Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 31

Konsequenzen für meromorphe Funktionen

Satz 31.1. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma(X, \mathcal{T}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{M}) \to \Gamma(X, \mathcal{T})).$$

Die erste Kohomologie der Strukturgarbe entspricht also den globalen Hauptteilverteilungen modulo den Hauptteilverteilungen zu meromorphen Funktionen.

Beweis. Nach Lemma 18.12 haben wir die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0\,.$$

Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz enthält

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{T}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}) \longrightarrow\ .$$

Es genügt daher zu zeigen, dass die Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{T}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

surjektiv ist. Nach Aufgabe 30.13 ist für hinreichend viele Punkte $P_1, \ldots, P_n$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^n P_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^n P_i)/\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

derart, dass

$$\delta\colon\ H^0(X, \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^n P_i)/\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

surjektiv ist. Wegen

$$\mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^n P_i) \subseteq \mathcal{M}$$

hat man einen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^n P_i)/\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O}_X = \mathcal{T}$$

und der verbindende Homomorphismus faktorisiert dadurch. □

Korollar 31.2. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.1. □

Eine wichtige Ergänzung zum Residuensatz ist die folgende Aussage.

Korollar 31.3. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche und es sei $\tau \in \Gamma\big(X, \mathcal{T}^{(1)}\big)$ eine Hauptteilverteilung von meromorphen Differentialformen. Dann ist τ genau dann die Hauptteilverteilung zu einer meromorphen Differentialform auf X, wenn das Gesamtresiduum $\sum_{P \in X} \operatorname{Res}_P(\tau)$ gleich 0 ist.*

Beweis. Die Hinrichtung wurde in Satz 17.13 gezeigt, da eine die Hauptteilverteilung realisierende meromorphe Funktion außerhalb des Trägers holomorph ist. Aufgrund von Lemma 18.15 und Korollar 31.2, angewendet auf $\mathcal{M}^{(1)}$, haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{M}^{(1)}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{T}^{(1)}) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow 0\,.$$

Die Verteilung τ kommt genau dann von links, wenn sie unter dem verbindenden Homomorphismus nach 0 abbildet, was wegen der Residueneigenschaft der Fall ist. □

Eine topologische Konsequenz

Lemma 31.4. *Auf einer kompakten zusammenhängenden riemannschen Fläche X vom Geschlecht g besitzt $H^1(X, \mathbb{C})$, wobei $\mathbb{C}$ hier die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ bezeichnet, die Dimension $2g$.*

Beweis. Aus der kurzen exakten Garbensequenz (siehe Lemma 15.8)

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \longrightarrow 0$$

erhält man die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \Omega_X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X) \longrightarrow$$

von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Wegen des Zusammenhangs sind die beiden ersten Terme gleich $\mathbb{C}$. Hinten haben wir $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ gemäß Bemerkung 25.8 verwendet. Ferner weiß man aus der Topologie $H^2(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Wegen Korollar 30.6 ist $H^1(X, \Omega_X)$ eindimensional, es liegt also hinten auch ein Isomorphismus vor. Dies zusammen bedeutet, dass eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega_X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

vorliegt. Die Räume links und rechts haben nach Korollar 30.9 die Dimension g, also besitzt der Raum in der Mitte die Dimension $2g$. □

Die Formel von Riemann-Hurwitz

Ein Foto von Hurwitz mit Riemann gibt es leider nicht. Dafür haben wir eins mit Einstein und Tochter Hurwitz.

Definition 31.5. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Fläche X und Y. Man nennt den Divisor R, der für jeden Punkt $P \in X$ die Ordnung

$$R_P = \operatorname{Verz}(P|\varphi(P)) - 1$$

zugewiesen bekommt, den *Verzweigungsdivisor* von φ.

Lemma 31.6. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Fläche X und Y mit dem Verzweigungsdivisor R. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Der Verzweigungsdivisor ist in der Tat ein Divisor.*
(2) *Es ist φ genau in den Punkten des Trägers von R verzweigt.*
(3) *Wenn φ lokal auf offenen Kreisscheiben $U \subseteq X$ bzw. $V \subseteq Y$ durch eine holomorphe Funktion $f\colon U \to V$ beschrieben wird, so ist für $P \in U$ die Ordnung R_P gleich der Nullstellenordnung von f' in P.*

Beweis. Siehe Aufgabe 31.1. □

Lemma 31.7. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es liegt die Untergarbenbeziehung*

$$\varphi^*\Omega_Y \subseteq \Omega_X$$

vor.

(2) *Die Restklassengarbe $\Omega_X/\varphi^*\Omega_Y$ besitzt endlichen Träger, und es gilt*

$$(\Omega_X/\varphi^*\Omega_Y)_P = \mathbb{C}^{R_P}$$

mit

$$R_P = \operatorname{Verz}(P|\varphi(P)) - 1.$$

(3) *Zwischen den kanonischen Divisoren besteht die Beziehung*

$$K_X \sim \varphi^* K_Y + R.$$

Beweis. (1) Der Rückzug von Differentialformen liefert einen Garbenhomomorphismus

$$\varphi^* \Omega_Y \longrightarrow \Omega_X.$$

Lokal liegt auf offenen Kreisscheiben eine Abbildung

$$f\colon U \longrightarrow V,\, z \longmapsto f(z) = w,$$

vor. Die Differentialform dw wird nach $f'(z)dz$ zurückgezogen. Da f nicht konstant ist, ist f' nicht die Nullfunktion. Es liegt somit lokal ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X & \stackrel{1 \mapsto f'}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_X \\ 1 \mapsto dw \downarrow & & \downarrow 1 \mapsto dz \\ \varphi^* \Omega_Y & \longrightarrow & \Omega_X \end{array}$$

vor, wobei die vertikalen Abbildungen Isomorphien sind. Da die obige Abbildung als Garbenhomomorphismus injektiv ist, gilt dies auch für die untere.

(2) Es liegt insgesamt die Situation einer invertierbaren Garbe als Untergarbe einer invertierbaren Garbe vor, damit besitzt auf der kompakten riemannschen Fläche X die Restklassengarbe automatisch endlichen Träger, siehe Lemma 28.1. In der Situation von Teil (1) wird die Restklassengarbe lokal als $\mathcal{O}_X / f' \mathcal{O}_X$ beschrieben bzw. halmweise durch

$$(\mathcal{O}_X / f' \mathcal{O}_X)_P = \mathcal{O}_{X,P} / f' \mathcal{O}_{X,P}.$$

Dieser Restklassenring ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $\operatorname{ord}_P(f')$. Dies ist nach Lemma 31.6 die Verzweigungsordnung von φ in P weniger 1.

(3) Dies folgt aus (2).

□

Die folgende Aussage heißt *Riemann-Hurwitz-Formel*.

Satz 31.8. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann gilt für die Geschlechter die Beziehung*

$$2g(X) - 2 = \operatorname{Grad}(\varphi)(2g(Y) - 2) + \operatorname{Grad}(R).$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 31.7, Satz 30.10 und Lemma 19.20. □

Korollar 31.9. *Es sei $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung auf einer kompakten zusammenhängenden riemannschen Fläche X. Dann gilt zwischen dem Geschlecht von X, dem Grad von φ und dem Verzweigungsdivisor R die Beziehung*

$$g(X) \,=\, -\operatorname{Grad}(\varphi) + \frac{\operatorname{Grad}(R)}{2} + 1.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 31.8 und Lemma 27.2. □

Korollar 31.10. *Es sei $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung von der projektiven Geraden in sich. Dann gilt zwischen dem Grad von φ und dem Verzweigungsdivisor R die Beziehung*

$$\operatorname{Grad}(R) \,=\, 2(\operatorname{Grad}(\varphi) - 1).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.3. □

Die folgende Aussage kann man auch mit Aufgabe 31.7 erhalten.

Korollar 31.11. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann gilt für die Geschlechter die Abschätzung*

$$g(X) \,\geq\, g(Y).$$

Beweis. Wegen der Effektivität des Verzweigungsdivisors besitzt dieser einen nichtnegativen Grad und daher folgt aus Satz 31.8 direkt

$$2g(X) - 2 \,\geq\, \operatorname{Grad}(\varphi)(2g(Y) - 2) \,\geq\, (2g(Y) - 2)$$

und somit die Behauptung. □

Die folgende Aussage heißt *Satz von Lüroth*.

Korollar 31.12. *Es sei $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung, wobei Y eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche sei. Dann ist Y ebenfalls die projektive Gerade.*

Beweis. Nach Lemma 27.2 ist

$$g\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\right) \,=\, 0,$$

somit ist nach Korollar 31.11 auch $g(Y) \,=\, 0$. Mit Lemma 27.3 ergibt sich wiederum, dass Y biholomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist. □

Korollar 31.13. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine Überlagerung zwischen kompakten zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann ist φ ein Isomorphismus oder $g(X) \,=\, g(Y) \,=\, 1$ oder $g(X) \,>\, g(Y) \,\geq\, 2$.*

Beweis. Unverzweigt bedeutet mit Lemma 31.6 (2), dass der Verzweigungsdivisor trivial ist und damit insbesondere den Grad 0 besitzt. Aus Satz 31.8 ergibt sich die Bedingung

$$g(X) - 1 \,=\, \operatorname{Grad}(\varphi)(g(Y) - 1).$$

Dies führt zu den angegebenen Möglichkeiten. □

Beispiel 31.14. Auf einem komplexen Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ ist die Multiplikationsabbildung

$$[n]\colon\, \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma,\ [z] \longmapsto n[z],$$

eine Überlagerung vom Grad n^2, da jeder Punkt genau n^2 Bildpunkte besitzt, vergleiche Lemma 8.14. Ein solches Verhalten ist nach Satz 31.8 nur bei Geschlecht 1 möglich.

Beispiel 31.15. Die Operation der Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ auf der Sphäre $S^2 \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, bei der das nichttriviale Element antipodale Punkte ineinander überführt werden, ist fixpunktfrei. Daher liegt nach Satz 7.10 eine Überlagerung

$$S^2 \longrightarrow S^2/\sim$$

vor. Nach Korollar 31.13 in Verbindung mit Lemma 27.2 kann diese Operation (also die Antipodenabbildung) nicht holomorph sein. In der Tat ist der Quotient $S^2/\sim$ keine riemannsche Fläche, sondern die nicht orientierbare reell-projektive Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, vergleiche Lemma 5.10.

Hyperelliptische Kurven

Jede kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche X besitzt nach Satz 26.3 eine endliche holomorphe Abbildung

$$\varphi\colon\, X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}.$$

Man kann sich fragen, was dabei der minimale Grad ist, mit dem man X oberhalb der projektiven Geraden realisieren kann. Grad 1 ist nur bei einem Isomorphismus möglich, also wenn X selbst die projektive Gerade ist. Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1 (also komplexe Tori bzw. elliptische Kurven) lassen sich durch eine endliche holomorphe Abbildung vom Grad 2 realisieren, siehe etwa den Beweis zu Satz 26.2. Es gibt aber auch kompakte riemannsche Fläche von einem Geschlecht ≥ 2, die sich mit Grad 2 realisieren lassen.

Definition 31.16. Eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche X heißt *hyperelliptisch*, wenn es eine endliche holomorphe Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

vom Grad 2 gibt und das Geschlecht von $X \geq 2$ ist.

Beispiele ergeben sich aus Korollar 2.8, Lemma 9.5 und Lemma 14.13. Viele Aussagen wie auch die folgende über hyperelliptische riemannsche Flächen gelten in der Regel erst recht auch für elliptische riemannsche Flächen, entscheidend ist die Existenz der Abbildung vom Grad 2.

KOROLLAR 31.17. *Es sei X eine hyperelliptische riemannsche Fläche mit einer endlichen holomorphen Abbildung $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ vom Grad 2. Dann gilt für das Geschlecht g und den Verzweigungsdivisor R von φ die Beziehung*

$$\operatorname{Grad}(R) = 2g + 2.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.9. □

Abbildungsverzeichnis