

## Singularitätentheorie

### Vorlesung 16

Wir besprechen in dieser Vorlesung Vorbereitungen, um die Multiplizität einer Singularität als Eigenschaft des lokalen Ringes algebraisch erfassen zu können.

### Graduierte Moduln

DEFINITION 16.1. Es sei  $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$  ein kommutativer  $\mathbb{Z}$ -graduierter Ring. Ein  $R$ -Modul  $M$  mit einer direkten Summenzerlegung

$$M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d,$$

wobei die  $M_d$  Moduln über  $R_0$  sind und wobei die Skalarmultiplikation die Eigenschaft

$$R_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$$

für alle  $d, e \in \mathbb{Z}$  erfüllt, heißt  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ .

Dabei heißt  $M_d$  die  $d$ -te Stufe des Moduls. Wenn  $R_d = 0$  bzw.  $M_d = 0$  für negative  $d$  ist, so spricht man  $\mathbb{N}$ -graduierten Ringen bzw. Moduln. Wenn

$$R_0 = K$$

ein Körper ist, so sind sämtliche Stufen  $M_d$  Vektorräume über  $K$ . Ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Ring  $R$  ist ein graduierter Modul über sich selbst. Ebenso ist jedes homogene Ideal (also ein von homogenen Elementen erzeugtes Ideal)  $I \subseteq R$  ein graduierter Untermodul und

$$R/I = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d/I_d$$

ist ein graduierter Restklassenmodul.

DEFINITION 16.2. Es sei  $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$  ein kommutativer  $\mathbb{Z}$ -graduierter Ring und seien  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  und  $N = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} N_d$  graduierte Moduln über  $R$ . Ein  $R$ -Modulhomomorphismus

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

heißt *homogen*, wenn  $\varphi(M_d) \subseteq N_d$  für alle  $d \in \mathbb{Z}$  gilt.

Manchmal nennt man die vorstehenden Homomorphismen auch graduierte Homomorphismen vom Grad 0 und nennt auch solche Homomorphismen homogen, bei denen der Grad um eine bestimmte Zahl verschoben wird. Solche Verschiebungen kann man aber auch durch Verschiebungen in der Graduierung beschreiben.

DEFINITION 16.3. Es sei  $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$  ein kommutativer graduierter Ring und  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Zu  $n \in \mathbb{Z}$  versteht man unter  $M(n)$  den gleichen, aber mit der Graduierung

$$(M(n))_d := M_{n+d}$$

versehenen Modul. Man nennt ihn den um den Grad  $n$  verschobenen Modul.

Speziell spielen die  $R(n)$  eine wichtige Rolle. Wenn  $v \in M$  ein homogenes Element vom Grad  $d$  eines graduierten  $R$ -Moduls ist, so gehört dazu der homogene Modulhomomorphismus

$$R(-d) \longrightarrow M, 1 \longmapsto v.$$

LEMMA 16.4. Es sei  $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d$  ein kommutativer  $\mathbb{Z}$ -graduierter Ring und  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Wenn  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul ist, so wird er auch von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt und es gibt einen surjektiven homogenen Modulhomomorphismus der Form

$$\bigoplus_{i=1}^k R(-d_i) \longrightarrow M.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 16.4. □

## Die Hilbertfunktion

DEFINITION 16.5. Es sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$ . Es sei  $M$  ein  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$  mit der Eigenschaft, dass die homogenen Stufen  $M_n$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume sind. Dann nennt man die Funktion

$$H_M: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto \dim_K(M_n),$$

die *Hilbertfunktion* zu  $M$ .

BEISPIEL 16.6. Sei  $R = K[X_1, \dots, X_m]$  der Polynomring in  $m$  Variablen über einem Körper  $K$ . Dann gibt es nach Aufgabe 4.6 genau  $\binom{n+m-1}{m-1}$  Monome vom Grad  $n$ . Dies ist somit die  $K$ -Vektorraumdimension der  $n$ -ten Stufe des standard-graduierten Polynomringes. Die Hilbertfunktion des graduierten  $R$ -Moduls  $R$  ist also

$$H_R(n) = \binom{n+m-1}{m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+m-1) \cdots (n+1)}{(m-1)!} \\
&= \frac{1}{(m-1)!} n^{m-1} + \frac{m}{2(m-2)!} n^{m-2} + \text{kleinere Terme.}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist die Hilbertfunktion ein Polynom mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Q}$ , das aber an jeder natürlichen Stelle eine natürliche Zahl als Wert besitzt.

In einer Variablen ist  $H_R$  konstant  $= 1$ , in zwei Variablen ist  $H_R(n) = n + 1$ , in drei Variablen ist  $H_R(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ , in vier Variablen ist  $H_R(n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1$ .

LEMMA 16.7. *Es sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$  und sei  $M$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Dann sind die homogenen Stufen  $M_n$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume.*

*Beweis.* Zunächst ist  $R$  ein Restklassenring eines standard-graduierten Polynomringes und somit sind die homogenen Stufen von  $R$  nach Beispiel 16.6 endlichdimensional. Nach Lemma 16.4 gilt dies auch für die Stufen des Moduls.  $\square$

DEFINITION 16.8. Eine Funktion  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt von *polynomialen Typ*, wenn es ein Polynom  $P \in \mathbb{Q}[X]$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $f(n) = P(n)$  für alle  $n \geq n_0$  gibt.

LEMMA 16.9. *Sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$  und sei  $M$  ein endlich erzeugter graduierter  $R$ -Modul. Dann ist die Hilbertfunktion  $H_M$  von polynomialem Typ.*

*Beweis.* Zunächst sind nach Lemma 16.7 die Stufen  $M_d$  endlichdimensional, so dass die Hilbertfunktion wohldefiniert ist. Nach Voraussetzung ist das irrelevante Ideal  $R_+ = \bigoplus_{d \geq 1} R_d$  endlich erzeugt, und zwar wird es von Elementen aus  $R_1$  erzeugt. Wir führen Induktion über die Erzeugendenanzahl  $r$  dieses Ideals. Bei  $r = 0$  ist  $R = R_0 = K$  ein Körper und  $M$  ist als ganzes ein endlichdimensionaler Vektorraum. Deshalb sind alle Stufen  $M_d$  zu hinreichend großen  $d$  gleich 0. Zum Induktionsschluss sei  $R_+ = (f_1, \dots, f_r)$  und  $M$  ein endlicher erzeugter graduierter  $R$ -Modul. Der Restklassenring  $S = R/(f_r)$  ist ebenfalls standard-graduiert und sein irrelevantes Ideal besitzt einen Erzeuger weniger, auf ihn können wir also die Induktionsvoraussetzung anwenden. Der Restklassenmodul  $N = M/(f_r)M$  ist (ein graduierter  $R$ - und damit auch) ein graduierter  $S$ -Modul. Folglich gibt es ein Polynom

$$Q \in \mathbb{Q}[X]$$

mit  $H_N(d) = Q(d)$  für  $d$  hinreichend groß. Es liegt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L = \{m \in M \mid f_r \cdot m = 0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f_r} M(1) \longrightarrow (M/f_r M)(1) \longrightarrow 0$$

von graduierten endlich erzeugten  $R$ -Moduln vor. Dabei ist der Modul links ebenfalls ein  $S$ -Modul, und somit gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein

weiteres Polynom  $T \in \mathbb{Q}[X]$  mit  $H_L(d) = T(d)$  für  $d$  hinreichend groß. Da sich die Vektorraumdimensionen für exakte Komplexe von  $K$ -Vektorräumen additiv verhalten, gilt

$$H_M(d+1) - H_M(d) = H_N(d) - H_L(d) = Q(d) - T(d)$$

für  $d$  hinreichend groß. Ab einem gewissen  $d_0$  verhält sich also der Zuwachs von  $H_M(d)$  polynomial und daher ist nach Lemma Anhang 9.4 die Funktion  $H_M(d)$  selbst polynomial.  $\square$

LEMMA 16.10. *Es sei  $F \in P = K[X_1, \dots, X_m]$  ein homogenes Polynom  $\neq 0$  vom Grad  $d$ . Dann ist die Hilbertfunktion von  $R = K[X_1, \dots, X_m]/(F)$  gleich (die zweite Gleichung gilt für  $n \geq d$ )*

$$H_R(n) = H_P(n) - H_P(n-d) = \frac{d}{(m-2)!} n^{m-2} + \text{kleinere Terme.}$$

*Beweis.* Es liegt eine kurze exakte Sequenz von graduierten  $P$ -Moduln

$$0 \longrightarrow P(-d) \xrightarrow{\cdot F} P \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

und damit auch für jede Stufe eine kurze exakte Sequenz von endlichdimensionalen  $K$ -Vektorräumen

$$0 \longrightarrow P_{n-d} \xrightarrow{\cdot F} P_n \longrightarrow R_n \longrightarrow 0$$

vor. Daher gilt

$$H_R(n) = H_P(n) - H_P(n-d).$$

Nach Beispiel 16.6 ist

$$H_P(n) = \binom{n+m-1}{m-1}$$

für  $n \geq 0$ . Somit ist für  $n \geq d$

$$\begin{aligned} H_R(n) &= H_P(n) - H_P(n-d) \\ &= \binom{n+m-1}{m-1} - \binom{n-d+m-1}{m-1} \\ &= \frac{(n+m-1) \cdots (n+1)}{(m-1)!} - \frac{(n-d+m-1) \cdots (n-d+1)}{(m-1)!} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{m(m-1)}{2} + (m-1)d - \frac{m(m-1)}{2} \right) n^{m-2} + \text{kleinere Terme} \\ &= \frac{d}{(m-2)!} n^{m-2} + \text{kleinere Terme.} \end{aligned}$$

$\square$

Aufgrund von Lemma 16.9 ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION 16.11. Es sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$  und sei  $M$  ein endlicher erzeugter  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Dann nennt man das eindeutig bestimmte Polynom

$$P_M \in \mathbb{Q}[X]$$

mit  $H_M(n) = P_M(n)$  für  $n \gg 0$  das *Hilbertpolynom* zu  $M$ .

DEFINITION 16.12. Es sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$  und sei  $M$  ein endlicher erzeugter  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Das Hilbertpolynom zu  $M$  habe die Form

$$P_M(d) = \alpha_m d^m + \cdots + \alpha_1 d + \alpha_0$$

mit  $\alpha_m \neq 0$ . Dann nennt man

$$e(M) := m! \cdot \alpha_m$$

die *Multiplizität* von  $M$ .

Wenn das Hilbertpolynom das Nullpolynom ist, so betrachtet man  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K(M_i)$  als die Multiplizität. Diesen Ausnahmefall kann man umschiffen, wenn man das kumulative Hilbertpolynom betrachtet, siehe die Aufgaben.

SATZ 16.13. *Die Multiplizität des Polynomringes über einem Körper ist 1.*

*Beweis.* Nach Beispiel 16.6 ist das Hilbertpolynom eines Polynomringes in  $m$  Variablen gleich  $\frac{1}{(m-1)!}n^{m-1} + \frac{m}{2(m-2)!}n^{m-2} +$  kleinere Term. Multiplikation des Leitkoeffizienten mit der Fakultät des Grades ergibt 1.  $\square$

SATZ 16.14. *Es sei  $F \in P = K[X_1, \dots, X_m]$  ein homogenes Polynom  $\neq 0$  vom Grad  $d$ . Dann ist die Multiplizität von  $R = K[X_1, \dots, X_m]/(F)$  gleich  $d$ .*

*Beweis.* Dies folgt aus der expliziten Berechnung in Lemma 16.10.  $\square$

SATZ 16.15. *Es sei  $R$  ein standard-graduierter Ring über einem Körper  $R_0 = K$  und sei  $M$  ein endlicher erzeugter  $\mathbb{Z}$ -graduierter Modul über  $R$ . Dann ist die Multiplizität von  $M$  eine natürliche Zahl.*

*Beweis.* Diese Eigenschaft gilt nach Korollar Anhang 9.6 für jede Funktion von polynomialen Typ.  $\square$



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7