值.則先算出其方向餘弦,然後應用(5.1)式.

用圖解法時,先作一平面,經過力之作用線與任何一軸(例如 Y 軸). 在此平面上將力分解爲兩分力. 一爲沿 Y 軸之 F_y,另一爲在與 Y 軸垂直之 XZ 平面中之分力. 然後再將 XZ 平面中之分力,分解爲 F_x 與 F_z.

例題

圖 164 之 100〔磅〕力之作用線，係沿一長方體之對角線。 此長方體沿 X，Y，Z 三軸之維，分別為 12〔呎〕，6〔呎〕，8〔呎〕。 試將此力分解為三個直角分力。

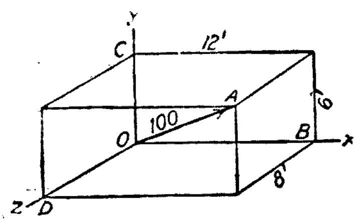


圖 164.

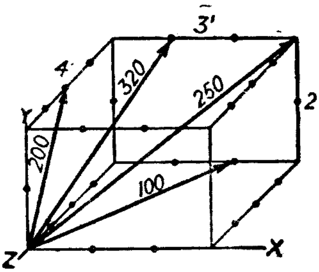


圖 165.

【解】 對角線 OA 之長度，等於三邊之平方和之平方根，即

$$OA = \sqrt{12^2+6^2+8^2} = \sqrt{244} = 15.62 \text{〔呎〕}$$

角 α 即為角 AOB；$\cos AOB = \dfrac{12}{15.62}$

$$F_x = 100 \times \frac{12}{15.62} = 76.8 \text{〔磅〕}$$

角 β 即為角 AOC；$\cos AOC = \dfrac{6}{15.62}$

$$F_y = 100 \times \frac{6}{15.62} = 38.4 \text{〔磅〕}$$

角 γ 即為角 AOD；$\cos AOD = \dfrac{8}{15.62}$

$$F_z = 100 \times \frac{8}{15.62} = 51.2 \text{〔磅〕}.$$

若力之作用方向倒轉，則各分力之大小不變，但其符號為負。 若力之作用線為長方體之其他對角線，則有若干分力為正，若干為負。

習 題

1. 在圖 165 內，試將 250〔磅〕力分解為沿三個直角坐標之分力。

答：$F_x = 139.3$〔磅〕；$F_y = 92.8$〔磅〕；$F_z = -185.7$〔磅〕。

2. 在圖 165 內，試將 320〔磅〕力分解爲三個直角分力，並求角 α, β, γ 之值。

答：$F_x = 69.8$〔磅〕；$F_y = 139.7$〔磅〕；$F_z = -279.3$〔磅〕；$\alpha = 77°25'$；$\beta = 64°10'$；$\gamma = 150°50'$。

47. 空間共點力之合成。 設欲將一非共面之共點力系合併爲一合力，最簡單之方法，爲先將各力分解，再行合併。

在諸力之公點上，分別將各力分解爲其 X, Y, Z 三個分力。設在 X 方向分力之代數和爲 ΣF_x，在 Y 方向分力之代數和爲 ΣF_y，在 Z 方向分力之代數和爲 ΣF_z. 則其最後之合力爲

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \tag{5.2}$$

R 與三軸所成之角，分別爲

$$\begin{cases} \alpha = \cos^{-1} \dfrac{\Sigma F_x}{R} \\ \beta = \cos^{-1} \dfrac{\Sigma F_y}{R} \\ \gamma = \cos^{-1} \dfrac{\Sigma F_z}{R} \end{cases} \tag{5.3}$$

對於此種問題，若應用圖解法，亦頗便利。

例　　題

在圖 165 內，試將 100〔磅〕，250〔磅〕兩力，合併爲一合力。

【解】 沿100〔磅〕力之對角線長爲$\sqrt{2^2 + 4^2} = 4.472$〔呎〕。故 100〔磅〕力之 X, Y, Z 分力如下：

$$F_x = \frac{2}{4.472} \times 100 = 44.7\text{〔磅〕}；F_y = 0；F_z = -\frac{4}{4.472} \times 100 = -89.4\text{〔磅〕}.$$

據第 46 節習題 1 之答，得 250〔磅〕之三個分力如下：

$$F_x = 139.3\text{〔磅〕}；F_y = 92.8\text{〔磅〕}；F_z = -185.7\text{〔磅〕}.$$

相加，得合力之 X, Y, Z 三個分力。

$$\Sigma F_x = 184.0\ [\text{磅}];\ \Sigma F_y = 92.8\ [\text{磅}];\ \Sigma F_z = -275.1\ [\text{磅}].$$

$$R = \sqrt{184.0^2 + 92.8^2 + 275.1^2} = 343.7\ [\text{磅}].$$

$$\cos\alpha = \frac{184.0}{343.7} = 0.536, \quad \alpha = 57°30'$$

$$\cos\beta = \frac{92.8}{343.7} = 0.27, \quad \beta = 74°20'$$

$$\cos\gamma = \frac{-275.1}{343.7} = -0.80, \quad \gamma = 143°10'$$

習　題

1. 在圖 165 內,試將 200〔磅〕力與 320〔磅〕力併爲一合力。

答: $R = 510.8$〔磅〕; $\alpha = 82°10'$; $\beta = 56°40'$; $\gamma = 145°30'$

2. 在圖 165 內,將 100〔磅〕力與 320〔磅〕力之方向倒置,試求四個力之合力。

答: $R = 106.2$〔磅〕; $\alpha = 76°30'$; $\beta = 27°10'$; $\gamma = 66°55'$.

48. 一力關於一線之力矩.　一力關於與其作用線平行之軸之力矩爲零,因此力不能有使物體繞此軸轉動之趨向. 一力關於與其作用線相交之軸之力矩亦爲零,因其力矩臂爲零. 一力關於與其垂直之平面內之任一軸之力矩,等於此力與自力至軸之垂直距離之積.

假定軸並不在與力垂直之平面中,則力可以在其作用線上之任一點,分解爲兩個直角分力. 一與軸平行,一與軸垂直. 因平行分力關於軸之力矩爲零. 故原有之力關於軸之力矩,即等於其垂直分力之力矩.

另一方法爲將力分解爲互成直角之三個分力. 此三個分力之中,有一分力與軸平行,故其關於軸之力矩爲零. 其餘兩個分力之力矩之和,即等於原有力之力矩.

決定一個力,關於一坐標軸之力矩之符號時,必須從軸之正端向

負端看去．成反時針方向之力矩爲正．成順時針方向者爲負．

習　題

1. 在圖 166 內,試求 250〔磅〕力關於長方體前面下邊之力矩．答：126.9〔磅·呎〕.

2. 在圖 166 內,試求三個力之合力,關於 X, Y, Z 三軸之力矩．

答：$M_x = -261$〔磅·呎〕; $M_y = -589$〔磅·呎〕; $M_z = +884$〔磅·呎〕.

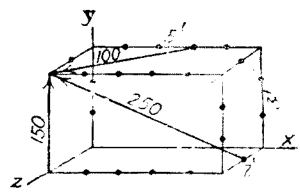


圖 166.

49. 空間共點力之力矩原理． 在第 18 節內,曾證明兩共點力,關於在其平面中之一點之力矩和,卽等於其合力關於同一點之力矩．此處將證明上述之原理,不僅關於其平面上任一點爲有效,並且關於空間之任一軸,亦爲有效．在圖 167 內,命 P, Q 爲相會於

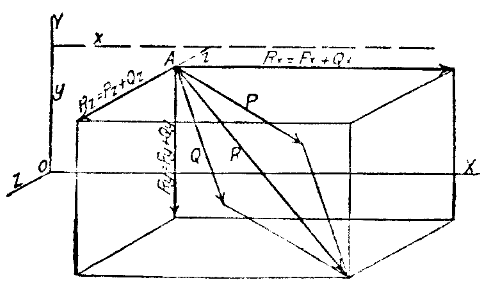


圖 167.

點 A 之共點力,R 爲其合力．命 OX, OY, OZ,爲任一之直角坐標組．則力 P, Q 與其合力 R,均可於點 A 分解爲 X, Y, Z 三個分力．因 R 爲 P 與 Q 之合力,故

$$R_x = P_x + Q_x;\ R_y = P_y + Q_y;\ R_z = P_z + Q_z. \quad (5.4)$$

R 關於 X 軸之力矩爲

$$Mx = R_y z + R_z y$$

據(5.4)式,得

$$M_x = (P_y + Q_y)z + (P_z + Q_z)y \tag{5.5}$$

因分力 P_x 與 Q_x 關於 X 軸之力矩為零。故(5.5)式等號之右邊,即等於 P 與 Q 關於 X 軸之力矩之代數和。

同理,可以證明

$$M_y = R_x z - R_z x = (P_x + Q_x)z - (P_z + Q_z)x \tag{5.6}$$

及

$$M_z = -R_x y - R_y x = -(P_x + Q_x)y - (P_y + Q_y)x \tag{5.7}$$

關於 R 與另外第三力之合力,亦可得到同樣關係。如此可以推廣至任何個之力。

因此,任何個之空間共點力,對於空間任一軸之力矩之代數和,即等於其合力關於同一軸之力矩。

50. 空間共點力之平衡;圖解法。 設有非共面之共點力系,在空間之力多邊形閉合,其合力 $R = 0$,則此力系為平衡者。

反之,任一空間之共點力系平衡,則其力多邊形必須閉合。

因祇有三個獨立之平衡條件:

$$\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0;\ \Sigma F_z = 0 \tag{5.8}$$

故祇能求出三個未知元素。此三個未知元素,通常為三個力之大小,假定力的方向均為已知。

假定在空間之力多邊形閉合,則此力多邊形在三個參考平面中任一平面上之射影,必定閉合。

求解平衡問題時,先畫出所設力系在一參考平面上之射影。因力多邊形在此平面上之射影必須閉合,故可利用之以求未知力之值。

因為在任一射影中，祇有兩個平衡條件，故祇能求得兩個未知力之大小． 是以選擇第一個射影平面時，必須有兩個未知力在此平面上之射影，恰正疊合． 若第三個未知力與此射影平面平行，則其值立即可以求得．

例題 1

圖 169 (a) 表示一剪肢起重機(shear-legs crane)之尺度及載重． 試求在 AE 及 AB 內之內力．

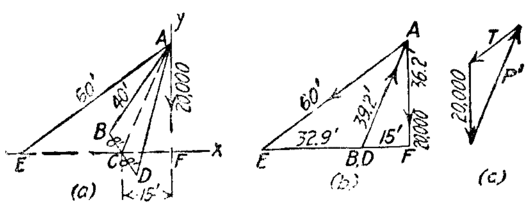


圖 168.

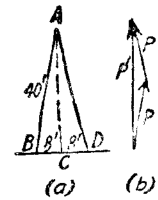


圖 169.

【解】 先將鉛直平面 AEF 作為射影平面．圖 168(b)表示力系在此平面上之射影，此圖亦可謂之點 A 之脫離體圖． 在此射影中，BA 與 DA 兩力疊合 圖 168(c)為此射影力系之圖解． 矢量 T 即為 AE 內之內力，自圖上量得其大小為 15,120〔磅〕． 矢量 P' 即為 BA 及 DA 之內力之射影值之和，其值為 31,500〔磅〕．

欲求 BA 及 DA 之內力時，必須取 ABD 之平面上之視圖． 如圖 169(a)所示． 矢量 P' 之作用線為 CA，其值確係 BA 及 DA 之內力之合力． 經 P' 之始點作一直線與 AB 平行，經其終點作一直線與 AD 平行． 此兩直線之交點，決定矢量 P,P 之長度，P,P 即為 BA 及 DA 之內力． 據圖上量得其值為 16,100〔磅〕．

例題 2

圖 170(a)表示高 40〔呎〕之桅，用三條長 50〔呎〕之纜將其拉住，其上有一可轉動 360° 之水平拉力 2000〔磅〕． 試求此水平拉力轉動時在纜 AB 內所得造成之極大牽力，並求桅內之對應內力．

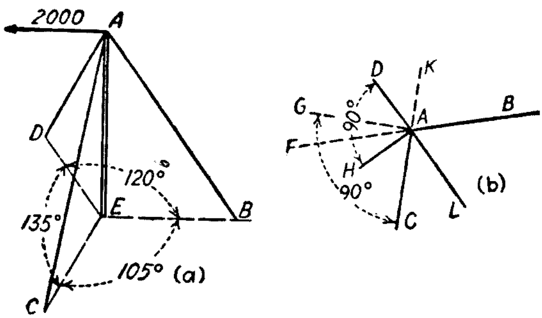


圖 170.

【解】 圖 170(*b*) 爲在點 *A* 之諸力之水平射影. 拉力位置在 *AK* 與 *AF* 間之任何位置時,纜 *AB* 與 *AC* 內有力,纜 *AD* 則無作用. 在第 20 節習題中內,曾證明在 *AB* 內之內力成極大値時,則拉力之作用線在垂直於另一纜之影射之平面中,換言之,即拉力在 *AG* 之位置. 圖 171(*a*)表示求 *AB* 之水平分力之解法.

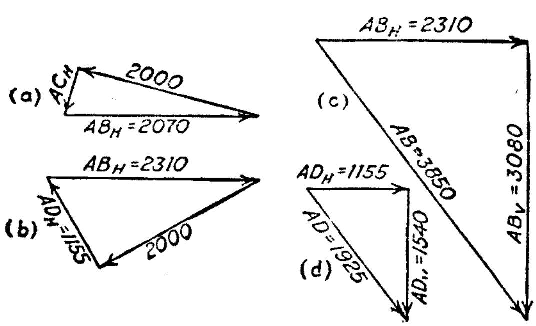


圖 171.

拉力在 *AF* 與 *AL* 間之任何位置時,纜 *AC* 無作用,但纜 *AD* 有作用. 拉力之作用線與平面 *AD* 垂直時,換言之,即在 *AH* 之位置時, *AB* 之內力又成極大値. 圖 171(*b*) 表示求 *AB* 內水平分力之解法. 因 *BA* 延綫所成之角 *LAH*,較大於角 *FAG*, 故在第二次所求得之 *AB* 水平分力極大値,大於第一次所求得者.

在任何纜內之內力成極大值時，拉力之兩個位置中有一個位置，與經過纜之延線之鉛直平面，成較大角度者，則在此位置時纜之內力較大。

圖 171 (c) 表示求 AB 內之內力之解法。 從圖上量得矢量 AB 爲 3850〔磅〕，其鉛直分力 AB_V 爲 3080〔磅〕。圖 171 (d) 表示求 AD 內之內力之解法。 其鉛直分力 AD_V 爲 1540〔磅〕。 在桅內之壓縮力必須與此兩鉛直分力平衡。 故得 EA 之壓縮力爲 $3080 + 1540 = 4620$〔磅〕。

習 題

1. 有一重 50〔磅〕之重物，以 4〔呎〕長之繩三條，繫於一直徑等於 6〔呎〕之水平環上。在環上每兩繫點間之角度爲 120°。 試求在各繩內之牽力。

答：25.2〔磅〕.

2. 若在第一題內，有兩繫點間之角度爲 90°。 第三個繫點，在其餘 270° 之圓弧之中點。試求各繩內之牽力。 答：22.2〔磅〕; 22.2〔磅〕; 31.3〔磅〕.

3. 若圖 168(a)內，AE 之長度改爲 70〔呎〕，CF 改爲 18〔呎〕。 試求在三個支柱內之內力。 答：$AE = 17{,}000$〔磅〕; $AB = AD = 16{,}400$〔磅〕.

4. 若圖 168 (a) 之 20,000〔磅〕拉力之作用線與地面之交點，在點 F 之右 10〔呎〕；在線 EX 之前 5〔呎〕。試求在三個支柱內之內力。

答：$AE = 24{,}100$〔磅〕,牽力； $AB = 12{,}000$〔磅〕,壓縮力； $AD = 25{,}200$〔磅〕,壓縮力.

5. 試求上述例題 2 之 AC 內之極大內力，及桅內對應之壓縮力。

答：4710〔磅〕; 6440〔磅〕.

51. 空間共點力之平衡：代數解法. 若空間之任何共點力系之合力 $R = 0$，則必須

$$\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0;\ \Sigma F_z = 0$$

而此力系爲平衡。

反之，若在空間之共點力系平衡，則沿任一線之分力之代數和，必等於零。

據上述原理，可得到平衡之三個獨立條件。若未知元素不超過三個時，卽可由此而求得。通常三個未知元素爲三個力之大小，其方向則屬已知。

若將一平衡之非共面之共點力系，投射至任何平面上時，其射影爲一平衡之共面共點力系。因共面共點力系祇能有兩個獨立之平衡條件。故於選第一個射影平面時，必須有兩個未知力之作用線之射影相互疊合。

假定空間之共點力系平衡，則所有各力關於空間任一軸之力矩之代數和，必等於零。若所選之第一力矩軸，經過兩未知力之作用線之交點時，則所得之方程式內，祇含有一個未知量，因而卽能求得其値。如選用第二個力矩方程式時，則所取之第二力矩軸，必須與其餘兩未知力中之一之作用線相交。於是據所得方程式，可以求得第二個未知量。求第三個未知量時，若仍用力矩方程式，則得選用任何適當之力矩軸，或採用力和之方程式亦可。同時兼用兩種方法，通常最爲適當。

例題 1

圖 172 表示堆草之設備。當 1000〔磅〕之載荷在中點，而鬆垂爲 4〔呎〕時，試求內力 T_1，T_2，與 P。

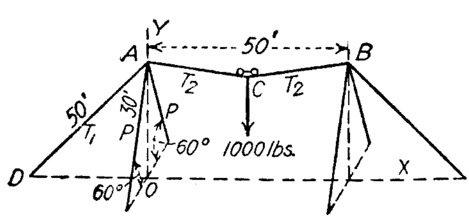


圖 172.

【解】 先取纜 ACB 與載荷爲脫離體。二個內力 T_2 與載荷，構成一平衡之共面共點力系。在點 C 之鬆垂爲 4〔呎〕時，長度 $AC = 25.32$〔呎〕。據

$\Sigma F_y = 0$,得

$$2T_2 \frac{4}{25.32} = 1000$$

$$T_2 = 3165 \text{〔磅〕}$$

$$\text{長度 } AO = 30 \sin 60^\circ = 25.98 \text{〔呎〕}$$

$$\text{長度 } OD = \sqrt{50^2 - 25.98^2} = 42.7 \text{〔呎〕}.$$

在點 A 之四力,成一非共面的共點力系,據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$3165 \times \frac{25}{25.32} - \frac{42.7}{50} T_1 = 0$$

$$T_1 = 3660 \text{〔磅〕}.$$

從對稱上,可看出兩支柱之內力相等。據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$3660 \times \frac{25.98}{50} + 3165 \times \frac{4}{25.32} - 2P \times 0.866 = 0$$

$$P = 1388 \text{〔磅〕}.$$

若將點 A 之力系,先投射至鉛直平面 DAO 上,再投射至經過兩支柱之鉛直平面上,據 $\Sigma F_x = 0$,及 $\Sigma F_y = 0$,亦可求得上述同樣之方程式.

例題 2

求圖 173 所示架內 AE, DE, BE 三構件之內力.

【解】 在點 E 之力系爲空間之共點力系.

若將線 DB 作爲第一力矩軸,則據 $\Sigma M = 0$,得

$$1000 \times 8 - AE \times 4.8 = 0$$

$$AE = 1667 \text{〔磅〕}.$$

再將經過點 B 之鉛直線作爲力矩軸. 則據 $\Sigma M = 0$,得

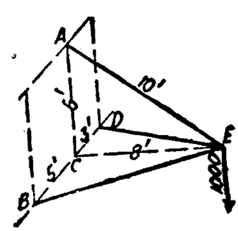


圖 173.

$$1667 \times 0.8 \times 5 - DE \times 8 \times \frac{8}{8.54} = 0$$

$$DE = 890 \text{〔磅〕}$$

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$\frac{5}{9.42} BE - \frac{3}{8.54} \times 890 = 0$$

$$BE = 590 \text{〔磅〕}$$

關於經過點 D 之鉛直線之力矩方程式，可用以覆核答數是否正確。

$$1667 \times 0.8 \times 3 - BE \times 8 \times \frac{8}{9.42} = 0$$

$$BE = 590\text{〔磅〕}.$$

此類習題，若用三角法解之，亦甚便利。

習 題

1. 設有三脚架，支柱均長 5〔呎〕，支於水平之地面上。三個支柱之底點，成爲每邊長 3〔呎〕之等邊三角形。試求由於三脚架頂之 50〔磅〕載荷，在三個支柱內所產生之內力。 答：17.8〔磅〕。

2. 若習題 1 之一支柱底點向外移動 1.5〔呎〕，試求其內力。

答：24.4〔磅〕；16.1〔磅〕；16.1〔磅〕。

3. 若圖 172 所示之堆草設備內，載荷移至與點 A 間水平距離爲 15〔呎〕鉛直距離爲 3.6〔呎〕之一點，試求內力 AC，BC，AD，及 P 之值。

答：$AC = 3000$〔磅〕；$BC = 2930$〔磅〕；$AD = 3420$〔磅〕；$P = 1430$〔磅〕。

4. 若在圖 173 內，CD 改爲 7〔呎〕，並若在鉛直平面中之 1000〔磅〕力，改爲與 CE 成角 105°。試求三個內力之值。

答：$AE = 1610$〔磅〕，牽力；$BE = 707$〔磅〕，壓縮力；$DE = 570$〔磅〕，壓縮力。

空間共點力之總習題

1. 一起重桿高 30〔呎〕，用三條牽索自桿頂聯到地上與桿底分別相距 40〔呎〕，60〔呎〕，75〔呎〕的三點，此三點與桿底聯結之各直線間，均成 120° 角。若索 A 之牽力爲 8000〔磅〕，試求索 B 與索 C 內之牽力，以及起重桿內之壓縮力。 答：7160〔磅〕；6890〔磅〕；10,560〔磅〕。

2. 假定習題 1 內，牽索 C 向 A 轉過 15°，而在索 A 內之牽力不變，試求其他各值。 答：9800〔磅〕；8440〔磅〕；12,840〔磅〕。

3. 三個均質圓球，重 45〔磅〕，適可放入有光滑鉛直邊之等邊三角形盒內。在三個圓球之上，再放一個同樣大小之圓球，但其重量爲 60〔磅〕。試求盒

在各個接觸點上對圓球所施之力。 答：在底上 65〔磅〕；在邊上 14.15〔磅〕.

4. 設有重 800〔磅〕之重物懸於 AB, AC 兩纜上，每纜長 25〔呎〕。 B, C 兩點在同一準位上，其間相距 16〔呎〕。 一水平力 AD，垂直作用於經過 BC 之鉛直平面上，並保持重物與上述之鉛直平面 BC 相距 10〔呎〕。 試求 AD, AB, AC 之內力。 答：$AD = 372$〔磅〕；$AB = AC = 465$〔磅〕.

5. 在習題 4 內，若拉力 AD 指向上方，並與水平面成 15°角，而重物與經過 BC 之鉛直平面間之距離為 15〔呎〕。試求各項之値。

答：$AD = 555$〔磅〕；$AB = AC = 447$〔磅〕.

6. 試求圖 174 之架內之三個內力。

答：$DE = 2400$〔磅〕,壓縮力；$AD = 1020$〔磅〕,牽力；$CD = 730$〔磅〕,牽力。

7. 在圖 174 內，若 1800〔磅〕力在平行於 ACE 之平面中作用，拉向後方，下斜而與水平面成 45° 角。 試求三個構件之內力。

答：$DE = 621$〔磅〕,壓縮力；$AD = 2230$〔磅〕,牽力；$CD = 1930$〔磅〕壓縮力.

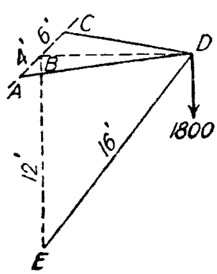


圖 174.

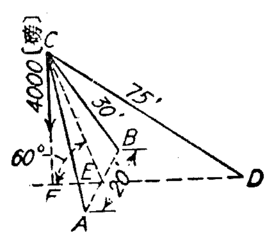


圖 175.

8. 試求圖 175 所示之剪肢起重機，因 4000〔磅〕載荷而在三個構件內所產生之內力。

答：$CD = 3050$〔磅〕,牽力；$CA = CB = 3060$〔磅〕,壓縮力.

9. 若在圖 175 內，4000〔磅〕之拉力係平行於線 BA 並且向前方，試求各項之値。 答：$CD=0$, $CA = 6000$〔磅〕,壓縮力；$CB = 6000$〔磅〕,牽力.

10. 若在圖 175 內，4000〔磅〕之拉力係平行於線 DF，並指向左方，試求各項之値. 答：$CD = 5280$〔磅〕,牽力；$CA = CB = 1060$〔磅〕,壓縮力.

11. 設三脚架之支柱 AB, AC, AD 均長 30〔呎〕,支於水平之地面上。其柱脚之距離分別爲 $BC = 28$〔呎〕; $CD = 32$〔呎〕; $DB = 36$〔呎〕。試求因在點 A 之 1000〔磅〕載荷,在各支柱內所產生之內力。

答: $AB = 450$〔磅〕; $AC = 300$〔磅〕; $AD = 550$〔磅〕。

12. 圖 176 表示一桅,用三條牽索繫住。 CEB, BED, DEC 三角均等於 $120°$。 1000〔磅〕拉力成水平方向,並可繞點 A 旋轉。 假定各牽索祇能承受牽力。 試求 1000〔磅〕拉力在 AEB 平面中時,在各牽索內及桅內所生之內力。

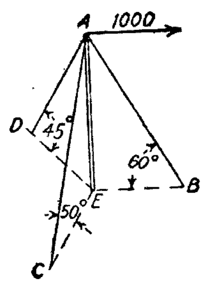


圖 176.

答: $AB = 0$; $AC = 1560$〔磅〕,牽力; $AD = 1410$〔磅〕,牽力; $AE = 2190$〔磅〕,壓縮力.

13. 在圖 176 內,假定 1000〔磅〕拉力繞點 A 在水平面中旋轉時,試求在 AD 內所生成之極大內力,及桅中之對應內力。

答: $AD = 1630$〔磅〕,牽力; $AE = 1840$〔磅〕,壓縮力,或 2150〔磅〕,壓縮力.

14. 若習題 13 內,1000〔磅〕之拉力斜向下方,並與經過點 A 之水平面成 $20°$ 角,試求各項之值。

答: $AD = 1540$〔磅〕,牽力; $AE = 2070$〔磅〕,壓縮力 或 2370〔磅〕,壓縮力.

第六章

空間之平行力

52. 空間之平行力之合力,圖解法. 空間任何個平行力之合力之大小與方向,可據諸力之代數和求得. 用圖解法,定此合力之作用點時,普通最簡單之方法,爲將此力系之各力,投射至與力平行,且互成直角之兩參攷平面上. 據合力在兩射影平面上之位置,可決定其在空間之位置.

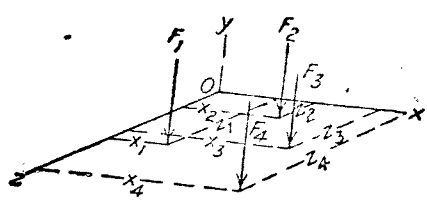


圖 177.

圖 177 表示平行於 Y 軸,並向下作用之四個鉛直力. 其合力爲 $R=F_1+F_2+F_3+F_4$. 圖 178 爲此力系在 XY 平面上之射影. 應用第 27 節之方法,求得合力 R 與 Y 軸間之距離爲 x. 仿此在

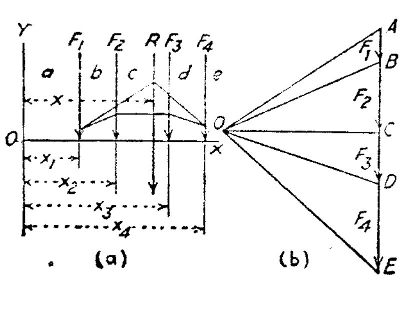


圖 178.

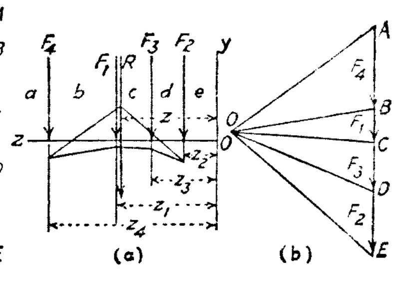


圖 179.

圖 179 內求得合力 R 與 Y 軸間之距離爲 z. 故在空間圖內,合力之位置,與 YZ 平面間之距離爲 x,與 XY 平面間之距離爲 z.

例 題

1. 在圖 180 內一長方板之四角上,各有一向下之鉛直力. 試用圖解法,將四力合併.

答: $R = 2700$〔磅〕; $x = 5.19$〔呎〕; $z = 5.04$〔呎〕.

2. 若在習題 1 內,將 800〔磅〕力之方向倒轉,試求其解.

答: $R = 1100$〔磅〕; $x = 12.73$〔呎〕; $E = 12.36$〔呎〕.

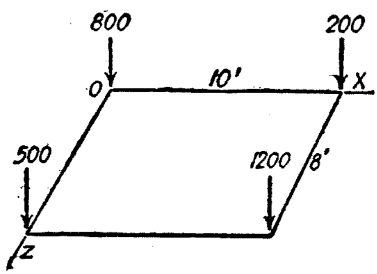


圖 180.

53. 空間之平行力之合力,代數解法. 空間任何個平行力之合力之大小與方向,可據諸力之代數和求得. 本節內僅說明如何求出合力之位置.

在圖 178(a) 之 XY 射影內,據第 28 節之原理,得合力 R 與 Y 軸間之距離 x 爲

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{6.1}$$

i 爲正整數. n 等於力之總個數. 據射影原理,此自 XY 射影所求得之距離 x,卽等於合力 R 與 YZ 平面間之距離. 同理,可得 R 與 XY 平面間之距離 z 爲

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \tag{6.2}$$

因為關於在 YOZ 平面內而平行於 OZ 之任何軸之力矩方程式，即等於關於 OZ 之力矩方程式. 故習慣上，一力關於一個平面之力矩，意即此力關於在所設平面上而與力垂直之任一軸之力矩.

欲求關於在 YOZ 平面內，與 OZ 軸成角 θ 之任一軸之力矩方程式，祇須將關於 OZ 軸之力矩方程式內之各項均乘以 $\cos\theta$. 若將此公共之因數析出，即得關於 OZ 之力矩方程式. 因此對於空間之三個或多個平行力之力矩之普徧方程式，可述之如下：

在空間之任何個平行力，關於任一軸之力矩之代數和，即等於其合力關於同一軸之力矩.

若在空間之平行力系之合力 R 為零，但此力系關於任一軸之力矩不等於零，則此力系相當於一力偶，而與第 31 節所討論者相同.

習 題

1. 試在圖 181 所示力系之合力之大小，方向，與位置.

答：$R = 2700$〔磅〕，向下；$x = 0.59$〔呎〕；$z = 4.19$〔呎〕.

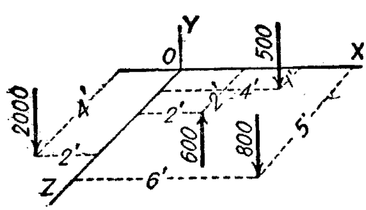


圖 181.

2. 如於習題 1 內，將 2000〔磅〕力之方向倒轉，試求其解.

答：$R = 1300$〔磅〕，向上；$x = -7.38$〔呎〕；$z = 3.62$〔呎〕.

54. 空間之力偶之合併. 若欲合併之兩力偶，在兩個相交之平面上，則先將此兩個力偶，化為相等力之力偶. 於是將兩力偶，在

其平面上移動如圖 182 所示，使各力偶有一力移至兩平面之交線上，而兩力之方向相反，此時兩力互相抵銷。所餘者為在平面 $ABCD$ 內之 F，F 兩力所成之力矩臂為 f 之力偶。

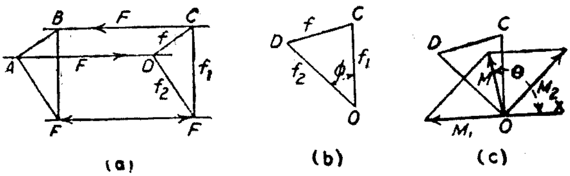


圖 182.

若命 ϕ 為兩平面間之角，f_1，f_2 為原有兩力偶在移動後之力矩臂，則得 f 為

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 - 2f_2f_2 \cos\phi \tag{6.3}$$

此兩個力偶，亦可利用其矢量合併之。在垂直於兩平面之交線之任一平面中，作矢量 M_1，垂直於力矩臂等於 f_1 之力偶平面，其長度則與此力偶之力矩成正比例，如圖 182 (c) 所示。仿此，再作代表第二力偶之矢量 M_2。矢量 M 為 M_1 與 M_2 之合矢量，故代表合力偶。此合力偶之力矩，與 M 之長度成正比例；此合力偶之平面，與矢量 M 垂直。因矢量 M 之矢首向上，故自上向下看，此矢量所代表之力偶之轉動方向，為反時針向。

若欲合併之兩力偶，在二平行平面中，則任一力偶，可移至他一力偶之平面中，再用第 31 節之方法合併之。

習　題

1. 在圖 182 內，命 $\phi = 45°$，$M_1 = 800$〔磅•呎〕，$M_2 = 1000$〔磅•呎〕，試求其合力偶。　　答：$M = 713$〔磅•呎〕；$\Theta = 97°30'$.

2. 若在習題 1 內，將 M_2 之方向倒轉，試求其合力偶。

答：$M = 1665$〔磅•呎〕；$\Theta = 205°10'$.

55. 空間平行力之平衡，圖解法． 若空間之平行力系平衡，則此力系在任何平面上之射影，必為一平衡之共面平行力系．

因對於此投射後之任一力系，祇有兩個平衡條件，故祇能求得兩個未知力之大小． 若此力系內有三個未知力，則於選擇射影平面時，須使兩個未知力之作用線之射影疊合． 於是據此射影上，可以求得第三未知力之大小． 其餘兩未知力，須自其他之射影中求得．

習 題

設圓桌面之直徑為 5〔呎〕，三桌柱在圓周上之間隔相等． 其載荷有在邊上之 100〔磅〕，及在邊內 1 呎之 500〔磅〕，如圖 183 所示．試求三個反力 R_1, R_2, R_3 之值．

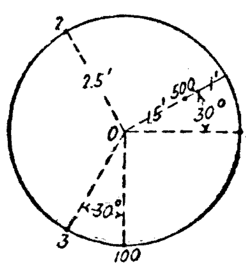


圖 183.

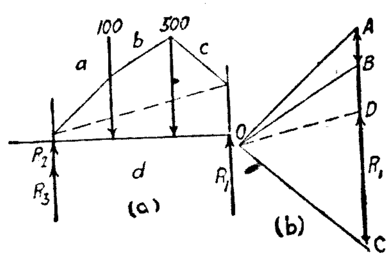


圖 184.

【解】 此力系內，共有三個未知力，但在平行於 O-1 之鉛直平面上射影成為平衡之共面平行力系，而 R_2 與 R_3 作用線之射影疊合，故得求解出 R_1．據圖 184，求得 R_1之值為 374〔磅〕，矢量 DA 代表 R_2+R_3，量得其值為 226〔磅〕．

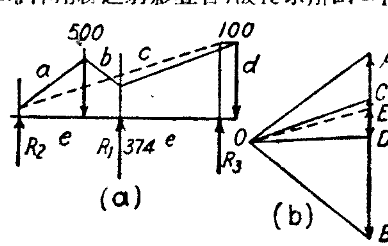


圖 185.

圖 185 示此力系在經過 R_2, R_3之鉛直平面上之射影．因 R_1 為已知，此共面力系內，祇有二未知力，故能據圖 185 量得 $DE = R_3 = 84$〔磅〕，$EA = R_2 = 142$〔磅〕．

習 題

1. 設三角形鋼板 ABC 厚 $\frac{1}{2}$〔吋〕,邊 AB 長 8〔呎〕,邊 BC 長 6〔呎〕,邊 CA 長 10〔呎〕,由作用於三個角上之力使鋼板支於水平之位置。試求因鋼板本身之重量,及與邊 AB 相距 1〔呎〕,邊 BC 相距 3〔呎〕之 500〔磅〕載荷,所產生之三個反力之大小。(鋼之重量為 490〔磅/呎^3〕,三角板之重心,在三中線之交點,見第 75 節)。

答: $A = 351$〔磅〕; $B = 391$〔磅〕, $C = 247$〔磅〕.

2. 若在習題 1 內,反力 A 等於總重量之半數,反力 B 與 C 均等於總重量之 $\frac{1}{4}$。試求 500〔磅〕載荷之位置。

答: 與 AB 相距 1.01〔呎〕; 與 BC 相距 5.31〔呎〕.

56. 空間平行力之平衡:代數解法. 若在空間之任何平行力系之合力 R 為零,且其關於任何軸之力矩 M 亦為零,則此力系為平衡.

反之,若在空間之一平行力系平衡,則其合力

$$R = 0 \tag{6.4}$$

且其關於空間之任何軸之力矩總和

$$\Sigma M = 0 \tag{6,5}$$

因祇能寫出三個獨立方程式,一為力和方程式,另兩為力矩方程式,故至多祇能求得三個未知元素. 此三個未知元素通常為三個力之大小,其作用線為已知者.

習 題

有在水平面之等邊三角形板 ABC,每邊長 2〔呎〕,支於其三個頂點. 試求由於在經過點 A 之中線上,離點 A 1〔呎〕之載荷 100〔磅〕(見圖 186)所產生之三個反力之大小.

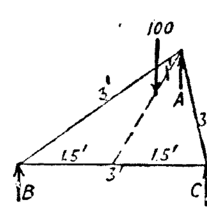


圖 186.

【解】 三角形之高為 2.6〔呎〕. 自邊 BC 至載荷間之距離為 1.6〔呎〕. 據關於邊 BC 之力矩方程式，即式 (6.5)，得

$$100 \times 1.6 = 2.6\,A$$

$$A = 61.5 \text{〔磅〕}.$$

據對稱關係，可見 B 與 C 之反力相等。故據(6.4)式，得

$$B + C + 61.5 = 100$$

$$B + C = 38.5$$

$$B = C = 19.25 \text{〔磅〕}.$$

習　題

1. 設長方形檯長 12〔呎〕，寬 5〔呎〕，支於其一端之兩角上之 A，B 兩檯脚，及另一端離 B 邊為 1.5〔呎〕處之檯脚 C。如檯之重量為 300〔磅〕，重心在桌面之中點，試求三個反力之值。 答：$A=105$〔磅〕；$B=45$〔磅〕；$C=150$〔磅〕.

2. 在習題 1 內，若有一離 AB 端 3〔呎〕，離 B 邊 1〔呎〕之載荷 1200〔磅〕，試求因此載荷及檯之重量，所產生之三個反力之值。

答：$A = 225$〔磅〕；$B = 795$〔磅〕；$C = 450$〔磅〕.

空間之平行力之總習題

1. 有一水平板，載有四個重量，其大小及坐標如下：80〔磅〕，在(4〔呎〕，1〔呎〕)；50〔磅〕，在(1〔呎〕，1〔呎〕)；60〔磅〕，在(3〔呎〕，4〔呎〕)；40〔磅〕，在(1〔呎〕，5〔呎〕)。試求其合力之大小與位置。

答：$R = 230$〔磅〕；在(2.565〔呎〕，2.478〔呎〕)

2. 若習題 1 內之板，支於下述三點：A，在(0〔呎〕，0〔呎〕)；B，在(5〔呎〕，2〔呎〕)；C，在(2〔呎〕，5〔呎〕)，試求因重量而在上述三點所產生之反力。

答：$A = 64.3$〔磅〕；$B = 86.2$〔磅〕；$C = 79.5$〔磅〕.

3. 在習題 2 內，問點 A 須在對角線上移動若干距離，方可使 A 之反力增至 100〔磅〕? 答：1.768〔呎〕.

4. 有一水平之等邊三角形板 ABC。每邊長 6〔呎〕。在 AB，BC，CA 三

邊之中點，設分別受有重量 20〔磅〕，60〔磅〕與 120〔磅〕，試求合力與各邊間之距離。　　答：離 AB 2.34〔呎〕；離 BC 1.82〔呎〕；離 CA 1.04〔呎〕.

5. 若習題 4 內之板，支於其三個頂點。試求因重量而產生之諸反力。

答：$A = 70$〔磅〕；$B = 40$〔磅〕；$C = 90$〔磅〕.

6. 在習題 5 內，問支點 A 須沿其中線移進若干，方可使反力之值增至 100〔磅〕？　　答：1.56〔呎〕.

7. 在習題 5 內，假定反力 B 沿線 BA 向點 A 移過 1〔呎〕，試求在 A，B，C 之反力。　　答：$A = 62$〔磅〕；$B = 48$〔磅〕；$C = 90$〔磅〕.

8. 有一六角形桌，支於 A，B，C 三點。桌上有三個載荷，如圖 187 所示，試求反力。　　答：$A = 93$〔磅〕；$B = 98$〔磅〕；$C = 109$〔磅〕.

9. 在圖 187 內，假定在 A，B 間之頂點上加一載荷，問其值應等於若干，方可使點 C 之反力減至零？

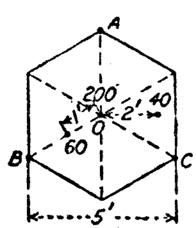


圖 187.

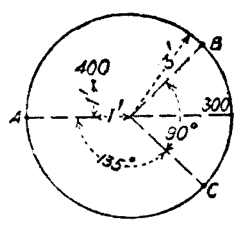


圖 188.

10. 圖 188 爲一圓板之頂視圖，假定圓板重 500〔磅〕，此外並有如圖上所示之兩載荷。試求支座 A，B，C 之反力。

答：$A = 400$〔磅〕；$B = 494$〔磅〕；$C = 306$〔磅〕.

11. 若習題 10 內之支座 C，向 A 轉過 15° 之角。試求三點之反力。

答：$A = 364$〔磅〕；$B = 545$〔磅〕；$C = 291$〔磅〕.

第七章

空間之非共點非平行力

57. 空間之非共點非平行力之合力，代數解法. 空間之任何非共點非平行力系所得簡化而成最簡之合力系，爲一合力 R 與一合力偶 M。合力 R 之作用點，可以隨便泛定；於是合力偶之大小，卽隨合力 R 之作用線之位置而定。此力系之任一力，可在其作用線上之適當點，用第 46 節之方法分解爲 X, Y, Z 三個分力。再用第 32 節之方法，得將此三個分力，分別以經過所選點之 X, Y, Z 力，及在三個參考平面上之力偶替代之。

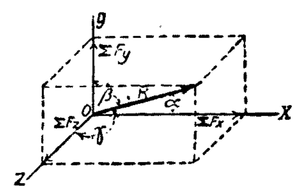


圖 189.

力系之所有各力，均用上述方法分解後，則其經過所選點之共點力系，得合併爲一個合力。其值爲

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} \tag{7.1}$$

如圖 189 所示。其方向餘弦爲：

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma F_x}{R};\quad \cos\beta = \frac{\Sigma F_y}{R};\quad \cos\gamma = \frac{\Sigma F_z}{R} \tag{7.2}$$

其關於 X, Y, Z 三軸之力偶，得求出其力矩之代數和爲 M_x, M_y, M_z，並以矢量表示之。於是合力偶矢量之值爲

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \tag{7.3}$$

此矢量之方向餘弦爲：

$$\cos\alpha_1 = \frac{M_x}{M};\quad \cos\beta_1 = \frac{M_y}{M};\quad \cos\gamma_1 = \frac{M_z}{M} \tag{7.4}$$

總之，此類之力系，可使所作用之物體，在 R 之方向產生移動．並在合力偶 M 之平面中，產生轉動．

習　題

試將圖 190 所示之力系，合併爲一經過點 O 之合力及一合力偶．

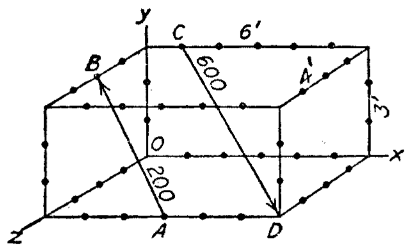


圖 190.

【解】 200〔磅〕力可在點 A 分解爲三個直角分力． 以此力之作用線爲對角線之長方體之 x,y,z 維(dimension)分別爲 3〔呎〕，3〔呎〕，2〔呎〕． 對角線之長度爲

$$AB = \sqrt{9+9+4} = 4.69 \text{〔呎〕}$$

$$F_x = -200 \times \frac{3}{4.69} = -128 \text{〔磅〕}$$

$$F_y = 200 \times \frac{3}{4.69} = 128 \text{〔磅〕}$$

$$F_z = -200 \times \frac{2}{4.69} = -85.3 \text{〔磅〕}$$

上述點 A 之三個分力，以經過點 O 之三個相等之分力及三個力偶替代之．此三個力偶之值爲：

$$M_x = -128 \times 4 = -512 \text{〔磅•呎〕}$$

$$M_y = 85.3 \times 3 - 128 \times 4 = -256 \text{〔磅•呎〕}$$

$$M_z = 128 \times 3 = 384 \text{〔磅•呎〕}$$

600〔磅〕力可在點 C 分解爲三個直角分力． 以此力之作用線爲對角線之長方體之 x,y,z 維分別爲 5〔呎〕，3〔呎〕，4〔呎〕． 對角線之長度爲

$$CD = \sqrt{25 + 9 + 16} = 7.07 \text{〔呎〕}.$$

$$F_x = \quad 600 \times \frac{5}{7.07} = 424.2 \text{〔磅〕}$$

$$F_y = -600 \times \frac{3}{7.07} = -254.5 \text{〔磅〕}$$

$$F_z = \quad 600 \times \frac{4}{7.07} = 339.4 \text{〔磅〕}$$

如上述之點 C 之三個分力，以經過點 O 之三個相等之分力及三個力偶替代之。此三個力偶之値為

$$M_x = 339.4 \times 3 = 1018.2 \text{〔磅•呎〕}$$

$$M_y = -339.4 \times 1 = -339.4 \text{〔磅•呎〕}$$

$$M_z = -424.2 \times 3 - 254.5 \times 1 = -1527.1 \text{〔磅•呎〕}$$

將所有之力，合併為

$$\Sigma F_x = -128 + 424.2 = 296.2 \text{〔磅〕}$$

$$\Sigma F_y = \quad 128 - 254.5 = -126.5 \text{〔磅〕}$$

$$\Sigma F_z = -85.3 + 339.4 = 254.1 \text{〔磅〕}$$

$$R = \sqrt{296.2^2 \times 126.5^2 + 254.1^2} = 410.3 \text{〔磅〕}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{296.2}{410.3} = 43°50'$$

$$\beta = \cos^{-1}\frac{-126.5}{410.3} = 107°55'$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{254.1}{410.3} = 51°40'$$

用同樣方法，可將諸力偶合併為合力偶 M。

$$\Sigma M_x = -512 + 1018.2 = 506.2 \text{〔磅•呎〕}$$

$$\Sigma M_y = -256 - 339.4 = -595.4 \text{〔磅•呎〕}$$

$$\Sigma M_z = 384 - 1527.1 = -1143.1 \text{〔磅•呎〕}$$

$$M = \sqrt{506.2^2 + 595.4^2 + 1143.1^2} = 1386 \text{〔磅•呎〕}$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\frac{506.2}{1386} = 68°30'$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\frac{-595.4}{1386} = 115°30'$$

$$\gamma_1 = \cos^{-1}\frac{-1143.1}{1386} = 145°40'$$

習　題

1. 試將圖 191 所示之力，合併為一經過點 O 之合力及一合力偶。立方體之每邊長 2〔呎〕。

答：$R=244$〔磅〕；$\alpha=76°35'$；$\beta=164°0'$；$\gamma=81°33'$；$M=527$〔磅·呎〕；$\alpha_1=68°10'$；$\beta_1=90°$；$\gamma_1=158°20'$。

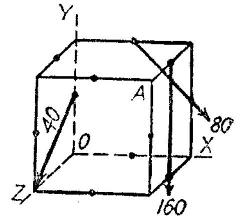


圖 191.

2. 若在習題 1 內，合力 R 必須經過點 A。試求各項之值。

答：R 不變；$M=360$〔磅·呎〕；$\alpha_1=163°50'$；$\beta_1=96°40'$；$\gamma_1=75°10'$。

58. 空間之非共點非平行力之合力，圖解法。 據第 46 節之方法，空間之非共點非平行力系之每一力矢量，可在其作用線上之任一點，分解為 X, Y, Z 三個分力。從所有之分力，可求得 ΣF_x, ΣF_y, ΣF_z 之值。以此三矢量作為鄰邊之長方體之對角線，即表示合力 R。

選取任一之適當點，作為合力之作用點。以此點為原點，作 X, Y, Z, 軸。從各個分力之值，及其關於以上三軸之力矩臂，可求得 M_x, M_y, M_z, 之值。在圖解上，此等分力偶可以分矢量表示之。以此等分矢量為鄰邊所作成之長方體之對角線，即表示此力系之合力偶之力矩。

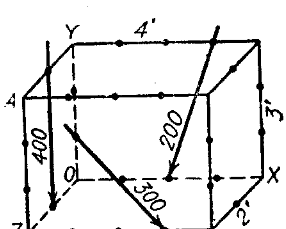


圖 192.

故此種力系可以合併為一經過所選原點之合力 R，與一合力偶 M。

習　題

1. 試將圖 192 所示之力，合併為一經過點 O 之合力及一合力偶。

答：$R = 711$〔磅〕；$\alpha = 75°40'$；$\beta = 160°20'$；$\gamma = 77°0'$；$M = 838$〔磅·呎〕；$\alpha_1 = 48°0'$；$\beta_1 = 90°$；$\gamma_1 = 137°45'$.

2. 假定習題 1 內之合力，經過點 A。試求各值。

答：R 不變；$M = 1312$〔磅·呎〕；$\alpha_1 = 163°50'$；$\beta_1 = 105°40'$；$\gamma_1 = 93°55'$.

59. 空間之非共點非平行力之平衡；代數解法. 假定在空間之非共點非平行力系經過任一點之合力 R 爲零，其對應之合力偶亦爲零，則此力系之效應爲零。故力系平衡。

反之，若空間之非共點非平行力系平衡，則其合力 R 爲零，其合力矩 M 亦爲零。

若 $R = 0$，則

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0 \tag{7.5}$$

若 $M = 0$，則

$$\Sigma M_x = 0,\ \Sigma M_y = 0,\ \Sigma M_z = 0 \tag{7.6}$$

上述之平衡條件，可分爲下述之三組。

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M_z = 0 \tag{7.7}$$

$$\Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0,\ \Sigma M_x = 0 \tag{7.8}$$

$$\Sigma F_z = 0,\ \Sigma F_x = 0,\ \Sigma M_y = 0 \tag{7.9}$$

(7.7)式爲在 XY 平面上之共面力系平衡之必要條件。(7.8)式爲在 YZ 平面上之共面力系平衡之必要條件。(7.9)式爲在 ZX 平面上之共面力系平衡之必要條件。ΣF_x，ΣF_y 爲諸力在 XY 平面上射影之 X 與 Y 分力之代數和。ΣM_z 爲在同一平面上之諸力關於 z 軸之力矩之代數和。

若在空間之非共點非平行力系平衡，則此力系在任一平面上之射影，亦爲平衡之力系。

據此等原理，若任何已知其平衡之力系中，未知量之個數不超過

獨立方程式之個數，則可求出此等未知量。

習　題

圖 193 表示簡單絞盤之三個視圖。試求在所示位置下，P, A, B 之值。A, B 為兩支座之反力。

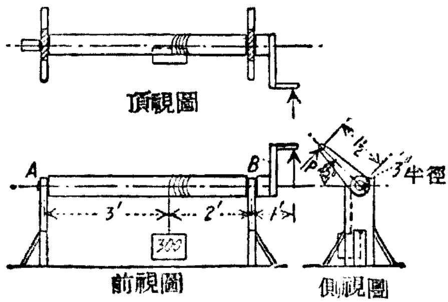


圖 193.

【解】 圖 194(a) 為脫離體之頂視圖，亦即為 ZX 平面上之射影。圖 194(b)為前視圖，亦即為 XY 平面上之射影。圖 194(c)為側視圖，亦即為 YZ

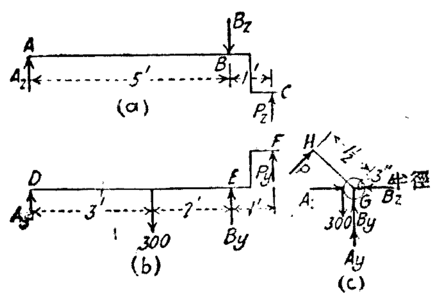


圖 194.

平面上之射影。在諸圖上，反力 A 以其水平分力 A_z，鉛直分力 A_y 替代之。反力 B，以其水平分力 B_z，與鉛直分力 B_y 替代之。據圖 194 (c) 之 $\Sigma M_G=0$式，得

$$P \times 18 = 300 \times 3$$

$$P = 50 \text{〔磅〕}$$

在此射影上，其餘四個未知力不能求得。既知 P 後，圖 194 (a) 內之未知力

即可求得。

$$P_x = P\cos 45° = 35.35 \text{〔磅〕}。$$

據 $\Sigma M_A = 0$，得

$$35.35 \times 6 = B_x \times 5$$

$$B_x = 42.42 \text{〔磅〕}$$

據 $\Sigma M_B = 0$，得

$$35.35 \times 1 = A_x \times 5$$

$$A_x = 7.07 \text{〔磅〕}。$$

在圖 194(b)內，$P_y = P\sin 45° = 35.35$〔磅〕。

據 $\Sigma M_D = 0$，得

$$35.35 \times 6 + B_y \times 5 = 300 \times 3$$

$$B_y = 137.6 \text{〔磅〕}$$

據 $\Sigma M_E = 0$，得

$$35.35 \times 1 + 300 \times 2 = A_y \times 5$$

$$A_y = 127.1 \text{〔磅〕}$$

反力 A 爲

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$= \sqrt{7.07^2 + 127.1^2} = 127.5 \text{〔磅〕}$$

其與鉛直線所成之角 θ_A 爲

$$\theta_A = \tan^{-1}\frac{7.07}{127.1} = \tan^{-1} 0.0555 = 3°10'$$

同理，可求得

$$B = \sqrt{42.42^2 + 137.6^2} = 144 \text{〔磅〕}$$

$$\theta_B = \tan^{-1}\frac{42.42}{137.6} = \text{can}^{-1} 0.308 = 17°06'.$$

若力 P 有 X 分力，則此分力必須與 X 方向之反分力 A_x 與 B_x 平衡。因有一個反分力，已經足够，故爲一贅餘力系(redundant force system)。此時對於兩個反力間如何分配，必須有一假定。例如，可假定 A_x 與 B_x 相等，或 $B_x = 2A_x$，或 $A_x = 0$，$B_x = P_x$。

所須注意者，若 P 有 X 分力，則會變更 A_z, A_y, B_z, B_y 之值。

習　題

1. 假定上述例題之絞盤柄，自圖 193 所示之位置，向前方轉過 75° 之角。試求兩個反力之水平與鉛直分力。

答：$A_y=115$〔磅〕；$B_y=210$〔磅〕；$A_z=8.7$〔磅〕；$B_z=52$〔磅〕。

2. 圖 195 所示起重機之伸臂與桅之重量，均爲 50〔磅/呎〕。若不計其他構件之重量，試求伸臂平面將角 GAF 平分時，在 A，B 之反力之鉛直與水平分力，及在 CE，DF，DG 內之內力。

答：$A_y=7740$〔磅〕；$A_x=3125$〔磅〕；$B_y=125$〔磅〕；$B_x=4167$〔磅〕；$CE=5210$〔磅〕；$DF=DG=2780$〔磅〕。

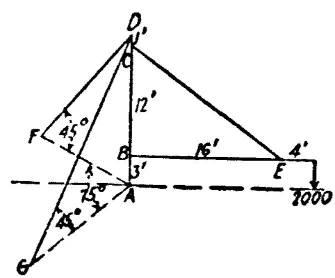


圖 195.

3. 若圖 195 所示起重機之伸臂 BE 能繞其桅 AD 轉動。試求在構件 DF 內之牽力爲極大時之伸臂位置，並求此極大牽力之值，及構件 DG 內之內力。假定撐柱內祇能有壓縮力。

答：4590〔磅〕，牽力；1185〔磅〕，壓縮力。

60. 空間之非共點非平行力之平衡；圖解法。 在第 59 節內，已證明在空間之非共點非平行力系成爲平衡，則此力系在任一平面上之射影，必成平衡之共面力系。若對於此力系，應用平衡之圖解條件，設未知元素之數，不超過獨立之平衡條件，則此力系之未知量可以求得。

例　題

圖 196 (a) 表示一座動臂起重機之維，位置，與載荷。試求因 1200〔磅〕載荷所產生之反力。

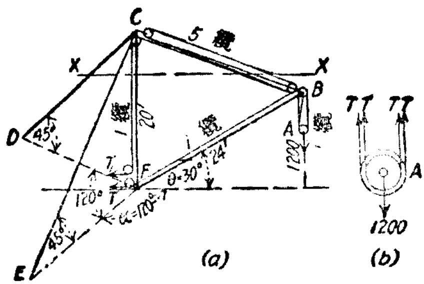


圖 196.

【解】 作用於動臂起重機上之外力，為空間之非共點非平行力系。 但若將其各部分輪流視作脫離體時，所討論者祇為共點力系。 第一個脫離體，為滑輪 A。 圖 196(b)即為此滑輪之脫離體圖。 若不計摩擦力，則任一纜之通體之牽力為一常數。據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$4T = 1200 \text{ (不計算纜之極小偏斜角度)}$$

$$T = 300 \text{ [磅]}。$$

圖 197(a)示在銷 B 上之力，T_1 與 P 為未知力。圖 197(b)為力多邊形。自此圖上量得 T_1 為 268 [磅]，P 為 1740 [磅]。

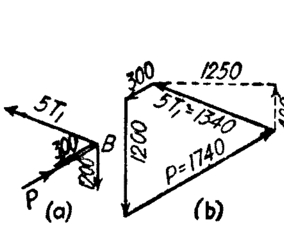


圖 197.

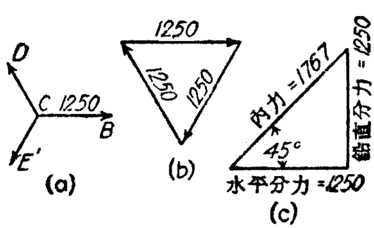


圖 198.

其次，作一水平面 XX 之截面，圖 196 (a)，將此截面以上之部分作為脫離體。 作用於此脫離體上之力系，共點而非共面。 此力系之水平射影為一平衡之共面共點力系，故不難求解。 據圖 197 (b) 得 $5T_1$ 之水平分力為 1250 [磅]。 自圖 198(a)與 198(b)，可知 CD 及 CE 之內力之水平分力，均等於 1250 [磅]。 自圖 198(c) 可求得此兩構件之內力均為 1767 [磅]。

如計算圖 196 (a) 內平面 XX 以上之脫離體之鉛直分力，即能求得桅內之壓縮力。命桅內之壓縮力為 V。據圖 197(b) 可知 CB 之內力之鉛直分力為 480〔磅〕．CD 之內力之鉛直分力為 1250〔磅〕。又 CE 之內力之鉛直分力亦為 1250〔磅〕，如圖198 (c) 所示。據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$V - 1250 - 1250 - 268 - 480 = 0$$

$$V = 3248\text{〔磅〕}.$$

其次，以在 F 之抵座作脫離體。圖 199(a) 即為其脫離體圖。圖 199(b) 為其力圖。由力圖上可以量得 R_H 為 1820〔磅〕；R_V 為 3700〔磅〕，R 為 4120〔磅〕，R 與鉛直線間之角 θ 為 26°10′。

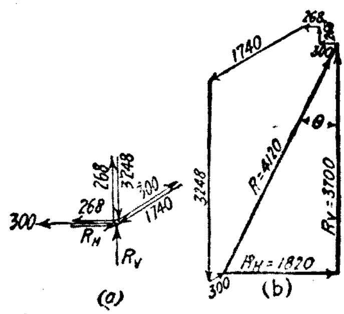


圖 199

若將伸臂 BF 繞桅 CF 轉動，在撐柱 CD 及 CE 內之內力亦隨而變化。如伸臂向 CE 旋轉，則 CE 之內力減小，CD 之內力增加。圖 200(b) 為 XX 平

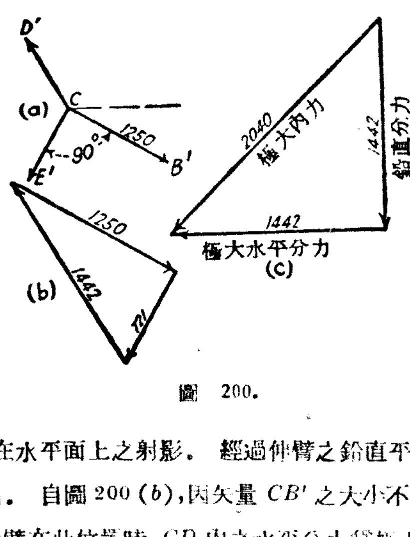


圖 200.

面以上之脫離體在水平面上之射影。經過伸臂之鉛直平面與經過 EC 之鉛直平面，互成直角。自圖 200 (b)，因矢量 CB' 之大小不變，CE' 及 CD' 之方向不變，可見伸臂在此位置時，CD 內之水平分力為極大值。圖200(c)表

示如何求得 CD 之內力。

如將伸臂轉動，當 CB' 與 CD' 在同一直線時，CD' 之水平分力僅爲 1250〔磅〕，CE 之內力爲零。

如伸臂轉動至靠近 CE 時，CE 之內力，變爲壓縮力。CD 之內力，逐漸減少，伸臂在經過 CE 之鉛直平面內時，CD 之內力爲零。

如沿 DF 與 EF，再加上兩構件，此兩構件能將 CD 與 CE 內之水平分力，傳至桅底。

習　題

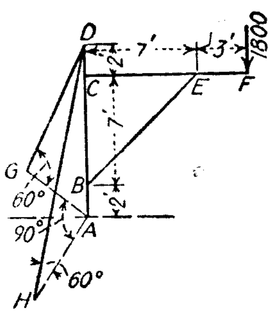


圖　201.

1. 在圖 201 所示之起重機內，試求 A 與 C 之反力之水平與鉛直分力，及 BE 之內力。並求伸臂平面將角 GAH 平分時，構件 DG 與 DH 之內力。

答：$A_x = 1640$〔磅〕；$A_y = 5800$〔磅〕；$C_x = 2570$〔磅〕；$C_y = 770$〔磅〕；$BE = 3640$〔磅〕；$DG = DH = 2315$〔磅〕.

2. 在圖 201 內，試求伸臂繞桅旋轉時，構件 DG 內所生之極大內力。　答：3270〔磅〕.

空間之非共點非平行力之總習題

1. 在圖 202 內，試將 200〔磅〕及 300〔磅〕力合併爲一經過點 O 之合力及一合力偶。

答：$R = 149$〔磅〕；$\alpha = 128°0'$；$\beta = 45°10'$；$\gamma = 69°30'$；$M = 1133$〔磅•呎〕；$\alpha_1 = 137°45'$；$\beta_1 = 132°05'$；$\gamma_1 = 87°20'$.

2. 將圖 202 所示之三力，簡化爲經過點 O 之三個直角分力，以及三個直角分力偶。

答：$R_x = -28$〔磅〕；$R_y = 41$〔磅〕；$R_z = 95$〔磅〕；$M_x = -478$〔磅•呎〕；$M_y = -567$〔磅•呎〕；$M_z = -203$〔磅•呎〕.

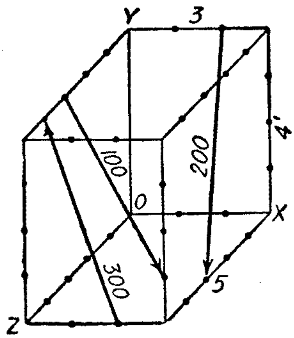


圖　202.

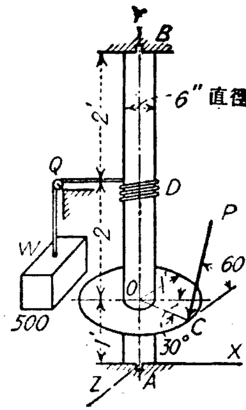


圖　203.

3. 圖 203 表示支持於插座 A,B 內之鉛直絞盤。 一繩捲於此絞盤之 D 部。此繩沿水平方向(平行於 X 軸)至滑輪 Q,再向下與重量 W 聯接。在繩 QD 內之拉力,與作用於直徑 2〔呎〕之滑輪之邊緣上之力 P 相平衡。 半徑 OC 在 XY 平面之前方 30°。力 P 垂直於 OC,並與水平面成 60° 角。 若不計絞盤之重量與軸承之摩擦力,試求力 P 之大小,及 A,B 兩處反力之直角分力。

答:$P = 250$〔磅〕; $A_x = 288$〔磅〕; $A_y = 217$〔磅〕; $A_z = 65$〔磅〕; $B_x = 275$〔磅〕; $B_z = 43$〔磅〕.

4. 在習題 3 內,若力 P 與水平面成 15° 角,半徑 OC 在 XY 平面之前方 45°。 其餘各項數據均不變,試求力 P 及反力 A,B 之直角分力。

答:$P = 129$〔磅〕; $A_x = 275$〔磅〕; $A_y = 33$〔磅〕; $A_z = 66$〔磅〕; $B_x = 313$〔磅〕; $B_z = 22$〔磅〕.

5. 若圖 203 所示絞盤上之重量 W,以切於滑輪邊上之二力所成之力偶均衡之,試求此力之大小,及在 A,B 之反力。

答:62.5〔磅〕; $A_x = 200$〔磅〕; $B_x = 300$〔磅〕.

6. 在圖 203 所示絞盤上之重量 W,以在 O 之滑輪上之牽力 T_1,T_2 均衡之。 T_1,T_2 之方向平行於 z 軸,並向前方。 若 $T_2 = 1.5T_1$,試求 T_1,T_2 之值,及在 A,B 兩處反力之分力。

答：$T_2 = 375$〔磅〕；$T_1 = 250$〔磅〕；$A_x = 200$〔磅〕；$B_x = 300$〔磅〕；$A_z = 500$〔磅〕；$B_z = 125$〔磅〕.

7. 圖 204 所示硬肢起重機(stiff-leg derrick)之伸臂，可在一鉛直平面內轉動，自水平方向以至與鉛直線成 20° 角。試求 BC 之內力成為極大值時，動臂之位置。若將動臂在此鉛直平面中之位置，維持不變，而變動其角 α。試求 BE 內之壓力成極大值時，角 α 之值，及 BE 內之牽力成極大值時角 α 之值，若 C 之載荷為 18,000〔磅〕，試求 BC，AC，BE，BA 內之極大內力。

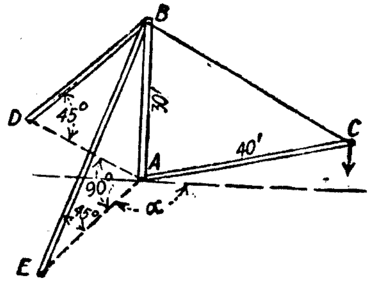


圖 204.

答：$BC = 30{,}000$〔磅〕；$AC = 24{,}000$〔磅〕；$BE = 33{,}940$〔磅〕；$BA = 51{,}940$〔磅〕.

8. 圖 205 表示一挖泥機(dipper dredge)之維．伸臂 CG 重量為32,000〔磅〕，其重心在其中點．柄 HF 重 4000〔磅〕，重心亦在其中點．圖上所示之柄之位置，與鉛直線成 15°角．挖泥杓與其載荷，共重 9 00〔磅〕，其重心

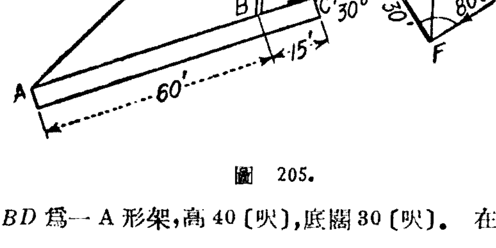


圖 205.

則在點 F．BD 為一 A 形架，高 40〔呎〕，底闊 30〔呎〕．在挖泥之位置時，作用於柄上之總壓力為 8000〔磅〕，其方向與柄垂直．試求纜 FG，DG，DA 之內力；銷 E 與 C 之反力；A 架 BD 之各支柱上之壓縮力。

答：$FG = 19,650$〔磅〕； $DG = 32,800$〔磅〕； $DA = 49,360$〔磅〕； $E = 3290$〔磅〕，與 X 軸成 $62°30'$。$C = 72,080$〔磅〕，與 X 軸成 $39°40'$；在 DB 之每支柱內之壓縮力爲 19,250〔磅〕.

9. 在圖 206 內所示之動臂起重機內，65〔呎〕之高桅 EF 用四條牽纜將其拉住，每纜與地面間之角度爲 30°。伸臂長 95〔呎〕。伸臂在水平位置時，將重 50〔噸〕之載荷舉起。試求纜 FG，EG，及伸臂 EG 內之內力。並若伸臂在水平方向轉動時，試求四條牽纜內可能有之極大牽力。

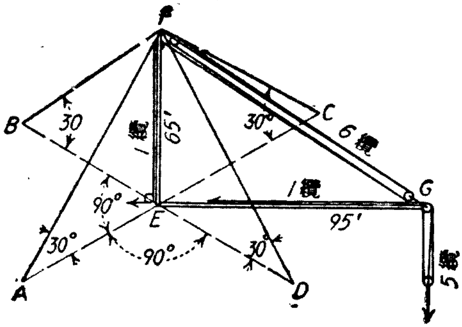


圖 206.

答：在每一 FG 纜之內 $= 29,530$〔磅〕； 纜 EG 之內力 $= 20,000$〔磅〕； 伸臂 EG 之內力 $= 166,000$〔磅〕；在每牽纜內之極大內力 $= 168,600$〔磅〕.

10. 若將習題 9 內之 FG 纜改短，使伸臂與水平面間成 60° 角。 試求各值。

答：每 FG 之纜內 $= 12,960$〔磅〕；纜 EG 內 $=20,000$〔磅〕；伸臂 EG 內 $= 166,000$〔磅〕；在每牽纜內之極大內力 $= 84,400$〔磅〕.

第八章

摩　擦

61. 靜摩擦與動摩擦． 假定有一物塊，放在水平之平面上，作用於物塊上之力有二，一爲其重量，一爲水平面對於物塊之反力．此兩力均爲分布力．如認爲分布力之合力作用於接觸面之中心，則可以兩力 W 與 N 表示之，如圖 207(a)．假定有一水平小力 P

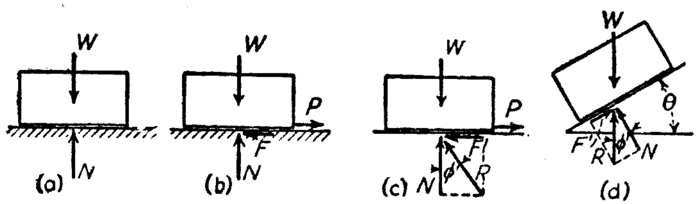


圖　207.

作用於物塊上，而不變其靜止狀態，則與力 P 平衡之力，爲平行於 P 之接觸面上之一種阻力，並與接觸面相切，如圖 207 (b)所示．此阻力謂之**摩擦力**(friction)，以 F 表示之．

若將力 P 逐漸增加，則達到某定限度時，摩擦力不能與所施力平衡，物塊卽開始運動．在靜止時之摩擦力，謂之**靜摩擦** (static friction)．靜摩擦之最高値，換言之，卽適在運動開始時之靜摩擦，謂之**極限摩擦**(limiting friction)，以 F' 表示之．運動開始後，摩擦力略見減小．此時之摩擦力，謂之**動摩擦**(kinetic friction 或 friction of motion)．一物塊在其**承面**(supporting surface)上運動或有運動之傾向時，則承面對於此物塊之摩擦力之方向，與此物體運動之方向相反．

附着力(adhesion)與摩擦力不可混淆。附着力為兩接觸面間之吸引力,隨接觸面之面積而定,而與接觸面間之壓力無關。但摩擦力隨兩接觸面間之壓力而定,而與接觸面之大小無關。差不多在所有之工程問題中,附着力均略去不計。

假定兩接觸面極硬,而且極光滑,則其間之摩擦力可能極小,但不等於零。假定在兩接觸面間之摩擦力為零,則接觸面為一種理想之光滑表面。此兩面間之反力,必與接觸面垂直。在若干工程問題中,摩擦力與其他之作用力相較,其值甚小,故在求解時,可略去不計,不致產生可覺察之誤差。

62. 摩擦係數與摩擦角。 **靜摩擦係數**(coefficient of static friction) f',為極限摩擦 F' 與正壓力 N 之比值.

$$f' = \frac{F'}{N} \tag{8.1}$$

作用於物塊上之摩擦力 F' 與正壓力 N,可以合併為其合力 R,如圖 207(c) 所示。由此可見合力 R,必與接觸面之法線成一角度。其方向與運動方向,成大於 90° 之角.

假定 ϕ 為合力 R 與法線間之角,據圖 207(c)與(d),可見

$$\tan\phi = \frac{F}{N} \tag{8.2}$$

對應於 F' 之 ϕ 之極大值 ϕ',謂之**摩擦角**(angle of friction)。據(6.1)式,可見

$$f' = \tan\phi' \tag{8.3}$$

假定物塊下之承面,與水平線成角 θ,而作用於物塊上之力,僅有重力與承面對於物塊之反力。則物塊開始向下滑動時之角 θ 之值 θ',謂之**靜止角**(angle of repose)。在圖 207(d)內,R 與 W,

大小相等，方向相反。物體開始滑動時，R 與法線間之角為 θ'。據圖上可見

$$\angle\theta' = \angle\phi'. \tag{8.4}$$

設已知所設兩表面之 ϕ' 角之值，則此兩表面在開始滑動時，作用於其間之合反力方向亦為已知。

兩表面間之靜摩擦係數，可從實驗求得。其方法有二。一法為求在一水平平面上開始將重量 W 拖動時所需之拉力 P。另一法為求在斜面上之重物開始滑下時，斜面之傾斜角。

動摩擦係數(coefficient of kinetic friction)為動摩擦 F 與正壓力 N 之比值，通常以 f 表示之。

$$f' = \frac{F}{N} \tag{8.5}$$

求動摩擦係數之方法有二。一法為求出使水平面上之重物 W 以等速度運動時所需之拉力 P。一法為求出使斜面上之重物以等速度滑下時，斜面之傾斜角。

用上法所求得之摩擦係數之變動甚大。下表列示幾種材料之靜摩擦係數變動之範圍。

動摩擦係數之對應值，約比靜摩擦係數之值小 20% 至 40%。

物質	靜摩擦係數，f'	物質	靜摩擦係數，f'
木與木	0.30-0.70	皮革與木	0.25-0.50
金屬與金屬	0.15-0.30	皮革與金屬	0.30-0.60
木與金屬	0.20-0.60	石與石	0.40-0.65

例題

一物塊重 500〔磅〕，置於兩楔(wedge)上，兩楔復置於一水平面上，如圖 208(a)所示。若楔之角度為 10°，摩擦係數為 0.30，試求使物塊下之兩楔向內推進時，所需之力 P，P。

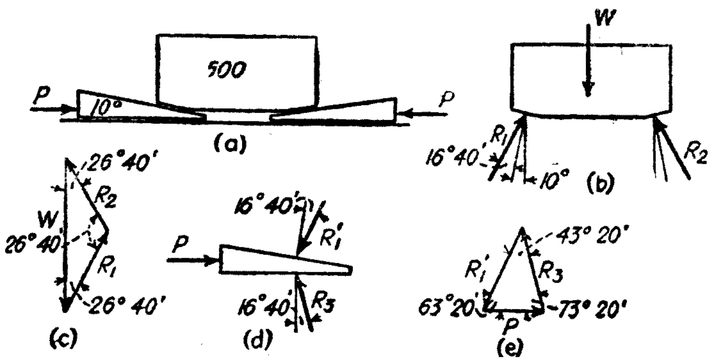


圖 208.

【圖解法】 角 $\phi' = \tan^{-1} 0.30 = 16°40'$。 圖 208($b$)表示將物塊取作脫離體。 因兩物體僅剛開始滑動，反作用 R_1 與 R_2 與接觸面之法線成 $\phi' =$ 角 $16°40'$，與鉛直線成角 $26°40'$。 圖 208 (c) 爲其力三角形。 從圖上量得 R_1 與 R_2 之值均爲 280〔磅〕。

在圖 208(d)內，將左楔楔取爲脫離體。作用於其上之已知力 R_1' 與 R_1 大小相等，方向相反。 未知力爲水平方向之 P，及與運動方向相反並與法線成 $\phi' = 16°40'$ 之 R_3。 圖 208(e)爲其力三角形。 從圖上量得 P 爲 200〔磅〕；R_3 爲 260〔磅〕。

【代數解法】 將 500〔磅〕重物作爲脫離體，圖 208(b)。 據 $\Sigma F_x = 0$，得

$$R_1 \sin 26°40' = R_2 \sin 26°40'$$

$$R_1 = R_2$$

據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$2\,R_1 \cos 26°40' = 500$$

$$R_1 = 280\text{〔磅〕}$$

再取左楔爲脫離體，圖 208(d)。 據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$280 \cos 26°40' = R_3 \cos 16°40'$$

$$R_3 = 261\text{〔磅〕}.$$

據 $\Sigma F_x = 0$，得

$$P = 280 \sin 26°40' + 261 \sin 16°40'$$

$$P = 201 \text{〔磅〕。}$$

【三角解法】 在此習題內,三角解法極易應用. 據圖 208(c)應用正弦定律,得

$$R_1 = R_2 = 500 \times \frac{\sin 26°40'}{\sin 126°40'} = 280 \text{〔磅〕。}$$

據圖 208(e),應用正弦定律,得

$$P = 280 \times \frac{\sin 43°20'}{\sin 73°20'} = 201 \text{〔磅〕。}$$

欲求反力 R_3,則據同一三角形,得

$$R_3 = 280 \times \frac{\sin 63°20'}{\sin 73°20'} = 261 \text{〔磅〕。}$$

習 題

1. 假定 $f = 0.40$,試求使圖 208(a) 之物塊下之兩楔拉出時所需之水平力。 答: 153〔磅〕.

2. 在圖 209 內,假定摩擦係數爲 0.2. 試求使物塊下之楔開始向右推動時,所需之水平力。 答: $P = 720$〔磅〕.

3. 在圖 209 內,試求使物塊下之楔向左開始拉動時所需之水平力 P。

答. 133〔磅〕,向左.

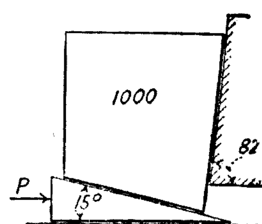


圖 209.

63. 摩擦定律.

對於乾表面之摩擦定律,大部分自摩林 (Morin),庫侖(Coulomb),韋斯丁豪斯 (Westinghouse)諸氏之實驗得來,茲分述於下.

1. 摩擦力與正壓力成正比。
2. 極限靜摩擦,較動摩擦略大.
3. 溫度上之普通變化,對於摩擦力之影響極小.

4. 在低速率時,摩擦力與速率之大小無關。 在高速率時,速率愈增,摩擦力愈減。 其原因可能爲兩接觸面間,夾有一薄層之空氣,有類潤滑油之作用。

5. 時間愈久,動摩擦愈減。

6. 改變運動方向,會增加摩擦力。

潤滑表面之摩擦定律,與乾表面者迥然不同。 例如其摩擦力與表面之性質,簡直無關。原因在主要之摩擦,爲其各層潤滑油間者。極限靜摩擦比動摩擦要大得多,乃因靜止時潤滑油每自兩接觸面間擠出之結果。通常溫度上之變動,對於潤滑油之性質,有斷然之變化,故對於摩擦力之影響甚大。 極大之正壓力,有將潤滑油擠出之勢,故使摩擦係數增加。若潤滑不良時,潤滑面之摩擦定律與乾表面極爲相近。

64. 最小拉力與摩擦圓錐。 假定圖 210(a) 之力 P,以水平方向作用於重 W 之物體上,則運動剛開始時,其力圖如圖 210(b)所示。若 W 與 ϕ' 爲已知,而平衡時力多邊形必須閉合,故據力圖上可求得 R 與 P 之大小。 設力 P 斜向上方,與水平線成 θ 角,如圖 211 (a) 所示,則 N 之值減小,於是 F' 亦隨之減小, 兩力 F' 與 N

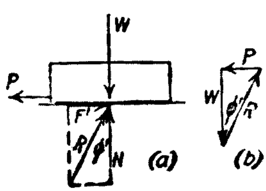


圖 210.

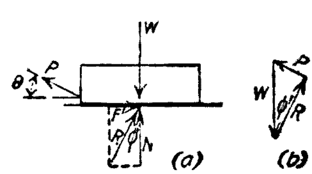


圖 211.

之比,以及角 ϕ' 保持一定。 在圖 211(b)之力圖內, W 之值爲一定, R 之方向亦一定。 故欲使力三角形閉合之最小值之力 P, 必須與 R 成 90° 角。 是以 θ 角若爲一變數,則在 $\theta = \phi'$ 時,將物體

拉動所需之力爲最小。 此項結果，亦得據微分積分學導得。

若 P 之方向向下，並與水平線成 θ 角，則 N 與 F' 均增加，如圖 212(a)與(b)所示。 若物體可以在任何方向自由移動，則以 A 爲頂點，以承面在點 A 之法線爲軸，而頂角爲 $2\phi'$ 之圓錐，謂之摩擦

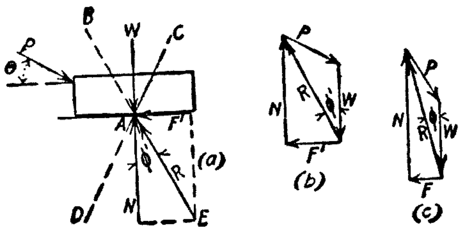


圖 212.

圓錐(cone of friction)。 若 P 與 W 之合力，位於此摩擦圓錐之內，承面對於物體之反力，亦必在角 DAE 之內。 換言之，即反力與法線間之角 ϕ，小於 ϕ'，如圖 212(c)所示。所需之摩擦力 F，即小於其極限值 $F' = N \tan \phi'$。 故 P 無論增加至何種程度，若 W 亦同時增加，而 P 與 W 之合力恆落於摩擦圓錐之內，則此物體恆保持在平面上之平衡狀況。

習 題

1. 一物體重 100〔磅〕，置於與水平面成角 15° 之斜面上。若 $f = 0.4$，試求此物體下之摩擦力。 欲使此物體向下開始滑動時，所需與斜面平行之力應有若干，又欲使此物體向上開始移動時，所需之水平力應有若干。

答：25.9〔磅〕；12.7〔磅〕；74.9〔磅〕.

2. 試分別求使習題 1 之物體，沿斜面向下及向上開始移動時之最小拉力，及其與斜面間之角度。 答：11.9〔磅〕，21°50′；59.95〔磅〕，21°50′.

3. 在習題 1 內，無論向下之力 P 之大小如何，問 P 與 W 之合力方向與鉛直線間之角度不超過何種限度時，物體之運動爲不可能？

答：6°56′，摩擦力向上；36°50′，摩擦力向下.

65. 方螺紋螺旋之摩擦力. 螺旋起重器(jackscrew)或方螺紋螺旋(square-threaded screw)之螺紋,相當於捲在圓柱上之一斜面. 如果用此螺旋起重時,載荷之作用方向係鉛直向下,利用作用於槓桿端之水平力,將載重沿斜面推上,如圖 213 所示. 若命 r 爲螺紋之平均半徑, l 爲槓桿之長度, P 爲使運動開始,在槓桿端所需作用之水平力. Q 爲在螺紋平均半徑之相當水平力,故得 Q 之值爲

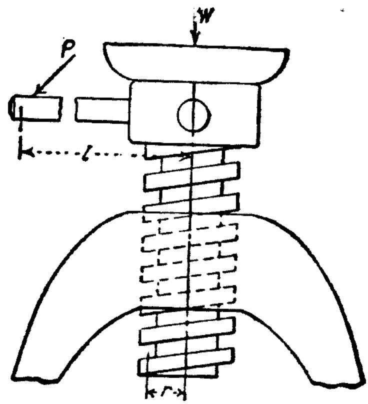


圖 213.

$$Q = \frac{Pl}{r} \tag{8.6}$$

重量 W 在螺紋上所產生之壓力,雖係分佈於螺旋之全周並遍及若干螺紋,爲簡便,可假定其集中一處,如圖 214 (a)所示. 在此圖

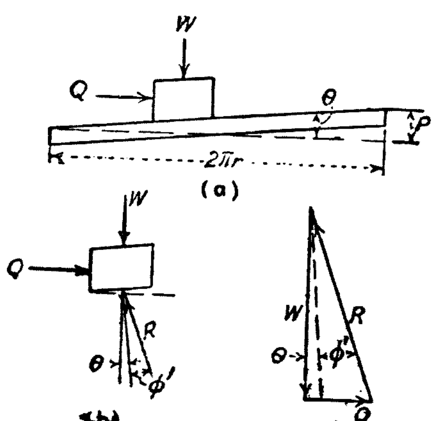


圖 214.

內螺紋上，祇展開一圓周之螺紋。 圖 214(b) 內，將展開面取爲脫離體. 作用於脫離體上之力有三：W, 鉛直向下，Q, 在水平方向，將載荷沿斜面向右推上，R 爲斜面之反力，與法線成摩擦角 ϕ'. 命 p 爲螺紋之螺距(pitch)。 則得斜面之傾斜角 θ 爲

$$\theta = \tan^{-1}\frac{p}{2\pi r} \tag{8.7}$$

若運動係沿斜面開始向上，則據圖 214(c) 之力圖，得

$$Q = W\tan(\phi' + \theta) \tag{8.8}$$

若運動係沿斜面開始向下，則摩擦力之方向倒轉，反力 R 移至法線之另一邊，與法線仍成角 ϕ'，如圖 215(b) 所示. 故得

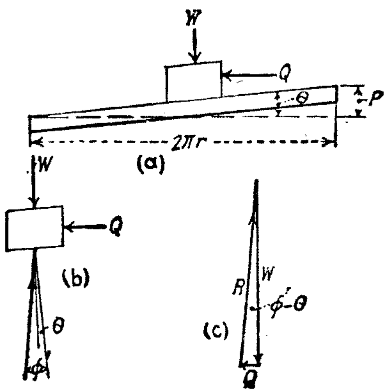


圖 215.

$$Q = W\tan(\phi' - \theta) \tag{8.9}$$

若 ϕ', θ 兩角恰正相等，則重量 W 恰正開始向下滑. 若 ϕ' 小於 θ, 則重量 W 即沿斜面滑下，除非加上阻力 Q，方能使其不滑. 製造起重螺旋器時，務須使 ϕ' 大於 θ。

習 題

1. 螺旋起重器之螺距爲 0.5〔吋〕，其螺紋之平均半徑爲 1.5〔吋〕. 槓桿長

2〔呎〕。$f=0.08$,試求欲開始舉起 3〔噸〕之重量時所需之力 P。

答：50.1〔磅〕。

2. 試求使習題 1 內之螺旋器起重,開始在反方向轉動時所需之力 P。

答：10.1〔磅〕。

66. 樞軸承與環軸承之摩擦　平頭樞軸 (flat-end pivot)與其軸承,在初製成時,本爲完善之平面。 但因受有磨損,故不能保持此種平面。 故開始時,徧布整個接觸面上之單位壓力,爲一常數。 當樞軸轉一周時,在接觸面上之任一微面積所動過之距離與此微面積至軸心間之半徑成正比例。 故在接觸面外緣之磨損較大。 於是將外緣之壓力減小,愈近中心,壓力愈大。因此樞軸轉動相當時間後,定可得到一種均勻之狀態,即在樞軸與軸承間接觸面上之所有各點,沿軸向之磨損爲一定值,而與點之位置無關。在任何單位面積上之磨損,隨其所動過之距離(或其半徑距離)及正壓力而變。 故欲使在整個接觸面上之磨損均勻,必須使任何微面積上之正壓力及其半徑距離之積爲一常數。 命 p 爲微面積上之壓力,ϱ 爲此面積與軸心間之距離。 則 $p\varrho$ 須爲常數,即

$$p\varrho=K \tag{8.16}$$

圖 216 表示實心之平頭樞軸,圖 217 表示空心之平頭樞軸,在任一情況中,$dA=\varrho\,d\varrho\,d\theta$。 作用於微面積 dA 上之總壓力爲:

$$p\varrho\,d\varrho\,d\theta=K\,d\varrho\,d\theta$$

若命 f 爲動摩擦係數,則得在 dA 上之摩擦力爲 $fK\,d\varrho\,d\theta$. 此摩擦力關於軸心之力矩爲

$$dM=fK\varrho\,d\varrho\,d\theta$$

半徑 r 之實心樞軸上之摩擦力,關於軸心之總力矩爲:

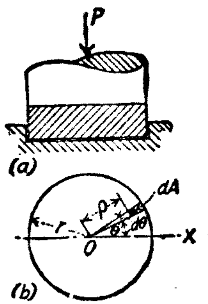


圖 216.

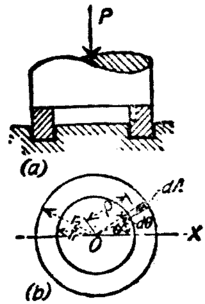


圖 217.

$$M = fK\int_0^r\int_0^{2\pi} \varrho\, d\varrho\, d\theta = fK\pi r^2 \tag{8.11}$$

在 dA 上之壓力為 $K\,d\varrho\,d\theta$，故得在接觸面上之總壓力為：

$$P = K\int_0^r\int_0^{2\pi} d\varrho\, d\theta = K2\pi r$$

於是

$$K = \frac{P}{2\pi r} \tag{8.12}$$

將 K 之值代入(8.11)式，得

$$M = fP\,\frac{r}{2} \tag{8.11a}$$

由(8.11*a*)式所得之力矩，相當於假定將總摩擦力 fP 作用於平均半徑 $r/2$ 時之力矩。

若為外半徑 r_2，內半徑 r_1 之空心樞軸，則得摩擦力關於軸心之總力矩為：

$$M = fK\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \varrho\, d\varrho\, d\theta = fK\pi(r_2^2 - r_1^2) \tag{8.13}$$

在 dA 上之壓力為 $K\,d\varrho\,d\theta$，故得在整個接觸面上之總壓力為：

$$P = K\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} d\varrho\, d\theta = K2\pi(r_2 - r_1)$$

於是：

$$K = \frac{P}{2\pi(r_2 - r_1)} \tag{8.14}$$

將 K 之值代入(8.13)式，得

$$M = fP\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right) \tag{8.13a}$$

據(8.13a)式，可得與(8.11a)式同樣之結論。即總力矩相當於假定總摩擦力 fP 作用於平均半徑 $\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)$ 時之力矩。

圖 218 所示之環軸承(collar bearing)，與空心之樞軸承相同。其優點為能裝在一軸上之任何部分，並且可在同一軸上裝置多個環軸承，以增加軸承之面積。

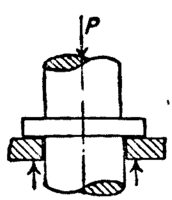


圖 218.

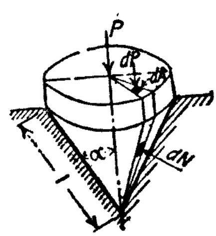


圖 219.

圓錐樞軸． 圖 219 表示承受軸向載荷 P 之**圓錐樞軸**(conical pivot)．命 dP 為微面積 $dA = \rho\, d\rho\, d\theta$ 上之載荷．dN 為在軸承斜面上對應於微面積 dA 之壓力．因 $\Sigma F_y = 0$，故得

$$dN \sin \alpha = dP$$

即

$$dN = \frac{dP}{\sin\alpha}$$

由於壓力 dN 而產生之摩擦力為：

$$f\,dN = f\frac{dP}{\sin\alpha}$$

此力關於軸心之力矩爲:

$$dM = f\varrho\,\frac{dP}{\sin\alpha}$$

若命 p 爲截面上之單位壓力,據平頭樞軸之同樣條件,得

$$dP = p\varrho\,d\varrho\,d\theta = K\,d\varrho\,d\theta$$

故得摩擦力關於軸心之總力矩爲

$$M = \int\frac{f\varrho\,dP}{\sin\alpha} = \frac{fK}{\sin\alpha}\int_0^r\int_0^{2\pi}\varrho\,d\varrho\,d\theta = \frac{fK}{\sin\alpha}\pi r^2 \qquad (8.15)$$

類如平頭樞軸,可得:

$$K = \frac{P}{2\pi r} \qquad (8.16)$$

將 K 值代入(8.15)式,得

$$M = \frac{fPr}{2\sin\alpha} \qquad (8.15a)$$

因 $r/\sin\alpha = l$ 即圓錐接觸面之斜高. 故得力矩公式爲

$$M = fP\,\frac{l}{2} \qquad (8.15b)$$

由此可見作用於圓錐樞軸上摩擦力之力矩,與半徑等於接觸錐面之斜高 l 之平頭樞軸上摩擦力之力矩相等。

習　題

1. 設起重機直桿底部之直徑爲16〔吋〕,承受鉛直方向之總載荷 6000〔磅〕。設此桿爲一平頭底座,其 $f = 0.5$. 試求使此桿繞其軸轉動時,問在垂直於 6〔呎〕長之水平鈎桿之一端所施之水平力,應等於若干?　答: 167〔磅〕.

2. 設螺旋槳軸之直徑爲 6〔吋〕,其上裝有六個環軸承,每環軸承之外直徑爲 10〔吋〕. 設 $f = 0.05$,其軸向推進力爲 200,000〔磅〕. 試求摩擦力之力矩,及在軸承上之平均單位壓力。　答: 3330〔磅·呎〕; 665〔磅/吋^2〕。

3. 一圓錐樞軸之直徑為 3〔吋〕，其軸鉛直，$\alpha = 35°$，載有 6000〔磅〕之鉛直載荷。若 $f = 0.09$，試求摩擦力之力矩。　答：58.84〔磅·呎〕.

67. 軸摩擦；圖解法.　設半徑為 r 之圓柱形軸，置於一軸承內，用力使其轉動。起初軸以滾動離其靜止位置，迨軸承之合反力（即 N 與 F 之合力）與接觸點之半徑成摩擦角 ϕ' 時，方在軸承內開始滑動。若作軸之同心圓，切於此合反力之作用線上，則其直徑為 $r \times \sin\phi'$. 此圓名曰摩擦圓（friction circle）。若 ϕ' 之值甚小，則 ϕ' 之正弦可假定等於 ϕ' 之正切或 f'. 故若假定摩擦圓之半徑為 $f'r$，其誤差極小.

半徑 r 與角 ϕ' 通常為已知值，故可利用摩擦圓以定軸與軸承之切點之位置。其主要用途在圖解法方面。在圖 220 內，Q 為阻力，P 為主動力。此兩力相交於點 B。故軸承之合反力亦必須經過點 B。又因此合反力必須切於摩擦圓上，故軸與軸承之切點，可以決定。

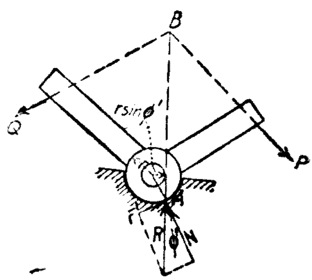


圖 220.

欲決定合反力究竟切於摩擦圓之何側，必須注意軸以何種方向轉動，或具有在何種方向轉動之傾向。軸承作用於軸上之合反力，關於軸心之力矩方向，與軸之轉動方向相反。例如在圖 220 內，P 為主動力，使軸在軸承內以順時針向轉動。故合反力 R 關於軸心之力矩必須為反時針方向。R 之作用線，必切於摩擦圓之右邊。（因若切於左邊，則 R 關於軸心之力矩亦為順時針向矣。）

決定合反力在摩擦圓上之切點之另一法則如下。摩擦力與阻力一樣，恆使主動力之力矩臂減短，使阻力之力矩臂加長。故在圖

220 內，假定無軸摩擦力，R 必經過軸之中心，有軸摩擦力，R 移至軸心之右方．

習 題

1. 圖 221 表示一簡單之汽力起重機．試求欲在所示位置，產生等速運動時所需之力 P，(1)不計摩擦力，(2)計及摩擦力． 設各運動面之 f 均等於 0.15． 答：(1) $P=3123$〔磅〕；(2) 3375〔磅〕．

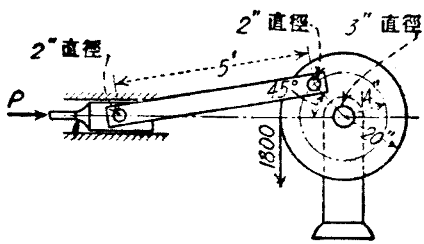


圖 221.

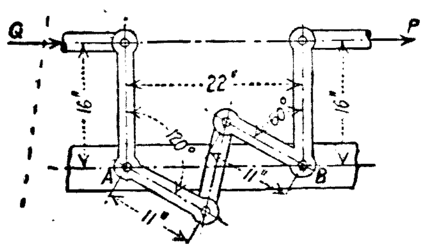


圖 222.

2. 圖 222 表示平均溫度位置之聯鎖信號組(interlocking signal system)之標準補償器(standard compensator)． 設 A，B 爲固定點，所有之銷之直徑爲 1〔吋〕．若 $f=0.10$，試求 $P=50$〔磅〕時之 Q 值． 答：$Q=49$〔磅〕．

68. 撓性帶之摩擦． 圖 223(a) 所示之帶，使滑輪克服其阻力而產生轉動，在帶之主動邊之牽力 T_2 大於在其鬆邊之牽力 T_1．

設取帶之微長度 ds 爲脫離體，如圖 223 (b) 所示。命 dP 爲滑輪在帶之 ds 長度上之壓力。因脫離體上所受各力平衡，並因帶之厚

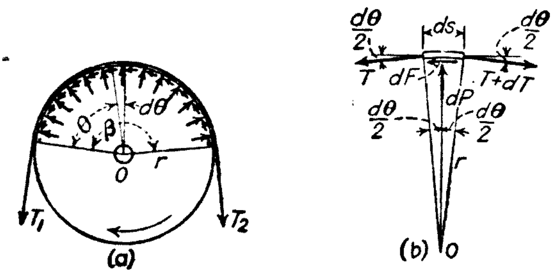


圖 223.

度，與滑輪之半徑相較，可略去不計，故據 $\Sigma M_c = 0$，得

$$r\,dF - r\,dT = 0$$

$$dF = dT$$

因在徑向之 $\Sigma F_r = 0$，故得

$$dP = T\sin\frac{d\theta}{2} + (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 2T\sin\frac{d\theta}{2} + dT\sin\frac{d\theta}{2}$$

因 $dT\sin\dfrac{d\theta}{2}$ 爲第二階之微分，其餘各項爲第一階之微分，故可將 $dT\sin\dfrac{d\theta}{2}$ 略去。$\sin\dfrac{d\theta}{2}$ 亦可以 $\dfrac{d\theta}{2}$ 代之。於是

$$dP = T\,d\theta$$

臨滑動開始時

$$dF = f'\,dP$$

故

$$dT = f'dP = f'T\,d\theta$$

即

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = f'\int_0^{\beta} d\theta$$

積分之，得

$$\log_e \frac{T_2}{T_1} = f'\beta \tag{8.17}$$

若用常用對數，得

$$\log_{10} \frac{T_2}{T_1} = 0.4343\, f'\beta \tag{8.17a}$$

若用指數式，得

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{f'\beta} \tag{8.17b}$$

自然對數之底 e 之值爲 2.71828.

角 β 之單位爲弳(radian)[1]。 帶已滑動時，上述之關係，仍屬有效，所不同者卽 f 爲動摩擦係數。 當繩捲在檣(spar)或繫船柱(snobbing post)上，或撓性帶捲在鼓輪(drum)上時，所得之關係亦如此。

若繞於滑輪上之帶，以高速度運動時，則其離心力將減小帶與滑輪間之壓力。 故因摩擦而產生之主動力，亦因之減小。

(8.17b)式內，並不包含滑輪之大小。 可見牽力與滑輪之大小無關。

若帶與滑輪間並無滑動，或無開始滑動之趨勢，(8.17b) 式無效.

習 題

1. 一帶裝於兩滑輪上，一輪之直徑爲 2〔呎〕，一輪之直徑 6〔吋〕。兩輪中心間之距離爲 22〔吋〕。 若大滑輪之 f' 爲 0.4，問小滑輪之 f' 應等於若干，方能使兩滑輪上之帶，同時開始滑動？ 答： 0.695

2. 一繩在絞盤之鼓輪上繞三圈半。 f' 之值爲 0.36. 若用繩所拉之載荷爲 12,000〔磅〕。 問繩之另一端之拉力之值，應等於若干，方能防止繩在鼓輪上滑動？ 答： 4.37〔磅〕.

---

(1)〔譯者〕弳一名弧徑，亦作弧度.

3. 設滑輪組之繩之一端之牽力為500〔磅〕. 此繩繞過一柱,使繩不致拉動. 若桿之 $f'=0.5$,繩之另一端之牽力不超過10〔磅〕時,問此繩應在桿上繞幾圈?　答: 1.25

69. 摩擦原理摘要. 在索解涉及摩擦力之問題時,必須特別注意下列原理.

1. 若不計摩擦力,則反力常與接觸面垂直.

2. 若脫離體在運動中,或即將運動時,則與脫離體相接之表面,對於脫離體所施之摩擦力方向,與運動方向相反.

3. 若脫離體靜止,而與脫離體相接之表面在運動中,或即將運動時,則其施於脫離體上之摩擦力,與表面之運動方向相同.

4. 祇有物體靜止而即將滑動時,方能用靜摩擦係數決定摩擦力之大小. 若滑動並非即將開始時,則須用靜力平衡條件決定摩擦力之值.

70. 滾動摩擦. 一理想圓柱體之彎曲面與一理想之平面相接觸時,其接觸之處成一直線. 若受有載荷之車輪在鐵軌或在路面上時,則因產生形變(deformation)之關係,接觸之處成為一面. 設有水平拉力 P 作用於軸上,使車輪以等速前進,如圖224所示,則承面之合反力 R 作用於鉛直半徑前方之點 B. 命 AB 間之水平距離為 a. 設運動為等速運動,並設承面之形變甚小,則據 $\Sigma M_B=0$,可得近似算如下:

$$Pr = Wa$$

即

$$P = \frac{Wa}{r} \tag{8.18}$$

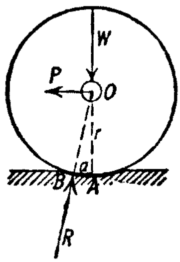


圖 224.

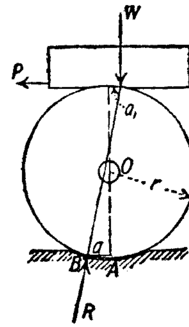


圖 225.

若有載荷 W 施於車輪或滾子之圓周上時，如圖 225 所示，並設有力 P 使載荷與車輪同時以等速度前進，則亦可得一相似之關係。命 a 爲車輪底部反力之作用點與鉛直半徑間之水平距離。a_1 爲其頂部相似之距離。據 $\Sigma M_B = 0$，得

$$2Pr = W(a + a_1) \tag{8.19}$$

若 $a = a_1$，則得與(8.18)同樣之公式：

$$P = \frac{Wa}{r}$$

若重量 W 爲兩個或不止兩個之車輪之載荷，則得近似算式如下，

$$R_1 + R_2 + \cdots \fallingdotseq W$$

再據 $\Sigma F_x = 0$，得

$$P = (R_1 + R_2 + \cdots)\sin\phi$$

ϕ 爲 $R_1, R_2\cdots$ 與鉛直線間之角。故得

$$P = W\sin\phi$$

$$P = W\frac{a_1 + a_2}{2r}$$

若 $a_1 = a$，則

$$P = \frac{Wa}{r}$$

據實驗證明，對於同樣之材料，不論其載荷有多大，半徑有多長，祇須兩者均在合理之限度內，距離 a 為一常數。 此數值謂之**滾動摩擦係數**(coefficient of rolling friction)或**滾動阻力係數**(coefficient of rolling resistance)。 據庫倫(Coulomb)，范師柏(Weisbach)，及彭僕(Pambour)諸氏實驗之結果，得下表之 a 值(單位〔吋〕)。

車輪材料	軌道或路面材料	a，〔吋〕
榆 · · · · · · · · · ·	槲	0.0327
癒瘡木(一種硬木) · ·	槲	0.0195
鑄鐵 · · · · · · · · ·	鑄鐵	0.0183
鑄鐵或鋼 · · · · · · ·	鋼	0.007 至 0.020

硬鋼滾子在硬鋼上之滾動摩擦極小。 在滾子軸承(roller bearing)內，即利用此優點。 圖 226 表示此種軸承之構造。 在軸承 b 內轉動之軸 a，並不直接在軸承 b 上滑動，而在滾子 c 上滾動。假定壓力極小時，可不用滾子，改用滾珠。

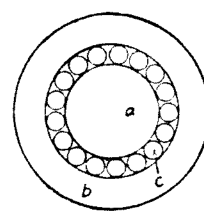


圖 226.

習題

1. 有重 125,000〔磅〕之貨車，其車輪直徑為 33〔吋〕，軸之直徑為 4〔吋〕。假定 $f=0.07$，則在聯車鈎 (drawbar) 上須有 1200〔磅〕之拉力，方能使其在水平路軌上以等速度滾動。試求滾動摩擦係數 a 之值。 答：$a=0.0185$〔吋〕。

2. 設重 6400〔磅〕之鑄鐵機架，置於直徑 2〔吋〕之鋼滾子上，而鋼滾子則置於松木上。若鑄鐵在鋼上之滾動摩擦係數為 0.018〔吋〕，鋼滾子在松木上之滾動摩擦係數為 0.033〔吋〕。 試求使此機架以等速率前進時所需之水平力。 答：163.2〔磅〕。

〔譯註〕 (1) 榆 elm，癒瘡木 Lignum vitae，槲 oak.

摩擦之總習題

1. 假定鑄鐵輪與鋼軌間之靜摩擦係數爲 0.25. 試求車輛以等速度向下運動時，軌道斜率之極限値。 答：14°02′.

2. 假定鑄鐵輪與鋼軌間之動摩擦係數爲 0.22，如將輙收緊後，使輪在習題 1 所求得極限斜度之軌道上滑下． 設車之重量爲 40,000〔磅〕，試求其不平衡力。 答：1162〔磅〕.

3. 在圖 227 內，有一 20° 角之楔，向 1000〔磅〕之重物下推進，而此重物之一邊爲鉛直牆 A 所擋住。 若各個表面之摩擦角 ϕ' 均爲 15°，試求使楔向右邊開始推動時之水平力 P. 答：1192〔磅〕.

4. 在圖 227 內，試求使楔開始向左邊拉出時之水平力 P. 答：176〔磅〕.

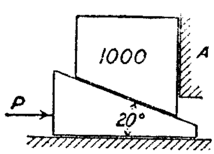


圖 227.

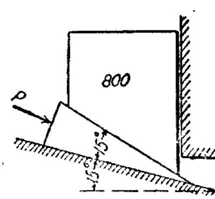


圖 228.

5. 設在圖 228 內，所有表面之靜摩擦係數均爲 0.25. 試求使楔開始向右移動時之力 P. 但 P 之作用線爲楔之分角線。 答：1077〔磅〕.

6. 試求使 200〔磅〕重之冰塊，在與水平面成 10° 角之木質斜溝內開始移動時，所需之水平力。假定 $f' = 0.05$. 答：45.7〔磅〕.

7. 試求習題 6 內所需之最小力。 答：44,54〔磅〕.

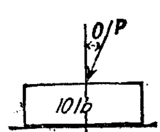


圖 229.

8. 假定圖 229 所示物塊之摩擦係數 $f' = 0.4$，$\theta = 25°$，試求使物塊開始

滑動時之力 P. 答：66.5〔磅〕.

9. 一石塊重 600〔磅〕，置於與水平線成 30° 角之斜面上，設其 $f'=0.75$. 試求作用於此石塊底面之摩擦力，並求使此石塊在斜面滑下所需之極小力。

答：300〔磅〕；71.8〔磅〕.

10. 圖 230 所示之兩物塊，以經過點 C 之滑輪之繩聯繫之，滑輪之摩擦力不計。設 20〔磅〕物塊下之摩擦係數為 0.25，而 30〔磅〕物塊下之摩擦係數為 0.30，問此物系是否運動？並求 F_1, F_2, T 之值。

答：4.33〔磅〕；14.35〔磅〕；5.67〔磅〕.

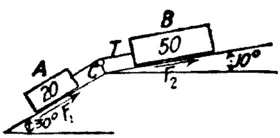


圖 230.

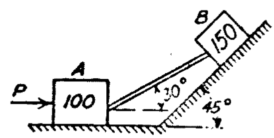


圖 231.

11. 圖 231 所示兩物塊間之桿，能承受壓縮力。若不計此桿之重量，並設 $f'=0.4$，試求使兩塊開始向右移動時，所需之水平力 P. 答：223.4〔磅〕.

12. 若將圖 231 之力 P 移去，問兩物塊是否會向左滑動？試求桿內之壓縮力，及在兩物塊底面上之摩擦力。

答：59.6〔磅〕；$F_A=51.7$〔磅〕；$F_B=48.6$〔磅〕.

13. 設定摩擦角 ϕ' 為 15°，試求使圖 232 所示兩物塊開始向左滑動時所需之水平力 P. 答：246〔磅〕.

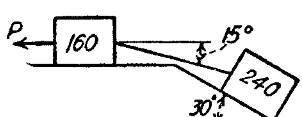


圖 232.

14. 試求使圖 232 所示之兩物塊，開始向左滑動時，所需極小力之大小與方向。假定 $f'=0.3$. 答：252〔磅〕，與水平線成 16°40′ 角.

15. 有一均質梯，長 20〔呎〕，重 60〔磅〕。下端置於水平地板上，上端倚靠鉛直之牆上，並與牆成 10° 之角。若梯與地板之摩擦係數為 0.3，與牆之摩擦係數為 0.2，並在梯上離地 4〔呎〕處有一水平力。試求使梯向外滑時水

平力之大小，及使其向內滑時力之大小。 答：15.3〔磅〕；30.5〔磅〕.

16. 若習題 15 內之梯之下端背牆移動。試求梯尚未開始滑動時，梯與牆可能有之極大角度。 答：32°30′.

17. 若習題 15 內之梯與地板及梯與牆之摩擦係數為 0.14，問 160〔磅〕之重量最高可置於梯上之何處，不致使梯向外滑動？ 答：18.2〔呎〕.

18. 設習題 15 內之梯上，有 160〔磅〕之重量置於離其上端 4〔呎〕之處。問 f' 之極小值為若干，方可使梯不致滑動？ 答：0.126.

19. 設圖 233 所示之懸桿 (hanger) AB 得在柱 MN 之上下滑動。若其間之摩擦係數 $f'=0.2$，試求載荷 P 與柱之距離至少須有多少，不致使懸桿滑下。懸桿之重量則略去不計。 答：3.5〔吋〕.

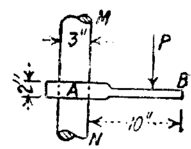


圖 233.

20. 設貨車輪與鋼軌間之滾動摩擦係數為 $\alpha = 0.015$〔吋〕，軸摩擦係數 $f = 0.036$，試求使 160,000〔磅〕重之貨車，以等速度在水平軌道上運動時，所需水平方向之聯車鈎拉力。車輪之直徑為 33〔吋〕，軸之直徑為 4〔吋〕。試求若不用軔，並貨車不致自動向下運動，軌道可能有之最大斜率。 答：844〔磅〕；0.528%.

21. 設有直徑 16〔吋〕之環軸承，裝於直徑 12〔吋〕之軸上。若 $f = 0.04$，軸向推力為 8000〔磅〕，試求摩擦力之力矩，及每轉一周時，因摩擦而產生之功之損耗。 答：187〔磅·呎〕；1173〔呎·磅〕.

22. 設有重 10,000〔磅〕之重物，用繩將其吊入船艙中，此繩繞於 $f = 0.2$ 之檣上。若繩繞過檣後，在另一端之力不超過 150〔磅〕。試求此繩應在檣上繞若干圈。 答：3.34

23. 有一繩在 $f = 0.25$ 之絞盤上繞三圈半。若欲使此繩不致滑動時之拉力為 50〔磅〕，試求另一端所施之拉力為若干。 答：12,180〔磅〕.

24. 有一繩在 $f = 0.3$ 之柱上繞三圈。若繩之一端之拉力為 60,000〔磅〕，試求欲使此繩不致在柱上滑動時，在另一端應有之最小拉力為若干。 答：210〔磅〕.

25. 設有一繩在桿上繞兩圈半，祇須用 1〔磅〕之拉力，即可支持 30〔磅〕之重量。試求 f 之值。 答：0.216

第九章

形心與重心

71. 有固定作用點之力系之力心. 以前討論作用於剛體之力時,常假定力之作用點,能沿其作用線移至任何一點. 但在若干情況中,則假定無論物體如何移動,力系如何轉動,力在物體上之作用點,則固定不變. 例如有一組之質點,各質點上所受之力,與其質量成正比,且互相平行. 如力之方向維持不變,將質點系轉動,則其結果與將質點系在空間之位置固定,而將平行力系之諸力,各以其作用點爲中心,在反方向轉動,完全相同.

假定作用於質點系之力系,係在軸 Y 方向. 其合力與平面 XY 間之距離及與平面 YZ 間之距離,可據力矩定理求得. 若將此力系之諸力,各以其作用點爲中心而轉動,使與軸 X 平行,則其合力之作用線與平面 XY 間之距離,與在轉動前之距離相同,至於合力與平面 XZ 間之距離,此時卽可以算出. 作出與平面 XZ 平行之合力作用面. 此平面與在轉動前合力作用線之交點,卽爲合力之作用點. 此點亦卽合力之轉動中心. 若再將此力系之諸力,各以其作用點爲中心,轉至與軸 Z 平行,則在轉動時,其合力之作用線,與平面 XZ 間之距離,必爲一常數.

最後,再將力系之諸力,各以其作用點爲中心,自軸 Z 之方向轉至軸 Y 之方向. 其合力之作用線與平面 YZ 間之距離,必爲一常數. 此時之力系,必回至其原有位置. 欲得此種結果,上述之三個轉動,必須以同一點爲中心. 假定在第二個轉動之轉動中心之 X 坐標,與第一個轉動者不同,則合力在最後位置之 X 坐標,使與起

始時之 X 坐標不同。 同理，若第三個轉動之轉動中心之 Z 坐標與第一個轉動者不同，則合力在最後位置之 Z 坐標，便與起始時之 Z 坐標不同。

上述合力之轉動中心，必爲力系在任何轉動中之一個固定點，謂之此力系之**力心**(centroid of forces)，其坐標以 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 表示之。

物體之每個質點，與地球間均有引力。此引力之大小，與質點之質量成正比。無論物體成爲何種位置，此種引力之作用點，永遠保持不變. 且工程問題上所討論的物體之諸質點所受之引力，簡直可假定爲平行力。 此等引力之合力，謂之物體之**重力**(force of gravity)或**重量**(weight). 其固定之作用點，謂之物體之**質量中心**(center of mass)或**重心**(center of gravity)[1]。 通常祇須討論此合力。

若力系之諸力之作用點係固定者，且在同一平面上，則祇須兩個力矩方程式，即得定出力心之位置. 所取之兩軸必須與諸作用點在同一平面內。以上曾有證明，在任何轉動時，力系之力心對於此力系各作用點之位置，保持不變。 故可假定諸力轉至垂直於其作用點之平面。 據力矩定理，得:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F} = \frac{\int x\,dF}{\int dF} \\ \bar{y} &= \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F} = \frac{\int y\,dF}{\int dF} \end{aligned}\right. \tag{9.1}$$

習 題

1. 設有四力，其大小及其在平面 XY 上之作用點如下：10〔磅〕，(0″,0″)；

(1)【譯注】 質量中心與重心有區別，定義見大學物理學. 但在一般之工程問題中，常假定 g 爲一常數，不隨質點之位置而變，故質量中心卽爲重心.

16〔磅〕,(12″, 4″); 30〔磅〕,(3″, 5″); 35〔磅〕,(4″, 10″). 若四力之方向相同。試定其力心之位置。　答:(4.64″, 6.20″)

2. 若習題1之第一第二兩力之方向倒置。試求其力心。

答:(0.97″, 11.18″)

72. 體積,面積,及線之形心。 一幾何體積之形心(centroid)即爲同樣形狀之均質物體(homogeneous body)之質量中心。

一面積之形心,即爲同樣形狀之均質薄板之質量中心,假定此薄板之厚度趨近於零。

一曲線之形心,即爲同樣形狀之均質細線之質量中心,假定此細線之截面積趨近於零。

73. 關於平面之一次矩。 據(9.1)式,及第72節內關於體積形心之定義,得體積形心之坐標如下:

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dF}{\int dF}=\frac{\int x\varrho g\,dV}{\int \varrho g\,dV}=\frac{\varrho g\int x\,dV}{\varrho g\int dV}$$

上式之 ϱ 爲密度, g 爲重力加速度。即

同理,得

$$\left\{\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\int x\,dV}{\int dV}=\frac{\int x\,dV}{V}\\ \bar{y}&=\frac{\int y\,dV}{\int dV}=\frac{\int y\,dV}{V}\\ \bar{z}&=\frac{\int z\,dV}{\int dV}=\frac{\int z\,dV}{V}\end{aligned}\right.\tag{9.2}$$

面積與曲線之形心坐標,亦可根據同法求得。其值如下。

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,dA}{A} \\ \bar{y} &= \frac{\int y\,dA}{\int dA} = \frac{\int y\,dA}{A} \\ \bar{z} &= \frac{\int z\,dA}{\int dA} = \frac{\int z\,dA}{A} \end{aligned}\right. \quad (9.3) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x\,dl}{\int dl} = \frac{\int x\,dl}{l} \\ \bar{y} &= \frac{\int y\,dl}{\int dl} = \frac{\int y\,dl}{l} \\ \bar{z} &= \frac{\int z\,dl}{\int dl} = \frac{\int z\,dl}{l} \end{aligned}\right. \quad (9.4)$$

上式之$\int x\,dV$，$\int y\,dV$，$\int z\,dV$，分別謂之體積 V 關於平面 YZ，平面 ZX，平面 XY 之一次矩(first moment)簡稱爲矩(moment)。$\int x\,dA$，$\int y\,dA$，$\int z\,dA$，分別謂之面積 A 關於平面 YZ，平面 ZX，平面 XY 之一次矩。$\int x\,dl$，$\int y\,dl$，$\int z\,dl$，分別謂之線段 l 關於平面 YZ，平面 ZX，平面 XY 之一次矩。

又據 §71 物體的重心定義，可得物體之重心之坐標如下：

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x\,dW}{\int dW} = \frac{\int x\,dW}{W} \\ \bar{y} &= \frac{\int y\,dW}{\int dW} = \frac{\int y\,dW}{W} \\ \bar{z} &= \frac{\int z\,dW}{\int dW} = \frac{\int z\,dW}{W} \end{aligned}\right\} \quad (9.5)$$

上式之$\int x\,dW$，$\int y\,dW$，$\int z\,dW$，分別謂之物體重量 W 關於平面 yz，平面 zx，平面 xy 之一次矩。若物體爲均質者，w 爲其單位體積之重量，則 $dW = w\,dV$，$W = wV$，於是據 (9.2)，可知其形心，重心相合。

體積，面積，或線段，均非矢量，故其關於一平面之一次矩之正負號，可假定在平面之一側者爲正，他側者爲負。

如一體積，面積，或線段關於一平面之一次矩爲零，則其形心必在該平面上。 反之，若一體積，面積，或線段之形心在某參攷平面上時，則其關於該平面之一次矩爲零。

74. 對稱面及對轉軸之形心定位法. 如一體積，面積，或線段，於某一平面爲對稱時，其形心必在此平面上。

如有兩個或多個之對稱面相交於一線時，此線謂之對稱軸 (axis of symmetry)。 其形心必在此對稱軸上。

如有三個或多個對稱面相交於一點時，此點卽應爲其形心。

均質物體之重心，亦用上述方法以決定之。

許多幾何形體之形心，可根據其對稱面之觀察，以作全部或局部之決定，舉例如下。

直線之形心，在其中點。

圓弧，扇形，及弓形之中心，在其分角半徑上。

圓面積或圓周之形心，爲圓心。

長方形面積，或其周線之形心，爲聯結對邊中點之兩直線之交點，亦爲兩對角線之交點(但兩對角線並非其對稱軸)。

球及球面之形心，爲球心。

圓柱或圓柱面之形心，在其軸之中點。

兩底平行之直稜柱之形心，在其軸之中點。

直圓錐之形心，在其軸上。

薄板之形心，在其兩面之形心間之中點。

75. 簡單形狀之面積與體積之形心. 對於幾種形狀簡單之面積與體積，祇須決定相當個數含有形心之面或線，卽可完全決定其形心之位置。

三角形 三角形之形心，卽爲其三個中線之交點。在圖 234 內，

平行於其底邊之任一微條 MN 之形心在其中線 AD 上，故此三角形之形心，必在其中線AD上。 同理，其形心亦必在中線 BE 上。故兩中線之交點 O，卽爲形心。

據幾何學，得 $OD = \frac{1}{3}(AD)$。 故三角形之形心，在其任一中線上，而形心與底邊中點間之距離，等於中線總長之 $1/3$。

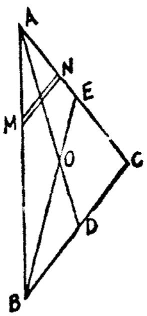


圖 234.

自 O 至底邊 BC 之垂直距離，等於三角形自 A 至 BC 之高之 $\frac{1}{3}$。 因此分別若畫出與兩底邊平行之兩直線，與底邊間之距離，各等於其高之 $\frac{1}{3}$。 則此兩直線之交點，亦卽三角形之形心。

稜錐(pyramid)之斜面。 稜錐之整個斜面之形心，在稜錐之軸上； 與稜錐底之距離，等於全高之 $\frac{1}{3}$。 假定有兩個相距無窮小並且與錐底平行之兩平面，與稜錐相割。 在此兩平面間，稜錐斜面積之形心，係在錐軸上。 又每個三角形斜面之形心，在與錐底平行，且與錐底間之距離等於全高 $\frac{1}{3}$ 之一平面上。 故整個斜面之形心，卽爲錐軸與上述平面之交點。

假定稜錐之斜面數，增至無窮，其極限卽得一圓錐面。 故上述命題之解法，亦可應用於求出圓錐面之形心。

斜稜柱 兩底面平行之斜稜柱 (oblique prism) 之形心，在其軸上之中點。 假定將斜稜柱切成與底面平行之無窮數之薄片，因每薄片之厚度漸近於零，故其形心卽爲薄片截面之形心。 從定義上，聯結此等薄片之形心之直線，卽應爲斜稜柱之軸。 故得斜稜柱之形心卽在其軸上。 其次再將此斜稜柱切成與軸平行之無窮數之微條，每一微條之形心，卽在其中點。 故整個斜稜柱之形心，必在此經過諸微條之中點，而與底面平行之一平面上。

斜稜錐或斜圓錐 斜稜錐 (oblique pyramid) 或斜圓錐 (oblique cone）之形心，卽在其軸上。假定將斜稜錐或斜圓錐切成與底面平行之無窮數之薄片，因每薄片之厚度漸近於零，故其形心卽爲其截面積之形心。因每一截面之形狀與底面相似，故諸薄片之形心之軌跡，應卽爲斜稜錐或斜圓錐之軸。故整個斜稜錐或斜圓錐之形心，亦必在其軸上。

76. 用積分法求形心. 線，面積，與體積之形心之坐標，可以用(9.4)(9.3)(9.2)式求得之。祇須一次矩之微分算式可以積分時，任何形心之坐標，均可用此法求得。

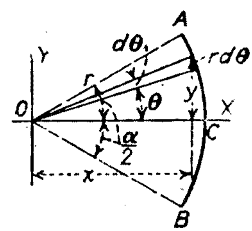


圖 235.

例題 1

試求圓弧之形心。

【解】 據對稱之關係，形心必在軸 OC 上，（圖235），故

$$\bar{y}=0.$$

據(9.4)式，得 $\bar{x}$ 爲

$$l\bar{x}=\int x\,dl$$

$$l=r\alpha;\quad x=r\cos\theta;\quad dl=r\,d\theta$$

故得

$$r\alpha\,\bar{x}=\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}}r^2\cos\theta\,d\theta=r^2\sin\theta\Big]_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}}=2r^2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\bar{x}=\frac{2r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha=90^\circ$ 時，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=0.707,\quad \bar{x}=0.707\frac{4r}{\pi}=0.901\,r$$

$\alpha=180^\circ$ 時，

$$\sin\frac{\alpha}{2}=1;\quad \bar{x}=\frac{2r}{\pi}=0.637\,r.$$

例題 2

試求扇形之形心。

【解】 假定 X 軸爲扇形角之平分線（圖236），故得

$$\bar{y} = 0$$

據(9.3)式,得

$$A\bar{x} = \int x\,dA$$

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\alpha;\ dA = \varrho^2\,d\varrho\,d\theta;\ x = \varrho\cos\theta$$

$$\tfrac{1}{2}r^2\alpha\,\bar{x} = \int_0^r \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \varrho^2 \cos\theta\,d\varrho\,d\theta$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{4r}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$$

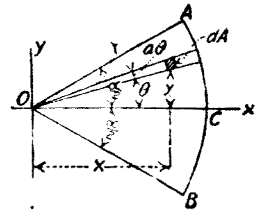


圖 236.

$\alpha = 90°$ 時,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0.707;\quad \bar{x} = 0.707\,\frac{8r}{3\pi} = 0.6\,r$$

$\alpha = 180°$ 時,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 1;\qquad \bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = 0.425\,r$$

仿此,一象限之形心,與其兩半徑邊之間之距離爲 $\frac{4r}{3\pi}$.

例 題 3

試求稜錐或圓錐之形心。

【解】 據第75節,可知其形心必在其軸上。 其餘尙須決定者,即形心至經過頂點,且平行於底面之平面之距離。 假定稜錐或圓錐之頂點,位於坐標之原點,其底面與 X 軸垂直。 圖 237 示此稜錐或圓錐在平面 XY 上之截面。

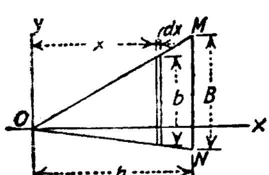


圖 237.

命 A 爲底面之面積,a 爲與頂點相距 x,且平行於底面之任一截面之面積。據(9.2)式,得

$$V\bar{x} = \int x\,dV$$

$$V = \frac{Ah}{3};\ dV = a\,dx$$

$$\frac{Ah}{3}\bar{x} = \int xa\,dx$$

據相似三角形，得

$$\frac{b}{B}=\frac{x}{h}$$

再據相似面積之幾何關係，得

$$\frac{a}{A}=\frac{b^2}{B^2}=\frac{x^2}{h^2}$$

故得

$$a=A\frac{x^2}{h^2}$$

$$\frac{Ah}{3}\bar{x}=\frac{A}{h^2}\int_0^h x^3\,dx$$

$$\bar{x}=\frac{3}{4}h.$$

形心與底面間之距離，爲 $h-x=\frac{1}{4}h.$

例題 4

試求半球體之形心。

【解】假定所取之軸如圖 238 所示，據對稱關係，得

$$\bar{y}=0,\quad \bar{z}=0.$$

$\bar{x}$ 之値，可據(9.2)式求之，

$$V\bar{x}=\int x\,dV$$

$$V=\tfrac{2}{3}\pi r^3;\ dV=\text{薄片 }AB\text{ 之體積}=\pi y^2\,dx$$

$$\tfrac{2}{3}\pi r^3\bar{x}=\int_0^r x\,\pi y^2\,dx.$$

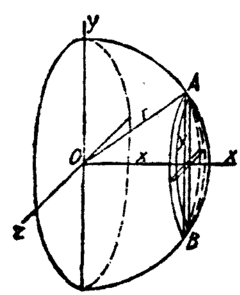


圖 238.

因

$$y^2=r^2-x^2$$

故得

$$\tfrac{2}{3}r^3\bar{x}=\int_0^r r^2x\,dx-\int_0^r x^3\,dx=\frac{r^4}{2}-\frac{r^4}{4}$$

$$\bar{x}=\tfrac{3}{8}r$$

習題

1. 試用積分法，求出 90° 圓弧之形心與其兩端半徑間之距離。 答：$\frac{2r}{\pi}$

2. 試用圖 239 所示之微扇形 OL 作為 dA，解例題 2.

3. 試用圖 239 所示之微面積 MN 作為 dA，解例題 2.

4. 試用積分法，求出象限之形心與其兩半徑邊間之距離。

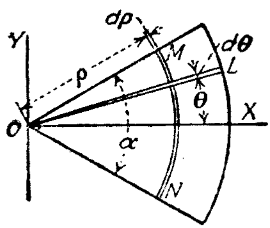


圖 239.

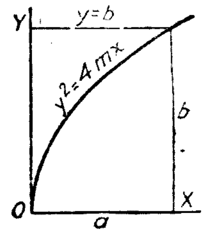


圖 240.

5. 在圖 240 內，試求拋物線，軸 X，及 $x = a$ 所包之面積之形心。

答：$\bar{x} = 3a/5$ $\bar{y} = 3b/8$

6. 在圖 240 內，試求拋物線，軸 Y，及 $y = b$ 所包之面積之形心。

答：$\bar{x} = 3a/10$; $\bar{y} = 3b/4$

77. 迴轉面及迴轉體之形心. 以一曲線繞曲線平面內之一軸旋轉，即產生之**迴轉面**(surface of revolution)，其形心必在軸上。欲求形心在此軸上之位置時，其簡單方法，為將母線上之微線段 ds 因迴轉而產生之面積，如圖 241 所示兩視圖之蔭部，作為 dA。

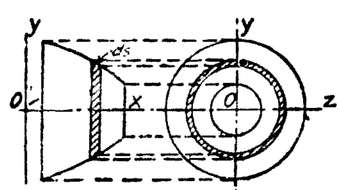


圖 241.

以一面積繞其平面內之一軸旋轉，即產生**迴轉體**(solid of revolution)，其形心必在其軸上。欲求形心在此軸上之位置時，其簡單方法，即以微面積 dA 因迴轉而產生之體積作為 dV。

例 題 1

試求半球面之形心。

【解】 設所取之軸，如圖 242 所示，據對稱關係，得

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0$$

$$A = 2\pi r^2; \ dA = 2\pi y\, ds; x = r\cos\Theta$$

以

$$y = r\sin\Theta; \ ds = r\, d\Theta$$

代入

$$A\bar{x} = \int x\, dA$$

得

$$2\pi r^2 \bar{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^3 \cos\Theta \sin\Theta\, d\Theta$$

$$\bar{x} = \frac{r}{2}\sin^2\Theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{2}$$

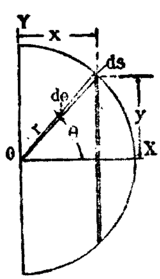


圖 242.

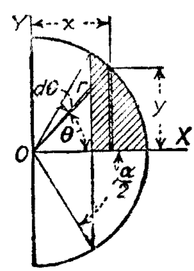


圖 243.

例題 2

設求截球形(spherical segment)之形心.

【解】 設所取之軸，如圖 243 所示. 據對稱，得

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0,$$

$$V\bar{x} = \int x\, dV$$

$$dV = \pi y^2\, dx; \ V = \int \pi y^2\, dx; \ x = r\cos\Theta$$

$$dx = -r\sin\Theta\, d\Theta; \ y = r\sin\Theta$$

$$-\bar{x}\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\pi r^3\sin^3\theta\,d\theta=-\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\pi r^4\cos\theta\sin^3\theta\,d\theta$$

$$\bar{x}\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=r\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$-\frac{\bar{x}}{3}\left[\sin^2\theta\cos\theta+2\cos\theta\right]_0^{\frac{\alpha}{2}}=\left[\frac{r}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\bar{x}=\frac{3}{4}r\frac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{2-3\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^3\frac{\alpha}{2}}$$

習 題

1. 試用積分法證明直圓錐之曲面之形心與底面之距離，等於全高之 $\frac{1}{3}$。

2. 試求圖 244 所示圓錐墩(frustum of a cone)之形心。(假定圓錐墩係將有蔭線之梯形繞 X 軸迴轉而產生。) 答：$\bar{x}=4.184$〔吋〕.

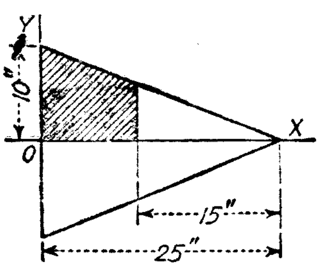


圖 244.

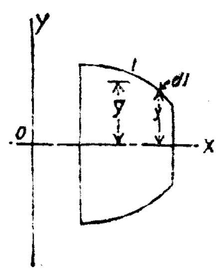


圖 245.

78. 巴柏斯與格爾定納斯定理.

I. 任一平面曲線繞在其平面上而不相交之軸迴轉所產生之迴轉面之面積 S，等於此曲線之長度及其形心軌跡之長度之積.

在圖 245 內，命 l 爲母曲線之長度. dl 爲此曲線上之微長度，y 爲 dl 與迴轉軸 OX 間之距離. 因 dl 繞 OX 迴轉而產生之微面積爲 $2\pi y\,dl$，故得面積 S 爲

$$S = 2\pi \int y \, dl = 2\pi \bar{y} l \tag{9.5}$$

II. 任一平面繞在其平面上不相交之一軸旋轉,所產生之迴轉體之體積 V,等於此平面之面積,與其形心軌跡之長度之積.

在圖 246 內,命 A 爲母面積. dA 爲與 X 軸相距 y 之微面積. 此微面積繞 X 迴轉而產生之微環之體積,爲 $2\pi y \, dA$. 故得整個迴轉體之體積 V 爲

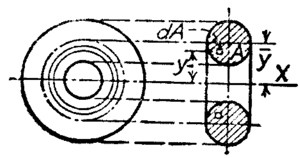


圖 246.

$$V = 2\pi \int y \, dA = 2\pi \bar{y} A \tag{9.7}$$

以上兩定理,謂之巴柏斯(Pappus)與格爾定納斯(Guldinus)定理.

例 題 1

試應用定理 I,求圓球之面積.

【解】 圓球面可認爲半圓圓弧 ABC,繞經過其兩端之直徑 AC 迴轉而成之面(圖 247). 圓弧之長度爲 πr,其形心與 X 軸間之距離爲 $\frac{2r}{\pi}$,(見第 76 節,例題 1),故據(9.6)式,得

$$S = 2\pi \bar{y} l = 2\pi \frac{2r}{\pi} \pi r = 4\pi r^2$$

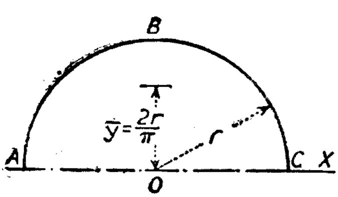


圖 247.

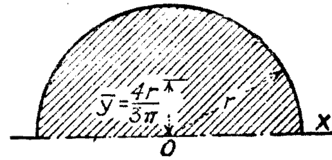


圖 248.

例 題 2

試應用定理 II,求圓球之體積.

【解】 圓球之體積，可認為半圓面積繞半圓之直徑迴轉而成，如圖248所示。半圓之面積為 $\frac{\pi r^2}{2}$。其形心與旋轉軸 X 間之距離為 $\frac{4r}{3\pi}$，(見第76節，例題2)。故據(9.6)式，得

$$V = \underline{2\pi \bar{y} A} = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

習 題

1. 應用定理I，試求圓錐體底面之面積。假定 r 為圓錐底面之半徑，h 為圓錐之高度，l 為其斜高。再求其曲面之面積。

答：πr^2；πrl。

2. 應用定理II，求圓錐之體積。 答：$\pi r^2\frac{h}{3}$

3. 以 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 橢圓形之一半，繞 X 軸迴轉而成之迴轉橢圓(ellipsoid of revolution)之體積為 $\frac{4}{3}\pi ab^2$。應用定理II，求 $\bar{y}$ 之值。 答：$\frac{4b}{3\pi}$

4. 試求將圖324之陰面積ABC繞軸迴轉，所成迴轉體之體積。 答：113.1〔吋^3〕。

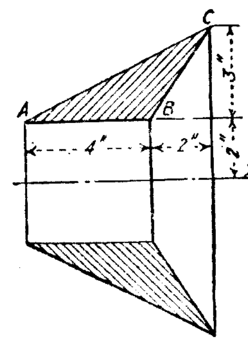


圖 249.

79. 合成線，面，與體之形心．

由幾個已知其形心位置之簡單部分合成之線，面，或體之形心位置，可以應用第53節或第73節之理論求之。

合成線，面，或體關於一平面之一次矩，等於其各部分關於同一平面之一次矩之總和。

若將(9.4)(9.3)(9.2)內之積分式，改為 Σ，得

$$l\bar{x} = \Sigma\, l_i x_i \tag{9.8}$$

$$A\bar{x} = \Sigma\, A_i x_i \tag{9.9}$$

$$V\bar{x} = \Sigma\, V_i x_i \tag{9.10}$$

上式中 i 為一任意正整數。對於 $\bar{y}$ 與 $\bar{z}$ 可有同樣之公式。

若一線段，面積，或體積，從另一線段，面積，或體積中取去．則在(9.7)，(9.8)，(9.9)諸式中，取去之線段，面積，或體積，作為負值．

例題 1

試求圖 250 所示三線段之形心．

【解】

$$12\bar{x} = 3 \times 0 + 4 \times 2 + 5 \times 5.25$$

$$\bar{x} = 2.85 \text{〔吋〕}$$

$$12\bar{y} = 3 \times 1.5 + 4 \times 0 + 5 \times 2.165$$

$$\bar{y} = 1.28 \text{〔吋〕}.$$

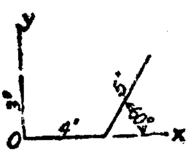


圖 250.

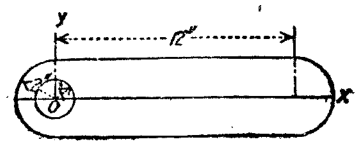


圖 251.

例題 2

試求圖 251 所示面積之形心．

【解】 將取去之圓孔之中心作為原點，據對稱關係，得

$$\bar{y} = 0$$

$$\text{原有之總面積} = 60.56 \text{〔吋}^2\text{〕}$$

$$\text{圓孔之面積} = 3.14 \text{〔吋}^2\text{〕}$$

$$\text{餘下之面積} = 57.42 \text{〔吋}^2\text{〕}$$

$$57.42\bar{x} = 60.56 \times 6 - 3.14 \times 0$$

$$\bar{x} = 6.34 \text{〔吋〕}.$$

習題

1. 假定圖 250 內之 3〔吋〕長線段沿軸 Z 自點 O 向前方伸出，5〔吋〕長之線段與軸 Y 平行．試求其形心．

答：$\bar{x} = 2.33$〔吋〕；$\bar{y} = 1.04$〔吋〕；$\bar{z} = 0.375$〔吋〕．

2. 假定圖 251 所示面積，在 Y 軸以左之部分，向前彎轉，使沿 YZ 平面，試求其形心。 答：$\bar{y}=0$；$\bar{x}=6.42$〔吋〕；$\bar{z}=0.081$〔吋〕.

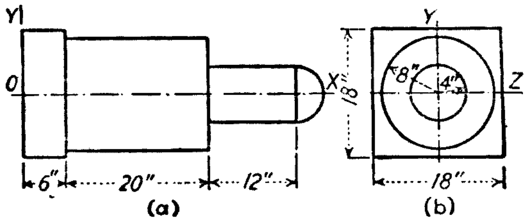


圖 252.

3. 試求圖 252 所示體積之形心。此體積包括一個平行六面體，兩個圓柱，及一半圓形。 答：14.18〔吋〕.

4. 假定有一圓錐，從圖 252 所示之體積中割去。圓錐之底面，在 YZ 平面上，其軸沿 X 軸，其底面之半徑爲 8〔吋〕，高爲 30〔吋〕。試求餘下體積之形心位置。 答：17.04〔吋〕.

80. 合成重量之重心.

第 79 節內所述之原理，亦可用以求出均質合成體之重心。因均質體之重心，與其體積之形心相合。若合成體各部分之單位重量（卽其單位體積之重量）不同，則在一次矩方程式內所用之重量，須爲各體積與其對應之單位重量之積。一般而論，此種合成重量之重心，並非其體積之形心。

習 題

1. 試求圖 252 之合成體之重心。假定平行六面體及長 32〔吋〕半徑 4〔吋〕之中心小圓柱體，均用鋼製成。大圓柱體之其餘部分及半球體，均以黃銅製成。鋼之重量爲 490〔磅/呎³〕，黃銅之重量爲 534〔磅/呎³〕。

答：14.3〔吋〕.

2. 鋼製圓柱，直徑 4〔吋〕，長 2〔呎〕。在圓柱之一端，鑽一直徑 3〔吋〕之同心之圓柱孔，然後以鉛灌入，使其重心自其原有位置，移動 1/2〔吋〕。若

鉛之重量為 706〔磅/呎^3〕,試求圓柱孔之深度及所需鉛之重量。

答：5.56〔吋〕; 16.09〔磅〕; 或 17.45〔吋〕; 50.35〔磅〕.

81. 據實驗求重心法. 不規則體之重心,可據實驗求之。若將物體自由懸掛,在物體上畫出經過懸點之兩相交鉛直平面。 因在任一平面內,均含有重心,故重心必在此兩平面之相交線上。若換一懸點,再將物體自由懸掛。經過懸點再畫一鉛直平面。 此鉛直平面與以前決定之二面之交線之交點,即為物體之重心。

如物體可置刄口上而使其平衡。 則其重心之位置不難求得。先將物體置於某一位置時,使其平衡。 在此物體上將刄口之直線畫出。 若將物體轉動,換一位置,再使其平衡,並將第二刄口之直線畫出。物體之重心,即在經過此兩直線之交點之鉛直線上。

形心與重心之總習題

1. 有一閉合曲線,原來形狀為一直徑 20〔吋〕之圓形。 若將其彎成一半圓弧及一直徑,如圖 253 所示。試求其重心之位置。 答：$\bar{x} = 4.75$〔吋〕.

2. 若將習題 1 內之線,在 O 點將其切斷。上部分 OA 以點 A 為中心,在平面 XY 上以順時針向轉過 60°. 下部分 OB 以點 B 為中心,向前轉動,使與 Z 軸平行。試求其重心之位置。

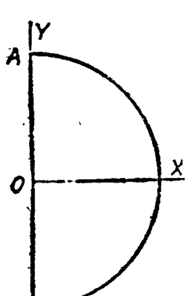


圖 253.

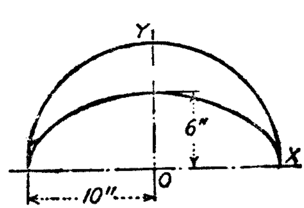


圖 254.

答：$\bar{x} = 3.72$〔吋〕；$\bar{y} = -0.595$〔吋〕；$\bar{z} = 1.19$〔吋〕.

3. 試求橢圓面積之一象限之形心。橢圓方程式爲 $x^2 + 2.25\, y^2 = 9$.

答：$\bar{x} = 1.274$；$\bar{y} = 0.849$.

4. 試求圖 254 所示面積之形心，上邊之曲線爲直徑 10〔吋〕之半圓弧，下邊之曲線爲半個橢圓曲線。　答：$\bar{y} = 6.8$〔吋〕

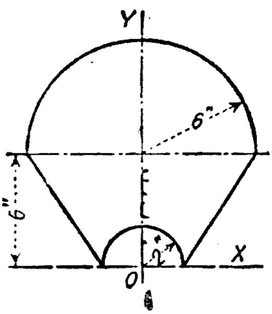


圖 255.

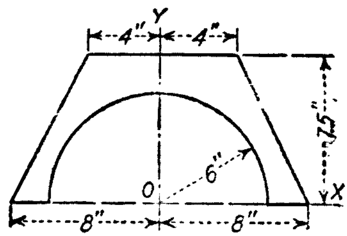


圖 256.

5. 試求圖 255 所示面積之形心。　答：$\bar{y} = 6.58$〔吋〕.

6. 試求圖 256 所示面積之形心。　答：$\bar{y} = 4.66$〔吋〕.

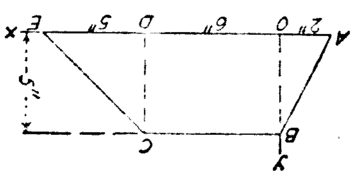


圖 257.

7. 試求圖 257 所示梯形金屬片之重心。答：$\bar{x} = 3.84$〔吋〕；$\bar{y} = 2.19$〔吋〕.

8. 若於習題 7 內，假定從梯形面積內，切去一半圓形，其中心在 OD 之中點，半徑爲 3〔吋〕。試求其重心。　答：$\bar{x} = 4.20$〔吋〕；$\bar{y} = 2.58$〔吋〕.

9. 若於習題 8 內，三角形 AOB 以 BO 爲軸向後彎，使與平面 XY 垂直。三角形 CDE 以 CD 爲軸向前彎，亦使與平面 XY 垂直。試求其重心。

答：$\bar{x} = 3.68$〔吋〕；$\bar{y} = 2.58$〔吋〕；$\bar{z} = 0.525$〔吋〕.

10. 試求圖 258 所示面積之形心。　答：$\bar{y} = -0.605$〔呎〕.

11. 試求圖 259 所示新月形之形心。　答：$\bar{x} = 6.85$〔吋〕.

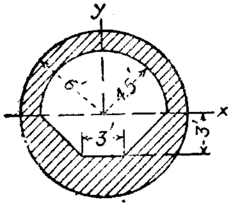


圖 258.

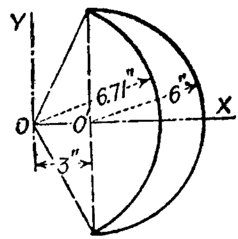


圖 259.

12. 試求圖 260 所示調速器之球與桿之重心。鋼桿重 0.284〔磅/吋^3〕。鑄鐵球重 0.260〔磅/吋^3〕。　　答: $\bar{x} = 13.22$〔吋〕; $\bar{y} = -13.22$〔吋〕.

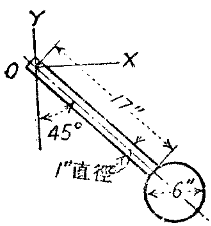


圖 260.

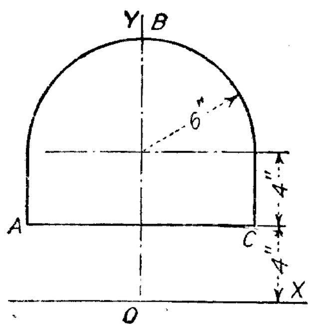


圖 261.

13. 試求圖 261 內面積 ABC 繞 X 軸迴轉而成之迴轉體之體積,及此迴轉體表面之面積。　　答: 5559〔吋^3〕; 2007〔吋^2〕.

14. 設飛輪之直徑長 10〔呎〕,其邊緣之截面見圖 262. 試求此邊緣之表面

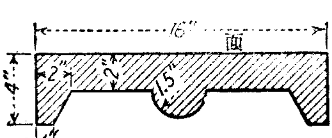


圖 262.

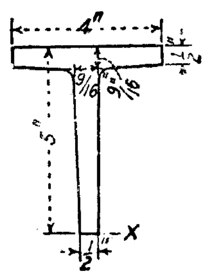


圖 263.

積及體積。 答：15,736〔吋²〕；15,296〔吋³〕.

15. 有一鋼製圓柱，直徑6〔吋〕，高12〔吋〕。 其上端有一同心之圓錐形孔，直徑5〔吋〕，深10〔吋〕。孔內灌以鉛。 若鋼之重量爲0.284〔磅/吋³〕；鉛之重量爲0.409〔磅/吋³〕。試求自下底量起之重心位置。 答：6.28〔吋〕.

16. 一鋼塊8〔吋〕平方，12〔吋〕高。上底鑽有一圓柱形孔，孔深6吋。試求使此鋼塊之重心與其下底相距5〔吋〕時，圓柱孔之直徑應等於若干。

答：6.38〔吋〕.

17. 設T梁之凸緣寬8〔吋〕，深1.5〔吋〕。 其幹寬1.5〔吋〕，深10〔吋〕。求其截面之形心與截面之幹之下邊間之距離。 答：7.56〔吋〕.

18. 試求圖263所示標準T梁之截面之形心之$\bar{y}$。 圓角部分不計。

答：3.44〔吋〕.

19. 圖264表示半個標準24〔吋〕79.9〔磅〕之I梁所成之T截面。 若不計其內外圓角部分，試求$\bar{y}$之值。 答：8.69〔吋〕.

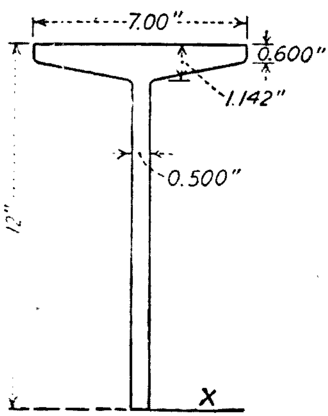


圖 264.

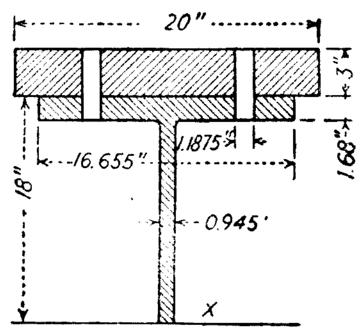


圖 265.

20. 圖265所示之T截面，由半個36〔吋〕300〔磅〕之寬凸緣之輾成梁，及2〔吋〕×3〔吋〕之鈑所組成。 上有 $1\frac{3}{16}$〔吋〕鉚釘孔二個。 若不計其圓角部分，試求$\bar{y}$之值。 答：17.0〔吋〕.

21. 試求圖266所示標準角截面之形心位置。不計其圓角。

答：$\bar{x}=2.08$〔吋〕；$\bar{y}=1.08$〔吋〕.

22. 試求圖 267 所示組成 T 截面(built-up T section)之形心。

答：8.98〔吋〕.

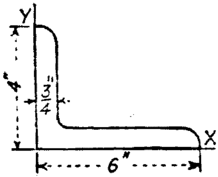


圖 266.

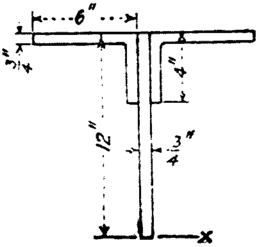


圖 267.

23. 試求圖 268 所示結構用 U 截面之形心。不計算其圓角部分。

答：$y = 0.70$〔吋〕

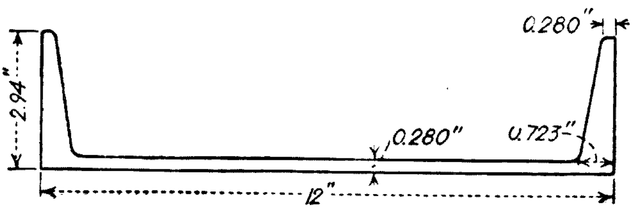
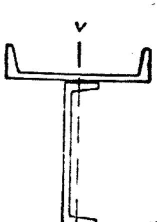


圖 268.

24. 若將圖268所示之兩個 U 梁銲成圖269所示之柱。試求其形心位置。

答：$\bar{y} = 9.35$〔吋〕.



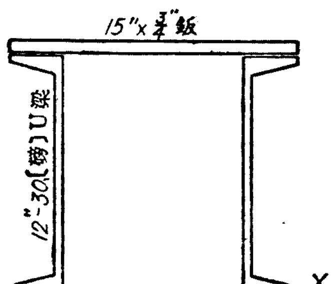


圖 269.　　圖 270.

25. 圖 270 示一橋梁端弦 (end chord) 之截面，每一個 U 截面之面積爲 8.79〔吋^2〕。 試求截面之形心。

答：$\bar{y} = 8.48$〔吋〕.

第十章

面積之慣矩

82. 慣矩及迴轉半徑之定義. 在材料力學中，常遇到$\int x^2\,dA$，$\int y^2\,dA$，$\int \varrho^2\,dA$形式之積分. 在$\int x^2\,dA$式內，dA表示任一微面積. 此微面積中之任何部分與一參攷軸間之距離均爲x，此參攷軸名曰**慣軸**(inertia axis). 微面積之和卽等於其總面積A. 在適當限度內之積分$\int x^2\,dA$，謂之面積A關於軸Y之**慣矩**(moment of inertia)(1).

一平面面積關於任一軸之**慣矩**，卽等於此平面之各個微分面積，與其至慣軸之距離平方之積之總和.

所用之慣矩僅有兩種，一種在面積之平面內，一種與面積垂直. 一面積關於在其平面內之軸——軸X或軸Y——之慣矩，謂之**直角慣矩**(rectangular moment of inertia). 通常以I表示之. 如欲注明參攷軸時，則在I之右下角，標以小字，例如I_X，I_Y.

---

(1) 慣矩之名詞，因沿用已久，不易更動. 其實，稱爲面積二次矩 (second moment of area)，質量二次矩(second moment of mass)等，更爲適當. 對於面積而言，慣矩之名詞，根本不通. 因面積無慣性，故慣矩之名，並不能符其實.

因轉動與移動之類似關係，故歐拉氏(Euler)最初用此名詞以表示質量二次矩.

$$\frac{\text{力}}{\text{質量(或慣性)}}=\text{加速度}\qquad\text{(移動)}$$

$$\frac{\text{力矩}}{\int r^2\,dM\text{(或慣矩)}}=\text{角加速度}\quad\text{(轉動)}$$

依照現在之定義，慣性與質量，並非同義. 慣性不過爲物質之一性質，其量與質量成正比而已. 因無更爲適當之名詞，對於面積之$\int x^2 dA$，向來亦稱之爲慣矩.

$$I_X = \int y^2\,dA \tag{10.1}$$

$$I_Y = \int x^2\,dA \tag{10.2}$$

一面積關於與其平面垂直之軸之慣矩，謂之**極慣矩** (polar moment of inertia) 通常以 J 表示之.

$$J = \int \rho^2\,dA \tag{10.3}$$

$y^2\,dA$, $\rho^2\,dA$ 諸式，均為面積與距離之平方之積. 故面積慣矩之維，為長度之四次羃. 在用數字計算時，長度之單位為〔吋〕，故面積慣矩之單位為〔吋⁴〕.

有時面積慣矩，以總面積與一距離之平方之積表示. 即

$$I_X = \int y^2\,dA = k^2 A \tag{10.4}$$

k 謂之**迴轉半** (radius of gyration)[1]. 假想將總面積集中於一點，而不變其慣矩，則此點與慣軸間之距離，即等於迴轉半徑 k. 換言之，若將總面積分為許多大小相等之微面積，則 k^2 為 y^2 之平均值.

k 之值，普通由下式

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{10.5}$$

求得之.

83. 幾種簡單圖形之慣矩. 應用慣矩算式時，通常可以選擇若干種之微面積 dA. 但有一必要條件，即所選微面積之所有部分，與慣軸間之距離 (x, y, 或 ρ)，必須相同. 用直角坐標時之微面

(1)【譯注】 部頒物理學名詞，稱 radius of gyration 為迴轉半徑，部頒機械工程名詞內，則稱之為環動半徑. 本書內兩種譯名混用.

積，可用 $dx\,dy$，但須積分兩次。同理，在用極坐標時，可用 $\rho\,d\theta\,d\rho$ 作為微面積，但亦須積分兩次。 有時可以利用較大之微面積，如下例所述。

例 題 1

試求底邊 b，高 h 之長方形，關於其底邊之慣矩及迴轉半徑算式

【解】 圖 271 表示此長方形。微面積可用 $dx\,dy$，但用 $b\,dy$，則更簡單。因此時祇須積分一次，並且此微面積 dA 上之所有各點與慣軸 X 間之距離，均等於 y.

$$I_X = \int y^2\,dA$$

y 之積分極限為 0 與 h，故得

$$I_X = b\int_0^h y^2\,dy = \frac{b}{3}\Big[y^3\Big]_0^h = \frac{1}{3}bh^3$$

$$k = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{3bh}} = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0.577h.$$

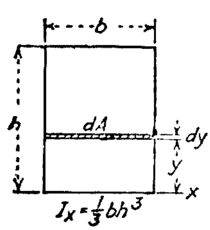


圖 271.

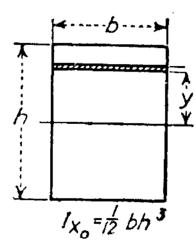


圖 272.

例 題 2

試求一長方形關於平行於其底邊之**形心軸**(centroidal axis)(1)之慣矩及其迴轉半徑之算式.

【解】 圖 272 表示此長方形。與例題 1 相同，命 $dA = b\,dy$. y 之積分極限為 $-\frac{h}{2}$ 與 $+\frac{h}{2}$.

---

(1)【譯註】 任何穿過形心之慣軸，謂之形心軸.

$$I_{X_0} = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy = \frac{b}{3}\Big[y^3\Big]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{I_{X_0}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

例　題　3

試求底邊 b，高 h 之三角形，關於其底邊之慣矩及其迴轉半徑。

【解】 圖 273 表示此三角形。

$$I_X = \int y^2\,dA$$

$$dA = u\,dy$$

據相似三角形，得

$$\frac{u}{b} = \frac{h-y}{h}$$

即

$$u = b - \frac{b}{h}y$$

y 之積分極限為 0 與 h.

$$I_X = \int_0^h by^2\,dy - \int_0^h \frac{b}{h}y^3\,dy = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$k = \sqrt{\frac{bh^3}{6bh}} = \frac{h}{\sqrt{6}}$$

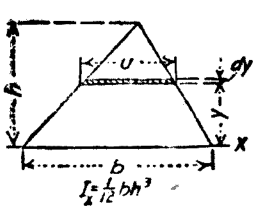


圖 273.

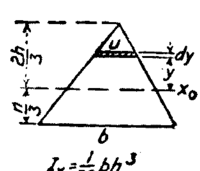


圖 274.

例　題　4

試求底邊 b，高 h 之三角形，關於與底邊平行之形心軸之慣矩及

迴轉半徑。

【解】　圖 274 表示此三角形。

$$I_{X_0} = \int y^2\,dA$$

$$dA = u\,dy$$

據相似三角形，得

$$\frac{u}{b} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{h}$$

$$u = \frac{2}{3}b - \frac{b}{h}y$$

y 之積分極限為 $-\frac{1}{3}h$ 與 $+\frac{2}{3}h$.

$$I_{X_0} = \int_{-\frac{1}{3}h}^{+\frac{2}{3}h} y^2\left(\frac{2}{3}b - \frac{b}{h}y\right)dy = \frac{2}{9}b\left[y^3\right]_{-\frac{1}{3}h}^{+\frac{2}{3}h} - \frac{b}{4h}\left[y^4\right]_{-\frac{1}{3}h}^{+\frac{2}{3}h}$$

$$= \frac{2}{9}b\left(\frac{8}{27}h^3 + \frac{1}{27}h^3\right) - \frac{b}{4h}\left(\frac{16}{81}h^4 - \frac{1}{81}h^4\right)$$

$$= \frac{1}{36}bh^3$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{bh^3}{18bh}} = \frac{h}{\sqrt{18}}$$

例　題　5

試求半徑 r 之圓，關於經過其中心之軸之極慣矩與迴轉半徑。

【解】

$$J_0 = \int \varrho^2\,dA$$

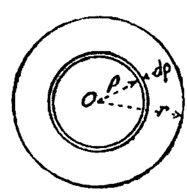


圖　275.

圖 275 所示之微面積，為寬等於 $d\varrho$ 之環形。 因此環形上各點與慣軸間之距離，均等於 ϱ. ϱ 之積分極限為 0 與 r.

$$dA = 2\pi\varrho\,d\varrho$$

$$J_0 = 2\pi\int_0^r \varrho^3\,d\varrho = 2\pi\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^r = \frac{1}{2}\pi r^4$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{\pi r^4}{2\pi r^2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

例 題 6

試求半徑 r 之圓形關於其直徑之慣矩及迴轉半徑之算式.

【解】 設所取微面積如圖 176 所示.

$$dA = x\,dy$$

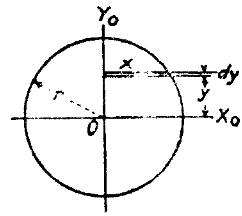


圖 176.

對於一個象限,

$$I_{X_0} = \int_0^r y^2 x\,dy$$

$$x = (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

對於整個圓形.

$$I_{X_0} = 4\int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} y^2\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{8}(2y^2 - r^2)(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{r^4}{8}\sin^{-1}\frac{y}{r}\right]_0^r$$

$$= \frac{1}{4}\pi r^4$$

$$k = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2}.$$

習 題

1. 試求三角形關於經過其頂點並與底邊平行之軸之慣矩及迴轉半徑.

答: $I = \frac{1}{4}bh^3$; $k = \frac{h}{\sqrt{2}}$

2. 以 $\rho\,d\theta\,d\rho$ 作爲微面積,試求一圓關於其直徑之慣矩.

$$\left(\int \sin^2\theta\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)$$

3. 試求橢圓關於其長軸之慣矩及迴轉半徑. 假定橢圓方程式爲 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

答: $\frac{1}{4}\pi ab^3$; $k = \frac{b}{2}$

84. 平行軸之移軸公式. 求一面積關於在其平面內之一所設軸之慣矩時,若已知其關於他一平行軸之慣矩,則用移軸公式,比直

積分,容易得多。 在圖 277 內,命 X_0 為形心軸, X_1 為任何與形心軸平行之軸. X_0, X_1 兩軸,均在面積 A 之平面內,其間之距離為 d.

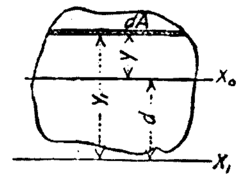


圖 277.

$$I_{X_1} = \int y_1^2\, dA$$

$$y_1^2 = (y + d)^2 = y^2 + 2yd + d^2$$

$$I_{X_1} = \int y^2\, dA + 2d\int y\, dA + d^2\int dA$$

因 $\int y\, dA = \bar{y}A$,又因關於形心軸之 $\bar{y} = 0$. 故 $2d\int y\, dA = 0$.

故

$$\underline{I_{X_1} = I_{X_0} + Ad^2} \qquad (10.6)$$

(10.6)式,可以說明如下:一面積關於在其平面內任一軸之慣矩,等於此面積關於平行之形心軸之慣矩,加上此面積與兩軸間距離平方之積.

注意移軸公式 (10.6)祇表示一面積關於其形心軸之慣矩及其他任一平行軸之慣矩間之關係.

若(10.6)式之兩邊,均除以面積 A,則得

$$\frac{I_{X_1}}{A} = \frac{I_{X_0}}{A} + d^2$$

故

$$k_X^2 = k_{X_0}^2 + d^2 \qquad (10.7)$$

其更普偏之算式為:

$$\underline{k^2 = k_0^2 + d^2} \qquad (10.7a)$$

例　題

試求半圓關於與其直徑邊線平行之切線之慣矩。

【解】 圖 278 示一半圓形。所求之慣矩係關於 X_2 軸而言。X_1 為半圓形之直徑邊線。X_0 與 X_1 平行。半圓形之 I_{X_1} 等於整個圓關於其直徑之慣矩之半。

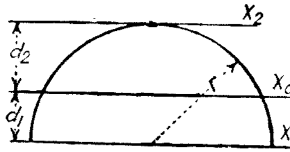


圖 278.

$$I_{X_1}=\frac{1}{8}\pi r^4$$

據(10.6)之移軸公式，得

$$I_{X_1}=I_{X_0}+Ad_1^2$$

$$\frac{1}{8}\pi r^4=I_{X_0}+\frac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$I_{X_0}=\frac{1}{8}\pi r^4-\frac{8}{9\pi}r^4$$

再應用(10.6)式，得

$$I_{X_2}=I_{X_0}+Ad_2^2$$

$$=\frac{\pi r^4}{8}-\frac{8r^4}{9\pi}+\frac{\pi r^2}{2}\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$=\frac{5\pi r^4}{8}-\frac{4r^4}{3}$$

習 題

1. 試求一圓關於其切線之慣矩。

答：$\frac{5}{4}\pi r^4$.

2. 已知三角形關於其底邊之 $I=\frac{1}{12}bh^3$. 試求其關於經過頂點且與底邊平行之軸之慣矩。

3 試求圖 279 所示半圓之 I_X 之值。

答：$\frac{5\pi r^4}{8}+\frac{4\pi^4}{3}$

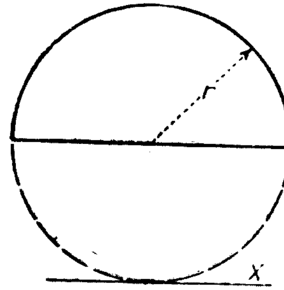


圖 279

85. 極慣矩. 圖 280 表示任一之平面面積，其關於經過點 O 之

極慣軸之極慣矩爲

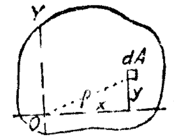


圖 280.

$$J = \int \rho^2 \, dA$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 \, dA + \int y^2 \, dA$$

據(10.1)及(10.2)式，得

$$J = I_X + I_Y \tag{10.8}$$

一面積關於任一軸之極慣矩，與關於在其平面內與極軸相交之任何互成直角之兩軸之慣矩之和相等。

例　　題

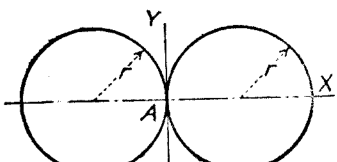


圖 281.

試求圖 281 所示兩圓關於其公切點 A 之極慣矩。

【解】 對於兩圓之

$I_X = \frac{1}{2}\pi r^4$; $I_Y = \frac{5}{2}\pi r^4$

$J = I_X + I_Y = 3\pi r^4$

習　　題

1. 試求底邊 b 高 h 之長方形，關於其形心之極慣矩。

答： $J = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$

2. 求證正方形關於在其平面內之任一形心軸之慣矩爲 $b^4/12$。b 爲其邊長。

3. 已知一圓關於經過其中心之軸之 $J = \frac{1}{2}\pi r^4$. 求證其關於一直徑之 $I_X = \frac{1}{4}\pi r^2$.

86. 平行之極軸之移軸公式. 一面積關於形心軸之極慣矩，及其關於任一平行軸之極慣矩之間之關係，與第 84 節所述平面面積

關於在其平面內兩平行軸之慣矩間之關係相似。

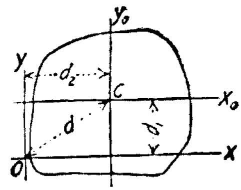


圖 282.

命 X_0, Y_0 爲其形心軸，X, Y 爲任何之平行軸。C 爲形心，O 爲原點，見圖282。此等之軸與點，假定均在平面面積內。據(10.6)式

$$I_X = I_{X_0} + Ad_1^2$$

同理

$$I_Y = I_{X_0} + Ad_2^2$$

命 Z 爲經過點 O，並與 X, Y 垂直之軸。 Z_0 爲經過點 C 並與 X_0, Y_0 垂直之軸。將以上兩式相加，並據(10.8)式，命

$$J_0 = I_X + I_Y$$

$$J_C = I_{X_0} + I_{Y_0}$$

又因，

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

故得

$$J_0 = J_C + Ad^2 \qquad (10.6)$$

上式與(10.6)式相似。 故一面積關於任一軸之極慣矩，等於其關於形心之極慣矩，加上此面積與兩軸間距離平方之積。

習 題

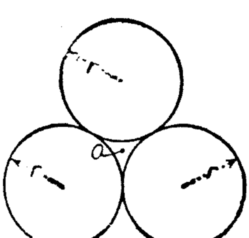


圖 283.

1. 試求圖 283 所示三個圓關於點 O 之極慣矩。點 O 與三個圓心間之距離相等。

答：$5.5\pi r^4$

2. 試求圖 283 所示三個圓關於任一圓之中心之極慣矩。

答：$9.5\pi r^4$

87. 簡單面積之慣矩之計算. 因任何正負量之平方必爲正量，面積爲正量．故慣矩必爲正量． 於是：一面積在軸之一邊時之慣矩，與將其置於軸之另一邊之對稱位置時之慣矩相等． 故一圓沿直徑切成兩個半圓後，此兩半圓關於任何直徑之慣矩必相等．

在求一面積之慣矩時，以上數節所得之算式，均可應用．就各方法中選擇一方法時，必須選其於計算時最簡單者．

習 題

1. 設長方形闊 16〔吋〕，高 6〔吋〕。 試求其（一）關於與闊邊平行之形心軸之慣矩。（二）關於闊邊之慣矩。（三）關於與闊邊平行且在闊邊外 4〔吋〕之軸之慣矩。 答：（一）288〔吋^4〕；（二）1152〔吋〕^{4}；（三）4992〔吋〕^{4}.

2. 試求直徑 1.2〔吋〕之圓關於其直徑之慣矩及迴轉半徑。

答：0.10179〔吋^4〕； 0.3〔吋〕.

3. 試求直徑 3〔吋〕之圓，關於其圓心之極慣矩。 答：7.955〔吋^4〕.

4. 一長方形之底邊爲 b，高爲 h， 試證明其關於與底邊 b 平行之形心軸之慣矩，與關於與高 h 平行之形心軸之慣矩之比，爲 h^2/b^2.

5. 試求每邊長 3〔吋〕之等邊三角形關於其形心之極慣矩。

答：2.923〔吋^4〕

88. 合成面積之慣矩之計算. 合成面積關於任一軸之慣矩，等於其各部分關於同一軸之慣矩之總和． 例如，圖 284 之梯形 $ABCD$ 關於底邊 AD 之慣矩，等於長方形 $FBCE$，及兩個三角形 ABF 及

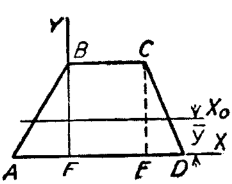


圖 284.

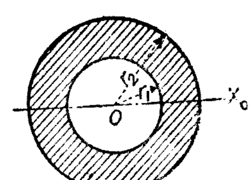


圖 285.

ECD 關於 AD 之慣矩之和。 已知其關於線 AD 之慣矩，則其關於形心軸 X_0 之慣矩，可以用移軸公式求得之。 已知其關於 X_0 軸之慣矩，則亦可求得關於任何其他平行軸之慣矩。

如從一面積中，挖去一面積。 其剩餘面積關於任一所設軸之慣矩，等於原有面積之慣矩，減去被挖去面積之慣矩。例如圖 285 所示之圓環，關於其直徑之慣矩，即等於大圓關於同一軸之慣矩，減去小圓關於同一軸之慣矩。

$$I_X = \tfrac{1}{4}\pi r_2^4 - \tfrac{1}{4}\pi r_1^4$$

習　　題

1. 在圖 284 內，命 $BC = 8$〔吋〕，$BF = 10$〔吋〕，$AF = 6$〔吋〕，$ED = 4$〔吋〕。試求梯形關於底邊 AD 之慣矩。求 $\bar{y}$，再用移軸公式求 I_{X_0}。

答：$I_X = 3500$〔吋^4〕；$\bar{y} = 4.359$〔吋〕；$I_{X_0} = 1029$〔吋^4〕。

2. 試求圖 284 所示梯形關於 BC 軸之慣矩。再用移軸公式求 I_{X_0}。

3. 試用第三種方法求圖 284 之梯形之慣矩：先求每一部分關於其本身與 X_0 平行之形心軸之慣矩，再應用移軸公式，將其移至 X_0 軸，然後相加。

4. 假定圖 285 之 $r_1 = 5$〔吋〕，$r_2 = 9$〔吋〕。試求 I_{X_0} 之值。

答：4662〔吋^4〕。

5. 試求圖 285 之上半圓環之形心。 並求此半圓環關於與其直徑平行之形心軸之慣矩。

答：4.573〔吋〕；491〔吋^4〕。

6. 假定在圖 285 內，祗將內圓之下半部分挖去。 試求其新形心軸，並求關於此軸之 I_{X_0}。

答；$\bar{y} = 0.387$〔吋〕；$I_{X_0} = 4876$〔吋^4〕。

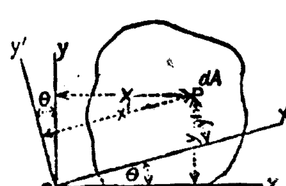


圖　286.

89. 關於斜軸之慣矩。

在圖 286 內，命 X,Y 為任何兩直交軸。 關於此兩軸之慣矩為

$$I_X = \int y^2\,dA, \qquad I_Y = \int x^2\,dA$$

X', Y' 爲與原有兩軸成 θ 角之兩直交軸．則

$$I_{X'} = \int (y')^2\,dA, \quad I_{Y'} = \int (x')^2\,dA$$

據圖上得

$$\begin{cases} y' = y\cos\theta - x\sin\theta \\ x' = x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases} \tag{10.10}$$

若將(10.10)式平方，代入 I_X' 式，得

$$I_X' = \int y^2\cos^2\theta\,dA - 2\int xy\cos\theta\sin\theta\,dA + \int x^2\sin^2\theta\,dA$$

積分之，得

$$I_X' = \cos^2\theta\cdot I_X + \sin^2\theta\cdot I_Y - 2\cos\theta\sin\theta\int xy\,dA \tag{10.11}$$

因

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

將諸值代入(10.11)式，得

$$I_X' = \frac{I_X+I_Y}{2} + \frac{I_X-I_Y}{2}\cos 2\theta - \sin 2\theta\int xy\,dA \tag{10.11a}$$

同理，可求得

$$I_Y' = \frac{I_X+I_Y}{2} - \frac{I_X-I_Y}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta\int xy\,dA \tag{10.12}$$

將(10.11a)，(10.12)兩式相加，得

$$I_X + I_Y = I_X' + I_Y' \tag{10.13}$$

此結果與第 85 節之結果相同．

原來極煩複之計算，用(10.11a)及(10.12)兩式後，可以使之簡化．設已知一面積關於在其平面內任何兩直交軸之惯矩，則不難求得

關於在同一平面內，經過兩軸交點之任何斜軸之慣矩.

例　題

試求闊 6〔吋〕，高 2〔吋〕之長方形，關於經過左下角，並與底邊成 15° 角之軸之慣矩，如圖 287 所示。 並求 $I_{Y'}$.

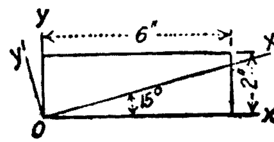


圖 287.

【解】

$$I_X = 16;\ I_Y = 144$$

$$\int xy\,dA = \int_0^6\int_0^2 x\,dx\,y\,dy = 36$$

據(10.11a)及(10.12)兩式，得

$$I_{X'} = 80 - 64\cos 30° - 36\sin 30°$$
$$= 6.58\ [\text{吋}^4]$$
$$I_{Y'} = 80 + 64\cos 30° + 36\sin 30°$$
$$= 153.42\ [\text{吋}^4]$$

習　題

1. 用本節之方法，試求每邊 6〔吋〕之正方形關於其對角線之慣矩。

答：108〔吋^4〕.

2. 試求闊 8〔吋〕，高 6〔吋〕之長方形，關於其對角線之慣矩。

答：184.32〔吋^4〕.

3. 試求圖 287 所示之長方形，關於經過點 O 並與 X 軸成 $-7°30'$ 角之軸之慣矩。

答：27.49〔吋^4〕.

90. 慣積. $\int xy\,dA$ 與慣矩相類，稱為面積之**慣積** (product of inertia)，以 H 代表之。 自上式之形式，可見慣積係關於一雙直角軸而言。

若兩軸中，有任一軸為面積之對稱軸時，則關於兩軸之慣積為

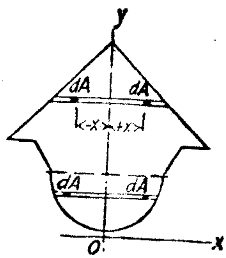


圖 288.

零.

【證明】 命圖 288 為關於軸 Y 對稱之面積.

$$H = \int xy\,dA \qquad (10,14)$$

在求 $xy\,dA$ 之和時,關於每 $(+x)\,y\,dA$ 項,必有大小相等,符號相反之 $(-x)\,y\,dA$ 項與之相消,故對於軸 Y 為對稱之圖形

$$H = \int xy\,dA = 0. \qquad (10.15)$$

同理,關於軸 X 為對稱之圖形之慣積 $H = 0$.

91. 慣積之移軸公式 已求得關於一雙直角形心軸之慣矩後,不難求得關於任何其他與原有軸平行之一雙直角軸之慣積.

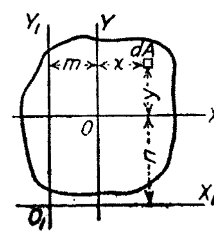


圖 289.

在圖 289 內,命 OX, OY 為一雙直交形心軸. O_1X_1, O_1Y_1 為在同一平面內其他任何一雙與原有軸平行之軸. (x, y) 為微面積 dA 關於原有形心軸之坐標. $(x+m,\ y+n)$ 為 dA 關於兩新軸之坐標.

$$H_{01} = \int (m+x)(n+y)\,dA$$

$$= \int mn\,dA + \int my\,dA + \int nx\,dA + \int xy\,dA$$

$$H_{01} = mnA + H_0 \qquad (10.16)$$

H_0 為面積關於原有軸(即形心軸)之慣積.

(10.16)式與慣矩之移軸公式(10.6)相似. 所不同者即(10.6)式之 d^2 改為(10.16)式之 mn.

m 與 n 可能爲正或爲負．故 mnA 可能爲正或爲負． 若面積之形心,關於 H_{01} 之兩軸而言,在第一或第三象限內,則 mnA 爲正值．若在第二或第四象限內,則爲負值．

由幾個簡單面積合成之一面積,關於一雙軸之慣積,等於其各部分之面積關於同一雙軸之慣積之代數和． 例如,假定 H_{XY} 爲圖 290 所示之角截面之慣積． 並假定角截面可以分爲 M,N 兩長方形．故得

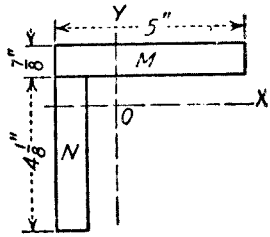


圖　290.

$$\text{角截面之 } H_{XY} = M \text{ 之 } H_{XY} + N \text{ 之 } H_{XY}$$

例　　題

試求圖 291 所示直角三角形之 H_{01}.

【解】

$$H_0 = \int xy\, dA$$

$$= \int_{-4}^{+2}\int_{-1}^{\frac{x}{2}+1} x\, dx\, y\, dy$$

$$= 4.5\ (\text{吋}^4)$$

$$\cdot\quad H_{01} = H_0 + mnA = +4.5 + 36 = +40.5\ (\text{吋}^4)$$

在此種情形中,用直接積分法,比用移軸方法簡單．

$$H_{01} = \int_0^6\int_0^{\frac{x}{2}} x\, dx\, y\, dy$$

$$= +40.5\ (\text{吋}^4).$$

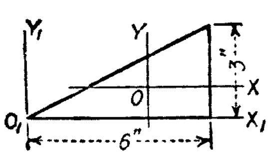


圖　291.

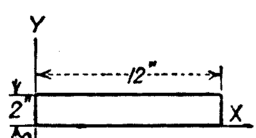


圖　292.

但在 $H_0=0$ 時，即在軸 X 或軸 Y 爲一對稱軸時，則用移軸方法較爲簡單。因在此時

$$H_{0_1}=mnA \tag{10.16a}$$

之故。

習 題

1. 試求圖 292 所示長方形之 H_0. 答：$+144$〔吋^4〕.

2. 在圖 290 內，從角截面之外邊至形心軸間之距離爲 1.57〔吋〕。試求 H_0。 答：$+10.20$〔吋^4〕.

3. 試求 8〔吋〕×6〔吋〕×1〔吋〕之角截面[1]，關於平行於其兩肢之形心軸之慣積。 答：± 32.31〔吋^4〕.

92. 極大慣矩與極小慣矩. 據第 89 節之(10.11a)式，

$$I_X'=\frac{I_X+I_Y}{2}+\frac{I_X-I_Y}{2}\cos 2\theta-H\sin 2\theta \tag{10.11a}$$

可得關於與原有軸 X 成角 θ 之軸 X' 之慣矩.

當 θ 變動時，I_X' 亦隨之變動。欲求 I_X' 爲極大或極小時之 θ 值，祇須求(10.11a)式關於 θ 之微分。再命其一次導數 $\frac{dI_X'}{d\theta}=0$,

$$\frac{dI_X'}{d\theta}=(I_Y-I_X)\sin 2\theta-2H\cos 2\theta$$

命上式爲零，解之得

$$\tan 2\theta=\frac{2H}{I_Y-I_X} \tag{10.17}$$

據(10.17)式，可得 2θ 之兩值，相差 180°；卽 θ 之兩值，相差 90° 一爲極大 I_X' 之角，一爲極小 I_X' 之角。極大慣矩與極小慣矩，統稱爲**主慣矩**(principal moment of inertia)。其對應之軸，謂之

---

(1)〔譯注〕 卽角截面之一肢長 8〔吋〕，一肢長 6〔吋〕，闊 1〔吋〕.

主軸(principal axis)。

若軸 X 或軸 Y 爲一對稱軸，則 $H=0$(見第 90 節)。故據(10.17)式，

$$\tan 2\theta = 0.$$

$$2\theta = 0°，\text{或 } 180°$$

$$\theta = 0°，\text{或 } 90°.$$

故軸 X 與 Y，均爲主軸。

例　題

試求闊 6〔吋〕，高 4〔吋〕之長方形，關於經其左下角兩軸之極大與極小慣矩。如圖 293 所示。

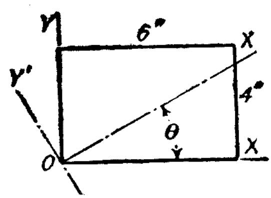


圖　293.

【解】

$$I_Y = \tfrac{1}{3} \times 4 \times 6^3 = 288\ [\text{吋}^4]$$

$$I_X = \tfrac{1}{3} \times 6 \times 4^3 = 128\ [\text{吋}^4]$$

$$H_0 = mnA = 3 \times 2 \times 24 = 144\ [\text{吋}^4]$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \times 144}{288 - 128} = 1.8$$

$$2\theta = 60°57' \quad \text{或} \quad 240°57'$$

$$\theta = 30°28' \quad \text{或} \quad 120°28'$$

當 $\theta = 30°28'$ 時，$\cos 2\theta = 0.4857$，$\sin 2\theta = 0.8742$

$$I_{X'} = \frac{128 + 288}{2} + \frac{128 - 288}{2} \times 0.4857 - 144 \times 0.8742$$

$$= 43.26\ [\text{吋}^4]$$

當 $\theta = 120°28'$ 時，$\cos 2\theta = -0.4857$，$\sin 2\theta = -0.8742$

$$I_{Y'} = \frac{128 + 288}{2} + \frac{128 - 288}{2} \times (-0.4857) + 144 \times 0.8742$$

$$= 372.74\ [\text{吋}^4]$$

故 $\theta = 30°28'$ 時，慣矩爲極小，$\theta = 120°28'$ 時，慣矩爲極大。

習 題

1. 試求圖 292 所示長方形關於經過點 O 之軸之極大與極小慣矩。

答：1170.22〔吋^4〕；13.78〔吋^4〕.（$\Theta=7°13'$ 或 $97°13'$）

2. 試求圖 290 所示角截面關於形心軸之極大與極小慣矩。

答：28.0〔吋^4〕；7.6〔吋^4〕($\Theta=45°$；或 $135°$).

3. 試求 8〔吋〕×6〔吋〕×1〔吋〕之角截面，關於形心軸之極大與極小慣矩。

答：98.32〔吋^4〕；21.28〔吋^4〕.（$\Theta=28°30'$ 或 $118°30'$）

面積之慣矩之總習題

1. 試求圖 294 所示面積關於 X 與 Y 兩軸之慣矩。

答：767〔吋^4〕；65.9〔吋^4〕.

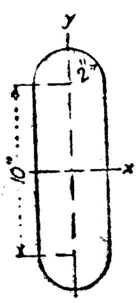


圖 294.

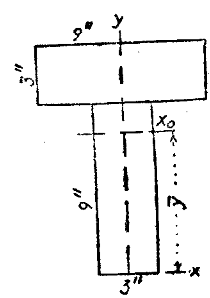


圖 295.

2. 試求圖 295 所示面積之形心軸 X_0 之位置。 試求關於軸 X, X_0 及 Y 之慣矩。

答：7.5〔吋〕；3726〔吋^4〕；688.5〔吋^4〕；202.5〔吋^4〕.

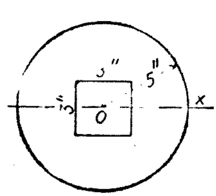


圖 296.

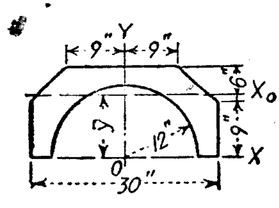


圖 297.

3. 試求圖 296 所示面積之慣矩與迴轉半徑。求證關於在面積平面內之任何形心軸所得者共爲此值。　答：484.15〔吋^4〕；2.64〔吋〕.

4. 試求圖 297 所示面積關於 X, Y 兩軸之慣矩。

答：$I_X = 19,450$〔吋^4〕；$I_Y = 19,450$〔吋^4〕.

5. 試求圖 297 所示面積之 $\bar{y}$ 及 I_{X_0}. 答：$\bar{y} = 9.35$〔吋〕；$I_{X_0} = 3040$〔吋^4〕.

6. 試求圖 298 所示扇形之 I_Y.　答：$I_Y = \frac{r^4}{8}(\alpha + \sin\alpha)$

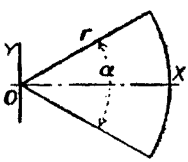


圖 298.

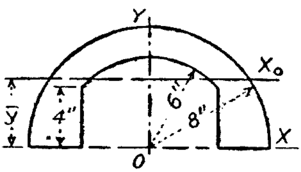


圖 299.

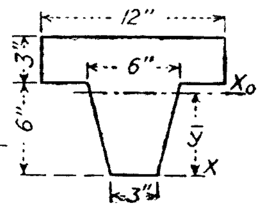


圖 300.

7. 試求圖 298 所示扇形之 I_X.　答：$I_X = \frac{r^4}{8}(\alpha - \sin\alpha)$

8. 試求圖 299 所示面積之 $\bar{y}$, I_X, I_{X_0}.

答：$\bar{y} = 4.01$〔吋〕；$I_X = 1128$〔吋^4〕；$I_{X_0} = 286$〔吋^4〕.

9. 試求圖 299 所示面積之 I_Y.　答：1319〔吋^4〕.

10. 試求圖 300 所示面積之 $\bar{y}$，及 I_{X_0}.

答：$\bar{y} = 5.714$〔吋〕；$I_{X_0} = 372.86$〔吋^4〕.

11. 試求圖 301 所示截面之 $\bar{y}$ 及 I_{X_0}.

答：$\bar{y} = 4.75$〔吋〕；$I_{X_0} = 330.53$〔吋^4〕.

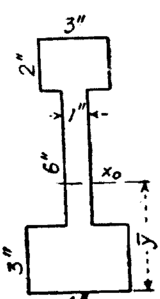


圖 301.

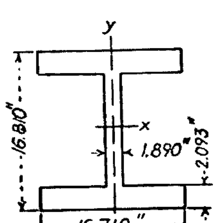


圖 302.

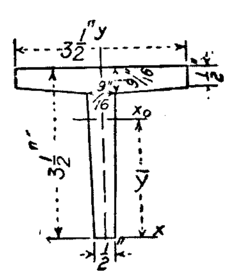


圖 303.

12. 圖 302 表示一標準闊凸緣柱心截面(column core section)之維。試求其 I_X 及 I_Y. 答：$I_X = 4142$〔吋^4〕; $I_Y = 1635$〔吋^4〕.

【附註】 結構材料之截面之內外圓角 (fillets and rounded corners) 均略去不計。

13. 試求圖 303 所示 T 截面之 $\bar{y}$ 及 I_{X_0}.

答：$\bar{y} = 2.45$〔吋〕; $I_{X_0} = 3.73$〔吋^4〕.

14. 試求 6〔吋〕×4〔吋〕×$\frac{5}{8}$〔吋〕角截面之平行其兩肢之重心軸之位置，及截面關於此兩軸之慣矩。 答：2.03〔吋〕; 1.03〔吋〕; 21.1〔吋^4〕; 7.5〔吋^4〕.

15. 在圖 304 所示截面內，包括四個 6〔吋〕× 4〔吋〕× $\frac{5}{8}$〔吋〕之角截面，

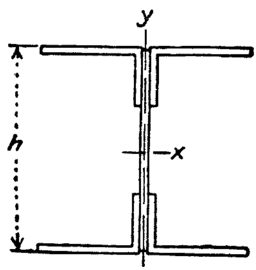


圖 304.

及 12〔吋〕× $\frac{5}{8}$〔吋〕之腹板(web plate)。 角截面之 4〔吋〕長之肢，聯接在腹板上。高度 $h = 12\frac{1}{2}$〔吋〕。試求 I_X、I_Y，k_X，k_Y 之值。

答：758.7〔吋^4〕; 213.2〔吋^4〕; 4.95〔吋〕; 2.63〔吋〕.

16. 若在習題 15 內，再加上兩塊 14〔吋〕× 2〔吋〕之凸緣板 (flange plate)(1)，試求各值。 答：3721〔吋^4〕; 1128〔吋^4〕; 6.54〔吋〕; 3.60〔吋〕.

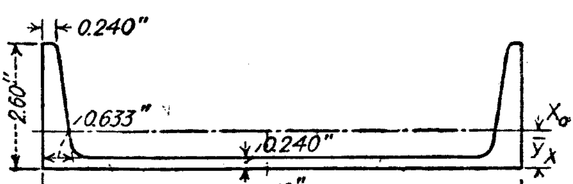


圖 305.

(1)凸緣板與角截面之 6〔吋〕肢相聯接.

17. 試求圖 305 所示 10〔吋〕15.3〔磅〕之 U 截面之 y, I_{X_0}, I_Y 之值。

答：0.64〔吋〕；2.31〔吋^4〕；66.87〔吋^4〕.

18. 圖 306 所示之三個 U 截面，均與圖 305 所示者同。試用習題 17 所得之值，求 I_X, I_Y 之值。各 U 截面之面積爲 4.47〔吋^2〕。

答：355.9〔吋^4〕；136.1〔吋^4〕.

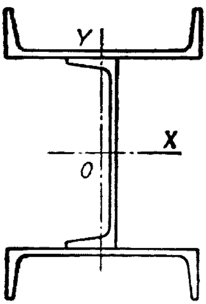


圖 306.

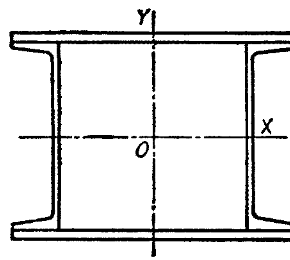


圖 307.

19 在圖 307 內，每個 U 截面，均與圖 305 者同。凸緣板厚 $\frac{1}{2}$〔吋〕。試求 $I_X = I_Y$ 時凸緣板之寬度，並求 I_X 之值。　答：14.84〔吋〕；543〔吋^4〕.

29. 試求圖 308 所示對稱 Z 截面之 I_X 與 I_Y 之值。

答：9.1〔吋^4〕；19.2〔吋^4〕.

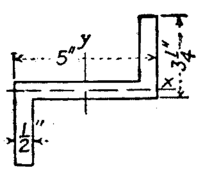


圖 308.

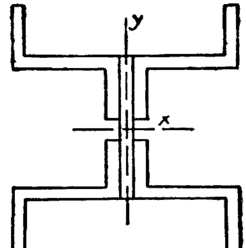


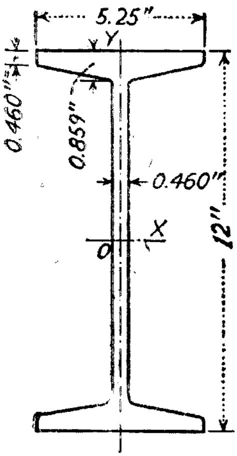
圖 309.

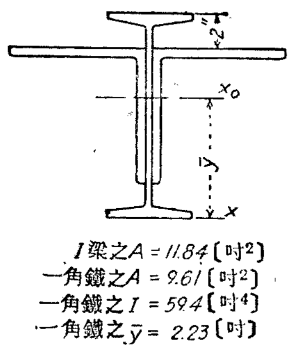
21 圖 309 所示之截面，包括四個 5〔吋〕×3$\frac{1}{4}$〔吋〕×$\frac{1}{2}$〔吋〕之 Z 桿及一個 7〔吋〕×$\frac{1}{2}$〔吋〕之腹板。試求 I_X 及 I_Y 之值。Z 桿之各已知量，見習題 20 各 Z 桿之截面積爲 5.25〔吋^2〕。　答：272.5〔吋^4〕；235.7〔吋^4〕.

22 試求圖 310 所示 I 梁截面之 I_X 與 I_Y　答：268.9〔吋^4〕；13.8〔吋^4〕.

23. 圖 311 所示之截面，包括兩個 8〔吋〕×8〔吋〕×$\frac{5}{8}$〔吋〕之角鐵，鉚在 12〔吋〕40.8〔磅〕I 梁之腹板上。試求其形心之位置，及此截面關於 X_0 軸之慣矩。I 梁之 I_X 見習題 22. 答：7.1〔吋〕；410.6〔吋^4〕.

24. 假定在圖 310 所示之 I 梁上邊之凸緣鈑上，鉚上一塊 8〔吋〕×1〔吋〕之凸緣板。試求從底邊量起之 $\bar{y}$ 及 I_{X_0} 之值。 答：8.62〔吋〕；471.3〔吋^4〕.





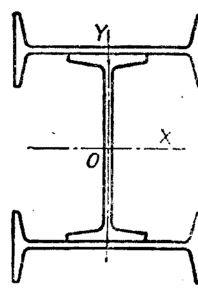


圖 310. 圖 311. 圖 312.

25. 圖 312 所示之截面，包括三塊鉚合之 12〔吋〕40.8〔磅〕之 I 梁，試求 I_X 及 I_Y 之值。 答：1215.6〔吋^4〕；551.6〔吋^4〕.

26. 試證明：任何等邊面積(例如等邊三角形，正方形，五邊形，六邊形等)關於在其平面內任何形心軸之慣矩為一常數。

第二編 運動力學

第十一章

質點之運動學

93. 定義. **運動力學**(dynamics)爲力學之一部分,其研究之對象,爲運動時之物體. **運動學**(kinematics)爲運動力學之一部分,其討論之範圍,祇是物體之運動,而不涉及產生或改變此運動之力. **動力學**(kinetics)亦爲運動力學之一部分,所討論者爲使物體產生或改變其運動時之力之效應.

質點(particle)爲很小之物體,其所含有之物質,可假定其如幾何學上之點,祇有位置. 設物體之大小,與其運動之範圍比較,爲甚小時,卽可以質點視之.

94. 運動之種類. 通常所討論之運動有二種: 一爲**直線運動**(rectilinear motion). 一爲**曲線運動**(curvilinear motion). 質點之直線運動,卽爲其沿直線之運動. 其曲線運動卽爲沿曲線之運動. 本編內所討論之曲線運動,祇限於**平面曲線運動**(plane curvilinear motion). 空間之曲線運動,將於附卷內討論之.

95. 直線位移. 假定一質點,關於一所設之定點,有直線運動時,其**位移**(displacement)卽爲其在任一所設時間內之位置總變化,所假定之**參攷點**(point of reference)之位置,通常爲地面上之一固定點.

質點之位移,祇與其始點與終點有關,而與其所經過之路線無關.因位移有方向與大小,故為矢量,在圖解時用矢線表示之.

在工程上所習用之位移單位為〔呎〕,但亦可用任何之長度單位.

在工程上所習用之時間單位為〔秒〕,但亦可用任何之時間單位.

習 題

1. 一質點之運動方程式為 $s = 16.1t^2$, 位移 s 之單位為〔呎〕,時間 t 之單位為〔秒〕. 試求 3〔秒〕末質點之位移;第三秒間之位移;及在第三秒之後半秒內之位移.
答: 144.9〔呎〕; 80.5〔呎〕; 44.28〔呎〕.

2. 一質點之運動方程式為 $s = -10 + 3t + 8t^2$, s 之單位為〔呎〕, t 之單位為〔秒〕. 試求位移等於零之時刻,及位移為 10〔呎〕時之時刻.
答: 0.946〔秒〕; 1.405〔秒〕.

96. 直線速度與速率. 一質點在直線運動時之速度,等於從某假定之參考點量起之位移,對於時間之變率. 若質點在等時間內之位移相等,其速度謂之**等速度**(uniform velocity),其值等於所設位移與其所歷之時間之比值. 設位移為 s, 時間為 t, 則速度 v 為

$$v = \frac{s}{t} \tag{11.1}$$

若位移之單位為〔呎〕,時間之單位為〔秒〕,則速度之單位為〔呎/秒〕. 若位移之單位為〔哩〕,時間之單位為〔時〕,則速度之單位為〔哩/時〕.

若在等時間內,質點之位移不等,則其速度為**變速度**(variable velocity). 在此種情形中,時間 t 內之位移 s 與時間 t 之比值,僅為在此時間內之**平均速度**(average velocity). 若位移 s 縮短至 ds,其對應時間縮短至 dt. 則 ds 縮為一點時之平均速度之極限

ds/dt，卽爲所取點之瞬時速度(instantaneous velocity)。故瞬時速度爲

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.2}$$

速度有方向與大小，故爲矢量。在圖解時以矢線表示之。**速率**(speed)爲速度之絕對値，故祇有大小，而無方向。速率之單位與速度之單位相同。

習　題

1. 設一物體之速率，自 15〔哩/時〕增至 100〔哩/時〕。試將此二速率化至〔呎/秒〕單位。　　答：22〔呎/秒〕；146.7〔呎/秒〕.

2. 一人在 9.8〔秒〕內跑 100〔碼〕。試將此速率化至〔呎/秒〕與〔哩/時〕單位。　　答：30.61〔呎/秒〕；20.88〔哩/時〕.

3. 一質點之運動方程式爲 $s = 16.1t^2$，s 之單位爲〔呎〕，t 之單位爲〔秒〕。試求在第六秒末之速度；在第六秒間之平均速度；及在第六秒間最後之 $\frac{1}{10}$ 秒內之平均速度.　　答：193.2〔呎/秒〕；177.1〔呎/秒〕；191.6〔呎/秒〕.

4. 一質點之運動方程式爲 $s = -10 + 3t + 8t^2$，s 之單位爲〔呎〕，t 之單位爲〔秒〕。試求其初速度；及在位移爲零時之速度。　　答：3〔呎/秒〕；18.14〔呎/秒〕.

97. 直線加速度. **加速度**(acceleration)爲速度之變率。若速度爲一常數，其加速度當然等於零。若在等時間內，速度之變量相等，則加速度爲一常數。若在等時間內，速度之變量不等，則加速度爲一變數。設速度增加，加速度爲正。速度減少，加速度爲負。

若加速度爲一常數，其値卽等於單位時間內速度之總變化。亦卽等於在時間 t 內速度之總變化除以時間 t。設命 a 爲加速度，v_0 爲初速度。v 爲其末速度，則

$$a = \frac{v - v_0}{t} \tag{11.3}$$

若 $v_0 = 0$,則

$$a = \frac{v}{t} \tag{11.3a}$$

若加速度爲一變數,則其在某定時刻之値,卽等於速度之微變量 dv 與其對應時間 dt 之比値,或

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{11.4}$$

若從(11.2)(11.4)兩式消去 dt,則得

$$v\,dv = a\,ds \tag{11.5}$$

加速度之單位,應採用速度與時間所用之單位。例如一物體之速度在 4〔秒〕內,從 0〔呎/秒〕增至 20〔呎/秒〕。則其加速度卽等於在 1〔秒〕內之速度變量 5〔呎/秒〕。通常記作 5〔呎/秒²〕。若物體之速度,在 10〔秒〕內,從 40〔哩/時〕減至 20〔哩/時〕,則其加速度爲 −2〔哩/時/秒〕。

加速度與速度及位移相似,亦爲矢量。在圖解時,以矢線表示之。

習 題

1. 設一自動車之速率,在 3〔秒〕內從 10〔哩/時〕增至 30〔哩/時〕。試求其平均加速度之値,單位用〔呎/秒²〕。　　答: 9.78〔呎/秒²〕.

2. 一機車之活塞,在 0.038〔秒〕內可以達到關於氣缸一端之相對速率 20〔呎/秒〕。試求其平均加速度之値。　　答: 526.32〔呎/秒²〕.

3. 一質點之運動方程式爲 $s = 6t^2 + 4t^3$, s 之單位爲〔呎〕, t 之單位爲〔秒〕。試求其初加速度,及位移爲 100〔呎〕時之加速度。

答: 12〔呎/秒²〕; 72〔呎/秒²〕.

98. 質點之等加速度運動. 據微分式 $a = dv/dt$ 在適當極限內之積分，即得速度以時間表出之函數；再積分一次，即得距離以時間表出之函數. 據(11.4)式：

$$dv = a\,dt$$

命 v_0 爲初速度，故若 a 爲常數時，

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

即

$$v = v_0 + at \tag{11.6}$$

再據(11.2)式

$$ds = v\,dt$$

$$= v_0\,dt + at\,dt$$

$$\int_0^s ds = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{11.7}$$

(11.5)式亦可用同樣方式積分之.

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_0^s ds$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = as$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as \tag{11.8}$$

又若 $v_0 = 0$，則

$$v^2 = 2as \tag{11.8a}$$

(11.6)，(11.7)，(11.8) 三式，亦可用簡單之代數法求得之. 假定一質點在單位時間內速度之增量爲 a，在時間 t 內之速度增量，應

等於 at. 其末速度,應等於其初速度 v_0 與速度增量 at 之和。

$$v = v_0 + at \tag{11.6}$$

在時間 t 內之平均速度,應等於其初速度 v_0,與末速度 v 之平均值。$\dfrac{v+v_0}{2} = v_0 + \dfrac{1}{2}at$. 質點所動過之距離,等於平均速度與時間之積,卽

$$s = \frac{v+v_0}{2}t = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{11.7}$$

若從(11.6)(11.7)兩式內消去 t,卽得

$$v^2 = v_0^2 + 2as \tag{11.8}$$

習 題

1. 一車在 40〔哩/時〕之速率時,用軔使其於 100〔呎〕之距離內停止。試求其平均加速度之值。 答: -17.21〔呎/秒²〕.

2. 一質點之初速率爲 8〔呎/秒〕,其加速度爲 5〔呎/秒²〕。試求在第 3〔秒〕末之速率;動過 60〔呎〕後之速率;及在第 6〔秒〕內所動過之距離。

答: 23〔呎/秒〕; 25.77〔呎/秒〕; 35.5〔呎〕.

99. 不計空氣阻力之自由落體. 若物體在地面附近,作比較短距離之自由降落,若不計空氣之阻力,則因重力而產生之加速度,可以視爲一常數。此重力加速度通常以 g 表示之,其近似值爲 32.2〔呎/秒²〕. 在解含有自由落體之問題時,如 g 不指定其他數值,卽應用上述之近似值. g 之準確數值爲

$$g = 32.0894(1+0.0052375\sin^2 l)(1-0.0000000957h) \tag{11.9}$$

式中 l 爲緯度,單位爲〔度〕; h 爲高出海平面之高度,單位爲〔呎〕.

上節內所得之運動方程式.對於落體,則爲

$$v = v_0 + gt \tag{11.10}$$

$$h = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{11.11}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs \tag{11.12}$$

位移,速度,與加速度,均以向下者爲正。若物體從其靜止位置開始下落,$v_0 = 0$,故 $v = \sqrt{2gh}$,若物體沿鉛直向上之方向拋出,v_0 爲負。經過時間 $t = v_0/g$〔秒〕,距離 $h = -v_0^2/2g$ 後,物體即停止運動,然後下落。再經過始點時,其速度爲 $+v_0$。若物體自此點繼續下落,其情形與物體於開始時以同樣之速率向下拋出,完全相同。

例 題

一球以 30〔呎/秒〕之速度向上拋出。在一秒後另有一球以 100〔呎/秒〕之速度亦向上拋出。問在何時何地此兩球相遇。

【解】 命 s_1 爲自始點至兩球相遇點間之距離,從拋出後,第一球經過時間 t_1,第二球經過時間 t_2,然後相遇。則

$$t_2 = t_1 - 1$$

在兩種情形中,初速度 v_0 均爲負,自 (11.11) 式,得經過 t_1〔秒〕後,第一球所經之距離爲

$$s_1 = -30t_1 + 16.1\ t_1^2$$

相遇時,第二球祇經過$(t_1 - 1)$〔秒〕,故其距離爲

$$s_2 = -100\,(t_1 - 1) + 16.1\,(t_1 - 1)^2$$

因 $s_1 = s_2$,故

$$-30t_1 + 16.1t_1^2 = -100\,(t_1 - 1) + 16.1\,(t_1 - 1)^2$$

$$t_1 = 1.137\ \text{〔秒〕}$$

$$s_1 = s_2 = -13.3\ \text{〔呎〕}$$

第一球經 $30/32.2 = 0.932$〔秒〕後,即到達其頂點。故在其下落時方與第二球相遇。

習題

1. 解上述例題，假定第一球向上之速度爲 60〔呎/秒〕。

答：−55〔呎〕；1.61〔秒〕.

2. 在上述例題內，問第一球拋出後經若干時間，第二球即須拋出，方可使兩球相遇於第一球路程之最高點。 答：0.789〔秒〕.

3. 一球自其靜止位置，自由落下 2〔呎〕。 試求此球到達時之速度，及所經過之時間。 答：11.35〔呎/秒〕；0.352〔秒〕.

4. 一球從某高度自由下落，以 40〔呎/秒〕之速度着地。 試求此高度及所需之時間。 答：24.84〔呎〕；1.242〔秒〕.

5. 一球在 0.5〔秒〕內向下動過 30〔呎〕。試求所需之初速度。

答：51.95〔呎/秒〕.

100. 速度與加速度之分解與合成。 因速度與加速度均爲矢量，得如他種之矢量，如力及位移，合併爲**合矢** (resultant)，或分解爲**分矢**(component)。速度可以分解爲其分矢 x 與分矢 y。 加速度可以分解爲其**法線分矢** (normal component)，與**切線分矢** (tangential component)。

一質點之兩個**分速度**(component velocity)，可以用矢量法求其**合速度**(resultant velocity)。 一質點之兩個或多個**分加速度** (component acceleration)，可用矢量法，合併而爲其**合加速度** (resultant acceleration)。

習題

1. 一車以 100〔呎/秒〕之速度，在坡度(grade)爲 6% 之斜坡向下運動。試求速度之水平分矢及鉛直分矢。 答：99.82〔呎/秒〕；5.99〔呎/秒〕.

2. 一質點，有 32.2〔呎/秒^2〕之鉛直向下之加速度，及 44〔呎/秒^2〕之水平

加速度．試求其合加速度，並求此質點從靜止位置出發，經 0.2〔秒〕後之速度．

答：54.52〔呎/秒²〕，與水平線成 36°10′ 角；10.9〔呎/秒〕，與水平線成 36°10′ 角．

101．相對運動． 所謂物體之速度，即指其對於地球上觀察運動之一點之速度．地球上之任一點，雖亦有數種空間運動，但吾人假定其為靜止．於是任一物體對於地球上此點之速度，謂之**絕對速度**(absolute velocity)．一物體對於另一物體之速度，謂之**相對速度**(relative velocity)．

命圖 313 之 A，為一平板車之頂視圖．如車 A 在 1〔秒〕內運動至 A' 之位置．BB_2 可以代表其速度，亦可以代表其位移．假定當平板車自 A 運動至 A' 時，車上之物體 B 相對於車 A 之運動，係自 B 至 B_1．故 BB_1 與 BB_2 之合矢 BB'，可以代表 B 之絕對速度及絕對位移．

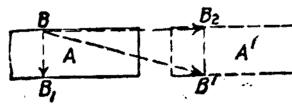


圖 313.

應用同樣理由，假定根據某比例尺，以矢量 BB_2 代表車 A 在移動時之絕對加速度，矢量 BB_1 代表 B 對於 A 之相對加速度．則矢量 BB' 代表 B 之絕對加速度[1]．

若 A 之絕對速度或絕對加速度，或 B 對於 A 之相對速度或相對加速度為變數．則據對應之瞬時分矢之矢量和，可以求得 B 之瞬時絕對速度或瞬時絕對加速度．

上述原理，可用下述公式表示之．命 V_A 為 A 之絕對矢量（此矢量可以代表 A 之位移，速度，或加速度）．$V_{\frac{A}{B}}$ 為 A 對於 B 之相對矢量．V_B 為 B 之絕對矢量．則 $V_{\frac{A}{B}}$ 與 V_B 之矢量和即等於

【註】(1)在轉動物體上之絕對加速度，見附卷第二章第二節．

V_A. 或

$$\vec{V_A} = \vec{V}_{\frac{A}{B}} + \vec{V_B} \tag{11.13}$$

在(11.13)式內，若已知任何兩矢量，第三矢量卽可求得.

例 題 1

一人欲游過流速爲2〔呎/秒〕之一河．此人游泳之速度爲3〔呎/秒〕．設此人欲在對岸之正對點上岸．試求其游泳之方向．若河闊1000〔呎〕，試求欲游過此河所需之時間．

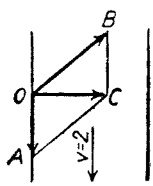


圖 314.

【解】 設圖314之點 O，爲游泳之始點，OC 爲此人游泳時所需之絕對方向． 矢量 OA，其長度等於比例尺上兩個單位，代表流水之絕對速度．矢量 OB，其長度等於比例尺上三個單位，代表游泳者對於流水之相對速度． OB 與 OC 之間必須成一適當之角度，使 OB 與 OA 之合矢沿 OC 方向．用圖解法求得 COB 角爲 $42°$，或用三角法，因 $\sin COB = \frac{2}{3}$，得角 COB 爲 $41°49'$.

長度 OC 亦可以代表游泳者在1〔秒〕內横渡之絕對距離． 因 $OC = \sqrt{5} = 2.236$〔呎〕． 故得横渡之時間 $t = 1000/2.236 = 447$〔秒〕$= 7$〔分〕27〔秒〕.

例 題 2

一冰船以30〔哩/時〕之速度向東駛．風以20〔哩/時〕之速度自西北吹來．問帆應張在何方向，方得使船前進之壓力？

【解】 在此題內，已知兩個絕對速度，欲求風對於船之相對速度．自圖315之點 O，畫出代表船與風之絕對速度之兩個矢量 OA, OB. 作 AB 線，聯結兩矢量之矢首． 經點 O 再畫矢量 OC，與 AB 大小相等，方向平行． 矢量

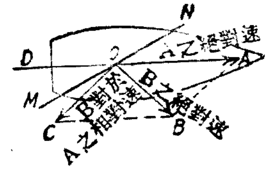


圖 315.

OC 即代表風對於船之相對速度． 角 $COD = 41°40'$. 如將帆張在 MN 之方向時，使帆與船軸間之角，小於 $41°40'$， 則風以 OC 之方向吹在帆上，可

以產生一前進之推力。設此推力適等於船之摩擦阻力，則船保持以等速前進。如推力大於其摩擦阻力，船之速度則繼續增加。由此可見冰船之速度，可能大於吹動此船之風速，實驗上時常證明此種事實。

習　題

1. 水流進'內流徑向衝擊輪機'(inward-flow, radial-impulse turbine)時，其方向與半徑之延線成 45° 角(圖 316)。若水之速度為 180〔呎/秒〕，輪緣之速度為 90〔呎/秒〕。問輪葉之外緣應成何角度，方能使水順利流進？又水對於輪葉之外緣之相對初速度為若干？

答：與半徑成 16°20′ 角；132.6〔呎/秒〕。

2. 設圖 316 所示輪葉之外緣，與半徑成 15° 角。水注之速度為 300〔呎/秒〕，與半徑之延線成 50° 角。試求欲使水順利流入時，輪緣應有之速率。並求水對於輪緣之相對初速度。

答：178.13〔呎/秒〕；199.3〔呎/秒〕。

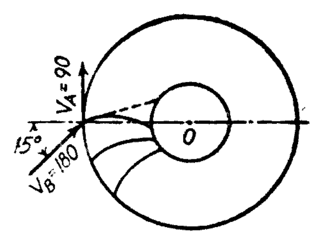


圖　316.

3. 在圖 317 內，AB 表示往復式引擎之連桿，OB 表示其曲柄。在柄銷 B 之速度為 20〔呎/秒〕，而曲柄與 AO 線成 30° 角時，試求十字頭 A 之速度。(因 AB 為剛體，B 對於 A 之相對速度必與 AB 垂直。)

答：11.45〔呎/秒〕。

4. 假定圖 317 內之 AOB 角為 105°。試求十字頭 A 之速度。

答：18.47〔呎/秒〕。

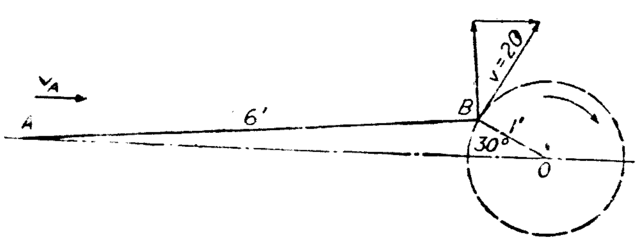


圖　317

102. 曲線運動之位移. 此處所討論者僅限於平面曲線運動.假定圖 318 之曲線 $ABCD$ 表示一質點所經過之路線,從點 A 開始,經過點 B,C,以至點 D. 矢量 AB 代表質點自其原有位置 A 至點 B 之位移.

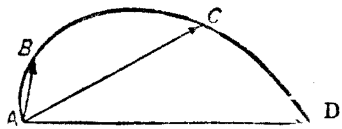


圖 318.

同理,矢量 AC 係質點在點 C 時之位移. 矢量 AD 係質點在點 D 時之位移. 質點之位移,僅隨其始點與終點之位置而定,而與其所經之路徑無關.

103. 曲線運動之速度. 一質點在曲線運動時之速度,即爲其位移對於時間之變率. 假定一質點沿一曲線運動,例如在圖 318 上從點 A 動至點 B,矢量 AB 即爲其位移,假定所需之時間爲 Δt,則此質點自 A 至 B 之平均速度爲 $\overline{AB}/\Delta t$. 矢量 AB 之方向,則爲速度之平均方向 (average direction), $\overline{AB}/\Delta t$ 之大小,亦即爲速度之平均值. 當 Δt 變爲 dt 時,換言之,即當其趨近於零時,點 B 趨近點 A 爲極限. 矢量 AB 之極限方向即爲點 A 之切線方向. 故在點 A 之瞬時速度之方向,即等於運動路線在點 A 之切線方向. 又當點 B 趨近於點 A 時,矢量 AB 之長度與弧 AB 之長度趨於相等,弧長 AB 爲 ds,故在點 A 之瞬時速度之大小爲 $v=ds/dt$.

104. 曲線運動之加速度. 速度對於時間之變率,即爲加速度. 在曲線運動中,速度之方向必連續變化,而其大小亦可有變化. 假定質點沿圖 319 (a) 之曲線 A_1A 運動. 在時間 Δt 內,質點自 A_1 移動至 A. 命 v_1,v,分別

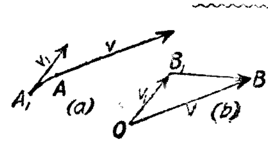


圖 319.

爲在點 A_1, A 之瞬時速度。假定從圖 319(b) 之點 O，畫與 v_1 大小相等，方向平行之矢量 OB_1，及與 v 大小相等，方向平行之矢量 OB. 則矢量 B_1B 代表速度之總變化。$B_1B/\Delta t$ 爲 A_1, A 兩點間速度之平均變率，或平均加速度。當 Δt 變爲 dt 時；此平均加速度之極限值卽爲在 A 點之瞬時加速度。

105. 切線加速度與法線加速度. 自第 104 節可知一般而論，質點之加速度，未必與其速度在同一方向。因通常以速度之方向，作爲參考方向。故合加速度 a 以其分矢 a_t, a_n 决定之。分矢 a_t 爲加速度之**法線分矢**(tangential component)，其方向與速度方向平行。分矢 a_n 爲加速度之**切線分矢**(normal component)，其方向與速度方向垂直。

假定圖 320(a) 之 A_1, A 兩點，爲在質點之徑路上之兩連續點，A_1A 爲在時間 dt 內所經之距離 ds. 圖 320(b)之 B_1B 爲在時間 dt 內速度之變量。平均加速度爲 B_1B/dt. 因 dt 趨近於零爲極限，故此平均加速度卽爲在點 A 之瞬時加速度。

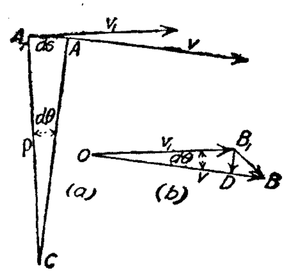


圖 320.

加速度 B_1B/dt，可以分解爲沿切線及沿法線之兩分矢。$DB/dt = a_t$. 爲平行於點 A 之速度方向之分矢。B_1D/dt 爲與點 A 之速度方向垂直之分矢。因 A_1, A 爲在路徑上之兩連續點，$DB = v - v_1 = dv$.

故
$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad (11.14)$$

由此可見 a_t 卽等於在點 A 之速率之變率。至極限時，

$$B_1D = v_1\,d\theta = v\,d\theta$$

並因

$$d\Theta = \frac{ds}{\varrho}, \text{ 及 } \frac{ds}{dt} = v$$

故得

$$a_n = \frac{B_1D}{dt} = \frac{v\,d\Theta}{dt} = \frac{v}{\varrho}\,\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\varrho}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho} \tag{11.15}$$

(11.14) (11.15)均為重要公式，必須牢記。

質點運動學之總習題

1. 設質點之運動方程式為 $s = -4 - 3t^2 + 2t^3$，s 以〔呎〕計，t 以〔秒〕計。試求速度為零時之位移及加速度；加速度為零時之位移及速度；及位移為零時之速度及加速度。

答：-5〔呎〕；6〔呎/秒^2〕；-4.5〔呎〕；-1.5〔呎/秒〕；12〔呎/秒〕；18〔呎/秒^2〕.

2. 一升降機在上升時，先以等加速度在 30〔呎〕之距離內，使速度自零值增至 20〔呎/秒〕。再在 600〔呎〕之距離內，以 20〔呎/秒〕之等速度繼續上升。在最後之 16〔呎〕距離內以等負加速度使速度減至零。試求所需之總時間。 答：34.6〔秒〕.

3. 沿 300〔呎〕高之坑道，一升降機以 14〔呎/秒〕之等速度上升。當升降機離底 20〔呎〕時，有一球自坑頂落下。試求球與升降機相遇所需之時間，相遇點與坑底間之距離，及其相對速度。答：3.76〔秒〕；72.7〔呎〕；135〔呎/秒〕.

4. 從 400〔呎〕高之塔頂，一球以 20〔呎/秒〕之初速度下擲。同時在塔底，另一球以 140〔呎/秒〕之初速度上擲。試求兩球之相遇點與塔底間之距離。並證明此兩球之相對速度，恒為 160〔呎/秒〕。 答：249.4〔呎〕.

5. 一球以 120〔呎/秒〕之初速度上擲。在 1〔秒〕後，另一球以同樣之初速度上擲。求第一球擲出後至與第二球相遇時所需之時間，及相遇點與拋擲點間之距離。並求此兩球間之相對速度，並證明其為一常數。

答：4.227〔秒〕；219.64〔呎〕；32.2〔呎/秒〕.

6. 若欲使鎚以 10〔呎/秒〕之速度，打在一樁上，問鎚須比樁頂高出若干〔呎〕? 答：1.56〔呎〕.

7. 一自動車在 500〔呎〕之距離內，其速度自 15〔哩/時〕增加至 45〔哩/時〕. 試求其平均加速度，及所需之時間. 答：3.872〔呎/秒^2〕；11.38〔秒〕.

8. 一列車於 4000〔呎〕之距離內，其速度自 60〔哩/時〕減至零. 試求其平均加速度及所需時間. 答：-0.968〔呎/秒^2〕；91〔秒〕.

9. 一飛機在空中以 120〔哩/時〕之速度向正北飛，風自北偏西30°之方向吹來，其對於地面之速度為 30〔哩/時〕. 試求飛機對於地球之飛行方向及速度. 答：北 13°55′ 東[1]；108.2〔哩/時〕.

10. 一飛機以 120〔哩/時〕之相對於空氣之速率，欲飛往在北偏東 60° 之方向相距 80〔哩〕之一定點. 假定風速度與習題 9 所設者相同. 試求飛機到達定點所需之時間? 又風對於飛機似從何方吹來?

答：36.4〔分〕；北 47°30′ 東.

11. 一自動車之速率在 13〔秒〕內自 15〔哩/時〕增至 50〔哩/時〕. 試求其平均加速度及所經之距離. 答：3.95〔呎/秒^2〕；619.7〔呎〕.

12. 一競賽車在 5〔哩〕之距離內，其速率自零增至 300〔哩/時〕. 試求其平均加速度及所需時間. 答：-3.67〔呎/秒^2〕；2〔分〕.

【注】(1) 北 13°55′ 東，意即北偏東 13°55′.

第十二章

直線移動之剛體動力學

106. 定義及一般理論. **剛體**(rigid body)為在各質點間永遠保持一定關係之質點系.

假定剛體之各個質點之運動,均為直線運動,且互相平行,則此剛體之運動,謂之**直線移動**(rectilinear translation). 因此物體上任一質點之運動,即能代表整個剛體之運動. 整個剛體可以視為一質點,此質點之位置即在剛體之重心,而其運動即等於剛體重心之運動.

鐵路列車之車身在直線軌道上之運動,駐定往復式引擎之活塞在其氣缸內之運動,打樁機之錘在其導路內之運動,均為直線移動之例.

107. 牛頓運動三定律. 牛頓氏(Isaac Newton)自其觀察之結果,歸納為下述關於質點運動之三定律.

1. 一質點除非受到一合力之作用,否則永遠靜止,或連續在直線上以等速運動.

2. 一質點受到一合力後,便在合力方向上產生一加速度. 此加速度之大小,與合力成正比,而與質點之質量成反比.

3. 對於作用於質點上之每一力,此質點必施出大小相等,方向相反之共線反力(collinear reaction).

108. 力,質量,與加速度間之關係. 在第107節之牛頓第二定律內,已說明一物體之加速度,與作用於此物體上之合力成正比,

而與此物體之質量成反比。 命 F 爲合力，作用於質量 M 上，以產生加速度 a. 則 a 隨 F/M 而變，或 F 隨 Ma 而變。

$$F = KMa \tag{12.1}$$

K 爲一常數，其值隨所用單位而定。 英美工程界所習用之力之單位爲〔磅〕，加速度之單位爲〔呎/秒²〕[1]。 欲使算式(12.1)簡單化，常數 K 應等於 1. 故須將單位力產生單位加速度時之質量，作爲質量單位。 1〔磅〕之合力，作用於重 1〔磅〕之質量時，其所產生之加速度爲 32.2〔呎/秒²〕，有如落體之情形所述。 若質量增加，作用之合力不變，則所產生之加速度，依照比例減小。 故 1〔磅〕之力，作用於重 32.2〔磅〕之質量時，所產生之加速度爲 1〔呎/秒²〕。 由此可見若以重 32.2〔磅〕之質量，作爲質量之單位，則單位之力可以產生單位之加速度，因此 $K = 1$. 故欲得所設物質中所含之質量單位，須以 32.2 除其重量，此項質量單位，特稱爲〔斯勒〕(slug)。 1〔斯勒〕= 重 32.2〔磅〕之質量。 以1〔磅〕之力，作用於1〔斯勒〕之質量上，所得之加速度爲1〔呎/秒²〕。

$$M = \frac{W}{g} \tag{12.2}$$

故得

$$F = Ma = \frac{W}{g}a \tag{12.3}$$

在(12.3)式內，M 爲非矢量，F 與 a 爲矢量。 如將 F 分解爲 F_1 與 F_2 兩分力，其對應之分加速度 a_1 與 F_1 平行，a_2 與 F_2 平行。 則：

$$F_1 = Ma_1,\ F_2 = Ma_2$$

若上述之兩分力爲直交分力 F_x 與 F_y，則

$$\begin{cases} F_x = Ma_x \\ F_y = Ma_y \end{cases} \tag{12.4}$$

(1)國際度量衡制中，在工程方面所習用之力之單位爲〔仟克〕（即〔公斤〕），加速度之單位爲〔米/秒²〕（即〔公尺/秒²〕）.

例 題 1

一 10〔磅〕之水平力，作用於重 100〔磅〕之物體上。若物體置於光滑之水平面上，試求 5〔秒〕後此物體之速度，及其所經之距離。

【解】 據(12.3)式，得

$$10 = \frac{100}{32.2} a$$

$$a = 3.22 \text{〔呎/秒}^2\text{〕}.$$

因力爲一常數，故物體之運動爲等加速運動。又因物體從靜止狀態開始，$v_0 = 0$，故據(11.6)(11.7)兩式，得

$$v = 32.2 \times 5 = 16.1 \text{〔呎/秒〕}$$

$$s = \tfrac{1}{2} \times 3.22 \times 5^2 = 40.25 \text{〔呎〕}.$$

例 題 2

一 80〔磅〕之水平力，作用於重 150〔磅〕之物體上，將其推上一 15° 之斜面，如圖 321(*a*) 所示。若 $f = 0.1$，試求此物體之加速度。

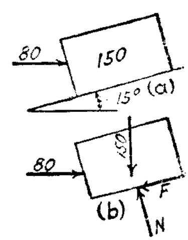


圖 321.

【解】 圖 321(*b*) 爲脫離體圖，作用於此物體上之力有四：物體本身之重量 150〔磅〕；斜面之法線反力 N；斜面之摩擦力 F；及 80〔磅〕之水平力。

因物體在斜面之法線方向平衡，故據下式求得法線反力 N，

$$N = 150 \cos 15° + 80 \sin 15°$$

$$N = 165.6 \text{〔磅〕}$$

$$F = fN = 16.56 \text{〔磅〕}$$

平行於斜面之力之總和爲

$$\Sigma F = 80 \cos 15° - 150 \sin 15° - 16.56$$

$$\Sigma F = 21.84 \text{〔磅〕}$$

因

$$\Sigma F = Ma = \frac{W}{g}a$$

$$21.84 = \frac{150}{32.2}a$$

$$a = 4.69 \text{〔呎/秒}^2\text{〕。}$$

習　　題

1. 一5〔磅〕之合力，作用於200〔磅〕之物體上，歷時20〔秒〕。若物體從靜止狀態開始運動，試求其末速度及所經距離。 答：16.1〔呎/秒〕；161〔呎〕.

2. 一升降機重2000〔磅〕，以等加速度使其於3〔秒〕內到達12〔呎/秒〕之上升速度。試求所經距離，及吊升降機之纜內之牽力。答：18〔呎〕；2248〔磅〕.

3. 若將習題2之纜之牽力減小，使升降機在12〔呎〕之距離內，其速度自12〔呎/秒〕減至零値。試求纜之牽力及所需時間。 答：1627〔磅〕；2〔秒〕.

4. 一物塊以30〔呎/秒〕之初速度沿30°之斜面向上拋擲。若斜面之$f=0.3$，試求在1〔秒〕末及3〔秒〕末物塊之位置及速度。

答：17.77〔呎〕；5.53〔呎/秒〕；6.33〔呎〕；−12.7〔呎/秒〕.

109. 剛體上之有效力：達蘭貝爾原理。 一般而論，若將一物體之任一質點作爲脫離體時，作用於此脫離體上之力系中，若干爲整個物體之外力，若干爲其內力．所有作用於質點之力之合力，稱爲質點之**有效力**(effective force)． 若命dM爲質點之質量，a爲其加速度． 則此有效力爲$dM\cdot a$． 若將物體之諸質點，互相脫離，而其上各受其有效力之作用，則此質點系之運動，與物體實際之運動無異． 一物體之所有質點之有效力之總合力，稱爲此物體之**有效合力**(resultant effective force)。

剛體之諸質點間之內力，恆成對而產生，其大小相等，方向相反。故整個剛體之內力之合力爲零． 因此構成一剛體之所有質點之有效合力，即等於其外力之合力。若命F爲外力之合力，則

$$F=\int dMa$$

若運動爲移動，則所有質點之加速度 a 之大小方向均相同，故

$$F=a\int dM=Ma$$

因爲各質點上作用之力，相當於 $dM\cdot a$，並因此力與各質點之質量成正比例，故此有效合力之作用點，必與此質點系受到重力之合力作用點（重心）相同．在第 71 節內已證明此作用點亦卽爲物體之質量中心．

因爲作用於剛體諸質點之有效力系，可以替代作用於此物體上之實際力系．故若將有效力系之方向倒置，再加於實際力系上，則無須改變任何實際之外力，而使物體得到平衡．

此謂之達蘭貝爾原理（D'Alembert's principle），此原理對於剛體與非剛體，均可應用．但祇有應用於剛體時，始足決定其運動．

應用此方法，可以使動力學之問題，簡化爲靜力學之問題．於是可應用靜力平衡之各方程式：

$$\Sigma F_x=0,\quad \Sigma F_y=0,\quad \Sigma M=0$$

讀者須記住，此外加之力系，不過爲一虛力系（imaginary force system），乃爲便利解題，而加於實際力系之上．

此處所述之解題法，與第 108 節之方法，並不衝突．其證明如下．在圖 322(*a*)內，命 F 爲作用於質量 M 上之合力．據第108

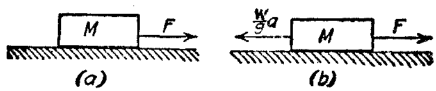


圖 322.

節，可知合力 F 作用於質量 M 上所生之加速度 a，得由下式決定：

$$F=Ma=\frac{W}{g}a$$

在圖 322 (*b*) 內，F 爲作用於質量 M 上之合力．將其有效合力

$\frac{W}{g}a$ 之方向倒置，加於原有之力系上，使其產生平衡。因作用於質量 M 上之力系平衡，故據平衡條件 $\Sigma F_x = 0$，得

$$F - \frac{W}{g}a = 0,\quad 卽\quad F = \frac{W}{g}a$$

其結果與上同。

110. 加速度物體之反力. 設有一不平衡之力系，作用於一剛體上，並使其產生直線加速度。若經此剛體之重心，加上一有效合力 ma，其方向與加速度 a 之方向相反，是力稱爲**倒向有效力**(reversed effective force)。則據第 109 節，可知此倒向有效力與原有之實際力系，構成一平衡力系。求一加速剛體之任何未知反力時，若應用倒向有效力，則關於任何點之力矩方程式 $\Sigma M = 0$，均屬有效，僅須選擇適宜之點爲力矩中心而已。但若不應用倒向有效力，而取加速度之方向爲軸 X，則

$$\Sigma F_x = Ma,\quad \Sigma F_y = 0,$$

須注意此時祇有關於經過重心，並與軸 X 平行之直線上之任一點之力矩方程式

$$\Sigma M = 0$$

方屬有效。

例　　題

圖 323(a) 表示保險箱之重量及維，以 100〔磅〕之水平力使其在

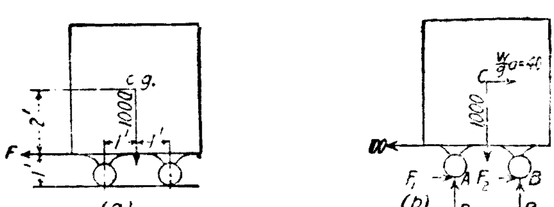


圖 323.

一水平軌道上拖動．若 60〔磅〕之力，已足夠使其以等速度運動．試求在 A, B 兩點之反力之法線分力．

【解】 圖 323(b) 爲脫離體圖． 圖上畫出所有之外力及作用於重心之反向有效力 $\dfrac{W}{g}a$． 因脫離體上之力系平衡，故可應用平衡方程式．

因 60〔磅〕之力，已足使物體以等速度運動，故

$$F_1 + F_2 = 60 \text{〔磅〕}$$

應用平衡方程式 $\Sigma F_x = 0$，得

$$-100 + F_1 + F_2 + \frac{W}{g}a = 0$$

$$\frac{W}{g}a = 40 \text{〔磅〕}$$

再據 $\Sigma M_A = 0$，得

$$(100 \times 1) - (40 \times 3) - (1000 \times 1) + R_2 \times 2 = 0$$

$$R_2 = 510 \text{〔磅〕}$$

據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$R_1 = 490 \text{〔磅〕}.$$

習　題

1. 假定在上述之例題中，100〔磅〕之力，作用於保險箱之左上角，比重心高 2〔呎〕。試求 R_1 與 R_2. 答: $R_1 = 690$〔磅〕; $R_2 = 310$〔磅〕.

2. 一車與其載荷共重 4000〔磅〕，其重心比地面高 26〔吋〕，並在相距 122〔吋〕之前後兩輪間之中點． 如用軔可使此車於 6〔秒〕內自 40〔哩/時〕之速度減至停止．試求前後兩輪上之法線反力． 答: 2260〔磅〕; 1740〔磅〕.

3. 如使習題 2 內之車輛，在 1800〔呎〕之距離內，使其速度自 30〔哩/時〕增至 80〔哩/時〕。試求前後兩輪上之法線反力． 答: 1910〔磅〕; 2090〔磅〕.

4. 有一段直徑 2〔呎〕，高 10〔呎〕之石柱，直立於一卡車上，卡車在水平之路面上行動．試求使此石柱不致倒下之極限加速度． 又若卡車在 5% 之斜坡上向下開，其極限之負加速度爲若干?

答: 6.44〔呎/秒²〕; 1.824〔呎/秒²〕.

直線移動之剛體動力學之總習題

1. 一打椿機之鎚重 1200〔磅〕,自 10〔呎〕之高度落於樁頂上。若打到椿頂之實際速度爲 24〔呎/秒〕，設空氣阻力及導板阻力之總值爲常數，試求其值。　答：127〔磅〕.

2. 若習題 1 之打椿機之鎚，以 4〔呎/秒〕之等速率將其拉回。假定利用離合器，使於 0.4〔秒〕內達到此速率，並假定空氣與導板之總阻力爲100〔磅〕。試求拉鎚之纜內之牽力，並求鎚達到此全速率所動過之距離。

答：1673〔磅〕；0.8〔呎〕.

3. 兩物塊以經過一滑輪之繩聯結之，如圖 324 所示。若不計滑輪與繩之質量，及滑輪之摩擦力，試求繩內之牽力，及使物塊自靜止狀態開始移動 10〔呎〕所需之時間，假定摩擦係數 $f = 0.4$.　答：76.4〔磅〕；1.31〔秒〕.

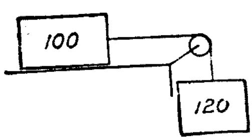


圖 324.

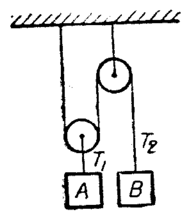


圖 325.

4. 若在習題 3 內，利用 120〔磅〕之物體，將 100〔磅〕之物體沿 60° 之斜面拉上。試求其解答。　答：112.7〔磅〕；3.2〔秒〕.

5. 廣告上登載一自動車能於 17.7〔秒〕內，自 10〔哩/時〕之速率增至 50〔哩/時〕之速率，試求其加速度及所行距離。　答：3.325〔呎/秒^2〕；779〔呎〕.

6. 在圖 325 內，物體 A 重 100〔磅〕，物體 B 重 60〔磅〕。若不計滑輪與繩之質量，及滑輪之摩擦力，試求牽力 T_1，T_2，及各物體之加速度。

答：105.88〔磅〕；52.94〔磅〕；1.89〔呎/秒^2〕；3.78〔呎/秒^2〕。

7. 解習題 6，假定 A 之重量爲 150〔磅〕，其餘數據均不變。

答：138.46〔磅〕；69.23〔磅〕；2.48〔呎/秒^2〕；4.96〔呎/秒^2〕.

圖 326 所示之三個物體 A，B，C 之重量爲 1〔磅〕，2〔磅〕，3〔磅〕。

如從圖上所示之靜止位置釋放，試求在各繩內之牽力，及 1〔秒〕後之速度．不計繩與滑輪之摩擦力及質量．

答：1.41〔磅〕；2.82〔磅〕；13.26〔呎/秒〕；9.47〔呎/秒〕；1.895〔呎/秒〕．

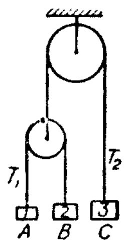


圖 326.

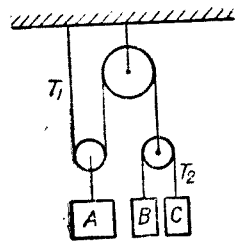


圖 327.

9. 在圖 327 內，物塊 A 重 200〔磅〕，B 重 60〔磅〕，C 重 40〔磅〕．假定從所示之靜止位置釋放，試求各繩內之牽力，及在 1〔秒〕間各物塊所動過之距離． 繩與滑車之質量及滑輪之摩擦力均不計．

答：98.6〔磅〕；49.3〔磅〕；0.22〔呎〕；2.865〔呎〕；3.75〔呎〕．

10. 圖 328 所示之兩物塊，均在 30° 之斜面上自由滑下． 假定從點 M 開始滑動，至與點 M 相距 40〔呎〕之點 N 時，其速度爲 25〔呎/秒〕．B 與斜面之摩擦係數爲 0.3． 試求 A 之摩擦係數；A，B 間之反力；及物塊自 M 動至 N 之時間．

答：0.294；0.029〔磅〕；3.2〔秒〕．

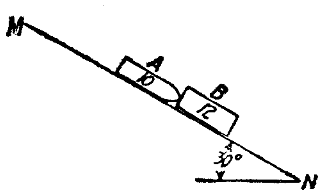


圖 328.

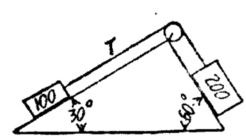


圖 329.

11. 假定圖 329 所示兩物塊底面之摩擦係數爲 $\frac{1}{3}$． 試求兩物體之加速度；繩之牽力；物體自靜止開始移動 8〔呎〕所需之時間．

答：6.55〔呎/秒^2〕；99.2〔磅〕；1.56〔秒〕．

12. 在圖 330 內，80〔磅〕物塊底面之摩擦係數爲 0.4． 試求使 80〔磅〕之

物塊以 6〔呎/秒^2〕之加速度拉上斜面所需之重量 W，並求繩之牽力，及 80〔磅〕物塊自靜止開始，動過 10〔呎〕時之速度。

答：207.5〔磅〕；94.09〔磅〕；10.95〔呎/秒〕.

13. 若習題 12 內，80〔磅〕物塊以 6〔呎/秒^2〕之加速度沿斜面向下滑動，試解之。　答：34.8〔磅〕；19.03〔磅〕；10.95〔呎/秒〕.

14. 在圖 331 內，兩物塊底面之 $f=0.2$。 假定從圖上所示靜止位置釋放，試求繩之牽力，及 300〔磅〕物塊撞到阻止板 C 時之速度。 並求物塊 A 停止後，物塊 B 所動過之距離。　答：63.2〔磅〕；8.65〔呎/秒〕；5.81〔呎〕.

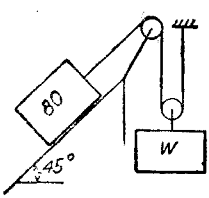


圖 330.

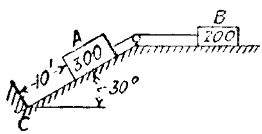


圖 331.

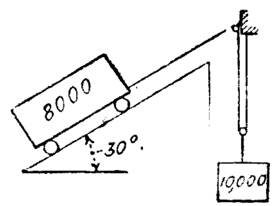


圖 332.

15. 圖 332 示一無載荷之礦石車，利用一萬〔磅〕之對重(counter weight)將其沿斜面拉上。 如車之阻力爲 40〔磅/噸〕[1]，試求車之加速度，及纜內之牽力。並求車自靜止開始，動過 120〔呎〕所需之時間。

答：2.576〔呎/秒^2〕，4800〔磅〕；9.65〔秒〕.

16. 假定習題 15 之車裝入礦石，而使滑至斜面底之速度，不超過 10〔呎/秒〕。 試求車內可載入礦石若干。　答：2775〔磅〕.

17. 一火車在 0.75% 之斜坡上，因其重量而開始向下行動，初速度爲零，斜坡長 3000〔呎〕。 走完斜坡後，軌道即變爲水平。 火車之阻力，假定爲 8〔磅/噸〕之常數。試求火車至斜坡底之速度；至火車停止時之時間；及所經之總距離。　答：26〔呎/秒〕；$t_1=231$〔秒〕；$t_2=202$〔秒〕；5625〔呎〕.

18. 一火車從長 2000〔呎〕之 2% 斜坡上，向下行動，其初速度爲零。 走完斜坡後爲長 1600〔呎〕之水平軌道，然後再走上 1% 之斜坡。 假定火車之

(1) 40〔磅/噸〕之阻力，意即車輛每〔噸〕重之阻力爲 40〔磅〕.

阻力爲 10〔磅/噸〕之常數。問在何處此火車初次停止？ 在何處此火車作最後之停止？ 答：5067〔呎〕；2133〔呎〕.

19. 一火車以 15〔哩/時〕之速度，開始走上 1% 之斜坡。假定火車阻力爲 8〔磅/噸〕。問此火車能行多遠？ 如火車到達最高點後，任其後退，問至斜坡底之速度爲若干？ 又若走完斜坡後，軌道變爲水平。問在此水平軌道上能行多遠？ 答：535〔呎〕；9.8〔哩/時〕；805〔呎〕.

20. 圖 333 所示之門重 300〔磅〕，以 A，B 兩輪懸於一軌道上。輪 B 在軌道上滾動，但輪 A 祇能滑動，$f = 0.25$。試求欲使門產生 5〔呎/秒^2〕之加速度時所需之力 P，並求在 A，B 兩處之反力。

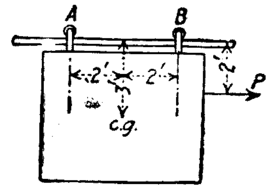


圖 333.

答：$P = 86.1$〔磅〕；$A_Y = 158$〔磅〕；$A_X = 39.5$〔磅〕；$B = 142$〔磅〕.

21. 假定在習題 20 內，P 之作用點比門之重心低 3〔呎〕。兩輪均係滑動，其加速度爲 8〔呎/秒^2〕。試求各值，假定軌道可以支住 A，B 兩輪之向上及向下之反力。

答：$P = 186.25$〔磅〕；$A_Y = 373.5$〔磅〕；$A_X = 93.4$〔磅〕；$B_Y = -73.5$〔磅〕；$B_X = 18.4$〔磅〕.

22. 假定在圖 333 內，力 P 之作用點比門之重心低 2〔呎〕，試求此門可能有之極大加速度，以使作用於 B 之反力，不致倒轉其方向。

答：12.075〔呎/秒^2〕.

23. 一 2〔呎〕× 2〔呎〕× 8〔呎〕之物塊，直立於卡車之後部，其 2〔呎〕邊與卡車前進之方向平行，摩擦係數 $f = 0.275$。如卡車之加速度逐漸增加，問此物體先滑動或先傾倒，並問開始滑動或傾倒時之加速度爲何？

答：傾倒；8.05〔呎/秒^2〕.

24. 假定習題 23 內，物體之 2〔呎〕邊與前進方向成 30° 角。試求其解。

答：滑動；8.85〔呎/秒^2〕.

第十三章

質 量 慣 矩

111. 定義與單位. 一物體關於任一所設軸之質量慣矩(moment of inertia of mass),爲此物體所有之微質量,分別與其至所設軸之距離平方之積之總和. 通常以 I 表示質量慣矩.

假定 M 爲物體之質量,V 爲其體積,γ 爲其單位體積內之質量,ϱ 爲各微質量至所設軸之距離. 則

$$M = \gamma V;\ \ dM = \gamma\, dV$$

$$I = \int \varrho^2\, dM = \gamma \int \varrho^2\, dV \tag{13.1}$$

假定將一物體之質量集中於一點,而不變其關於所設軸之慣矩,則此點與軸間之距離,卽等於物體關於所設軸之迴轉半徑. 通常以 k 表示之.

$$I = Mk^2 \tag{13.2}$$

據 (13.2) 式,可知假定將物體分成無限個等值之微質量 dM,則 k^2 卽爲其 ϱ^2 值之平均值.

一物體之質量慣矩,等於其質量與一長度之平方之積. Mk^2 卽爲其最簡單之形式. 工程上所用之單位質量〔斯勒〕(slug),等於單位〔磅〕之重量,除以單位〔呎/秒²之加速度〕. 故表示質量慣矩之單位時,質量之維爲〔磅〕/〔呎/秒²〕,長度之維必須用〔呎〕. 因此 I 之單位爲

$$\frac{〔磅〕}{〔呎/秒^2〕}\cdot〔呎^2〕\quad 卽\quad 〔磅\cdot秒^2\cdot呎〕$$

欲試驗含有 I 之方程式,是否爲齊次方程式,必須應用上述之 I

之單位。 質量慣矩之單位，並無特殊之名詞，故平常不記單位。

習 題

下述各材料單位體積內之重量為：木，40〔磅/呎^3〕；鋁，165〔磅/呎^3〕；鑄鐵，450〔磅/呎^3〕；鋼，490〔磅/呎^3〕；銅，556〔磅/呎^3〕。試求其 γ。

答：1.24；5.13；14.0；15.2；17.3.

112. 薄板之慣矩。 圖 334 表示任一薄板，OX, OY 為此薄板之中心平面[1]上之兩坐標軸。 Z 為經過點 O 且與薄板垂直之軸，dM 為薄板之微質量，x, y, ϱ 分別為此微質量與軸 X，軸 Y，及原點 O 間之距離。 則自上節之定義，得

$$\begin{cases} I_X = \int y^2\, dM \\ I_Y = \int x^2\, dM \end{cases} \tag{13.3}$$

$$I_Z = \int \varrho^2\, dM \tag{13.4}$$

因 $\varrho^2 = x^2 + y^2$，故得

$$I_Z = I_X + I_Y \tag{13.5}$$

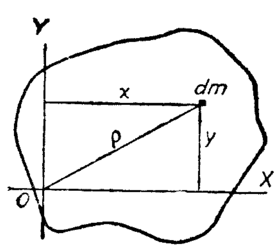


圖 334.

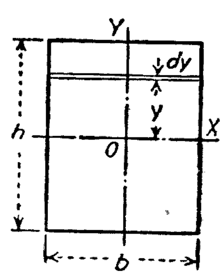


圖 335.

[1] 所謂中心平面(central plane)，即為經過薄板上下兩面間各中點之平面。

例題 1

試求圖 335 所示長方薄板之 I_X, I_Y, 及 I_Z.

【解】 命 t 爲此薄板之厚度,其微質量爲

$$dM = \gamma t b\, dy$$

$$I_X = \int y^2 dM = \gamma t b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\, dy$$

$$= \tfrac{1}{3}\gamma t b y^3 \Big]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$= {}^1/_{12}\, \gamma t b h^3$$

因 $M = \gamma t b h$,故得

$$I_X = {}^1/_{12}\, M h^2$$

同理

$$I_Y = {}^1/_{12}\, M b^2$$

由(13.5)式,得

$$I_Z = I_X + I_Y = {}^1/_{12}\, M(b^2 + h^2)$$

例題 2

試求圖 336 所示圓形薄板之 I_X, I_Y, 及 I_Z.

【解】 在此題內,可以先求 I_Z. 假定所取微質量爲

$$dM = \gamma t\, dA = \gamma t\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$I_Z = \int \rho^2\, dM$$

$$= \gamma t \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma t \pi r^4$$

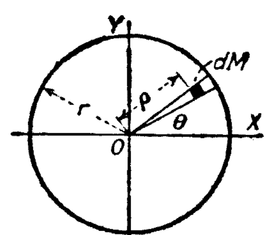


圖 336.

因

$$M = \gamma t \pi r^2$$

故得

$$I_Z = \tfrac{1}{2} M r^2$$

據對稱關係，得

$$I_X = I_Y$$

代入(13.5)式，得

$$I_X = I_Y = \tfrac{1}{4}Mr^2$$

例 題 3

試求圖 337 所示橢圓薄板之 I_X，I_Y，與 I_Z.

【解】 橢圓方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

自此式，得

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

其外接圓之方程式為

$$x^2 + y^2 = a^2$$

自此式得

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

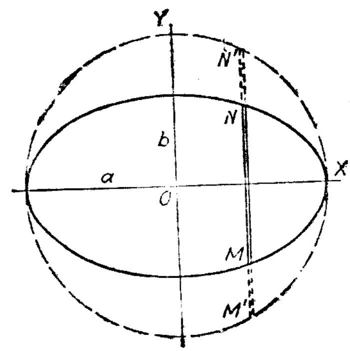


圖 337.

由此可知橢圓之微面積 MN，等於圓之微面積 $M'N'$ 之 b/a 倍。

據例題 1 之解，可知一長方形薄板之慣矩與其高度之立方成正比。 於是微面積 MN 關於 X 軸之慣矩，等於微面積 $M'N'$ 關於同一軸之慣矩之 b^3/a^3 倍。 據此等微分面積之慣矩和可知橢圓板之 I_X 等於圓板之 I_X 之 b^3/a^3 倍。 圓板之 I_X 為

$$I_X = \tfrac{1}{4}Ma^2 = \tfrac{1}{4}\gamma t\pi a^4$$

故得橢圓板之 I_X 為

$$I_X = \tfrac{1}{4}\gamma t\pi a^4 \times \frac{b^3}{a^3}$$

$$= \gamma t\pi ab \times \frac{b^2}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}Mb^2$$

同理，

$$I_Y = \tfrac{1}{4}Ma^2$$

故得：

$$I_Z = I_Y + I_X = \tfrac{1}{4}M(a^2 + b^2)$$

習　題

1. 試求長方形薄板關於其底邊之 I_X，假定 h 爲其高度，b 爲其底邊長度。

答：$I_X = \frac{1}{3}Mh^2$

2. 試求底邊 b，高度 h 之三角形薄板，關於(1)其底邊，(2)平行底邊之形心軸，(3)平行於底邊，並經過其頂點之軸之 I_X。

答：$\frac{1}{6}Mh^2$；$\frac{1}{18}Mh^2$；$\frac{1}{2}Mh^2$

3. 試證明一正方形薄板，關於其中心平面上任何形心軸之慣矩，爲一常數。

4. 在圖 336 上，直接用 $y^2\,dM$ 之積分求 I_X 之值。

113. 幾種幾何立體之慣矩. 在轉動之問題中，常用到質量慣矩；而此質量慣矩，必須爲關於轉動軸者。一物體之轉動軸，通常爲其幾何軸，或平行於幾何軸之一軸。茲舉若干例題如下，以說明有規則形狀之物體之慣矩及迴轉半徑之算式求法。

例　題　1

試證明高 h 之直稜柱，關於與其底面垂直之任一軸之質量慣矩，即等於 γh 乘其底面積關於同一軸之面積極慣矩。

$$I = \gamma h \times \text{底面積之極慣矩}$$

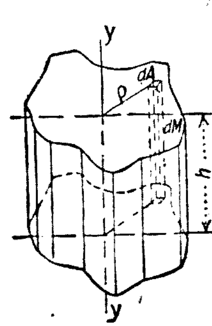


圖 338.

【解】 在圖 338 內，命與圖上所示直稜柱底垂直之任一軸 Y 爲軸，高 h 底面積 dA 之微直稜柱之質量爲

$$dM = \gamma h\, dA$$

$$I_Y = \int \rho^2 \, dM = \gamma h \int \rho^2 \, dA$$

$\int \rho^2 \, dA$ 即爲底面積關於 Y 軸之極慣矩，故得

$$I_Y = \gamma h \times \text{底面積之極慣矩。}$$

例　題　2

試求直圓柱關於其幾何軸之慣矩及迴轉半徑之算式。

【解】　直圓柱之底爲一圓，其幾何軸經過此圓之中心。　據例題 1.

$$I_Y = \gamma h \times \text{底面積之極慣矩} \; I_Y$$

$$= \gamma h \times \tfrac{1}{2}\pi r^4$$

$$= (\gamma \pi r^2 h) \times \tfrac{1}{2} r^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M r^2$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

須注意以上所得算式，即圓柱關於其幾何軸之慣矩，亦可自第 112 節之例題 2 求得之。

例　題　3

試求半徑爲 r 之均質球，關於其直徑之慣矩及迴轉半徑之算式。

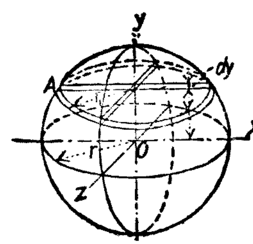


圖　339.

【解】　在圖 339 內，命軸 Y 爲慣軸。　設以垂直於軸 Y 之諸平面，將圓球分爲微薄片，其半徑爲 r_1，厚爲 dy。　圖上之 A 即爲微片之。

$$r_1^2 = r^2 - y^2$$

又

$$dM = \gamma\pi r_1^2 \, dy = \gamma\pi(r^2 - y^2) \, dy$$

據例題 2，圓形薄片關於 Y 軸之慣矩爲

$$I_Y = \tfrac{1}{2} \, dM \, r_1^2 = \tfrac{1}{2}\gamma\pi(r^2 - y^2)^2 \, dy$$

如求此等微慣矩在極限 $-r$ 及 $+r$ 間之和，即得整個圓球之慣矩。

$$I = \tfrac{1}{2}\gamma\pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - y^2)^2 \, dy = \tfrac{8}{15}\gamma\pi r^5$$

因

$$M = \gamma V = \tfrac{4}{3}\gamma\pi r^3$$

故得

$$I = \tfrac{2}{5}Mr^2$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = r\sqrt{\frac{2}{5}}$$

例題 4

試求一細桿關於經過其一端之軸之慣矩。

【解】 命 l 為桿之長度，W 為其重量，M 為其質量，A 為其截面積，θ 為桿與 Y 軸間之角(圖 340)。

$$dM = \gamma\, dV = \gamma A\, ds$$

$$I_Y = \int_0^l s^2 \sin^2\theta\, \gamma A\, ds = \gamma A \sin^2\theta \int_0^l s^2\, ds$$

$$= \tfrac{1}{3}\gamma A \sin^2\theta\, l^3$$

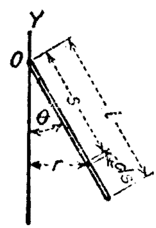


圖 340.

因

$$M = \gamma A l$$

故

$$I_Y = \tfrac{1}{3} M l^2 \sin^2\theta$$

若軸與桿垂直，$\theta = 90°$，則

$$I_Y = \tfrac{1}{3} M l^2$$

習題

1. 試求邊長為 a, b, c 之均質平行六面體，關於與邊 c 平行之幾何軸之慣矩及迴轉半徑之算式。 答：$I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$；$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}$

2. 試求長半軸 a，短半軸 b，長 l 之橢圓柱體，關於其幾何軸之慣矩及迴轉半徑之算式。 答：$I = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$；$k = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

3. 試求均質直圓錐關於其幾何軸之慣矩及迴轉半徑之算式。 設直圓錐底面積之半徑為 r，其高為 h。 答：$I = \frac{3}{10}Mr^2$；$k = 0.5477r$

4. 試求細桿關於與桿垂直之形心軸之慣矩及迴轉半徑之算式。

答：$I = \frac{1}{12}Ml^2$；$k = \frac{l}{3.464}$

5. 試求外半徑 r_1，內半徑 r_2 之空心直圓柱關於其幾何軸之慣矩之算式。

答：$I = \frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2)$

114. 質量慣矩之移軸公式. 若物體之轉動軸，並非其形心軸，用 $\int \varrho^2\,dM$ 之方法直接求其關於轉動軸之慣矩，通常頗爲煩難。欲得比較簡單之方法，先須求出關於轉動軸之慣矩，與關於與轉動軸平行之形心軸之慣矩間之關係。

圖 341 表示物體之上經過 G 並與慣軸垂直之截面。命點 O 爲任一平行軸與此截面之交點。故得關於經過點 O 之軸之慣矩爲

$$I = \int \varrho^2\,dM$$

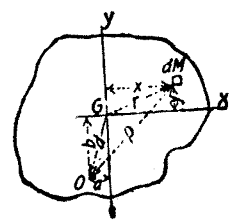


圖 341

自圖上得：

$$\varrho^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by$$

$$x^2 + y^2 = r^2;\ a^2 + b^2 = d^2$$

$$I = \int r^2\,dM + d^2\int dM + 2a\int x\,dM + 2b\int y\,dM$$

$$\int r^2\,dM = I_G;\ \int dM = M;\ \int x\,dM = \bar{x}M;\ \int y\,dM = \bar{y}M.$$

因 x, y 均自形心軸量起，故 $\bar{y}M$ 及 $\bar{x}M$ 均等於零。故得

$$I = I_G + Md^2 \tag{13.6}$$

一物體關於任一軸之質量慣矩，等於關於與此軸平行之形心軸之慣矩，加上物體之質量與兩軸間距離平方之積。

如將(13.6)式，除以 M，則得

$$k^2 = k_G^2 + d^2 \tag{13.7}$$

例題 1

試求半徑 r，高 h 之直圓柱，關於與底面平行之形心軸之慣矩．

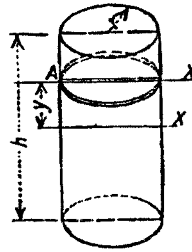


圖 342.

【解】 先將圓柱體分爲厚 dy 之微圓片． 圖 342 之 A 即爲一微圓片． 此片關於其本身之形心軸 X' 之慣矩爲 $\frac{1}{4}dMr^2$(見第 112 節，例題 2)． 其關於軸 X 之慣矩爲 $\frac{1}{4}dM\,r^2+dM\,y^2$，因 $dM=\gamma\pi r^2\,dy$，故得整個圓柱體關於軸 X 之慣矩，爲

$$I_X=\frac{1}{4}\gamma\pi r^4\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy+\gamma\pi r^2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}y^2\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\gamma\pi r^4h+\frac{1}{3}\gamma\pi r^2\frac{h^3}{4}$$

因

$$M=\gamma\pi r^2h$$

故得

$$I_X=M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$$

由上式可見若 h 甚小，而與 r 比較，h 可以略去不計時，I_X 之值則變爲 $\frac{1}{4}Mr^2$，與一圓形薄板者相同． 又若 r 甚小，而可以略去不計時，則 I_X 變爲 $^1/_{12}Mh^2$，其値與一細桿者同．

例題 2

試求高 h，底面積半徑 r 之直圓錐關於經過頂點，且與底面平行之軸之慣矩．

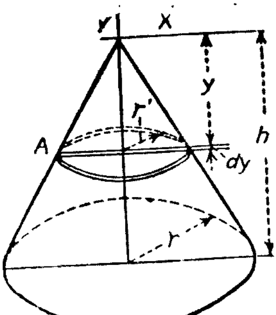


圖 343.

【解】 先將圓錐分爲薄圓片． 其厚度爲 dy，半徑爲變數 r'． 圖 343 之 A 則爲一微圓片． 其 I_X 爲 $\frac{1}{4}dM(r')^2+dM\,y^2$． 據平面 XY 在直圓錐之截面上之相似三角形，得 $r'/r=y/h$，或 $r'=ry/h$． 故得

$$dM = \gamma\pi(r')^2\, dy = \gamma\pi \frac{r^2}{h^2} y^2\, dy$$

對於整個圓錐，得

$$I_X = \frac{1}{4}\gamma\pi\frac{r^4}{h^4}\int_0^h y^4\, dy + \gamma\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h y^4\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\gamma\pi\frac{r^4}{h^4}\frac{h^5}{5} + \gamma\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^5}{5}$$

因 $M = \frac{1}{3}\gamma\pi r^2 h$，故

$$I_X = \frac{3M}{5}\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$$

習 題

1. 試求直圓柱關於在其底面上一直徑之慣矩及迴轉半徑之算式。

答：$I = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$

2. 設長方體之三邊長 a, b, c。試求關於面 ac 上與 c 平行之中心軸之慣矩。

答：$I = M\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{3}\right)$

3. 試求球關於其切線之慣矩之算式。 答：$I = \frac{7}{5}Mr^2$

4. 試求直圓錐關於其底面上之一直徑之慣矩。 答：$I = \frac{3}{5}M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{6}\right)$

5. 試求直圓錐關於與底面平行之形心軸之慣矩。

答：$I = \frac{3}{5}M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{16}\right)$

115. 合成體之慣矩. 欲求轉動物體關於其轉動軸之慣矩時，通常求構成此轉動體之幾個簡單部分之慣矩。例如一個普通之飛輪，有轂(hub)，輻(spoke)，輪緣(rim)，並用鍵(key)聯接於軸，隨軸轉動。故此轉動體包括(1)一實圓柱(軸)，(2)一空心圓柱(轂)，(3)若干細桿(輻)，及(4)第二個空心圓柱(輪緣)。

第 111 節內曾經說明，質量慣矩不記單位，故以不名數 (abstract number)視之。但在計算時，所用之數量必須予以適當之

單位.——重量之單位為〔磅〕, g 之單位為〔呎/秒^2〕;長度之單位為〔呎〕.

例　題

試求直徑 3〔呎〕,厚 4〔吋〕之磨石,關於其轉動軸之慣矩及迴轉半徑,沙巖之重量為 150〔磅/呎^3〕.

【解】 磨石為一圓柱體,其轉動軸即為其幾何軸,關於此軸之慣矩為 $I = \frac{1}{2}Mr^2$. 圓柱體之體積為 $\pi r^2 h = \pi(1.5)^2 \times \frac{1}{3} = 2.36$〔呎^3〕,重量 $W = 2.36 \times 150 = 354$〔磅〕,質量 $M = 354/32.2 = 11$.

$$I = \frac{1}{2} \times 11 \times (1.5)^2 = 12.38$$

$$k^2 = \frac{I}{M} = \frac{12.38}{11} = 1.126$$

$$k = \sqrt{1.126} = 1.06 \text{〔呎〕}.$$

習　題

1. 設鋼圓鋸之直徑 4〔呎〕,厚 $^3/_{16}$〔吋〕. 試求其關於幾何軸之慣矩. 鋼重 490〔磅/呎^3〕. 答: $I = 5.98$

2. 試求截面 1〔吋〕 × 1〔吋〕,長 4〔呎〕之鋼方桿,關於與軸垂直之形心軸之慣矩及迴轉半徑. 若將其視若一細桿而非為平行六面體時,所求得之 I 之百分誤差為若干. 答: $I = 0.565$; $k = 1.154$〔呎〕; 0.043%.

3. 試求習題 2 之鋼桿,關於經過其一端,並與桿成 20° 角之軸之慣矩及迴轉半徑. 答: $I = 0.2644$; $k = 0.79$〔呎〕.

4. 試求外直徑 16〔吋〕,內直徑 12〔吋〕之空心鑄鐵球,關於其直徑之慣矩及迴轉半徑,鑄鐵重 450〔磅/呎^3〕. 答: $I = 2.353$; $k = 0.484$〔呎〕.

5. 一鑄鐵調速器球之直徑為 5〔吋〕,用一直徑 1〔吋〕,長 20〔吋〕之鋼桿聯接於轉動軸上. 試求鋼桿與轉動軸成 40° 角時,球與桿之慣矩及迴轉半徑. 答: $I = 0.332$; $k = 1.12$〔呎〕.

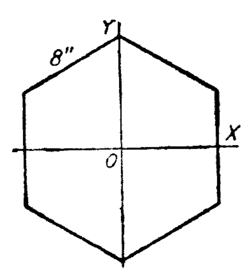


圖 344.

6. 圖 344 所示六角形鑄鐵板之每邊長 8〔吋〕，厚 1〔吋〕。如將其視作薄板，求關於其中心平面中兩坐標軸之 I_X 與 I_Y，再求 I_Z 之值，並用第 113 節例題 1 之方法，核對所求得之 I_Z。　　答：$I_X = I_Y = 0.1244$；$I_Z = 0.2488$

7. 設鑄鐵飛輪輪緣之外直徑爲 12〔呎〕，內直徑爲 11〔呎〕，面闊 2〔呎〕。其輻有六，截面爲軸長 6〔吋〕與 4〔吋〕之橢圓形。轂之外直徑爲 18〔吋〕，內直徑爲 6〔吋〕，長 20〔吋〕。此飛輪用鍵聯於直徑 6〔吋〕，長 20〔呎〕之軸上。試求輪與軸關於轉動軸之慣矩及迴轉半徑。計算時將輻當作細桿計算。

答：$I = 17,347$，$k = 5.16$〔呎〕。

116. 據實驗求慣矩法. 假定物體之形狀，不便於用積分法求得其慣矩時，則可用實驗方法求得之，其結果相當準確。實驗之方法甚多，對於工程問題最易應用者爲**擺法**(pendulum method)。在第 134 節內，將證明複擺(compound pendulum)之迴轉半徑，爲

$$k = \frac{T}{2\pi}\sqrt{gd} \tag{13.8}$$

式中 T 爲週期(period)，或擺動一全周之時間，g 爲重力加速度，d 爲轉動軸至與其平行之重心軸間之距離。轉動軸必須與所欲求得慣矩之慣軸平行。若物體在擺動時，週期 T 可以求得，即可據(13.8)式計算 k 之值。於是得

$$I_0 = Mk^2$$

I_0 爲關於轉動軸之慣矩。至於與轉動軸平行之重心軸之慣矩，爲

$$I_G = I_0 - Md^2$$

據 I_G 即可求得關於任何平行軸之慣矩。

習 題

1. 直徑 33〔吋〕之一對貨車輪與其連軸(connecting axle)共重 700〔磅〕.

若懸於與輪軸相距 4〔呎〕之刀口上，則在 3〔分〕43.7〔秒〕間，來回擺動 100 次。試求其關於重心軸之 I 與 k 之值。　　答：$I = 6.99$；$k = 0.568$〔呎〕.

2. 一柯立司引擎(Corliss engine)之連桿重 267〔磅〕，其重心與十字頭銷之中心相距 48.5〔吋〕。如用一鏈，懸於比十字頭銷之中心高 8〔吋〕之一懸點上，則在 50.9〔秒〕間來回擺動 20 次。試求關於重心軸之 I_G 及關於十字頭銷之 I_0。　　答：$I_G = 22.4$；$I_0 = 157.4$

117. 薄板關於斜軸之慣矩.

圖 345 表示任一薄板。OX, OY 爲在其中心平面上之任何兩直交軸。並命 OX', OY' 爲經過點 O 並與原有軸成角 θ 之一對直交軸。

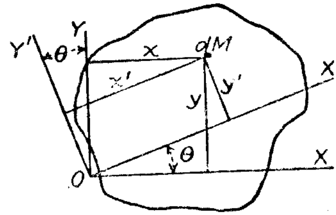


圖 345.

$$I_{X'} = \int (y')^2 \, dM$$

因

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$(y')^2 = y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta$$

於是

$$I_{X'} = \cos^2\theta\int y^2\,dM + \sin^2\theta\int x^2\,dM - 2\sin\theta\cos\theta\int xy\,dM$$

$$= I_X\cos^2\theta + I_Y\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\int xy\,dM$$

又因

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)；\ \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

則上式可以改記爲

$$I_{X'} = \tfrac{1}{2}(I_X + I_Y) + \tfrac{1}{2}(I_X - I_Y)\cos 2\theta - \sin 2\theta\int xy\,dM \qquad (13.9$$

同樣理由，因 $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$，得

$$I_{Y'} = \tfrac{1}{2}(I_X+I_Y) - \tfrac{1}{2}(I_X-I_Y)\cos 2\theta + \sin 2\theta \int xy\, dM \qquad (13.10)$$

例　　題

圖346示一闊 3〔呎〕，高 2〔呎〕，厚 1〔呎〕之鑄鐵板，求 $I_{X'}$ 之值．

【解】

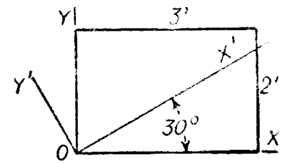


圖　346.

$$M = \frac{2\times 3\times 450}{12\times 32.2} = 7$$

$$I_X = \tfrac{1}{3}\times 7\times 2^2 = 9.33$$

$$I_Y = \tfrac{1}{3}\times 7\times 3^2 = 21$$

$$\int xy\, dM = \gamma t\int_0^3\int_0^2 x\,dx\, y\,dy = 9\gamma t = 10.5$$

$$I_{X'} = \frac{30.33}{2} - \frac{11.67}{2}\cos 60^\circ - 10.5\sin 60^\circ$$

$$= 3.167$$

習　　題

1. 試求圖346所示薄板關於 Y' 軸之慣矩。　　答：$I_{Y'} = 27.177$.

2. 設圖346之 θ 爲 15°，試求 $I_{X'}$ 及 $I_{Y'}$。　答：$I_{X'} = 4.865$；$I_{Y'} = 25.469$.

118. 薄板之慣積． 第117節內之 $\int xy\, dM$，謂之**質量慣積**(product of inertia of mass)。通常以 H 表示之。慣積係關於一雙之直交軸而言。在 x,y 中可能有一數爲負，故 H 之值可能爲正，亦可能爲負．

若軸 Y 爲薄板之對稱軸，則關於每 $(+x)\,y\,dM$ 項，必有一絕對值相等，符號相反之 $(-x)\,y\,dM$ 項，其和必等於零。同樣理由，若軸 X 爲薄板之對稱軸，則關於每 $(+y)\,x\,dM$ 項，必有一絕對值相等，符號相反之 $(-y)\,x\,dM$ 項，其和亦必等於零．

若一薄板之任何一坐標軸爲其對稱軸時，則關於此雙坐標軸之慣積爲零。

119. 慣積之移軸公式. 在圖 347 內，O 爲薄板之重心，OX, OY 爲在中心平面內經過重心之一雙直交軸。O_1X_1, O_1Y_1 爲在同一平面內與OX, OY平行之他雙直交軸。命 O_1Y_1 與 OY 間之距離爲 a，O_1X_1 與 OX 間之距離爲 b. 關於 O_1X_1 及 O_1Y_1 兩軸之慣積爲

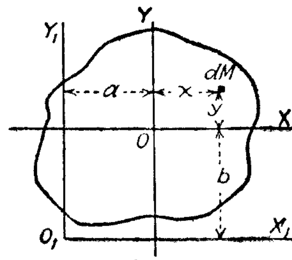


圖 347.

$$
\begin{aligned}
H_{O_1} &= \int (a+x)(b+y)\,dM \\
&= \int ab\,dM + \int ay\,dM + \int bx\,dM + \int xy\,dM \\
&= abM + a\bar{y}M + b\bar{x}M + H_0
\end{aligned}
$$

因 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$，故上式之第二，第三兩項爲零. H_0 爲關於 OX, OY 軸之慣積.

$$H_{O_1} = H_0 + abM \tag{13.11}$$

a 與 b 之值，可能爲正，亦可能爲負. 故 abM 亦可能爲正或爲負. 若薄板之重心，在 O_1X_1, O_1Y_1 兩軸之第一與第三兩象限內，則 abM 爲正. 若在第二，第四兩象限內，則其值爲負.

若一薄板係由許多簡單部分合成. 則其關於任何兩坐標軸之慣積，等於其各部分關於同一雙坐標軸之慣積之代數和。

例　題

試求圖 348 所示半圓板關於 X_1 及 Y_1 軸之慣積. 所設薄板係重 165〔磅/呎^3〕之鋁板. 其半徑爲 6〔吋〕，厚 $\frac{1}{2}$〔吋〕.

【解】 經重心之軸 Y 爲對稱軸，故

$$H_0 = 0, \text{ 及 } H_{01} = abM$$

$$M = \frac{\pi \times 165}{8 \times 24 \times 32.2} = 0.0838$$

$$H_{01} = \frac{4 \times 0.0838}{2 \times 2 \times \pi} = +0.0089$$

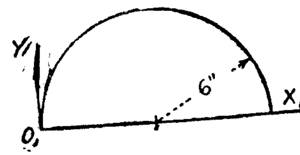


圖　348.

習　題

1. 試求闊 3〔呎〕，高 4〔呎〕，厚 $\frac{3}{4}$〔吋〕之長方形鋼板，關於在中心平面上，經其右下角並與兩邊平行之坐標軸之慣積。　　答： -34.26

2. 試求直徑 3〔呎〕厚 2〔吋〕之圓形鑄鐵板，關於在中心平面上並與板邊相切之一雙坐標軸之慣積。　　答： ± 7.04

3. 圖 349 所示之鋼板之厚度爲 3〔吋〕。試求其 H_{01}　　答： $+45.6$

4. 試求圖 349 所示三角形板左半部分之 H_{01}.（比較簡單之方法爲直接積分。）　　答： $+17.1$

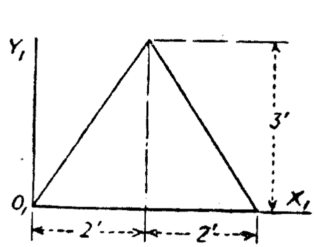


圖　349.

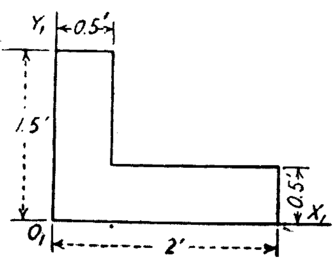


圖　350.

5. 圖 350 所示之鋼板厚 1〔吋〕。試求關於在中心平面內所示兩軸之 H_{01}.

答： $+0.4755$.

120. 薄板之主慣軸.

在第 117 節內，已證明一薄板關於與原有軸成角 θ 之軸之慣矩爲

$$I_{X'} = \tfrac{1}{2}(I_X + I_Y) + \tfrac{1}{2}(I_X - I_Y)\cos 2\theta - H_0 \sin 2\theta$$

當角 θ 變動時，I_X' 亦隨之而變。若求 I_X' 對於 θ 之導數，並使等於零，則可求得使 I_X' 成其極大值及極小值時之角 θ。

$$\frac{dI_X'}{d\theta} = (I_Y - I_X)\sin 2\theta - 2H_0\cos 2\theta$$

當 I_X' 成極大值與極小值時

$$(I_Y - I_X)\sin 2\theta - 2H_0\cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{2H_0}{I_Y - I_X} \tag{13.12}$$

據(13.12)式，可得相差 180° 之 2θ 之兩值．換言之，卽相差 90° 之 θ 之兩值．一爲生成極大 I_x' 之角度，一爲極小 I_X' 之角度。極大與極小慣矩，謂之**主慣矩**(principal moment of inertia)，其對應之軸謂之**主軸**(principal axis)。

若軸 X 或軸 Y 爲對稱軸，$H_0 = 0$，(見第 118 節)，則據(13.12)式：

$$\tan 2\theta = 0,$$

$$2\theta = 0° \text{ 或 } 180°,$$

$$\theta = 0° \text{ 或 } 90°$$

故軸 X 與軸 Y 均爲主軸。

例　題

試求圖 348 所示薄板，經過點 O_1 之主軸，及其極大與極小慣矩。

【解】 自第 119 節例題所得結果

$$2H_{o_1} = 0.0178$$

$$I_{Y_1} = 0.02619$$

$$I_{X1} = 0.00524$$

$$\tan 2\theta = \frac{0.0178}{0.02095} = 0.85$$

$$2\theta = 40°20' \text{ 或 } 220°20'$$

$$\theta = 20°10' \text{ 或 } 110°10'$$

極小 $I_{X'} = \frac{1}{2}(0.02619 + 0.00524) - \frac{1}{2}(0.02619 - 0.00524) \times 0.76$

$$- 0.0089 \times 0.648$$

$$= 0.00201$$

極大 $I_{X'}$ (或 $I_{Y'}$) $= 0.02943$。

習 題

1. 試求圖 346 所示長方板經過點 O 之兩主軸，並求其極大與極小慣矩。

答：$\Theta = 30°28'$; 或 $120°28'$; $I_{Y'} = 27.18$; $I_{X'} = 3.16$.

2. 試求圖 350 所示薄板之重心位置及經過重心之兩主軸，並求其極大與極小慣矩。

答：$\bar{x} = \frac{3}{2}$〔呎〕。$\bar{y} = \frac{1}{2}$〔呎〕; $\Theta = 63°25'$, 或 $153°25'$. 極大 $I = 0.7985$; 極小 $I = 0.1921$.

3. 圖 351 所示 Z 形鋅板之厚度爲 $\frac{1}{2}$〔吋〕. 試求經過點 O 之主軸位置。並求在其中心平面中關於此兩主軸之極大與極小慣矩。 鋅之重量爲 440

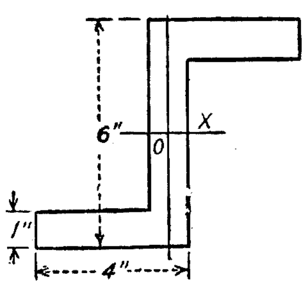


圖 351.

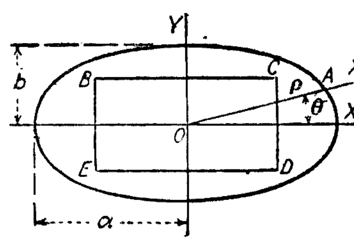


圖 352.

〔磅/呎^3〕。答：$\Theta = 57°10'$ 或 $147°10'$; 極大 $I = 0.002077$; 極小 $I = 0.000259$.

121. 薄板之慣橢圓. 設將一薄板,——例如圖 352 之 $BCDE$——之兩主軸與 X 及 Y 軸相併合，$\Theta = 0$, 故據(13.12)式得

$$\frac{2H_0}{I_Y - I_X} = 0$$

由此可見關於兩主軸之慣積為零．故據(13.9)式，關於與主軸 X 成角 θ 之任一軸 X' 之慣矩算式簡化為

$$I_X' = I_X' \cos^2\theta + I_Y \sin^2\theta$$

如沿軸 OX'，取長度 $\varrho = OA$，其值與 I_X' 之平方根成反比，則可用圖解法表示出 I_X' 之變化．設 K 為適宜之常數，而

$$\varrho = \frac{K}{\sqrt{I_X'}}$$

$$I_X' = \frac{K^2}{\varrho^2} = I_X \cos^2\theta + I_Y \sin^2\theta$$

$$K^2 = I_X \varrho^2 \cos^2\theta + I_Y \varrho^2 \sin^2\theta$$

上式中 $\varrho\cos\theta = x$，$\varrho\sin\theta = y$ 為點 A 之坐標．故

$$K^2 = I_X x^2 + I_Y y^2$$

故

$$\frac{x^2}{(K^2/I_X)} + \frac{y^2}{(K^2/I_Y)} = 1 \qquad (13.13)$$

(13.13)式為一橢圓方程式，其長半軸為 $a = K/\sqrt{I_X}$，短半軸為 $b = K/\sqrt{I_Y}$．

例　題

圖352示一鋼板，$BC = 4$〔呎〕，$CD = 2$〔呎〕，厚度 $= \frac{3}{8}$〔吋〕．假定 $K = 4$，試求 $\theta = 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°$，及 $90°$ 時 ϱ 之大小．

【解】

$$M = \frac{2 \times 4 \times 3 \times 490}{32.2 \times 8 \times 12} = 3.81$$

$$I_X = \frac{3.81 \times 4}{12} = 1.27$$

$$I_Y = \frac{3.81 \times 16}{12} = 5.08$$

當 $\theta = 0°$ 時，

$I_X' = I_X = 1.27$； $\sqrt{1.27} = 1.127$； $\varrho = \dfrac{4}{1.127} = 3.56$〔呎〕.

當 $\Theta = 15°$ 時，

$I_X' = 1.27 \times 0.966^2 + 5.08 \times 0.259^2 = 1.523$； $\sqrt{1.523} = 1.235$；

$\varrho = \dfrac{4}{1.235} = 3.24$〔呎〕.

當 $\Theta = 30°$ 時，

$I_X' = 1.27 \times 0.866^2 + 5.08 \times 0.5^2 = 2.222$； $\sqrt{2.222} = 1.49$；

$\varrho = \dfrac{4}{1.49} = 2.68$〔呎〕.

當 $\Theta = 45°$ 時，

$I_X' = 1.27 \times 0.707^2 + 5.08 \times 0.707^2 = 3.175$； $\sqrt{3.175} = 1.78$；

$\varrho = \dfrac{4}{1.78} = 2.245$〔呎〕.

當 $\Theta = 60°$ 時，

$I_X' = 1.27 \times 0.5^2 + 5.08 \times 0.866^2 = 4.128$； $\sqrt{4.128} = 2.035$；

$\varrho = \dfrac{4}{2.035} = 1.97$〔呎〕.

當 $\Theta = 75°$ 時，

$I_X' = 1.27 \times 0.259^2 + 5.08 \times 0.966^2 = 4.825$； $\sqrt{4.825} = 2.20$

$\varrho = \dfrac{4}{2.20} = 1.82$〔呎〕

當 $\Theta = 90°$ 時，

$I_X' = I_Y = 5.08$； $\sqrt{5.08} = 2.254$； $\varrho = \dfrac{4}{2.254} = 1.78$〔呎〕

習　題

1. 假定圖 352 所示薄板爲鑄鐵板，其厚度爲 1〔吋〕，$BC = 3$〔呎〕，$CD = 2$〔呎〕。設 $K = 5$，試求 $\Theta = 0°, 15°, 30°, 60°, 90°$ 時 ϱ 之值。

答：3.28〔呎〕；3.14〔呎〕；2.85〔呎〕；2.35〔呎〕；2.18〔呎〕.

2. 假定 $K = 0.05$，試求圖 351 所示薄板關於極小主軸之 ϱ 值。　並求當

$\theta=15°$, $32°50'$ (即軸 Y), $60°$, 及 $90°$ 時之 ρ.

答: 3.115〔呎〕; 2.56〔呎〕; 1.77〔呎〕; 1.24〔呎〕; 1.095〔呎〕.

質量慣矩之總習題

1. 計算實心圓柱關於在其一端之直徑之慣矩，若將其視作細桿，所生之誤差達 1% 時，其直徑與長度之比例應等於若干。　答: 1:4.31

2. 試求一直橢圓柱關於其形心截面中長短兩軸之慣矩。

答: $I_X = M\left(\frac{b^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$; $I_Y = M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$

3. 試求直橢圓柱關於在其一端之長短兩軸之慣矩。

答: $I_X = M\left(\frac{b^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$; $I_Y = M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$

4. 一鑄鐵之調速器球之直徑爲 4.5〔吋〕，其臂爲長 20〔吋〕，直徑 1〔吋〕之鋼桿。　假定球與臂繞經過臂之另一端之鉛直軸轉動，臂與轉動軸間之角爲 20°。試求其慣矩。　答: $I = 0.1762$.

5. 假定在習題 4 內之桿與轉動軸成 60° 角，試求球與臂之慣矩。

答: $I = 1.096$.

6. 一鋼盤之直徑 9〔吋〕，厚 3〔吋〕。其轉動軸與幾何軸相距 3〔吋〕。試求關於轉動軸之慣矩。　答: $I = 0.223$.

7. 圖 353 示一轉動之鑄鐵盌之截面。　盌之外面爲半球形，內爲圓錐形。

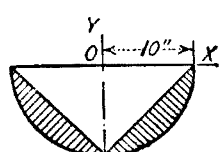


圖　353.

試求此盌關於軸 Y 之慣矩。　答: $I = 2.942$.

8. 試求外直徑 8〔吋〕，內直徑 6〔吋〕之空心鑄鐵圓球，關於與其中心相距 1〔呎〕之軸之慣矩。　答: $I = 1.328$.

9. 試求外直徑 4〔呎〕，內直徑 3〔呎〕，長 16〔吋〕之空心鋼圓柱，關於內圓柱面之一母線之慣矩。　答: $I = 598$.

10 試求習題 9 之空心圓柱關於外圓柱面之一母線之慣矩。 答：$I = 792$.

11. 一直徑 30〔吋〕，厚 3〔吋〕之鋼盤，其中心有一直徑 6〔吋〕之圓柱形孔；與盤之中心相距 10〔吋〕處，復有一直徑 4〔吋〕之圓柱形孔。試求其重心之位置，並求關於與幾何軸平行之形心軸之慣矩。 答：0.0157〔呎〕；$I = 14.326$.

12. 一飛輪調速器，包括 4〔吋〕寬，22〔吋〕長，1〔吋〕厚之鑄鐵板，及聯於板之兩端之鑄鐵圓柱 A 與 B（圖 354）。 圓柱 A 之直徑爲 8〔吋〕，厚度爲 3〔吋〕，圓柱 B 之直徑爲 8〔吋〕，厚度爲 5〔吋〕。 試求此調速器關於經過 O 並與圓柱軸平行之軸之慣矩。 答：$I_O \doteqdot 6.323$.

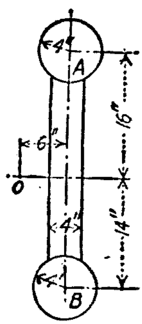


圖 354.

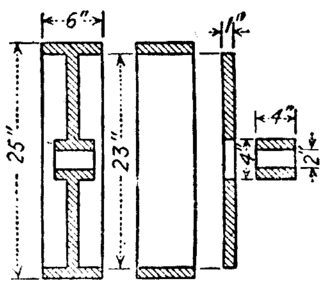


圖 355.

13. 圖 355 表示具有實心腹鈑（solid web）之鑄鐵滑輪之維。 試求其關於幾何軸之慣矩。 答：$I = 5.214$

14. 圖 356 所示之鑄鐵飛輪有六個橢圓截面之輻，假定將輻視作細桿。試求此輪關於其幾何軸之慣矩。 答：$I = 107.60$

15. 習題 14 之飛輪之慣矩，可用下述之近似法求之，不計其轂之慣矩，但其輻以三個長 51〔吋〕貫穿中心之輻替代之。 答：$I = 107.46$

16. 有一 2〔呎〕平方，1〔吋〕厚之鋼板。 試求其關於在其中心平面上，經過一邊之中點及對邊之角之軸之慣矩（圖 357）。 答：$I_{X'} = 2.704$

17. 假定在圖 357 內，沿水平方向之長度增加至 4〔呎〕，其餘之維不變。設有軸 OX'，經過左邊之中點及右上角。 試求關於此軸之慣矩。

答：$I_{X'} = 6.36$

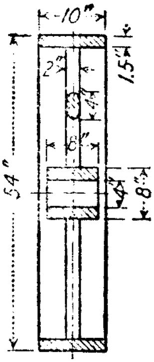


圖　356.

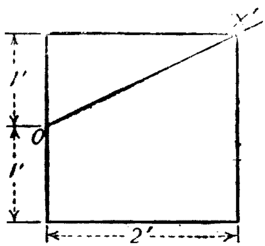


圖　357.

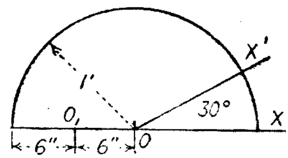


圖　358.

18. 圖 358 所示之薄板重 8.2〔磅〕。試求其關於軸 OX' 之慣矩。

答：$I_{X'} = 0.0635$

19. 在圖 358 內，試求薄板關於經過點 O' 之軸之極大與極小慣矩。

答：極大 $I = 0.1582$；極小 $I = 0.0328$

20. 試證明一各邊相等之薄板，關於在其中心平面內任何形心軸之慣矩，爲一常數。

第十四章

剛體之轉動

122. 角移. 假定一質點以定長之半徑，在平面上作曲線運動時，則此運動謂之**轉動**(rotation). 半徑所轉過的角度，謂之**角移**(angular displacement). 角移之單位爲〔弳〕(radian). 當弧長等於半徑時，則此弧在圓心所張之角度等於1〔弳〕. 在圖 359 內弧長 AB 即等於半徑 r，故角 AOB 即等於 1〔弳〕. 若命弧長 ABC 爲 s，因角度與所張之弧成正比例，故

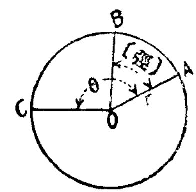


圖 359

$$\theta = \frac{s}{r}$$

即

$$s = r\theta \tag{14.1}$$

整個圓周所張之角度爲 2π〔弳〕，故 2π〔弳〕$= 360°$，或 1〔弳〕$= 360°/2\pi = 57.3°$ (更準確之數值爲 $57.29578°$).

通常以反時針方向之角移爲正，在順時針方向之角移爲負.

若一剛體具有轉動，則沿轉動軸之各質點之位置固定不變，其餘各質點，則在以轉動軸爲中心之圓形軌跡上運動. 由此可見在轉動剛體之運動面上，任一線之角移與此剛體上任一點之徑線之角移相同.

習 題

1. 試將下列各值,化爲〔弳〕: 30°; 120°; 400°; 3.6〔轉〕.

答: 0.5236〔弳〕; 2.0944〔弳〕; 6.981〔弳〕; 22.621〔弳〕.

2. 試將下列各值,化爲〔度〕: 1.6〔弳〕, 3π〔弳〕: 6.4〔轉〕.

答: 91°41′; 540°; 2304°.

3. 試將下列各值化爲〔轉〕: 75°; 420°; 6〔弳〕; 22.3〔弳〕.

答: 0.2083〔轉〕; 1.167〔轉〕; 0.955〔轉〕; 3.55〔轉〕.

4. 若圓之直徑爲3〔呎〕,試求其75°,及2.5〔弳〕之弧長.

答: 1.96〔呎〕; 3.75〔呎〕.

123. 角速度. **角速度**(angular velocity)爲在一剛體之轉動平面中,任一線之角移對於時間之變率,或爲一質點在轉動時之徑線之角移對於時間之變率. 若在等時間內之角移相等,則其角速度爲常數. 命 ω 爲以〔弳/秒〕計之角速度, θ 爲在時間 t 內之角移,則得角速度,或角移對於時間之變率爲

$$\omega = \frac{\theta}{t} \tag{14.2}$$

若角速度爲一變數,則在任一短時間 Δt 內之平均角速度爲

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬時角速度(instantaneous angular velocity)爲

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{14.3}$$

據(14.1)式 $s = r\theta$ 對於 t 之微分,可求得**線速度** (linear velocity)與角速度之關係如下:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\omega \tag{14.4}$$

平常所用之角速度之單位爲〔轉/分〕,亦有簡寫爲 r.p.m. 者. 在

解題時，可將此單位化爲〔弳/秒〕。

$$1\,[\text{轉/分}] = \frac{1}{60}[\text{轉/秒}] = \frac{2\pi}{60}[\text{弳/秒}].$$

角速度之符號，通常以反時針方向者爲正，順時針方向者爲負。因角速度有大小及方向，故爲一矢量。在圖解時，常以矢線表示之。畫角速度矢量之方法，與畫力偶者同。矢量與轉動軸平行，如從矢首向矢尾看去，則轉動之方向應爲反時針方向，卽正方向。代表角速度之矢量，可用圖解法，合併爲代表其合角速度之合矢。反之，代表角速度之矢量，亦可分解爲其分矢。

習題

1. 一滑輪之直徑爲 16〔吋〕，轉速爲 1800〔轉/分〕。試求其用〔弳/秒〕表示之角速度，及用〔呎/秒〕單位表示之輪邊切線速度。

答：$\omega = 188.5$〔弳/秒〕；$v = 125.7$〔呎/秒〕.

2. 兩摩擦輪之小者之直徑爲 4.5〔吋〕，其大者之直徑爲 30〔吋〕。若小輪之轉速爲 20〔轉/分〕。試求大輪之角速度及輪緣之線速度。

答：$\omega = 0.314$〔弳/秒〕；$v = 0.3927$〔呎/秒〕

3. 假定在直徑 4〔呎〕之滑輪上皮帶之線速度爲 1〔哩/分〕。試求滑輪之角速度 ω。

答：$\omega = 44$〔弳/秒〕.

124. 角加速度. 任何轉動質點之徑線之角速度，對於時間之變率，或一剛體在其轉動平面中任一線之角速度對於時間之變率，均謂之**角加速度**(angular acceleration)。若在等時間內，角速度之值爲常數，則角加速度爲零。在等時間內，角速度之變化相等，則其角加速度爲一常數；若在等時間內，角速度之變化不等，則其角加速度爲一變數。

若角加速度爲一常數時，則在時間 t 內角速度之總變量，除以 t，

卽得角加速度．設命 α 爲角加速度，ω 爲角速度之總變量，則得

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \tag{14.5}$$

若角加速度爲變數，則其在任一點之**瞬時加速度** (instantaneous acceleration)爲

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{14.6}$$

如自(14.3)(14.6)兩式，消去 dt，得

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \tag{14.7}$$

如求(14.4)式對於 t 之微分，卽得切線加速度 a_t 與角加速度 α 間之關係[1]．

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha \tag{14.8}$$

據第 105 節之(11.15)式，($\rho = r$)，得 $a_n = v^2/r$ 及 (14.4)式，得 $v = r\omega$，於是

$$a_n = r\omega^2 \tag{14.9}$$

由此可見切線加速度與半徑及與角加速度成正比例．法線加速度與半徑及與角速度之平方成正比例．法線加速度與角加速度毫無關係．

角加速度之單位爲〔弳/秒²〕．角加速度亦爲一矢量，圖解時以矢線代表之．與角速度相似，角加速度有正負．通常以反時針方向者爲正，順時針方向者爲負．

習　題

1．試求第 123 節習題 3 滑輪邊上一點之法線加速度．假定滑輪在 20〔秒〕內到達其全速度，試求其平均角加速度．

【譯註】 (1) 此處假定 r 爲常數，例如在圓運動時之情形．比較普徧之公式，見附卷第二章．

答：$a_n = 3872$〔呎/秒^2〕；$a_t = 2.2$〔呎/秒^2〕.

2. 假定第 123 節習題 2 內之摩擦輪，能於 0.2〔秒〕內以等加速度，從靜止狀態增至所設之轉動速度。 試求每輪之角加速度及在切點之切線加速度.

答：$\alpha_1 = 10.47$〔弳/秒^2〕；$\alpha_2 = 1.57$〔弳/秒^2〕；$a_t = 1.96$〔呎/秒^2〕.

125. 沿圓周之等速運動. 在圖 360 內，假定一剛體之任一質點 A，以 ω〔弳/秒〕之等角速度繞軸 O 轉動. 因 ω 為一常數，故角加速度 α 及切線加速度 a_t 均等於零. 其法線加速度為 $a_n = r\omega^2$. 設 M 為此質點之質量，則作用於此質點上向之點 O 之法線力為 Ma，即 $Mr\omega^2$.

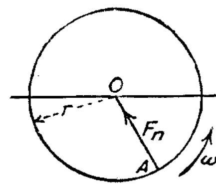


圖 360.

質點轉動一周所需之時間，謂之**週期**(period)。若一周之〔弳〕數，除以質點之角速度(單位〔弳/秒〕)，即得週期 T (單位〔秒〕)：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14.10}$$

習　題

1. 一汽輪機之直徑為 16〔吋〕，其轉速為 12,500〔轉/分〕。 試求其週期 T，角速度 ω，及輪緣任一點之法線加速度 a_n。

答：$T = 0.0048$〔秒〕；$\omega = 1309$〔弳/秒〕；$a_n = 1,140,000$〔呎/秒^2〕.

2. 一物體重 2〔磅〕，繫於長 1.6〔呎〕之繩之一端，以 6〔轉/秒〕之速率在一光滑之水平面上轉動。試求繩之牽力。　答：141.4〔磅〕.

126. 簡諧運動. **簡諧運動**(simple harmonic motion)為一直線振動，其加速度之絕對值與從一定點量起之位移成正比例，但方向相反。 設命 a 為加速度，s 為從一定點量起之位移，K 為一常數，則：

$$a = -Ks \tag{14.11}$$

簡諧運動爲直線運動，本應於第十一章內討論之。但用輔助圓(auxliary circle)之方法，演得其運動方程式，更爲簡單。所謂輔助圓，卽爲半徑等於簡諧運動之振幅(amplitude)之轉動圓。

在圖361內，命 P 爲以等角速度 ω 在正向轉動之一質點，此質點沿半徑 r 之轉動圓運動。點 A 爲質點 P 位置之始點，時間卽從在此始點之時刻量起。點 P 在直徑 BC 上之射影 P' 之運動爲簡諧運動。其證明如下。AOP 之角移爲

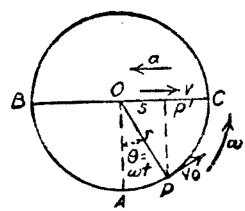


圖　361.

$$\theta = \omega t$$

點 P' 自點 O 量起之位移爲

$$s = r\sin\omega t \tag{14.12}$$

點 P' 之速度爲

$$v = \frac{ds}{dt} = r\omega\cos\omega t \tag{14.13}$$

此速度卽爲點 P 之切線速度之水平分矢，如圖362(a)所示。點

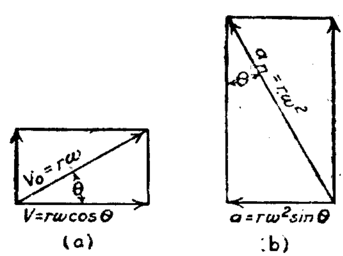


圖　362.

P' 之加速度爲

$$a = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t \tag{14.14}$$

此加速度卽爲點 P 之加速度之水平分矢，如圖 362(b)所示。據(14.12)(14.14)兩式，得

$$a = -\omega^2 s \tag{14.11a}$$

因角速度 ω 爲一常數，故 ω^2 亦應爲一常數，此常數卽應等於(14.11)式之 K. 因此證明：點 P' 之運動爲簡諧運動。

點 P' 自 O 運動至 P' 所需時間 t，可據(14.12)式求得

$$t = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\frac{s}{r}$$

P' 來回振動一次所需之時間 T，與 P 轉一周之時間相同。故據第 125 節，得

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14.15}$$

在圖 363 內，假定曲柄銷 P 以等速率沿着曲柄銷圓 (crankpin circle) 運動，則活塞及有槽滑子(slotted slider)之運動爲簡諧運

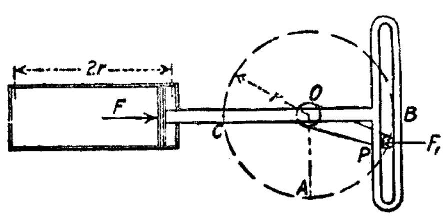


圖 363.

動。受有載荷之螺卷彈簧，如使其沿軸向振動，則其運動亦爲簡諧運動。設將此螺卷彈簧裝在鉛直方向，以重量 W 使其產生之靜伸長(static elongation)爲 e，則此彈簧之標度 C' (單位〔磅/呎〕)爲：

$$C' = \frac{W}{e}$$

卽

$$e = \frac{W}{C'} \tag{14.16}$$

若使 W 在鉛直方向移過一定距離，然後釋放，則此重量以簡諧運動，自其靜力平衡之位置上下振動。其振動週期為

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

此週期與振幅無關。又若 $s = -1$，自(14.11a)式，$a = \omega^2$，則在 W 上之不平衡力為

$$C' = Ma = \frac{W}{g}\omega^2$$

$$\omega^2 = g\frac{C'}{W} = \frac{g}{e}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{e}}$$

代入(14.15)式，得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}} \tag{14.17}$$

普通往復式蒸汽引擎之活塞與十字頭，以及振動片彈簧 (leaf spring) 之運動，與簡諧運動極近似。

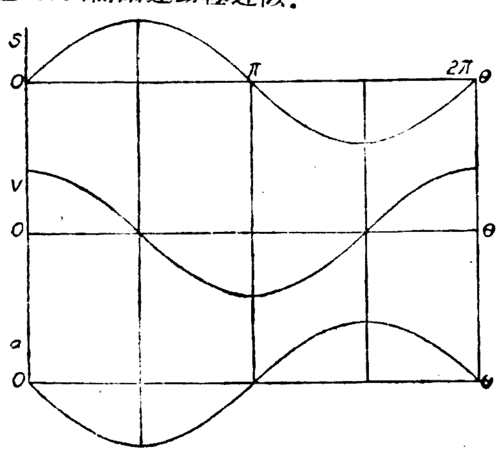


圖 364.

圖 364 表示 s,v,a,對於 θ 之變化。此等曲線爲正弦及餘弦曲線。

例 題 1

在圖 363 所示之機構內，$r = 1$〔呎〕,曲柄銷之轉速為 120〔轉/分〕。試求 ω, T, v_0,以及活塞之極大加速度。若活塞與滑子之重量爲 200〔磅〕,汽壓力 F 爲零。試求活塞在其端位置時,曲柄銷作用於滑子上之力 F_1.

【解】 $$120\text{〔轉/分〕} = 2\text{〔轉/秒〕} = 4\pi\text{〔弳/秒〕}$$

$$\omega = 4\pi = 12.57\text{〔弳/秒〕}.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2}\text{〔秒〕}$$

$$v_0 = r\omega = 12.57\text{〔呎/秒〕}$$

$$\text{極大 } a = -\omega^2 r = -158\text{〔呎/秒}^2\text{〕}$$

活塞在其端位置時，在活塞及滑子之運動方向上唯一之外力，即爲作用於曲柄銷上之力 F_1。因加速度向左,故力 F_1 之方向亦向左。據 $F = Ma$, 得

$$F_1 = \frac{200}{32.2} \times 158 = 981\text{〔磅〕}.$$

例 題 2

圖365表示在光滑之平面上，介於兩螺卷彈簧間之點 O 之10〔磅〕重之球。此球聯接於此二螺卷彈簧上，故球在水平方向移動時,一個彈簧壓縮,一個彈簧拉長。球在中點時，兩彈簧之力均等於零。兩彈簧之標度均爲 25〔磅/吋〕。假定使球移過 3〔吋〕，然後釋放。試求其速度 v_0 及振動週期 T. 並求釋放後 0.45〔秒〕時球之位置，速度，及加速度。

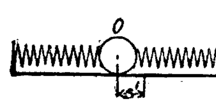


圖 365.

【解】 每一彈簧作用於球上之力之〔磅〕數,數量上等於其位移〔吋〕數之 25 倍,故當球移過 3〔吋〕時,兩彈簧作用於球上之合力爲

$$F = 2 \times 3 \times 25 = 150\ [\text{磅}].$$

據

$$F = Ma = \frac{W}{g} r\omega^2$$

可以求得 ω^2 之値。

$$150 = \frac{10}{32.2} \times \frac{3}{12}\omega^2$$

$$\omega^2 = 1932$$

$$\omega = 43.95\ [\text{弳/秒}].$$

$$v_0 = r\omega = 0.25 \times 43.95 = 10.99\ [\text{呎/秒}]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{43.95} = 0.14296\ [\text{秒}].$$

在 0.45〔秒〕時，球已完成 3 個振動，第四個振動則已開始 $0.45 - 3 \times 0.14296 = 0.02112$〔秒〕。與此時間相當者，爲從端位置量起之角移 $43.95 \times 0.02112 = 0.9282$〔弳〕。但(14.12)(14.13)(14.14)式內之 ωt，均自球之中間位置量起，即早 90°，故必須再加上 $\pi/2$〔弳〕，故得

$$\omega t = 0.9282 + \frac{\pi}{2} = 0.9282 + 1.5708$$

$$= 2.499\ [\text{弳}] = 143°12'.$$

釋放後 0.45〔秒〕時之位移爲

$$s = r \sin 143°12' = 0.15\ [\text{呎}].$$

此時球之速度爲

$$v = r\omega \cos 143°12' = -8.79\ [\text{呎/秒}]$$

球之加速度爲

$$a = -\omega^2 s = -289.8\ [\text{呎/秒}^2]$$

如不用 ωt，可改用半徑 OP 與任一軸所成較小之角。在圖 366 內，此角爲 $\beta = 36°48'$.

位移 $s = OP' = 0.25 \sin 36°48' = 0.15$〔呎〕

速度 $v = -v_0 \cos\beta = -10.99 \times 0.8 = -8.79$〔呎/秒〕.

法線加速度 $a_n = r\omega^2 = 0.25 \times 1932 = 483$〔呎/秒²〕

加速度 $a = -a_n \sin\beta = -483 \times 0.599 = -289.8$〔呎/秒²〕.

習 題

1. 在圖 364 內,命曲柄與鉛直半徑 OA 間之角 POA 爲 75°,其餘已知量與例題 1 內所設者相同。試求活塞之速度及加速度並求其從中間位置計算起之時間。假定蒸汽之總壓力爲 300〔磅〕,試求作用於曲柄銷上之力 F_1。

答: 3.25〔呎/秒〕; 152.63〔呎/秒²〕; $^5/_{48}$〔秒〕; 1246〔磅〕.

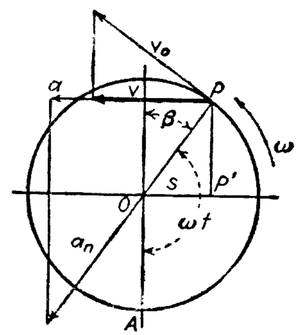


圖 366.

2. 假定圖 365 內所示之球,並不與彈簧聯接,試求其振動之週期。若球向左移過 4〔吋〕,然後釋放,試求釋放後 1.1〔秒〕之位移,速度,與加速度。

答: $T = 0.2021$〔秒〕; $s = 0.31$〔呎〕; $v = 3.74$〔呎/秒〕; $a = -300$〔呎/秒²〕.

3. 假定有一 50〔磅〕之重物,懸於一 10〔磅〕之彈簧上[1]。試求其振動之週期。若此重物再向下拉過 6〔吋〕,再驟然釋放。試求 0.6〔秒〕後,此重物距其靜力平衡位置之位移,速度,及其加速度。

答: $T = 0.715$〔秒〕; $s = -0.265$〔呎〕; $v = -3.71$〔呎/秒〕; $a = 20.52$〔呎/秒²〕.

127. 等角加速度運動. 據(14.6)式:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha\, dt$$

命 ω_0 爲初速度, ω 爲經過時間 t 之速度. 若加速度爲一常數,則:

(1) 所謂 10〔磅〕彈簧,意卽需用 10〔磅〕之力,方得將此彈簧拉長 1〔吋〕.

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t \qquad (14.18)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

據(14.3)式

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt = (\omega_0 + \alpha t)dt$$

$$\int_0^{\theta} d\theta = \omega_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t\,dt$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (14.19)$$

據(14.7)式，

$$\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\,d\omega = \alpha \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} = \alpha\theta$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad (14.20)$$

習　題

1. 設一飛輪之轉速，在1〔分〕20〔秒〕內，自零值增至1600〔轉/分〕。試求其平均角速度 α 及所需之轉數。並求在15〔秒〕末之速度。

答：2.094〔弳/秒²〕；1067〔轉〕；31.41〔弳/秒〕。

2. 若習題1之飛輪之直徑爲18〔吋〕，試求其輪緣上一點在15〔秒〕末之切線加速度，並求此點在全速度時之切線速度與法線加速度。

答：$a_t = 1.571$〔呎/秒²〕；$v = 125.67$〔呎/秒〕；$a_n = 21{,}056$〔呎/秒²〕。

3. 有一轉速爲8000〔轉/分〕之發動機，在64〔分〕20〔秒〕間因摩擦力而使其停止。試求其角加速度及總轉數。　答：-0.217〔弳/秒²〕；257,333〔轉〕。

4. 有一靭屐試驗機(brake-shoe testing machine)之33〔吋〕輪，當加靭

時之輪緣速度爲 60〔哩/時〕。 當輪緣動過 416〔呎〕之切線距離後，輪即停止。試求其角加速度及所需轉數。 答：-6.75〔弳/秒^2〕；48.1〔轉〕.

128. 變角加速度. 若圓運動之角加速度 α 爲變數時，欲求其運動方程式，必須先知其變動之定律。 今舉**扭擺**（torsion pendulum）之運動說明之。扭擺之構造，爲一相當重之物體固定於一極細之彈性桿上，使其懸於鉛直之位置。 彈性桿固定於其上端之支座上。 當此桿未超過其彈性限度時，其角移 θ 與作用於其上力偶之力矩成正比例。如將此力偶驟然取消，則此擺之角加速度，與角移成正比例，但方向相反，

$$\alpha = -K\theta \tag{14.21}$$

K 爲一常數。命 ω_0 爲在中間位置之角速度。據(14.7)式：

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = -K \int_0^{\theta} \theta\, d\theta$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - K\theta^2} \tag{14.22}$$

命 θ_1 爲 θ 角之極大值。當 $\theta = \theta_1$ 時，$\omega = 0$，

$$0 = \sqrt{\omega_0^2 - K\theta_1^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{K}\,\theta_1$$

據(14.3)及(14.22)兩式，得

$$dt = \frac{d\theta}{\omega} = \frac{d\theta}{\sqrt{\omega_0^2 - K\theta^2}}$$

若時間係自物體在其中間位置，向正方向轉動之瞬刻量起，則 t 之積分極限爲 0 與 t，θ 之積分極限爲 0 與 θ。故

$$\int_0^t dt = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega_0^2 - K\theta^2}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{K}}{\omega_0}\theta \tag{14.23}$$

扭擺從其中間位置至極大角移 θ_1 之時間 t_1 爲

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$$

一整個擺動之週期 T 等於 t_1 之四倍,故

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \tag{14.24}$$

若命 I 爲擺對於轉動軸之慣矩. 當角移爲 θ 時,彈性桿施於擺上之轉矩爲

$$I\alpha = -IK\theta$$

關於此點,將於第 130 節內證明之.

命 C_1 爲產生角移 θ_1 所需之力偶,則

$$C_1 = IK\theta_1$$

$$K = \frac{C_1}{I\theta_1} \tag{14.25}$$

代入(14.24)式,得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta_1}{C_1}I} \tag{14.24a}$$

因所用任何桿之比值 θ_1/C_1 爲一常數. 故據(14.24a)式,可知週期 T 與 I 之平方根成正比. 如在擺之原有之質量上增加質量使其慣矩增至 I_1,則振動之週期便增至 T_1.

$$T_1 = T\sqrt{\frac{I_1}{I}}$$

例　題

有直徑 1〔呎〕厚 2〔吋〕之鑄鐵板,懸於一長 6〔呎〕,直徑 0.2〔吋〕之鋼桿上,而成一扭擺,設鋼之 $E_s = 12,000,000$〔磅/吋^2〕(1),試求

(1) E_s 謂之剪彈性模數(modulus of elasticity in shear),定義見材料力學.

使此擺轉過 30° 所需之轉矩． 又若將此轉矩驟然取消，試求其極大角加速度，極大角速度，及擺動週期。

【解】

$$M = \frac{\pi \times 450}{4 \times 6 \times 32.2} = 1.83$$

$$I = \tfrac{1}{2} \times 1.83 \times \tfrac{1}{4} = 0.229$$

據材料力學，

$$轉矩 = \frac{E_s J\Theta}{l}$$

$$轉矩\ C_1 = \frac{12{,}000{,}000\pi^2}{72 \times 6 \times 2 \times 10{,}000 \times 12} = 1.142 \text{〔磅•呎〕}$$

$$K = \frac{C_1}{I\Theta_1} = \frac{1.142 \times 57.3}{0.229 \times 30} = 9.53$$

$$\alpha = -9.53 \times \frac{30}{57.3} = 5.0 \text{〔弳/秒}^2\text{〕}$$

$$\omega_0 = \sqrt{9.53} \times \frac{30}{57.3} = 1.64 \text{〔弳/秒〕}$$

$$週期\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{9.53}} = 2.03 \text{〔秒〕}.$$

習 題

1. 若上述例題中扭擺之鋼桿之長度增加一倍，試求其週期之變化。

答：1.414 倍.

2. 若上述例題中扭擺之鋼桿之直徑增加一倍，試求其週期之變化。

答：$\frac{1}{4}$ 倍.

3. 假定有大小相等之兩齒輪，裝在例題內扭擺之板之兩對稱位置，則週期變為 3.16〔秒〕。試求每一齒輪關於扭擺之軸之 I.　　答：$I = 0.163$.

129. 轉動物體之有效力．

命圖 367 之物體為表示任一轉動物體，F 為產生轉動之合力，O 為轉動軸． 命 P 為此物體上質量

爲 dM 之任一質點，其與點 O 間之徑向距離爲 ϱ. 故若此物體之角速度爲 ω，角加速度爲 α，則此質點之加速度 a 之切線分矢爲 $a_t = \varrho\alpha$，法線分矢爲 $a_n = \varrho\omega^2$. 故作用於質量 dM 之各質點上之有效力有兩個分力，一爲與其路線相切之 $dM\ \varrho\alpha$，一爲與路線垂直之 $dM\ \varrho\omega^2$. 由此可知對於相等微質量 dM 之各質點，其切線有效力與 ϱ 成正比例，且與角加速度之方向垂直；其法線有效力亦與 ϱ 成正比例，其方向係沿徑向並指向軸心。

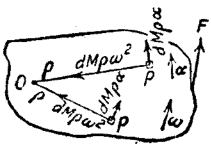


圖 367.

130. 切線有效力之力矩. 在圖 368 內，命 O 爲轉動軸，C 爲重心，F 爲除軸 O 之反力外，其餘所有外力之合力. d 爲自轉動軸至力 F 之作用線間之距離. 作用於質量 dM 之質點 P 上之切線有效力爲 $dM\ \varrho\alpha$，其方向與半徑 ϱ 相垂直，如圖所示. (因此處祇討論轉動，故不計與轉動軸平行之力.)

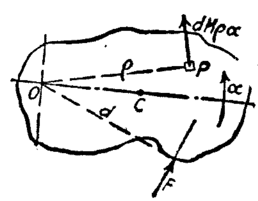


圖 368.

應用第 109 節之原理，實際上之作用力，可用有效力系替代之. 因爲法線有效力及作用於 O 之反力(此兩力在圖 368 上均未畫出)關於軸 O，均不產生力矩，故切線有效力之力矩，即應等於外力之合力 F 關於同一軸之力矩.

$$Fd = \int dM\ \varrho^2\alpha$$

因在任何時刻，此物體所有質點之 α 均屬相同. 故

$$Fd = \alpha\int \varrho^2\, dM$$

$\int \varrho^2 \, dM$ 在適當極限內之積分，即等於物體關於轉動軸之慣矩，I。

$$F'd = I\alpha \qquad (14.26)$$

(14.26)式與 $F = Ma$ 式相似。關於此點，已在第 82 節之脚註內論及。

例 題 1

圖 369 表示直徑 3〔呎〕，厚 6〔吋〕之鑄鐵圓柱。此圓柱以其幾何軸 O 爲中心而自由轉動。若以 100〔磅〕之力加於繞在此柱之繩上。試求經 5〔秒〕時，此圓柱之角加速度，柱邊之切線加速度，圓柱之角速度，及轉過之總轉數。軸摩擦不計。

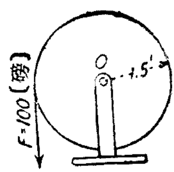


圖 369.

【解】 作用於圓柱上之力，有圓柱之重量，支座 O 之反力，及力 F. 前兩力關於圓柱之幾何軸，不能產生力矩。故力矩爲

$$Fd = 100 \times 1.5 = 150 \text{〔磅•呎〕}$$

$$\text{圓柱之 } I_0 = \tfrac{1}{2}Mr^2 = 55.6$$

代入(14.26)式，$Fd = I\alpha$，得

$$150 = 55.6\,\alpha$$

$$\alpha = 2.698 \text{〔弳/秒}^2\text{〕}$$

$$a_t = r\alpha = 4.047 \text{〔呎/秒}^2\text{〕}$$

$$\omega = \alpha t,$$

故得

$$\omega_5 = 13.49 \text{〔弳/秒〕}$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 33.73 \text{〔弳〕（在 5〔秒〕間）}$$

$$\frac{33.73}{2\pi} = 5.365 \text{〔轉〕（在 5〔秒〕間）}.$$

例 題 2

若作用於習題 1 之繩上，並非爲 100〔磅〕之力，而爲 100〔磅〕之重物。試求角加速度及繩之牽力 T.

【解】 先將圓柱作爲脫離體，據(14.26)式得

$$1.5T = 55.6\alpha \tag{1}$$

此方程式內含有兩個未知量。故必須列出所懸重物之運動方程式

$$100 - T = \frac{100}{32.2}a$$

因重物之加速度，等於圓柱邊之切線加速度 a_t. 又因 $a_t = r\alpha$，故得

$$100 - T = \frac{100}{32.2} \times 1.5\,\alpha \tag{2}$$

解(2)，(1)，得

$$\alpha = 2.396\ 〔弳/秒^2〕$$

$$T = 88.82\ 〔磅〕$$

習 題

1. 假定在例題 1 內，爲 100〔磅〕力所拉之繩，係繞於直徑 2〔吋〕之軸上，試求其解答。

答：$\alpha = 0.15$〔弳/秒²〕；$a_t = 0.225$〔呎/秒²〕；$\omega_5 = 0.75$〔弳/秒〕；0.299〔轉〕.

2. 假定圖 369 所示鑄鐵圓柱所用材料之量不變，外直徑不變，但改用輪緣，輻，轂等所構成，使其 $k = 1.3$〔呎〕. 若在捲於輪上之繩之一端懸有 100〔磅〕之重物，如例題 2。試求其 α 與 T 之值。

答：$\alpha = 1.66$〔弳/秒²〕；$T = 92.3$〔磅〕.

3. 一鑄鐵圓柱之直徑 4〔呎〕，長 2〔呎〕，轉速爲 480〔轉/分〕，與圓柱面相擦之軔之法線力爲 600〔磅〕。軔與圓柱之摩擦係數爲 $\frac{1}{3}$. 如不計軸承之摩擦力，試求使圓柱停止所需之時間。又此圓柱共轉過若干轉？

答：$t = 88.3$〔秒〕；353〔轉〕.

4. 一鑄鐵飛輪之直徑長 10〔呎〕，輪緣闊 18〔吋〕厚 3〔吋〕，有六個橢圓截面之輻，長軸爲 5〔吋〕，短軸爲 3〔吋〕。在飛輪之軸上裝有一直徑 20〔吋〕之同心鼓輪，繩即捲於此鼓輪上。設有一 600〔磅〕之重物，懸於繩上。試求飛輪之角加速度及繩內之牽力。每一雙輻可以視爲聯結輪緣兩對徑之一細桿。轂，軸，及鼓輪之慣矩，以及軸摩擦，均不計。

答：$\alpha = 0.122$〔弳/秒²〕；$T = 593$〔磅〕.

131. 切線有效力之合力. 在圖 370 內,命 O 爲轉動軸,C 爲重心,P 爲質量 dM 之任一質點,ϱ 爲質點 P 與軸間之距離. θ 爲徑線 OP 與線 OC 間之角度. 設以線 OC 作爲軸 X. 作用於質點 P 之切線有效力爲 $dM\ \varrho\alpha$. 將此力分解爲 X, Y 兩分力,其分力 X 爲 $dM\ \varrho\alpha\sin\theta$,其分力 Y 爲 $dM\ \varrho\alpha\cos\theta$.

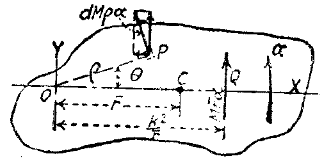


圖 370.

$$\Sigma F_X = \int dM\ \varrho\alpha\sin\theta = \alpha\int y\,dM = \alpha M\bar{y} \qquad (14.27)$$

因 $\bar{y} = 0$,故

$$\Sigma F_X = 0. \qquad (14.27a)$$

$$\Sigma F_Y = \int dM\ \varrho\alpha\cos\theta = \alpha\int x\,dM = \alpha M\bar{x} \qquad (14.28)$$

因 $\bar{x} = \bar{r}$, $\Sigma F_X = 0$,故切線有效力之合力爲 $M\bar{r}\alpha$.

在第 130 節內,已證明有效力之合力矩爲 $I\alpha$. 自力矩原理,合力 $M\bar{r}\alpha$ 之力矩,必等於其各分力之力矩和. 命 x 爲自點 O 至合力 $M\bar{r}\alpha$ 之作用線間之距離,故得

$$M\bar{r}\alpha x = I\alpha = Mk^2\alpha$$

$$x = \frac{k^2}{\bar{r}} \qquad (14.29)$$

作用於一物體上之切線有效力之合力爲 $M\bar{r}\alpha$,其方向垂直於聯結轉動軸及重心之直線,其作用線與轉動軸間之距離爲 $k^2/\bar{r}$.

自上述各點,可知若將有效切線力之 $M\bar{r}\alpha$ 方向倒置,並使其作用於點 Q 之切線方向,則其力矩與外力系之力矩平衡. 因此產生與轉動相當之平衡狀況.

若物體之轉動中心,即爲其重心. 點 O 與點 C 相併合,則 $\bar{r} = 0$, $k^2/\bar{r} = \infty$. 由此可知,在此情形中之相當力矩,僅由力矩爲 $I\alpha$

之力偶，而非由於一單獨之力。

例 題

有長 l 之細桿，自水平位置釋放，任其受重力之影響，繞着經過其一端，並與桿軸相垂直之一水平軸轉動。試求於開始轉動時切線有效力 $M\bar{r}\alpha$ 之數量及位置。

【解】 命 W 爲桿之重量，轉矩 $\mathrm{T}=\mathrm{Fd}$，據(14.26)式，$T=I\alpha$，得

$$\frac{Wl}{2}=\frac{W}{g}\frac{l^2}{3}\alpha$$

$$\alpha=\frac{3g}{2l}$$

$$M\bar{r}\alpha=\frac{W}{g}\times\frac{l}{2}\times\frac{3g}{2l}=\frac{3}{4}W$$

$$\frac{k^2}{\bar{r}}=\frac{l^2}{3}\div\frac{l}{2}=\frac{2}{3}l.$$

習 題

1. 如上述例題內之細桿，爲一直徑 1〔吋〕，長 6〔吋〕之鋼桿。在其轉過 30°，及 90° 時，試求其切線有效力之合力之大小。 答：10.4〔磅〕；

2. 若習題 1 內之轉動軸，與桿之一端相距 1〔呎〕。試求其解。 答：7.93〔磅〕；0

3. 圖 371 所示之轉動體，爲一半徑 6〔吋〕，厚 2〔吋〕之半圓形鋼板，以 8〔吋〕長，2〔吋〕闊，1〔吋〕厚之鋼板，與轉動軸 O 相聯。若此轉動體從圖上所示靜止位置釋放，試求其 α，$M\bar{r}\alpha$ 及 $k^2/\bar{r}$ 之值。

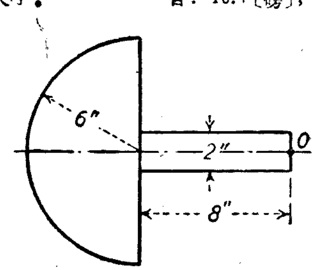


圖 371.

答：$\alpha=33.8$〔呎/秒²〕；$M\bar{r}\alpha=31.4$〔磅〕；$k^2/\bar{r}=0.95$〔呎〕。

132. 法線有效力之合力。 在第 129 節內，已證明一轉動體之質點，在任何時刻之法線有效力，其大小與此質點及轉動軸間之距

離成正比例，其方向為指對轉動軸（見圖 367）。一般而論，整個轉動體之法線力之合力，為一力及一力偶，於第 57 節內已有證明。在一般情況中，轉動問題之解法，非常複雜，並且非常困難。因為通常合力並不經過重心，而合力偶則須涉及物體之慣積，亦頗難求得。所幸在工程問題中涉及轉動者，僅限於幾種特殊情形。在此等情形中，其力偶每等於零，或極易求得，故合力之位置亦易求得。以下將討論三種之特殊情況。

情況 1. 假定物體有一對稱面，其轉動軸與此對稱面垂直。此時之法線有效力之合力，係沿徑向，經過物體之重心，並等於 $M\bar{r}\omega^2$.

命圖 372(a)代表具有對稱面 $QMNP$ 之一物體。命與對稱面垂

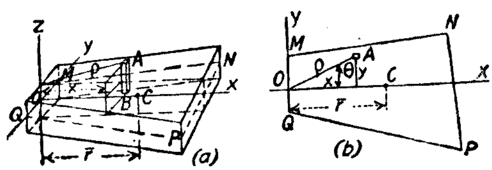


圖 372.

直之軸 OZ 為轉動軸，並經過轉動軸 O 及重心 C 取軸 X. AB 為質量 dM 並與軸 OZ 平行之微稜柱。在此微稜柱上各部之法線加速度均為 $a_n = \rho\omega^2$. 故此微稜柱之法線有效力為 $dM\ \rho\omega^2$, 作用於對稱面上，並指對轉動軸 OZ. 圖 372(b)為對稱面之截面。力 $dM\ \rho\omega^2$ 之分力 X 為

$$dM\ \rho\omega^2 \cos\theta = dM\ \rho\omega^2 \frac{x}{\rho} = dM\ \omega^2 x$$

對於整個物體而言，則為

$$\Sigma F_X = \omega^2 \int x\ dM = M\bar{x}\omega^2 = M\bar{r}\omega^2 \qquad (14.30)$$

力 $dM\rho\omega^2$ 之分力 Y 為

$$dM\ \rho\omega^2 \sin\theta = dM\ \rho\omega^2 \frac{y}{\rho} = dM\ \omega^2 y$$

對於整個物體，則爲

$$\Sigma F_Y = \omega^2 \int y\, dM = M\bar{y}\omega^2 = 0\ (\text{因}\ \bar{y} = 0) \qquad (14.31)$$

故得所有法線有效力之合力，爲在對稱面內與軸 X 平行之 $M\bar{r}\omega^2$. 因爲各微稜柱之法線有效力，均經軸 OZ，故其關於軸 OZ 之力矩爲零. 此等法線有效力之合力，關於軸 OZ 之力矩，亦應等於零. 故合力必沿軸 OX 而經過重心.

假定軸 OZ 經過物體之重心，$\bar{r}=0$，故法線有效力之合力 $M\bar{r}\omega^2 = 0$.

情況 2. 假定物體有一對稱線，其轉動軸與此線平行. 此時法線有效力之合力經過物體之重心，並等於 $M\bar{r}\omega^2$.

在圖 373 內，命 AB 爲所示物體之對稱線. 並命平行於 AB 之軸 OZ 爲其轉動軸. 就微板 EF 而論，命其厚度爲 dz，質量爲 dM，其平面垂直於軸 OZ. 據情況 1，可知作用於微板 EF 上之法線有效力之合力爲 $dM\ \bar{r}\omega^2$，經過微板之重心，並指向軸 OZ. 在與 EF 類似之其他任一微板上，均有作用於線 AB 上並與軸 OZ 垂直之對應法線有效力，且各力與微板之質量成正比例. 據第 71 節之末段，可知此等平行力系之合力，經過物體之重心. 因 $\bar{r}$ 與 ω 均爲常數，故此力等於 $\Sigma dM\ \bar{r}\omega^2 = M\bar{r}\omega^2$.

若軸 OZ 卽爲物體之對稱線，$\bar{r}=0$，故法線有效力之合力 $M\bar{r}\omega^2 = 0$.

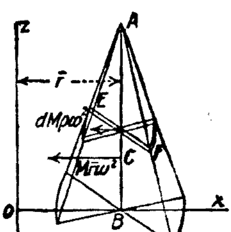


圖 373.

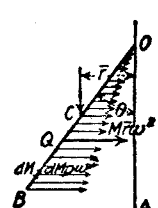


圖 374.

情況 3. 假定有一長 l 之稜柱形之細桿，其轉動軸經過細桿之一端並與之成任一角 θ. 此時法線有效力之合力為 $M\bar{r}\omega^2$，作用於與支點相距 $\frac{2}{3}l$ 之一點.

在圖 374 內，命 OB 為長 l 之桿，其重心為 C. 設轉動軸為 OA，角速度為 ω. 將此桿分為相等之微部分. 作用於微部分上之法線有效力為 $dM\,\rho\omega^2$. 其中 ρ 為質量 dM 之徑距. 此等力與質量之徑距成正比例，且與軸 AO 相垂直. 因各微部分之 ω^2 均屬相等，故所有之有效力之合力為作用於點 Q 之 $\omega^2\int\rho\,dM=M\bar{r}\omega^2$. 點 Q 與點 O 間之距離為 $\frac{2}{3}l$，與軸 OA 間之距離為 $k^2/\bar{r}$. 若軸不經過桿之一端時，則在軸之兩側之桿，須分別單獨處理.

若圖 372 所示物體之對稱面，不與轉動軸 OZ 垂直，則法線有效力之合力，不作用於其重心；而作用於對稱面上與 OZ 軸相距 $k^2/\bar{r}$ 之一點. 此時並產生於本節第一段內所提及之力偶. 同樣情形，若圖 373 所示物體之對稱線，不與轉動軸 OZ 平行，則法線有效力之合力，不作用於其重心，而作用於與軸相距 $k^2/\bar{r}$ 之一點. 此點可以視為物體之一固定之作用點. 在 1, 2 兩特殊情況中，法線有效力之合力，經過其重心與此固定點 Q，其力偶之力矩為零.

習 題

1. 圖 371 所示之合成板，繞着經過點 O 且與板垂直之軸轉動，轉速為 180〔轉/分〕. 試求其法線有效力之值. 答：328〔磅〕.

2. 有一直徑 6〔吋〕之鑄鐵半球，以 60〔轉/分〕之轉速，繞着其底面上之一直徑旋轉. 試求其法線有效力之值. 答：1.69〔磅〕.

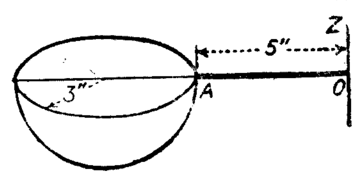


圖 375.

3. 圖375 表示習題 2所述之鑄鐵半球，以水平桿 OA 與鉛直軸 OZ 相聯. 水平桿之質量可以不計. 試求在桿 OA

上點 O 之彎曲力矩爲零時，半球關於軸 OZ 應有之轉速。　答：177〔轉/分〕。

4. 有一長 5〔呎〕，重 10〔磅〕之細桿，繞着經過距其上端 1〔呎〕處，並與桿成 30° 角之鉛直軸轉動。 若桿之轉速爲 30〔轉/分〕，試求於其支架上所產生之力偶。又設其轉速爲 120〔轉/分〕，所生之力偶應等於若干？ 若所生之力偶爲零時，則其轉速應等於若干？

答：1.75〔磅•呎〕，向外；84.5〔磅•呎〕向內；34.2〔轉/分〕。

133. 單圓擺。 單圓擺(msiple circular pendulum)[1]爲一因重力及其他徑向拘束力之影響，在鉛直圓弧上振動之質點所構成。 若在細而輕之繩之一端，繫一小而重之球，便與理想之單圓擺極近似。

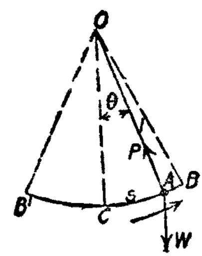


圖 376.

命圖 376 之 A 爲繫於長 l 之繩 OA 上類此之物體。 沿圓弧之距離，係自點 C 量起，以向右量者爲正。 作用於運動方向之唯一外力爲 $-W\sin\theta$。 代入(12.3)式，得

$$a_t = -g\sin\theta \tag{14.32}$$

$$v\,dv = a_t\,ds = -g\sin\theta\,ds \tag{14.33}$$

據 $\sin\theta\,ds$ 之積分，所求得之 t 式，爲一複雜之橢圓式。但擺動之振幅甚小時，則有一比較簡單之近似解法，其誤差甚微。 因 θ 甚小時，$\sin\theta \doteqdot \theta$. 故(14.32)式得簡化爲

$$a_t = -g\theta = -\frac{g}{l}s \qquad \left(因\ \theta = \frac{s}{l}\right) \tag{14.32a}$$

(14.33)式成爲

$$vdv = -\frac{g}{l}s\,ds \tag{14.33a}$$

(1)單圓擺又稱單擺(simple pendulum).

命 v_0 爲在點 C 之速度，v 爲在點 A 之速度，故得

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\frac{g}{l}\int_0^s s\,ds$$

$$v_0^2 - v^2 = -\frac{g}{l}s^2 \tag{14.34}$$

在 $s = s_B$ 時，$v = 0$，故

$$v_0{}^2 = \frac{g}{l}s_B{}^2$$

若將此值代入(14.34)式，得

$$v^2 = \frac{g}{l}(s_B{}^2 - s^2)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_B{}^2 - s^2}$$

因

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{ds}{\sqrt{s_B{}^2 - s^2}}$$

上式內之時間 t，從擺在點 C 並向右擺動時量起，故得

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_B{}^2 - s^2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\sin^{-1}\frac{s}{s_B} \tag{14.35}$$

命上式中之 $s = s_B$，卽得擺自 C 至 B 所需之時間，卽

$$t_B = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

欲得擺自 C 至 B，再回至 C 所需之時間，祇須命 $s = 0$，而得

$$t_C = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

卽自點 C 向左至 B 之擺動時間,與自 B 向右回至 C 之擺動時間完全相同. 故得擺動之週期爲:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{14.36}$$

(14.36) 式與 θ 無關,故 θ 甚小時, 擺動之週期與振幅之大小無關.

據(14.32a) 式,可知振動之振幅甚小時,加速度之大小與位移成正比例. 故此種運動,實際上爲一簡諧運動.

因單擺之球,指向中心之法線加速度爲 v^2/l. 故據運動路徑之法線方向之力和,得

$$\Sigma F_n = P - W\cos\theta = \frac{W}{g}\ \frac{v^2}{l}$$

上式中 P 爲繩內之牽力. 卽

$$P = W\cos\theta + \frac{W}{g}\ \frac{v^2}{l} \tag{14.37}$$

習　　題

1. 試求週期爲 $\frac{1}{5}$〔秒〕, 1〔秒〕, 5〔秒〕之單擺之長度.

答: 0.391〔吋〕; 9.78〔吋〕; 20.4〔呎〕.

2. 有礦井內之升降室,懸於 600〔呎〕長之纜上. 試求其來回振動一次所需之時間.　　答: 27.1〔秒〕.

3. 一梁重 18,000〔磅〕,懸於 120〔呎〕長之纜上. 試求使此梁自其鉛直位置移過 6〔呎〕所需之水平拉力. 並求此梁擺回其鉛直位置時纜內之牽力.

答: 901〔磅〕; 18,045〔磅〕.

134. 複擺. 任一物體懸於不經其重心之水平軸上,並任其因重力及支座上反力之影響,自由轉動,於是卽成**複擺** (compound pendulum)。

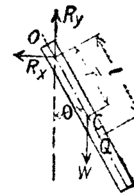


圖 377.

圖 377 示一重量為 W 之複擺，懸於點 O，其重心為 C。若命 I 為其關於轉動軸之慣矩，k 為其迴轉半徑，$\bar{r}$ 為從支座至重心間之距離，α 為角加速度。據關於點 O 之力矩方程式，得

$$\Sigma M_0 = -W\bar{r}\sin\theta = I\alpha$$

因

$$I = Mk^2 = \frac{W}{g}k^2$$

$$\alpha = -\frac{W\bar{r}\sin\theta}{\frac{W}{g}k^2} = -\frac{\bar{r}g\sin\theta}{k^2}$$

與軸 O 相距 l 之點 Q 之切線加速度 a_t 為

$$a_t = l\alpha = -\frac{\bar{r}lg\sin\theta}{k^2}$$

長度 $l = k^2/\bar{r}$，則得點 Q 之切線加速度 a_t 為

$$a_t = -g\sin\theta \tag{14.38}$$

此式與單圓擺之 (14.32) 式相同。由此可見此複擺與一長度 $l = k^2/\bar{r}$ 之單圓擺之週期相同。此長度 $k^2/\bar{r}$，謂之**複擺長度** (length of compound pendulum)，點 Q 謂之**振動中心** (center of oscillation)。

因 $l = k^2/\bar{r}$，故據(14.36)式，得週期為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{g\bar{r}}} \tag{14.39}$$

$$k = \frac{T}{2\pi}\sqrt{g\bar{r}} \tag{14.40}$$

複擺之懸點(即支座 O)與振動中心，可以互換，其證明如下。命 k_c 為複擺關於經過重心 C 並與轉動軸平行之軸之迴轉半徑。

因

$$k_c^2 = k^2 - \bar{r}^2, \quad 及 \quad k^2 = \bar{r}l,$$

$$k_c^2 = \bar{r}(l - \bar{r}) = OC \times QC \qquad (14.41)$$

因 k_c 爲一常數，其値與懸點之位置無關．故 $OC \times QC$ 必爲一常數． 如 OC 減小，QC 則按比例增加．反之亦然．

如將 O, Q 兩點互換，則(14.41)式保持不變． 故若將複擺倒置，將其懸於點 Q，則點 O 爲振動中心． 又因長度 l 不變，故週期亦不變．

例　題

一圓柱之直徑爲 2〔吋〕，長 12〔吋〕，懸於經過其一端之直徑之軸上． 試求其週期． 問將其改懸於其他若何之點上，可使其振動週期不變．

【解】

$$k^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{3} = 0.335〔呎^2〕$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.335}{32.2 \times 0.5}} = 0.905〔秒〕$$

振動中心與懸點間之距離爲

$$\frac{k^2}{\bar{r}} = \frac{0.335}{0.5} = 0.67〔呎〕.$$

若將此圓柱懸於振動中心上，其振動週期不變．

習　題

1. 若將上述例題中之圓柱，懸於距其一端 5〔吋〕處，且與其幾何軸垂直之軸上．試求其振動週期及振動中心之位置．　答：1.16〔秒〕；1.104〔呎〕．

2. 有一闊 4〔吋〕，厚 1〔吋〕之板，懸於與上端相距 1〔吋〕之軸 OZ 上(見圖378)．試求使其振動週期爲 1〔秒〕之長度 h． 問將其改懸於其他若何之點上，方可使其振動週期不變？

答：1.276〔呎〕；與下端相距 1〔吋〕處，或與兩端各相距 4.59〔吋〕處．

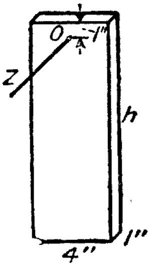


圖 378.

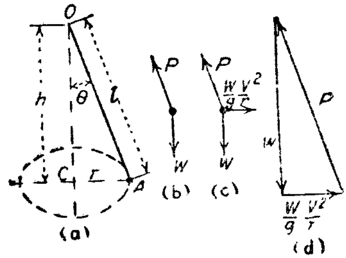


圖 379.

135. 錐動擺. 圖 379(a)所示之錐動擺(onical pendulum)，計有一小物體 A，以一繩懸於鉛直軸之上之一點 O，並使此物在一水平面內繞鉛直軸轉動. 點 C 爲物體 A 之轉動中心(center of rotation). 若繩與軸間之角 θ 爲一常數，則其速率爲一常數，$a_t = dv/dt = 0$. 故切線力 $F_t = Ma_t = 0$. 若轉動體有空氣阻力時，則必須有一甚小之正力，與空氣之負阻力相抵，以保持物體之等速率運動.

在經過繩之鉛直面上，作用於物體之外力有二：一爲其重量 W，一爲繩內之牽力 P，如圖 379(b)所示. 由以上兩力而產生之加速度，爲指向轉動中心 C 之 $a_n = v^2/r$. 若在脫離體上，加一反向有效力 $\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}$，如圖 379 (c) 所示，卽能得到物體之靜力平衡狀況，而得應用平衡方程式. 據關於點 O 之力矩方程式，得

$$\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}h - Wr = 0$$

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}} \tag{14.42}$$

據(14.42)式，可求得使擺與軸成定角 θ 所需之速率 v. 由圖 379 (d)所示之力三角形，可以求得 P 之值如下：

$$P = \sqrt{W^2 + \left(\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}\right)^2} \tag{14.43}$$

轉動之週期爲

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{14.44}$$

每 1〔秒〕之轉數，即頻率(frequency)爲

$$n = \frac{1}{T}$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \tag{14.45}$$

據上式可知 n 愈小，h 愈大。 至極限時 $\theta = 0$，$h = l$，則得

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{14.45a}$$

故知 n 自零逐漸增至(14.45a)式之極限值時，方能將物體開始舉起。

因

$$h = \frac{gr^2}{v^2} = \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$

由此可知 h 與 l 無關，而祇隨角速率而定。 若長短不等之錐動擺以同一〔轉/分〕之轉速轉動，其高度 h 必相等。

習　題

1. 試分別求長 1〔呎〕及長 10〔呎〕之錐動擺開始舉起之 n 值。

答：0.904；0.286。

2. 有一 3〔磅〕之重物，其重心與懸點相距 5〔呎〕，試求使其與鉛直軸保持 60° 角而轉動時，所需之切線速度 v，並求其頻率 n 及繩之牽力 P。

答：$v = 15.52$〔呎/秒〕；$n = 0.572$〔轉/秒〕；$P = 6$〔磅〕。

3. 若習題 2 所述之錐動擺之轉速爲 1〔轉/秒〕。 試求角度 θ，速度 v，及繩之牽力 P。

答：$\theta = 80°35'$；$v = 31$〔呎/秒〕；$P = 18.4$〔磅〕。

136. 荷重錐動擺調速器. 圖 380(*a*) 表示荷重錐動擺調速器 (weighted conical pendulum governor). 其構造爲裝於 BA 臂下端之球 A, A; 及支於軸環 CC 上之重量 W_1. 先將 W_1 作爲脫離體(圖 380(*b*)), 當調速器以等速轉動時, 此重量在靜力平衡狀況中, 故據 $\Sigma F_v = 0$, 得

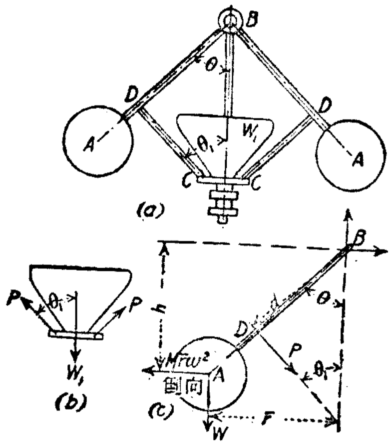


圖 380.

$$P = \frac{W_1}{2 \cos \theta_1}$$

再以一球及所聯之臂作爲脫離體, 如圖 308(c) 所示. 作用於此脫離體上之外力有三: 重量 W, 牽力 P, 及點 B 之銷反力. 若將倒向之有效力 $M\bar{r}\omega^2$ 加於此力系上, 即得靜力平衡. 在準確之計算中, 此 $M\bar{r}\omega^2$ 力, 應作用於球與臂之振動中心上, 且須計算臂之重量. 但假定 $M\bar{r}\omega^2$ 作用於球之重心上, 並略去臂之重量, 所產生之誤差, 並不甚大. 故據 $\Sigma M_B = 0$, 得

$$Pd + W\bar{r} = M\bar{r}\omega^2 h$$

習 題

1. 在圖 380 內, 命 $BD = 12$ [吋]; $DA = 4$ [吋]; 在最低位置時之 $\theta = \theta_1 = 45°$. 設 A, A 爲直徑 5 [吋] 之鑄鐵球. 重量 W_1 爲一鑄鐵圓錐, 其底面半徑爲 4.5 [吋], 高 7.5 [吋]. 若不算臂之重量, 試求此調速器開始有作用時之轉速. 答: 93.7 [轉/分].

2. 若習題 1 所述之調速器內, 有一彈簧. 當 W_1 在其最低位置時, 此彈簧能分擔 20 [磅] 之重量. 試求此調速器開始有作用時之轉速. 答: 73 [轉/分].

3. 若圖 380 之距離 CC 為 3〔吋〕。試求使 $\theta = 60°$ 時之轉速。

答：115〔轉/分〕。

137. 鐵路路軌之超高度。 假定沿鐵路曲線(railway curve)之兩鐵軌，在同一水平面上，並假定有一火車在此曲線上開過，則在外軌(outer rail)上之鉛直反力較大。行車速率逐漸增加時，必能達到一速率之極限值，此時在外軌上之鉛直反力，卽等於火車之總重。在裏軌(inner rail)上之反力為零。此速率卽為火車不致傾覆之極限值。

若欲增加火車在鐵路曲線上可能行駛速率之範圍，必須使外軌高於裏軌。在習慣上，對於所設曲線，選擇一適當之平均速率。若使外軌得一適宜之**超高度** (superelevation)，卽可使火車以其平均速率行駛時，在兩路軌上之法線反力相等。若行車速率大於此平均速率，小於極限傾覆速率時，則外軌上之法線反力大於裏軌者。若行車速率小於此平均速率時，則在裏軌上之法線反力，大於外軌者。與枕木(tie)平行之車輪**凸緣合壓力**(resultant flange pressure)則向外。

圖 381 表示欲使兩路軌上之法線反力相等之必要條件。R_1, R_2 為路軌對於兩車輪相等之法線反力，故其合力 R 經過重心 C。命 W 為車之重量，r 為鐵路曲線半徑，v 為行車速率。因 r 在水平方向，加速度係向曲率中心。故倒向有效力 $\frac{W}{g}\frac{v^2}{r}$ 必在向外之水平方向，並作用於車之重心 C，此時作用於車上之外力，成靜力平衡。故三個力矢量成為閉合三角形，如圖 381(b)所示。設 θ 為合力 R 與鉛直線

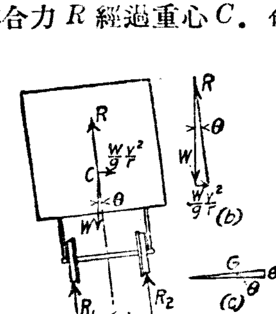


圖 381.

間之角，則

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

如命 G 爲規軌(track gage)[1]，e 爲超高度(見圖 381(c))，則

$$e = G\sin\theta$$

當角度 θ 爲甚小時,其正弦與正切之值約略相等，故據以上兩式,得

$$e \fallingdotseq \frac{Gv^2}{gr} \tag{14.46}$$

如以上所討論之車輛，係一列車內之一輛，作用於此車輛兩端之**聯車鈎拉力**(drawbar pull)，係沿兩端之切線方向,此拉力沿車輛中點之徑向有甚小之分力． 如車之速率，大於設計曲線時之平均速率，則此分力可以增加車輛之安定性．反之，如車之速率小於其平均速率時，則此分力及車之重量,有使車向內傾覆之趨勢,並增加與枕木平行且方向向外之車輪凸緣合壓力．

例 題

假定一鐵路之軌規 $G = 4.9$〔呎〕，其曲率半徑 $r = 2865$〔呎〕．試求火車以 30〔哩/時〕之速率行駛，並使與枕木平行之凸緣合壓力爲零時，外軌應有之超高度． 如有 100,000〔磅〕重之車以 60〔哩/時〕之速率在此鐵路曲線上行駛，車之重心比路軌高 5〔呎〕，試求外軌上垂直於枕木而作用於車上之反力．

【解】 30〔哩/時〕= 44〔呎/秒〕．據(14.46)式，得

$$e = \frac{4.9 \times 44^2}{32.2 \times 2865}$$

$$= 0.103\text{〔呎〕} = 1.236\text{〔吋〕}$$

在 60〔哩/時〕= 88〔呎/秒〕之速率時，

$$\frac{W}{g}\,\frac{v^2}{r} = \frac{100{,}000 \times 88^2}{32.2 \times 2865} = 8400\text{〔磅〕}$$

(1)所謂軌規，卽爲兩鐵軌中心間之距離．

據關於 R_1 作用點之力矩方程式，得(圖 381)：

$$4.9R_2 = 100,000 \times 2.3432 + 8400 \times 5.05$$

$$R_2 = 56,480 \text{〔磅〕}$$

習　題

1. 設在例題內之車輛，以 10〔哩/時〕之速率，沿鐵路曲線駛過。試求外軌上垂直於枕木而作用於車上之反力，及在裏軌上平行於枕木之凸緣合壓力。

答：48,060〔磅〕；1870〔磅〕。

2. 一車以 20〔哩/時〕之速率，開過一 10° 之鐵路曲線[1]。試求使裏外兩軌之法線反力相等時，外軌應有之超高度。又若車重 120,000〔磅〕，其重心高出路軌 4〔呎〕，以 45〔哩/時〕之速率在曲線上行駛，試求外軌上與枕木垂直而作用於車上之反力。又與枕木平行之合凸緣壓力爲何？

答：$e = 0.228$〔呎〕；79160〔磅〕；22,750〔磅〕。

138. 公路曲線之路面傾斜． 假定有一車以速度 v，在半徑 r 之水平公路曲線上開過。作用於車上之力如圖 382 所示，此圖爲車之後視圖。公路曲線(highway curve) 中心，在車之左方。作用於車上之力，有車之重量 W，法線反力 N_1 及 N_2，摩擦力 F_1 及 F_2。除上述實際之力外，並畫出作用於重心 C 之倒向有效力 Wv^2/gr。命 $N_1 + N_2 = N$，

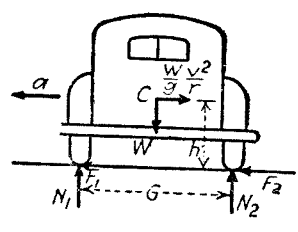


圖 382.

$F_1 + F_2 = F$。因 $N = W$，故當 $F = fW = Wv^2/gr$ 時，車即開始滑動，f 爲摩擦係數。故不致產生滑動可能有之極大速度爲

$$v = \sqrt{fgr}$$

(1) 所謂 10° 之鐵路曲線，意即設在此曲線上取一長 100〔呎〕之弦，此弦在曲線中心所張之角爲 10°。（此定義通用於美國之鐵路，我國之鐵路規定 20〔米〕之弦所張中心角之度數名曰鐵路曲線之度數）。

假定摩擦力有相當大，能使車輛不致滑動，但仍可能使車傾覆。速率 v 愈增時，反力 N_1 愈減．此反力等於零時，車輛即開始傾覆。在此速率時，關於 N_2 之作用點之力矩方程式為

$$\frac{WG}{2} = \frac{Wv^2h}{gr}$$

$$v = \sqrt{\frac{Ggr}{2h}}$$

對於高速率行車之公路，在曲線處之路面必須傾斜。使在所設計之某平均速度時，作用於兩輪上之反力，與地面垂直。其傾斜(banking)之角度 θ 為

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} \tag{14.47}$$

當速率小於此平均速率時，作用於輪上之摩擦力係向外；若大於此平均速率，則摩擦力向內。假定速率逐漸增加，當合反力 R_1 與 R_2 與法線成靜摩擦角 ϕ'，亦即與鉛直線成 $(\theta+\phi')$ 時，則車輛開始向外滑動(圖 383)。如命 R 為 R_1 與 R_2 之合力，則據圖 383(b)之力三角形，得

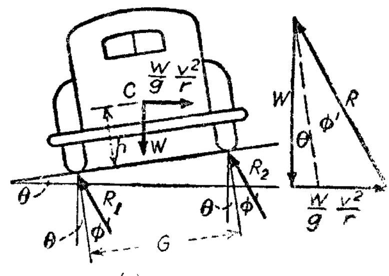


圖 383.

$$\tan(\theta+\phi') = \frac{v^2}{gr} \tag{14.48}$$

假定摩擦力有相當大，可以防止車輛之滑動，但行車速率增加至一定程度，R_1 減小為零，則車輛開始傾覆。從關於 R_2 作用點之力矩方程式，可求得此極限速率。若將作用於點 C 之兩力，分解為與路面平行及垂直之兩分力，則索解比較方便，故得

$$\frac{Wv^2}{gr}\cos\theta\times h = \frac{Wv^2}{gr}\sin\theta\times\frac{G}{2} + W\cos\theta\times\frac{G}{2} + W\sin\theta\times h$$

例 題

有一半徑爲 500〔呎〕之混凝土公路曲線．其一邊塡高，使車輛以 30〔哩/時〕之速率行駛時，車輪上之側向反力爲零． 若摩擦係數 $f=0.2$，試求開始滑動之速率．

【解】 據(14.47)式，得

$$\Theta = \tan^{-1}\frac{44 \times 44}{32.2 \times 500} = 6°51'$$

與法線間之摩擦角 ϕ' 爲

$$\phi' = \tan^{-1} 0.2 = 11°21'$$

據(14.48)式，可求得滑動開始時之速度 v

$$\frac{v^2}{32.2 \times 500} = \tan\,(6°51'+11°21') = 0.32878$$

$$v^2 = 5293$$

$$v = 72.76\,〔呎/秒〕 = 49.6\,〔哩/時〕.$$

習 題

1. 在半徑爲 300〔呎〕之公路曲線上，其路面傾斜，使在此曲線上以25〔哩/時〕之速率行車時，在車輪上之側向壓力爲零． 試求速率爲 5〔哩/時〕時，車輛不致滑動所需之摩擦係數極小值．又若速率爲 50〔哩/時〕時，車輛不致滑動所需之摩擦係數極小值． 答：$\Theta = 7°55'$；0.133；0.388．

2. 若 $f=0.1$，並設有一車以 15〔哩/時〕之速率在水平路面上轉灣，試求不致滑動時之最小曲率半徑． 答：150〔呎〕．

3. 若輪距 (tread distance)(1) $G=5$〔呎〕，車輛重心與地面間之距離 $h=2$〔呎〕．設此車以 60〔哩/時〕之速率，在一水平路面上行駛．若路面之摩擦力相當大，使此車不致滑動，試求使此車亦不致傾覆時之最小曲率半徑．又若防止滑動，僅賴摩擦力，試求所需最小摩擦係數之值．

答：$r=192.4$〔呎〕；$f=1.25$．

---

(1)輪距爲左右兩輪間之距離．

4. 有一半徑 400〔呎〕而路面傾斜之公路曲線。設一車以 30〔哩/時〕之速率在此曲線上行駛時，作用於車輪上之側向壓力為零。若有一重 4000〔磅〕，輪距 $G = 5$〔呎〕，重心高 $h = 28$〔吋〕之車輛，以 60〔哩/時〕之速率，在此曲線上行駛。試求在外輪上之法線反力，及總摩擦反力。又若摩擦力有相當大，可使此車輛不致滑動，試求其開始傾覆時之速度。

答：$\theta = 8°32$；2990〔磅〕；1790〔磅〕；93.2〔哩/時〕.

139. 飛輪之離心牽力. 若不計算輪輻內之牽力，則因轉動而在輪緣內所產生之牽力，可以求得。對於圖 384 所示之半個輪緣，其法線有效力為 $M\bar{r}\omega^2$，作用於其重心 C. 若將此有效力之方向倒置，則此力與輪緣內所生之二個牽力 P,P 平衡。若命 W 為半個輪緣之重量，則

$$P = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\bar{r}\omega^2$$

若命 r 為輪緣之平均半徑，則

$$\bar{r} \doteq \frac{2r}{\pi}$$

若命 w 為單位體積之重量，即 $w = W/\pi rA$，則得在輪緣內之單位牽應力(tensile stress)為

$$s = \frac{P}{A} = \frac{W\bar{r}\omega^2}{2gA} = \frac{Wr\omega^2}{gA\pi}$$

如將 v^2/r^2 替代 ω^2, w 替代 $W/\pi rA$，則得

$$s = \frac{wv^2}{g} \tag{14.49}$$

因 w 之單位為〔磅/呎^3〕，v 之單位為〔呎/秒〕；g 之單位為〔呎/秒^2〕，則 s 之單位，應為〔磅/呎^2〕。

較大之飛輪，常鑄成兩半，再用螺栓在輪緣及輪轂兩處，使其聯結。在此情形中，在螺栓內之牽應力，與倒向有效力 $M\bar{r}\omega^2$ 平衡。

其中 M 爲半個飛輪之質量，$\bar{r}$ 爲飛輪中心至半個飛輪之重心間之距離。

若不計飛輪輪緣內之牽力，則在幅內之牽力可以求得。在圖385

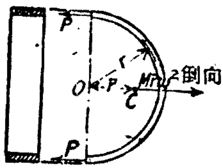


圖 384.

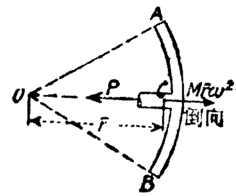


圖 385.

內，命 AB 爲每一幅所分擔之輪緣部分。命 W 爲此輪緣部分之重量，$\bar{r}$ 爲自 O 至其重心之距離。因轉動而在幅內所衍生之牽力爲

$$P = \frac{W}{g}\bar{r}\omega^2 \qquad (14.50)$$

其單位牽應力爲 P/A，式中 A 爲幅之橫截面積。

通常輪緣與幅均承受一部分因轉動而產生之離心牽力。故輪緣與幅內之應力，均較以上所計算者爲小。至於輪緣與幅之應力，應如何分配，則尚未定。

習 題

1. 試證明若不計幅內之牽力，欲在飛輪輪緣內產生同樣之應力所需之轉速與其半徑成反比例。

2. 有一直徑 12〔呎〕，輪緣厚 2〔吋〕，闊 12〔吋〕之鑄鐵飛輪，其轉速爲 300〔轉/分〕，設不計其幅內之牽力，其輪緣內之牽應力應等於若干？

答：3350〔磅/吋²〕。

3. 一飛輪重 3000〔磅〕，鑄成兩部分，以 12 個螺栓將其聯接。兩半輪之 $\bar{r}$ 均爲 3〔呎〕。如螺栓之直徑爲 $\frac{3}{4}$〔吋〕，螺紋底之直徑爲 0.62〔吋〕，螺栓之許用應力爲 15,000〔磅/吋²〕。試求此飛輪之極大許用轉速。 答：188〔轉/分〕。

4. 若習題 2 之飛輪有六輻，各輻之截面為橢圓形，長軸 4〔吋〕，短軸 2〔吋〕。若每一輻分擔其一部份之輪緣。試求輻內之單位應力為若干？

答：12,800〔磅/吋²〕.

140. 打擊中心. 命圖 386 所示之 P，為作用於點 O 所懸物體上之**衝力**(impulsive force)。物體受到此衝力後產生角加速度 α. 若力 P 為一變數，則在衝擊時之任何時刻，

$$Pd = I\alpha$$

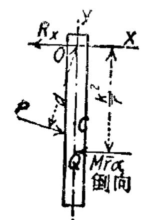


圖 386.

據第 131 節所述原理，可知切線有效力之合力 $M\bar{r}\alpha$ 作用於與懸點相距 $k^2/\bar{r}$ 之點 Q。如命 R_x 為因 P 而在點 O 所產生反力之之切線分力。若將有效力 $M\bar{r}\alpha$ 之方向倒置，卽得圖上所示之平衡力系。據 $\Sigma M_Q = 0$，卽可求得 P 在任何位置，並為任何大小時之 R_x 之值。當 P 作用於點 Q 時，$R_x = 0$。此物體在被擊後，不致產生與切線平行之反力之點 Q，謂之**打擊中心**(center of percussion)。此打擊中心卽為複擺之振動中心。故打擊中心與懸點亦可以互換。

習　題

1. 有長 4〔呎〕之細桿，懸於經過其上端之一軸上，並在鉛直之位置。設有 100〔磅〕之力，以垂直於桿之方向作用於細桿上。試分別求此力之作用點比懸點低 1〔呎〕，2〔呎〕，及 3〔呎〕時，在懸點之反力之大小與方向。

答：62.5〔磅〕，方向相反；25〔磅〕，方向相反；12.5〔磅〕，方向相同.

2. 若習題 1 之懸點，比細桿之上端低 1〔呎〕。試求其解。

答：57.1〔磅〕，方向相反；14.3〔磅〕，方向相反；28.6〔磅〕，方向相同.

141. 轉動體之支座反力. 一轉動物體之支座反力，除因其重量而產生之靜反力，及因外力而產生之反力外，尚可能有**應動反力**

(induced kinetic reaction)。如在物體上，除標出其重量及外力外，並加上倒向之法線及切線有效力，則能使其變成靜力平衡。此時任何靜力平衡之方程式，均可應用。上述之倒向有效力，須作用於與轉動軸相距 $k^2/\bar{r}$ 之一點。

在解題時，未知反力通常以其諸直角分力替代之。

若 $\bar{r}=0$，則 $M\bar{r}\omega^2=0$，$M\bar{r}\alpha=0$，故第 132 節之情況 1 與 2 內，無動反力。所求得之反力，與物體在靜止時者無異。在情況 3 內，若轉動軸經過桿之重心，則支座反力爲一力偶。

例題 1

圖 387(a)表示直徑 1〔呎〕，厚 1〔吋〕之鋼盤，此鋼盤可以繞着經過點 O 之一母線轉動。從靜止狀態開始轉動時，點 C 高於點 O，並在同一鉛直線上。若此鋼盤祇受到重力之影響而轉動，試求 $\theta=90°$ 時，在點 O 之鉸反力之法線分力及切線分力。

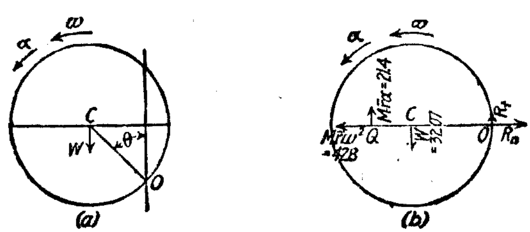


圖 387.

【解】 $\bar{r}=\frac{1}{2}$〔呎〕；$W=32.07$〔磅〕；$M=0.995$；$I_C=\frac{1}{2}Mr^2=0.124$；$I_0=I_c+Mr^2=0.373$.

運動方程式爲

$$W\bar{r}\sin\theta=I_0\alpha$$

當 $\theta=90°$ 時，$\sin\theta=1$，故上式爲

$$32.07\times0.5=0.373\alpha$$

$$\alpha=43\text{〔徑/秒}^2\text{〕}$$

$$M\bar{r}\alpha=0.995\times0.5\times43=21.4\text{〔磅〕}.$$

如將運動方程式內之 α，代入 $\omega\, d\omega = \alpha\, d\Theta$ 式中，則得

$$I_0 \omega\, d\omega = W\bar{r} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$I_0 \int_0^{\omega} \omega\, d\omega = W\bar{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$\tfrac{1}{2} I_0 \omega^2 = -W\bar{r} \Big[\cos\Theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\omega^2 = \frac{2W\bar{r}}{I_0}$$

$$\omega^2 = 2 \times 32.07 \times \frac{0.5}{0.373} = 86$$

$$M\bar{r}\omega^2 = 0.995 \times 0.5 \times 86 = 42.8 \text{〔磅〕}$$

$$\frac{k^2}{\bar{r}} = \frac{I_0}{M\bar{r}} = \frac{0.373}{0.995 \times 0.5} = 0.75 \text{〔呎〕} = \text{距離 } OQ.$$

圖 387(b)為所求之位置之脫離體圖。其上標有倒向之有效力，及替代鉸反力之法線分力及切線分力。據靜力平衡方程式，

$$\Sigma F_x = 0,\quad \text{得}\quad R_n = 42.8 \text{〔磅〕}$$

$$\Sigma F_y = 0,\quad \text{得}\quad R_t = 32.07 - 21.4 = 10.67 \text{〔磅〕}.$$

例題 2

有一高 4〔呎〕之鉛直軸 MN，離其頂點 1〔呎〕處，裝一長 2〔呎〕之水平臂 AB，如圖 388 所示。在水平臂之一端，裝有直徑 6〔吋〕之鑄鐵球。以作用於滑輪 C 之繩上 10〔磅〕之力，使軸在正方向轉動。假定從靜止狀態開始轉動時，球在平面 XZ 上，力與軸 X 平行，試求轉過一周後，因球及 10〔磅〕之力所產生之反力。

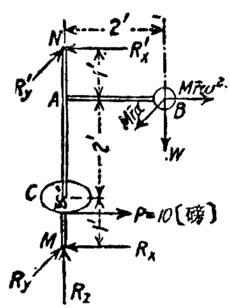


圖 388.

【解】

$$W = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \times 450 = 29.45 \text{〔磅〕}$$

$$M = 0.914;\quad I_{MN} = 3.679$$

$$\frac{k^2}{\bar{r}} = 2.013\,[\text{呎}];\ \Theta = 2\pi\,[\text{徑}] = 360^\circ$$

據 $Pd = I\alpha$ 式,得

$$10 \times 0.5 = 3.679\alpha$$

$$\alpha = 1.36\,[\text{徑/秒}^2]$$

因加速度為一常數,故

$$\omega = \sqrt{2\alpha\Theta} = 4.135\,[\text{徑/秒}]$$,在轉過一周後之角速度。

$$M\bar{r}\alpha = 0.914 \times 2 \times 1.36 = 2.486\,[\text{磅}]$$

$$M\bar{r}\omega^2 = 0.914 \times 2 \times 17.1 = 31.25\,[\text{磅}]。$$

如將上述之兩力,倒向後加在圖 388 所示之力系上,即得平衡狀況。

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$R_x = W = 29.45\,[\text{磅}]$$

據 $\Sigma M_{Ry} = 0$,得

$$(R_x' \times 4) - (29.45 \times 2) - (31.25 \times 3) - (10 \times 1) = 0$$

$$R_x' = 40.66\,[\text{磅}]$$

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$R_x = 0.59\,[\text{磅}]$$

據 $\Sigma M_{Rx} = 0$,得

$$(R_y' \times 4) - (2.486 \times 3) = 0$$

$$R_y' = 1.86\,[\text{磅}]$$

據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$R_y = 0.62\,[\text{磅}]$$

習 題

1. 假定例題 1 之各已知量均不變。 試求 $\Theta = 45^\circ$ 時之反力之鉛直分力與水平分力。 答: $R_y = 12.51$ [磅],向上; $R_x = 1.83$ [磅],向左.

2. 假定例題 1 之各已知量均不變。 試求在反力之水平分力改變方向時之 Θ 角。 答: $48^\circ 10'$.

3. 假定例題 2 之各已知量均不變。 試求圓球從靜止位置開始轉過 $\frac{3}{4}$ 周

時之反力。

答：$R_x = 6.88$〔磅〕；$R_x' = 0.64$〔磅〕；$R_y = -8.88$〔磅〕；$R_y' = 32.28$〔磅〕.

4. 假定例題2之各已知量均不變。試求圓球從靜止位置開始轉過2〔秒〕末之反力。

答：$\Theta = 2.72$〔弳〕；$R_x = 18.08$〔磅〕；$R_x' = -19.34$〔磅〕；$R_y = 4.09$〔磅〕；$R_y' = -11.88$〔磅〕.

5. 有一高12〔吋〕，底面半徑4〔吋〕之鑄鐵圓錐，能繞經幾何軸中點並與其垂直之水平軸自由轉動。如自其靜止位置釋放時，重心高於轉動軸並在同一鉛直線上，試求其轉過120°時反力之法線分力及切線分力。

答：$R_n = 110.18$〔磅〕；$R_t = 21.05$〔磅〕.

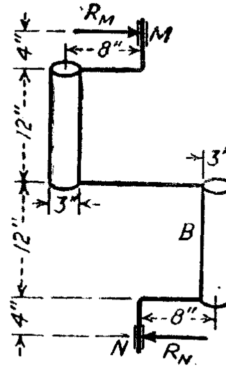


圖 389.

6. 在圖389內，A與B為直徑3〔吋〕，長1〔呎〕之鋼柱，繞鉛直軸MN轉動。試求其轉速為600〔轉/分〕時之動反力R_M及R_N.

答：$R_M = R_N = 735$〔磅〕.

142. 轉動物體之鈞衡. 在第141節內已證明：假定一物體繞一不經過其重心之軸轉動，則其軸承反力內，必含有動反力。因動反力之方向連續變更，故產生破壞性之振動。

卽使重心在轉動軸上，設物體為經過重心並與軸垂直之平面所分成之兩部分，並不對稱，則其應反力為一動力偶。第141節之習題6卽為一例。

所謂**鈞衡**(balancing)，卽在轉動體上加上(或減去)若干轉動部分，使整個轉動體之有效力平衡，不致產生應動反力。且無論此物體靜止或運動，由於其重量或外力所產生之靜反力，則保持不變。

以下所討論者，祇限於等速轉動。命圖390之A為重W_1之一物體。其沿徑距離為r_1，以角速度ω繞經過O並與OA垂直之軸

轉動。 因轉動關係，此物體對於軸 O 有一等於 $W_1r_1\omega^2/g$ 之離心拉力。 此拉力之方向，繼續變動，故在支座上產生變動之反力。若在轉動平面上直徑之對邊再加上重 W_2 之一物體，其半徑距離 r_2 適合於下式：

$$\frac{W_2r_2\omega^2}{g}=\frac{W_1r_1\omega^2}{g}$$

則上述兩物體因為離心拉力大小相等，方向相反，而能鈞衡。 又因 ω 與 g 均為常數，故上述之條件簡化為

$$W_2r_2=W_1r_1 \tag{14.51}$$

須注意者，即(14.51)式，亦即為**靜鈞衡**(static balancing)之條件。故在習慣上利用靜鈞衡條件求得所需之 W_2r_2 之值。

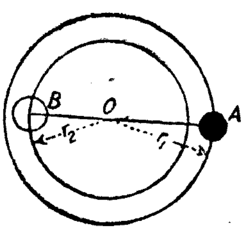


圖 390.

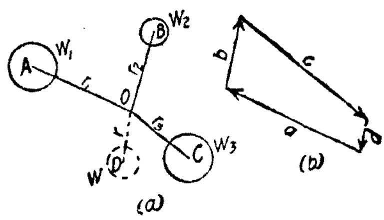


圖 391.

圖 391(a)表示在同一平面內之若干物體 W_1, W_2, 與 W_3，此等物體之沿徑距離為 r_1, r_2, r_3；其轉動軸經點 O，並與該平面垂直。 此諸重量，欲以一個重 W，沿徑距離 r 之重量鈞衡之。圖 391(b)表示其矢量多邊形，此多邊形之邊 a, b, c，代表 W_1r_1, W_2r_2, 及 W_3r_3 之方向及大小；其閉合線 d 代表 $W\boldsymbol{r}$ 之方向與大小。 若假定 W 或 r 中任何一量之值，另一量即可求得。

有時在所須鈞衡之轉動面上，由於構造等關係，不能再加上使其鈞衡之物體。在此種情況中，必須在另外兩轉動面中，加上兩個鈞

衡之重量。圖 392(a)即說明此種之情況。其兩個鈞衡重量之轉動面,在所需鈞衡之物體轉動面之兩側。 圖 392(b)所說明之情況,為兩個鈞衡重量之轉動面,在所需鈞衡之物體轉動面之同一側。

在圖 392 (a)與圖 392 (b)內,命 W_1 為所需鈞衡之物體。 B,C 為兩鈞衡重量之轉動面與軸之交點,W_2 與 W_3 必須在所示之經過

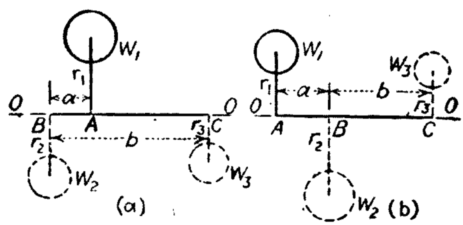


圖 392.

W_1 與軸 OO 之平面內。此時,諸法線有效力關於在此平面上任何點之力矩和,應等於零。

據 $\Sigma M_B = 0$,得

$$\frac{W_3}{g} r_3\omega^2 b = \frac{W_1}{g} r_1\omega^2 a$$

即

$$W_3 r_3 b = W_1 r_1 a \tag{14.52}$$

在圖 392(a)內,據 $\Sigma M_C = 0$,得

$$W_2 r_2 b = W_1 r_1 (b - a) \tag{14.53}$$

在圖 392(b)內,可得同樣之式

$$W_2 r_2 b = W_1 r_1 (b + a) \tag{14.54}$$

據(14.52),(14.53)式,或據(14.52) (14.54)式,可求得未知量 $W_2 r_2$,及 $W_3 r_3$.

同理,可知在與軸垂直之其他任何平面中之其他任何物體 W_1',W_1''…等,可用在經過點 B 之平面內之物體 W_2',W_2''…等及在經

過點 C 之平面內之物體 W_3', W_3''…等鈞衡之。 最後可將在經過點 B 之垂直平面內之物體 W_2, W'_2, W''_2… 以一個物體替代之，在經過點 C 之垂直平面內之物體 W_3, W_3', W_3''…亦以一個物體替代之。

圖 393 表示與軸 DE 成角 θ 之細桿 AB，設 AB 繞 DE 軸旋轉，並以臂 DA 及 EB 將其拉住. 細桿之重心 C 則在軸上，故若將細

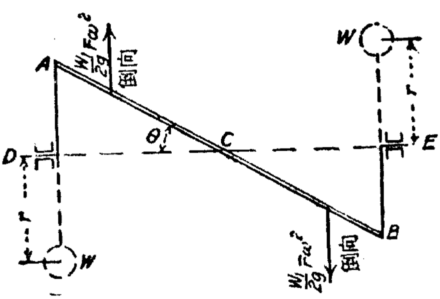


圖 393.

桿之 AC,CB 兩部分分開討論，其倒向有效力構成一力偶. 設命 l 爲AB 之長度，W_1 爲其重量，$\bar{r}$ 爲半桿之重心與軸 DE 間之距離，θ 爲桿與轉動軸間之角. 故得力偶之力矩爲

$$\frac{W_1}{2g}\bar{r}\omega^2 \times \frac{2}{3}l\cos\theta$$

因 $\bar{r} = \frac{l}{4}\sin\theta$，故上式可化爲

$$\frac{W_1}{12g}l^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

此力偶可用經過 D 與 E 之平面內之兩重量 W, W 之倒向有效力之力偶鈞衡之，命 r 爲每一重量與軸間之距離.

$$\frac{Wr}{g}\omega^2 l\cos\theta = \frac{W_1}{12g}l^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$$

$$Wr = \frac{W_1 l \sin\theta}{12} \tag{14.55}$$

若假定 W 或 r 之任何一量，另一量即可求得．欲得到整個轉動體之完全鈞衡，必須將細桿之 DA 與 BE 兩臂，及聯接鈞衡重量 W 與 W 之兩臂之倒向有效力均計算在內．

習 題

1. 有一直徑 $\frac{3}{4}$〔吋〕，長 20〔吋〕之鋼桿，其一端有直徑 4〔吋〕之鑄鐵球，並繞經過其另一端並與桿垂直之軸自由轉動．此轉動桿與圓球，以直徑 1〔吋〕長 6〔吋〕之圓柱形鋼臂及聯於鋼臂一端之鉛球鈞衡之．試求鉛球應有之直徑(鉛之重量為 710〔磅/呎^3〕)． 答：4.9〔吋〕．

2. 在圖 391 內，$W_1 = 12$〔磅〕，$W_2 = 10$〔磅〕，$W_3 = 16$〔磅〕，$r_1 = 20$〔吋〕，$r_2 = 18$〔吋〕，$r_3 = 16$〔吋〕，$\angle AOB = 90°$，$\angle BOC = 120°$．設 $r = 10$〔吋〕．試求使其鈞衡之 W 之重量，及 $\angle AOD$． 答：5.51〔磅〕；109°25′．

3. 有一長 8〔呎〕之軸，裝於兩端之軸承間．在離左軸承 3〔呎〕處，有一直徑 2〔呎〕厚 4〔吋〕之鋼盤．此鋼盤以鍵聯接於軸上，並具有 6〔吋〕之偏心距離．設欲在離兩軸承各 1〔呎〕之垂直平面內，各於徑向距離 15〔吋〕處裝有鈞衡物體．試求此兩鈞衡物體之重量． 答：136.72〔磅〕；68.36〔磅〕．

4. 設在習題 3 所述之軸上，離右軸承 3〔呎〕處，另裝一同樣之圓盤，但其偏心距離之方向與第一圓盤差 90° 角． 試求使兩圓盤鈞衡之重量． 又其所放之位置，與在習題 3 內之鈞衡重量之位置應成何角?

答：左邊，152.6〔磅〕，26°32′；右邊 152.6〔磅〕，63°28′．

5. 對於圖 389 所示之轉動體，若在經過其圓柱外端之垂直平面上，離轉動軸 6〔吋〕處，裝有鈞衡重量． 試求此等鈞衡重量之值． 答：16〔磅〕．

6. 設圖 393 之桿 AB，為長 4〔呎〕，直徑 3〔吋〕之鋼桿．臂 DA 與 EB 為直徑 2〔吋〕長 1〔呎〕之鋼桿． 重量 W, W 之臂之直徑為 1〔吋〕，長 8〔吋〕，而重量之中心與軸間之距離為 10〔吋〕．試求所需 W, W 之重量．又若鈞衡重量為 4〔吋〕長之鑄鐵圓柱，試求其直徑． 答：24.9〔磅〕；5.52〔吋〕．

剛體轉動之總習題

1. 一滑輪之直徑爲 3〔呎〕,轉速爲 450〔轉/分〕. 利用作用於其軸上之摩擦力,使其在 125〔秒〕內停止。假定摩擦力爲一常數,試求此滑輪之轉數,及滑輪邊上一定點之切線加速度,並求在 30〔秒〕末滑輪邊上一定點之法線加速度及切線速度。

答: 468.75〔轉〕; $a_t = -0.565$〔呎/秒^2〕; $a_n = 1924$〔呎/秒^2〕; $v = 53.74$〔呎/秒〕.

2. 有一吊掛礦用升降室之蒸汽起重機,其鼓輪之直徑爲 54〔吋〕。若升降室下落之速度爲 20〔呎/秒〕。試求鼓輪之轉速。 答: 85〔轉/分〕.

3. 若習題 2 之升降室重 800〔磅〕,鼓輪之慣矩爲 168. 問升降室須自由降落若干時間後,方能達到其所設之下落速度? 答: 1.45〔秒〕.

4. 有一小木梁,須用 5〔磅〕之重量使其產生撓度(deflection) 1〔吋〕。設有 2〔磅〕之重物置於梁上,並使其振動。試求其週期 T.

答: $T = 0.202$〔秒〕.

5. 有一 5〔磅〕之重物,置於一懸臂梁式之彈簧上,此時彈簧所生之撓度爲 0.12〔呎〕。如使其振動,其頻率 n 應等於若干? 答: $n = 2.61$.

6. 設有一 10〔磅〕重之重物,懸於一螺線彈簧上,使其每秒內振動 136次。試求此彈簧之標度。 答: 5.25〔磅/吋〕.

7. 一鋼桿之直徑爲 1〔吋〕,長 10〔呎〕。懸於離其一端 2〔呎〕並與桿垂直之一水平軸上。試求其打擊中心之位置。又若將其用爲小振幅之擺,其週期應等於若干。 答: 5.78〔呎〕; $T = 2.66$〔秒〕.

8. 設將習題 7 之桿,舉起至水平位置,然後將其釋放。求在釋放時之法線反力及切線反力。又在其經過 45° 位置時,及經過鉛直位置時之法線反力及切線反力等於若干?

答: 在 0° 時, $R_n = 0$; $R_t = 12.8$〔磅〕. 在 45° 時, $R_n = 38.48$〔磅〕; $R_t = 9.05$〔磅〕. 在 90° 時, $R_n = 54.4$〔磅〕; $R_t = 0$.

9. 設習題 7 之桿,自鉛直之靜止位置下落,當時桿之重心高於其支軸心。試求其與鉛直線成 60° 角時;在水平方向時;及在鉛直方向時之法線反力及切線反力。

答: 在 60° 時, $R_n = 0.53$〔磅〕; $R_t = 11.1$〔磅〕. 在 90° 時, $R_n = 27.7$〔磅〕;

$R_t = 12.8$〔磅〕. 在 180° 時, $R_n = 82.1$〔磅〕; $R_t = 0$.

10. 問習題 9 之桿,在若何角度時變換其法線反力之方向。 答: 59°30′.

11. 有一重 4000〔磅〕之鑄鐵飛輪,鑄成兩半部,用 14 個鋼螺栓將其聯接。在輪緣上之每個接頭有 4 個螺栓,在轂上則有 6 個螺栓。若每半個飛輪之重心與軸心相距 4〔呎〕,極大轉速為 300〔轉/分〕。試求許用牽應力為 16,000〔磅/吋²〕時,所需各螺栓在螺紋底之直徑。 答: 1.18〔吋〕.

12. 一鑄鐵飛輪之輪緣闊 6〔吋〕,厚 1〔吋〕,外直徑 30〔吋〕。若不計輪輻之牽力,試求 1500〔轉/分〕之轉速時,輪緣內之單位牽應力為若干?

答: 3500〔磅/吋²〕.

13. 一鑄鐵飛輪之直徑為 12〔吋〕,輪緣闊 16〔吋〕,厚 4〔吋〕。設鑄鐵之抗牽極限強度(tensile ultimate strength)為 24,000〔磅/吋²〕,若不計輻之牽力,試求輪緣破裂時之速率。 答: 815〔轉/分〕.

14. 設有重 10,000〔磅〕之飛輪,裝於兩支座之中點,轉速為600〔轉/分〕,若其偏心距離為 0.04〔吋〕。試求每一反力之變化。 答: 4090〔磅〕.

15. 設布雷南單軌車迴轉器(Brennan monorail-car gyroscope)之輪重 1000〔磅〕,裝於兩軸承間之水平軸之中點,其轉速為 3000〔轉/分〕。試求使每轉一周間之反力發生自0 至 1000〔磅〕的變化所需之偏心距離。

答: 0.00392〔吋〕.

16. 一飛輪重 500〔磅〕,其對於軸之偏心距離為 0.03〔吋〕,與左軸承間之距離為 2〔呎〕,與右軸承間之距離為 6〔呎〕,軸重 160〔磅〕,其重心即在其中點。試求飛輪之轉速為 1200〔轉/分〕時,在每一軸承上之極大與極小反力。

答: 左端, 915〔磅〕; −5〔磅〕. 右端, 358〔磅〕; 52〔磅〕.

17. 一 20〔磅〕之調速器球之中心,與軸上支點之距離為 2〔呎〕。設於轉動時使與軸保持 75° 角,試求所需之轉速,及在臂內之牽力。

答: 75.5〔轉/分〕; 77.3〔磅〕.

18. 在一 4° 鐵路曲線(美國制)上,一車以 40〔哩/時〕之速度行駛時之合凸緣壓力為零。試求所需之超高度為若干。又一重 100,000〔磅〕之車,以60〔哩/時〕之速率在此曲線上開過。試求其合凸緣壓力。軌規 $G = 4.9$〔呎〕.

答: $e = 4.36$〔吋〕; 9300〔磅〕.

19. 一高速公路之曲率半徑爲 300〔呎〕. 設一車以 60〔哩/時〕之速率在此公路上開過時，車輪上之橫向力爲零。試求其路面側斜之角度。設一競賽車之輪距爲 4.5〔呎〕，重心與地面間之距離爲 1.5〔呎〕，摩擦係數 $f = 0.6$. 試求在此斜側之公路曲線上之極限速率。　答：38°40′; 110〔哩/時〕.

20. 有一8〔呎〕長之鉛直軸，離其上支座1〔呎〕處，有一離心距離爲 3〔吋〕之重量 120〔磅〕。離其上支座 6〔呎〕處，在軸之對邊，有離心距離爲 7.5〔吋〕之重量 80〔磅〕。試求軸以 180〔轉/分〕之速度轉動時，支座之法線反力。

答：下支座，371〔磅〕；上支座 148〔磅〕.

21. 設習題 20 之軸，在 10〔秒〕內，以等減速度使其停止。試求作用於軸上之切線反力。　答：下支座，1.98〔磅〕；上支座，0.80〔磅〕.

22. 圖 394 表示一荷重錐動擺調速器，其 $W_1 = 60$〔磅〕，$W = 15$〔磅〕。試求使調速器保持圖上所示位置所需之速率，及在各臂內之牽力。

答：158〔轉/分〕；45.4〔磅〕，下臂；68.0〔磅〕，上臂.

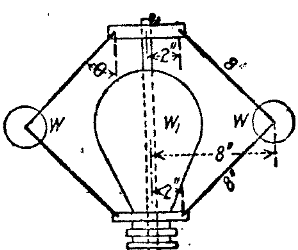


圖　394.

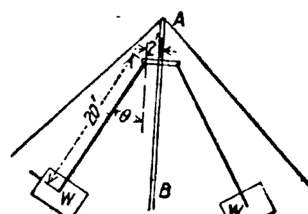


圖　395.

23. 設圖 394 所示之調速器在最低位置時之 $\Theta = 15°$. 試求調速器開始有作用時之速率。　答：107.6〔轉/分〕.

24. 設圖 395 所示之轉車各重 1600〔磅〕。兩車繞鉛直軸 AB 轉動時，能向外盪出。如角 Θ 之許有極大值爲 50°. 試求車之極大轉速，及繫車之纜內對應之牽力。　答：14.25〔轉/分〕；2330〔磅〕.

25. 圖 396(a) 及圖 396(b) 表示裝有重量 W_1 及 W_1' 之軸之側視圖及端視圖。設 $W_1 = 120$〔磅〕，$r_1 = 18$〔吋〕，$W_1' = 80$〔磅〕，$r_1' = 15$〔吋〕。試求使其平衡在 A，B 兩處所需之重量，及其與水平面間之角度。所求重量

在 A,B 兩處之半徑距離均為 12〔吋〕。

答: $W_A = 206$〔磅〕; $\Theta_A = 259°30'$, $W_B = 66.4$〔磅〕; $\Theta_B = 160°10'$.

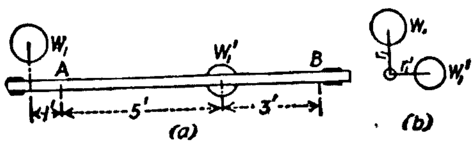


圖 396.

26. 有一機器脚踏車，在直徑 100〔呎〕之空心鉛直圓柱內沿水平方向行駛。試求速率為 40〔哩/時〕時所需之極小摩擦係數。 答: $f = 0.468$.

27. 有一螺旋彈簧，其上端掛牢，下端弔一重物。若將重物拉下 1.5〔吋〕，然後驟然釋放，能在 0.72〔秒〕內來回振動一次。試求釋放後 3〔秒〕時自其靜平衡位置量起之位移，速度，及加速度。

答 -0.75〔吋〕; 0.945〔呎/秒〕; 4.76〔呎/秒^2〕.

28. 若習題 27 之重物拉下 2〔吋〕然後驟然釋放，試求從釋放時算起，至位移為 1〔吋〕時；速度為 -0.5〔呎/秒〕時；及加速度為 -2〔呎/秒^2〕時之時間。

答: 0.24〔秒〕; 0.40〔秒〕; 0.198〔秒〕.

29. 設迴轉器之轉子 (rotor) 之直徑為 5〔呎〕，從靜止時開始，能在 300〔秒〕內達到 4500〔轉/分〕之轉速。試求其角加速度，及轉子邊上一點之切線加速度；並求轉子達到其全速度後，其邊上一點之法線加速度為若干。

答: 1.571〔弳/秒^2〕; 3.93〔呎/秒^2〕; 555,180〔呎/秒^2〕.

30. 一錶上之擺輪(balancing wheel)之直徑為 0.6〔吋〕。在 $\frac{1}{5}$〔秒〕內來回擺動一次，在中立位置兩邊之角移均為 15°. 若設角加速度與角移之大小成正比例，但方向相反。試求其極大角速度，在擺輪邊上一點之極大線速度，極大角加速度，及在擺輪邊上一點之極大法線加速度。

答: 3.29〔弳/秒〕; 0.0823〔呎/秒〕; 41.36〔弳/秒^2〕; 0.271〔呎/秒^2〕.

31. 一飛機在俯衝試驗時之向下鉛直速率為 579〔哩/時〕。於是將操縱桿後拉，使經一曲線而改成水平飛行。若改變方向時在某點造成之加速度為 $7.6g$. 試求飛行曲線之半徑。 答: $r = 2950$〔呎〕.

第十五章

剛體之平面運動

143. 移動與轉動之併合. 設一物體作平面運動(plane motion)時,此物體上之每一點,與一固定平面間之距離保持常數值,則此平面,或任何與其平行之平面,謂之此物體之運動平面(plane of motion). 通常用作參攷者,爲經過物體重心之運動平面.

物體之任何平面位移,可以視作由於繞此平面內一任意點之轉動,及一對應之移動合併而成. 換言之,卽無論其實際之運動如何,如用此兩種之簡單運動,總能得到同樣之結果. 在圖 397 (a) 內,命 AB 爲在運動平面內,聯結一物體在其原有位置時之任何兩點之直線,A_2B_2 爲此物體經過任何平面運動後所達之位置. 設命 O 爲運動平面內之任一點. 則自 AB 至 A_2B_2 之位移,相當於一個關於點 O 之轉動,轉至與 A_2B_2 平行之位置 A_1B_1,及一自 A_1B_1 至 A_2B_2 之移動.

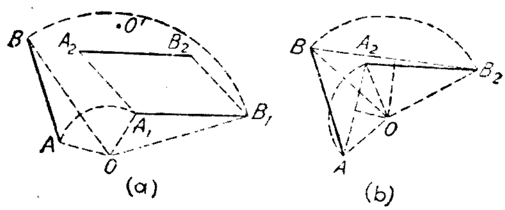


圖 397.

一物體之任何平面運動,亦可視爲關於空間某定點之一個簡單轉動. 欲求此定點之位置之方法如下. 聯結圖 397 (b) 之 AA_2 線及 BB_2 線,作 AA_2 線及 BB_2 線之垂直平分線. 得此兩垂直平

分線之交點 O. 因三角形 AOB 與 A_2OB_2 完全相等. 角 AOB 等於角 A_2OB_2. 故角 AOA_2 等於角 BOB_2. 據此可知自 AB 至 A_2B_2 之位移,相當於關於點 O 之一個簡單轉動,所轉過之角度爲 AOA_2.

若 AA_2 與 BB_2 平行,則點 O 在無窮遠處,而此平面運動相當於單純之移動.

習　題

1. 在圖397(a)內,將 AB 至 A_2B_2 之位移,分解爲一個關於點 O' 之轉動,及一個對應之移動. 再取點 A 爲轉動中心,及 AB 之中點爲轉動中心,分別解此位移爲一轉動及一個對應之移動.

2. 一輪在水平面上轉過 $\frac{1}{4}$ 周,試求其相當之轉動中心. 又若此輪轉過 $\frac{1}{2}$ 周,其相當之轉動中心又應在何處.

144. 在任何平面運動中,速度之合成與分解. 欲求得在任何平面運動中,物體上任一點之絕對速度,其最好方法,爲先求其對於此物體上之某特殊參攷點之相對速度,及此參攷點之絕對速度,據第 101 節,可知所設點之絕對速度,等於以上兩速度之矢量和.

命圖 398 之點 B 爲剛體上之任一點,A 爲所取之參攷點. 命 v_1 爲點 A 之絕對速度,v' 爲 B 對於 A 之相對速度. 因 A 與 B 均爲剛體上之定點,故 B 對於 A 之相對速度,祇有沿切線方向者. 此

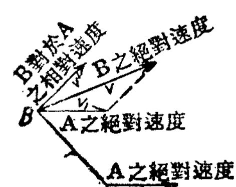


圖 398.

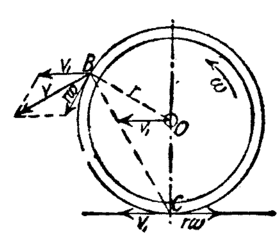


圖 399.

相對速度等於 ωr. r 爲 AB 間之距離，ω 爲其角速度，據上述之原理，可知 B 之絕對速度 v，等於 v_1 與 v' 之矢量和。

反之，剛體之任一點之絕對速度，可以分解爲下述兩分矢。一等於此物體上所取任一參攷點之絕對速度，一等於與聯結兩點之直線垂直之相對速度。

試觀圖 399 所示之例，爲一在水平面上向左滾動之輪。設 v_1 爲輪心之速度，ω 爲輪之角速度。輪邊上任一點對於輪心之相對速度卽等於其自由滾動之速度 $r\omega = v_1$. 任一點之絕對速度卽等於此點對於輪心之相對速度，與輪心之絕對速度之矢量和，如圖中之點 B 所示。點 B 之絕對速度爲 v，此速度卽等於 v_1 及 $r\omega$ 之矢量和。同樣情形，可得在輪底之點 C 之絕對速度，等於其對於 O 之相對速度 $r\omega$，及 O 之絕對速度 v_1 之矢量和。因以上兩速度之大小相等，方向相反，故點 C 之絕對速度爲零。

研究一滾動輪之運動時，有時以點 C 作爲參攷點，反爲簡單。因點 C 之絕對速度爲零。故任一點，例如點 B，之絕對速度，卽等於其對於 C 點之相對速度。故 $v_B = \bar{r}_B\omega$，其中 r_B 爲 BC 間之距離。

習　題

1. 在圖 398 內，$v_1 = 60$〔呎/秒〕，取向右之水平方向。設 $r = 6$〔呎〕；$\omega = 12$〔弳/秒〕，順時針方向；AB 與水平線成 30° 角。試求點 B 之絕對速度。

答：$v = 114.5$〔呎/秒〕，與水平線成 33° 角。

2. 一圓柱之直徑長 4〔呎〕，在一水平面上以 12〔呎/秒〕之等速度向右滾動。若以輪中心爲參攷點，試求在前面之輪緣上，比水平半徑高 30° 角之一點之絕對速度。再以圓柱底之切點作爲參攷點，核對以上所得結果。

答：20.8〔呎/秒〕，與水平線成 30° 角。

3. 飛機之螺旋槳以齒輪與發動機之軸相聯，設發動機軸每 16〔轉〕，螺旋槳轉 11〔轉〕。如飛機之前進速率爲 302〔哩/時〕，發動機之轉速爲 2300

〔轉/分〕，若螺旋槳葉之直徑為 11〔呎〕．試求螺旋槳葉端對於空氣之相對速度．

答：1013〔呎/秒〕．

145．在任何平面運動中，加速度之合成與分解．

上節提及之第 101 節內所述之原理，對於速度與加速度，均能應用[1]．換言之，即物體上任一所設點之絕對加速度，等於此點對於在物體上所取參攷點之相對加速度，及該參攷點之絕對加速度之矢量和．

命圖 400 之點 B 為一剛體上之任一點．A 為一參攷點．A 點之絕對加速度為 a_1．命 $AB = r$，ω 為剛體之角速度，α 為角加速度．則求相對加速度之最簡單之方法，係利用其切線分矢 $r\alpha$，及法線分矢 $r\omega^2$．此兩分矢之矢量和即為相對加速度 a'．a_1 與 a' 之矢量和 $BC = a$，即為點 B 之絕對加速度．

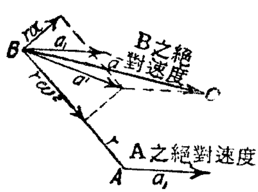


圖 400.

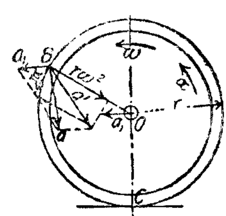


圖 401.

反之，任一點之絕對加速度，可以分解為三個分矢．一為在物體上所取任一參攷點之絕對加速度．一為沿聯結兩點間之直線之法線加速度 $r\omega^2$，一為與此直線垂直之切線加速度 $r\alpha$．

圖 401 所示之例，為在水平面上向左滾動之一輪．命輪中心之加速度為 a_1，其角加速度為 α，其角速度為 ω．在輪緣上任一點 B 相對於輪中心之加速度之切線分矢為 $r\alpha$．在自由滾動時 $|r\alpha| =$

---

(1) 此處假定物體上所設定點，與該物體無相對運動．故無科賴奧來加速度，參攷附卷第二章第二節．

$|a_1|$。其法線分矢為 $r\omega^2$. 此兩矢量之和，卽為點 B 對於輪中心之相對加速度 a'. a' 與 a_1 之矢量和，卽為點 B 之絕對加速度 a。

習 題

1. 在圖 400 內，$a_1 = 30$〔呎/秒^2〕，水平向右；AB 長 6〔呎〕，與水平線成 $30°$ 角；$\omega = 6$〔弳/秒〕，順時針方向；$\alpha = 10$〔弳/秒^2〕，順時針方向。試求點 B 之絕對加速度。 答：$a = 253.2$〔呎/秒^2〕；在水平線下 $12°47'$。

2. 試求第 144 節內習題 2 所指之點之絕對加速度。計算時仍用此習題內之兩參攷點。 答：72〔呎/秒^2〕；向着中心。

3. 在圖 401 內，命輪之直徑為 6〔呎〕，以角速度 $\omega = 8$〔弳/秒〕，及角加速度 $\alpha = -12$〔弳/秒^2〕向左滾動。試求在點 B 之絕對加速度 a. 假定半徑 OB 與水平線成 $30°$ 角。 答：229.4〔呎/秒^2〕，在水平線上 $16°25'$。

146. 轉動之瞬軸。 剛體在任何平面運動中之**瞬時中心** (instantaneous center)，卽為所論及之某時刻之轉動中心。假定瞬時中心在剛體之內，則剛體之該點在所論時刻為靜止者。經過瞬時中心並與運動平面垂直之軸，謂之**瞬軸**(instantaneous axis)。

欲求瞬時中心之位置，至少須知在物體上之兩點在同一時刻之速度之方向，而上述兩點不得在同一徑線上。命圖 402 之 v_A 為剛體上點 A 之速度，v_B 為點 B 之速度。畫線 AC 與速度 v_A 之方向垂直，剛體之轉動中心必在線 AC 上。同理，畫與速度 v_B 之方向垂直之 BD 線。剛體之轉動中心，必在線 BD 上。假定線 AC 與線 BD 相交，其交點如圖上所示之點 O，則此點必為瞬時中心。假定 AC 與 BD 不相交，v_B 與 v_A 平行。則在

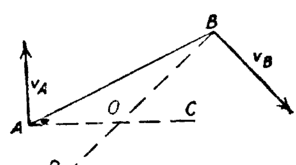


圖 402.

此時刻之物體運動為純粹之移動．由此可知移動即為瞬時中心在無窮遠處之轉動．

一般而論，一物體在各個時刻，無論在空間或對於物體而言，瞬時中心皆非為同一之點． 此點對於物體之軌跡，謂之物體瞬心線(body centrode)，此點在空間之軌跡，謂之空間瞬心線(space centrode)．

在瞬時轉動中，仍能應用簡單轉動之公式，$v = r\omega$． 例如在圖402內，$v_B = \overline{OB}\omega$，$a_A = \overline{OA}\omega$． 式中 ω 為物體在該時刻之角速度．

習　題

1. 試求圖403之連桿 AB，在所示位置時之瞬時中心． 若曲柄銷 B 之轉速為100〔轉/分〕，試求十字頭 A 之速度．

答：在 A 點之上方11.15〔呎〕；$v_A = 9.85$〔呎/秒〕.

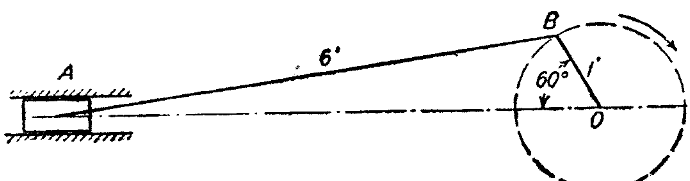


圖　403.

2. 假定圖403所示之連桿之重心，與 A 相距4〔呎〕．試求在所示位置時重心之速度及法線加速度．

答：$\bar{v} = 9.95$〔呎/秒〕，與水平線成20°30′角；$a_n = 8.78$〔呎/秒²〕.

3. 在圖404所示之連件運動(link motion)內，OA 之轉速為6〔弳/秒〕，在順時針方向．試求連件 AB 之瞬時中心．並求

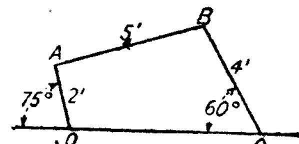


圖　404.

點 B 之速度，及 QB 之角速度。

答：在 OA 之延線上，與 A 相距 18.9〔呎〕；$v_B = 12.3$〔呎/秒〕；QB 之 $\omega = 3.475$〔弳/秒〕.

147. 運動之通式. 在第 145 節內，已證明剛體上之任一點，在任何平面運動時之絕對加速度，可以分解為三個分加速度。一與物體上所取任一參攷點之加速度，大小相等，方向相同。一等於 $\rho\omega^2$，沿着聯結兩點之直線。一等於 $\rho\alpha$，與上述直線垂直。如命任一質點之質量為 dM，則在此質點上之有效力，為 dMa，$dM\rho\omega^2$，$dM\rho\alpha$，三個分力之合力。

在圖 405 內，命 A 為參攷點，軸 X 與點 A 之絕對加速度 a_1 之方向相同。命 ΣF 為所有外力之合力，ΣF_x，ΣF_y，分別為 ΣF 在 X，Y 兩方向之分矢。因所有之外力系，即相當於質量 M 之整個物體之有效力系。故得

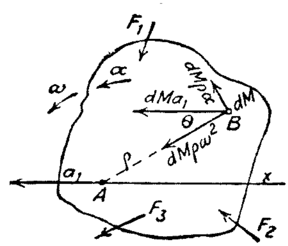


圖 405.

$$\Sigma F_x = \int dM\, a_1 + \int dM\, \rho\alpha \sin\theta + \int dM\, \rho\omega^2 \cos\theta$$

$$= a_1 \int dM + \alpha \int dM y + \omega^2 \int dM\, x$$

$$= Ma_1 + M\alpha\bar{y} + M\omega^2\bar{x} \qquad (15.1)$$

$$\Sigma F_y = \int dM\, \rho\alpha \cos\theta - \int dM\, \rho\omega^2 \sin\theta$$

$$= \alpha \int dM\, x - \omega^2 \int dM\, y$$

$$= M\alpha\bar{x} - M\omega^2\bar{y} \qquad (15.2)$$

$$\Sigma M_A = \int dM\, \rho^2\alpha + \int dM\, a_1\rho \sin\theta$$

$$= \alpha \int \rho^2 \, dM + a_1 \int dM \, y$$

$$= I_A \alpha + M a_1 \bar{y} \tag{15.3}$$

通常取重心為參攷點，$\bar{x} = \bar{y} = 0$，故(15.1)(15.2)(15.3)三式可以簡化為

$$\Sigma F_x = M\bar{a} \tag{15.1a}$$

$$\Sigma F_y = 0 \tag{15.2a}$$

$$\Sigma M_0 = I_0 \alpha \tag{15.3a}$$

I_0 為物體關於經過重心 O 之軸之慣矩.

從以上三式所得之原理，可陳述如下.

(一)在任何平面運動中，物體重心之加速度，即相當於將整個物體之質量集中於重心，並將實際之外力亦集中於重心，但不變其大小與方向時，重心所產生之加速度.

(二)在任何平面運動中，對於重心之角加速度，相當於將此重心固定，以力矩 $= \Sigma M_0$ 之力偶，作用於此物體上所產生之角加速度.

如在脫離體上，除實際作用之外力外，再加上倒向之有效力，即可應用靜力平衡方程式. 換言之，即於重心上在絕對加速度之相反方向，加一等於 $M\bar{a}$ 之力；再於角加速度之相反方向，加一等於 $I_0\alpha$ 之力偶；則所設問題即變為靜力問題.

148. 滾動輪. 一輪在平面上之滾動，為一種移動與轉動之合併運動. 在圖 406 內，作用於輪中心之水平力 P，能使輪在水平面上自由滾動. 因輪在水平面上，有滑動之趨勢. 故在接觸點所產生之摩擦力 F，與運動之方向相反. 設將重心點 O 作為參攷點，據

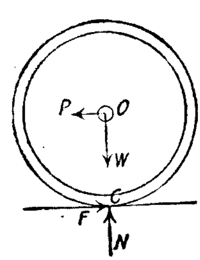


圖 406.

(15.1a)(15.2a)(15.3a)式，得

$$\Sigma F_x = P - F = \frac{W}{g}a$$

$$\Sigma F_y = W - N = 0$$

$$\Sigma M_0 = Fr = I\alpha$$

假定為自由滾動，則

$$a = r\alpha$$

據以上四式，可求得加速度及摩擦力之值。

假定輪在斜面上滾動，輪之重量在平行於斜面之方向之分力，即影響輪之運動。圖 407 表示在與水平線成角 β 之斜面上滾動之一輪。假定此斜面相當粗糙，足以發生自由滾動。並定此輪在斜面之頂釋放，任其因重力之影響自由滾下。作用於輪上之外力，除其重量 W 外，尚有法線反力 N，及摩擦力 F。設以重心 O 作為參攷點，並取軸 X 與斜面平行，即在參攷點之加速度之方向，故據(15.1a)，(15.2a)，(15.3a)式，得

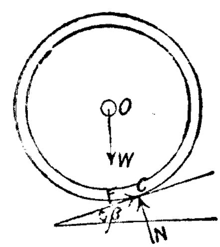


圖 407.

$$\Sigma F_x = W\sin\beta - F = \frac{W}{g}a$$

$$\Sigma F_y = W\cos\beta - N = 0$$

$$\Sigma M_0 = Fr = I_0\alpha$$

假定為自由滾動，則

$$a = r\alpha$$

例 題 1

假定圖 406 所示之輪為直徑 4〔呎〕之圓柱體，重 1000〔磅〕。$P = 100$〔磅〕。試求 F, a, α 之值。又設此圓柱體，從靜止狀態開

始滾動，試求其動過 5〔呎〕後之速度。

【解】 據(15.1a)式，得

$$100 - F = \frac{1000}{32.2}a$$

據(15.3a)式，得

$$2F = \frac{1}{2} \times \frac{1000}{32.2} 4\alpha$$

假定爲自由滾動，則

$$a = 2\alpha$$

解以上三式，得

$$F = 33.33\text{〔磅〕}$$

$$a = 2.147\text{〔呎/秒}^2\text{〕}$$

$$\alpha = 1.073\text{〔弳/秒}^2\text{〕}$$

據 $v^2 = v_0^2 + 2as$ 式，得

$$v^2 = 21.47$$

$$v = 4.633\text{〔呎/秒〕}。$$

例 題 2

圖 408 表示直徑 2〔呎〕之圓柱，重 200〔磅〕，靜置於水平面上。聯接於此圓柱上，有一直徑 1〔呎〕之空心之同心圓柱，其重量可以不計，並有繩捲於空心圓柱上。若使圓柱產生 20〔呎/秒²〕之加速度，問所需作用於繩上之力 P 應有若干？摩擦力 F 爲若干？假定運動爲自由滾動。又圓柱從靜止狀態開始，試求其動過 8〔呎〕時之圓柱中心之速度。

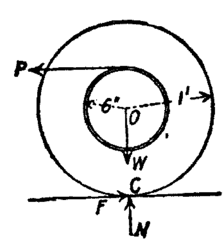


圖 408.

【解】 據(15.1a)式，得

$$P - F = \frac{200}{32.2} \times 20$$

據(15.3a)式，得

$$P \times 0.5 + F \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{200}{32.2} \times 1^2 \times \frac{20}{1}$$

解之，得

$$P = 124.1 \text{〔磅〕}$$

$$F = 0$$

假定 P 之作用點，低於所示之點，則所產生之摩擦力在 P 之反方向。如其作用點高於所示之點，則所產生之摩擦力，與 P 在相同之方向。

$$v^2 = 2as = 320$$

$$v = 17.89 \text{〔呎/秒〕}.$$

例 題 3

試證明一均質球得在與水平面成角 β 之斜面上自由滾動時，f 之極小值爲 $\frac{2}{7}\tan\beta$.

【解】

$$I_0 = \frac{2}{5}\,\frac{W}{g}r^2$$

據(15.3a)式，得

$$Fr = \frac{2}{5}\,\frac{W}{g}r^2\alpha$$

$$F = \frac{2}{5}\,\frac{W}{g}a$$

據(15.1a)式，得

$$W\sin\beta - F = \frac{W}{g}a$$

自以上兩式消去 $\frac{W}{g}a$，得

$$F = \tfrac{2}{7} W \sin\beta$$

在角 β 增加時，$\sin\beta$ 亦隨之而增加，至 F 等於其極限値 F' 時，開始滑動。對於角 β 之值，

$$f = \frac{F'}{N} = \frac{\frac{2}{7}W\sin\beta}{W\cos\beta} = \tfrac{2}{7}\tan\beta$$

設 $\frac{2}{7}\tan\beta$ 大於靜摩擦係數 f，則圓球將於其接觸點滑動，a 不等於 $r\alpha$。但設已知其動摩擦係數，則摩擦力為已知；其餘各值，亦均可求得。

例 題 4

有直徑 2〔呎〕，重 100〔磅〕之輪，位於長 10〔呎〕之 30° 角斜面之頂。輪之迴轉半徑爲 0.8〔呎〕。設其自靜止狀態開始自由滾下，試求其滾至斜面底時，輪中心之線加速度及線速度，並求摩擦力 F。

【解】 以輪中心作爲參攷點，即得應用簡化之 (15.1a)(15.2a)(15.3a)式。設取軸 X 平行於斜面，據(15.1a)式，得

$$50 - F = \frac{100}{32.2}a$$

據(15.3a)式，得

$$F = \frac{100}{32.2} \times 0.64\alpha$$

因 $r = 1$〔呎〕，故在自由滾動時 $a = \alpha$。 設以 a 替代 α，將以上

$$50 = \frac{164}{32.2}a$$

$$a = 9.82 \text{〔呎/秒}^2\text{〕}$$

$$F = 19.5 \text{〔磅〕}$$

$$v^2 = 2as = 2 \times 9.82 \times 10 = 196.4$$

$$v = 14.02 \text{〔呎/秒〕}$$

習 題

1. 有一直徑 1〔呎〕長 1〔呎〕之鑄鐵圓柱，在一水平面上自由滾動。有一 16〔磅〕之水平力，作用於圓柱之中心，並與其幾何軸垂直。試求在圓柱後部之邊上，比水平半徑高 45° 角之一點，從靜止開始運動，在 5〔秒〕末之速度及加速度。 並求其摩擦力 F.

答： $v = 9$〔呎/秒〕，向前上方，與水平線成 22°30′ 角； $a = 48.2$〔呎/秒^2〕，向前下方，與水平線成 43° 角； $F = 5.33$〔磅〕，向後.

2. 假定習題 1 之 16〔磅〕水平力作用於圓柱之頂部，試求各項之值.

答: $v = 18$〔呎/秒〕向前上方,與水平線成 22°30′ 角; $a = 192$〔呎/秒^2〕,向前下方,與水平線成 44° 角; $F = 5.33$〔磅〕,向前.

3. 在圖 408 內,命空心小圓柱之半徑爲 9〔吋〕,P 爲 50〔磅〕. 試求加速度 a 及摩擦力 F 之値. 　答: $a = 9.39$〔呎/秒^2〕; $F = 8.33$〔磅〕,向前.

4. 在圖 408 內,假定小圓柱爲一直徑 6〔吋〕,重 80〔磅〕之實心圓柱. 試求產生 8〔呎/秒^2〕之加速度所需之力 P,試再求當時之摩擦力 F.

答: $P = 76$〔磅〕; $F = 6.5$〔磅〕,向後.

5. 試證明實心之均質圓柱,在與水平線成角 β 之斜面上得以自由滾動時,f 之極小値爲 $\frac{1}{3}\tan\beta$.

6. 有一直徑 6〔吋〕之鑄鐵圓球,及一直徑 6〔吋〕之鑄鐵圓柱,其重量相等,且同時由一長 40〔呎〕而斜度 15° 之斜面頂部自由滾下,設初速度均等於零. 試求到達斜面底所需之時間,及其摩擦力.

答: 圓球, $t = 3.67$〔秒〕, $F = 2.18$〔磅〕; 圓柱, $t = 3.8$〔秒〕, $F = 2.54$〔磅〕.

7. 設圖 408 所示之圓柱,置於 30° 之斜面上. 試求使圓柱中心以 4〔呎/秒^2〕之加速度,沿斜面向上自由滾動,所需平行於斜面之力P,並求其摩擦力.

答: $P = 91.52$〔磅〕; $F = 33.33$〔磅〕,沿斜面向上.

149. 不鈞衡滾動輪之動反力. 假定一輪之重心,與其幾何中心不相符合,則此輪在一水平面上滾動時,此平面上之反力非爲常數. 輪滾動一周時,其値從大於重量 W 者變至小於 W 者. 圖 409 所示之輪,其中心在點 O,因在其一邊之外加重量,故其重心在 C 點,設其中心之速度爲一常數,方向向左,大小爲 v. 又因 θ 之値在 0° 至 180° 之間,重力使運動減速, θ 在 180° 至 360° 之間,重力使運動加速. 故 F_1 與 F 必爲變力.

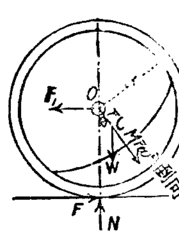


圖 409.

據相對運動之原理,可知點 C 之絕對加速度,等於中心之絕對加

速度 $r\alpha$，與點 C 對於中心之相對加速度之矢量和．相對加速度之兩分矢為 $\bar{r}\alpha$，與 $\bar{r}\omega^2$．因 α 為零，故點 C 之加速度為 $\bar{r}\omega^2$，其方向係指向中心，卽點 O，因此在脫離體圖上再加上倒向有效力 $M\bar{r}\omega^2$，卽能得輪之靜力平衡．於是應用靜力平衡方程式，據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$N = W + M\bar{r}\omega^2 \cos\theta$$

故 $\theta = 0$ 時，N 為極大，$\theta = 180°$ 時，N 為極小值．

習 題

1. 在圖 409 內，命 $r = 2$〔呎〕，$\bar{r} = 3$〔吋〕．試求點 C 高於點 N 但在同一鉛直線上時，使反力 N 等於零之速度． 答：22.72〔呎/秒〕.

2. 一機車之主動輪之直徑為 6〔呎〕，重 1800〔磅〕，軸載荷為 12,000〔磅〕．如取去其邊桿(side rod)及連桿，則因裝有對重 (counter weight) 關係，輪之重心與中心，相距 0.6〔呎〕．設此機車為另一機車拖動，其速率為 40〔哩/時〕，試求車輪轉動一周間，在軌道上之反力之變化．

答：26,620〔磅〕至 980〔磅〕.

150. 引擎之連桿，圖解法．

索解蒸汽引擎之連桿問題，以相對速度及相對加速度原理為最有用． 在圖 410 內，A 為十字頭，

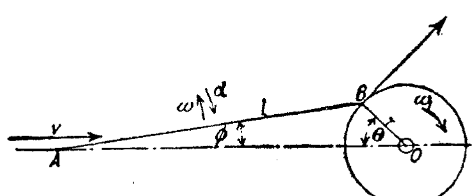


圖 410

其速度為 v，加速度為 a． v 與 a 亦卽為活塞之速度及加速度．AB 為長 l 之連桿． B 為曲柄銷，其切線速度為 v_1，BO 為長 r 之曲柄，O 為飛輪之轉動中心．假定飛輪之重量甚大，故點 B 之角速度，實際上為一常數 ω_1．連桿 AB 與線 AO 間之 ϕ 角，以 B 在圓

上最高點時爲最大。然後逐漸減小，以至於負值。

連桿之運動，爲繞點 A 之擺轉(oscillatory rotation)，其角速度爲變數 ω。同時點 A 有沿線 AO 之擺移(oscillatory translation)。點 B 之絕對速度爲 $v_1=r\omega_1$，其方向與 OB 垂直。應用相對速度之原理，此速度等於點 A 之絕對速度，與 B 對於 A 之相對速度之矢量和。命 v_2 爲 B 對於 A 之相對速度，因 A, B 兩點在同一連桿上，故 v_2 之方向必與 AB 垂直。命 v 爲點 A 之速度，方向沿水平線，則據圖 411 之矢量圖，可完全求得 v_2 與 v 之值。又因 B 對於 A 之運動，爲半徑 l 之轉動，故 $v_2=l\omega$，或 $\omega=v^2/l$。點 A 之線速度及連桿對於點 A 之角速度可以完全決定。故連桿上任一點之絕對速度，亦可以求得。

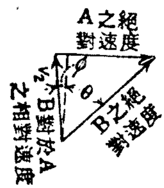


圖 411.

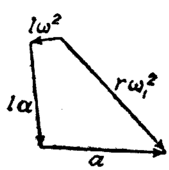


圖 412.

據圖 412，可以求得各未知加速度之值。因圖 410 之點 B，係在一圓周上以等角速度 ω_1 運動。故其唯一之加速度，爲指向點 O 之 $r\omega_1^2$，此加速度在圖 412 上按照比例尺畫出。B 對於 A 之相對加速度，與 A 之絕對加速度之矢量和，必等於 $r\omega_1^2$。B 對於 A 之相對加速度有兩分矢，一分矢爲完全已知，一分矢僅知其方向。法線分矢 $l\omega^2$ 爲完全已知，故先將其畫出。切線加速度 $l\alpha$ 之方向，必須與連桿垂直，點 A 之絕對加速度 a 係沿水平方向。此等加速度必須成一閉合多邊形。因此可以求得 a 與 α 之值。連桿上任何點之加速度，亦可求得。

習　題

1. 設引擎之連桿長 6〔呎〕，曲柄長 1〔呎〕。若曲柄之轉速爲 180〔轉/分〕。試求 $\Theta=0°$，及 45° 時，十字頭之速度及加速度。

答：$\Theta=0°$ 時，$v=0$；$a=414.5$〔呎/秒^2〕．$\Theta=45°$ 時，$v=14.9$〔呎/秒〕$a=251.4$〔呎/秒^2〕．

2. 試求 $\Theta=90°,120°$，及 $180°$ 時，習題 1 之引擎之十字頭之速度及加速度．

答：當 $\Theta=90°$ 時，$v=18.85$〔呎/秒^2〕；$a=-60$〔呎/秒^2〕．當 $\Theta=120°$ 時，$v=14.95$〔呎/秒〕，$a=-207.2$〔呎/秒^2〕；當 $\Theta=180°$ 時，$v=0$；$a=-296.1$〔呎/秒^2〕．

151．連桿之動反力． 欲求曲柄銷反力及十字頭銷反力時，必須取連桿為一脫離體(圖 413)．作用於連桿上之外力如下：作

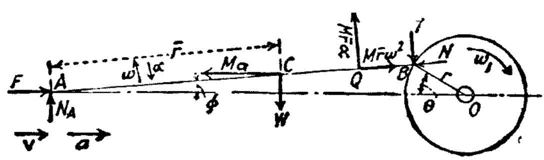


圖 413.

用於重心上鉛直向下之重量 W；作用於十字頭上之活塞桿之推力 F；十字頭之法線反力 N_A；及在點 B 之曲柄銷反力．曲柄銷反力分解為兩分力，N 沿連桿方向，T 與連桿垂直．此等外力中，N, T, N_A 為未知力．

因此等外力而產生之連桿加速度，可以分為移動與轉動兩部分．用第 150 節之方法，可以求得 ω,α，與 a 之值．若於脫離體上再加上倒向有效力(圖 413)，即成立第 147 節內所討論之靜力狀況．假定 ω_1 在順時針方向，θ 之值在 $0°$ 與 $90°$ 之間．ω,α,v,a 之方向即如圖中所示．於是得重心加速度之三分矢，一為水平向右之 a，一為與連桿垂直而向下之 $\bar{r}\alpha$，一為沿連桿向點 A 之 $\bar{r}\omega^2$．

倒向有效力有三：一為水平向左之 Ma；一為沿連桿與 A 相背之 $M\bar{r}\omega^2$；一為與連桿垂直而向上之 $M\bar{r}\alpha$．$M\bar{r}\alpha$ 之作用點 Q，與點 A

相距 $k^2/\bar{r}$，其作用線並不經過重心。$M\bar{r}\omega^2$ 作用於重心上，如第 132 節所示之情況 1 同。 因為除 N_A, N, T 外，其餘各力均為已知，故據下列三個平衡方程式，可求得三個未知力之值。

在圖 413 內，據 $\Sigma F_x = 0$，得

$$F - N\cos\phi + T\sin\phi - Ma + M\bar{r}\omega^2\cos\phi - M\bar{y}\alpha = 0 \quad (15.4)$$

據 $\Sigma F_y = 0$，得

$$N_A - W + M\bar{x}\alpha + M\bar{r}\omega^2\sin\phi - T\cos\phi - N\sin\phi = 0 \quad (15.5)$$

據 $\Sigma M_A = 0$，得

$$W\bar{x} - Ma\bar{y} - M\bar{r}\alpha\left(\frac{k^2}{\bar{r}}\right) + Tl = 0 \qquad (15.6)$$

例　　題

在圖 413 內，命 $r = 1$〔呎〕，$l = 6$〔呎〕，$W = 200$〔磅〕，$\bar{r} = 3.8$〔呎〕，$F = 10{,}000$〔磅〕，$\omega_1 = 30$〔弳/秒〕，$\theta = 30°$，$I_A = 120$。試求 N_A, N, T 之值。

【解】

$$M = \frac{W}{g} = \frac{200}{32.2} = 6.21$$

$$\frac{k^2}{\bar{r}} = \frac{I}{M\bar{r}} = \frac{120}{6.21 \times 3.8} = 5.08\text{〔呎〕}$$

$$\sin\phi = 0.0833,\quad \cos\phi = 0.9965,\quad \phi = 4°47'$$

$$\bar{x} = 3.786\text{〔呎〕};\quad \bar{y} = 0.316\text{〔呎〕}.$$

圖 414 為速度多邊形，自此圖用比例尺量得

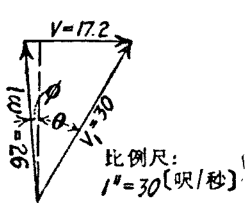


圖 414.

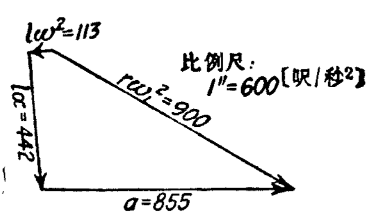


圖 415.

$$v = 17.2 \text{〔呎/秒〕}$$

$$l\omega = 26.1 \text{〔呎/秒〕}$$

$$\omega = \frac{26.1}{6} = 4.35 \text{〔弳/秒〕}$$

欲求加速度之值,須先畫其矢量圖(圖 415).

$$r\omega_1^2 = 900, \quad l\omega^2 = 6 \times 4.35^2 = 113$$

從圖上量得 $l\alpha = 442$,故 $\alpha = \dfrac{442}{6} = 73.7$〔弳/秒^2〕

所量得矢量 a 之值為 885〔呎/秒^2〕.

$$Ma = 6.21 \times 885 = 5310 \text{〔磅〕}$$

$$M\alpha = 6.21 \times 3.8 \times 73.7 = 1740 \text{〔磅〕}$$

$$M\omega^2 = 6.21 \times 3.8 \times 4.35^2 = 445 \text{〔磅〕}.$$

以上三力,為有效力之三分矢。 如將其方向倒置,作用於脫離體上(圖 413),即能與外力平衡.

據 $\Sigma F_x = 0$,得

$$10{,}000 - 5310 - (1740 \times 0.0833) + (445 \times 0.9965) + 0.0833T - 0.9965N = 0$$

據 $\Sigma F_y = 0$,得

$$N_A - 200 + (1740 \times 0.9965) + (445 \times 0.0833) - 0.9965T - 0.0833N = 0$$

據 $\Sigma M_A = 0$,得

$$(5310 \times 0.316) - (200 \times 3.786) + (1740 \times 5.08) - 6T = 0$$

自最後式,得

$$T = 1627 \text{〔磅〕}$$

將此值代入第一式,得

$$N = 5150 \text{〔磅〕}$$

將 T, N 之值,代入第二式,得

$$N_A = 477 \text{〔磅〕}$$

曲柄銷上之合力為

$$\sqrt{N^2 + T^2} = 5400 \text{〔磅〕}$$

習題

1. 設第116節習題2之連桿長6〔呎〕,曲柄長1〔呎〕. 作用於十字頭銷上之水平力爲6000〔磅〕,引擎之轉速爲180〔轉/分〕. 試求$\Theta = 60°$時,導板對於十字頭之反力,及在曲柄銷上之總反力.

答: $N_A = 523$〔磅〕; 曲柄銷反力 $= 5010$〔磅〕.

2. 假定習題1之$\Theta = 90°$,$P = 5000$〔磅〕,試求各項解答.

答: $N_A = 514$〔磅〕; 曲柄銷反力 $= 5610$〔磅〕.

152. 邊桿之動反力. 在機車之邊桿(side rod)[又名平行桿(parallel rod)]上之質量爲dM之質點(例如圖416之質點D),有兩種運動:一爲繞其在AA_1線上之中心C之轉動,一爲與點C相同之移動. 若機車之線速度爲一常數,則點D之絕對加速度爲指向點C之$r\omega^2$,ω爲車輪之角速度. 邊桿上各質點在任何時刻之加速度之大小與方向均相同,故作用於各質點上之徽有效力之合力爲$Mr\omega^2$,作用於邊桿之重心.

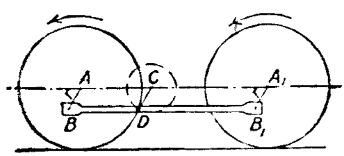


圖 416.

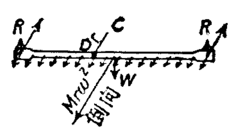


圖 417.

設將邊桿作爲脫離體(圖417),其外力計有兩個曲柄銷反力及重量W. 若再加上倒向有效力$Mr\omega^2$,卽得靜力平衡. 求出曲柄銷反力之最簡單方法,卽爲求其兩個分力. 一爲鉛直向上之$W/2$,一爲沿徑向之$Mr\omega^2/2$. 由此可見邊桿在其最低位置時之合反力爲極大. 此時之值爲

$$R = \frac{Mr\omega^2}{2} + \frac{W}{2} \tag{15.7}$$

又，邊桿在其最高位置時之合反力爲極小，其值爲

$$R = \frac{Mr\omega^2}{2} - \frac{W}{2} \tag{15.8}$$

習　題

1. 一邊桿重 450〔磅〕，主動輪之直徑長 6〔呎〕，曲柄長 16〔吋〕。機車之前進速率爲 75〔哩/時〕。試求每一曲柄銷上之極大與極小反力。

答：12,750〔磅〕；12,300〔磅〕。

2. 試求習題 1 之極小曲柄銷反力爲零時，機車應有之速率。

答：10.05〔哩/時〕。

153. 往復部分之鈞衡. 將往復部分鈞衡之簡例之一，即如圖 418 所示，乃爲等速轉動之曲柄所拖動之有槽滑子儀器（slotted slider apparatus）。命 W 爲滑子之重量，$M=W/g$ 爲其質量，摩擦力略去不計。命 ω_1 爲曲柄 AO 之角速度，則曲柄銷之加速度爲 $r\omega_1^2$，指向中心 O。滑子之加速度，爲在水平方向之變加速度 $a = r\omega_1^2 \cos\theta$，故其運動爲簡諧運動。產生加速度之力，爲在點 A 之曲柄銷之變力 P：

$$P = Ma = Mr\omega_1^2 \cos\theta$$

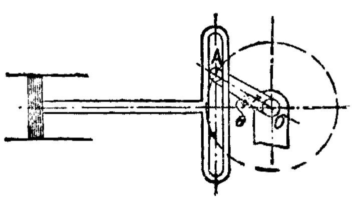


圖 418.

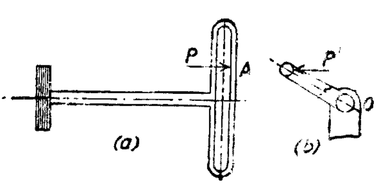


圖 419.

如圖 419(a)所示。θ 之值在 90° 至 270° 之範圍內，加速度向左，故作用於滑子上之力 P 亦向左。圖 419(b)表示作用於曲柄銷上大小相等，方向相反之反力 P'。此反力 P' 即順序傳至支座 O 上。

欲鈞衡作用於曲柄銷上之力 P',在曲柄之對面相距 r_1 之處再加上一質量 M_1,如圖 420 所示。如 M_1 與 r_1 適合於下述條件

$$M_1r_1 = Mr$$

則力 P' 可以完全鈞衡。因質量 M_1 在 OM_1 方向具有離心力 $M_1r_1\omega_1^2$,故其水平分力為 $M_1r_1\omega_1^2\cos\theta$.

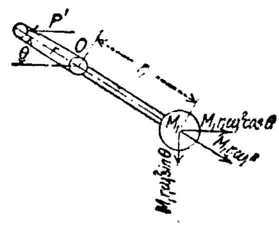


圖 420.

但 M_1 之離心力之鉛直分力 $M_1r_1\omega_1^2\sin\theta$ 仍未能鈞衡。當曲柄銷在最高點及最低點時,此分力為極大,並等於 $M_1r_1\omega_1^2$. 如 M_1r_1 之值等於 Mr 之半數,則水平力 P' 祇能鈞衡一半。在最高點與最低點之鉛直力亦祇有 $\frac{1}{2}Mr\omega_1^2$。一般而論,水平力對於機構之損壞,大於鉛直力。故習慣上為鈞衡水平力之 $\frac{2}{3}$,尚餘下未鈞衡之水平力為 $\frac{1}{3}Mr\omega_1^2$,但同時產生不鈞衡之鉛直力 $\frac{2}{3}Mr\omega_1^2$.

普通用連桿之往復式發動機,其活塞在氣缸首端(head end)之加速度,大於 $r\omega_1^2$,在氣缸曲柄端(crank end)之加速度,小於 $r\omega_1^2$. 據第 150 節所用之方法,可證明其相差之量,均等於 $l\omega^2 = l\frac{v^2}{l^2} = \frac{r}{l}(r\omega_1^2)$,其平均值為 $r\omega_1^2$。故此等引擎之往復部分,可仿照均衡有槽滑子之方法同樣處理之。

習題

1. 有一單氣缸橫式引擎之往復部分,重 800〔磅〕,曲柄長 10〔吋〕,並有兩曲柄腹板。設用習慣上之鈞衡方法處理之,試求在每一曲柄腹板上與軸相距 8〔吋〕處所需之重量。 答: 333〔磅〕.

2. 設習題 1 所述引擎之轉速為 240〔轉/分〕。試求其極大未鈞衡鉛直力。 答: 8730〔磅〕.

154. 轉動部分及往復部分之鈞衡. 通常用連桿之引擎，其連桿兼有轉動及移動兩種運動. 在均衡時，常將連桿上較小之十字頭端，連桿中段平坦部分之一半，以及十字頭，十字頭銷，活塞桿及活塞，均視作祇有移動. 將連桿上較大之曲柄端，連桿中段平坦部分之另一半，以及曲柄及曲柄銷，均視作祇有轉動. 在普通蒸汽機之構造中，前者之連桿重量，約占總重之三分之一. 後者占三分之二.

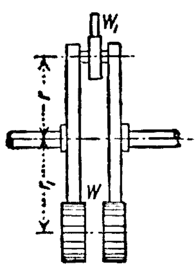


圖 421.

設所需鈞衡之運動部分在曲柄平面內，則應用下述之關係. 命 W_t 為往復部分之重量，其中包括活塞，活塞桿，十字頭，及連桿之三分之一重量；命 W_r 為轉動部分之重量；其中包括曲柄，曲柄銷，及連桿之三分之二重量. 命 W 為在半徑 r_1 處之抗衡重量(counterbalancing weight)(1)，r 為曲柄長度. 故據第 142 節及153 節，得

$$W r_1 = W_r r + \tfrac{2}{3} W_t r \qquad (15.9)$$

假定曲柄之腹板有二，如圖 421 所示，則每一平面內之重量為 $\frac{1}{2}W$.

習題

1. 蒸汽引擎之活塞重 320〔磅〕，活塞桿重 90〔磅〕，十字頭重 60〔磅〕，連桿重 300〔磅〕，曲柄銷重 25〔磅〕. 命 $r_1 = r = 1$〔呎〕，並設對重之臂恰與曲柄鈞衡. 若其構造如圖 421 所示，試求在每曲柄腹板上所需之對重.

答: 302.5〔磅〕.

2. 設習題 1 之蒸汽引擎之未鈞衡鉛直力為 4000〔磅〕. 試求其轉速.

答: 173.5〔轉/分〕.

(1)抗衡重量與對重(counter weight)兩名詞 此處混用.

155. 機車之鈞衡. 圖 422 表示機車鈞衡之最簡單之例，圖中所示者為有四主動輪之**外汽缸機車**(outside cylinder locomo-

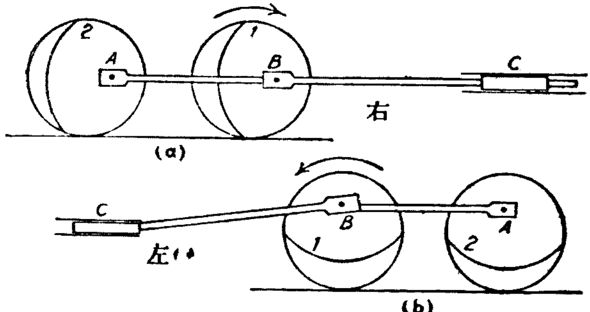


圖 424.

tive)． 其曲柄 B 為**前主動輪**(forward driving wheel, 即 main driving wheel)之一部分；並利用邊桿 BA 使由連桿 BC 傳來之動力，再傳至後輪之曲柄銷．

其運動為一種移動與轉動之併合．往復部分與轉動部分對於機車架之效應，與其在固定之試驗桌上運動所生之效應相同． 其鈞衡之條件，與在第 154 節內所論關於駐定引擎(stationary engine)之條件相同． 所不同者，即所需鈞衡之部分，在兩個不同之平面中，故必須再於其他平面中加上對重．在此種情況中，必須求出機車兩邊之車輪平面中之對重(1)，如第 142 節內所討論者．然後再將所求得之兩個對重，以一個在兩輪間之重量替代之．

對於各邊之輪 1 所需鈞衡之轉動部分，計有大曲柄銷，邊桿之一半，及連桿之三分之二．對於各邊之輪 2 之須鈞衡之轉動部分，計有小曲柄銷及邊桿之一半． 往復部分包括活塞，活塞桿，十字頭，

---

(1)若汽缸間之距離並不甚大，抗衡一機車之主動部分時，假定其被鈞衡之轉動部件，與抗衡重量(指車輪)在同一平面內．如此得到鈞衡之主動部分，僅為靜鈞衡，而非動鈞衡．假定承認下述之事實，即轉動部分之平面，並非與對重之平面相同，則此種鈞衡謂之交叉鈞衡(cross balancing)．

及連桿之三分之一. 情形與駐定引擎一樣,習慣上祇用轉動部分鈞衡往復重量之一部分,與第153節所解釋者同. 實際上所鈞衡之往復部分之重量,爲其總重之二分之一至三分之二. 鈞衡往復部分之方法有二:一法爲將鈞衡往復部分之對重,全部置於輪1上,與均衡輪1之轉動部分之對重合併.一法爲將鈞衡往復部分之對重,平均分置於兩輪上. 假定用第一法,則因在輪1所加之對重頗巨,因而產生頗大之未鈞衡鉛直力,而造成軌道上過度之壓力. 故一般而論,第二法較佳.

例 題

設有一種如圖422所示型式之機車. 試求欲均衡其各輪之對重之大小及位置. 已知機車之維如下:曲柄長1〔呎〕;車輪直徑6〔呎〕;輪1之曲柄銷重量60〔磅〕,其重心與車輪平面相距7.75〔吋〕;輪2之曲柄銷重40〔磅〕;其重心與車輪平面相距5.75〔吋〕;邊桿重240〔磅〕,亦與車輪平面相距5.75〔吋〕;連桿重280〔磅〕,其重心與車輪平面相距10〔吋〕;十字頭重154〔磅〕;活塞與活塞桿共重306〔磅〕;兩車輪中心平面間距離爲59〔吋〕,往復部分祇鈞衡其重之三分之二.

【解】 設研究其右邊之輪,假定活塞在衝程之前端. 其往復重量爲

$$306 + 154 + \tfrac{1}{3} \times 280 = 553.33 \text{〔磅〕}.$$

此重量中,須以轉動之對重加以鈞衡之部分爲

$$\tfrac{2}{3} \times 553.33 = 368.88 \text{〔磅〕}.$$

鈞衡此往復部分之對重,平均分配於前後兩輪上,每輪有184.44〔磅〕.

輪1之轉動部分有三:連桿之三分之二,曲柄銷,及邊桿之二分之一. 故輪1必須鈞衡之總重及其與車輪平面間之距離爲

相距10〔吋〕者,有 $184.44 + \tfrac{2}{3} \times 280 = 380 = 371.11$〔磅〕

相距7.75〔吋〕者,有 60〔磅〕,

相距5.75〔吋〕者,有 120〔磅〕.

命W_2爲右輪上之對重，W_3爲左輪上之對重，r爲各個對重之半徑，如圖423所示。因曲柄半徑爲1〔呎〕，故據圖392(b)，得

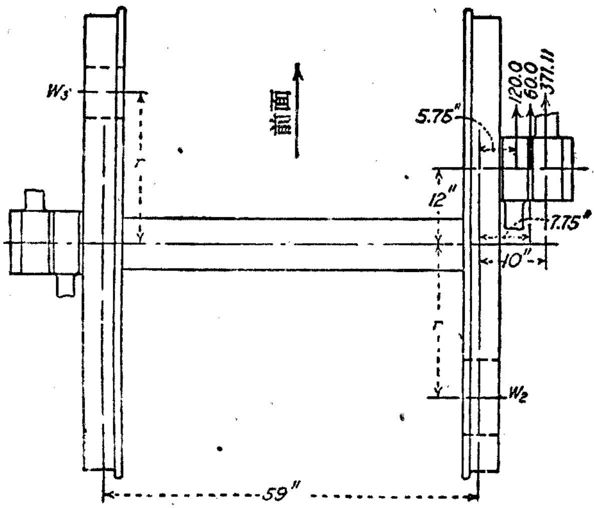


圖 423.

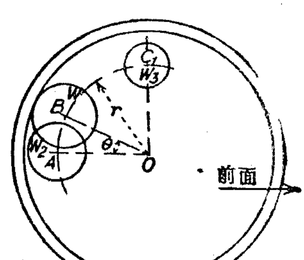
$$(W_2r \times 59) = (120 \times 64.75) + (60 \times 66.75) + (371.11 \times 69)$$

$$W_2r = 633.6\ 〔磅•呎〕$$

$$(W_3r \times 59) = (120 \times 5.75) + (60 \times 7.75) + (371.11 \times 10)$$

$$W_3r = 82.5\ 〔磅•呎〕.$$

右輪之對重W_2在後，左輪之對重W_3在前。左輪曲柄在右輪曲柄之後90°，故右曲柄在圖423所示之向前位置時，左曲柄在其最高位置。命W_2'爲鈞衡左曲柄銷上重量所需在左輪上之對重，W_3'爲鈞衡左曲柄銷上重量所需在右輪上之對重。故W_3'在軸之鉛直上方，如圖424所示。$W_3'r = 82.5$〔磅•呎〕。在右邊之前輪上W_2與W_3'可用一個重量W替代之（說明見第142節），則



從右邊看出去之右輪

圖 424.

$$Wr = \sqrt{633.6^2 + 82.5^2} = 639 \text{〔磅•呎〕}$$

若 $r = 2$〔呎〕。

$$W = 319 \text{〔磅〕。}$$

半徑 OB 與水平半徑 OA 所成之角 θ 爲

$$\theta = \tan^{-1}\frac{82.5}{633.6} = 7°25'$$

$$\widehat{AB} = 2 \times \frac{7.4}{57.3} = 0.258 \text{〔呎〕}$$

$$AB = 3.10 \text{〔吋〕}$$

在左邊之前輪上，其對重之重量與右前輪者相等，但在軸之下方，並在鉛直半徑之前而與之成 7°25′ 角。由此可見若左邊曲柄在右邊曲柄之後 90°，則左邊之對重在右邊之對重後 90°。

在右邊之後輪上，欲平衡之重量有二。一爲離車輪平面 5.75〔吋〕之重量 120 + 40 = 160〔磅〕。一爲離車輪平面 10〔吋〕之 184.44〔磅〕。

$$(W_2r \times 59) = (160 \times 64.75) + (184.44 \times 69)$$

$$W_2r = 391.3 \text{〔磅•呎〕}$$

$$(W_3r \times 59) = (160 \times 5.75) + (184.44 \times 10)$$

$$W_3r = 46.8 \text{〔磅•呎〕。}$$

$$Wr = \sqrt{391.3^2 + 46.8^2} = 394 \text{〔磅•呎〕。}$$

若 $r = 2$〔呎〕，

$$W = 197 \text{〔磅〕}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{46.8}{391.3} = 6°50'$$

$$\widehat{AB} = 0.237 \text{〔呎〕},\ AB = 2.84 \text{〔吋〕。}$$

在左邊之後輪上，對重之重量與上值相等，但在軸之下方，在鉛直半徑之前，並與之成 6°50′ 角。

在直徑速率(diameter speed)時[1]，因往復部分之額外對重而產生之動反力，可用下法計算之。

---

(1) 所謂直徑速率，即速率（單位〔哩/時〕）之數值，等於主動輪直徑（單位〔吋〕）之數值.

每輪所鈞衡之往復部分之重量爲 184.44〔磅〕,對重之半徑爲 2〔呎〕。鈞衡右邊往復部分所需在右輪上之對重爲 $\frac{1}{2}\times{}^{69}/_{59}\times 184.44 = 108$〔磅〕。

交叉鈞衡左邊往復部分所需在右輪上之對重爲 $\frac{1}{2}\times{}^{10}/_{59}\times 184.44 = 15.6$〔磅〕。

與軸相距 2〔呎〕處之合對重(resultant counter weight)爲 $\sqrt{108^2+15.6^2} = 109$〔磅〕。

直徑速率 72〔哩/時〕= 105.6〔呎/秒〕。

角速度 $\omega = 105.6/3 = 35.2$〔弳/秒〕。

當合對重在最低位置時,在軌道上之極大動效應爲

$$M\bar{r}\omega^2 = \frac{109}{32.2}\times 2\times 35.2^2 = 8390 \text{〔磅〕}.$$

習題

1. 設有如圖 425 所示型式之機車。試求鈞衡每車輪所需之對重。車輪之維與重量如下:車輪直徑 72〔吋〕;兩車輪平面間之距離 60〔吋〕;曲柄臂長

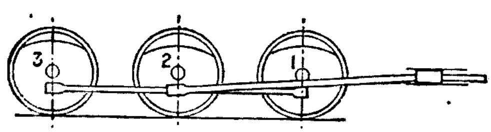


圖 425.

15〔吋〕;邊桿重量 1000〔磅〕,與車輪平面相距 8〔吋〕;輪 1 與輪 3 之曲柄銷各重 90〔磅〕,與車輪平面相距 8〔吋〕;輪 2 之曲柄銷重 120〔磅〕,與車輪平面相距 11〔吋〕;連桿重 1200〔磅〕,與車輪平面相距 14〔吋〕;十字頭重 600〔磅〕;活塞與活塞桿重 720〔磅〕。假定輪 1 與輪 3 之對重之半徑爲 24〔吋〕,輪 2 之對重之半徑爲 20〔吋〕。往復部分之對重,在三輪間平均分配,往復部分所鈞衡之重量祇爲其總重之二分之一。

答:輪 1 與輪 3, 467〔磅〕,與曲柄直徑成 8°40′ 角;輪 2, 1558〔磅〕,與曲柄直徑成 9°30′ 角。

2. 假定習題 1 所述之機車,以直徑速率行駛時,試求每一車輪在軌道上之

動反力。 答：17,300〔磅〕.

3. 假定習題1所述機車在適當鈞衡後，取去其連桿，但仍保留其邊桿。試求在其被另一機車以45〔哩/時〕之速率拖動時，每一主動輪在軌道上之動反力。 答：輪1與輪3，6750〔磅〕；輪2，25,600〔磅〕.

156. 物體在鉛直曲線上之運動. 在圖426上，命A爲重W之一物體，在一鉛直光滑曲線上，因重力及曲面上法線反力之影響而運動。設不計空氣之阻力，則在運動方向之唯一外力爲$W\sin\theta$（向下之方向爲正）.

$$a_t = \frac{F}{M} = g\sin\theta$$

$$v\,dv = a\,ds$$

$$v\,dv = g\sin\theta\,ds$$

$$\sin\theta\,ds = dy$$

$$v\,dv = g\,dy$$

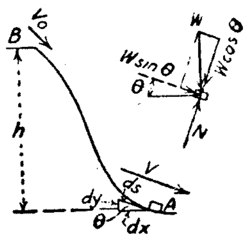


圖 426.

假定v_0爲點B之速度，點B與一水平面間之距離爲h.

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = g\int_0^h dy$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \qquad (15.10)$$

據(15.10)式，可知一物體在無摩擦力之路徑上因重力之影響而運動時，其速率之變化，與物體在兩點之鉛直距離間，自由降落者同（見第99節(11.12)式）.

假定h爲負值（向上爲負），則物體之速度減小.

此運動之法線拘束力(normal constraining force)爲

$$N = \pm W\cos\theta + \frac{W}{g}\frac{V^2}{r} \qquad (15.11)$$

r爲路徑曲線之曲率半徑. 假定物體在經過曲率中心之水平線以

上時，則用負號。

例　題

一物體 B 重 2〔磅〕，繫於 1〔呎〕長之繩之一端，在一鉛直圓上轉動，如圖 427 所示。　設在底點 B 之速度為 15〔呎/秒〕，試求在頂點 A 之速度，及在該點時繩之牽力 T，並求保持此物體在圓周上運動時在點 A 之最小速度。

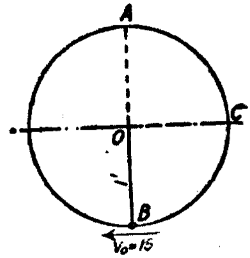


圖　427.

【解】

$$v_A^2 = v_0^2 - 2gh = 225 - 128.8$$

$$v_A^2 = 96.2$$

$$v_A = 9.81\text{〔呎/秒〕}$$

物體在點 A 時，作用於物體上之外力為其重量及繩之牽力，其方向均向下。所產生之法線加速度 $a_n = v^2/r = 96.2$〔呎/秒^2〕。

據 $F = \dfrac{W}{g}a$ 式，得

$$T + 2 = \frac{2}{32.2} \times 96.2$$

$$T = 3.98\text{〔磅〕}.$$

因繩不能承受壓縮力，故 T 之極小值為零。　據 $F = \dfrac{W}{g}\dfrac{v^2}{r}$ 式，得

$$2 = \frac{2}{32.2} \times \frac{v^2}{1}$$

$$v = 5.67\text{〔呎/秒〕}.$$

此為保持物體在圓周上運動時之最小速度。

習　題

1. 假定圖 427 所示之物體，自點 C 開始運動，初速度為零。　試求其經過 30° 點之速度，及在底點之速度。　　答：5.68〔呎/秒〕；8.03〔呎/秒〕.

2. 一物體重 5〔磅〕，繫於 6〔呎〕長之繩之一端，在鉛直圓周上運動。試求使其在頂點時繼續在圓周上運動，所需在底點之最小速度。並求物體在底點時；與頂點成 $60°$ 角時；與底點成 $45°$ 角時，繩內之牽力。

答：31.08〔呎/秒〕；30〔磅〕；7.5〔磅〕；25.6〔磅〕.

3. 一飛機在 800〔呎〕高度，以水平速度 150〔哩/時〕飛行時，從飛機上將一球在橫方向以 80〔呎/秒〕之相對於飛機之速度擲出。若不計空氣之阻力。試求此球到達地面時之速率。　答：326〔呎/秒〕.

4. 假定圖 428 所示之小車，自高度 h 沿軌道滾下，試求使此車在點 A 與軌道保持接觸時所需 h 之最小值。摩擦力及空氣阻力均不計，小車及其載荷之重心與輪底平面間之距離為 e.

答：$h = 2.5r - 1.5e$

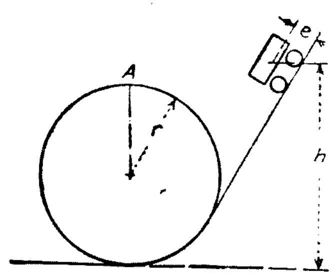
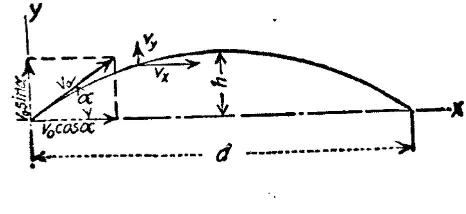


圖 428

5. 設欲使圖 428 所示之車，在點 A 時與軌道間之反力適等於其重量，試求所需之高度 h。空氣之阻力及摩擦力均不計。　答：$h = 3r - 2e$

6. 假定在圖 428 內，高度 $h = 24$〔呎〕，$r = 7.5$〔呎〕，$e = 1.5$〔呎〕，車之重量 400〔磅〕。試求此車經過點 A 時，軌道對於車之法線反力，及其與點 A 成 $45°$ 時，在軌道上之法線反力。　答：1000〔磅〕；1352〔磅〕.

157. 拋體運動。 拋體(projectile)為在空間運動之物體，假設已知此物體之初速度，作用於物體上之外力，僅有空氣之阻力及重力。空氣之阻力隨拋體之形狀及大小而定，故在普通求解時，常略



去不計. 所求得之解,爲質點在眞空內之運動. 故對於各種大小各種形狀之拋體,欲求通解之方程式,必須有適當之修正.

設將拋體之初速度 v_0 (圖 429) 分解爲水平分矢 $v_0 \cos \alpha$, 及鉛直分矢 $v_0 \sin \alpha$. 則在此兩方向之運動,可以分別處理. 因作用於拋體上之水平力爲零,故水平分速度爲一常數. 在時間 t 內所經過之水平距離爲

$$x = v_0 t \cos \alpha \tag{15.12}$$

在鉛直方向之唯一外力,卽爲其本身之重量. 故在鉛直方向之運動,與自由落體之運動相同.

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{15.13}$$

據(15.12)(15.13)兩式,消去 t,卽得拋體曲線徑路之方程式:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos \alpha} \tag{15.14}$$

(15.14)式爲一拋物線方程式,此拋物線之軸爲鉛直線.

解此等問題時之比較簡單之方法,爲將水平及鉛直兩方向之運動,分別解析,比較直接代公式便利.

例 題 1

一拋體以初速度 200〔呎/秒〕在與水平線成 30° 之仰角射出. 試求其極大高度,回到同一水平面上所需之時間,及射程. 並求其在 2〔秒〕末之速度.

【解】 速度之鉛直分矢爲 $v_0 \sin \alpha = 100$〔呎/秒〕,其水平分矢爲 $v_0 \cos \alpha = 173.2$〔呎/秒〕. 在鉛直方向之負加速度爲 32.2〔呎/秒²〕,故在

$$t_1 = \frac{100}{32.2} = 3.106\text{〔秒〕}$$

時,其鉛直速度爲零. 其鉛直方向之平均速度爲 50〔呎/秒〕. 故其高度爲

$$h = 50 \times 3.106 = 155.3\text{〔呎〕}.$$

拋體自最高點落至與始點相同之水平面上所需之時間，即等於其自始點至最高點所需之時間，故拋體在空中之總時間為

$$t = 6.212 \text{〔秒〕}。$$

其射程，或在水平方向所經過之距離為

$$d = 173.2 \times 6.212 = 1075.9 \text{〔呎〕}.$$

在 2〔秒〕末，鉛直分速度減小 2×32.2〔呎/秒〕，故為

$$v_y = 100 - 64.4 = 35.6 \text{〔呎/秒〕}.$$

其水平分速度保持不變，故其合速度為

$$v = \sqrt{35.6^2 + 173.2^2} = 176.8 \text{〔呎/秒〕}.$$

此時，拋體與水平線所成之角度為

$$\theta = \tan^{-1}\frac{35.6}{173.2} = 11°37'.$$

例 題 2

一石自 200〔呎〕高之塔上，以 80〔呎/秒〕之速度及與水平線成 45° 之俯角擲出。試求此石到達地面處與塔底相距若干，並求其所需時間若干。

【解】 速度之水平分矢為 $v_0 \cos \alpha = 56.56$〔呎/秒〕。 鉛直向下之初速度之值亦相等，經過時間 t 之鉛直速度為 $56.56 + 32.2t$. 在時間 t 內之平均速度為 $56.56 + 16.1t$，所下落之距離為 $56.56t + 16.1t^2$。 因此值即等於 200，故得 $t = 2.18$〔秒〕。 在 2.18〔秒〕間所經過之水平距離為 $56.56 \times 2.18 = 123.3$〔呎〕。

習 題

1. 一拋體以 3000〔呎/秒〕之速度，向上與水平線上成 5° 之仰角拋出。試求其高度及射程。 答：$h = 1058$〔呎〕；$d = 48,450$〔呎〕.

2. 試證明欲得最大射程之仰角 α 為 45°.

3. 試求使拋體仰角 $\alpha = 50°$，射程為 75〔哩〕時，所需之理論炮口速度

(theoretical muzzle velocity),並求其極大高度。

答: 3600〔呎/秒〕; 22.3〔哩〕.

4. 設炮口速度爲 5500〔呎/秒〕,試求拋體之極大理論射程。答: 178〔哩〕.

剛體平面運動之總習題

1. 在圖 430 內,所示直徑 3〔呎〕之實心圓柱,爲當其從靜止狀態釋放,沿斜面滾下 2〔秒〕末之位置。試求其 A, B 兩點之絕對速度。

答: $v_A = 21.47$〔呎/秒〕. 向上,與水平線成 30° 角; $v_B = 37.2$〔呎/秒〕,向下,與水平線成 60° 角.

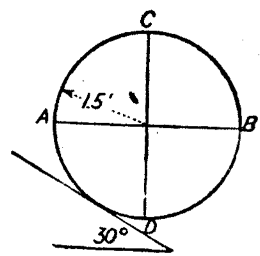


圖 430.

2. 試求習題 1 內圓柱上 C, D 兩點之絕對加速度。

答: $a_C = 314$〔呎/秒^2〕,向下與水平線成 86°20′ 角; $a_D = 302$〔呎/秒^2〕,與水平線成 80°44′ 角.

3. 在習題 1 內,自 A, B 兩點速度之已知方向,試求圓柱之瞬時中心。

4. 設以圖 430 之瞬時中心作爲參考點,試求點 A 之絕對加速度。

答: 317〔呎/秒^2〕,與水平線成 0°58′ 角.

5. 圖 431 所示之連桿長 5〔呎〕,曲柄長 1〔呎〕。設以連桿在 AM 位置時之靜點(dead center)開始,試求在半轉內每經 30° 時連桿之瞬時中心。

答: AM, 在點 A; BN,比點 B 高 3.37〔呎〕; CP,比點 C 高 9.4〔呎〕; DQ,在無窮遠; ER,在點 E 下 7.66〔呎〕; FS,在點 F 下 2.37〔呎〕; GT, 在點 G.

6. 若習題 5 所述連桿之曲柄銷之轉速爲 200〔轉/分〕,順時針方向,試求在半轉內,每經 30° 時十字頭之速度。

答: $v_A = 0$; $v_B = 12.3$〔呎/秒〕; $v_C = 20.0$〔呎/秒〕; $v_D = 20.94$〔呎/秒〕; $v_E = 16.3$〔呎/秒〕; $v_F = 8.64$〔呎/秒〕; $v_G = 0$.

7. 設圖 431 所示之連桿重 220〔磅〕。其重心與十字頭銷相距 3.2〔呎〕,其關於經過十字頭銷之軸之慣矩爲 96,曲柄銷之轉速爲 200〔轉/分〕。試求於下述之兩位置時,曲柄銷與導板之反力。(一)在首端靜點,作用於十字頭

上之水平力為 3000〔磅〕。(二)與靜點成 60° 角,作用於十字頭銷上之水平力為 8000〔磅〕。

答: (1) $N = -216$〔磅〕; $T = 1[illegible]1$〔磅〕,向上; $N_A = 79$〔磅〕. (2) $N = 6960$〔磅〕; $T = 1460$〔磅〕,向下; $N_A = 1200$〔磅〕.

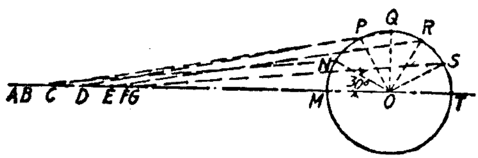


圖 431.

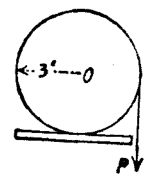


圖 432.

8. 假定在習題 7 內, $\Theta = 180°$,作用於十字頭銷上之力為 7000〔磅〕,方向向左,試求作用於連桿上之反力。

答: $N = 4226$〔磅〕,向右; $T = 141$〔磅〕,向上; $N_A = 79$〔磅〕.

9. 有一直徑 6〔吋〕,長 5〔呎〕之鋼圓柱,其兩端擱於與軸垂直之水平軌道上,如圖 432 所示。若靜摩擦係數為 0.25, 動摩擦係數為 0.20。設有一鉛直向下之力 $P = 140$〔磅〕,作用於捲在圓柱中部之繩上,試求其運動。

答: 圓柱向右滾動;靜摩擦力 $F = 93.4$〔磅〕; $a = 6.25$〔呎/秒^2〕.

10. 假定習題 9 之繩,再繞過 180°, 作用之力係鉛直向上。 試求其運動。

答: 圓柱向右滑動,及以順時針方向滾動. 動摩擦力 $F = 68.13$〔磅〕; $a = 4.[illegible]6$〔呎/秒^2〕; $\alpha = 38.4$〔弳/秒^2〕.

11. 假定習題 9 之力,作用於圓柱之底,沿水平方向向左拉。 試求其解。

答: 圓柱向左滑動,並以順時針方向滾動;動摩擦力 $F = 96.13$〔磅〕; $a = 2.94$〔呎/秒^2〕; $\alpha = 23.5$〔弳/秒^2〕.

12. 假定習題 9 之力,作用於圓柱之頂,沿水平方向向右拉, 試求其解。

答: 圓柱向右滾動;靜摩擦力 $F = 46.8$〔磅〕; $a = 12.5$〔呎/秒^2〕; $\alpha = 50$〔弳/秒^2〕

13. 假定習題 9 之力,以與水平線成 45° 之角而向左下方拉。試求其解。

答: 圓柱向右滾動; 靜摩擦力 $= 126.3$〔磅〕; $a = 1.83$〔呎/秒^2〕; $\alpha = 7.32$〔弳/秒^2〕.

14. 假定於習題 13 內,將力與水平線間之角度,逐漸減小。試求開始滑動

時之角度，並求加速度之値。　　答：$25°50'$；$a = 0.625$〔呎/秒^2〕。

15. 圖 433 表示重 100〔磅〕之實心圓柱 A，此圓柱可以繞其幾何軸心自由轉動。有一繩繫於軸上，此繩向上經過滑輪 B，再向下與圓柱 A 相觸，最後繫一重 120〔磅〕之重量 C，滑輪 B 之質量可以略去不計。設繩與圓柱間之摩擦力有相當大，可以防止其間有滑動產生。試求圓柱 A 之線加速度與角加速度，及繩之牽力 T_1 與 T_2。

答：$a = 1.533$〔呎/秒^2〕；$\alpha = 3.067$〔弳/秒^2〕；$T_1 = 114.3$〔磅〕；$T_2 = 109.54$〔磅〕。

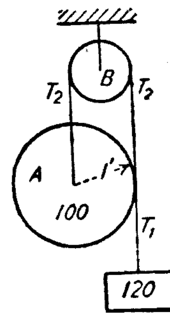


圖　433.

16. 有長 15〔呎〕並與水平線成 15° 角之平板，靜摩擦係數爲 0.15，動摩擦係數爲 0.12。設有直徑 6〔吋〕之圓柱從板頂向下滾動，其初速度爲零。試求其滾至板底所需之時間。及在板底之線速度及角速度。

答：$t = 2.32$〔秒〕；$v = 12.9$〔呎/秒〕；$\omega = 51.6$〔弳/秒〕。

17. 假定習題 16 內之平板與水平線間之角度，增至 24°，有兩個相似之圓柱自板頂釋放，初速度均等於零。一圓柱之底面在斜板上滑動，一圓柱在斜板上自由滾動，試求兩圓柱到達板底所需之時間。

答：滑動者，1.772〔秒〕；滾動者，1.855〔秒〕。

18. 有一直徑 12〔吋〕之圓球，一直徑 12〔吋〕之實心圓柱，及一外直徑 12〔吋〕內直徑 11〔吋〕之空心圓柱，同在一 25〔呎〕長之 30° 斜面上自由滾下。試求其到達斜面底所需之時間，及在斜面底之線速度。

答：圓球，$t = 2.09$〔秒〕，$v = 24$〔呎/秒〕；圓柱，$t = 2.16$〔秒〕，$v = 23.2$〔呎/秒〕；空心圓柱，$t = 2.44$〔秒〕；$v = 20.5$〔呎/秒〕。

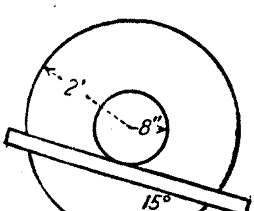


圖　434.

19. 在圖 434 內，大圓柱爲鋼製者，直徑爲 4〔呎〕，厚 2〔吋〕。兩端之兩小圓柱，直徑爲 16〔吋〕，厚 3〔吋〕。兩小圓柱擱於軌道上，自由滾下。試求軌道上之摩擦力，並求其動過 10〔呎〕

所需之時間。假定初速度爲零。 答：$F=275$〔磅〕；$t=3.28$〔秒〕.

20. 若第154節習題1之引擎之曲柄，以不需鈞衡之圓盤替代之。並假定鈞衡方法，並不採用圖421之對重，而在連桿平面左方之30〔吋〕大飛輪邊上加一對重，在連桿平面右方之24〔吋〕之小飛輪邊上亦加一對重。設在大飛輪邊上之對重半徑爲5.5〔呎〕，在小飛輪邊上之對重半徑爲2.5〔呎〕。試求所需對重之重量。 答：48.9〔磅〕；134.4〔磅〕.

21. 有一山式機車，有八個主動輪，連桿聯於輪2上。主動輪之直徑爲70〔吋〕，兩氣缸中心間之距離爲93〔吋〕，氣缸長30〔吋〕。兩邊桿中心間之距離爲77〔吋〕。兩主動輪平面間之距離爲60〔吋〕。在一邊往復部分之重量爲2550〔磅〕。主要主動輪在連桿平面上轉動部分之重量爲1040〔磅〕，在邊桿平面上轉動部分之重量爲960〔磅〕。輪1與輪4在邊桿平面上轉動部分之重量均爲260〔磅〕。輪3在邊桿平面上轉動部分之重量爲660〔磅〕。往復部分之重量祇鈞衡其二分之一，且在四個輪上平均分配。假定在輪1及輪4上之對重半徑爲24〔吋〕，在輪3上者爲20〔吋〕，在輪2上者爲18〔吋〕，試求在每輪上對重之重量。右曲柄在左曲柄之前90°.

答：輪1與輪4, 446〔磅〕，與曲柄直徑成10°0′；輪2, 2396〔磅〕，與曲柄直徑成10°10′；輪3, 880〔磅〕，與曲柄直徑成8°50′.

22. 假定習題21所述之機車，以60〔哩/時〕之速度行駛。試求在每主動輪上，因鈞衡往復部分之對重，而對於軌道產生之動效應爲若干。

答：14,.680〔磅〕.

23. 一小物塊在圖435所示之象限上自由滑落。試求距離 x_1；曲線 BC

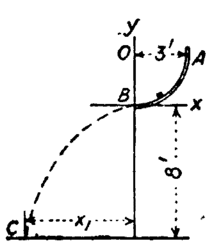


圖 435.

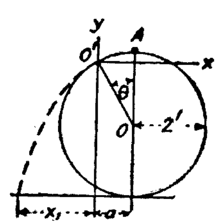


圖 436.

之方程式；及在點 C 之速度。 答：$x_1=9.8$〔呎〕；$y=-x^2/12$；26.6〔呎/秒〕.

24. 一小物塊從一直徑 4〔呎〕之圓柱之頂點開始滑動(圖 436)，其初速度及摩擦力均假定爲零，滑至點 O' 時與圓柱面分離，試求角 θ 及距離 a 及 x_1 之值。　答：48°11′；1.49〔呎〕；1.43〔呎〕.

25. 有一重 400〔磅〕之車，從一斜面之頂點開始向下運動(圖 437)，其初速度爲零，試求此車在迴線 (loop) 之頂點時軌道對於車之法線反力。假定

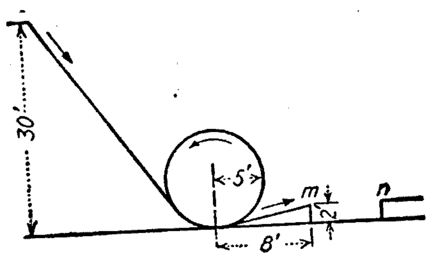


圖　437.

從迴線之底點開始，在距離 8〔呎〕內，軌道之高度增加 2〔呎〕。試求此車能跳過之間隙 mn 之長度。　答：2800〔磅〕；26.4〔呎〕.

26. 若靶與砲間之水平距離爲 1800〔呎〕，並且靶比砲高 600〔呎〕。設砲口速度爲 2000〔呎/秒〕。試求所需仰角之值。　答：18°50′.

27. 設抛體之砲口速度爲 1600〔呎/秒〕。砲與靶間之距離爲 2〔哩〕。試求砲之仰角。　答：3°49′.

28. 圖 438 爲一滾珠表演之略圖。每隔相當時間，有小滾珠自孔 A 以速度 2.59〔呎/秒〕在水平方向抛出，此滾珠擊於比抛出點低 1.5〔呎〕之既重且光滑之底面上之點 B，然後再回跳，底面與水平面成一極小角度，故在回跳後彈道之鉛直平面，與未曾碰到底面時彈道之鉛直平面間成一極小角度。滾

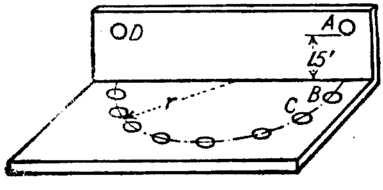


圖　438

珠第二次擊於底面上之點 C，再以同樣情形回跳，如是者共八次，均在一圓周上，最後跳入儲珠箱 D 之口內。若不計空氣之阻力及碰撞之損失，試求沿着圓周上任何兩相鄰碰撞點(point of impact)間之弦長，圓周之半徑，及底面與水平面間之角度。 答：1.58〔呎〕；4.06〔呎〕；2°57′.

第十六章

功能及功率

158. 功與能之定義. 一力所作之**功**(work),等於此力與其作用點在力之作用方向所動過之距離之積. 在圖 439(a) 內,作用

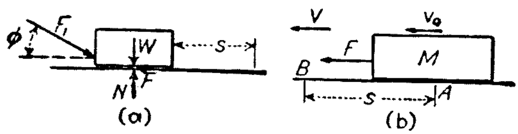


圖 439.

於物體上之四力爲 F_1, W, N, 及 F, 物體則在一水平面上移動. 因力 W 與 N 之作用點在力之方向所動過之距離爲零,故其功爲零. 設物體動過距離 s, 則力 F_1 之作用點在 F_1 之方向所動過之距離爲 $s\cos\phi$, 故 F_1 所作之功爲 $F_1 \times s\cos\phi$.

$F_1 \times s\cos\phi$ 亦可書作 $F_1\cos\phi \times s$. $F_1\cos\phi$ 爲力 F_1 在作用點運動方向之分矢. 故一力所作之功,亦等於力在作用點運動方向之分矢與作用點所動過之距離之積. 分矢 $F_1\cos\phi$ 謂之力之**工作分矢**(working component). 另一分矢 $F_1\sin\phi$ 所作之功爲零.

假定位移與力之工作分矢,在同一方向,如上述 F_1 之情形,則其功爲正值,謂之**力所作之功**. 若位移之方向,與力之工作分矢方向相反,其功爲負值,謂之**作於力之功**,即其值爲 $-Fs$.

如力爲變值者,則在微距離 ds 內所作之功等於 $F\cos\phi\, ds$. ϕ 爲力之方向與運動方向間之角. 命 U 爲總功,故得力 F 所作之總功爲

$$U = \int F \cos \phi \, ds \tag{16.1}$$

設已知 F, ϕ，與 s 間之關係，(16.1)式卽可積分．

設將一質點在重力之反方向，舉起任何距離，則作用於此質點上之功，等於其重量 w 與所舉起之鉛直距離 h 之積，而與在橫方向之運動無關．

$$U = wh \tag{16.2}$$

若將質點自高處移至低處，則重力對質點上所作之功爲正． 此功之絕對值，仍等於質點之重量與鉛直位移之積．

若物體之重量 W，爲由許多微部分所組成． 命 dW 爲各微部分之重量，此微部分在重力之反方向所舉起之距離爲 y，則得作於此物體上之總功爲

$$U = \int y \, dW = \bar{y} W \tag{16.3}$$

$\bar{y}$ 爲物體之重心所舉高之鉛直距離 h． 故

$$U = Wh \tag{16.3a}$$

單位之力動過單位距離所作之功，爲一**單位功**．英美制內，通常所用之功單位爲〔呎·磅〕．

能(energy)爲作功之能力． 假定一重量，因其高出於所取**基準面**(datum plane)之位置，而有作功之能力，謂之**勢能**(potential energy)(1)． 假定此物體自其支座上釋放，當其下落至基準位置時，此物體可作正功． 鍋爐內之蒸汽，充電之電池，以及受有載荷之彈簧，均因其抑壓狀況而有勢能．

運動之物體，設使其停止運動，因其有速度關係，亦有作功之能力，此種因運動而有之能，謂之**動能**(kinetic energy)．

---

(1) 勢能又名位能．

習　題

1. 假定有重 120,000〔磅〕之列車，以 9〔哩/時〕之等速率在 1.5 % 之斜坡拉上 1〔哩〕，試求對抗重力所作之功。若列車之阻力為 8〔磅/噸〕，試求聯車鈎所作之總功。　　答：9,504,000〔呎·磅〕；12,038,400〔呎·磅〕.

2. 有一鏈長 80〔呎〕，重 6〔磅/呎〕，套過一滑車，在滑車之一邊長 20〔呎〕在另一邊長 60〔呎〕。若將滑車轉動，使鏈之中點正在滑車上，試求對抗重力所作之功。若再將滑車轉動，使鏈之一端剛巧動至滑車上，試求重力所作之功。　　答：2400〔呎•磅〕；9600〔呎•磅〕.

3. 有一截面為 8〔呎〕平方之鉛直礦井，穿過 60〔呎〕之泥土，50〔呎〕之頁岩，80〔呎〕之沙石，及 200〔呎〕之花崗石。所挖出泥土及石塊，舉至井口之外，10〔呎〕高之處。若泥土重 110〔磅/呎^3〕，頁岩重 120〔磅/呎^3〕，沙石重 150〔磅/呎^3〕，花崗石重 165〔磅/呎^3〕。試求所作功之總量。答：404,928〔呎·噸〕.

159. 功與動能之關係. 物體之動能，為由於其運動或速度而具作功之能力，則此動能之大小，必須等於產生此速度之力所作之功。命 F 為作用於質量 m 之質點之合力，使此質點在距離 s 間產生速度 v。則此合力所作之功為

$$U = \int_0^s F\,ds$$

因 $F = ma$，

$$U = \int_0^s ma\,ds$$

又因 $a\,ds = v\,dv$，

$$U = \int_0^v mv\,dv$$

$$U = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{16.4}$$

若用質點之速度表示之，則合力 F 所作之功為 $\frac{1}{2}mv^2$。此 $\frac{1}{2}mv^2$

謂之質點之動能。 通常表示動能之符號爲 K.E.，故得

$$K.E. = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{16.4a}$$

習　題

1. 一子彈重 0.2〔英兩〕，以槍口速度 4200〔呎/秒〕從來福槍口射出。 試求其動能。　　答：3424〔呎·磅〕.

2. 假定習題 1 內所述之來福槍重 10〔磅〕。 若此槍之動能與子彈相等，其速度應等於若干？　　答：148.5〔呎/秒〕.

160. 移動之動能·不變力. 一物體在任何時刻之動能，卽等於組成此物體之各質點之動能之和。 物體移動時，在任何時刻此物體之各個質點之速度，均屬相等。 故其總動能爲

$$K.E. = \Sigma\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}v^2\Sigma m^2 = \tfrac{1}{2}Mv^2 \tag{16.5}$$

式中之 M 爲整個物體之質量。

命 F 爲圖439(b)內作用於質量 M 之物體上所有工作力之合力，假定此物體自 A 移至 B，所移過之距離爲 s。 設在位置 A 之速度爲 v_0，在位置 B 之速度爲 v，則

$$U = \int_0^s F\,ds = \int_{v_0}^{v} Mv\,dv$$

$$U = \tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0^2 \tag{16.6}$$

$\tfrac{1}{2}Mv_0^2$ 爲物體在位置 A 之動能，$\tfrac{1}{2}Mv^2$ 爲在位置 B 之動能，故得下述之一般結論。

在任何移動中，合力所作之正功，卽等於其動能之增量。

設力爲一常數，則

$$\int_0^s F\,ds = Fs$$

故得

$$U = Fs = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \tag{16.6a}$$

在任何習題內，通常分別求出作用於物體上之各力所作之功，比求其合力之功，較爲簡單。命 F_1, F_2 … 爲作用於物體上之各力，F_1', F_2' … 爲此等之力在物體運動方向之分力。則

$$U = \int_0^{s_1} F_1'\,ds + \int_0^{s_2} F_2'\,ds + \cdots = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{s_i} F_i'\,ds \tag{16.7}$$

若(16.7)式內，在物體之運動方向所經過之距離 s_1, s_2…內，各個分力，均爲常數，則

$$U = F_1's_1 + F_2's_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{i=n} F_i s_i \tag{16.7a}$$

設上式內有若干力爲阻力，則其所作之功爲負值。

在任何之移動中，正力所作之功 U_P，減去負力所作之功 U_N，卽得動能之增量。

$$U_P - U_N = (\text{K.E.})_f - (\text{K.E.})_i \tag{16.8}$$

其中 $(\text{K.E.})_f = \frac{1}{2}Mv^2$，卽動能之終值；$(\text{K.E.})_i = \frac{1}{2}Mv_0^2$，卽動能之初值。若將 $\frac{1}{2}Mv_0^2$ 移至等號之另一邊，得

$$(\text{K.E.})_i + U_P - U_N = (\text{K.E.})_f \tag{16.8a}$$

例　題

有一重 80,000〔磅〕之列車，以 1000〔磅〕定值之聯車鈎拉力拉上 2% 之斜坡，若列車之阻力爲 6〔磅/噸〕，初速度爲 20〔呎/秒〕，試問其動過若干距離後，其速度方減至 10〔呎/秒〕？

【解】

$$(\text{K.E.})_i = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{80{,}000}{32.2} \times 20^2 = 497{,}000\ \text{〔呎·磅〕}$$

$$U_p = 1000s$$

s 爲距離，其單位爲〔呎〕。

$$\text{列車阻力之}\ U_N = 240s$$

$$\text{重力之 } U_N = \frac{80{,}000}{50}s = 1600s$$

$$(\text{K.E.})_f = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\times\frac{80{,}000}{32.2}\times 10^2 = 124{,}200 \text{〔呎•磅〕}$$

據(16.8a)式,得

$$497{,}000 + 1000s - 240s - 1600s = 124{,}200$$

$$840s = 372{,}800$$

$$s = 444\text{〔呎〕}。$$

習 題

1. 假定上述例題之列車速度爲 10〔呎/秒〕時,其聯車鈎拉力增至 1500〔磅〕、問此車尚能動過若干距離,方纔停止。 答: 365〔呎〕.

2. 假定習題 1 之列車停止後,除去其聯車鈎拉力,任其沿斜坡下行。試求其至斜坡底之速度。 假定至斜坡底時,軌道又變成水平,問此車尚能動過若干距離,方纔停止? 答: v = 29.7〔呎/秒〕; 4580〔呎〕.

3. 有重 300〔磅〕之冰塊,置於一摩擦係數 $f = 0.1$ 之水平地板上。 設有與水平線成 30°角之一力,向前下方作用於此冰塊上,使冰塊在6〔呎〕之距離內產生 4〔呎/秒〕之速度,試求此力之大小。 答: 52〔磅〕.

4. 運煤列車共有 50 節,每節重 140,000〔磅〕,以 60,000〔磅〕定値之聯車鈎拉力,拉上長 15,000〔呎〕之 $\frac{1}{2}\%$ 斜坡。設初速度爲 30〔哩/時〕,列車阻力爲8〔磅/噸〕,試求此車至斜坡頂時之速度。 答: 26.6〔哩/時〕.

161. 移動之動能:變力. 假定一物體運動時,作用於此物體上之力爲變力,則功與動能之變量間之關係爲

$$U = \int F\,ds = \tfrac{1}{2}Mv^2 - \tfrac{1}{2}Mv_0^2 \qquad (16.6b)$$

假定 F 隨 s 而變,但已知其間之變化定律,則必須先將此種關係之方程式列出,代入(16.6b)式,始可積分。

設將一彈簧變形,則此彈簧之反抗力,與其形變(deformation)

成正比例．故若利用彈簧加力於一物體上，則其力之大小，等於常數 C，與形變距離 s 之積，即 $F = Cs$．此力所作之功為

$$\int_0^s Cs\,ds = \frac{Cs^2}{2} = \frac{F}{2}s \tag{16.9}$$

其值等於平均力與距離之積．

假定有一力為蒸汽力，在等温膨脹(isothermal expansion)時，其絕對壓力與從汽缸一端量起之距離成正比例．故在膨脹時之力，等於常數 C_1 除以從汽缸端量起之距離 s，即 $F = C_1/s$．

上述之每種情形，玆特各舉一例以說明其解法．

例題 1

一物體重 150〔磅〕，從高 8〔呎〕之處落於標度為 2000〔磅/吋〕之彈簧上，試求彈簧之形變．

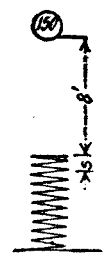


圖 440.

【解】 圖 440 表示所設物體與彈簧，物體在開始落下以前為靜止，故其動能為零．彈簧之壓縮為極大時，物體仍為靜止，故其動能仍等於零．彈簧之抗力(單位〔磅〕)，等於 2000 × 位移(單位〔吋〕)，或為 24000 × 位移(單位〔呎〕)．若命 s 為單位以〔呎〕計之位移，則彈簧之抗力為 $24000\,s$．故得

$$150 \times 8 + 150s - \int_0^s 24{,}000s\,ds = 0$$

$$1200 + 150s = 12{,}000s^2$$

$$s = 0.3224\,〔呎〕 = 3.87\,〔吋〕$$

在任何點之速度，例如在彈簧壓縮 1〔吋〕時之速度，可據總功等於動能之方程式求得之．

$$150 \times 8.083 - \int_0^{1/12} 24000s\,ds = \frac{1}{2}\,\frac{150}{32.2}v^2$$

$$v = 22\,〔呎/秒〕$$

例題 2

圖 441 (a)表示一蒸汽鎚，其鎚與活塞共重 500〔磅〕．將活塞壓

下之蒸汽力為 10,000〔磅〕,空氣阻力為 1000〔磅〕. 衝程 $s_2=18$〔磅〕. 在 $s_1=6$〔吋〕時停汽(cutoff). 試求此鎚擊於金屬上之速度. 假定在停汽後,壓力×容積＝常數,並假定餘隙容積(clearance volume)與摩擦力均不計及.

【解】 正力所作之功,減去負力所作之功,即等於其動能之增量,〔見(16.8)式〕. 重量與蒸汽力均為正力,空氣阻力為負力. 因 $v_0=0$,故當鎚擊時之總動能,即等於動能之增加量.

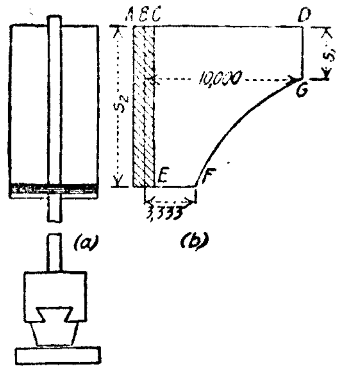


圖 441.

在圖 441 (b)內,縱坐標 DB 表示蒸汽之初力 P_1,縱坐標 BA 表示重力,縱坐標 AC 表示空氣之阻力. 故面積 $DCEFG$ 表示於相擊時,作用於鎚上之總功(見第 165 節). 重力之功 $=500\times1\frac{1}{2}=750$〔呎·磅〕,蒸汽至停汽點所作之功 $=P_1s_1=10000\times\frac{1}{2}=5000$〔呎·磅〕,停汽後蒸汽所作之功 $=\int_{s_1}^{s_2}P\,ds$,其中 P 為變力. 因蒸汽壓力與容積成反比例,故蒸汽力與從汽缸一端量起之距離成反比例,即

$$\frac{P}{P_1}=\frac{s_1}{s}$$

$$P=\frac{P_1s_1}{s}=\frac{5000}{s}$$

故停汽後蒸汽所作之功 $=5000\int_{0.5}^{1.5}\frac{ds}{s}$

$$=5000\log_e\frac{1.5}{0.5}$$

$$=5000\log_e 3$$

$$=5000\times2.3\log_{10}3$$

$$=5000\times2.3\times0.477$$

$=5490$〔呎·磅〕.

空氣之阻力所作之功 $= 1000 \times 1.5 = 1500$〔呎•磅〕.

$$\text{重力之功} + \text{蒸汽之功} - \text{空氣之功} = \tfrac{1}{2}Mv^2$$

$$750 + 5000 + 5490 - 1500 = \tfrac{1}{2} \times \frac{500}{31.2}v^2$$

$$v = 35.4\text{〔呎/秒〕}.$$

習 題

1. 一物體重 80〔磅〕,從與水平面成 60° 角之斜板頂部,開始向下滑動,其初速度爲零,沿斜面滑動 10〔呎〕後,擊於標度爲 150〔磅/吋〕之彈簧上. 若摩擦係數 $f = 0.3$,在整個滑動之過程中,物體與斜板始終保持接觸,試求彈簧所壓縮之長度. 答: 9.96〔吋〕.

2. 一物體重 10〔磅〕,以初速度 40〔呎/秒〕鉛直向上射出,離發射點 8〔呎〕處,此物體擊於標度爲 300〔磅/吋〕之螺卷彈簧上. 試求此物體與彈簧相擊時之速度,及彈簧所壓縮之長度. 答: 32.9〔呎/秒〕; 3.6〔吋〕.

3. 一貨車重 100,000〔磅〕,當其撞於一衝撞柱上時之速度爲 3〔呎/秒〕. 假定所有之壓縮,均承受於聯車鈎彈簧上. 若彈簧之最大壓縮長度,不超過 4〔吋〕,試求此彈簧之標度. 答: 20,960〔磅/吋〕.

4. 一蒸汽鎚之雑如下: 活塞與錘之重量爲 2000〔磅〕,活塞之直徑爲 15〔吋〕,活塞桿直徑爲 2〔吋〕,衝程爲 36〔吋〕,絕對蒸汽壓力爲 100〔磅/吋^2〕,活塞下部之空氣壓力爲 15〔磅/吋^2〕. 在四分之一衝程時停汽,膨脹爲等溫膨脹,若略去餘隙容積及摩擦力,試求相擊時之速度. 答: 30.6〔呎/秒〕.

162. 轉動之動能. 設圖 442 表示以角速度 ω 繞軸 O 轉動之任一物體. 則與軸相距 ρ 之質量 dM 之任一質點之速度爲 $\rho\omega$ 其動能爲 $\frac{1}{2}dM\,\rho^2\omega^2$. 物體之總動能爲 $\int \frac{1}{2}dM\,\rho^2\omega^2$. 因各質點在任何時刻之 ω^2 均屬相同,並因 $\int \rho^2 dM = I_0$. 故

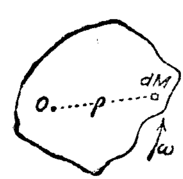


圖 442.

$$\text{轉動之動能} = \tfrac{1}{2}I_0\omega^2 \tag{16.10}$$

假定轉動體爲一有規則之立體，則 I_0 可用普通方法求得之。若不能積分求得，可用第 116 節所述之實驗方法求得之。

欲求功與轉動之動能間之關係，可利用求功與移動之動能間關係之同樣原理解之(見第 160 節)。設 F 爲切線力，如圖 443(a)所

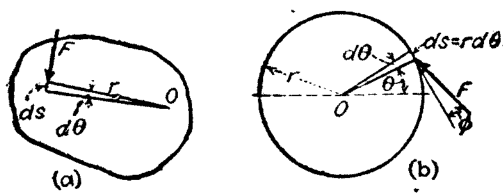


圖 443.

示，則 F 動過距離 ds 所作之功爲 $F ds = Fr\, d\theta$。設力 F 並不沿切線方向，則祇有其切線分力作功。命圖443(b)之力 F，爲物體上所有之外力(O 點之反力除外)之合力，並命 ϕ 爲此合力與轉動圓之切線間之角。則在力之作用點動過距離 $ds = r\, d\theta$ 時，力 F 所作之功爲

$$dU = F \cos\phi \; r\, d\theta$$

$Fr \cos\phi$ 爲力關於轉動軸之轉矩。若命此轉矩爲 C，則所作之總功爲

$$U = \int C\, d\theta$$

因 $C = I\alpha$, $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$.

$$U = \int C\, d\theta = \int I\alpha\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\, d\omega$$

積分之，得

$$U = \int C\, d\theta = \tfrac{1}{2}I\omega^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 \tag{16.11}$$

$\int C\, d\theta$ 爲轉動合力所作之功，$\frac{1}{2}I\omega^2$ 爲物體之終動能 $(K.E.)_f$，而 $\frac{1}{2}I\omega_0^2$ 爲物體之初動能 $(K.E.)_i$。在任何所設之問題中，通常以分別

求出作用於物體之上各力所作之功，比較求其合力所作之功爲簡單。

設任何一力爲阻力，則其轉矩爲負，故其功爲負。

在任何轉動中，正力所作之功 U_P，減去負力所作之功 U_N，卽等於動能之增量。

與移動之情形一樣，可得

$$(\text{K.E.})_i + U_P - U_N = (\text{K.E.})_f \tag{16.12}$$

（參攷(16.8a)式）。

例題

一飛輪與軸共重 1800〔磅〕，在軸承內之轉速爲 80〔轉/分〕。軸之直徑爲 3〔吋〕。軸與飛輪之迴轉半徑 $k = 2.5$〔呎〕。若摩擦係數 $f = 0.01$，問此輪能轉動若干時間？

【解】 唯一之作用力爲摩擦力（經過軸心之反力除外）。此摩擦力爲一種阻力，轉動一周時，摩擦力所作之功爲 $fN \times 2\pi r$，於 n 轉間所作之功爲 $0.01 \times 1800 \times 2\pi \times 0.125n = 14.16n$〔呎•磅〕。動能之減小，即等於其初動能 $\frac{1}{2}I\omega_0^2$。

$$I = Mk^2 = \frac{1800}{32.2} \times 6.25 = 349$$

$$\omega_0 = \frac{80 \times 2\pi}{60} = 8.39$$

$$\tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = 12,280 \text{〔呎•磅〕}$$

$$14.16n = 12,280$$

$$n = 867 \text{〔轉〕}.$$

因加速度爲一常數，故其平均轉速爲 40〔轉/分〕。轉 867〔轉〕所需之時間爲 $867/40 = 21$〔分〕40〔秒〕。

習題

1. 一軔履試驗機(brake-shoe testing machine)之轉動圓柱長 4〔呎〕，其動能等於重 140,000〔磅〕之火車，以試驗輪之輪緣速率前進時之動能之八分之一，設此圓柱以鑄鐵製成，試求其直徑。 答：3.7〔呎〕.

2. 若題 1 之輾屐試驗機之輪緣速率爲 60〔哩/時〕，設此時之軔以 15,000〔磅〕之法線力壓上，並設輪緣在軔下尚能動過 500〔呎〕，試求其摩擦係數。

答：$f = 0.28$.

3. 試求圖 356 所示飛輪，在轉速爲 240〔轉/分〕時之動能。

答：34,000〔呎·磅〕.

4. 有一長 6〔呎〕重 30〔磅〕之細桿，繞着離其一端 1〔呎〕處之水平軸自由轉動。假定在釋放時細桿之重心高於支點，並與支點在同一鉛直線上，釋放時之初速度爲零，試求其轉過 90° 及 180° 時之動能及角速度。

答：60〔呎·磅〕；4.29〔弳/秒〕；120〔呎·磅〕，6.07〔弳/秒〕.

5. 圖 444 表示直徑 2〔呎〕之滑輪，聯接於直徑 4〔呎〕之滑輪上，而滑輪能繞其公共之幾何軸 O 轉動，兩輪共重 200〔磅〕，迴轉半徑爲 1.6〔呎〕。設有一重 300〔磅〕之重量，繫於捲在小滑輪之繩上，另有一重 100〔磅〕之重量，繫於捲在大滑輪對邊之繩上，試求 300〔磅〕重量，與離釋放點 4〔呎〕處之地面相擊時之速度，並求 100〔磅〕重量在停止前所能舉起之距離。

答：$v = 4.61$〔呎/秒〕；$h = 3.01$〔呎〕.

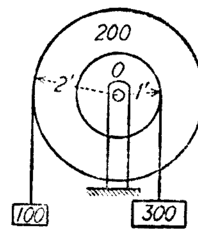


圖 444.

163. 轉動與移動之動能.

一物體同時有轉動與移動時，則在任何時刻，得視爲關於當時之瞬軸之轉動。在此瞬刻之動能爲

$$\text{K.E.} = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

I 爲關於瞬時中心之慣矩，ω 爲其角速度。

因 $I = I_g + M\bar{r}^2, \bar{v} = \bar{r}\omega$，式中之 I_g 爲物體關於與瞬軸平行之重心軸之慣矩，$\bar{r}$ 爲兩軸間之距離，v 爲重心之絕對速度。故

$$\begin{aligned}\text{K.E.} &= \tfrac{1}{2}I\omega^2\\ &= \tfrac{1}{2}I_g\omega^2 + \tfrac{1}{2}M\bar{r}^2\omega^2\\ &= \tfrac{1}{2}I_g\omega^2 + \tfrac{1}{2}M\bar{v}^2 \qquad (16.13)\end{aligned}$$

假定物體以速度 $\bar{v}$ 移動時，其動能為 $\frac{1}{2}M\bar{v}^2$，物體關於與瞬軸平行之固定重心軸，以角速度 ω 轉動時之動能為 $\frac{1}{2}I_g\omega^2$. 故物體在任何平面運動時之動能，等於重心之移動動能，與繞重心之轉動動能之和.

例題

圖 445 所示之輪之迴轉半徑為 1.75〔呎〕，此輪在斜面上自由滾動. 試求其從靜止位置動過10〔呎〕時, 60〔磅〕重量之速度，並求繩之牽力, 及輪下之摩擦力.

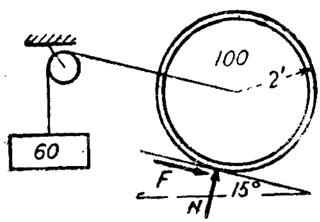


圖 445.

【解】 初動能等於零. 所作之正功為 $60 \times 10 = 600$〔呎•磅〕. 負功為 $100 \times 0.259 \times 10 = 259$〔呎•磅〕. 力 F 與 N 之作用點不動，故所作之功為零. 60〔磅〕重量之終動能為$\frac{1}{2}\ \frac{60}{32.2}v^2$. 輪之終動能為$\frac{1}{2}\ \frac{100}{32.2}v^2 + \frac{1}{2}\ \frac{100}{32.2}(1.75)^2\omega^2$. 因 $v = 2\omega$，故據(16.12)式，得

$$600 - 259 = \frac{1}{2}\ \frac{60}{32.2}v^2 + \frac{1}{2}\ \frac{100}{32.2}v^2 + \frac{1}{2}\ \frac{100}{32.2}\ \frac{(1.75)^2}{4}v^2$$

$$v^2 = 92.8$$

$$v = 9.63 \text{〔呎/秒〕}$$

若將 60〔磅〕重量作為脫離體，據(16.12)式，得

$$(60 \times 10) - (T \times 10) = \frac{1}{2}\ \frac{60}{32.2} \times 92.8$$

$$T = 51.35 \text{〔磅〕}.$$

雖然摩擦力 F 在輪上所作之功為零，但若將輪之中心作為參考點，輪之轉動動能，可以視作力 F 與其對於中心所經之距離之積：

$$10F = \frac{1}{2}\ \frac{100}{32.2}\ \frac{(1.75)^2}{4} \times 92.8$$

$$F = 11 \text{〔磅〕}.$$

習 題

1. 試求一實心圓柱在一平面上以速度 v 自由滾動時之動能。答：$\frac{3}{4}Mv^2$.

2. 設有一外直徑 10〔吋〕,內直徑 8〔吋〕之空心鑄鐵球，試求在一平面上以20〔呎/秒〕之速度自由滾動之動能。 答：644〔呎•磅〕.

3. 有重 100,000〔磅〕之貨車，有四雙車輪，如第 110 節習題 1 所示者，試求計算此車之總動能時，略去車輪之轉動動能所生誤差之百分數。

答：0.47%

4. 在圖 446 內，A 爲直徑 4〔呎〕，重 200〔磅〕之實心圓柱。聯接在 A 上之小圓柱之質量，可以不計。捲在 A 上之繩，繫於直徑 3〔呎〕，重 100〔磅〕之圓柱 B 之軸上，假定 A, B 均自由滾動，試求圓柱 A 從其靜止位置滾過 5〔呎〕後，兩圓柱之線速度及角速度，並求在兩圓柱下之摩擦力及繩內之牽力。

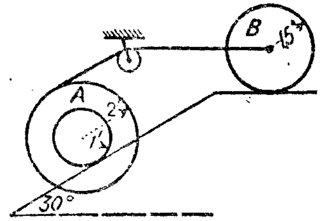


圖 446.

答：圓柱 A, $v = 4.08$〔呎/秒〕; $\omega = 4.08$〔弳/秒〕; $F = 66.5$〔磅〕. 圓柱 B, $v = 12.24$〔呎/秒〕; $\omega = 8.16$〔弳/秒〕; $F = 7.$[illegible]〔磅〕; $T = 23$〔磅〕.

164. 功率與效率. 功率(power)爲作功之率，卽單位時間內所作之功。 假定將 100〔磅〕之重量，舉起 10〔呎〕，則無論其在 1〔秒〕內或在 5〔秒〕內完成，所作之功相同，但其功率則不同。 前者爲 1000〔呎•磅/秒〕，後者爲 200〔呎•磅/秒〕。在工程上此單位太小，通常用較大之單位，〔馬力〕(horse power)。1〔馬力〕等於 550〔呎•/秒〕或 33,000〔呎•磅/分〕，電機工程上常用之功率單位爲〔瓦特〕(watt)或〔仟瓦特〕(kilowatt)，簡稱爲〔瓦〕，〔仟瓦〕，1〔瓦〕等於 10^7〔爾格/秒〕。 1〔仟瓦〕等於 1000〔瓦〕，(見附錄 I)。 1〔馬力〕等於 0.746〔仟瓦〕，或約略等於 $\frac{3}{4}$〔仟瓦〕。設有一力 F，在

時間 dt 內動過距離 ds,其功率爲 $F\frac{ds}{dt}=Fv$. 若 F 之單位爲〔磅〕, v 之單位爲〔呎/秒〕,則馬力 Hp. 爲

$$\text{Hp.}=\frac{Fv}{550} \tag{16.14}$$

因爲摩擦力及其他阻力,如空氣阻力,等之關係,傳至機器上一部分之能,因而損失. 故機器之出量(output)常小於其入量(input),對於所設時間內,出量與入量之比,謂之機械效率(mechanical efficiency).

$$\text{效率}=\frac{\text{出量}}{\text{入量}} \tag{16.15}$$

習　題

1. 一起重機在 240〔秒〕間將重 1400〔磅〕之礦用升降室吊起 2000〔呎〕. 試求其〔馬力〕. 設示功器上指示其功率爲 26.2〔馬力〕. 試求此起重機之效率.
答: 21.21〔馬力〕; 84.3%.

2. 一泵能在時間 1〔分〕內,將 20〔加侖〕之硫酸,送至比入口高 60〔呎〕之箱內. 硫酸之重量爲 112〔磅/呎^3〕,試求此泵所作之有用功.
答: 17,970〔呎•磅/分〕,或 0.544〔馬力〕.

3. 一皮帶之主動邊之牽力爲 800〔磅〕,鬆邊之牽力爲 350〔磅〕. 若滑輪之直徑爲 6〔呎〕,轉速爲 200〔轉/分〕. 試求其所傳之〔馬力〕,假定此皮帶轉動一效率爲 85% 之發電機,試求其所能發生之〔仟瓦〕.
答: 51.4〔馬力〕; 32.6〔仟瓦〕.

4. 一機器能在 16〔秒〕內舉起 30〔呎^3〕之水泥及重 400〔磅〕之斗. 設水泥重 140〔磅/呎^3〕,試求此機器之〔馬力〕. 答: 15.7〔馬力〕.

165. 功之圖示法. 因功爲力與距離之積,而力與距離均爲矢量[1]. 故在功之圖示上,可以用面積表示之. 在圖 447(a)內, AB

〔譯註〕(1)功爲力與距離之非矢量積(scalar product).

爲以適當比例尺畫出之距離 s. AC 爲以適當比例尺畫出之力 F, 設力爲一常數. 則面積 $ABDC$ 爲 AB 與 AC 之積,故表示此力所

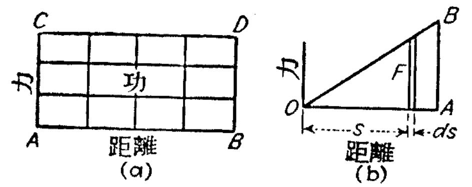


圖 447.

作之功. 假定 AB 代表 4〔呎〕,AC 代表 3〔磅〕,則其面積代表 12〔呎·磅〕之功.

設力爲變數,則此面積之縱坐標之高度不等,但面積仍等於所作之功. 據微積分,得縱坐標 F 橫坐標 s 之曲線下之面積爲 $\int Fds$. 最簡單之情形乃力爲距離之直線函數. 假定力自零值增至極大值,或自極大值減至零值,此時之圖形爲三角形,如圖 447 (b) 所示. 坐標 AB,依據適當之比例尺,表示力 F 之極大值,與距離同自零以等比增加之. 面積 OBA 代表所作之功,此面積等於 $\frac{1}{2}AB \times OA$. 若用其極大力 F_1 與總距離 s_1 表示之,卽得

$$功 = \tfrac{1}{2}F_1s_1$$

蒸汽機之**示功器** (indicator), 爲記載蒸汽機之蒸汽壓力與活塞行程之儀器. 在圖 448 內,OX 爲絕對壓力等於零之軸. AB 爲依據適當之比例尺表示大氣壓力之直線, 此直線之長度表示活塞之行程. 縱坐標 FH 表示活塞在其**工作衝程**(working stroke)上之對應點之蒸汽壓力, FG 表示在回程(return stroke)上同一點之反壓力(back pressure). 面積 $GCHDE$ 爲依據適當比例尺表示蒸汽所作之功. 此面積可用辛普孫三分之一定律(Simp-

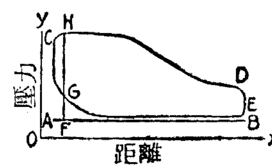


圖 448.

son's one-third rule)求得，或用測面儀(planimeter)量出。

設將示功圖面積除以長度 AB，則得平均縱坐標，其值若與彈簧標度相乘，卽得平均有效壓力(mean effective pressure)。假定在整個衝程中，以此項平均壓力作用，能得同量之功。

命 P 爲以〔磅/吋^2〕計之平均有效壓力。l 爲以〔呎〕計之汽缸長度，a 爲以〔吋^2〕計之活塞面積，n 爲以〔轉/分〕計之飛輪轉速。則 Pa 爲以〔磅〕計之總壓力。Pla 爲在活塞之一邊蒸汽所作之功。$Plan$ 爲在時間 1〔分〕內所作之功，$Plan/33,000$ 爲其所產生之馬力。此馬力謂之示功馬力(indicated horsepower)。假定在活塞之兩邊均有活塞桿，則兩邊之面積相等，並因平均有效力相等，故汽缸內所產生之總功率爲 $2Plan/33,000$。但在普通之情況中，活塞兩邊之壓力與面積均不相同。故必須將兩邊之功率，分別求得，然後求其和。

設欲於一板上衝出一孔，其壓力驟然自零值增至其極大值 P_1(圖 449)，然後再約略依照一直線減小至零。功圖上之面積，約略等於 $\frac{1}{2}P_1t$。其中 t 爲板之厚度。

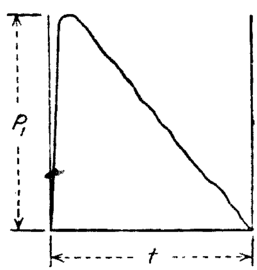


圖 449.

習　　題

1. 有一力作用於標度 16,000〔磅〕之彈簧上，使其壓縮 $3\frac{1}{2}$〔吋〕，後然再放回 $\frac{1}{2}$〔吋〕。試畫其功圖，並求其總功(gross work)，負功(negative work)及淨功(net work)。　答：98,000〔吋·磅〕；26,000〔吋·磅〕；72,000〔吋·磅〕。

2. 設欲於 $\frac{1}{2}$〔吋〕之板上，衝出 $^{11}/_{16}$〔吋〕之孔。設極限剪應力(ultimate shear stress)爲 44,000〔磅/吋^2〕。試求其所作之功。　答：11,880〔吋·磅〕。

3. 在一引擎汽缸內，蒸汽之平均有效壓力爲 80〔磅/吋^2〕。曲柄長 12

〔吋〕。 汽缸直徑長 10〔吋〕,活塞桿直徑爲 1.5〔吋〕,並伸長於整個汽缸內。設引擎之轉速爲 210〔轉/分〕,試求其示功馬力。 答: 156〔馬力〕.

4. 一引擎汽缸之曲柄端蒸汽之平均有效壓力爲 98〔磅/吋^2〕,而在首端者爲 95〔磅/吋^2〕。曲柄長 1〔呎〕,汽缸之直徑爲 1〔呎〕,活塞桿直徑爲 2〔吋〕,活塞桿祇在活塞之一邊。 若引擎之轉速爲 90〔轉/分〕,試求其所產生之馬力。 答: 117.5〔馬力〕.

166. 摩擦力對於功之損耗. 使動能消失,成爲熱能之最大因素爲摩擦力,一個表面在另一表面上動過時,其相互之摩擦力對於總動能之減損,等於摩擦力與相對運動之位移之積. 假定一機車之十字頭,對於其導板上之平均反力爲 500〔磅〕,其摩擦係數 $f = 0.01$. 設其曲柄長 1〔呎〕,在前進衝程中,十字頭在導板上所動過之相對距離爲 2〔呎〕,在十字頭與導板間,因摩擦力而產生之功之損耗爲 $0.01 \times 500 \times 2 = 10$〔呎·磅〕. 此項損耗不能在運動之其他部分,將其恢復成有用之功. 因在回程中摩擦力之方向改變,故在回程中,功之損耗量仍屬相同,其性質與使活塞加速所需之功,完全不同。

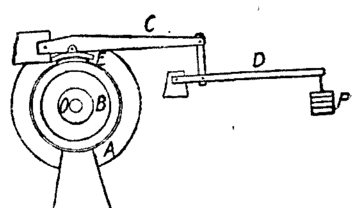


圖 450.

圖 450 所示之軔屐試驗機,計有固定於軸 O 之一極重鼓輪 A,在同一軸上,裝有一車輪 B. 利用槓桿 C 與 D,可使重量 P 在輪緣上,藉軔屐 E 而產生法線壓力,其重量與維均爲已知,故若知其角速度,卽能計算其動能. 轉動鼓輪之重量爲 12,600〔磅〕,約等於 100,000〔磅〕重之車之八分之一,卽爲此車每輪所支持之重量. 鼓輪之設計係根據特種條件,卽假定鼓輪與車輪之輪緣速率相同時,其轉動動能等於移動動能.

根據此項條件，得 $\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Mv^2$，又因 $I = Mk^2$，$v = r\omega$，故得 $k = r$。是以鑄造鼓輪時，必須使其 $k = 1.375$〔呎〕，即標準車輪之半徑。試驗機上所用之軔屐，與實際所用者相同。

鼓輪之軸，利用離合器聯接至一發動機上，故能得任何所需之速度，然後將發動機脫去，使鼓輪與車輪自由轉動。在重量 P 加上後，使軔屐 E 壓在車輪上。槓桿之排列，係使其一端之力 P，能在點 E 產生等於 $24\,P$ 之法線壓力。此外因槓桿之重量又產生 1230〔磅〕之法線壓力。若命 N 爲總法線力，軔屐在輪上之摩擦阻力爲 fN，其中 f 爲動摩擦係數。每轉過一轉時，摩擦力所作之功爲 $^{33}/_{12}\, fN\pi$〔呎·磅〕。

軸承上之摩擦力亦作功，其法線力爲 $12{,}600 + N$。軸之直徑長 7〔吋〕，若命 f_1 爲其摩擦係數，則在每轉過一轉間，功之損耗爲 $f_1 (12{,}600 + N)\,\pi \times {}^7/_{12}$〔呎·磅〕。以上兩處之摩擦力之功，將鼓輪與車輪之動能逐漸消耗，在軔屐上之消耗較大。動能全部變成熱能，故有時能使軔屐表面紅熱。

若命 N 爲輪之轉數，據運動之功與能方程式，得

$$\text{K.E.} = \text{摩擦力之功}$$

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 = \frac{33}{12} fN\pi n + \frac{7}{12} f_1 (12{,}600 + N)\,\pi n$$

習　題

1　設上述之軔屐試驗機之 $f = 0.3$，$f_1 = 0.004$。設輪緣速率爲 60〔哩/時〕。試求欲使車輪在 120〔轉〕內停止，所需之重量 P。　答：150〔磅〕.

2．設軔屐試驗機之輪緣速率爲 75〔哩/時〕，P 之重量爲 300〔磅〕，並使輪在 125〔轉〕內停止，若 f_1 之值與習題 1 相同，試求 f 之值。　答：$f = 0.258$.

3．設軔屐試驗機之摩擦係數 $f = 0.25$，$f_1 = 0.005$．力 $P = 500$〔磅〕，輪緣速率爲 90〔哩/時〕，試求輪緣須動過若干距離後方纔停止。答：1022〔呎〕.

167. 列車之軔. 列車以高速率行駛時,具有大量之動能. 此動能之來源,為蒸汽在汽缸內所作之功. 如在下坡行駛時,則重力之功亦能增加列車之動能. 列車停止時,此動能必須再變為功而消散之. 通常所用之方法,係將軔屐壓在輪緣上,使列車之動能,變為摩擦面之熱能. 摩擦力作減速功(work of retardation),其值為 fNs, 式中之 f 為摩擦係數, N 為軔屐對輪上之法線壓力, s 為輪緣相對於軔屐所經過之距離. 此種作用有阻止車輪轉動之傾向,故在輪與軌道之接觸點,產生向後之靜摩擦力. 此項輪與軌道間之力,為實際上使列車停止之力. 但因其作用點,並不在力之作用方向運動,故其功為零. 當車輪仍在轉動,而有即將開始滑動之傾向時,所作用之軔力為極大,如圖 451(a) 所示,因此時在軌道上

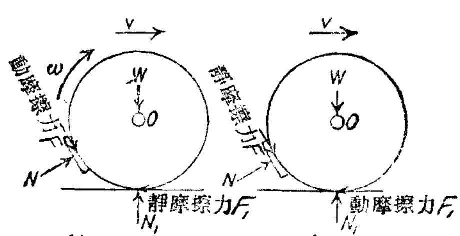


圖 451.

所產生之靜摩擦力等於其極限值或極大值也. 若不計算軸上之摩擦力,則據關於軸之力矩方程式,可知輪在靜力平衡狀態時,兩摩擦力 F_1 與 F 應相等.

假定再略增軔屐上之法線力,則在軔屐上之摩擦力亦略增,而車輪將滑動,如圖 451(b)所示. 此時車輪與軌道間之摩擦力為動摩擦力,其值略小於靜摩擦力,故對於運動之阻力亦減. 此時所作之功,在車輪與軌道間之接觸點上,而不在車輪與軔屐之接觸面上. 因軔屐所作之功為零,故無損壞. 但車輪在軌道上滑動,不但對於

阻止列車運動之效率極低，且易在車輪之輪緣上，產生局部磨平之損害。

假定有一機車向前行動，忽須使其後退，使其主動輪向後轉動。車輪與軌道間之摩擦力爲動摩擦力，其值小於靜摩擦力，故阻止列車前進之效應，較小於車輪向前轉動而即將滑動時之效應。此點可以據 $F = Ma$ 之關係看出。但摩擦力所作之功，在任一所設之水平距離 s 內可能較大，因摩擦力所經之距離爲 $s + s'$ 也，s' 爲輪緣上一點相對於輪中心所經過之圓周距離。功 Fs 減小列車與機車之動能，功 Fs' 平衡蒸汽在汽缸內所作之功。在以上所述之兩種方法中，無論用軔，或使機車倒向，若在軌道上撒沙，利用其間所增之摩擦，亦可以增加摩擦力。

軔屐與車輪間之摩擦係數之値，變化極大，其因素有下列數端：軔屐之材料，車輪之材料，列車之初速率，所論時刻之車輪速率，及氣候狀況等。當車輪即將停止時，其係數大於其平均值。在高速率時，因摩擦面材料之發熱關係，其係數較小於在低速率者。

下表爲車輛製造標準協會(M.C.B. Association)[1]對於各種軔屐在兩種不同速率時試驗所得之結果。

速率，〔哩/時〕	f 平均値	f 之終値
40	0.205	0.326
65	0.103	0.180

據上表可知當速率爲 65〔哩/時〕之 f 之平均値及終値，均較小於初速率爲 40〔哩/時〕之對應値，其原因在速率爲 65〔哩/時〕時，在摩擦面上所消失之動能，比在速率爲 40〔哩/時〕時者，大二倍半有餘，因表面之熱度較高，以致其緊握性能減低。故欲使高速率列

(1) 爲 Master Car Builders' Association 之縮寫。

車停止時，習慣上係先用軔加上極大壓力，使其速率減小一部分，然後將軔釋放，第二次用軔時，其壓力較小，以防止列車即將停止時之滑動。

因在低速率時摩擦係數之終值之平均值，與車輪及軌道間之靜摩擦係數之值相等，故欲防止車輪之滑動，軔屐上之法線力不能大於車輪之極小載荷。故當車上有載荷時，其軔效應與其極大值比較，必小得多。

習 題

1. 假定一貨車在無載荷時之重量為 40,000〔磅〕，在其八個輪上，每一個輪之法線軔屐力為 5000〔磅〕。設使此車自 45〔哩/時〕之速率停止，則可能之最短距離為若干，假定動摩擦係數 $f=0.22$，且為一常數，並且假定車輪在軌道上並無滑動。 答：308〔呎〕。

2. 假定習題 1 之車中之載荷為 100,000〔磅〕。試求使此車自 45〔哩/時〕之速率停止，其可能之最短距離為若干。假定摩擦係數之值與習題 1 相同。 答：1078〔呎〕。

3. 有一重 3000〔噸〕之列車，以 40〔哩/時〕之速率，在 0.5% 之斜坡上向下行動。今設加軔屐，以使列車在 1600〔呎〕內停止，試求所需之總應阻力。設列車之阻力為常數 7〔磅/噸〕。 答：209,400〔磅〕。

168. 撓性帶軔。 圖 452 表示起重機上所習用之帶軔 (band brake) 之一種簡單型式，帶之一端固定於點 C，繞過輪後，其另一端聯接於槓桿之點 B。槓桿之 A 端固定於鉸上，若有向下之力 P 加於槓桿之另一端，即可以使帶拉緊，帶與輪間之摩擦力可使運動減速。假定重量 W 以等速率下落一定距離 $r_2\theta$，式中之 θ 為輪所轉過之角度，則重力對於重量 W

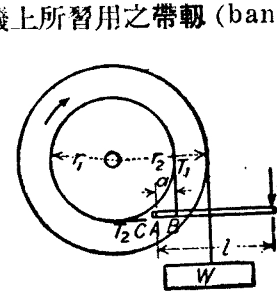


圖 452.

所作之功，必須等於摩擦力 T_2-T_1 在軔輪之輪緣上所作之功，即

$$r_2\theta W = (T_2 - T_1)\, r_1\theta$$

據第 68 節，即(8.176)式，

$$T_2 = T_1 e^{f\beta}$$

式中 f 爲動摩擦係數，β 爲接觸角。設取槓桿爲脫離體，則據關於點 A 之力矩，得

$$Pl = T_1 a$$

據以上三式，可求得使 W 下落所需之力 P.

習 題

1. 假定在圖 452 內，$r_1 = 2$〔呎〕，$r_2 = 3$〔呎〕，$W = 2000$〔磅〕，$a = 10$〔吋〕，$l = 8$〔呎〕，$f = 0.2$. 試求使重量以等速率下落所需之力 P.

答：200〔磅〕.

2. 假定習題 1 帶軔上之 $P = 180$〔磅〕，輪與鼓輪共重 1200〔磅〕，其迴轉半徑爲 2.4〔呎〕。試求重量 W 經過在始點下 40〔呎〕之一點時之速度。

答：13.64〔呎/秒〕.

3. 假定用習題 1 之數據，但繫重量 W 之繩，捲在鼓輪之反方向。試求此重量以等速率下落時所需之力 P. 答：512〔磅〕.

169. 吸收功率計. **吸收功率計**(absorption dynamometer)爲度量蒸汽機，電動機，水輪等功率出量之儀器。此種儀器能吸收全部之能，並將其變化爲摩擦之熱。吸收功率計之最普通型式，爲布朗奈軔(Prony brake)(圖 453 及 454)。圖 453 所示之簡單構造，最適宜於小型之高速度機器，例如電動機及小型燃氣機之用。若將手輪 B 旋緊，使軔塊在輪上夾緊，在軔塊上所產生之摩擦力，可以使整個之軔繞輪旋轉。此旋轉之傾向，利用鉸於點 C 之重量

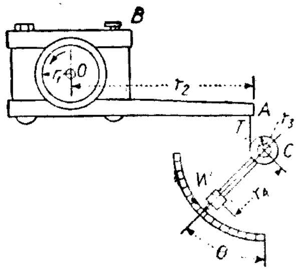


圖 453.

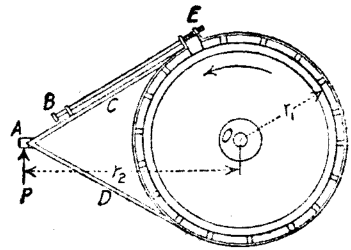


圖 454.

W之拉力平衡之。手輪 B 旋緊至一定程度，使發動機所發出之功，全部消失為輪緣之摩擦熱。

若命 F 為所產生之總摩擦力，則在旋轉一周內所吸收之功為 $F\times 2\pi r_1$，設 n 為轉速(單位〔轉/分〕)，則馬力 Hp. 為

$$\text{Hp.}=\frac{F\times 2\pi r_1 n}{33,000}$$

但據關於點 O 之力矩，得 $Fr_1=Tr_2$；據關於點 C 之力矩，得 $Tr_3=Wr_4\sin\theta$。故

$$\text{Hp.}=\frac{2\pi nWr_2r_4\sin\theta}{33000\,r_3} \tag{16.16}$$

圓弧上之刻度，不用度數，而能直接讀出 T，或者讀出摩擦力 F。

圖 454 所示之軔，用於較大之飛輪上。其構造為許多固定於一狹條上之小木塊，此狹條箍在一輪上，並聯接於一 V 形槓桿臂 CDA。應用此軔時，可以將狹條在 E 之兩端，用手輪 B 將其旋緊。如圖 453 者相同，得

$$Fr_1=Pr_2$$

故

$$\text{Hp.}=\frac{2\pi nPr_2}{33,000} \tag{16.17}$$

上式內之 P，為祇因摩擦力而產生之淨力，因軔臂之重量已鈞衡故。

通常量 P 之方法，爲將槓桿臂置於一臺秤(platform scale)或懸於一彈簧秤上。

用功率計所量得之馬力，謂之**制動馬力**(brake horsepower)。因蒸汽在汽缸內所作之功，一部分損耗於運動部分之摩擦上，故制動馬力之值必小於指示馬力。**機械效率**(mechanical efficiency)即爲制動馬力與指示馬力之比值。

習題

1. 設有如圖 453 所示之輣，$r_1 = 4.5$〔吋〕，$r_2 = 3$〔呎〕，$r_3 = 2$〔吋〕，$r_4 = 15$〔吋〕，$W = 10$〔磅〕。若將輣鈞衡，使載荷爲零時之指針在鉛直方向。試求 $F = 100$〔磅〕，200〔磅〕，300〔磅〕，400〔磅〕時，指針所示之角度。

答：9°36′；19°28′；30°00′；41°49′。

2. 假定有一電動機，用習題 1 所述之輣量其功率。設其轉速爲 1800〔轉/分〕。指針讀數爲 362〔磅〕。試求其制動功率。 答：46.5〔馬力〕。

3. 設有如圖 454 所示型式之輣，其半徑 $r_1 = 2$〔呎〕，$r_2 = 6$〔呎〕。假定有一發動機在輣上試驗，得 $P = 380$〔磅〕，$n = 210$〔轉/分〕。試求所產生之馬力。 答：91.2〔馬力〕。

4. 設習題 3 所述之發動機有一直徑爲 16〔吋〕之汽缸，直徑爲 3〔吋〕之活塞桿(此活塞桿祇在活塞之一邊)，衝程長 24〔吋〕，首端之平均有效壓力爲 22〔磅/吋^2〕，曲柄端之平均有效壓力爲 20〔磅/吋^2〕。試求此發動機之機械效率。 答：86.4%

170. 水之功率。 **水流**(water stream)或**水注**(water jet)因其運動而具有動能，而有作功之能力。若有此水流或水注經過一機器時，即將其一部分之動能變而爲功。命 W 爲水流經過所設截面之水重(單位〔磅〕)，v 爲此截面上水流之速度(單位〔呎/秒〕)，則得每單位時間(〔秒〕)內，經過此截面之水之動能爲 Wv^2/g（單位

〔呎·磅〕)。假定能將此項動能，全部變爲有用之功，則得可用馬力 (available horse-power) 爲：

$$\text{Hp.} = \frac{1}{2}\frac{W}{g}\frac{v^2}{550} \tag{16.18}$$

假定此水流以速度 v 自一噴嘴(nozzle)流出，其水頭(head)爲 h。若不計損耗，則 h 與 v 之關係爲

$$v^2 = 2gh$$

故得

$$\text{Hp.} = \frac{Wh}{550} \tag{16.18a}$$

習 題

1. 假定水自一 3〔吋〕之噴嘴射出，其水頭爲 960〔呎〕，擊於效率爲 85% 之衝擊輪機之輪葉上。輪機連接於效率爲 90% 之發電機上。試求在配電板上所能得之功率爲若干〔仟瓦〕。 答：760〔仟瓦〕.

2. 假定在一輪機內流過之水容積爲 840〔呎³/秒〕，水頭爲 60〔呎〕，輪機之效率爲 82%。試求其所能發出之馬力。 答：4700〔馬力〕.

功，能，及功率之總習題

1. 設欲將泥土自深 60〔呎〕，直徑 25〔呎〕之坑中挖出，若泥土重 220〔磅/呎³〕，挖出之泥土舉至比坑口高 8〔呎〕之處。試求其所作之功。

答：61,580〔呎·噸〕.

2. 有一高架之圓柱形水箱，其直徑爲 24〔呎〕，高 20〔呎〕，其下部有一斜度爲 45° 之圓錐形底，及一直徑 1〔呎〕，高 60〔呎〕之提升管(riser)。若水自一深井中吸出，其平均水位比提升管底低 100〔呎〕。試求使水箱及提升管裝滿水時對重力所作之功。又若泵之效率爲 85%，裝水時間爲 10〔時〕，並假定絕無水抽至水箱或提升管之外，試求所需之馬力。

答：122,400,000〔呎·磅〕；7.25〔馬力〕.

3. 一滅火機自一湖面上取水，湖面比滅火機之水位低 16〔呎〕，若水自直徑 2〔吋〕之噴嘴以速度 240〔呎/秒〕射出。試求所需馬力。答：542〔馬力〕.

4. 有一長 8〔呎〕，闊 6〔呎〕，深 4〔呎〕之水箱，其容積之三分之二裝滿水。試求使箱內所有之水，吸至比箱頂高 6〔吋〕處所作之功爲若干〔呎·磅〕.

答：25,330〔呎•磅〕.

5. 有一重 2000〔磅〕之重量，以一長 800〔呎〕，重 1〔磅/呎〕之纜，懸於一捲盤上，試求將此重量舉起 600〔呎〕所作之功。　答：1,500,000〔呎•磅〕.

6. 圖 455 示一直徑 1〔呎〕重 240〔磅〕，並在 30° 斜面上自由滾動之實心圓柱，一繩繫於圓柱之軸上，繩之另一端懸一重 100〔磅〕之重量。試求圓柱自其靜止位置自由滾動 2〔呎〕後，圓柱之線速度及角速度，並求繩之牽力及斜面與圓柱間之摩擦力。

答：$v = 3.033$〔呎/秒〕；$\omega = 6.066$〔弳/秒〕；$T = 107.15$〔磅〕；$F = 8.57$〔磅〕.

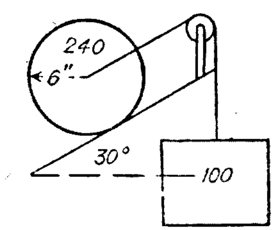


圖　455.

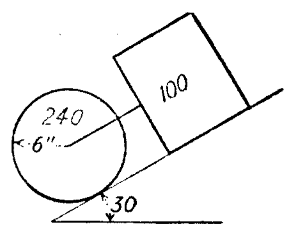


圖　456.

7. 若習題 6 內所述之圓柱與物塊，在 30° 斜面上之位置，係如圖 456 所示，試求圓柱之線速度及角速度，繩之牽力，及圓柱下之摩擦力。假定靜摩擦係數爲 0.24，動摩擦係數爲 0.20.

答：$v = 6.54$〔呎/秒〕；$\omega = 13.08$〔弳/秒〕；$T = 0.52$〔磅〕；$F = 39.8$〔磅〕.

8. 圖 457 示一直徑 4〔呎〕厚 3〔吋〕之鑄鐵圓盤，其兩邊各有直徑 8〔吋〕厚 3〔吋〕之同心小圓柱，兩圓柱能在斜面上自由滾動。試求使此圓柱自其靜止位置，沿斜面向上滾過 10〔呎〕後產生 5〔呎/秒〕之速度，所需對重 W 之重量。並求繩內之牽力及圓盤下之

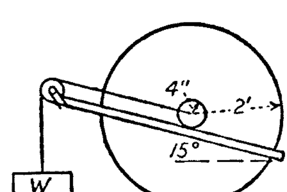


圖　457.

摩擦力。 假定滾動爲自由滾動。

答：$W = 1492$〔磅〕；$T = 1434$〔磅〕；$F = 990$〔磅〕。

9. 假定圖 457 之對重 W，在動過 10〔呎〕後被割去。試求圓盤尚能沿斜面滾上若干距離，並求在滾動時之摩擦力 F 爲若干。

答：$s = 27.2$〔呎〕；$F = 364$〔磅〕。

10. 假定習題 9 之圓盤停止後，再任其自由沿斜面滾下。 試求其到達始點時之線速度。 答：$v = 5.82$〔呎/秒〕。

11. 有一重 100〔磅〕之重量，靜止於一鉛直螺旋彈簧上，彈簧之標度爲 800〔磅/吋〕。 於是再加 4800〔磅〕之壓力，將彈簧壓下 6〔吋〕。 設將此額外之力驟然取去。試求 100〔磅〕重量自其被壓位置升高 5〔呎〕時之速度，並求其再能上升若干距離。 答：$v = 22$〔呎/秒〕；7.5〔呎〕。

12. 假定有一蒸汽鎚，其維與第 161 節習題 4 所設者相同。當活塞在四分之一衝程時，在活塞之上部停止供汽，並使汽在汽缸頂部放出。 同時在活塞之下部供汽，其壓力即等於鍋爐壓力。 試求鎚能動過若干距離。

答：1.735〔呎〕

13. 若欲使習題 12 內所述之鎚，剛巧能與砧接觸，問須於活塞在何處時使活塞之上部停止供汽，並將汽放出，但在活塞之下部同時開始供汽。

答：1.3 〔呎〕

14. 假定習題12之蒸汽鎚，在四分之一衝程時，上部停汽，在二分之一衝程時，上部放汽，下部供汽。 試求鎚擊砧之速度。 答：8.02〔呎/秒〕。

15. 一蒸汽機之汽缸首端之示功圖面積爲 3.27〔吋^2〕，曲柄端之示功圖之面積爲 3.21〔吋^2〕，大氣壓之線長 3.25〔吋〕，彈簧之標度爲 40〔磅/吋〕，衝程長度爲 24〔吋〕，活塞直徑爲 10〔吋〕，活塞桿直徑爲 1.25〔吋〕，轉速爲 150〔轉/分〕。 試求其示功馬力。 答：56.5〔馬力〕。

16. 有一重 800〔噸〕之列車，在水平軌道上以一定之聯車鈎拉力拖動，能在 1〔哩〕內達到 40〔哩/時〕之速率。 假定列車阻力爲一常數，並等於 8〔磅/噸〕，求所需之聯車鈎拉力，並求其極大馬力。答：22,600〔磅〕；2410〔馬力〕。

17. 假定習題 16 之機車，以同樣之聯車鈎拉力，將同一列車拖上 0.5% 之

斜坡。試求經過若干距離方能達到 40〔哩/時〕之速度。　答：10,430〔呎〕.

18. 一貨車重 120,000〔磅〕，以 15〔哩/時〕之速率在 2% 之斜坡上向下行駛。若列車阻力爲 9〔磅/噸〕。試求使其在 1200〔呎〕之距離內停止，在八個輪上每輪所需之法線軔展力。軔展與車輪間之動摩擦係數爲 0.25.

答：$N=1305$〔磅〕.

19. 有一重 300〔噸〕之列車，在水平軌道上以 90〔哩/時〕之速率前進。假定列車阻力爲 20〔磅/噸〕，試求其聯車鈎拉力，及機車所能產生之馬力。

答：6000〔磅〕；1440〔馬力〕.

20. 設有裝在 4〔呎〕直徑之飛輪上之布朗奈軔，其槓桿臂長 6〔呎〕。當輪之轉速爲 210〔轉/分〕時，槓桿一端之臺秤之讀數爲 455〔磅〕，試求其所發生之馬力。　答：109〔馬力〕.

21. 一起重機能於每秒鐘內，自一深 60〔呎〕之船艙內，吊起重 1〔噸〕之鑛石。若起重器之效率爲 70%，發動機之效率爲 85%，試求其示功馬力。

答：6.11〔馬力〕.

22. 假定一重 800〔噸〕之列車，以 45〔哩/時〕之速率，拖上 0.4% 之斜坡。若列車阻力爲 12〔磅/噸〕，試求其馬力。　答：1920〔馬力〕.

23. 設習題 22 所述列車在輕載時重量爲 200〔噸〕，車上裝有軔，軔之法線力等於輕載時重量之十分之九。假定 $f=0.25$. 試求此車在滿載時，於若干長之水平軌道上能使其自 45〔哩/時〕之速度停止，列車阻力等於 10〔磅/噸〕之常數。　答：1104〔呎〕.

24. 一拍爾登水輪(Pelton wheel)用直徑 1〔吋〕之水注推動，其水頭爲 350〔呎〕。若輪之效率爲 85%，試求其所產生之馬力。設此輪直接聯在效率爲 88% 之發電機上，試求其所能供給之電力之〔仟瓦〕數。

答：27.6〔馬力〕；18.2〔仟瓦〕.

25. 一競賽自動車重 8000〔磅〕，速率爲 345〔哩/時〕，試求其動能。又假定此車在 345〔哩/時〕行駛時，使其於 5〔哩〕內停止，試求其平均阻力。

答：31,800,000〔呎·磅〕；1200〔磅〕.

第十七章

衝量,動量與碰撞

171. 衝量與動量. 力之效應,可以用力與距離之積說明之,此積謂之功(work);亦可以用力與時之積說明之.此積謂之力之衝量(impulse). 假定在時間 t 內,力 F 之大小方向均為一定,則其衝量為 Ft. 假定 F 之值為一變數,則在微時間 dt 內之衝量為 Fdt. 在任何時間 t 內之衝量為 $\int_0^t Fdt$. 設已知 F 與 t 間之關係,則上述之積分即可算出.但有時雖然不知 F 與 t 間之關係,積分式 $\int_0^t F\,dt$ 能從含有此量之兩聯立方程式內消去.

衝量與力一樣,亦為一矢量,其方向與位置與力矢量相同.

一方向為變動不定之力之合衝量(r sultant impulse),等於其各個分衝量之矢量和. 假定有一合力 F,作用於一物體上之時間為 t〔秒〕,若驟然倒置其方向,使其仍作用於此物體上,時間仍等於 t〔秒〕.此時兩衝量之大小相等,方向相反,故衝量之矢量和為零.

若在上述之情形中,力之方向祇轉過 $90°$. 則合衝量之大小為 $Ft\sqrt{2}$,且與任一之分衝量成 $45°$ 角.故在力之方向變換之任何情況中,積分 $\int Fdt$ 必為一矢量積分.

一單位衝量,等於一單位力在單位時間內之衝量. 英美制之衝量單位為〔磅·秒〕.

一物體之動量(momentum)為其質量與速度之積. 動量與速度一樣,為一有方向與位置之矢量. 衝量與動量,與其他矢量相同,得分解為分矢,亦得合成為合矢.

一單位動量,為一單位質量以單位速度運動時之動量. 在英美

制內，動量單位之維可以用下法求得之。因 $M = W/g$，W 之單位爲〔磅〕，g 之單位爲〔呎/秒²〕。故 M 之單位爲〔磅·秒²/呎〕，速度 v 之單位爲〔呎/秒〕，而 Mv 之單位爲

$$〔磅·秒^2/呎〕\times〔呎/秒〕=〔磅·秒〕$$

故動量單位之維，與衝量單位之維相同。

習　題

1. 一力之初值爲 4〔磅〕，但與時俱增，其對於時間之增加率爲 0.1〔磅/秒〕。試求在最初 10〔秒〕內及其次 10〔秒〕內之力之衝量。

答：45〔磅•秒〕；55〔磅•秒〕.

2. 一力之初值爲 6〔磅〕，其對於時間之減小率爲 0.5〔磅/秒〕。試求在最初 10〔秒〕內之力之衝量。　　答：35〔磅•秒〕.

3. 一競賽自動車重 8000〔磅〕，速度爲 345〔哩/時〕。試求其動量。

答：125,600〔磅•秒〕.

172. 衝量與動量之關係. 設 F 爲作用於質量 M 之物體之合力，所產生之加速度爲 a，則 $F = Ma$。又因

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$F = M\frac{dv}{dt}$$

$$F\,dt = M\,dv$$

假定 t 之極限爲 0 與 t，對應之速度極限爲 v_0 與 v，則

$$\int_0^t F\,dt = \int_{v0}^{v} M\,dv \qquad (17.1)$$

假定質量 M 爲一常數，得

$$\int_0^t F\,dt = Mv - Mv_0 \qquad (17.1a)$$

假定質量 M' 爲一變數，必須先知 M 與 v 間之關係，方能積分。

假定質量 M 與力 F 均爲常數，得

$$Ft = Mv - Mv_0 \tag{17.1b}$$

據(17.1)(17.1a)(17.1b)式，得一般之結論如下：

在任何時間 t 內，作用於一物體上之合力之衝量，等於其動量之變化。

據上述之關係，凡含有力，質量，速度，與時間之習題，可以直接解決，而不需含有力，質量，及加速度之一組；及含有速度，加速度，及時間之另一組之方程式。

例 題 1

一物體以 30〔呎/秒〕之初速度，沿鉛直線向上拋出。假定其到達最高點後沿原有路線自由落下，試求其在拋出後 2.5〔秒〕之速度。

【解】 合力 F 即爲其重量 W，因其方向與初速度之方向相反，故爲一負數。 據(17.1b)式，得

$$-2.5W = \frac{W}{32.2}v - \frac{W}{32.2} \times 30$$

$$v = -50.5 \text{〔呎/秒〕}$$

答數之負號，表示速度之方向係向下。

例 題 2

有一重 500〔磅〕之物體，起初爲靜止，作用於此物體上之變力爲 $100\sqrt{t}$，其變摩擦力約略爲 $20-t$，作用之時間爲 10〔秒〕。試求在 10〔秒〕末之速度。

【解】 據(17.1a)式得

$$\int_0^{10} 100t^{\frac{1}{2}}\,dt - \int_0^{10} 20\,dt + \int_0^{10} t\,dt = \frac{500}{32.2}v$$

$$\frac{200}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{10} - 20t\Big]_0^{10} + \frac{t^2}{2}\Big]_0^{10} = \frac{500}{32.2}x$$

$$v = 126 \text{〔呎/秒〕}$$

習　題

1. 一物體以初速度 20〔呎/秒〕沿鉛直向下之方向拋出，試求其在 4〔秒〕末之速度。 答；148.8〔呎/秒〕.

2. 假定有在水平地面上之 120〔磅〕之重量，作用於其上之外力有 15〔磅〕之水平力，及等於$(10-t^{\frac{2}{3}})$之摩擦力。若此重量從靜止狀態時開始運動，試求其經過 6〔秒〕時之速度。 答：$v=10.24$〔呎/秒〕.

3. 假定習題 2 內之重量，有向左 10〔呎/秒〕之初速度，15〔磅〕之力係向右方。試求其解。 答：$v=7.8$〔呎/秒〕.

173. 線動量不滅原理. 設兩物體間有相互作用，或一物體之兩部分間有相互作用. 據牛頓第三運動定律，可知其相互之力，恆為大小相等，方向相反. 又因接觸之時間，必須相同，故相互力之衝量亦必大小相等，方向相反，而互相抵消. 假定作用於此兩物體上之外力之合力為零，則在作用前兩物體之動量和，與作用後之動量和必須相等，因對於整個物體系而言，$\int F\,dt=0$ 也。命 M_1 與 M_2 為兩物體之質量，v_1，v_2 為互相接觸前之速度，v_1'，v_2' 為互相接觸後之速度。故

$$M_1v_1+M_2v_2=M_1v_1'+M_2v_2' \tag{17.2}$$

兩物體間有相互作用時，其動量和雖無損失，但其動能和則有損失，所損失之動能變為接觸點之熱能.

v_1 之方向，常取作正向，假定 v_2 在反方向，則為負值.

例　題

有一 50〔磅〕之子彈，自一 20,000〔磅〕之砲口射出。假定子彈之砲口速度為 1200〔呎/秒〕。試求砲之最初後退速度。假定有一 3000〔磅〕之力抵抗砲之後坐，問在若干時間後，砲即停止運動？後坐之距離為若干？又彈與砲之動能各為若干？

【解】 在子彈未射出時，子彈與砲之動量和爲零。故在射出後，其動量和仍應等於零。 故得

$$子彈之前進動量 - 砲之後退動量 = 0$$

$$\frac{50}{32.2} \times 1200 = \frac{20,000}{32.2} v$$

$$v = 3 \text{〔呎/秒〕}.$$

阻力之衝量，等於砲之動量。 故

$$\frac{20,000}{32.2} \times 3 = 3000\, t$$

$$t = 0.621 \text{〔秒〕}$$

因阻力爲一常數，故其運動爲等加速運動。 所經過之距離，等於平均速度與時間之積。 平均速度爲 $\frac{1}{2} \times 3 = 1.5$，故

$$s = 1.5 \times 0.621 = 0.932 \text{〔呎〕}.$$

子彈之動能爲

$$\frac{1}{2} \times \frac{50}{32.2} \times 1200^2 = 1,120,000 \text{〔呎•磅〕}$$

砲之動能爲

$$\frac{1}{2} \times \frac{20,000}{32.2} \times 3^2 = 2790 \text{〔呎•磅〕}$$

由此可見，雖然子彈之動量與砲之動量之值相同，但子彈之動能比砲之動能大四百倍。

例 題

1. 一人重 170〔磅〕，以 10〔呎/磅〕之水平速度，跳上靜止於水中之船上。若船重 200〔磅〕，試求人與船之相對速度爲零時之船之速度，並求其動能之損耗。 答：4.6〔呎/秒〕；142〔呎•磅〕。

2. 有重 $\frac{1}{8}$〔英兩〕之子彈，以水平方向射入重 3〔磅〕之木塊內。 當子彈與木塊之相對速度爲零時，木塊之速度爲 12〔呎/秒〕。試求子彈之速度，及動能之損耗。 答：3470〔呎/秒〕；1938〔呎•磅〕。

3. 設有重 600〔磅〕之砲彈，以 2000〔呎/秒〕之速度從重 160,000〔磅〕之

砲中射出。試求此砲後坐之初速度。設阻力爲常數 90,000〔磅〕,試求後坐之距離,並求砲彈與砲之初動能。

答: 7.5〔呎/秒〕; 18.6〔吋〕; 37,300,000〔呎·磅〕; 140,000〔呎·磅〕.

174. 角衝量與角動量. 設圖 458 表示繞固定點 O 自由轉動之物體。命 F 爲物體轉動平面內各轉動力之合力,d 爲此合力關於軸 O 之力矩臂。在時間 dt 內,力 F 之衝量爲 $F\,dt$; 此衝量爲一矢量,其方向與作用線如圖所示。關於軸 O 之微衝量矩爲 $d\times F\,dt$,此等微衝量矩之總和 $\int d\times F\,dt$,謂之力關於物體之衝量矩(moment of impulse)或**角衝量**(angular impulse)。

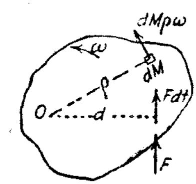


圖 458.

命 dM 爲與轉動軸 O 相距 ρ 之任一質點之質量,ω 爲物體之角速度,$\rho\omega$ 爲質量 dM 之切線速度,$dM\rho\omega$ 爲其微動量。此動量爲一矢量,其位置經過 dM, 其方向即爲 dM 之速度之方向,與 ρ 垂直。此微動量關於軸 O 之矩 $dM\rho^2\omega$, 謂之質點之動量矩。此等微動量矩之和,謂之物體之動量矩(moment of momentum),或**角動量**(angular momentum)。

$$\int dM\rho^2\omega = \omega\int\rho^2 dM = I_0\omega \tag{17.3}$$

據第 130 節,

$$Fd = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\int d\times F\,dt = \int_{\omega_0}^{\omega} I\,d\omega$$

$$\int d\times F\,dt = I\omega - I\omega_0 \tag{17.4}$$

上述之關係可以說明如下:

在任何之轉動中,諸作用力之角衝量之總和,等於角動量之增量.

角衝量與角動量均爲矢量,在圖解上以平行於轉動軸之矢量表示之.其符號之習慣,與第31節所述之力偶所用者相同.若所察得之角衝量與角動量之轉動爲負方向(即順時針方向),則矢量之方向,即成離觀察者之方向.圖458之矢量,應與圖之平面垂直.又因其轉動在反時針方向,故矢量指向觀者.角衝量與角動量,具有其他矢量之共同性質,即得任意分解爲分矢,或合併爲合矢.

例 題

一飛輪重3200〔磅〕,轉速爲125〔轉/分〕,其迴轉半徑爲3.3〔呎〕,軸之直徑爲6〔吋〕.若軸承之摩擦係數 f 爲0.02.試求在其停止前,轉過若干轉.

【解】

$$\text{摩擦力} = 3200 \times 0.02 = 64\ \text{〔磅〕}$$

$$\text{摩擦力之衝量} = 64t$$

$$\text{角衝量} = 64t \times \tfrac{1}{4} = 16t$$

據(17.4)式,得

$$\begin{aligned} 16t &= I\omega \\ &= \frac{W}{g}k^2\omega \\ &= \frac{3200}{32.2} \times (3.3)^2 \times \frac{125}{60} \times 2\pi \\ &= 14,180 \end{aligned}$$

$$t = 885\ \text{〔秒〕} = 14.75\ \text{〔分〕}.$$

飛輪之平均速率爲62.5〔轉/分〕.故在時間14.75〔分〕內,轉過 $62.5 \times 14.75 = 922$〔轉〕.

習 題

1. 若上述例題之飛輪中,改用他種潤滑油,於是在18〔分〕37〔秒〕後停

止轉動。試求其摩擦係數。 答：$f = 0.0159$

2. 有直徑 3〔呎〕，厚 2〔吋〕之鑄鐵圓盤，以直徑 2〔吋〕之軸支持於軸承上。設摩擦係數 $f = 0.02$. 若將 12〔磅〕鉛直向下之力，作用於捲繞此圓柱之繩上。試求其從靜止狀態開始，轉動 10〔秒〕時輪緣之速度。

答：13.83〔呎/秒〕.

3. 設習題 2 之力於第 10〔秒〕之末除去。試求此輪尚能轉動若干時間，方始停止。阻止運動之力為軸承上之摩擦力。 答：3〔分〕14〔秒〕.

175. 角動量不滅原理. 假定在任何時間 t 內，關於一物體或物體系之任何所設軸之外加角衝量為零，則關於該軸之角動量為一常數，而與各物體間或一物體之各部分間相互之力與反力無關。因為在同一時間 t 內，內力恆成雙而存在，其大小相等，方向相反。故任何一雙內力之角衝量為零，即

$$\int d \times F\,dt - \int d \times F\,dt = 0$$

故角動量無變化。

圖 459 所示之例，為支於水平軸上之兩圓盤 A, B. 圓盤 A 固定於軸上，並在靜止狀態. 圓盤 B 以角速度 ω 在軸上轉動. 命 I 為圓盤 B 之慣矩，I' 為整個圓盤系之慣矩. 因圓盤 A 為靜止，故圓盤系之角動量即等於 B 之角動量 $I\omega$. 如能設法將兩圓盤聯住，例如將 B 之螺栓插入 A 之孔內，則兩圓盤以一新角速度 ω' 轉動. 此圓盤系之角動量為 $I'\omega'$. 角動量之值，並不因螺栓與圓盤間之力與反力而變，故

$$I'\omega' = I\omega$$

即

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega$$

$I\omega$ 與 $I'\omega'$ 以在圖左之同一矢量表示之。

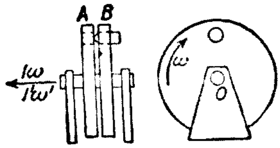


圖 459.

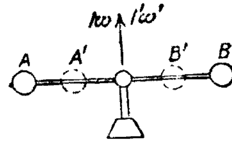


圖 460.

此例與線動量之例相同，由於兩圓盤間之相互作用亦有動能之損失。

試再舉一例。圖 460 之兩物體 A, B 得在一水平軸上移動，而水平軸聯同其支座以角速度 ω 繞一鉛直軸轉動。命 I 爲兩球關於轉動軸之慣矩，則其動量爲 $I\omega$。若利用兩物體間之力，使其移至 A', B' 之位置，其慣矩爲 I'，據第一例之方法，得

$$\omega' = \frac{I}{I'}\omega$$

因 I' 小於 I，故 ω' 必大於 ω.

習 題

1. 在圖 459 內，兩圓盤均爲直徑 2〔呎〕之鋼圓盤，圓盤 B 厚 2〔吋〕，圓盤 A 厚 0.8〔吋〕。若圓盤 B 之轉速爲 90〔轉/分〕，圓盤 A 之轉速爲零。試求以上兩圓盤聯合後之轉速，並求其動能之損耗。 答：64.2〔轉/分〕；51〔呎·磅〕.

2. 在圖 460 內，命 A, B 爲直徑 6〔吋〕之兩鑄鐵球，支持於一直徑 8〔吋〕長 5〔呎〕之鋼桿上。在 A, B 兩位置時，兩圓球中心間之距離爲 4〔呎〕，繞鉛直軸之轉速爲 60〔轉/分〕。利用在兩球間拉緊之彈簧，使兩球移至 A', B' 之位置。此時兩球中心間之距離爲 1〔呎〕。若不計算彈簧之質量。試求轉動後之轉速，及動能之變化，並解釋動能之增加。

答：354〔轉/分〕；766〔呎·磅〕，增加.

176. 角動量之合矢：迴轉器.

此處所討論者，僅限於有互成直角軸之迴轉器(gyroscope)。設圖 461 所示之輪，以甚大之角速

度 ω 繞水平軸 AB 轉動。軸 AB 僅支持於其點 A，此軸能在繞點 A 之任何方向轉動。輪本身不轉動時，無法使其支持於點 A。但輪本身轉動時，則能繞經過點 A 之鉛直軸轉動。此種轉動，謂之

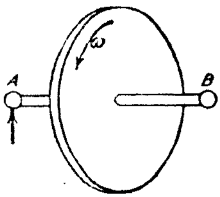


圖 461.

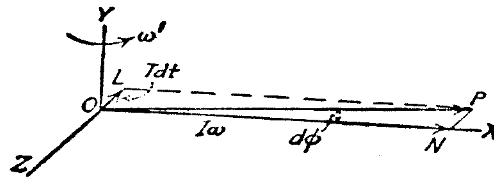


圖 462.

進動(precession)。在圖 462 內，沿軸 X 正向之矢量 ON，代表所設輪關於旋轉軸(spin axis) OX 或 AB 之角動量。外力有重量 W 及在點 A 之鉛直反力，此兩力構成力偶，其轉矩 T 係繞軸 OZ，並在順時針方向，在時間 dt 內，此轉矩產生繞軸 OZ 之角動量 $T\,dt$。若沿軸 OZ 自正向負之方向看出去，轉矩 T 爲順時針方向，其角動量爲負，故以矢量 OL 表示之。以上兩角動量之合矢爲 OP，而 OP 與 ON 間之角爲 $d\phi$。OP 爲所設輪在時間 dt 後之轉動軸。故 AB 軸必在水平面上，以等角速度 ω′ 在反時針方向（自上向下看）轉動或進動。

$$OL = ON\,d\phi$$

$$T\,dt = I\omega\,d\phi$$

$$T = I\omega\frac{d\phi}{dt}$$

但因

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega'$$

故得

$$T = I\omega\omega' \tag{17.5}$$

假定 X, Z 兩軸隨着輪繞軸 Y 轉動. 因繞軸 OZ 之轉矩為一常數,故若旋轉速度 ω 為常數時,進動速度 ω' 亦為常數. 但時常因摩擦力及空氣阻力之關係使 ω 之值減小,則 ω' 必見增加.

若在平面 XZ 上加一力偶,增加此輪繞軸 Y 之進動. 則此轉動盤及軸之端 B 能升高. 因增加反時針方向(自上向下看)轉動之力偶,其矢量係向上,此矢量與旋轉矢量之合矢,其矢首向上.

同樣理由,設外加一使進動速度減小之轉矩,轉動軸之外端 B 將向下墜.

若關於與旋轉軸垂直之一軸,加上一轉矩,便產生關於與以上兩軸垂直之第三軸之進動. 反之,若強迫其關於與旋轉軸垂直之一軸進動,則關於第三個直交軸產生一轉矩. 例如機車在一水平曲線上前進時,其主動輪被迫繞着經過曲率中心之鉛直軸運動,此強迫進動即產生繞着切於曲線之一軸之轉矩. 故外軌對於主動輪之反力,大於此輪在直線軌道上滾動時之反力,裏軌對於主動輪之反力,小於在直線軌道上滾動時之反力.

先假定一鐵路曲線向左;車輪之旋轉矢量向左,向着曲線中心. 機車沿此曲線動過一短距離後,其旋轉矢量指向左後方. 故其角衝量矢量指向後方,自機車之後方看出去,此角衝量係因一反時針方向之轉矩而產生. 故外軌(即右軌)上之壓力增加,裏軌(即左軌)上之壓力減小. 若鐵路曲線向右,旋轉矢量仍指向左方,在鐵路曲線中心之反方向. 機車沿此曲線動過一短距離後,其旋轉矢量指向左前方. 故其角衝量矢量指向前方,自機車之後方看出去,此角衝量係因一順時針方向之轉矩而產生. 故外軌(即左軌)上之壓力增加,裏軌(即右軌)上之壓力減小.

設有一普通之陀螺(top),自上向下看,此陀螺繞其鉛直幾何軸 Y 以順時針方向轉動. 若在此陀螺之頂端,加上一沿軸 X 正向之

壓力，則其軸並不在軸 X 之正向傾斜，而在軸 Z 之正向傾斜。旋轉矢量係鉛直向下。轉矩矢量係向軸 Z 之負向。此兩矢量之合矢，係向後下方，故旋轉軸之頂端，向前傾斜。

設自上向下看時，陀螺之轉向爲反時針方向，若加上同樣之轉矩，則陀螺之頂端，將在軸 Z 之負向傾斜。

例 題

電車之電動機轉子，重600〔磅〕，其轉動方向與車輪之轉動方向相反。其兩軸承間之距離爲 2〔呎〕。轉子之迴轉半徑爲 6〔吋〕。電動機之傳動方法爲齒輪傳動，車輪轉一〔轉〕時，電動機轉4〔轉〕。車輪之直徑爲 33〔吋〕。若電車以 20〔呎/秒〕之速度，沿一半徑100〔呎〕之曲線前進，試求在兩軸承上之反力。曲線之曲率中心在軌道之右。

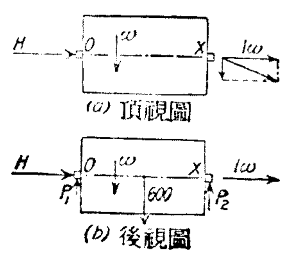


圖 463.

【解】 圖 463(a) 爲電動機之頂視圖。圖 463(b)爲其後視圖。OX 爲旋轉軸，經過路軌曲率中心之鉛直軸爲進動軸。與以上兩軸垂直之任一軸爲轉矩軸。轉子向曲線中心之加速度爲

$$a = \frac{v^2}{r} = 4〔呎/秒^2〕$$

在軸承上之水平力爲

$$H = \frac{600}{32.2} \times 4 = 74.5〔磅〕$$

此力由於離心力而產生，其值與電動機不轉動時之值相等。因關於進動軸之轉矩爲零，故在轉子之兩端，反力在與 H 垂直之方向之水平分力爲零。

因轉子之旋轉方向與車輪之旋轉方向相反，在後視圖上車輪之旋轉矢量向左，故轉子之角動量矢量 $I\omega$ 向右。欲產生向右之進動，與上述之角動量矢量併合之角衝量矢量係指向軌道之後方，即向站在車後之觀者。在後視圖上可見產生此角衝量矢量之轉矩，係在反時針方向，故 P_2 必須大於 P_1。

因 $T = I\omega\omega'$，故據關於點 O 之力矩，得

$$(P_2 \times 2) - (600 \times 1) = I\omega\omega'$$

$$I = \frac{W}{g}k^2 = \frac{600}{32.2} \times \frac{1}{4} = 4.66$$

車輪轉動之角速度爲

$$\omega_1 = \frac{v}{r} = \frac{20}{1.375} = 14.55 \text{〔弳/秒〕。}$$

因齒輪比爲 4:1，故轉子之角速度 ω 爲

$$4 \times 14.55 = 58.2 \text{〔弳/秒〕。}$$

$$\omega' = \frac{v}{r} = \frac{20}{100} = 0.2 \text{〔弳/秒〕}$$

$$2P_2 - 600 = 4.66 \times 58.2 \times 0.2$$

$$2P_2 - 600 = 54$$

$$P_2 = 327 \text{〔磅〕}$$

因 $P_1 + P_2 = 600$，

$$P_1 = 273 \text{〔磅〕。}$$

由此可見電動機轉動時，在曲線裏邊之軸承上之力，比電動機靜止時大出 27〔磅〕。 在外邊軸承上之力適相反，即在轉動時之力，比靜止時之力小 27〔磅〕。

對於在反方向之曲線，角動量矢量仍向右，角衝量矢量必須向前，方能使以上兩矢量併合後產生向左之進動。故轉矩之符號應相反。 故曲線裏邊之軸承上之壓力仍爲較大。

設改換電動機之傳動齒輪，使其轉子與車輪在同一方向轉動，則在曲線外邊之軸承上之壓力較大。

習　題

1. 在第 116 節習題 1 內，一雙 33〔吋〕之鑄鐵車輪重 700〔磅〕，設其關於轉軸之慣矩爲 6.99. 設一車以 45〔哩/時〕之速率在 6° 曲線上行駛。試求因迴轉運動而在外軌上所產生之額外壓力。兩軌道中心間之距離爲 4.9〔呎〕。

答：對於每雙車輪爲 4.7〔磅〕.

2. 試說明自動車發動機之飛輪，在(1)向右曲線及在(2)向左曲線之迴轉作用。　答：(1)後軸承上壓力較大.

3. 從上向下看，可以看到普通之陀螺以順時針方向旋轉。設將此陀螺軸之頂端沿水平方向向北推動。試求其軸實際上向何方傾斜，並說明之。

答：向東.

4. 設一飛機以極大之斜度俯衝，然後在一極短之曲線內改爲水平飛行。假定從後向前視之螺旋槳之旋轉方向，爲順時針方向。試求其迴轉作用。

答：左翼向前.

5. 一小迴轉器之輪，有一極重之輪緣，輪之總重爲 1〔磅〕，其迴轉半徑爲 2〔吋〕，關於其軸之轉速爲 600〔轉/分〕。若將其軸橫放，軸之一端支持於樞軸承上，整個輪與軸，可繞此樞軸進動。若樞軸與輪之重心間之距離爲 1.5〔吋〕。試求其進動速率。　答：2.77〔徑/秒〕.

6. 機車之一雙主動輪與軸，共重 4500〔磅〕，其直徑爲 6〔呎〕，迴轉半徑爲 2〔呎〕。試求機車以 60〔哩/時〕之速率在 4° 曲線上行駛時，因迴轉運動在軌道上產生之額外壓力。軌規爲 5〔呎〕。　答：202〔磅〕.

177. 水注之反力. 設有一截面積 A 之水注(water jet)，自一水箱之側面射出，如圖 464 所示，其水頭爲 h。則此水注之速度爲 $v=\sqrt{2gh}$。在離水箱前水之速度爲零，故在水注方向每〔秒〕之動量變化爲 Mv。其中 M 爲每〔秒〕內流出水之質量。$Mv=\dfrac{W}{g}v$，式中 W 爲每〔秒〕內流出之重量。若命 w 爲單位容積內水之重量，則 $W=wAv$，故得在每〔秒〕內動量之變化爲

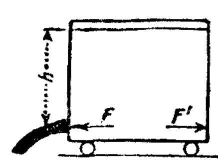


圖 464.

$$Mv=\frac{wAv^2}{g}$$

在時間 t 內動量之變化爲 $\dfrac{wAv^2}{g}t$，產生此項變化之衝量爲 Ft。

$$Ft = \frac{wAv^2}{g}t$$

$$F = \frac{wAv^2}{g} = 2wAh \qquad (17.6)$$

F' 為水對於水箱之反力，其大小與 F 相等，方向則相反． 若不用外力將此水箱抵住，此水箱將受力 F' 之影響向右移動．此原理應用於轉動澆草器(rotating lawn sprinkler)上．

習 題

1. 一立方形之容器，每邊長 1〔呎〕，重 7.5〔磅〕，其中以水裝滿，並懸於一繩上，使其懸點與重心相距 5〔呎〕。設有一水頭 6〔吋〕，直徑 $\frac{3}{4}$〔吋〕之水注，自其一面之中點射出，試求此時器之重心，與經過懸點之鉛直線間之距離。

答：0.164〔吋〕．

2. 試求將一救火用水管之噴嘴握住所需之力，噴嘴直徑為 1.5〔吋〕，射出時水頭為 150〔呎〕。 答：230〔磅〕．

178. 水注作用於葉板上之壓力． 假定一水注以垂直方向射於固定之平葉板上，如圖 465 所示． 則水注在原有方向之速度均變為零．若命 W 為每〔秒〕內所流出之水之重量，得在水注方向每〔秒〕內動量之變化為 Wv/g． 在時間 t 內動量之變化為 Wvt/g，此值必須等於支持葉板之力 F 之衝量． 故

$$Ft = \frac{Wv}{g}t = \frac{wAv^2}{g}t$$

$$F = \frac{Wv}{g} = \frac{wAv^2}{g} = 2wAh \qquad (17.7)$$

由此可見水注射於葉板上之壓力 $P = F/A$，等於其靜壓力 $P' = wh$ 之二倍，假定靜壓力之水頭 h，即為對應於同樣速度 v 之水頭．

假定葉板在與水注相同之方向上之速度為 v_1，如圖466所示．則

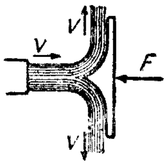


圖 465.

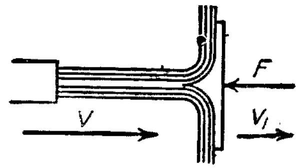


圖 466.

水與葉板之相對速度祇等於 $v-v_1$，故作用於葉板上之力，亦即與 F 鈞衡之力，僅爲 $\dfrac{wA(v-v_1)^2}{g}$。其功率或每〔秒〕內所作之功爲

$$U_1 = \frac{wA(v-v_1)^2}{g}v_1$$

$$= \frac{wA}{g}(v^2v_1 - 2vv_1^2 + v_1^3) \qquad (17.8)$$

欲求得產生極大功率時之 v_1 與 v 之關係，祇須將 U_1 對於 v_1 之一次導數等於零：

$$\frac{dU_1}{dv_1} = \frac{wA}{g}(v^2 - 4vv_1 + 3v_1^2)$$

當 U_1 爲極大時，

$$v^2 - 4vv_1 + 3v_1^2 = 0$$

$$v_1 = \frac{v}{3} \qquad (17.9)$$

其另一值爲 $v_1 = v$，此爲極小功率之值，而此極小功率爲零。

設水注沿切線方向射於一曲線葉板上，使其方向轉過 θ 角，如圖 467 所示。若不計摩擦力，則水注在切線方向，離開葉板 B 端之速率，卽等於其射入 A 端之速率。若以適當之比例尺，作矢量 OC 代表在點 A 之速度，作矢量 OD 代表在點 B 之速度。則矢量 CD 代表水注速度之矢

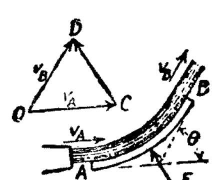


圖 467.

量變化．若命 W 爲每〔秒〕內流過之水之重量．則在時間 t 內動量之矢量變化爲

$$\frac{W}{g}\overline{CD}\,t = \frac{W}{g}2v\sin\frac{\theta}{2}\,t$$

其方向卽爲 CD 之方向．據(17.1 b)式可知此值必等於 Ft．欲將葉板抵住，而不爲水注衝去，所需之合力爲

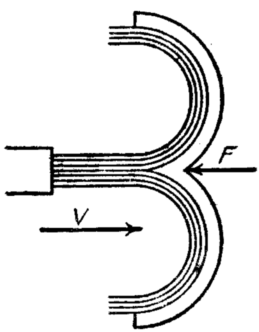


圖 468.

$$F = \frac{W}{g}2v\sin\frac{\theta}{2}$$

$$F = 2\frac{wAv^2}{g}\sin\frac{\theta}{2} \qquad (17.10)$$

若 θ 角爲 180°，如圖468 所示，則此合力之值爲

$$F = 2\frac{wAv^2}{g} \qquad (17.10a)$$

設葉板在水注方向，以速度 v_1 後退時，則作用於葉板上之力爲

$$F = 2\frac{wA(v-v_1)^2}{g} \qquad (17.10b)$$

其功率爲

$$U_1 = 2\frac{wA(v-v_1)^2}{g}v_1 \qquad (17.11)$$

在 $v_1 = v/3$ 時，其功率爲極大，其證明與(17.8)式者同．

習　題

1. 設有一與水注垂直之平葉板，試求水注直徑爲 2〔吋〕，水頭爲 100〔呎〕時，作用於平葉板上之力．　答：272〔磅〕．

2. 設水以速度 120〔呎/秒〕，自一直徑 1.5〔吋〕之救火用水管之噴嘴射出，一平葉板以 20〔呎/秒〕之速度，向水注移動，試求作用於平葉板上之力．　答：466〔磅〕．

3. 一水注之直徑爲 2〔吋〕，速度爲 180〔呎/秒〕，射於與水注同方向之移動平葉板上。試求平葉板之速率爲 40〔呎/秒〕；60〔呎/秒〕；80〔呎/秒〕時，作用於平葉板上之力及功率。

答：830〔磅〕；33,200〔呎·磅/秒〕；610〔磅〕；36,600〔呎·磅/秒〕；424〔磅〕；33,900〔呎·磅/秒〕。

4. 有一直徑 1〔吋〕，水頭 600〔呎〕之水注，射於水輪之輪葉上。輪葉之形狀如圖 468 所示。若不計算損失，試求水輪所能產生之極大馬力。如從斗(bucket)之中心量起之輪之直徑爲 4〔呎〕，試求在極大馬力時之轉速。

答：43.3〔馬力〕；312〔轉/分〕。

179. 驟然衝量或碰撞. 一力之作用時間爲極短時之衝量，謂之**驟然衝量**(sudden impulse)或**碰撞**(impact)。例如鎚擊於釘上，鎗彈射於靶上，球棍擊於球上，若在未碰撞時，兩物體之質量中心在同一直線上運動，並若在碰撞時，兩物體間相互之力亦在此直線上，則此種碰撞，謂之**正對心撞**(direct central impact)，其餘情形之碰撞，謂之**斜撞**(oblique impact)。

爲簡單起見，假定相撞之物體爲兩圓球，如圖 469 所示。以速度 v_1 運動之質量 M_1，追上以速度 v_2 運動之質量 M_2，在兩物體剛相接觸時，其間之壓力爲零。如圖 469 (a) 所示。在一極短之時間內，兩物體之中心相接近，相接觸之處，因相互之壓力而產生形變。壓力爲極大時，形變亦爲極大，如圖 469 (b) 所示，此時兩物體之速度相等。設兩物體之彈性爲零，則其間之壓力，立即降低爲零，形變亦維持不變，兩物體併合，繼續以等速度 v 前進。據第 173 節之線動量不滅原理，得

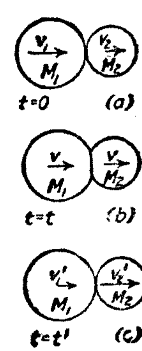


圖 469.

$$M_1v_1 + M_2v_2 = (M_1 + M_2)v \tag{17.12}$$

若兩物體略有彈性，則其間之壓力逐漸降低至零．原有之形狀，亦略能恢復．兩物體能相互分開，M_1 以速度 v_1' 運動，M_2 以速度 v_2' 運動，如圖 469 (c) 所示．據第 173 節，則在此情況中

$$(M_1 + M_2)v = M_1v_1' + M_2v_2' \qquad (17.13)$$

相撞後之第一時期（自 $t = 0$，至 $t = t$，亦卽自圖 469 (a) 至圖 469 (b) 之時期），謂之**壓縮時期**(period of compression)．其第二時期（自 $t = t$，至 $t = t'$，亦卽自圖 469 (b) 至圖 469 (c) 之時期），謂之**恢復時期**(period of restitution)．

據 (17.12)，(17.13) 兩式，得碰撞前之動量和，等於碰撞後之動量和：

$$M_1v_1 + M_2v_2 = M_1v_1' + M_2v_2' \qquad (17.14)$$

v_1 之方向，通常視為正向，若 v_2 在 v_1 之反方向，則為負值，據 v_1' 及 v_2' 之正負，可以決定其方向．

若據 (17.14) 式，乘以 g 值，則得

$$W_1v_1 + W_2v_2 = W_1v_1' + W_2v_2' \qquad (17.14a)$$

相撞前兩物體之相對速度為 $v_1 - v_2$，相撞後之相對速度為 $v_2 - v_1$．但因自然界物體無具有完全彈性者，故相撞後之相對速度，小於相撞前之相對速度，其比值謂之**恢復係數**(coefficient of restitution)，通常以 e 表示之．

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

上式亦可以書作

$$e(v_1 - v_2) = v_2' - v_1' \qquad (17.15)$$

毫無彈性之物體之 e 為零，完全彈性之物體之 e 為 1．下表為據實驗上所得數種材料之 e 之值．

材料	e	材料	e
玻璃…………	0.95	鑄鐵…………	0.50
象牙…………	0.89	鉛…………	0.15
鋼…………	0.55		

設有一物體自由落下，擊於固定之底座上，則 $v_2 = 0, v_2' = 0$，故(17.15)式簡化為

$$ev_1 = -v_1' \tag{17.15a}$$

若命 h 為自由落下之高度，h' 為回跳 (rebound) 之高度。因$v = \sqrt{2gh}$，故得

$$e\sqrt{2gh} = -\sqrt{2gh'}$$

$$e^2h = h' \tag{17.16}$$

若自兩物體之初動能和，減去終動能和，即得因碰撞而化為熱能之動能之損失。

假定兩物體之碰撞為斜撞。則每個物體之速度，可分解為兩分矢：一沿兩物體之中心線，一與中心線垂直。後者並不受碰撞之影響，前者之變化與正對心撞速度之變化相同。若再將終分矢合併，即得末速度。

例題 1

一無彈性之物體，重 5〔磅〕，速度為 10〔呎/秒〕，與另一個重 2〔磅〕並以 6〔呎/秒〕之速度在反方向運動之物體相撞。試求兩物體之終速度，及因碰撞而損失之動能。

【解】 因

$$W_1v_1 + W_2v_2 = (W_1 + W_2)v$$

$$(5 \times 10) - (2 \times 6) = (5 + 2)v$$

$$v = 5.43〔呎/秒〕$$

$$(K.E.)_i = \left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{32.2} \times 100\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{32.2} \times 36\right) = 8.88 \text{〔呎·磅〕}$$

$$(K.E.)_f = \frac{1}{2} \times \frac{7}{32.2} \times 5.43^2 = 3.21 \text{〔呎·磅〕}$$

動能之損失 $= 8.88 - 3.21 = 5.67$〔呎·磅〕.

例 題 2

有一重 4〔磅〕之鋼鎚,以 12〔呎/秒〕之水平速度,擊於 10〔磅〕重之靜止鋼球上. 試求碰撞後兩物體之速度,及動能之損失.

【解】 命鎚之重量爲 W_1,球之重量爲 W_2, 自上表得 $e = 0.55$.

$$0.55\,(12 - 0) = v_2' - v_1' = 6.6$$

$$48 + 0 = 4v_1' + 10v'_2$$

$$v_1' = -1.29 \text{〔呎/秒〕}$$

$$v_2' = 5.31 \text{〔呎/秒〕}$$

球在鎚原有之運動方向擊出,鎚本身則確回.

$$(K.E.)_i = \frac{1}{2} \times \frac{4}{32.2} \times 144 = 8.95 \text{〔呎·磅〕}$$

$$\text{鎚之}(K.E.)_f = \frac{1}{2} \times \frac{4}{32.2} \times 1.29^2 = 0.10 \text{〔呎·磅〕}$$

$$\text{球之}(K.E.)_f = \frac{1}{2} \times \frac{10}{32.2} \times 5.31^2 = 4.39 \text{〔呎·磅〕}$$

$$\text{動能之損失} = 8.95 - 0.10 - 4.39 = 4.46 \text{〔呎·磅〕}$$

習 題

1. 有重 10〔磅〕之無彈性物體,以 8〔呎/秒〕之速度前進,追上另一個 15〔磅〕,並在同方向以 3〔呎/秒〕之速度前進之無彈性物體. 試求相撞後之終速度,及動能之損失. 答: 5〔呎/秒〕; 2.33〔呎·磅〕.

2. 有一重 20〔磅〕之無彈性之物體,以 30〔呎/秒〕之速度前進,擊於另一個重 25〔磅〕之靜止之無彈性物體上. 試求其終速度及動能之損失.

答: 13.33〔呎/秒〕; 156〔呎·磅〕.

3. 若在習題 2 內,25〔磅〕重之物體,以 30〔呎/秒〕之速度向另一物體運

動。試求其解。　　答：-3.33〔呎/秒〕；621〔呎·磅〕.

4. 有一回火鋼球，從2〔呎〕之高度落於一固定之回火鋼板上，其回跳之高度為1.98〔呎〕。試求 e 之値。　　答：0.995

5. 設有一重1〔磅〕之回火鋼鎚，擊於重0.2〔磅〕之靜止之回火鋼球上。設欲將此鋼球以200〔呎/秒〕之速度擊出。試求鋼鎚應有之速度，e 之値參見習題4.　　答：120.3〔呎/秒〕.

衝量，動量，與碰撞之總習題

1. 一貨車重60,000〔磅〕，從靜止狀態開始，沿1%之斜坡下行。設列車阻力為8〔磅/噸〕。試求其2〔分〕末之速度。　　答：23.18〔呎/秒〕.

2. 設習題1之列車阻力為 $8+0.01t$〔磅/噸〕，其中 t 之單位為〔秒〕. 試求在2〔分〕末之速度。　　答：22.02〔呎/秒〕.

3. 設習題1之列車，於2〔分〕末，用軔使車於15〔秒〕間停止。試求所需之軔力。　　答：3240〔磅〕.

4. 一來福槍重8〔磅〕，一重0.1〔英兩〕之子彈以2500〔呎/秒〕之速度自槍口射出。試求此槍之後坐速度。　　答：1.953〔呎/秒〕.

5. 有重300〔磅〕之推車，以12〔呎/秒〕之等速度前進。一人重160〔磅〕，自車之一邊上車，此人在車之運動方向之速度為零。試求此人對於車為靜止時之速度。　　答：7.83〔呎/秒〕.

6. 一礦用升降室重800〔磅〕，懸於重1200〔磅〕之起重機之鼓輪上。鼓輪之直徑為5〔呎〕，其迴轉半徑為2〔呎〕，若不計其軸摩擦，試求未用軔時任升降室自由落下，經3〔秒〕時升降室之速度。　　答：49.3〔呎/秒〕.

7. 設飛輪重420〔磅〕，直徑3〔呎〕，迴轉半徑1.2〔呎〕。若置於一15°之斜板上，任其自由滾下，試求在5〔秒〕末之線速度，及斜板作用於飛輪上之摩擦力。　　答：25.4〔呎/秒〕；42.5〔磅〕.

8. 有兩個直徑4〔吋〕之圓球，每一圓球上有經過球心之直徑為 $\frac{1}{2}$〔吋〕之孔，在一長2〔呎〕，直徑1/2〔吋〕之水平鋼桿上自由滑動。鋼桿之兩端有阻止物可使圓球不致滑出。鋼桿繞着經過其中心之鉛直軸自由轉動，起始時兩圓

球之中心與軸相距 3〔吋〕,並隨鋼桿以 360〔轉/分〕之轉速繞鉛直軸旋轉。若將在鋼桿上之圓球釋放，試求此兩球與鋼桿兩端阻止物相擊時之轉速，及動能之損失。 桿端之阻止物與轉動之鉛直軸之質量均不計。

答: 49.2〔轉/分〕; 32.4〔呎·磅〕.

9. 一雙機車主動輪之直徑為 6〔呎〕, 重 6000〔磅〕, 迴轉半徑 2.5〔呎〕, 試求車以 45〔哩/時〕之速率在 8° 曲線上前進時，外軌對於車輪因迴轉作用而額外產生之力。 兩軌道中心間之距離為 60〔吋〕,外軌之超高度不計算在內。

答: 472〔磅〕

10. 一迴轉器有一重 16〔磅〕之圓形輪緣,裝於一直徑 28〔吋〕之自行車輪上。此輪聯接於長 3〔呎〕之水平軸之一端，水平軸之中點支於一樞軸上，故能在任何方向自由轉動。 若自樞軸向着車輪看去，車輪繞其軸以 800〔轉/分〕之轉速在順時針方向轉動。 試求進動之方向及角速度。

答: 反時針方向; $\omega' = 0.425$〔弳/秒〕.

11. 試討論一船在波浪上前後搖動時，其螺旋槳之迴轉作用。

12. 假定自後向前視時，一飛機之螺旋槳在順時針方向轉動。 試說明飛機向左急轉時，其頭部即須舉起。 又飛機在鉛直迴綫飛行(vertical loop)時，其頭部向右轉。

13. 在飛機之某種試飛中，須將其發動機之節氣瓣(throttle)開足。 自一極高之高度俯衝，使飛機到達其極限之速度。 然後再沿一極短之曲線拉平(pull out)(1)使法線加速度 $a_n = 9g$。 若速率為 300〔哩/時〕,試求所需之曲線半徑。 又若螺旋槳重 340〔磅〕, 慣矩為 8.19, 轉速為 1445〔轉/分〕, 試求其所產生之迴轉轉矩。

答: 670〔呎〕; 814〔磅·呎〕

14. 假定一橡皮球之恢復係數 $e = 0.9$, 設此球自 8〔呎〕之高度下落。 試求其回跳之高度。

答: 6.48〔呎〕

15. 一鑄鐵小圓球自 16〔吋〕之高度下落，擊於一鑄鐵塊上,其回跳之高度為 5.2〔吋〕,試求 e 之值。

答: $e = 0.57$

16. 有一重 100,000〔磅〕之車廂，其速度為 4〔哩/時〕,追上一重 80,000

---

(1) 拉平為航空上之專門名詞，意即將飛之操縱桿向後拉，使成水平飛行.

〔磅〕並速度爲 2〔哩/時〕之車廂，而與其相撞。設 $e=\frac{1}{4}$。試求動能之損失。

答；5450〔呎·磅〕.

17. 設於離地 5〔呎〕處，一球以 $60°$ 之仰角向相距 25〔呎〕之牆擲出，初速度爲 60〔呎/秒〕，球之 $e=0.4$. 試求此球在何處與地面相擊？ 又，相擊時之速度若何？ 答：與牆相距 29.9〔呎〕；$v=56.4$〔呎/秒〕；與鉛直線成 $12°20'$ 角.

18. 假定習題 7 之球，沿水平方向以同樣之速度擲出，但與牆成 $75°$ 之角。問此球在何處與牆相擊？何處與地面相擊？與地面相擊時之速度爲何？

答：沿牆 6.7〔呎〕，離地面 2.0〔呎〕；沿牆 8.65〔呎〕，離牆 2.9〔呎〕；$v=33.2$〔呎/秒〕；與地面成 $32°45'$ 角，與牆成 $56°10'$ 角.

附　　卷

第一章

靜力學

1. 贅餘結構與適堅結構. 平面桁架之最簡單者,係將三個構件用銷聯接而成之三角形桁架;如在此桁架上,再加上一個用銷聯接之接頭,必須加上兩個構件;若再加上兩個用銷聯接之接頭,必須加上四個構件,餘類推. 由此可見設有 j 個接頭之平面桁架,則 j 個接頭中最初三個接頭,祇須三個構件聯接之,其餘之 $(j-3)$ 個接頭,共需 $2(j-3)$ 個構件. 故得有 j 個接頭之平面桁架之構件數 n 為

$$n = 3 + 2(j-3) = 2j - 3 \tag{A1.1}$$

立體桁架之最簡單者,係將六個構件用銷聯接而成之四面形桁架(tetrahedron truss). 如果再增加一個接頭,必須增加三個構件,故得有 j 個接頭之空間桁架之構件數 n 為

$$n = 6 + 3(j-4) = 3j - 6 \tag{A1.2}$$

(A1.1)(A1.2)兩式,為構成平面桁架及立體桁架時,所需之最小限度之構件數,故此等構件謂之主要構件(essential member). 結構之構件總數,若少於其主要構件之件數時,則有載荷後,立即倒塌,若多於其主要構件之件數時,則成為**贅餘結構**(redundant structure)(見第一編第四章第34節).

桁架之構件數,適合於(A1.1)(A1.2)式後,未必盡能使結構成為**適堅結構**(just-stiff structure),尚須看所有之構件如何聯法,是否適當. 所謂適堅結構,即結構受到載荷後,不會倒塌,但亦須無贅餘構件者.

例如圖 A1 所示之兩平面結構(a),(b),其構件數 n 爲 9,其接頭數 j 爲 6,均適合於 (A1.1) 式,但祇有(a)爲適堅結構,結構(b)之左半部分之構件太多,成爲贅餘結構,右半部分則構件不足。

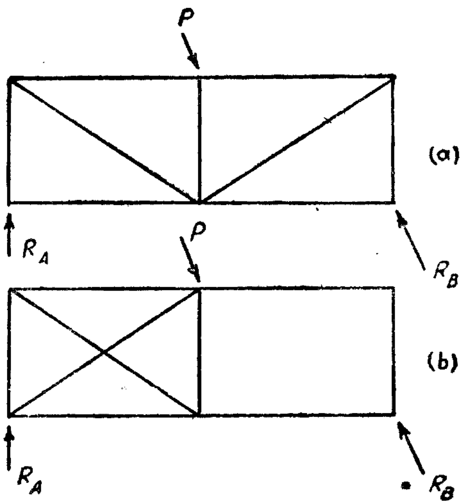


圖　A1

2. 適堅桁架之解法. 解適堅桁架之方法,普通所採用者,有下述數種:

(一)**接頭法**(method of joints)。 即將各個接頭,逐個作爲脫離體,再從平衡條件,求出各構件之內力。

(二)**截面法**(method of sections),又名**律透法**(Ritter's method). 此法即將桁架之構件切截,求所截構件之內力. 若祇須求得桁架之幾個構件內之內力,用此方法頗爲便利. 但所截之構件數,有一定之規定. 例如平面桁架,因共面非共點力系之平衡條件,祇有三個,(見第一編第四章第 38, 39 兩節). 換言之,即祇能求得三個未知量,故用截面法時,所截之構件數,不能超過三。

(三)**牽力係數法**(method of tension coefficients),**或沙士威法**(Southwell's method).

(四)**互換法**(method of interchange),**或韓乃伯法**(Henneberg's method).

上述之(一)(二)兩法,本書第一編第四章第40,41,兩節內,已有詳細說明,不復贅述.以下將(三),(四)兩法加以補充.

3. 牽力係數法. 上節所述之(一)(二)兩法,對於平面結構,頗爲有用,但於解析立體結構時,則不甚方便,且易致錯誤.本節內所討論之牽力係數法,爲解平面結構與立體結構之最簡單且最正確之方法.

命圖A2內之AB爲一立體結構之任一構件.更命T_{AB}爲此構件內之牽力,L_{AB}爲其長度.

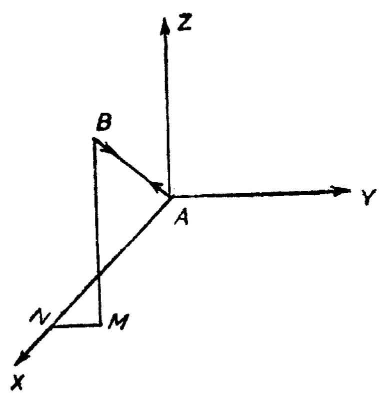


圖 A2.

此構件內之牽力,可以用下式表示之:

$$T_{AB}=L_{AB}t_{AB} \tag{A1.3}$$

上式之t_{AB},謂之**牽力係數**(tension coefficient).

經過點A,作互相垂直之軸AX,AY,AZ,並命A,B兩點,關於此三軸之坐標爲(x_A,y_A,z_A)及(x_B,y_B,z_B).

作用於點A之牽力T_{AB},在方向AX之分力爲

$$T_{AB}\cos BAX$$

即

$$T_{AB}\frac{x_B-x_A}{L_{AB}}$$

若將(A1.3)式代入上式，得

$$t_{AB}(x_B-x_A) \tag{A1.4}$$

同理，得 T_{AB} 沿 AY，AZ 方向之分力為

$$t_{AB}(y_B-y_A) \quad 及 \quad t_{AB}(z_B-z_A) \tag{A1.4a}$$

在構件之另一端 B，沿上述三軸之分力為：

$$t_{AB}(x_A-x_B)；\ t_{AB}(y_A-y_B)；\ t_{AB}(z_A-z_B) \tag{A1.5}$$

假定在一立體桁架之接頭 A 有構件 $AB, AC, \cdots AQ$，等，並假定作用於接頭 A 之外力沿上述三軸向之分力為 X_A, Y_A, Z_A，則以接頭 A 為脫離體，據平衡條件，得

$$\begin{cases} t_{AB}(x_B-x_A)+t_{AC}(x_C-x_A)+\cdots+t_{AQ}(x_Q-x_A)+X_A=0 \\ t_{AB}(y_B-y_A)+t_{AC}(y_C-y_A)+\cdots+t_{AQ}(y_Q-y_A)+Y_A=0 \\ t_{AB}(z_A-z_B)+t_{AC}(z_C-z_A)+\cdots+t_{AQ}(z_Q-z_A)+Z_A=0 \end{cases} \tag{A1.6}$$

對於桁架上任何一個接頭，均可有類似(A1.6)之三個方程式，在此等方程式內，(x_B-x_A)，(y_B-y_A)，$(z_B-z_A)\cdots$ 等，均代表各構件沿 X, Y, Z 三軸向之射影，故能自圖上量得其大小。t_{AB}，t_{AC}，⋯等，則為所欲求之未知量。

假定桁架有 n 個接頭，即有如(A1.6)式之 $3n$ 個方程式。 在此 $3n$ 個方程式內，假定有一式內含有 $t_{AB}(x_B-x_A)$ 項，則能有含有 $t_{AB}(x_A-x_B)$ 項之另一式。故若將 $3n$ 個方程式內，關於分力 X 之 n 個方程式相加，得

$$X_A+X_B+\cdots=0 \tag{A1.7}$$

同理，將關於 Y，與 Z 之各 n 個方程式相加，得

$$\begin{cases} Y_A+Y_B+\cdots=0 \\ Z_A+Z_B+\cdots=0 \end{cases} \tag{A1.7a}$$

(A1.7)及(A1.7a)式，爲將整個桁架當作脫離體之平衡方程式．換言之，卽作用於整個桁架上之外力，以及支座上之反力，沿 X Y，Z 三軸之分力和，將等於零。

若將(A1.6)之第一式乘 y_A，第二式乘 $-x_A$，相加得

$$t_{AB}(x_By_A-x_Ay_B)+t_{AC}(x_Cy_A-x_Ay_C)+\cdots$$
$$+t_{AQ}(x_Qy_A-x_Ay_Q)+X_Ay_A-Y_Ax_A=0 \qquad (A1.8)$$

對於其他各個接頭，亦可得類似(A1.8)之方程式． 若將此等方程式相加，得

$$(y_AX_A-x_AY_A)+(y_BX_B-x_BY_B)+\cdots=0 \quad (A1.9)$$

同理，可以求得

$$\left\{\begin{array}{l}(z_AY_A-y_AZ_A)+(z_BY_B-y_BZ_B)+\cdots=0\\(x_AZ_A-z_AX_A)+(x_BZ_B-z_BX_B)+\cdots=0\end{array}\right. \quad (A1.9a)$$

(A1.9)及(A1.9a)式，亦爲將整個桁架當作脫離體之平衡方程式。換言之，卽作用於其上之外力以及支座上之反力，沿 X,Y,Z，三軸之分力矩和，必等於零．

若立體桁架之反力，共有六個分力。假定其爲 X_A,Y_A,Z_A,X_B,Y_B,Z_B，據(A1.7)(A1.7a)(A1.9)(A1.9a)式，可以求得此等反力之值。

求得各反力之值後，再據(A1.6)及類似(A1.6)之 $3n$ 個方程式，求得各牽力係數之值。解此等之聯立方程式，並不困難，因每一方程式內，並非含有全部之牽力係數．求得牽力係數後，若乘以對應構件之長度，卽可得在各構件內之牽力。 例如

$$T_{AB}=t_{AB}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} \quad (A1.10)$$

若所得牽力係數之值爲正，則在構件內之內力爲牽力，若牽力係數爲負，則在構件內之內力爲壓縮力。

例題 1

試求圖 A3 所示伸臂桁架各構件之內力。

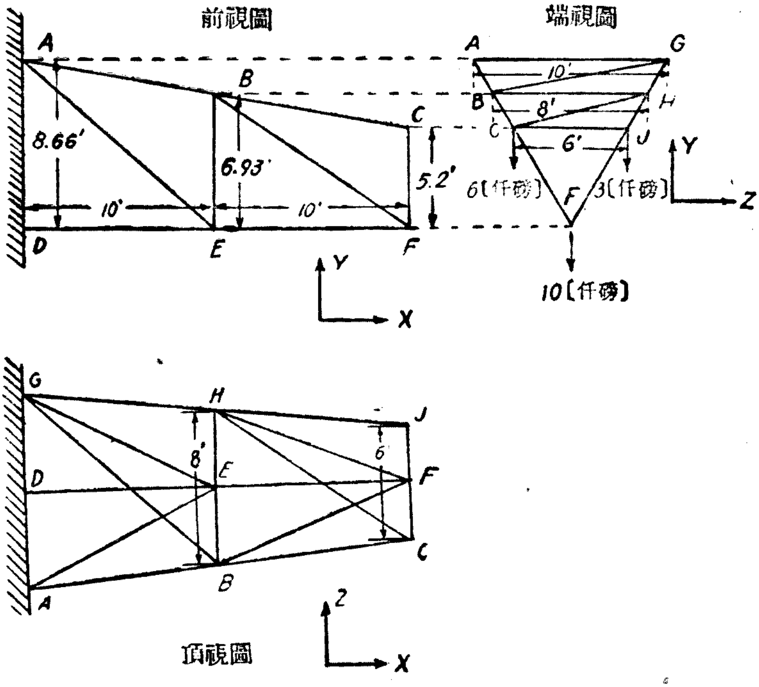


圖　A3.

【解】 將 B,C,E,F,H,J 六個接頭聯到牆上，每一個接頭，需要三個構件,方能適堅。 六個接頭,共需 18 個構件(見圖 A3)。

先從點 F 開始。聯接至點 F 之構件,有 FE,FC,FJ,FH,FB。沿軸 X, FC,FJ 之射影為零,FE,FB,FH 之射影均為 -10. 故得

$$-10\,t_{FE} - 10\,t_{FB} - 10\,t_{FH} = 0$$

沿軸 Y,FC,FJ 之射影為5.2;FB,FH 之射影為 6.93, FE 之射影為零。故得

$$5.2\,t_{FC} + 5.2\,t_{FJ} + 6.93\,t_{FB} + 6.93\,t_{FH} - 10 = 0$$

同理,據沿軸 Z 之射影,得

$$3\,t_{FJ} - 3\,t_{FC} + 4\,t_{FH} - 4\,t_{FB} = 0.$$

再據其他各個接頭，可以得到同樣之方程式。今將所有之方程式，列表於下.

接頭	軸	方程式
F	X	$-10\,t_{FE} - 10\,t_{FB} - 10\,t_{FH} = 0$
	Y	$5.2\,t_{FC} + 5.2\,t_{FJ} + 6.93\,t_{FB} + 6.93\,t_{FH} - 10 = 0$
	Z	$3\,t_{FJ} - 3\,t_{FC} + 4\,t_{FH} - 4t_{FB} = 0$
C	X	$-10\,t_{CB} - 10\,t_{CH} = 0$
	Y	$-5.2\,t_{CF} + 1.73\,t_{CB} + 1.73\,t_{CH} - 6 = 0$
	Z	$6\,t_{CJ} + 7\,t_{CH} - t_{CB} + 3\,t_{CF} = 0$
J	X	$-10\,t_{JH} = 0$
	Y	$1.73\,t_{JH} - 5.2\,t_{JF} - 3 = 0$
	Z	$-6\,t_{JC} + t_{JH} - 3\,t_{JF} = 0$
E	X	$10\,t_{EF} - 10\,t_{ED} - 10\,t_{EA} - 10\,t_{EG} = 0$
	Y	$6.93\,t_{FB} + 8.66\,t_{EA} + 6.93\,t_{EH} + 8.66\,t_{EG} = 0$
	Z	$4\,t_{EH} - 4\,t_{EB} + 5\,t_{EG} - 5\,t_{EA} = 0$
B	X	$10\,t_{BC} - 10\,t_{BA} - 10\,t_{BG} + 10\,t_{BF} = 0$
	Y	$-6.93\,t_{BE} + 1.73\,t_{BA} + 1.73\,t_{BG} - 1.73\,t_{BC} - 6.93\,t_{BF} = 0$
	Z	$8\,t_{BH} + 9\,t_{BG} + t_{BC} - t_{BA} + 4\,t_{BE} + 4\,t_{BF} = 0$
H	X	$10\,t_{HJ} - 10\,t_{HG} + 10\,t_{HC} + 10\,t_{HF} = 0$
	Y	$1.73\,t_{HG} - 1.73\,t_{HJ} - 1.73\,t_{HC} - 6.93\,t_{HE} - 6.93\,t_{HF} = 0$
	Z	$-8\,t_{HB} - 7\,t_{HC} - t_{HJ} + t_{HG} - 4\,t_{HF} - 4\,t_{HE} = 0$

從接頭 J 開始，據 JX 式(即在接頭 J 沿軸 X 之方程式)，得

$$t_{JH} = 0$$

將此值，代入 JY 式，得

$$t_{JF} = -0.576$$

代入 JZ 式，得

$$t_{JC} = 0.288$$

再取接頭 C，據 CX 及 CY 式，得

$$t_{CF} = -1.15$$

已知 t_{CF} 及 $t_{CJ} = t_{JC}$ 之值，據 CX，CZ 兩式，可以求得 t_{CH}，t_{CB} 之值。如繼續解其餘各式，可以求得其餘各牽力係數之值。現將計算結果，列表於下：

構件	牽力係數(t)	長度(L)	牽力(Lt) (單位〔仟磅〕)
FC	−1.15	6.0	− 6.9
FJ	−0.576	6.0	− 3.46
FB	1.59	12.8	20.3
FE	−2.75	10.0	−27.5
FH	1.16	12.8	14.85
CB	−0.215	10.2	− 2.19
CJ	0.288	6.0	1.73
CH	0.215	12.3	2.64
JH	0	10.3	0
EB	−1.194	8.0	− 9.55
ED	−4.4	10.0	−44.0
EA	0.961	14.14	13.60
EG	0.684	14.14	9.7
EH	0.86	8.0	− 7.08
BA	1.28	10.2	13.06
BG	0.133	13.56	1.80
BH	− 0.166	8.0	− 1.328
HG	1.375	10.2	14.02

例題 2

試求圖 A4 所示屋頂桁架之各構件內之牽力。

【解】 若將整個桁架作為脫離體，據 $\Sigma M_B = 0$，得

$$20\,C_Y = 10 + 12.5 - \frac{4.33}{2} - 4.33$$

或

$$C_Y = 0.8 \text{〔仟磅〕}$$

再據 $\Sigma F_X = 0$，$\Sigma F_Y = 0$，得

$$B_X = 1 \text{〔仟磅〕}$$

$$B_Y = 2.2 \text{〔仟磅〕。}$$

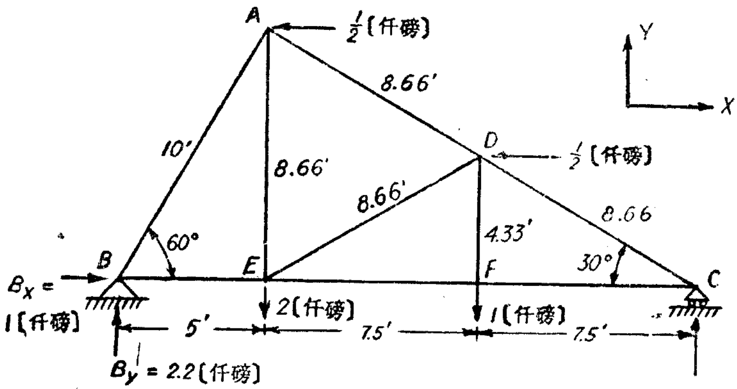


圖 A4.

在各個接頭所得之牽力係數方程式如下。

接頭	軸	方程式
C	X	$-7.5\ t_{CF} - 7.5\ t_{CD} = 0$
	Y	$4.33\ t_{CD} + 0.8 = 0$
F	X	$t_{FC} - t_{FE} = 0$
	Y	$4.33\ t_{FD} - 1 = 0$
D	X	$7.5\ t_{DC} - 7.5\ t_{DE} - 7.5\ t_{DA} - \frac{1}{2} = 0$
	Y	$-4.33\ (t_{DF} + t_{DC} + t_{DE} - t_{DA}) = 0$
A	X	$7.5\ t_{AD} - 5\ t_{AB} - \frac{1}{2} = 0$
	Y	$-8.66\ t_{AE} - 4.33\ t_{AD} - 8.66\ t_{AB} = 0$
B	X	$5\ t_{BE} + 5\ t_{BA} + 1 = 0$
	Y	$8.66\ t_{BA} + 2.2 = 0$
E	X	$7.5\ t_{EF} + 7.5\ t_{ED} - 5\ t_{EB} = 0$
	Y	$8.66\ t_{EA} + 4.33\ t_{ED} - 2 = 0.$

以上共有12個方程式，但祇有9個未知量，故9個方程式已經足够。其餘之3式，可用以覆核結果之是否正確。

計算之結果,列表如下。

構件	牽力係數(t)	長度(L)	牽力(Lt)(單位[仟磅])
CD	-0.1846	8.66	-1.6
CF	$+0.1846$	7.5	$+1.385$
FD	$+0.231$	4.33	$+1.000$
FE	$+0.1846$	7.5	$+1.385$
BA	-0.254	10.0	-2.54
BE	$+0.054$	5.0	$+0.27$
DE	-0.1488	8.66	-1.29
DA	-0.1025	8.66	-0.888
AE	$+0.305$	8.66	$+2.64$

若不先算出支座上之反力 B_X,B_Y,C_Y,則在接頭 B,C 之牽力係數方程式應改書如下:

接頭	軸	方程式
B	X	$5\,t_{BE} + 5\,t_{BA} + B_X = 0$
	Y	$8.66\,t_{BA} + B_Y = 0$
C	X	$-7.5\,t_{CF} - 7.5\,t_{CD} = 0$
	Z	$4.33\,t_{CD} + C_Y = 0$

將 B_X,B_Y,C_Y,視作未知量。故據 12 個方程式,可以求得 12 個未知量。

習題

1. 試求圖 $A5$ 所示桁架各構件內之牽力。

答: $AB = -5.0$[仟磅]; $CD = -7.96$[仟磅]; $BC = 7.10$[仟磅]; $DE = 11.07$[仟磅]; $AC = 0$; $CE = 5.99$[仟磅]; $BD = -15.95$[仟磅]; $DF = 24.20$[仟磅]。

2. 試求圖 $A6$ 所示桁架各構件之牽力。

答: $AB = 18.25$[仟磅]; $AC = -17.51$[仟磅]; $BC = -14.58$[仟磅]; $BD = 18.00$[仟磅]; $CD = 3.33$[仟磅]; $CE = -26.98$[仟磅]。

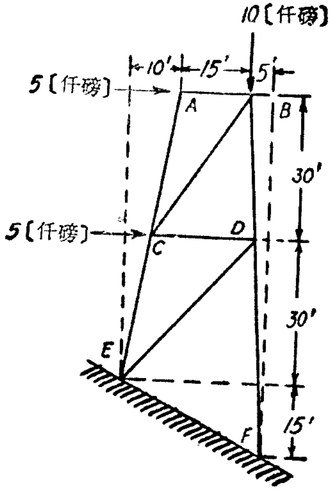


圖 A5.

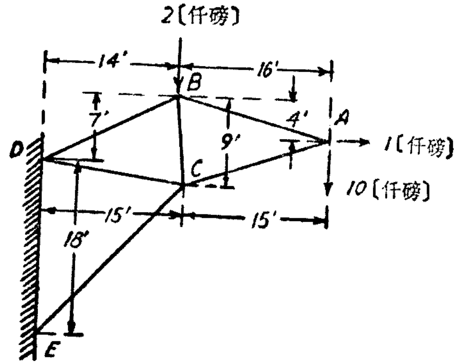


圖 A6.

4. 互換法. 互換法係根據重疊理論而導得,圖 A7 之(a)與(b)表示大小完全相同之兩桁架. 所不同者,即(a)之構件 BC, 在(b)內換以構件 AD.

假定桁架(b)之各構件內之牽力爲已知,命P爲構件 AD 內之牽力,Q,R,S,…等爲其餘各構件內之牽力. 利用桁架(b)之已知量,求桁架(a)各構件內之牽力.

假定將桁架 b 之 4〔仟磅〕外力除去,並在對角線 BC 方向,加上兩個大小相等,方向相反之**虛共線力**(fictitious collinear force)如桁架(c)所示. 若沿此對角線之虛共線力爲 1〔仟磅〕,求得在構件 AD 內之牽力 p,及在其餘各構件內之牽力 q,r,s,…等. 如虛共線力爲 T,則在 AD 內之牽力應等於 pT, 在其餘各構件內之牽力爲 qT,rT,sT,…等.

如將圖 A7(b)及(c)所示之兩種載荷重疊,即得在 AD 內之牽力

爲$P + pT$，在其餘各構件內之牽力爲$Q + qT, R + rT, S + sT$，一等。若在重疊後各構件內之牽力，即等於桁架(a)之各構件內之牽力。則

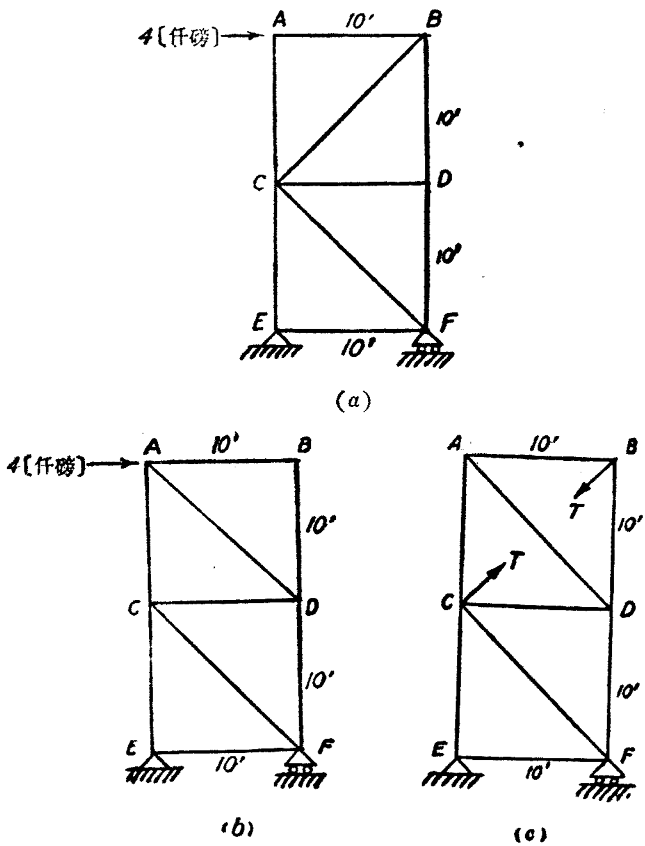


圖 A7.

$$P + pT = 0$$

即

$$T = -\frac{P}{p} \qquad \text{(A1,11)}$$

得在桁架(a)各構件內之牽力，應等於$Q - q\dfrac{P}{p}$，$R - r\dfrac{P}{p}$，$S -$

$s\frac{P}{p}$,…等.

在 $p=0$ 時,則求得各構件內之牽力,均等於無窮大。若 $p=P=0$,則得各構件內之牽力,均屬不定。 在此兩種情形中,互換法不能應用.

例題

設已知圖 A7 桁架(b)各構件內之牽力。 試用互換法,求桁架(a)各構件內之牽力。

【解】

構件	桁架(b)各構件內之已知牽力。	桁架(c)各構件內,因虛共線力而產生之牽力。	(b)與(c)之載荷重疊後,在各構件內之牽力。	桁架(a)各構件內之牽力。(單位〔仟磅〕)
AB	0	$-0.707T$	$-0.707T$	-4.00
AC	$+4.00$	$-0.707T$	$4-0.707T$	0
AD	-5.67	$+T$	$-5.67+T$	——
BC	——	$(+T)$	$(+T)$	5.67
BD	0	$-0.707T$	$-0.707T$	-4.00
CD	$+4.00$	$-0.707T$	$4.00-0.707T$	0
CE	$+8.00$	0	8.00	8.00
CF	-5.67	0	-5.67	-5.67
DF	-4.00	0	-4.00	-4.00
EF	$+4.00$	0	$+4.00$	$+4.00$

因桁架(a)無構件 AD,故上表中所示桁架(b)與(c)之載荷重疊後,在構件 AD 內之牽力,應等於零,故得

$$T=5.67\ \text{〔仟磅〕}.$$

故若將 T 之數值,代入上表第四行內,即得第五行所示在桁架(a)之構件內之牽力。 負號表示壓縮力。

5. 虛功原理。 當力 F_i 之作用點移動 ds 時,F_i 所作之功可用沿直角坐標之分矢表示之。命 $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ 為 F_i 之分矢,$dx, dy,$

dz，為 ds 之分矢，則得

$$dU = F_i\, ds \cos(F_i, ds)$$
$$= F_{x_i}\, dx + F_{y_i}\, dy + F_{z_i}\, dz \qquad (A1.12)$$

假定一質點，受到一可能微位移 δs，此位移謂之虛位移（virtual displacement）。作用於質點上之合力 R 因虛位移 δs 而作之功，謂之虛功（virtual work）。若命 R 之分矢為 R_x, R_y, R_z；δs 之分矢為 $\delta x, \delta y, \delta z$。故虛功為

$$\delta U = R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z \qquad (A1.13)$$

假定作用於質點上之外力為平衡，則 $R_x = R_y = R_z = 0$，故

$$\delta U = 0 \qquad (A1.14)$$

反之，設有作用於一質點上之諸力之虛功之代數和為零，此等之力必成平衡。

假定有 n 個質點所成之一質點系平衡，則此質點系內作用於每一個質點上之力必須平衡。作用於每質點上之力，包括外力及各點間之反力。若命 R_i 為作用於質點之外力之合力，N_i 為作用於此質點上之反力之合力，δs_i 為其虛位移，故據(A1.14)式，得

$$R_i\, \delta s_i \cos(R_i, \delta s_i) + N_i\, \delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) = 0$$

對於整個質點系而言，

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i\, ds_i \cos(R_i, \delta s_i) + \sum_{i=1}^{i=n} N_i\, \delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) = 0$$

假定各質點之虛位移，合乎其各種之約束（constraints），則

$$\sum_{i=1}^{i=n} N_i\, \delta s_i \cos(N_i, \delta s_i) = 0.$$

故得

$$\sum_{i=1}^{i=n} R_i\, \delta s_i \cos(R_i, \delta s_i) = 0 \qquad (A1.15)$$

故若一質點系在平衡時，使其各質點產生合乎約束之虛位移，則各

外力所作之虛功之代數和，必等於零。此卽爲質點系之**虛功原理**。

反之，若予一質點系以合乎約束之虛位移時，設各外力所作之虛功之代數和爲零，則此質點系必爲平衡。

例　題　1

假設有一長 l 重 W 之桿，其 A 端置於一光滑之水平地面上，B 端靠於一光滑之鉛直牆上。試求桿與地面成 θ 角時，使桿不滑下所需作用於點 A 之水平力 P (圖 A8)。

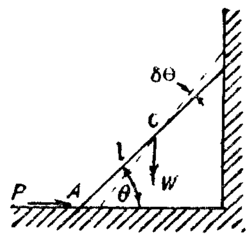


圖　A8.

【解】　假定使 θ 角增加 $\delta\theta$，則點 A 之虛位移爲

$$\left| l\cos(\theta+\delta\theta) - l\cos\theta \right| = l\sin\theta\,\delta\theta$$

重心 C 之鉛直方向之虛位移爲

$$\left| \frac{l}{2}\sin(\theta + \delta\theta) - \frac{l}{2}\sin\theta \right| = \frac{l}{2}\cos\theta\,\delta\theta$$

在 A，B 兩點作用於桿上之反力，與虛位移方向垂直，故其虛功爲零。據虛功原理得

$$P\,l\sin\theta\,\delta\theta - W\frac{l}{2}\cos\theta\,\delta\theta = 0$$

故

$$P = \frac{W}{2}\cot\theta$$

例　題　2

利用槓桿 HKL 及桿系 EF，FG，KF 將一小球在 AB，CD 兩板內壓緊，如圖 A9 所示。試求圖上所示 θ，φ，ψ 角之位置時，作用於槓桿 HKL 上並與其垂直之力 P，與球上之壓縮力 Q 之比。

【解】　假定使角 θ 減小 $\delta\theta$。命 δs_e，δs_l 爲此桿系上 E 與 L 兩點之對應之虛位移。則據虛功原理，得

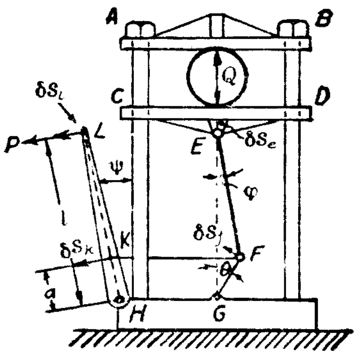


圖 A9.

$$P : Q = \delta s_e : \delta s_l$$

δs_e 與 δs_l 之比值，可以從圖上之幾何關係求得。若將 F 與 E 兩點之虛位移 δs_f，δs_e 投射於桿 EF 方向上，則因桿之長度不變，故其射影必須相等。即

$$\delta s_f \sin(\theta + \varphi) = \delta s_e \cos\varphi$$

同樣理由，F，K 兩點之虛位移 δs_f，δs_k 在水平方向之桿 FK 上之射影，亦必須相等。故得

$$\delta s_f \cos\theta = \delta s_k \cos\psi$$

K，L 兩點在同一橫桿上，其虛位移 δs_k，δs_l 之關係如下。

$$\delta s_l = \frac{l}{a}\,\delta s_k$$

據以上三式，得

$$\frac{\delta s_e}{\delta s_l} = \frac{a}{l}\,\frac{\cos\psi}{\cos\theta}\,\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}$$

故得

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{l}\,\frac{\cos\psi}{\cos\theta}\,\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{a}{l}\cos\psi\,(\tan\theta + \tan\varphi)$$

由上式，可知對於一定力 P，當 θ 與 φ 愈小時，壓縮力 Q 之值愈大。

習　題

1. 一梁置於半徑 r 之兩滾子上，用平行於斜面之力 P，將其沿斜面拉上。

假定在各接觸面間均無滑動，試求維持平衡時之力 P 之大小。 設梁之重量為 Q，每一滾子之重量為 W(見圖 A10)。 答：$P=(Q+W)\sin\alpha$

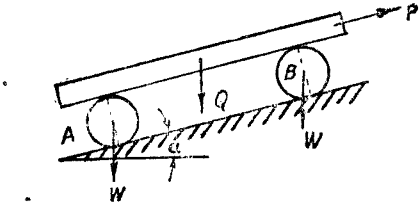


圖 A10.

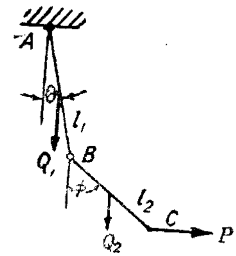


圖 A11.

2. 兩均質桿 AB, BC，長為 l_1 與 l_2，重量為 Q_1 與 Q_2，桿 AB 之 A 端，鉸在天花板上，B 端以鉸與桿 BC 相聯。水平力 P 作用於桿 BC 之點 C。試求平衡時 ϕ 與 θ 之值(見 A11圖)。 答：$\tan\phi=\dfrac{2P}{Q_2}$，$\tan\theta=\dfrac{P}{\dfrac{Q_1}{2}+Q_2}$

6. 慣橢面. 命 OL 為經過點 O 之任一線。α, β, γ 為此線對於 X, Y, Z 軸之方向餘弦。設有一物體之微質量 dm，位於坐標之 A (x,y,z) 點，(見圖 A12)，更命 r 為 O, A 兩點間之距離。ω 為 OA 與 OL 間之角。p 為點 A 與 OL 間之距離。點 B 為點 A 所引垂線 p 之垂足。故得：

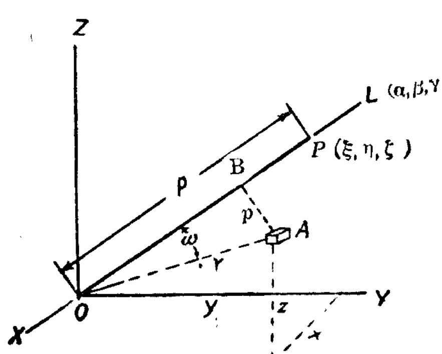


圖 A12.

$$p^2 = r^2 - \overline{OB}^2$$

又因 OA 之方向餘弦爲 $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$，故得

$$\cos\omega = \alpha\frac{x}{r} + \beta\frac{y}{r} + \gamma\frac{z}{r}$$

$$\overline{OB} = r\cos\omega = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

代入 p^2 式，得

$$\begin{aligned}
p^2 &= (x^2+y^2+z^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \\
&= \alpha^2(y^2+z^2)+\beta^2(z^2+x^2)+\gamma^2(x^2+y^2)-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha xz-2\alpha\beta xy
\end{aligned}$$

整個物體，關於線 OL 之慣矩爲

$$\begin{aligned}
I_L &= \int p^2\,dm \\
&= \alpha^2\int(y^2+z^2)\,dm+\beta^2\int(z^2+x^2)\,dm+\gamma^2\int(x^2+y^2)\,dm \\
&\qquad -2\beta\gamma\int yz\,dm-2\gamma\alpha\int zx\,dm-2\alpha\beta\int xy\,dm \\
&= A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta \qquad \text{(A1.16)}
\end{aligned}$$

上式中

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \int(y^2+z^2)dm = I_X \\
B &= \int(z^2+x^2)dm = I_Y \\
C &= \int(x^2+y^2)dm = I_Z \\
D &= \int yz\,dm = H_{YZ} \\
E &= \int zx\,dm = H_{ZX} \\
F &= \int xy\,dm = H_{XY}
\end{aligned}\right. \qquad \text{(A1.17)}$$

上式中 I_X, I_Y, I_Z 爲物體關於 X, Y, Z 三軸之慣矩, H_{YZ}, H_{ZX}, H_{XY} 爲其關於軸 Y, Z, 軸 Z, X, 軸 X, Y 之慣積.

若於 OL 線上取點 P, 命 OP 之長度爲 ϱ. P 之坐標爲 ξ, η, ς 故得

$$\xi = \varrho\alpha; \quad \eta = \varrho\beta; \quad \varsigma = \varrho\gamma \tag{A1.18}$$

假定 ϱ 適合於下式

$$I_L = \frac{M\lambda^4}{\varrho^2} \tag{A1.19}$$

式中 M 爲物體之質量, λ 爲一泛定長度, 代入(A1.16)式, 得

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\varsigma^2 - 2D\eta\varsigma - 2E\varsigma\xi - 2F\xi\eta = M\lambda^4 \tag{A1.20}$$

故得 $P(\xi, \eta, \varsigma)$ 之軌跡, 爲一**有心二次錐面**(central conicoid). 又因慣矩 A, B, C 之值, 均爲正數, ϱ 之值必爲一正實數. 故此有心之二次錐面, 必爲一橢面(ellipsoid), 故謂之**慣橢面**(ellipsoid of inertia), 或**矩橢面**(momental ellipsoid).

7. 慣橢面之主軸及主慣矩. 命

$$\varphi(\xi, \eta, \varsigma) = 0 \tag{A1.21}$$

爲慣橢面方程式. 此橢面之法線之方向餘弦, 與

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}$$

成正比. 其矢徑(radius vector)之方向餘弦, 與 ξ, η, ς 成正比. 沿橢面對稱軸之矢徑與表面法線之方向相同, 故

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}}{\xi} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}}{\eta} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varsigma}}{\varsigma} \tag{A1.22}$$

因

$$\varphi(\xi, \eta, \varsigma) = A\xi^2 + B\eta^2 + C\varsigma^2 - 2D\eta\varsigma - 2E\varsigma\xi - 2F\xi\eta - M\lambda^4 = 0 \tag{A1.21a}$$

微分之，代入(A1.22)式，得

$$\frac{A\xi-F\eta-E\varsigma}{\xi}=\frac{B\eta-D\varsigma-F\xi}{\eta}=\frac{C\varsigma-E\xi-D\eta}{\varsigma} \qquad \text{(A1.22a)}$$

若將上式之分子分母，均除以 ϱ，並自(A1,18)式，得

$$\frac{A\alpha-F\beta-E\gamma}{\alpha}=\frac{B\beta-D\gamma-F\alpha}{\beta}=\frac{C\gamma-E\alpha-D\beta}{\gamma}$$

$$=\frac{(A\alpha-F\beta-E\gamma)\alpha+(B\beta-D\gamma-F\alpha)\beta+(C\gamma-E\alpha-D\beta)\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta$$

$$=I_L$$

故

$$\left\{\begin{aligned}(A-I_L)\alpha-F\beta-E\gamma&=0\\-F\alpha+(B-I_L)\beta-D\gamma&=0\\-E\alpha-D\beta+(C-I_L)\gamma&=0\end{aligned}\right. \qquad \text{(A1,22b)}$$

因 α,β,γ 爲線 OL 之方向餘弦，其值不能同時均等於零，故(A1,22b)式之必要條件爲

$$\begin{vmatrix}A-I_L & -F & -E\\ -F & B-I_L & -D\\ -E & -D & C-I_L\end{vmatrix}=0 \qquad \text{(A1.23)}$$

(A1,23)式爲 I_L 之三次方程式。據此式可以求得 I_L 之三個值，A'，B'，C'，此三值卽爲物體關於點 O 之慣橢面之三對稱軸之慣矩。

若所取直角坐標之三軸，卽爲慣橢面之三個對稱軸。則(A1,20)式之 $\eta\varsigma,\varsigma\xi,\xi\eta$ 項，應等於零。A,B,C 之值，應等於 A',B',C'。故得

$$A'\xi^2+B'\eta^2+C'\varsigma^2=M\lambda^4 \qquad \text{(A1.20a)}$$

因此(A1,23)式，可以簡化爲

$$\begin{vmatrix} A'-I_L & 0 & 0 \\ 0 & B'-I_L & 0 \\ 0 & 0 & C'-I_L \end{vmatrix} = 0 \qquad (1A,23a)$$

卽

$$(A'-I_L)(B'-I_L)(C'-I_L)=0$$
$$I_L = A', B', C'$$

與慣橢面對稱軸符合之三直交軸，謂之主軸(見第一編第十章第 92 節)。 物體關於主軸之慣矩謂之主慣矩。 自(A1.19)式，可知 ϱ 爲極小時，I_L 爲極大。

習　題

有一 8〔吋〕× 4〔吋〕× 2〔吋〕之磚，試求其關於質量中心軸之慣橢面方程式。 假定 $\lambda = 1$〔吋〕。

【解】 圖 A13 表示磚之 X, Y, Z 軸。 O 爲其質量中心。

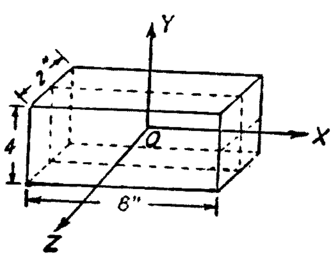


圖 A13.

$$A = I_X = \frac{M\lambda^4}{a} = \frac{M}{3}(2^2+1^2) = \frac{5}{3}M$$

$$B = I_Y = \frac{M\lambda^4}{b^2} = \frac{M}{3}(4^2+1^2) = \frac{17}{3}M$$

$$C = I_Z = \frac{M\lambda^4}{c^2} = \frac{M}{3}(4^2+2^2) = \frac{20}{3}M$$

$$D = E = F = 0$$

故得慣橢面方程式爲

$$\frac{5}{3}M\xi^2 + \frac{17}{3}M\eta^2 + \frac{20}{3}M\varsigma^2 = M$$

即

$$\frac{5}{3}\xi^2 + \frac{17}{3}\eta^2 + \frac{20}{3}\varsigma^2 = 1$$

此橢面之半軸,爲:

$$a = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.775\ [\text{吋}]$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{17}} = 0.420\ [\text{吋}]$$

$$c = \sqrt{\frac{3}{20}} = 0.388\ [\text{吋}].$$

習　題

1. 試求半軸爲 a, b, c 之橢圓體關於其質量中心之慣橢面方程式,$\lambda = 1$。

答:$(b^2 + c^2)\xi^2 + (c^2 + a^2)\eta^2 + (a^2 + b^2)\varsigma^2 = 5$

2. 試證明關於物體之任何點任何軸之慣橢面之

$$A + B + C,$$

$$AB + BC + CA - D^2 - E^2 - F^2,$$

$$ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2$$

必爲一正數。

8. 慣橢圓. 在二維問題中,慣橢面即變爲**慣橢圓**(ellipse of inertia),此時之(A1.16)(A1.20)兩式變爲

$$I_L = A\alpha^2 + B\beta^2 - 2F\alpha\beta = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + H_{xy}\alpha\beta \quad \text{(A1.16a)}$$

及

$$A\xi^2 + B\eta^2 - 2F\xi\eta = M\lambda^4 \quad \text{(A1.20a)}$$

如命 θ 爲 OL 與軸 X 間之角(圖 A14),則

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta$$

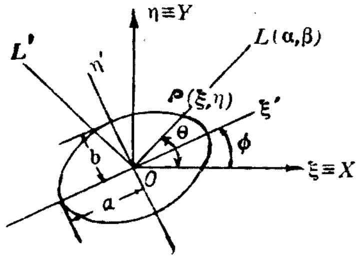


圖 A14.

則(A1.16a)式爲

$$I_L = I_X\cos^2\theta + I_Y\sin^2\theta - 2H_{XY}\sin\theta\cos\theta \tag{A1.24}$$

若取與 OL 垂直之 OL' 線,則

$$I_{L'} = I_X\cos^2(\theta+90°) + I_Y\sin^2(\theta+90°) - 2H_{XY}\sin(\theta+90°)\cos(\theta+90°)$$
$$= I_X\sin^2\theta + I_Y\cos^2\theta + 2H_{XY}\sin\theta\cos\theta \tag{A1.25}$$

將(A1.24)(A1.25)兩式相加,得

$$I_L + I_{L'} = I_X + I_Y \tag{A1.26}$$

(A1.26)式與第一編第十章第39節之(10.13)式,完全相同。

如將 ξ,η 兩軸,轉過 φ 角,至 ξ',η' 軸之位置時,則

$$\xi = \xi'\cos\varphi - \eta'\sin\varphi$$
$$\eta = \xi'\sin\varphi + \eta'\cos\varphi$$

代入(A1.20a)式,得

$$\begin{pmatrix} A\cos^2\varphi \\ -2F\sin\varphi\cos\varphi \\ +B\sin^2\varphi \end{pmatrix}\xi'^2 + \begin{pmatrix} -2A\sin\varphi\cos\varphi \\ -2F(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \\ +2B\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}\xi'\eta'$$
$$+\begin{pmatrix} A\sin^2\varphi \\ +2F\sin\varphi\cos\varphi \\ +B\cos^2\varphi \end{pmatrix}\eta'^2 = M\lambda^4 \tag{A1.27}$$

假定 ξ',η' 軸爲慣橢圓之主軸,則(A1.27)式內 ξ',η' 項之係數必等於零,即:

$$(B-A)\sin\varphi\cos\varphi-2F(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0$$

即
$$(B-A)\sin 2\varphi-2F\cos 2\varphi=0$$

$$\tan 2\varphi=\frac{2F}{B-A}=\frac{2H_{XY}}{I_X-I_Y} \qquad \text{(A1.28)}$$

(A1.28)式與第一編第十章第 92 節(10.17)式完全相同.

9. 迴轉橢面. 假定有 E_1,E_2 兩橢面,其方程式爲

E_1:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

E_2:
$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=g^4$$

以上兩橢面之兩對應半軸之積,等於常數 g^2. 故 E_1,E_2 兩橢面,謂之**倒橢面**(reciprocal ellipsoid)。

命 (x_0,y_0,z_0) 爲橢面 E_1 上之任一點。 在此點之切面方程式爲(見圖 A15):

$$\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{y\,y_0}{b^2}+\frac{z\,z_0}{c^2}=1$$

命 α,β,γ 爲此切面之法線之方向餘弦. 則

$$\frac{\alpha}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{\beta}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{\gamma}{\frac{z_0}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}$$

$$=\frac{a\alpha}{\frac{x_0}{a}}=\frac{b\beta}{\frac{y_0}{b}}=\frac{c\gamma}{\frac{z_0}{c}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a\alpha)^2+(b\beta)^2+(c\gamma)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}=\sqrt{(a\alpha)^2+(b\beta)^2+(c\gamma)^2}$$

自原點 O 至此切面之距離 p 爲

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}} = \sqrt{(a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (c\gamma)^2}$$

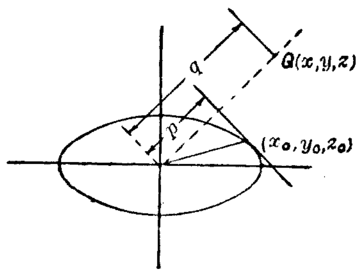


圖 A15.

假定在上述切面之法線上取點 $Q(x, y, z)$。Q 與原點間之距離 q,適合於下述之條件

$$pq = g^2 = \text{常數}$$

$$g^4 = p^2q^2 = q^2\ (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)$$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

故 Q 點之軌跡卽為倒橢面 E_2。

假定 X, Y, Z 三軸為在 O 點之慣橢圓之主軸,則據 (A1.20) 式得慣橢面方程式為

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M\lambda^4$$

其倒橢面方程式為

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \qquad \text{(A1,29)}$$

上式中假定 $\lambda = g$.

(A1,29)為**迴轉橢面**(ellipsoid of gyration)方程式。此橢圓之半軸

$$\sqrt{\frac{A}{M}} = k_x;\ \sqrt{\frac{B}{M}} = k_y;\ \sqrt{\frac{C}{M}} = k_z$$

卽等於物體關於此軸之迴轉半徑。

第二章

運動學

1. 平面運動之徑加速度及橫加速度. 假定 P 為平面 XY 上之一質點(圖 A16),其直角坐標為 (x, y),極坐標為 (ρ, θ),此兩組坐標間之關係為

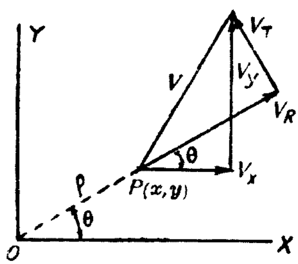


圖 A16.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \text{(A2.1)}$$

微分之,得質點 P 沿 X, Y 兩軸之分速度:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \cos\theta\,\dot{\rho} - \rho\sin\theta\,\dot{\theta} \\ v_y = \dot{y} = \sin\theta\,\dot{\rho} + \rho\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \qquad \text{(A2.2)}$$

徑速度(radial velocity) v_R, 橫速度(transverse velocity) v_T 與 v_x, v_y 間之關係,為(見圖 A16)

$$v_R = v_x \cos\theta + v_y \cos\theta$$

$$v_T = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$$

故得

$$\begin{cases} v_R = \cos^2\theta\,\dot{\rho} - \rho\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + \sin^2\theta\,\dot{\rho} + \rho\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta} = \dot{\rho} \\ v_T = -\sin\theta\cos\theta\,\dot{\rho} + \rho\sin^2\theta\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\,\dot{\rho} + \rho\cos^2\theta\,\dot{\theta} = \rho\,\dot{\theta} \end{cases}$$

(A2.3)

若將(A2.2)式再微分一次,得

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \ddot{\rho}\cos\theta - 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\rho\cos\theta - \ddot{\theta}\,\rho\sin\theta \\ a_y = \ddot{y} = \ddot{\rho}\sin\theta + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\rho\sin\theta + \ddot{\theta}\,\rho\cos\theta \end{cases} \qquad \text{(A2.4)}$$

徑加速度(radial acceleration) a_R, **橫加速度**(transverse acceleration) a_T 與 a_x, a_y 之關係，爲

$$\begin{cases} a_R = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta \\ a_T = -a_x \sin\theta + a_y \cos\theta \end{cases}$$

若將(A2.4)式代入上式，簡化之，得

$$\begin{cases} a_R = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = \ddot{\rho} - \rho\omega^2 \\ a_T = 2\,\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}(\rho^2\omega) \end{cases} \tag{A2.5}$$

設質點 P 之運動，爲以原點 O 爲中心之圓運動，則 ρ 爲一常數．此時 a_R 卽爲沿圓周之法線加速度，a_T 卽爲其切線加速度． 故據(A2.5)式，得

$$\begin{cases} a_R = -\rho\omega^2 \\ a_T = \rho\dfrac{d\omega}{dt} = \rho\alpha \end{cases} \tag{A2.5a}$$

a_R 之符號，以與原點相背者爲正，相向者爲負．a_T 之符號，以反時針方向者爲正，順時針方向者爲負．

(A2.5a)式與第十四章之(14.9)(14.8)兩式相同．

2. **對於動軸之運動；科賴奧來定律．** 假定質點 P，係沿着在平面 XY 上之某定曲線運動，同時平面 XY，繞着原點 O 轉動，如圖 A17 所示．X_0, Y_0 爲兩固定軸，點 P 關於轉動軸之坐標爲(x,y)，關於固定軸之坐標爲(x_0, y_0)． 因

$$\begin{cases} x_0 = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_0 = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{A2.6}$$

故得點 P 之絕對速度爲

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta - x\sin\theta\,\dot{\theta} - y\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_0 = \dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta + x\cos\theta\,\dot{\theta} - y\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \tag{A2.7}$$

假定 X, Y 軸固定不動，僅使點 P 在平面 XY 上運動，故在（A2.7）式內，命 $\dot{\theta} = \omega = 0$，得點 P 關於平面 XY 之相對速度之分矢如下：

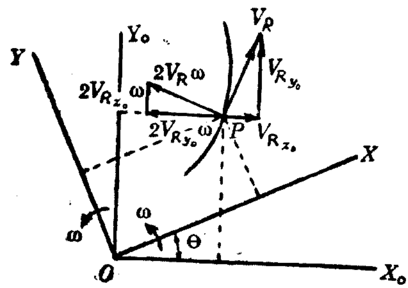


圖 A17.

$$\begin{cases} v_{Rx_0} = (\dot{x}_0)_1 = \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta \\ v_{Ry_0} = (\dot{y}_0)_1 = \dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta \end{cases} \tag{A2.7a}$$

假定點 P 在平面 XY 上之位置固定不變，僅使 XY 平面轉動，故在（A2.7）式內，命 $\dot{x} = \dot{y} = 0$，而得

$$\begin{cases} (\dot{x}_0)_2 = -x\sin\theta\,\dot{\theta} - y\cos\theta\,\dot{\theta} = -y_0\,\dot{\theta} \\ (\dot{y}_0)_2 = x\cos\theta\,\dot{\theta} - y\sin\theta\,\dot{\theta} = x_0\,\dot{\theta} \end{cases} \tag{A2.7b}$$

若將（A2.7a）（A2.7b）兩式代入（A2.7）式，得

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (\dot{x}_0)_1 + (\dot{x}_0)_2 \\ \dot{y}_0 = (\dot{y}_0)_1 + (\dot{y}_0)_2 \end{cases} \tag{A2.7c}$$

由此：可知假定有一質點在一曲線上運動，同時此曲線繞着一定點轉動，則此質點之絕對速度，為下述兩種速度之矢量和：

（一）假定曲線固定不動（亦即平面 XY 固定不動），質點在此曲線上之相對速度。

（二）假定質點在曲線上固定不動，但跟着曲線轉動而產生之速度。

若再將(A2.7)式微分一次，則得點 P 之絕對速度如下

$$\left\{\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= \ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta - 2\dot{x}\,\dot{\theta}\sin\theta - 2\dot{y}\,\dot{\theta}\cos\theta \\ &\quad - \dot{\theta}^2 x\cos\theta + \dot{\theta}^2 y\sin\theta - \ddot{\theta}\,x\sin\theta - \ddot{\theta}\,y\cos\theta \\ \ddot{y}_0 &= \ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta + 2\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta - 2\dot{y}\,\dot{\theta}\sin\theta \\ &\quad - \dot{\theta}^2 x\sin\theta - \dot{\theta}^2 y\cos\theta + \ddot{\theta}\,x\cos\theta - \ddot{\theta}\,y\sin\theta\end{aligned}\right. \tag{A2.8}$$

如將軸 X, Y 固定不動，僅使點 P 在此固定之平面 XY 上沿着一固定曲線運動，於是

$$\theta = \text{常數}$$

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

則(A2.8)式可以簡化為

$$\left\{\begin{aligned}(\ddot{x}_0)_1 &= \ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta \\ (\ddot{y}_0)_1 &= \ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta\end{aligned}\right. \tag{A2.8a}$$

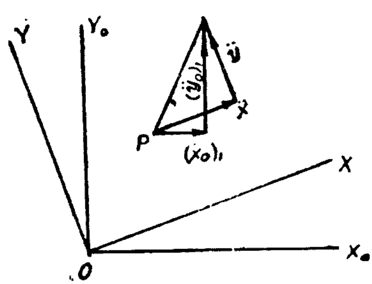


圖 A18.

$\ddot{x}, \ddot{y}$ 為點 P 對於軸 X, Y 之相對分加速度。 故據圖 A18 可知 $(\ddot{x}_0)_1, (\ddot{y}_0)_1$ 為相對加速度沿 X_0, Y_0 軸之分加速度。

如點 P 在平面 XY 上之位置，固定不動，僅使其跟着平面 XY 轉動。 是於：

$$x = \text{常數}, \quad y = \text{常數}$$

$$\dot{x} = \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = \ddot{y} = 0$$

則(A2.8)式可以簡化為

$$\left\{\begin{aligned}(\ddot{x}_0)_2 &= -(x\cos\theta - y\sin\theta)\dot{\theta}^2 - (x\sin\theta + y\cos\theta)\ddot{\theta}\\ &= -x_0\omega^2 - y_0\alpha\\ (\ddot{y}_0)_2 &= -(x\sin\theta + y\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (x\cos\theta - y\sin\theta)\ddot{\theta}\\ &= -y_0\omega^2 + x_0\alpha\end{aligned}\right. \qquad \text{(A2.8b)}$$

因點 P 在平面 XY 上之位置不變,換言之,即 OP 之距離 ρ 為一常數。點 P 僅跟着平面 XY,以點 O 為中心而轉動。故點 P 之運動為一圓運動。據(A2.5a)式,得此圓運動之法線加速度 $-\rho\omega^2$ 與切線加速度 $\rho\alpha$,如圖 A19 所示。故(A2.8b)式之 $(\ddot{x}_0)_1,(\ddot{y}_0)_1$ 為此兩加速度沿 X,Y 兩軸之分矢和。

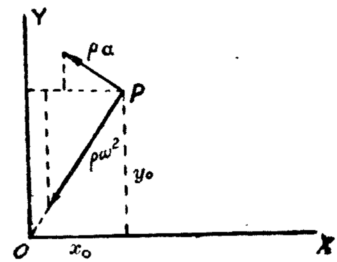


圖 A19

$\ddot{x}_0,\ddot{y}_0$ 內除 $(\ddot{x}_0)_1,(\ddot{y}_0)_1,(\ddot{x}_0)_2,(\ddot{y}_0)_2$ 外,尚有

$$\left\{\begin{aligned}(\ddot{x}_0)_3 &= -2(\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)\dot{\theta} = -2V_{Ry_0}\omega\\ (\ddot{y}_0)_3 &= 2(\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta)\dot{\theta} = 2V_{Rx_0}\omega\end{aligned}\right. \qquad \text{(A2.8c)}$$

據圖 A17,可知 $(\ddot{x}_0)_3,(\ddot{y}_0)_3$ 之合加速度之大小為 $2V_R\omega$,又因圖 A17 所示之速度三角形與加速度三角形相似,可知 $2V_R\omega$ 之方向與 V_R 之方向垂直。 若將 V_R 之方向,順着 ω 之轉動方向轉過 $90°$,即得 $2V_R\omega$ 之方向。 $2V_R\omega$ 謂之**科氏與來加速度**(Coriolis acceleration),或**輔助加速度**(supplementary acceleration)。

若將(A2.8a)(A2.8b)(A2.8c)式代入(A2.8)式,得

$$\left\{\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= (\ddot{x}_0)_1 + (\ddot{x}_0)_2 + (\ddot{x}_0)_3\\ \ddot{y}_0 &= (\ddot{y}_0)_1 + (\ddot{y}_0)_2 + (\ddot{y}_0)_3\end{aligned}\right. \qquad \text{(A2.9)}$$

據(A2.9)式,得**科氏與來定律**(Coriolis law)如下:

假定有一質點在一曲線上運動,同時此曲線繞着一定點運動,則此質點之加速度,為下述三種加速度之矢量和:

(一)假定曲線固定不動(即相當於將 XY 平面固定不動)，質點在此曲線上之相對運動之加速度．〔(A2.8a)式〕．

(二)假定質點在曲線上固定不動，但跟着曲線以角速度 $\omega = \dot{\theta}$，角加速度 $\alpha = \ddot{\theta}$ 轉動時，所產生之加速度．〔(A2.8b)式〕．

(三)科賴奧來加速度，其值等於質點對於曲線之相對速度 V_R 與曲線之角速度 ω (亦即為轉動平面之角速度)之積之二倍[1]．其方向與矢量 V_R 及矢量 ω 均垂直，等於將 V_R 之方向，順着 ω 之轉動方向，轉過 90°．

例　題　1

一輪 C 裝於點 E 之水平軸上，在輪上與軸心相距 2.5〔呎〕處有一極小之銷 P．一細直桿 D 之一端，以鉸固定於點 F，同時並擱於銷 P 上．當桿 D 在圖 A20 所示之位置時，輪之角速度為為 2〔弳/秒〕，在反時針方向，其角加速度為 3〔弳/秒²〕，在順時針方向．試求圖上所示位置之桿 D 之角速度及角加速度．桿 D 與銷 P 永遠保持接觸．

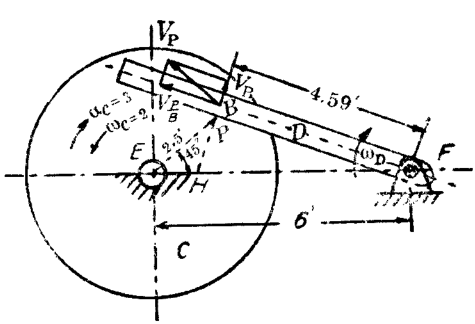


圖　A20.

(1)此處所討論之運動為平面運動，矢量 ω 之方向，與平面 X_oY_o 及 XY 平面均垂直，矢量 V_R 在平面 XY 內，故 ω 與 V_R 垂直，故科賴奧來加速度之值為 $2V_R\omega$，但在空間運動中，V_R 與 ω 兩矢量，未必互相垂直．此時科賴奧來加速度之值為 $2V_R\omega\sin\theta$，其中 θ 為 V_R 與 ω 兩矢量間之角，說明從略．

【解】

(a)角速度． 因桿 D 爲一細桿，故桿與銷 P 接觸之點 B，可以假定其與 P 相符合．

$$BF = \sqrt{6^2 + 2.5^2 - 2 \times 6 \times 2.5 \times \cos 45°} = 4.59 \text{〔呎〕}$$

在三角形 BEF 內

$$\frac{6}{\sin EBF} = \frac{4.59}{\sin 45°}$$

$$\angle EBF = 112°30'$$

$$\angle EBH = 112°30' - 90° = 22°30'$$

$$V_P = 2.5\omega = 2.5 \times 2 = 5 \text{〔呎/秒〕}$$

$$V_{\frac{P}{B}} = V_P \cos 22°30' = 5 \times 0.924 = 4.62 \text{〔呎/秒〕}$$

$$V_B = V_P \sin 22°30' = 5 \times 0.383 = 1.91 \text{〔呎/秒〕}$$

$$\omega_C = \frac{V_B}{4.59} = \frac{1.91}{4.59} = 0.416 \text{〔弳/秒〕}$$

(b)角加速度．

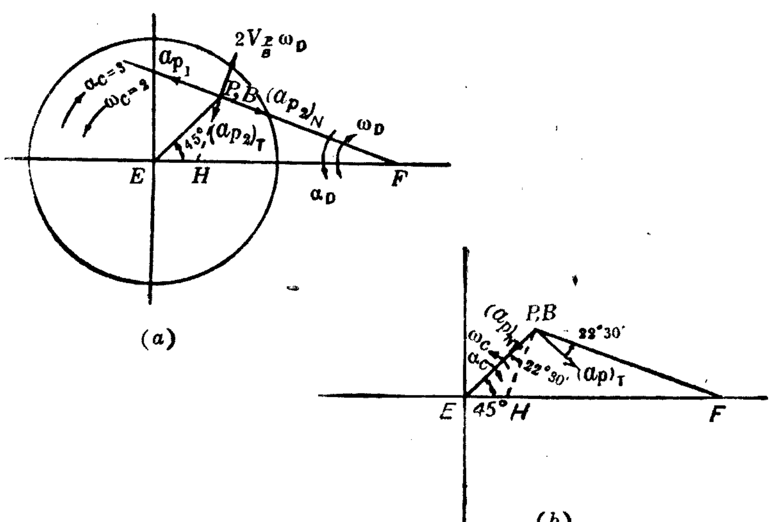


圖 A21.

今假定 FB 爲轉動平面上之一曲線，P 爲此曲線上之一動點．故點 P 之加速度，包括下述之三部分：

(一)假定線 FB 固定不動，點 P 在此線上運動之加速度 a_{P_1}.

(二)假定點 P 在線 BF 上之位置固定不動，但跟着線 FB 轉動而產生之加速度 a_{P_2}.

(三)科利奧來加速度，$a_{P_3} = 2V_{\frac{P}{B}}\omega_D$.

現將三部分之加速度，分述於後：

(一)因線 FB 假定爲固定不動，故點 P 沿此線之運動爲直線運動，其加速度 a_{P_1} 之方向，必沿 FB 線．

(二)因點 P 在 FB 線上之位置，固定不變，故點 P 之運動爲以 F 爲中心之圓運動．假定桿 D 之角加速度 α_D 在反時針方向(圖 $A21(a)$)，則 a_{P_2} 之切線加速度 $(a_{P_2})_T$ 爲

$$(a_{P_2})_T = \overline{BF} \cdot \alpha_D = 4.59\,\alpha_D$$

及法線加速度 $(a_{P_2})_N$ 爲

$$(a_{P_2})_N = \overline{BF}\,\omega_D{}^2 = 4.59 \times (0.416)^2 = 0.794\ [\text{呎/秒}^2]$$

(三)科利奧來加速度 a_{P_3},

$$a_{P_3} = 2\,V_{\frac{P}{B}}\,\omega_D = 2 \times 4.62 \times 0.416 = 3.84\ [\text{呎/秒}^2]$$

其方向與 BF 垂直，如圖 A21a 所示．

以上三加速度，在 BH 方向之分矢和爲

$$(a_{P_3})_R - 2V_{\frac{P}{B}}\,\omega_D = 4.59\,a_D - 3.84 \qquad \text{(a)}$$

但 P 爲輪 C 上之一點．因 $\omega_C = 2$ [弳/秒]，$\alpha_C = 3$ [弳/秒^2]．故得點 P 加速度之兩分矢 $(a_P)_N$，$(a_P)_T$ 爲(見圖 A21(b))

$$(a_P)_N = \overline{BE}\,\omega_C{}^2 = 2.5 \times (2)^2 = 10\ [\text{呎/秒}^2]$$

$$(a_P)_T = \overline{BE}\,\alpha_C = 2.5 \times 3 = 7.5\ [\text{呎/秒}^2]$$

故得 P 之加速度在 BH 方向之分矢爲

$$10\cos 22°30' + 7.5\sin 22°30'$$

$$= 10 \times 0.924 + 7.5 \times 0.383 = 12.11\ [\text{呎/秒}^2] \qquad \text{(b)}$$

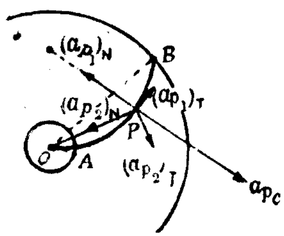
因(a) = (b)，故得

$$4.59\,a_D - 3.84 = 12.11$$

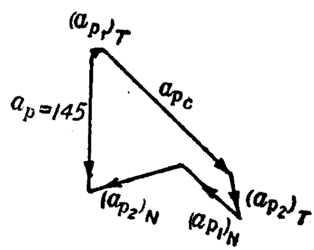
$$a_D = 3.48\ [\text{弳}/\text{秒}^2]$$

例 題 2

圖 A22(a)之弧 APB 代表一離心式泵之一輪葉. P 爲在此輪葉上之一水滴. 試求水滴 P 與軸心 O 相距 42〔吋〕時之加速度. 假定此時輪之角速度爲 10〔弳/秒〕,在順時針方向,其角加速度爲 50〔弳/秒²〕,亦在順時針方向.水滴沿輪葉之相對切線速度爲 10〔呎/秒〕,相對切線加速度爲 10〔呎/秒²〕. OB 與水平線成 40° 角,長 18〔吋〕. OA 爲 3〔吋〕, OP 爲 12〔吋〕. 圓弧 APB 之半徑長 $13\frac{1}{4}$〔吋〕.



(a)



(b)

圖 A22.

【解】

$$(a_P)_T = 10\ [\text{呎}/\text{秒}^2]$$

$$(a_{P_1})_N = \frac{V_R^2}{r'} = \frac{10^2}{\left(\frac{13\frac{1}{4}}{12}\right)} = 90.56\ [\text{呎}/\text{秒}^2]$$

$$(a_{P_2})_T = \alpha r = 50 \times \frac{12}{12} = 50\ [\text{呎}/\text{秒}]^2$$

$$(a_{P_2})_N = \omega^2 r = (10)^2 \times \frac{12}{12} = 100\ [\text{呎}/\text{秒}^2]$$

$$a_{P_3} = 2V_R\omega = 2 \times 10 \times 10 = 200\ [\text{呎}/\text{秒}^2]$$

據科賴奧來定律,則點 P 之加速度,爲 $(a_{P_1})_N, (a_{P_1})_T, (a_{P_2})_N, (a_{P_2})_T,$

a_{P_3} 之矢量和。據圖 A22(b) 所示之加速度多邊形，得點 P 之加速度為 145〔呎/秒〕^{2}。

習 題

1. 假定圖 A23 所示之桿 AB，以角速度 2〔弳/秒〕及角加速度 5〔弳/秒^2〕繞 YY 軸轉動。同時桿 CD 以相對於 AB 之等角速度 3〔弳/秒〕繞 $Y'Y'$ 軸轉動。試求 CD 與 AB 垂直時，C 與 D 之加速度。假定所有之角加速度與角速度均在順時針方向，且 $CB = BD = 1$〔呎〕。

答：$a_C = 19.8$〔呎/秒^2〕；$a_D = 35.1$〔呎/秒^2〕。

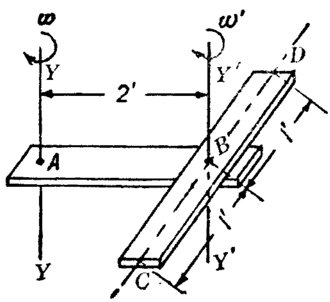


圖 A23.

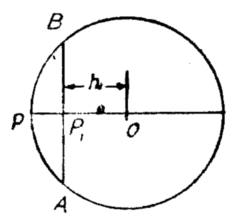


圖 A24.

2. 一質點 P 以相對之等速率 V_R 在一半徑 r 之圓盤邊上運動（圖 A24）同時圓盤以等角速度 ω 在反方向轉動。試求此質點之絕對加速度。

答：$\left(\frac{V_R}{r} - \omega\right)^2 r$

3. 一質點 P_1 以相對之等速度 V_R，沿圖 A24 所示圓盤之弦 AB 運動。同時圓盤以等角速度 ω 轉動。試求在圖上所示位置時，質點之絕對速度，及絕對加速度。假定質點之運動方向與圓盤之轉動方向相同。

答：$v = v_R + h\omega$，在切線方向；$a = \omega^2 h + 2v_R\omega$，向圓盤中心。

3. 質點之空間運動。 假定有一質點，沿空間之任何曲線運動。試求其沿曲線之切線，主法線(principal normal)及仲法線(bi-normal)之分加速度.

命 x,y,z 爲質點在時刻 t 之直角坐標，s 爲從某始點量起,沿着曲線所量得相當於時間 t 之距離. 故得此質點沿着軸 X,Y,Z 之分速度爲

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{ds}\dfrac{ds}{dt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{ds}\dfrac{ds}{dt} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dz}{ds}\dfrac{ds}{dt} \end{cases} \tag{A2.10}$$

再微分一次,得沿軸 X,Y,Z 之分加速度如如下:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{d^2x}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt}=\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2}{dt^2}+\dfrac{d^2z}{ds^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \end{cases} \tag{A2.11}$$

因切線之方向餘弦爲 $\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds},\dfrac{dz}{ds}$,故得沿切線之分加速度爲:

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{dt^2} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] \\ &\quad+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right] \end{aligned} \tag{A2.12}$$

因

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

微分之,得

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

代入(A2.12)式，得

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{A2.12a}$$

主法線之方向餘弦爲 $\varrho'\frac{d^2x}{ds^2}$, $\varrho'\frac{d^2y}{ds^2}$, $\varrho'\frac{d^2z}{ds^2}$，其中 ϱ' 爲曲率半徑.

故得沿主法線之分加速度爲

$$\begin{aligned} a_{N_1} &= \varrho'\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \varrho'\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \varrho'\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^2z}{dt^2} \\ &= \varrho'\frac{d^2s}{dt^2}\left[\frac{dx}{d}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right] \\ &\quad + \varrho'\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right] \\ &= \varrho'\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{1}{\varrho'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \end{aligned} \tag{A2.13}$$

仲法線之方向餘弦，與

$$\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},\quad \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2},\quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

成正比例. 故得沿仲法線之分加速度爲

$$a_{N_2} = \frac{\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}} \tag{A2.14}$$

若將(A2.11)式代入(A2.14)式，再簡化之，得

$$a_N = 0 \tag{A2.14a}$$

曲線某定點之切線與主法線所成之平面，謂之**曲線之密切面**(osculating plane). 據(A12.12a)(A2.13)(A2.14a)三式，可知沿一空間曲線之加速度，必在其密切面内.

第三章

動力學

1. 保守力系與非保守力系. 設有一力系作用於一物體上,物體因力系之作用,沿一閉合曲線運動. 若此物回至其原有位置時,力系之諸力所作之功之代數和爲零,則此力系謂之**保守力系**(conservative force system). 反之,若力系諸力所作之功之代數和,異於零時,則謂之**非保守力系**(nonconservative force system). 重力,繩之牽力,在絕對光滑之接觸面之反力,均屬保守力系.摩擦力,空氣阻力等均屬非保守力系.

設有一物體,因保守力系之作用,自位置 P 動至位置 Q,則此保守力系,自 P 至 Q 所作之功,與物體自 P 至 Q 所經之路線無關. 設命 PNQ 與 PMQ 爲自 P 至 Q 之任意兩路線(圖 A 25),據上述保守力系之定義得

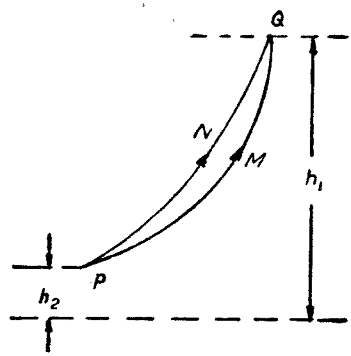


圖 A25.

$$\oint dW = 0 \tag{A3.1}$$

上式之'$\oint$'符號表示沿任意閉合曲線之**線積分**(line integral), dW 爲保守力系沿閉合曲線上一微線段所作之功. 若取閉合曲線 $PNQMP$,則據(A 3.1)式得

$$\int_{PMQ} dW + \int_{QNP} dW = 0$$

$$\int_{PMQ} dW - \int_{PNQ} dW = 0$$

即

$$\int_{PMQ} dW = \int_{PNQ} dW \tag{A3.2}$$

2. 勢理論. 命 F_x, F_y, F_z 為一保守力 F 沿 X, Y, Z 三軸之分力. 設此保守力係坐標 x, y, z 之函數.

$$F_x = f_1(x, y, z), \quad F_y = f_2(x, y, z), \quad F_z = f_3(x, y, z)$$

假定有一函數(x, y, z),適合於下述之條件:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_y, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -F_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -F_z \tag{A3.3}$$

則此函數 V 謂之勢函數(potential function),或簡稱為勢(potential).

力 F 沿微位移 ds 所作之功,為

$$\begin{aligned} dW &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz \\ &= -dV \end{aligned} \tag{A3.4}$$

上式中 dx, dy, dz 為 ds 沿 X, Y, Z 三軸之射影.

設有一物體自高度 h_1 之點 Q 沿 QMP 下落至高度 h_2 之點 P. 重力所作之功 W 即等於此物體之勢能之減小. 據(A3.4)式:

$$\int_0^W dW = \int_{V_Q}^{V_P} (-dV)$$

$$W = V_Q - V_P \tag{A3.4a}$$

在此情形中, V_Q 為物體在點 Q 之勢能, V_P 為物體在點 P 之勢能. 設已知在點 Q 之勢能,據(A3.2)式可知在點 P 之勢能亦為一定,

不隨自 Q 至 P 之路線而變.

一物體在平衡時,作用於此物體上之外力之合力必等於零.故

$$F_x = F_y = F_z = 0.$$

設上述之合力爲一保守力,則據(A3.3)式,得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{A3.5}$$

自微積分極大極小之條件,可見適合於(A3.5)式之函數 $V\ (x,y,z)$ 必爲極大或極小,換言之即一物體在平衡時,其勢函數必爲極大或極小.

反之,可證明:勢函數爲極大或極小時,物體必在平衡狀態.

3. **穩定平衡與不穩平衡.** 爲簡便起見,此處僅討論有一個自由度(degree of freedom)之物體.換言之,即討論之範圍,僅限於 V 對於 x 之變化.對於一般之情況,可以用推演法求得.

命 P 爲物體之平衡位置,據(A3.5)式,可知

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P = 0$$

與點 P 相距 dx 之點 Q 之勢函數 V_Q 爲

$$V_Q = V_P + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P dx + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P (dx)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_P (dx)^3 + \cdots$$

$$= V_P + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P (dx)^2 + \cdots \tag{A3.6}$$

因 dx 之值甚小,故

$$V_Q - V_P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P (dx)^2 \tag{A3.6a}$$

若 $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P > 0$,則 dx 之值無論爲正爲負,則

$$V_Q - V_P > 0 \tag{A3.6b}$$

在點 Q 之力 Fx 爲

$$Fx = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_Q = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P dx -$$

$$\cong -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P dx$$

因 $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P > 0$，據上式可知在點 Q 之力 F_x 與位移 dx 之符號相反。故假定物體自其平衡位置 P，移至一鄰近點 Q，在點 Q 之力，有使物體回至其原有位置之傾向。

由此可知在

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P > 0$$

時之平衡，爲**穩定平衡**(stable equilidrium)，此時之 V_P 爲極小。

同樣理由，可證明

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P < 0$$

時之平衡爲**不穩平衡**(unstable equilibrium)。此時之 V_P 爲極大。

例 題

有兩均質桿，每桿長 $2l$，重 w。兩桿之一端以光滑鉸相聯接，置於一半徑 a 之光滑圓柱上。假定此兩桿必須在與圓柱軸垂直之鉛直平面中，試求其平衡之位置，並說明此平衡位置是否穩定。

【解】 圖 A26 之 AB，BC 爲兩均質桿，O 爲圓柱之中心，B 爲聯接兩桿之光滑鉸。角 ABO 爲 α，OB 與鉛直線間之角爲 θ。

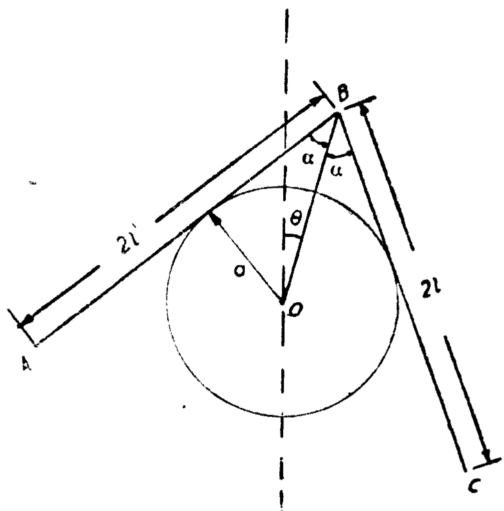


圖 A26.

AB 之重心比點 O 高 $[\overline{OB}\cos\theta - l\cos(\alpha+\theta)]$，$BC$ 之重心比點 O 高 $[\overline{OB}\cos\theta - l\cos(\alpha-\theta)]$。

故以經過點 O 之水平線爲基準线，兩桿之勢爲

$$V(\alpha,\theta) = W[\overline{OB}\cos\theta - l\cos(\alpha+\theta)] + W[\overline{OB}\cos\theta - l\cos(\alpha-\theta)]$$
$$= 2W(a\csc\alpha - l\cos\alpha)\cos\theta$$

兩桿在圓柱上不滑下之必要條件爲:

$$|\theta| < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$$

平衡之必要條件爲:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = 2W\left[l\sin\alpha - a\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\cos\theta = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 2W\left[l\cos\alpha - a\csc\alpha\right]\sin\theta = 0$$

因 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$，故在可能之平衡狀態之 α 與 θ，爲

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ f(\alpha) = l\sin^3\alpha - a\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

命 α_0 爲上述第二式之根:

$$f(\alpha_0) = l\sin^3\alpha_0 - a\cos\alpha_0 = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right]_{\substack{\Theta=0,\\ \alpha=\alpha_0}} = \left[2W\left(l\cos\alpha + a\frac{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^3\alpha}\right)\cos\Theta\right]_{\substack{\Theta=0\\ \alpha=\alpha_0}} > 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2}\right]_{\substack{\Theta=0,\\ \alpha=\alpha_0}} = \left[2W(l\cos\alpha - a\csc\alpha)\cos\Theta\right]_{\substack{\Theta=0,\\ \alpha=\alpha_0}}$$

$\left[\dfrac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2}\right]_{\substack{\Theta=0\\ \alpha=\alpha}}$ 爲正或爲負,全賴 $l\cos\alpha_0 - a\csc\alpha_0$ 爲正或負而定。但此値爲兩桿之重心與圓柱中心間之距離。

設兩桿之重心,低於圓柱中心,

$$l\cos\alpha_0 - a\csc\alpha_0 > 0$$

故對於變數 α 與 Θ 言,V 均爲極小。此時之平衡爲穩定平衡。

反之,若兩桿之重心,高於圓柱之中心,

$$l\cos\alpha - a\csc\alpha_0 < 0$$

V 有一極大,故平衡爲不穩定。

習 題

1 圖 A27 之 AB 爲一細桿,AOB 爲一重量等於零之細繩 O 爲一光滑之釘。試問 AB 在水平位置時,是否爲穩定平衡?

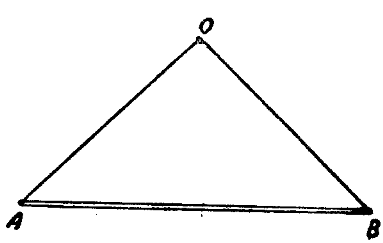


圖 A27.

2. 試說明圖 436 所示在圓柱頂之物體 A 是否穩定。A 與圓柱間之摩擦力爲零。

4. 臨界平衡與隨遇平衡. 假定在平衡狀態時

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_P \neq 0,$$

據(A3.6)式,得 dx 甚小時:

$$V_Q - V_P = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_P (dx)^3 \tag{A3.6c}$$

則此種平衡,謂之**臨界平衡**(critical equilibrium).

據(A3.6c)式,可知在經過點 P 時,$V_Q - V_P$ 變號,P 爲 V-x 曲線之拐點(point of inflection),故此時之平衡,仍爲不穩平衡.

若

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_P \neq 0,$$

則

$$V_Q - V_R = \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_P (dx)^4 \tag{A3.6d}$$

故在

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_P < 0 \text{ 時,爲不穩平衡.} \\ \left(\dfrac{\partial^4 V}{\partial x^4}\right)_P > 0 \text{ 時,爲穩定平衡.} \end{cases}$$

由此可知:若在點P之不等於零之偏導數屬奇階(odd order)者,則平衡爲不穩定;若屬偶階(even order)者,則其值正時爲穩定,負時爲不穩定.

又若各階之偏導數,均等於零,則據(A3.6)式,得

$$V_Q - V_P = 0 \tag{A3.6e}$$

則在 P 點之平衡,謂之**隨遇平衡**(neutral equilibrium).

5. 哈密爾敦原理. 命 x_i, y_i, z_i 爲微質量 m_i 之坐標, u_i, v_i, w_i, 爲其沿 X, Y, Z 三軸之分速度, $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$ 爲作用於質量 m_i 上之外力 F_i 沿三坐標軸之分力. 據牛頓之運動第二定律,得

$$\left\{\begin{aligned} m_i\frac{du_i}{dt} &= F_{x_i} \\ m_i\frac{dv_i}{dt} &= F_{y_i} \\ m_i\frac{dw_i}{dt} &= F_{z_i} \end{aligned}\right. \tag{A3.7}$$

假定質量 m_i 移動至 (x_i', y_i', z_i'), 在此點之分速度爲 u_i', v_i', w_i', 命

$$\left\{\begin{aligned} x_i' - x_i &= \delta x_i \\ y_i' - y_i &= \delta y_i \\ z_i' - z_i &= \delta z_i \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u_i' - u_i &= \delta u_i \\ v_i' - v_i &= \delta v_i \\ w_i' - w_i &= \delta w_i \end{aligned}\right.$$

據(A3.7)式,得

$$m_i\frac{du_i}{dt}\delta x_i + m_i\frac{dv_i}{dt}\delta y_i + m_i\frac{dw_i}{dt}\delta z_i = F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i$$

又因

$$\frac{du_i}{dt}\delta x_i = \frac{d}{dt}(u_i\delta x_i) - u_i\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \frac{d}{dt}(u_i\delta x_i) - u_i\delta u_i$$

同理

$$\frac{dv_i}{dt}\delta y_i = \frac{d}{dt}(v_i\delta y_i) - v_i\delta v_i$$

$$\frac{dw_i}{dt}\delta z_i = \frac{d}{dt}(w_i\delta z_i) - w_i\delta w_i$$

代入上式,得

$$\begin{aligned} &F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i \\ &= m_i\left[\frac{d}{dt}(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i\delta z_i) - (u_i\delta u_i + v_i\delta v_i + w_i\delta w_i)\right] \end{aligned}$$

此式祇對於微質量 m_i 有效。 故對於整個物體，得

$$\sum_{i=1}^{p}(F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} m_i\left[\frac{d}{dt}(u_i\delta x_i+v_i\delta y_i+w_i\delta z_i) - (u_i\delta u_i+v_i\delta v_i+w_i\delta w_i)\right] \tag{A3.8}$$

若命 T 爲整個物體之總動能，則

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)$$

故

$$\delta T = \sum_{i=1}^{p} m_i(u_i\delta u_i + v_i\delta v_i + w_i\delta w_i) \tag{A3.9}$$

今將外力系爲保守力系與非保守力系之兩種情況，分別討論。

情況 1. 保守力系.

外力系爲保守力系時，則有勢函數存在。 若命 V 爲物體在所設位置時之勢，V' 爲經過微位移後之勢。 據(A3.4)式，得

$$\delta V = V' - V$$

$$= -\delta W$$

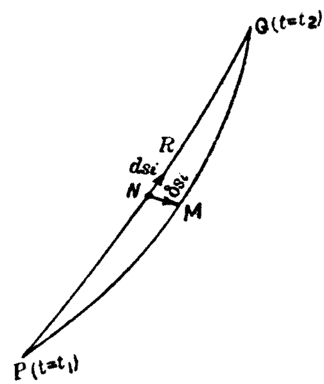


圖 A28

$$= -\sum_{i=1}^{p}[F_{x_i}\delta x_i + F_{y_i}\delta y_i + F_{z_i}\delta z_i] \tag{A3.10}$$

將(A3.9)(A3.10)兩式代入(A3.8)式，得

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{p} m_i(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i\delta z_i) = \delta(T - V) \tag{A3.11}$$

命 PNQ 爲質量 m_i 自時間 t_1 至 t_2 實際上所經過之路線，PMQ 爲在同一時間內假定物體所經過之虛路線（圖 A28）.N，M爲兩路

線上在同一時間之對應點。 命距離 NM 為

$$\delta s_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2 + (\delta z_i)^2}$$

在 $t = t_1$ 及 $t = t_2$ 時，$(\delta s_i)_1 = (\delta s_i)_2 = 0$,

$$(\delta x_i)_1 = (\delta y_i)_1 = (\delta z_i)_1 = (\delta x_i)_2 = (\delta y_i)_2 = (\delta z_i)_2 = 0 \qquad (A3.12)$$

N, R 為在實際路線上極鄰近之兩點。N 為質量 m_i 在時間 t 之位置，R 為 m_i 在時間 $(t + dt)$ 之位置。ds_i 為 NR 間之距離。

據(A3.11)式，得

$$\int_P^Q d\left[\sum_{i=1}^p m_i(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i d z_i)\right] = \int_{t_2}^{t_1} \delta(T - V)dt$$

據(A3.12)式所示在 P, Q 兩點之 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 之值，得

$$\int_P^Q d\left[\sum_{i=1}^p m_i(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i\delta z_i)\right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p m_i(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i\delta z_i)\right]_P^Q$$

$$= 0$$

故得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)\, dt = 0 \qquad (A3.13)$$

若命 $T - V = L$，則 L 謂之**關格倫日函數**(Lagrangian function)。 因

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (L' - L)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L'\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

$$= \delta\left[\int_{t_1}^{t_2} L\, dt\right]$$

代入(A3.13)式，得

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} L\, dt\right] = 0 \qquad (A3.13a)$$

據(A3.13a)式,可知物體沿其實際上所經路線之積分

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

必爲極大或極小. 此結論謂之**哈密爾敦原理**(Hamilton's principle).

情況 2. 非保守系.

設外力系爲非保守力系,則無勢函數 V 存在,故不能應用(A3.10)式,因此(A3.13)式必須改書爲

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T+\sum_{i=1}^{p}(F_{x_i}\delta x_i+F_{y_i}\delta y_i+F_{z_i}\delta z_i)\right]dt=0 \quad \text{(A3.13b)}$$

6. 廣義坐標. 命 $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n$,爲一組之量. 設已知此組之量之數値時,方能決定一物體之位置, 則此組之量謂之物體之**廣義坐標**(generalized coordinate).

假定 x,y,z 爲物體之一質點之直角坐標,則

$$\begin{cases} x=f(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\\ y=f_1(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\\ z=f_2(\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)\end{cases} \quad \text{(A3.14)}$$

微分之,得

$$\begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1+\dfrac{\partial f}{\partial\theta_2}\dot{\theta}_2+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial\theta_n}\dot{\theta}_n\\ \dot{y}=\dfrac{\partial f_1}{\partial\theta_1}\dot{\theta}_1+\dfrac{\partial f}{\partial\theta_2}\dot{\theta}_2+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial\theta_n}\dot{\theta}_n\\ \dot{z}=\dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\dot{\theta}_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_2}\dot{\theta}_2+\cdots+\dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_n}\dot{\theta}_n\end{cases} \quad \text{(A3.15)}$$

其中係數 $\dfrac{\partial f}{\partial\theta_1},\dfrac{\partial f}{\partial\theta_2},\cdots\dfrac{\partial f_2}{\partial\theta_n}$,均爲廣義坐標 $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n$ 之函數.據(A3.15)式,可知 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$,均爲 $\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2,\cdots\dot{\theta}_n$ 之一次函數. 若命 m 爲此

質點之質量，則整個物體之動能 T 爲

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

故 T 必爲 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ 之二次函數。

勢能 V 爲

$$V = g(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n)$$

故蘭格倫日函數 L 爲

$$L = T - V = \phi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \cdots, \dot{\theta}_n)$$

$$\begin{aligned} L' &= L + \delta L \\ &= \phi(\theta_1 + \delta\theta_1, \theta_2 + \delta\theta_2, \cdots, \dot{\theta}_1 + \delta\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 + \delta\dot{\theta}_2, \cdots), \\ &= \phi(\theta_1, \theta_2, \cdots, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \cdots) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}\delta\theta_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2}\delta\theta_2 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\theta}_1}\delta\dot{\theta}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\theta}_2}\delta\dot{\theta}_2 + \cdots \\ &= L + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \theta_m}\delta\theta_m + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\delta\dot{\theta}_m \end{aligned}$$

因

$$\int_{t_1}^{t_2} (L' - L)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\,dt = 0$$

故得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \theta_m}\delta\theta_m + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\delta\dot{\theta}_m \right] dt = 0 \qquad \textbf{(A3.16)}$$

因

$$\delta\dot{\theta}_m = \dot{\theta}_m{}' - \dot{\theta}_m = \frac{d}{dt}(\theta_m + \delta\theta_m) - \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta\theta_m)$$

用分部積分法，得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\delta\dot{\theta}_m\,dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\frac{d}{dt}(\delta\theta_m)\,dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\delta\theta_m \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m}\right)\delta\theta_m\,dt \end{aligned}$$

因實際路線 PNQ 與假定路線 PMQ 之始點與終點相符合(見圖 A28)。 故當 $t=t_1$,及 $t=t_2$ 時

$$\delta\theta_m=0, \qquad (m=1,2,\cdots n)$$

代入上式,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_m}\delta\dot\theta_m\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_m}\right)\delta\theta_m\,dt$$

代入(A3.16)式,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial\theta_m}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_m}\right)\right\}d\theta_m\right]dt=0 \qquad \text{(A3.17)}$$

因對於任何時間 t_2-t_1,(A3.17)式均有效。 故得

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial\theta_m}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_m}\right)\right\}d\theta_m=0 \qquad \text{(A3.18)}$$

7. 完整動力系與不完整動力系. 據一組之廣義坐標 $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n$,可知一物體之某形式,若予 $\delta\theta_1,\delta\theta_2,\cdots\cdots\delta\theta_n$ 任何微數值,即可得物體之另一可能形式,換言之,即物體有 n 個自由度。此種動力系(dynamic system)謂之**完整動力系**(holonomic system)。

反之,若予 $\delta\theta_1,\delta\theta_2,\cdots\cdots\delta\theta_n$ 任何微數值,並不能得物體之另一可能形式,換言之,此等微數值 $\delta\theta_1,\delta\theta_2,\cdots\delta\theta_n$ 之間,尚有一定之關係存在,物體之自由度,小於廣義坐標之數,則此種動力系,謂之**不完整動力系**(nonholonomic system)。

8. 完整動力系之關格倫日方程式:保守力系。 假定命

$$\delta\theta_1=\varepsilon,\ \delta\theta_2=\delta\theta_3=\cdots=\delta\theta_n=0$$

據(A3.18)式,得

$$\varepsilon\left[\frac{\partial L}{\partial\theta_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1}\right)\right]=0$$

故得

同理得

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_n}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n}\right)=0\end{array}\right. \tag{A3.19}$$

(A3.19)式爲當外力爲保守力系時，完整動力系之蘭格倫日方程式。

例 題 1.

試求一任意複擺之週期。

【解】 圖 377 所示複擺之動能 T 爲

$$T=\tfrac{1}{2}I\omega^2=\tfrac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$$

設以經過點 O 之水平線爲基準線，則複擺對於此基準線之勢能 V 爲

$$V=-Mg\bar{r}\cos\theta$$

$$L=T-V=\tfrac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2+Mg\bar{r}\cos\theta$$

在蘭格倫日函數 L 內，唯一之廣義坐標爲 θ，故代入

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=0$$

得

$$-Mg\bar{r}\sin\theta-Mk^2\ddot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{g\bar{r}}{k^2}\sin\theta$$

在 θ 爲甚小時，

$$\ddot{\theta}=-\frac{g\bar{r}}{k^2}\theta$$

此爲一角諧運動方程式，故其週期爲

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gr}}$$

例題 2.

有一均質桿 OA，其質量爲 m_1，長度爲 $2a$，能繞固定點 O 自由擺動。其 A 端聯接另一均質桿 AB，其質量爲 m_2，長度爲 $2b$。此兩桿均因重力影響而擺動，試求其運動方程式。

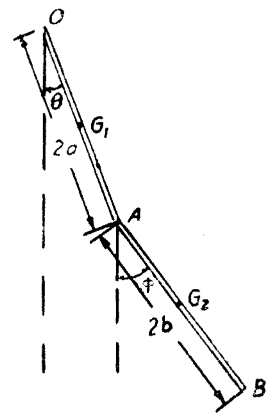


圖 A29.

【解】 圖 A29 所示之 OA，AB 兩桿，組合成爲雙擺(double pendulum)，玆先求此雙擺之動能。

$$OA\text{ 之動能} = \tfrac{1}{2}m_1V_{G1}^2 + I_1\omega_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{1}{3}a^2\dot{\theta}^2$$

$$= \tfrac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$

因

$$\vec{V}_{G_2} = \vec{V}_{\frac{G_2}{A}} + \vec{V}_A$$

故得

$$V_{G_2} = (2a\dot{\theta}\cos\theta + b\dot{\phi}\cos\phi)^2 + (2a\dot{\theta}\sin\theta + b\dot{\phi}\sin\phi)^2$$

$$= 4a^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\phi}^2 + 4ab\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)$$

$$AB\text{ 之動能} = \tfrac{1}{2}m_2V_{G_2}^2 + \tfrac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m_2[4a^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\phi}^2 + 4ab\,\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)] + \tfrac{1}{2}m_2\tfrac{1}{3}b^2\dot{\phi}^2$$

$$T = OA\text{ 之動能} + AB\text{ 之動能}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)4a^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{2}{3}m_2b^2\dot{\phi}^2 + 2m_2ab\,\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi - \theta)$$

設以比點 O 低 $2a + 2b$ 之水平線爲基準線，則在圖 A29 所示位置之勢能 V 爲

$$V = -m_1ga\cos\theta - m_2g[2a\cos\theta + b\cos\phi].$$

$$L = T - V$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)4a^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{2}{3}m_2b^2\dot{\phi}^2 + 2m_2ab\,\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi - \theta)$$

$$+ m_1 g a \cos\theta + m_2 g\,(2a\cos\theta + b\cos\phi)$$

代入

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = 0$$

得

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) 4\,a\,\ddot\theta + 2m_2 b\,[\ddot\phi\cos(\phi - \theta) - \dot\phi^2\sin(\phi - \theta)]$$

$$= -(m_1 + 2m_2)\,g\sin\theta \tag{a}$$

代入

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) = 0$$

得

$$\frac{4b}{3}\ddot\phi + 2a\,[\ddot\theta\cos(\phi - \theta) + \dot\theta^2\sin(\phi - \theta)] = -g\sin\phi \tag{b}$$

解(a)(b)兩聯立微分方程式，即能得運動方程式。爲簡單計，祇討論

$$m_1 = m_2,\quad a = b$$

之特殊情形。此時(a)(b)兩式可以簡化爲

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{16}{3}\ddot\theta + 2\ddot\phi\cos(\phi - \theta) - 2\dot\phi^2\sin(\phi - \theta) = -\frac{3g}{a}\sin\theta \\ &2\ddot\theta\cos(\phi - \theta) + \frac{4}{3}\ddot\phi + 2\dot\theta^2\sin(\phi - \theta) = -\frac{g}{a}\sin\phi \end{aligned}\right. \tag{c}$$

在中立位置時，

$$\phi = \theta = 0,$$

假定擺動之角移甚小，則

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\theta \fallingdotseq \theta \\ &\sin\phi \fallingdotseq \phi \end{aligned}\right.$$

若角速度 $\dot\theta$，及 $\dot\phi$ 均爲甚小時，則(c)可簡化爲

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{16}{3}D^2 + \frac{3g}{a}\right)\theta + 2D^2\phi = 0 \\ &2D^2\theta + \left(\frac{4}{3}D^2 + \frac{g}{a}\right)\phi = 0 \end{aligned}\right. \tag{d}$$

上式中 D 代表 $\frac{d}{dt}$, D^2 代表 $\frac{d^2}{dt^2}$. 若消去 ϕ,得

$$\left[D^4+\frac{3g}{a}D^2+\frac{27}{28}\left(\frac{g}{a}\right)^2\right]\theta=0$$

解之,得

$$\theta=L_1\cos(p_1t+\alpha_1)+L_2\cos(p_2t+\alpha_2) \qquad (e)$$

同理,可求得

$$\phi=M_1\cos(p_1t+\alpha_1)+M_2\cos(p_2t+\alpha_2) \qquad (f)$$

據(e)(f)兩式,可知雙擺之運動,係兩個角諧運動之併合. 此兩角諧運動之週期爲 $\frac{2\pi}{p_1}$, 及 $\frac{2\pi}{p_2}$.

若將(e)(f)兩式,代入(c)式得

$$\frac{L_1}{M_1}=-\frac{2\sqrt{7}-1}{9}$$

$$\frac{L_2}{M_2}=\frac{2\sqrt{7}+1}{9}$$

由此可知 L_1, M_1, L_2, M_2 之間,尙有一定之關係存在.

例 題 3.

有一長 $2l$, 質量 m 之均質桿, 在一柄內自由滑動. 桿與柄之間之摩擦力爲零, 柄之質量爲零. 柄軸 AB 與鉛直線成角 α (圖 A30). 設將軸轉動,使桿在水平位置時釋放. 試求桿之運動微分方程式.

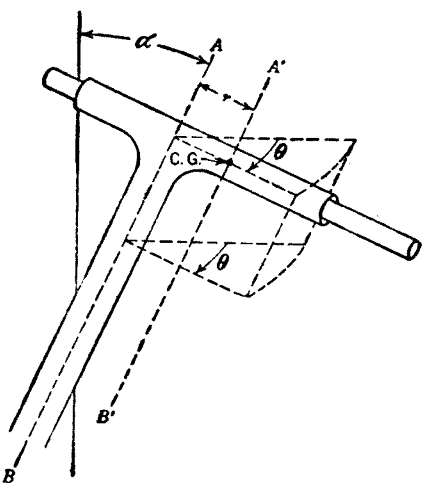


圖 A30.

【解】 命 θ 爲柄自其平衡位置量起之角移. 桿之動能爲

$$\begin{aligned}T&=\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2\\&=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\tfrac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2\\&=\tfrac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r^2+k^2)\dot{\theta}^2]\end{aligned}$$

桿之勢能爲

$$V = mgr\,(1-\cos\theta)\sin\alpha$$

$$L = T - V$$

$$= mgr\,(1-\cos\theta)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}m\,[\dot r^2 + (r^2+k^2)\,\dot\theta^2]$$

上式之廣義坐標爲 r 與 θ。 代入(A3.19)式，得

$$\begin{cases} \ddot r - r\dot\theta + g\,(1-\cos\theta)\sin\alpha = 0 \\ (r^2+k^2)\,\ddot\theta\;2r\dot r\dot\theta + rg\sin\theta\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

9. 不完整動力系之關格倫日方程式：保守力系. 假定 $\delta\theta_1, \delta\theta_2, \cdots \delta\theta_n$ 間之關係如下：

$$\begin{cases} a_1\,\delta\theta_1 + a_2\,\delta\theta_2 + \cdots + a_n\,\delta\theta_n = 0 \\ b_1\,\delta\theta_1 + b_2\,\delta\theta_2 + \cdots + b_n\,\delta\theta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{A3.20}$$

所予 $\delta\theta_1, \delta\theta_1 \cdots \delta\theta_n$ 之微數值，除必須適合於(A3.18)式外，尚須適合於(A3.20)式之拘束條件. 若用未定乘數法(method of undetermined multipliers)，得

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1} + \lambda a_1 + \mu b_1 + \cdots\right]\delta\theta_1$$

$$+ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \lambda a_2 + \mu b_2 + \cdots\right]\delta\theta_2$$

$$+ \cdots + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} + \lambda a_n + \mu b_n + \cdots\right]\delta\theta_n = 0$$

其中 $\lambda, \mu, \cdots$ 爲泛定常數. 故得不完整動力系之關格倫日方程式如下.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}+\lambda a_1+\mu b_1+\cdots=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_n}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_n}+\lambda a_n+\mu b_n+\cdots=0\end{array}\right. \qquad (A3.21)$$

若自($A3,21$)式，消去 r 個未定乘數 $\lambda,\mu,\cdots$，餘下之 $n-r$ 個方程式，可用以求得運動方程式.

例 題 1

有一半徑 r 之均質圓球. 在一半徑 R 之固定圓球上滾下(圖A31). 試求假定無滑動時之運動方程式.

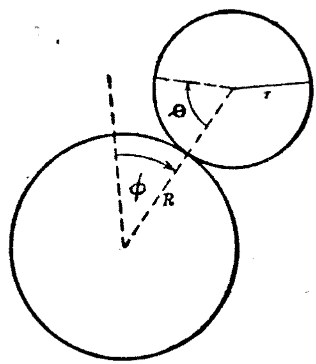


圖 A31.

【解】

$$T=\tfrac{1}{2}m[(r+R)^2\dot{\phi}^2+\tfrac{2}{5}r^2\dot{\theta}^2]$$

$$V=mg\,(r+R)\cos\phi$$

$$L=T-V$$

$$=\tfrac{1}{2}m\,(r+R)^2\dot{\phi}^2+\tfrac{1}{5}mr^2\dot{\theta}^2-mg\,(r+R)\cos\phi \qquad (a)$$

又因兩球之接觸處無滑動，故

$$(r+R)\,\dot{\phi}=r\dot{\theta}$$

或

$$(r+R)\,\delta\phi-r\,\delta\theta=0$$

蘭格倫日方程式爲

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}+\lambda r=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\phi}+\lambda(r+R)=0\end{array}\right.$$

若消去 λ，得

$$(r+R)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}\Big]+r\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}\right]=0$$

再將(a)代入，簡約之，得

$$(r+R)\ddot{\phi}=\tfrac{5}{7}g\sin\phi$$

題 例 2

一飛輪以曲柄及連桿與一在水平方向之活塞桿相聯(圖A 32)。當汽缸內無蒸汽時，飛輪停止於其平衡位置。試求自其平衡位置移動後所產生之運動。

【解】

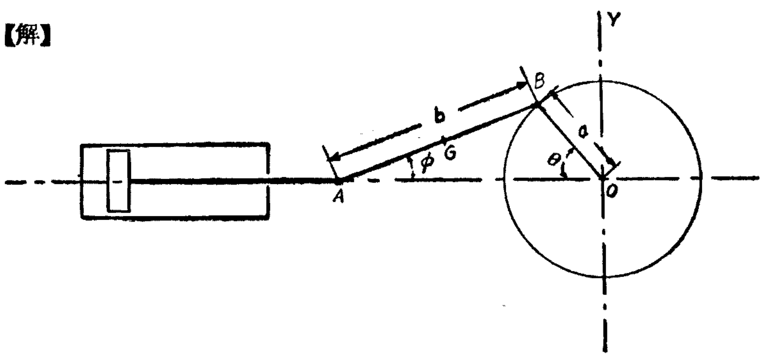


圖 A 32.

先計算各部分之動能：

飛輪與曲柄之動能 $=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

連桿之重心 G 之速度，沿 X，Y 兩軸之分矢爲

$$-a\sin\theta\cdot\dot{\theta}-\tfrac{1}{2}b\sin\phi\cdot\dot{\phi},\quad \tfrac{1}{2}b\cos\phi\cdot\dot{\phi},$$

故得

$$\text{連桿之動能}=\tfrac{1}{2}m[a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2+ab\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\theta}\dot{\phi}+\tfrac{1}{4}b\dot{\phi}^2+{}^1/_{12}b\dot{\phi}^2]$$

$$=\tfrac{1}{2}m[a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2+ab\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\theta}\dot{\phi}+\tfrac{2}{8}b\dot{\phi}^2]$$

活塞與活塞桿之速度，係沿軸 X，其值爲$(-a\sin\theta\cdot\dot{\theta}-b\sin\phi\cdot\dot{\phi})$，故得

$$\text{活塞與活塞桿之動能}=\tfrac{1}{2}M(a\sin\theta\cdot\dot{\theta}+b\sin\phi\cdot\dot{\phi})^2$$

若將以上三項相加，得

$$T=\tfrac{1}{2}[I\dot{\theta}^2+m(a^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2+ab\sin\theta\sin\phi\cdot\dot{\theta}\dot{\phi}+\tfrac{1}{3}b\dot{\phi}^2)$$
$$+M(a\sin\theta\cdot\dot{\theta}+b\sin\phi\cdot\dot{\phi})^2] \qquad \text{(a)}$$

上式中，I 爲飛輪與曲柄關於輪中心 O 之慣矩，m 爲連桿之質量，M 爲活塞與活塞桿之質量。

若再命 M' 爲飛輪與曲柄之質量。(h, ε) 爲 $\theta = 0$ 時，飛輪與曲柄之重心之極坐標，以軸 X 爲基準線所得各部分之勢能和爲

$$V = M'gh\sin(\theta + \varepsilon) + \tfrac{1}{2}mgb\sin\phi \tag{b}$$

廣義坐標 θ，與 ϕ，尚須適合於下述之條件

$$a\sin\theta = b\sin\phi \tag{c}$$

$$a\cos\theta\,\delta\theta = b\cos\phi\,\delta\phi \tag{c'}$$

代入(A3.21)式，得

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \lambda a\cos\theta = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} + \lambda b\cos\phi = 0 \end{aligned}\right. \tag{d}$$

消去 λ，得

$$b\cos\phi\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta}\right] + a\cos\theta\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi}\bigg] = 0$$

其中 $L = T - V$，故若 T 與 V 之值代入(d)式，即能得包含 θ, ϕ 兩變數之微分方程式。若再與(c)式聯合消去 ϕ，即能得僅含有 θ 之微分方程式。解之，得飛輪與曲柄之運動方程式。因此項之計算太複雜，故此處僅說明其計算之方法。

例　題

1. 一質量因重力之影響，在一光滑之拋物面

$$z = 2x^2 + 2xy + y^2$$

上運動，軸 Z 之方向係鉛直向上。試求此質量在原點附近之小振動。

2. 若習題 1 之質量，在光滑之二次面

$$z = 2x^2 + 2xy - y^2$$

上運動，試求其運動方程式。

$$
\begin{cases}
x = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} + C\sin(\omega t + \psi) \\
y = -3.302\,(Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}) + 0.3025\,C\sin(\omega t + \psi)
\end{cases}
$$

式中 $\lambda = 1.614\sqrt{g}$, $\omega = 2.123\sqrt{g}$, A, B, C, ψ 均爲泛定常數.

3. 兩質量 m_1, m_2 以無伸縮性之繩 a, b, 相聯,並懸於 C, D 兩架,如圖 A33 所示。質量 m_1 與 m_2 在鉛直平面 $ABCD$ 兩對面拉出,試求在釋放後之運動方程式。

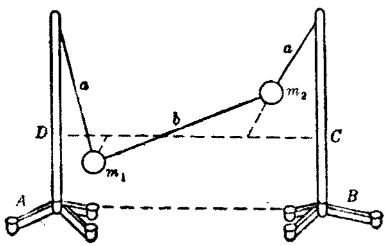


圖 A33.

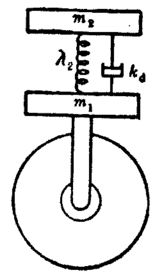


圖 A34.

4. 一質量 m_1 置於一車輪及彈性輪胎上(圖 A34)。另一質量 m_2 置於 m_1 上。 m_1, m_2 之間有一彈簧及一減震器 (shock absorber), 彈簧與減震器係並聯者。減震器之力與 m_1 及 m_2 之速度差成正比例,假定車輪不能滾動,整個機構亦祇限於沿鉛直線之運動。試求 m_1 及 m_2 之運動之微分方程式。

10. 非保守力系之蘭格倫日方程式。 應用(A3.14)式,可以將微功 δW 化爲廣義坐標之函數。

$$
\delta W = \sum_{n=1}^{p}(F_{x_i}\,\delta x_i + F_{y_i}\,\delta y_i + F_{z_i}\,\delta z_i) = \Theta_1\delta\theta_1 + \Theta_2\delta\theta_2 + \cdots + \Theta_n\delta\theta_n
$$

其中 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_n$ 均爲 $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$ 之函數。

若代入(A3.13b)式,運用與第 8 節第 9 節同樣之方法,可求得外力系爲非保守力系時:

(甲)完整動力系之蘭格倫日方程式

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}-\Theta_1=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_n}-\Theta_n=0\end{aligned}\right. \tag{A3.22}$$

（乙）不完整動力系之蘭格倫日方程式

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}-\Theta_1+\lambda a_1+\mu b_1+\cdots=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_n}-\Theta_n+\lambda a_n+\mu b_n+\cdots=0\end{aligned}\right. \tag{A3.23}$$

例　　題

設有一輪與軸，其總慣矩爲 I．裝置在一摩擦力爲零之水平軸承上（圖 A35）。軸上裝有一螺線彈簧，使在輪之角移之反方向產生彈性復原力。輪上裝有阻尼輪葉(damping vane)，並有切於一輪緣之力 f_1 與 f_2．試求輪之運動微分方程式。

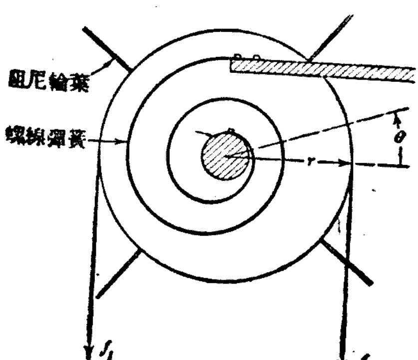


圖　A 35

【解】　命 θ 爲輪與軸所轉過之角度。$\dot{\theta}$ 爲其角速度。輪葉之阻尼力矩與

速度 $\dot{\theta}$ 成正比例。 彈簧之力矩與角移 θ 成正比例。 故得

$$\begin{aligned}\delta W &= -f_2 r\,\delta\theta + f_1 r\,\delta\theta - K_d\,\dot{\theta}\,\delta\theta - K\theta\,\delta\theta \\ &= \Theta\,\delta\theta\end{aligned}$$

或

$$\Theta = -f_2 r + f_1 r - K_c\,\dot{\theta} - K\,\theta$$

其中 K_d, K 均爲常數。

$$T = \tfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2$$

若將 Θ 與 T 之值，代入(A3.22)式，得

$$I\ddot{\theta} + K_d\,\dot{\theta} + K\,\theta - f_1 r + f_2 r = 0$$

習　題

1. 設有三個極重之圓盤 D_0, D_1, D_2，裝於一細而輕之鉛直軸上，如圖 A36 所示。 圓盤 D_0 以一蝸輪傳動。 圓盤 D_0 約略以等速度轉動。D_0, D_1 間與 $D_1 D_2$ 間之軸之轉矩常數(torque constant)爲 λ_1 與 λ_2，D_1與D_2 上聯有浸於油中之薄板，使產生阻尼作用。 試求 D_1, D_2 之運動微分方程式。

$$答:\begin{cases} I_1\ddot{\theta}_1 + \alpha\dot{\theta}_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\,\theta_1 - \alpha\dot{\theta}_2 - \lambda_2\theta_2 = \lambda_1\theta_0 \\ -\alpha\dot{\theta}_1 - \theta_1\lambda_2 + I_2\ddot{\theta}_2 + \alpha\dot{\theta}_2 + \lambda_2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

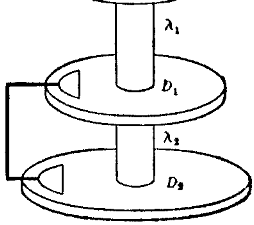


圖 A 36.

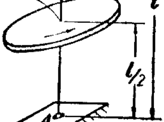


圖 A 37.

2. 圖 A37 所示迴轉器之鉛直對稱軸，可以繞點 A 自由轉動，其上端 B 受兩彈簧之約束。 兩彈簧之軸互相垂直，其彈簧常數爲 k_1 與 k_2。 試求產生

穩定轉動所需之角動量。

$$\text{答}: > \sqrt{\frac{Amgl}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{2k_1 l}{mg}}+\sqrt{1-\frac{2k_2 l}{mg}}\right)$$

$$\text{並須 } k_1 > \frac{mg}{2l},\ k_2 > \frac{mg}{2l},\text{或 } k_1 < \frac{mg}{2l},\ k_2 < \frac{mg}{2l}.$$

11. 衝力之闌格倫日方程式. 試求(A3.22)式在時間極限 $t = t_1, t = t_2$ 間之積分。假定所施之外力為衝力,則 $t_2 - t_1$ 為一微量。又因 $\partial T/\partial \theta_i$ 為一有限值 故

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \theta_i} dt = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

故得(A3.22)式積分後,所得適用於衝力之闌格倫日方程式為:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right]_{t_1}^{t_2} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \Theta_1\, dt \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left[\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_n}\right]_{t_1}^{t_2} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \Theta_n\, dt \end{array}\right. \tag{A3.24}$$

$\int_{t_1}^{t_2} \Theta_i dt$ 謂之**廣義衝量**(gener lized impulse), $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i}$ 謂之**廣義動量**(generalized momentum)。(A3.24)式之結論為'廣義動量之增加,即等於廣義衝量'。此結論可以包括第 172 節及第 174 節所得之兩結論。

例　題

設有 AB, BC, CD 三均質桿. A, D 兩端以銷聯接於兩固定點。B, C 端亦以銷聯接而成一正方形(圖 A38a)。各個銷之摩擦力均等於零。設有在 $ABCD$ 同一平面內衝量為 J 之衝力,以垂直於 AB 之方向擊於 AB 之中點。試證明所產生之動能為 $3J^2/40m$。式中 m 為每一桿之質量,並求在銷 B 與銷 C 之衝量。

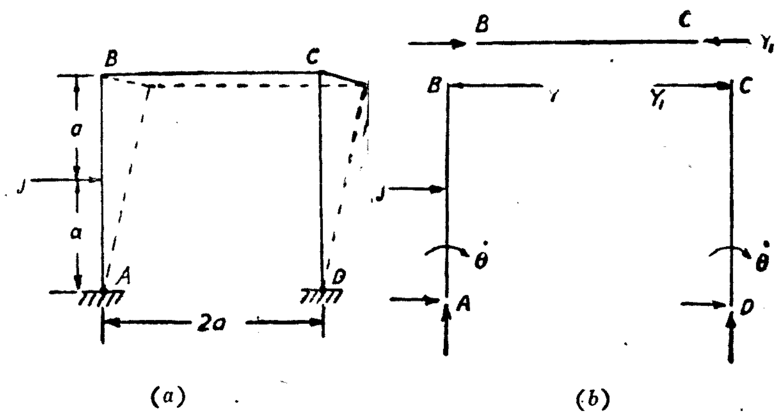


圖 A 38.

【解】

$$T = 2 \times \frac{1}{2} m \frac{4a^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (2a\dot{\theta})^2 = \frac{10}{3} ma^2 \dot{\theta}^2$$

$$\left[\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right]_{t_1}^{t_2} = \left[\frac{20}{3} ma^2 \dot{\theta}\right]_0^{\dot{\theta}} = \frac{20}{3} ma^2 \dot{\theta}$$

$$\delta W = Pa\,\delta\Theta = \Theta\,\delta\Theta$$

式中 P 爲衝力.

$$\Theta = Pa$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Theta\, dt = \int_{t_1}^{t_2} Pa\, dt = a\int_{t_1}^{t_2} P\, dt = aJ$$

代入($A3.24$)式,得

$$\frac{20}{3} ma^2 \dot{\theta} = aJ$$

$$\dot{\theta} = \frac{3J}{20\, ma}$$

$$T = \frac{10\, ma^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{10\, ma^2}{3} \left(\frac{3J}{20\, ma}\right)^2 = \frac{3J^2}{40\, m}$$

若將上述之方法,應用於圖 A38(b)所示之脫離體 AB 與 CD。得

$$m\,\frac{4a^2}{3}\,\dot{\theta} = Ja - Y2a$$

$$m\,\frac{4a^2}{3}\,\dot{\theta} = Y_1 2a$$

若將 $\dot{\theta}$ 之值，代入以上兩式，得

$$Y = \frac{2}{5}J$$

$$Y_1 = \frac{1}{10}J$$

12. 剛體運動之歐拉方程式. 設 OA, OB, OC 為一物體之主慣軸(圖 A39)。$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 為沿上述三主慣軸之角速度分矢. A, B, C 為關於三軸之主慣矩. 則此物體之動能為:

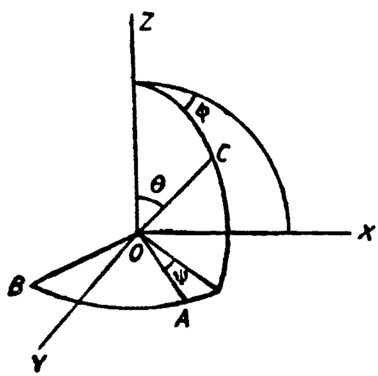


圖 A 39.

$$T = \tfrac{1}{2}[A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2] \qquad (A3.25)$$

物體之運動，可以解析為 (1)平面 COZ 之運動，(2)相對於平面 COZ 之運動。

(1)平面 COZ 之運動，再能解析為

(a)對於與平面 COZ 垂直之軸之轉動,其角速度爲 $\dot{\theta}$.

(b)對於 OZ 軸之轉動,其角速度爲 $\dot{\phi}$.

(2)相對於平面 COZ 之運動,爲繞軸 OC 之轉動,其角速度爲 $\dot{\psi}$.

以上三角速度,$\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ 沿 OA, OB, OC 三軸之分矢爲

	OA	OB	OC
$\dot{\theta}$	$\dot{\theta}\sin\psi$	$\dot{\theta}\cos\psi$	O
$\dot{\phi}$	$-\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$	$\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$	$\dot{\phi}\cos\theta$
$\dot{\psi}$	O	O	$\dot{\psi}$

故得

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_2 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{aligned}\right. \tag{A3.26}$$

外力系所作之功爲

$$\delta W = \Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\phi + \Psi\,\delta\psi$$

代入(A3.22)式,得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = \Psi \tag{A3.27}$$

據(A3.25)式,得

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} &= A\omega_1\frac{\partial\omega_1}{\partial\dot{\psi}} + B\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial\dot{\psi}} + C\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial\dot{\psi}} \\ \frac{\partial T}{\partial\psi} &= A\omega_1\frac{\partial\omega_1}{\partial\psi} + B\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial\psi} + C\omega_3\frac{\partial\omega_3}{\partial\psi} \end{aligned}\right. \tag{A3.28}$$

再據(A3.26)式,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot{\theta} \cos \psi + \phi \sin \theta \sin \psi \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\dot{\theta} \sin \psi + \phi \sin \theta \cos \psi \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0 \end{cases}$$

代入(A3.28)式,得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = C\omega_3$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = (A - B)\,\omega_1\omega_2 \tag{A3.27a}$$

再代入(A3.27)式,得

$$C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = \Psi$$

因 $\Psi\,\delta\psi$ 爲外力在微角移 $\delta\psi$ 內所作之功. 故Φ應等於外力對 OC 軸之力矩和 N. 故得

$$C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = N \tag{A3.29}$$

同理,若命 L,M 爲外力對於 OA,OB 兩軸之力矩和,得

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= L \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= M \end{aligned}\right\} \tag{A3.29a}$$

(A3.29)(A3.29a)式,謂之**歐拉方程式**(Euler's equation)

第四章

維解析

1. 維之種類及維解析之用途. 維得分爲**基本維**(fundamental dimension)及**導出維**(derived dimension),基本維又名原量(primary quantity),導出維又名副量(secondary dimension)。在力學上所習用之基本維爲長度,質量,與時間. 其餘如功,能,速度,慣矩,角動量,衝量,等,均爲導出維. 有時亦得將其他之維,作爲基本維(見第2節). 各導出維與基本維間之關係,見附錄I.

一方程式是否合理,可以解析其各項之維,是否相同而決定之. 一種之單位,可以利用維之解析,換算至另一種單位. 現代科學發達,**維解析**(dimensional analysis)已成爲一種專門學問. 對於工程上作有系統之研究時,維解析之功用極大. 例如某物體受到某外力時,產生某種之運動. 表示此運動之微分方程式,可以化爲**無維式**(dimensionless form). 此無維之微分方程式,可以應用至其他相似之物體. 在一定條件下,受到相似之外力,即產生相似之運動. 現在模型實驗之原理,悉基於此. 鐵橋,輪船,飛機,自來水管,以及其他任何龐大工程,均可以製成模型. 自模型上所得結果,可以推測實際之工程,在某種條件下之情形. 所謂某種條件,可以用維解析之方法求得之.

利用模型作實驗,爲工程上之一極大進步,既經濟又便利. 利用維解析,斷定實驗上所得結果,適合於某種條件下之實際情形. 尤爲使工程問題科學化,開一新紀元.

2. 應用維解析變換單位. 應用維解析,核對一方程式是否正確,在第一章第 8 節內已有說明,故不復贅. 本節內所討論者,爲如何應用維解析,變換力學上所用之單位.

欲設自基本維爲 X_1, X_2, X_3 之一組單位,改變至基本維爲 Y_1, Y_2, Y_3 之另一組單位. 假定所討論之量爲 Q,則

$$Q = h_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} \tag{A4.1}$$

其中 h_0, a_1, a_2, a_3,均爲常數. 假定新舊兩組基本維之間之關係爲

$$\begin{cases} H_1Y_1 = X_1^{a_{11}} X_2^{a_{12}} X_3^{a_{13}} \\ H_2Y_2 = X_1^{a_{11}} X_2^{a_{22}} X_3^{c_{33}} \\ H_3Y_3 = X_1^{a_{31}} X_2^{a_{32}} X_3^{c_{33}} \end{cases} \tag{A4.2}$$

其中 $H_i, a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 均爲常數,若命

$$\begin{aligned} x_i &= \log X_i \\ h_i y_i &= \log H_i X_i \end{aligned} \qquad (i = 1,2,3)$$

則(A4.2)式可以簡化爲:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 = h_2y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3y_3 \end{cases} \tag{A4.2a}$$

解之,得

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \frac{h_1y_1}{\Delta} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \frac{h_2y_2}{\Delta} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \frac{h_3y_3}{\Delta}$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

故得 X_1 之值爲

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= (H_1Y_1)^{+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_2Y_2)^{-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_3Y_3)^{+\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\\
&\text{同理,得}\\
X_2 &= (H_1Y_1)^{-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_2Y_2)^{+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_3Y_3)^{-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\\
X_3 &= (H_1Y_1)^{+\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_2Y_2)^{-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}\cdot(H_3Y_3)^{+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\frac{1}{\Delta}}
\end{aligned}\right\}\quad(\text{A4.3})$$

若將(A4.3)式所得之結果,代入(A4.1)式,卽得以 Y_1。Y_2,Y_3 表示之量 Q。

例　題

設欲自〔哩/時〕之單位,變至〔强/秒〕,問是否可能。

【解】 據(A4.2)式,得

$$1\,[\text{强}] = [\text{哩}]^0\left[\frac{\text{時}}{3600}\right]^0$$

$$1\,[\text{秒}] = [\text{哩}]^0\left[\frac{\text{時}}{3600}\right]^1$$

其 Δ 之値爲

$$\Delta = \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

故此種之單位變換爲不可能。

3. π 定理。 本節內僅敍述 π 定理,而不加證明,爲欲使此定理易於明瞭起見,先舉一例以說明之。

自實驗上所得結果,證明一飛機機翼之力 R,隨:(1)其形狀,(2)大小 l,(3)速度 v,(4)空氣密度 ρ_1,及(5)空氣之粘性 μ 而變。試求 R 與 l,v,ρ,μ 間之關係。

設以〔M〕,〔L〕,〔T〕爲基本維。 則

$$[R] = [MLT^{-2}]$$

$$[l] = [L]$$

$$[v] = [LT^{-1}]$$

$$[\varrho] = [ML^{-3}]$$

$$[\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

設命 π 為一無維積，其值為

$$\pi = \varrho^{x} v^{y} l^{z} \mu^{w} R^{u} \tag{a}$$

或

$$[\pi] = [ML^{-3}]^{x}[LT^{-1}]^{y}[L]^{z}[ML^{-1}T^{-1}]^{w}[MLT^{-2}]^{u}$$
$$= [M]^{x+w+u}[L]^{-3x+y+z-w+u}[T]^{-y-w-2u}$$

故

$$\begin{cases} x + w + u = 0 \\ -3x + y + z - w + u = 0 \\ -y - w - 2u = 0 \end{cases} \tag{b}$$

(b)之三式內，共有五未知量，故必須先假定兩個未知量之值，方能求得其餘之三個未知量(其餘三個未知量係數之行列式，不能等於零，否則卽不能得其解答)。 為簡便起見，假定

$$w = 0,\ u = -1$$

代入(b)式，得

$$\begin{cases} x = 1 \\ -3x + y + z = 1 \\ -y = -2 \end{cases}$$

解之，得

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 2$$

代入(a)式，並命此時所得之 π 為 π_1，

$$\pi_1 = \frac{\varrho v^2 l^2}{R} \tag{c}$$

若再假定

$$u = 0,\ w = -1,$$

代入(b)式,得

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ -3x + y + z &= -1 \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

解之,得

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 1$$

代入(a)式,並命此時所得之 π 爲 π_2,

$$\pi_2 = \frac{\varrho v l}{\mu} \tag{d}$$

據 π 定理,得

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0 \tag{e}$$

解之,得

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

或

$$\frac{\varrho v^2 l^2}{R} = f\left(\frac{\varrho v l}{\mu}\right)$$

$$R = \varrho v^2 l^2 \frac{1}{f\left(\frac{\varrho v l}{\mu}\right)} = \varrho v^2 l^2 \phi\left(\frac{\varrho v l}{\mu}\right) \tag{f}$$

(f)式爲表示作用於機翼上之升力及阻力之公式. $\varrho v l/\mu$ 謂之累氏數(Reynolds' Number). $\phi\left(\frac{\varrho v l}{\mu}\right)$ 之値,隨機翼之形狀而定.

命 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 爲 n 個可以度量之量,此 n 個量可以用 m 個基本維之維方程式表示之. 設 $\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_{n-m}$ 爲 $n-m$ 個以 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 表示之獨立無維函數,則

$$F(\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_{n-m}) = 0$$

即表示 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 間之函數關係．此即爲 π 定理。

4. **相似原理**． 欲使模型實驗之情形，與實際之情形完全相似，其條件有三。一爲**幾何相似**(geometrically similar)，一爲**運動相似**(kinematically similar)，一爲**動力相似**(kinetically similar)．所謂幾何相似，即模型之形狀，須與實際物體之形狀相似．所謂運動相似，即在模型運動場中各點之速度，應與實際物體之運動場中各對應點之速度，方向相同，大小成一定之比例．所謂動力相似，即在模型上各點之力，應與實際物體上各對應點之力，方向相同，大小成一定之比例．

設仍繼續討論第 3 節所舉之例。命 l_1 爲機翼之弦長，l_2 爲模型之弦長，故在機翼上任何兩點間之距離，與模型上兩對應點間距離之比爲 l_1/l_2。命 V_1 爲機翼與空氣之相對速度，V_2 爲模型與空氣之相對速度，則機翼上任一點之速度，與模型上對應點之速度之比爲 V_1/V_2。作用於機翼上之力，有與 $\varrho_1V_1^2A_1$ 成正比之動力，與空氣之黏力 $\mu_1\dfrac{dV_1}{dy_1}A_1$，($A_1$ 代表面積)。在模型上對應之兩力爲 $\varrho_2V_2^2A_2$ 及 $\mu_2\dfrac{dV_2}{dy_2}A_2$。據動力相似條件：

$$\frac{\varrho_1V_1^2A_1}{\mu_1\dfrac{dV_1}{dy_1}A_1}=\frac{\varrho_2V_2^2A_2}{\mu_2\dfrac{dV_2}{dy_2}A_2}$$

即

$$\frac{\varrho_1V_1^2}{\mu_1\dfrac{dV_1}{dy_1}}=\frac{\varrho_2V_2^2}{\mu_2\dfrac{dV_2}{dy_2}} \tag{a}$$

據幾何相似條件，

$$\frac{dy_1}{l_1} = \frac{dy_2}{l_2} \tag{b}$$

據運動相似條件，

$$\frac{dV_1}{V_1} = \frac{dV_2}{V_2} \tag{c}$$

若將(b)(c)兩式，代入(a)式，簡約之 得

$$\frac{\varrho_1 V_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\varrho_2 V_2 l_2}{\mu_2}$$

即

$$\frac{\varrho V l}{\mu} = \text{常數} \tag{d}$$

據(d)式，可知假定模型試驗，與實際情形，幾何相似，運動相似，動力相似，其纍氏數必須相等。

對於纍氏數相等之各相似機翼，其 $\phi\left(\frac{\varrho v l}{\mu}\right)$ 必相等。故第3節之(f)式，可以應用於無窮數之相似機翼。換言之，即祇須做一種實驗，其結果可以代表無窮數之相似機翼在同一纍氏數運動之情形。

對於他類模型之相似原理，亦可以用同樣之方法求得之。

習 題

1. 設欲自[磅](質量)，[哩]，[時] 組之基本單位，變換至[仟瓦]，[呎/秒]，[呎·磅]之一組基本單位。試求此兩組單位間之關係。

答：[磅] $= 3.10 \times 10^{-2} Y_2^{-2} Y_3^{-2}$，[哩] $= 3.90 \times 10^6 Y_1^{-1} Y_2 Y_3$，[時] $= 2.66 \times 10^6 Y_1^{-1} Y_3$，其中 $Y_1 = 1$[仟瓦]，$Y_2 = 1$[呎/秒]，$Y_3 = 1$[呎·磅]。

2. 試問以習題1兩組基本單位表示之動量，動能，與功率之關係。

答：動量：1[磅(質量)哩時$^{-1}$] $= 4.55 \times 10^{-2}$ [呎·磅(呎/秒)$^{-1}$]

動能：1[磅(質量)哩^{2}時$^{-2}$] $= 6.68 \times 10^{-2}$ [呎·磅]

功率：1[磅(質量)哩^{2}時$^{-3}$] $= 2.52 \times 10^{-8}$ [仟瓦]。

3. 試證明 $\frac{\varrho v l}{\mu}$ 為一無維式。

附　　錄

I. 度量衡換算表

(1) 長度，〔L〕。

1〔厘米〕$= 3.281 \times 10^{-2}$〔呎〕$= 0.3937$〔吋〕$= 393.7$〔密爾〕

$= 6.214 \times 10^{-6}$〔哩〕$= 1.094 \times 10^{-6}$〔碼〕$= 3 \times 10^{-2}$〔尺〕

1〔呎〕$= 30.48$〔厘米〕$= 3.048 \times 10^{-4}$〔仟米〕$= 0.3048$〔米〕。

$= 1.645 \times 10^{-4}$〔海里〕$= 1.894 \times 10^{-4}$〔哩〕

(註)〔米〕又稱〔公尺〕，〔仟米〕又稱〔公里〕。

(2) 面積，〔L^2〕。

1〔米^2〕$= 2.471 \times 10^{-4}$〔英畝〕$= 1.973 \times 10^9$〔圓密爾〕$= 1.196$〔碼^2〕。

$= 10.76$〔呎^2〕$= 1550$〔吋^2〕$= 3.861 \times 10^{-7}$〔哩^2〕$= 9$〔尺^2〕

1〔呎^2〕$= 929$〔厘米^2〕$= 9.290 \times 10^{-2}$〔米^2〕

$= 2.296 \times 10^{-5}$〔英畝〕$= 3.587 \times 10^{-8}$〔哩^2〕

(3) 體積，〔L^3〕。

1〔米^3〕$= 35.31$〔呎^2〕$= 6.102 \times 10^4$〔吋^2〕$= 264.2$〔加侖〕(美)

$= 2113$〔品特〕$= 1057$〔夸特〕

1〔呎^3〕$= 2.832 \times 10^{-2}$〔米^2〕$= 28.32$〔升〕

$= 7.461$〔加侖〕(美)$= 59.84$〔品特〕$= 29.92$〔夸特〕。

(註) 1〔加侖〕(美)$= 0.8327$〔加侖〕英)。

(註二) 1〔升〕則等於 1〔公升〕。

(4) 線速度，〔LT^{-1}〕。

1〔米/分〕= 3.281〔呎/分〕= 5.468×10^{-2}〔呎/秒〕

= 3.728×10^{-2}〔哩/時〕= 3.238×10^{-2}〔海里/時〕

= 0.06〔仟米/時〕= 1.667×10^{-2}〔米/秒〕

1〔米/秒〕= 3.281〔呎/秒〕= 1.943〔海里/時〕= 2.237〔哩/時〕

1〔呎/秒〕= 30.48〔厘米/秒〕= 1.097〔仟米/時〕= 18.29〔米/分〕

= 0.6818〔哩/時〕= 0.5921〔海里/時〕

1〔哩/時〕= 44.70〔厘米/秒〕= 1.609〔仟米/時〕= 26.82〔米/分〕

= 88〔呎/分〕= 0.8684〔海里/時〕

(5)角速度,〔T^{-1}〕.

1〔度/秒〕 = 0.01745〔弳/秒〕= 0.1667〔轉/分〕

= 2.778×10^{-2}〔轉/分〕

1〔轉/分〕= 6〔度/秒〕= 0.1047〔弳/秒〕= 1.667×10^{-2}〔轉/分〕

(6)線加速度,〔LT^{-2}〕.

1〔米/秒^2〕= 3.281〔呎/秒^2〕= 3.6〔仟米/時•秒〕= 2.237〔哩/時•秒〕

1〔呎/秒^2〕= 30.48〔厘米/秒^2〕= 1.097〔仟米/時•秒〕= 0.6818〔哩/時•秒〕

(7)角加速度,〔T^{-2}〕.

1〔轉/秒^2〕= 6.283〔弳/秒^2〕= 3600〔轉/分^2〕

1〔弳/秒^2〕 = 573〔轉/分^2〕= 0.1592〔轉/秒^2〕

(8)質量,〔M〕.

1〔仟克〕= 35.27〔英兩〕= 2.205〔磅〕= 9.842×10^{-4}〔長噸〕

= 1.102×10^{-3}〔短噸〕= 2.205×10^{-3}〔仟磅〕

1〔磅〕 = 0.4536〔仟克〕= 16〔英兩〕= 4.464×10^{-4}〔長噸〕

= 5×10^{-4}〔短噸〕= 4.536×10^{-4}〔米噸〕

1〔長噸〕= 1.016〔米噸〕= 1.120〔短噸〕.

【註】〔仟克〕又名〔公斤〕.

(9)**密度**,〔ML^{-3}〕.

1〔仟克/米³〕= 6.243 × 10^{-2}〔磅/呎³〕= 3.613 × 10^{-5}〔磅/吋³〕

1〔磅/吋³〕= 27.68〔克/厘米³〕= 1728〔磅/呎³〕

(10)**力**,〔MLT^{-2}〕或〔F〕

1〔仟克〕= 9.807 × 10^{5}〔達因〕= 9.807〔焦耳/米〕= 2.205〔磅〕

= 70.93〔磅達〕= 2〔斤〕

1〔達因〕= 1.020 × 10^{-3}〔克〕= 10^{-7}〔焦耳/厘米〕= 2.248 × 10^{-6}〔磅〕

= 7.233 × 10^{-5}〔磅達〕

1〔磅〕= 4.448 × 10^{4}〔達因〕= 453.6〔克〕= 4.448〔焦耳/米〕

= 32.17〔磅達〕

1〔磅達〕= 1.383 × 10^{5}〔達因〕= 14.10〔克〕= 0.1383〔焦耳/米〕

= 3.108 × 10^{-2}〔磅〕

(11)**力矩**,〔$ML^{2}T^{-2}$〕或〔FL〕.

1〔仟克•米〕= 7.233〔磅•呎〕= 9.807 × 10^{7}〔達因•厘米〕

1〔磅•呎〕= 0.1383〔仟克•米〕= 1.356 × 10^{7}〔達因•厘米〕

(12)**壓力,或應力**〔$ML^{-1}T^{-2}$〕或〔FL^{-2}〕

1〔仟克/米²〕= 0.2048〔磅/呎²〕= 1.422 × 10^{-3}〔磅/吋²〕

= 9.678 × 10^{-5}〔大氣壓力〕= 7.356 × 10^{-3}〔厘米,汞柱高〕

= 2.896 × 10^{-3}〔吋,汞柱高〕= 3.937 × 10^{-2}〔吋,水柱高〕

1〔大氣壓力〕= 76.00〔厘米,汞柱高〕= 29.92〔吋,汞柱高〕

= 406.3〔吋,水柱高〕= 33.90〔呎,水柱高〕

= 1.033 × 10^{-3}〔仟克/米²〕= 14.70〔磅/吋²〕

= 1.058〔短噸/呎²〕

1〔磅/吋²〕 = 703.1〔仟克/米²〕 = 6.895 × 10^4〔達因/厘米²〕

= 6·804 × 10^{-2}〔大氣壓力〕 = 5.171〔厘米，汞柱高〕

= 2.036〔吋，汞柱高〕 = 27.68〔吋，水柱高〕

= 0.072〔短噸/呎²〕

(註)，汞柱高係指在 0°C 者，水柱高係指在 4°C 者。

(13) 功與能，〔ML^2T^{-2}〕或〔FL〕。

1〔米•仟克〕 = 7.233〔呎•磅〕 = 3.653 × 10^{-6}〔馬力•時〕 = 9.807〔焦耳〕

= 2.724 × 10^{-6}〔仟瓦•時〕 = 2.343 × 10^{-3}〔仟卡〕

= 9.293 × 10^{-3}〔英國熱量單位〕 = 9.807 × 10^7〔爾格〕

1〔仟瓦•時〕 = 1.341〔馬力•時〕 = 2.655 × 10^6〔呎•磅〕

= 3413〔英國熱量單位〕 = 860.0〔仟卡〕

= 3.671 × 10^{10}〔厘米•克〕 = 3.6 × 10^{13}〔爾格〕

= 3.6 × 10^6〔焦耳〕

1〔呎•磅〕 = 0.1383〔米•仟克〕 = 3.766 × 10^{-7}〔仟瓦•時〕 = 1.356〔焦耳〕

= 3.239 × 10^{-4}〔仟卡〕 = 1.285 × 10^{-3}〔英國熱量單位〕

1〔馬力•時〕 = 0.7457〔仟瓦•時〕 = 2.737 × 10^5〔米•仟克〕

= 2.684 × 10^{13}〔爾格〕 = 2.684 × 10^6〔焦耳〕

= 2545〔英國熱量單位〕 = 641.3〔仟卡〕 = 1 98 × 10^6〔呎•磅〕

(14) 功率，〔ML^2T^{-3}〕或〔FLT^{-1}〕。

1〔仟瓦〕 = 1.341〔馬力〕 = 737.6〔呎•磅/秒〕 = 56.89〔英國熱量單位/分〕

= 14.33〔仟卡/分〕 = 10^{10}〔爾格/秒〕

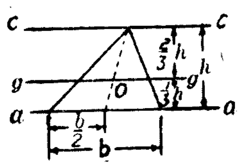
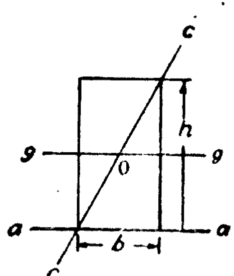
1〔馬力〕 = 0.7457〔仟瓦〕 = 7.457 × 10^9〔爾格/秒〕

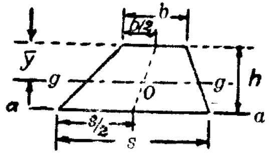
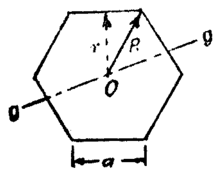
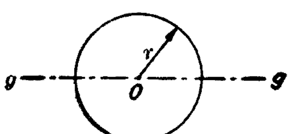
= 42.41〔英國熱量單位/分〕 = 550〔呎•磅/秒〕 = 10.69〔仟卡/分〕

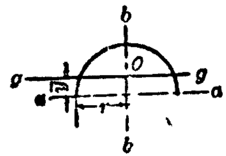
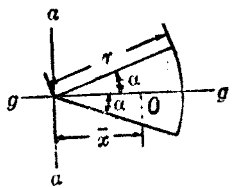
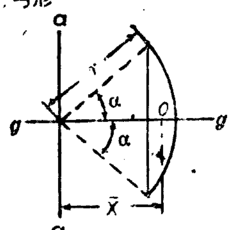
(註) 1〔馬力〕 = 745.7〔瓦〕(英，美)，1〔馬力〕 = 735.5〔瓦〕(歐洲大陸)。

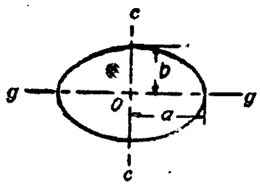
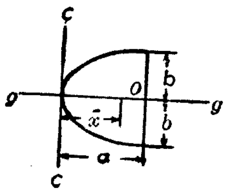
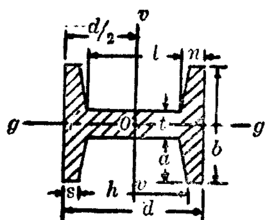
歐洲大陸所採用之馬力，又稱爲〔米馬力〕(metric horse power)

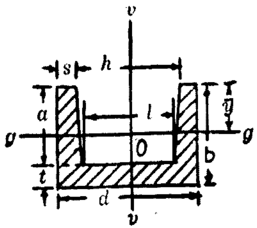
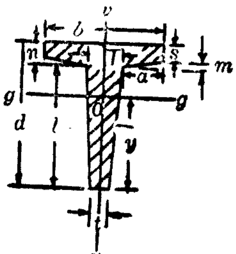
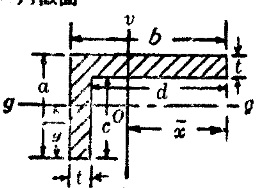
11. 形心位置，慣矩，及迴轉半徑

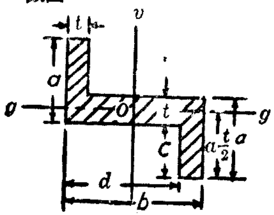
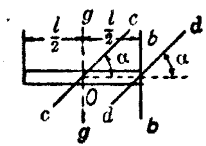
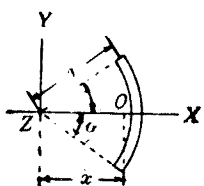
名稱及圖形	形心位置（或重心）	慣矩	迴轉半徑
（1）三角形 	在三角形中線之交點．與 $a-a$ 線間之垂直距離 $= \frac{1}{3}h$．	$I_g = \frac{bh^3}{36}$， $I_a = \frac{bh^3}{12}$， $I_c = \frac{bh^3}{4}$．	$k_g = \frac{h}{3\sqrt{2}}$， $k_a = \frac{h}{\sqrt{6}}$， $k_c = \frac{h}{\sqrt{2}}$．
（2）長方形與正方形 	在兩對角線之交點，	$I_g = \frac{bh^3}{12}$， $I_a = \frac{bh^3}{3}$， $I_c = \frac{b^3h^3}{6(b^2+h^2)}$， $J_o = \frac{bh(b^2+h^2)}{12}$， 對於正方形，$b=h$．	$k_g = \frac{h}{2\sqrt{3}}$， $k_a = \frac{h}{\sqrt{3}}$， $k_c = \frac{bh}{\sqrt{6(b^2+h^2)}}$， $k_o = \sqrt{\frac{b^2+h^2}{12}}$． 對於正方形，$b=h$．

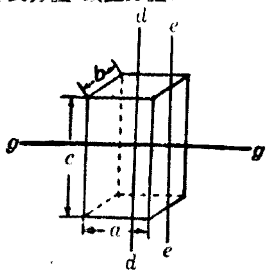
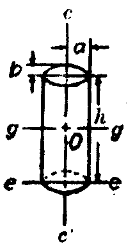
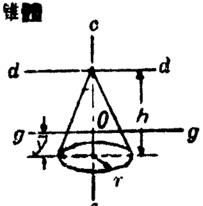
(3)梯形 	$\bar{y}=\frac{h}{3}\left(\frac{b+2s}{b+s}\right)$	$I_g=\frac{h^3(b^2+4bs+s^2)}{36(b+s)}$, $I_a=\frac{h^3(s+3b)}{12}$.	$k_g=\frac{h\sqrt{2(b^2+4bs+s^2)}}{6(b+s)}$, $k_a=\frac{h}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{s+3b}{s+b}}$.
(4)正多邊形 	卽幾何中心	$I_g=\frac{\text{面積}(6R^2-a^2)}{24}$, $=\frac{\text{面積}(12r^2+a^2)}{48}$, $J_o=\frac{\text{面積}(6R^2-a^2)}{12}$, $=\frac{\text{面積}(12r^2+a^2)}{24}$. g-g 爲經過形心之任何軸.	$k_g=\sqrt{\frac{6R^2-a^2}{24}}$, $=\sqrt{\frac{12r^2+a^2}{48}}$, $k=\sqrt{\frac{6R^2-a^2}{12}}$, $=\sqrt{\frac{12r^2+a^2}{24}}$.
(5)圓形 	卽幾何中心	$I_g=\frac{\pi r^4}{4}$, $J_o=\frac{\pi r^4}{2}$.	$k_g=\frac{r}{2}$, $k_o=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

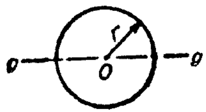
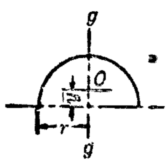
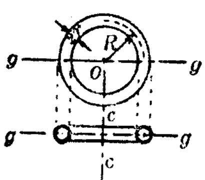
(6) 半圓 	$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$	$I_g = \frac{r^4(9\pi^2 - 64)}{72\pi}$, $= 0.1098\,r^4$. $I_a = I_b = \frac{\pi r^4}{8}$. $J_o = r^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi}\right)$, $= 0.5025\,r^4$.	$k_g = \frac{r\sqrt{9\pi^2 - 64}}{6\pi}$, $= 0.264\,r$. $k_a = k_b = \frac{r}{2}$, $k_o = r\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}}$, $= 0.566\,r$.
(7) 扇形 	$\bar{x} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	$I_g = \frac{Ar^2}{4}\left(1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$ $I_a = \frac{Ar^2}{4}\left(1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$ (A = 面積 $= r^2\alpha$).	$k_g = \frac{r}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}}$ $k_a = \frac{r}{2}\sqrt{1 + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}}$
(8) 弓形 	$\bar{x} = \frac{2r^3\sin^3\alpha}{3A}$ (A = 面積 $= \frac{r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{2}$)	$I_g = \frac{Ar^2}{4}\left[1 - \frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right]$ $I_a = \frac{Ar^2}{4}\left[1 + \frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right]$	$k_g = \frac{r}{2}\sqrt{1 - \frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}}$ $k_a = \frac{r}{2}\sqrt{1 + \frac{2\sin^3\alpha\cos\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}}$

(9)橢圓 	在幾何中心	$I_g = \frac{\pi a b^3}{4}$ $I_c = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $J_o = \frac{\pi a b\,(a^2 + b^2)}{4}$	$k_g = \frac{b}{2}$ $k_c = \frac{a}{2}$ $k_o = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$
(10)拋物線弓形 	$\bar{x} = \frac{3a}{5}$	$I_g = \frac{4ab^3}{15}$ $I_c = \frac{4a^3 b}{7}$	$k_g = \frac{b}{\sqrt{5}} = 0.447b$ $k_c = a\sqrt{\frac{3}{7}} = 0.654\,a$
(11) I 截面 	在幾何中心	$I_v = \frac{1}{12}[bd^3 - \frac{1}{4q}(h^4 - l^4)]$ 其中 $q = \frac{h-l}{b-t}$ 標準 I 截面之 $q = \frac{1}{6}$ $I_g = \frac{1}{12}[b^3(d-h) + lt^3$ $+ \frac{q}{4}(h^4 - t^4)]$	$k_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$ $k_g = \sqrt{\frac{I_g}{A}}$ 其中 $A \doteq dt + 2a(s+n)$

(12) U 截面 	$\bar{y} = b - [b^2 s + \frac{ht^2}{2}$ $+\frac{q}{3}(b-t)^2(b+2t)]$ $\div A$, 其中 $q = \frac{h-l}{2(b-t)}$, A = 面積, $= dt + a(s+n)$.	$I_v = \frac{1}{12}[bd^3 - \frac{1}{8q}(h^4 - l^4)]$, 標準 U 截面之 $q = \frac{1}{6}$, $I_g = \frac{1}{3}[2sb^3 + lt^3$ $+\frac{q}{2}(b^4 - t^4)]$ $-A(b-y)^2$.	$k_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$, $k_g = \sqrt{\frac{I_g}{A}}$.
(13) T 截面 	$\bar{y} = d - [3s^2(b+T)$ $+2am(m+3s)$ $+3Td^2$ $-l(T-t)(3d-l)]$ $\div 6A$, 其中 A = 面積, $= \frac{(t+T)l}{2} + Tn + a(s+n)$,	$I_g = \frac{1}{12}[l^3(T+3t) + 4bn^2$ $-2am^3] - A(d-y-n)^2$. $I_v = \frac{sb^3 + mT^3 + lt^3}{12}$ $+\frac{am[2a^2 + (2a+3T)^2]}{36}$ $+\frac{l(T-t)[(T-t)^2 + 2(T+2t)^2]}{144}$.	$k_g = \sqrt{\frac{I_g}{A}}$, $k_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$,
(14) 角截面 	$\bar{x} = b - \frac{t(2d+a)+d^2}{2(d+a)}$, $\bar{y} = a - \frac{t(2c+b)+c^2}{2(c+b)}$.	$I_v = \frac{1}{3}[t\bar{x}^3 - a(b-\bar{x})^3$ $-(a-t)(b-\bar{x}-t)^3]$, $I_g = \frac{1}{3}[t\bar{y}^3 - b(a-\bar{y}^3)$ $-(b-t)(a-y-t)^3]$,	$k_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$, $k_g = \sqrt{\frac{I_g}{A}}$, 其中 $A = t(a+b-t)$.

(15) Z截面 	在幾何中心。	$I_v=\dfrac{ab^3-c(b-2t)^3}{12}$, $I_g=\dfrac{b(a+c)^3-2c^3d-6a^2cd}{12}$.	$k_v=\sqrt{\dfrac{ab^3-c(b-2t)^3}{12t[b+2(a-t)]}}$, $k_g=\sqrt{\dfrac{b(a+c)^3-2c^3d-6a^2cd}{12t[b+2(a-t)]}}$.
(16)細直桿 	在幾何中心。	$I_g=\dfrac{Ml^2}{12}$, $I_b=\dfrac{Ml^2}{3}$, $I_c=\dfrac{Ml^2\sin^2\alpha}{12}$, $I_d=\dfrac{Ml^2\sin^2\alpha}{3}$, M = 桿之質量;	$k_g=\dfrac{l}{\sqrt{12}}$, $k_b=\dfrac{l}{\sqrt{3}}$, $k_c=\dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{12}}$, $k_d=\dfrac{l\sin\alpha}{\sqrt{3}}$.
(17)圓弧 	$\bar{x}=\dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$.	$I_x=\dfrac{Mr^2}{2}\left(1-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$, $I_y=\dfrac{Mr^2}{2}\left(1+\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha}\right)$, $I_z=Mr^2$.	$k_x=r\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\alpha}}$, $k_y=r\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\alpha}}$, $k_z=r$.

(18) 長方體(或正方體) 	幾何中心 (若 $a=b=c$ 則成正方體)	$I_g=\frac{M(b^2+c^2)}{12}$, $I_d=\frac{M(a^2+b^2)}{12}$, $I_e=\frac{M(4a^2+b^2)}{12}$.	$k_g=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{12}}$, $k_d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$, $k_e=\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{12}}$.
(19) 橢圓柱體(或圓柱體) 	幾何中心 (若 $a=b$，則成圓柱體)	$I_g=\frac{M}{12}(3b^2+h^2)$, $I_c=\frac{M}{4}(a^2+b^2)$, $I_e=\frac{M}{12}(3b^2+4h^2)$.	$k_g=\sqrt{\frac{3b^2+h^2}{12}}$, $k_c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $k_e=\sqrt{\frac{3b^2+4h^2}{12}}$.
(20) 圓錐體 	$\bar{y}=\frac{h}{4}$	$I_g=\frac{3M}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)$, $I_c=\frac{3Mr^2}{10}$, $I_d=\frac{3M}{20}(r^2+4h^2)$.	$k_g=\sqrt{\frac{3}{80}(4r^2+h^2)}$, $k_c=\sqrt{\frac{3}{10}}r$, $k_d=\sqrt{\frac{3}{20}(r^2+4h^2)}$.

(21)圓球 	在幾何中心.	$I_g = \frac{2Mr^2}{5}$.	$k_g = \frac{2r}{\sqrt{10}}$.
(22)半圓 	$\bar{y} = \frac{3}{8}r$.	$I_g = \frac{2Mr^2}{5}$.	$k_g = \frac{2r}{\sqrt{10}}$.
(23)圓環 	在幾何中心.	$I_g = \frac{M(4R^2 + 5r^2)}{8}$, $I_c = \frac{M(4R^2 + 3r^2)}{4}$.	$k_g = \sqrt{\frac{4R^2 + 5r^2}{8}}$, $k_c = \frac{\sqrt{4R^2 + 3r^2}}{2}$.

索引

六 畫

七 畫

十一畫

十二畫

十三畫

十四畫

十五畫

英 漢 索 引

D

E

S

T

U