ISSN 0321—4796

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 14

Сборник научных трудов

Калининград — 1983

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 14

Сборник научных трудов

Калининград - 1983

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 514.75

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов.-Калининград, изд.Калининград. ун-та, 1983, с.128.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в трехмерных и многомерных пространствах, дифференцируемые отображения, связности, теория гиперполос, теория сетей и распределений.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Библиография: 68 названий.

Содержание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Б. А к м а т о в

КЛАССИФИКАЦИЯ (f,ξ,η,ρ)-СТРУКТУР,ИНДУЦИРОВАННЫХ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В МНОГООБРАЗИИ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ M_n

Н.Д.Поляков провел классификацию $(f\xi\eta\rho)$-структур на дифференцируемом многообразии M_n [2].

В настоящей работе рассматриваются распределения m-мерных линейных элементов $(m>2)$ коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n, оснащенные полем двумерных нормалей ν ,и проводится классификация структур,индуцированных на распределении Λ^2 исходными структурами.

В основу классификации положено взаимное расположение элемента распределения Λ_x и его образа $F\Lambda_x$ (где F -аффинор почти комплексной структуры),а также расположение нормали ν_x относительно образа $F\Lambda_x$ и образа $F\nu_x$ самой нормали в каждой точке.

Как известно,в многообразии почти комплексной структуры на распределении линейных элементов Λ ,оснащенном полем нормалей,естественным образом индуцируется $(f\xi\eta\rho)$-структура [1] со структурными объектами $(f^i_j,\xi^i_\alpha,\eta^\beta_j,\rho^\beta_\alpha)$, удовлетворяющими конечным соотношением

$$\begin{gathered} f^i_k f^k_j = -\delta^i_j + \xi^i_\alpha \eta^\alpha_j, \\ f^i_k \xi^k_\alpha = -\rho^\beta_\alpha \xi^i_\beta, \quad f^i_k \eta^\alpha_i = -\rho^\alpha_\beta \eta^\beta_k, \\ \rho^\alpha_\gamma \rho^\gamma_\beta = -\delta^\alpha_\beta + \xi^k_\beta \eta^\alpha_k \end{gathered} \tag{1}$$

и известными дифференциальными уравнениями.

Будем предполагать,что индексы пробегают следующие значения: $i,j,k,\ldots = 1,2,\ldots,m$; $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = n-1,n$.

Если выполняются условия:

1/ $\Lambda_x \cap F\Lambda_x = \lambda_x$, $\dim \lambda_x = 2m-n$,

2/ $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$, 3/ $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$,

то индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой общего типа.

Положив в основу классификации взаимное расположение Λ_x и $F\Lambda_x$ для распределения Λ^2, вводим следующие три класса:

Класс I. $\Lambda_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$. (2)

Этот класс возможен, когда коразмерность элементов больше или равна их размерности, т.е. $n-m \geqslant n$.

Класс II. $0 < \dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = \dim \lambda_x < m$. (3)

Для распределения элементов коразмерности два в этом случае $\dim \lambda_x = 2m-n = m-2$. Условия (3) эквивалентны условию

$$\operatorname{rang} \| \eta^\alpha_i \| = 2 \tag{4}$$

Класс III.

$$\dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = m. \tag{5}$$

Это F -инвариантное распределение элементов коразмерности два. Условия (5) эквивалентны условию

$$\operatorname{rang} \| \eta^\alpha_i \| = 0. \tag{6}$$

Перейдем к рассмотрению классов II и III.

Класс II.

а/ Пусть $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$. Из этого следует, что

$$\operatorname{rang} \| \xi^i_\alpha \| = 2 \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что подпространства ξ_x и η_x в каждом элементе на распределении Λ^2 определяют π- -структуру [2].

Рассмотрим три подслучая: I. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$. Это условие эквивалентно условию $\operatorname{rang} \| \rho^\alpha_\beta \| = 2$. На основании теоремы ранга и коранга $(f\xi\eta\rho)$-структуры (см. Н.М. Остиану и Н.Д. Поляков [1], [2]) получим $\operatorname{rang} \| f^i_j \| = m$. В этом случае на распределении Λ^2 естественным образом возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура рода $(m, 2, m-2, 2)$. Компоненты структурных объектов

удовлетворяют конечным соотношениям (1). (Понятие рода $(f\xi\eta\rho)$ -структуры введено Н.Д. Поляковым [2]).

2. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = S_x$; $\dim S_x = 1$. Проведем канонизацию репера так, чтобы вектор $\vec{\nu}_{n-1}$ совпадал с направляющим вектором пересечения $\nu_x \cap F\Lambda_x$. Из этого следует, что $\vec{\nu}_{n-1} \in \Lambda_x$, следовательно.

$$\rho^\alpha_{n-1} = 0, \tag{8}$$

и ρ^n_n -абсолютный инвариант. При выполнении (8) конечные соотношения (1) упростятся. В этом случае матрица $\| \rho^\alpha_\beta \|$ имеет следующий вид: $\| \rho^{n-1}_n \ \rho^n_n \|$. Здесь возможны два подслучая: 1/ $\rho^n_n \neq 0$, 2/ $\rho^n_n = 0$, $\rho^{n-1}_n \neq 0$. При $\rho^n_n \neq 0$ репер можно канонизировать так, чтобы $\rho^{n-1}_n = 0$. В этом случае $\operatorname{rang} \| f^i_j \| = m-1$, и, следовательно, $\operatorname{rang} \| \rho^\alpha_\beta \| = 1$. Индуцированная структура будет $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m-1, 2, m-2, 1)$. При $\rho^n_n = 0$ ρ^{n-1}_n становится абсолютным инвариантом. В предположении $\rho^{n-1}_n \neq 0$, на распределении Λ^2 возникает другая $(f\xi\eta\rho)$ -структура того же рода. 3. Пусть $\nu_x \cap F\Lambda_x = S_x$, $\dim S_x = 2$ (т.е. $\nu_x \in F\Lambda_x$). Из разложения

$$F\vec{\nu}_\alpha = -\xi^\kappa_\alpha \vec{\Lambda}_\kappa + \rho^\beta_\alpha \vec{\nu}_\beta. \tag{9}$$

следует, что

$$\rho^\alpha_\beta = 0.$$

Так как $\operatorname{rang} \| \rho^\alpha_\beta \| = 0$, то $\operatorname{rang} \| f^i_j \| = m-2$, т.е. индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m-2, 2, m-2, 0)$.

в/ $\nu_x \cap F\nu_x = q_x$, $\dim q_x = 1$. Такой случай в многообразии почти комплексной структуры невозможен.

с/ $\nu_x \cap F\nu_x = q_x$, $\dim q_x = 2$. В этом случае $\operatorname{rang} \| \xi^i_\alpha \| = 0$. При условии с/ имеет место лишь подслучай:

1. $\nu_x \cap F\Lambda_x = \{x\}$, и, следовательно, индуцированная структура является $(f\xi\eta\rho)$ -структурой рода $(m, 0, m-2, 2)$. Подслучаи 2 и 3 невозможны.

З а м е ч а н и е 1. $(f\xi\eta\rho)$ -структуры класса IIa и в классификации Н.Д. Полякова [2] относятся к классу A_1 и соответствуют строке № 2 таблицы 1. $(f\xi\eta\rho)$ -структура класса IIc по классификации Н.Д. Полякова относится к классу A_2. Класс III. $\dim(\Lambda_x \cap F\Lambda_x) = m$ (т.е. $\Lambda_x \equiv F\Lambda_x$). В этом случае $\eta^\alpha_i = 0$. а). $\nu_x \cap F\nu_x = \{x\}$.

Следовательно, $\operatorname{rang}\|\xi^i_\alpha\|=2$, и на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$ - структура рода $(m,2,m,2)$.

в/ $\gamma_x \cap F\gamma_x = S_x$, $\dim S_x = 1$.

Такой случай в классе III невозможен.

с/ $\gamma_x \cap F\gamma_x = S_x$, $\dim S_x = 2$,т.е. $(\gamma_x \equiv F\gamma_x)$.

Это условие эквивалентно равенству $\xi^i_\alpha=0$. В этом случае на распределении Λ^2 возникает $(f\xi\eta\rho)$ -структура рода $(m,0,m,2)$,т.е. почти комплексная структура.

З а м е ч а н и е 2. $(f\xi\eta\rho)$-структура класса IIIа в классификации Н.Д.Полякова [2] относится к классу A_2 , а класса IIIс к классу A_1 и соответствует строке 1 таблицы 1.

Имеют место следующие предложения:

П р е д л о ж е н и е 1. На распределении элементов коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n ,в случае,когда элемент Λ_x пересекается образом $F\Lambda_x$ по минимально возможной размерности при всевозможных оснащениях распределения Λ^2 полями двумерных нормалей,индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m-2,2)$, $(m-1,2,m-2,1)$, $(m-2,2,m-2,0)$, $(m,0,m-2,2)$ и только такие.

П р е д л о ж е н и е 2. На распределении элементов коразмерности два в многообразии почти комплексной структуры M_n ,в случае,когда элемент Λ_x совпадает с образом $F\Lambda_x$,при различном оснащении распределения Λ^2 полями двумерных нормалей индуцируются $(f\xi\eta\rho)$-структуры следующих родов: $(m,2,m,2)$, $(m,0,m,2)$ и только такие.

Список литературы

1.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях.- В сб.:Проблемы геом. Т.7.Итоги науки и техн. М.,1975,с.5-22.

2.Поляков Н.Д. Классификация $(f\xi\eta.\rho)$-структур.- В сб.:Проблемы геометрии .Т.14. Итоги науки и техн. .М.,1982,с.57-72.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Б.А.А н д р е е в

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ И ГИПОХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ f

Продолжается изучение локального дифференцируемого отображения f [4],[5] точечного (проективного или аффинного) пространства P_N в пространство $R(p,q)$ неинцидентных пар (p,q) ,состоящих из точки p и невырожденной гиперквадрики q проективного пространства P_n , причем $N=\operatorname{rang}(p,q)$ [1] и $\operatorname{rang} f=N$ в каждой точке области определения.Введены понятия характеристических,собственно характеристических и гипохарактеристических направлений,являющиеся обобщениями понятия характеристических направлений теории точечных отображений [3].

Получены различные геометрические характеристики введенных понятий.В статье используются обозначения, принятые в работах [4],[5].

Пусть P° -произвольная точка области определения отображения f ,$(p^\circ,q^\circ)=f(P^\circ)$, i -отображение,которое паре (p,q) ставит в соответствие индуцируемую ею пару нуль-пару (p,π) , $(p^\circ,\pi^\circ)=i(p^\circ,q^\circ)$, $F=(i\circ f)^{-1}(p^\circ,\pi^\circ)$, а $\mathcal{F}$ -многообразие невырожденных гиперквадрик q ,относительно которых элементы пары (p°,π°) находятся в полярном соответствии.Имеем: $P^\circ\in F$, $\dim F=\dim\mathcal{F}=N-2n\overset{d}{=}\bar N$. Пусть $\mathfrak{h}$ -многообразие пар (p,q) ,для которых C -образы [5,стр.7] $C(q)$ гиперквадрик q совпадают с гиперквадрикой q° ,а $\mathcal{H}=f^{-1}(\mathfrak{h})$.Имеем: $P^\circ\in\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{H}=2n$, и многообразия F и $\mathcal{H}$ трансверсальны в P°.Обозначим касательные подпространства к F и $\mathcal{H}$ в P° соответственно L и H .Поместим вершины R_α $(\alpha,\dots=\overline{1,\bar N})$ и $R_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha,\dots=\overline{\bar N+1,N})$ подвижного репера пространства P_N

соответственно в подпространства L и H, построенные для точки $P^\circ = R_0$. Тогда для компонентов фундаментального объекта 1-го порядка отображения f получаем: $\Lambda^i_\alpha = 0, \Lambda_{i\alpha} = 0, \Lambda_{ij\hat\alpha} = 0$. Из (2.5)-(2.7) [4] при этом вытекает:

$$\Lambda_{ij\alpha} V^{\alpha k\ell} = \frac{1}{2}\delta^k_{(i}\delta^\ell_{j)}, \quad \Lambda_{ij\alpha} V^{\beta ij} = \delta^\beta_\alpha, \quad \Lambda^i_{\hat\alpha} V^{\hat\alpha}_j = \delta^i_j,$$
$$\Lambda_{i\hat\alpha} V^{\hat\alpha j} = \delta^j_i, \quad \Lambda^i_{\hat\alpha} V^{\hat\beta}_i + \Lambda_{i\hat\alpha} V^{\hat\beta i} = \delta^{\hat\beta}_{\hat\alpha}. \tag{1}$$

Зафиксируем в P_N гиперплоскость $\Pi^\circ \not\ni P^\circ$ и поместим в нее вершины R_J ($J,\ldots = \overline{1,N}$) репера. На множестве $P_N \setminus \Pi^\circ$ подгруппа стационарности гиперплоскости Π° действует как группа аффинных преобразований. Охватываемые фундаментальным объектом 2-го порядка отображения f системы величин

$$\Gamma^{\hat\alpha}_{JK} = V^{\hat\alpha i}\Lambda_{iJK} + V^{\hat\alpha}_i \Lambda^i_{JK}, \quad \Gamma^\alpha_{JK} = V^{\alpha ij}\Lambda_{ijJK} \tag{2}$$

являются тензорами. Пусть $(p, q) = f(P)$, а $Q = C(q)$ - C-образ гиперквадрики q, построенный с помощью нуль-пары (p°, π°). Тогда отображение $f_Q : P \in P_N \mapsto Q \in \mathcal{F}$ задается формулой (2.3) [5]. Для тензора $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ из (1),(2) получаем

$$\Lambda_{ij\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Lambda_{ij\gamma}. \tag{3}$$

Легко убедиться, что формы Ω^α_0, $\theta^\alpha_\beta \stackrel{d}{=} \Omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \Omega^0_0 - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\gamma_0$ удовлетворяют на многообразии F уравнениям структуры пространства аффинной связности, и, т.о., тензор $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ определяет на F аффинную связность. Будем обозначать эту связность Γ, а связность, определяемую на F нормалями H, -буквой γ. Сравнивая (3) с. (5.2) [3], приходим к выводу, что связность Γ является аналогом связности Врэнчану [3, §5] точечного соответствия для отображения $\varphi = f_Q|_F$.

Направление в P°, задаваемое тензором Λ^J, будем называть характеристическим направлением, если Λ^J удовлетворяет системе

$$\Lambda_{ijJK}\Lambda^J\Lambda^K - 2\sigma\Lambda_{ijJ}\Lambda^J = 0. \tag{4}$$

Такие направления рассматривались в [5]. Характеристическое направление, лежащее в L, будем называть собственно характеристическим направлением.

П р е д л о ж е н и е 1. Направление, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой $\ell: R \to P_N$ будет характеристическим в том и только в том случае, если фокальные многообразия [2, с. 117] кривой $f_Q \circ \ell$ 1-го и 2-го ранга для гиперквадрики $f_Q(P^\circ)$ совпадают.

П р е д л о ж е н и е 2. Направление, касательное к многообразию F, будет собственно характеристическим в том и только в том случае, если определяющие это направление геодезические связностей Γ и γ имеют геометрическое касание 2-го порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть рассматривемое направление определяется тензором Λ^J, где $\Lambda^{\hat\alpha} = 0$. Геодезические связностей Γ и γ имеют соответственно следующие разложения по степеням своих канонических параметров:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha t - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma t^2 + \langle 3\rangle, \quad x^{\hat\alpha} = \langle 2\rangle, \tag{5}$$
$$x^\alpha = \Lambda^\alpha\tau + \langle 3\rangle, \quad x^{\hat\alpha} = \langle 2\rangle. \tag{6}$$

Из условия геометрического касания этих кривых получаем: $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha\Lambda^\beta - 2k\Lambda^\gamma = 0, \Lambda^{\hat\alpha} = 0$, что эквивалентно системе , определяющей собственно характеристические направления.

Конус χ характеристических направлений, наряду с системой (4), можно задавать с помощью эквивалентной ей системы

$$\Lambda_{p[i|JK}\Lambda_{q|j]L}\Lambda^J\Lambda^K\Lambda^L = 0, \tag{7}$$

как это делается в теории точечных соответствий (см. (1.14) [3]). В нашем случае можно ввести в рассмотрение конус $\bar\chi$, определяемый системой

$$a^{pq}\Lambda_{p[i|JK}\Lambda_{q|j]L}\Lambda^J\Lambda^K\Lambda^L = 0, \tag{8}$$

где a^{pq} -тензор, взаимный тензору a_{ij}, определяющего гиперквадрику q° уравнениями (1.1) [4].

О п р е д е л е н и е 1. Направления, определяемые конусом $\bar\chi$ (8), называются гипохарактеристическими направлениями.

Очевидно, любое характеристическое направление является гипохарактеристическим: $\chi \subset \bar\chi$. Для геометрической характеристики гипохарактеристических направлений рассмотрим касательное к φ в точке P° отображение K:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ij\alpha}X^{\alpha}. \qquad (9)$$

Пусть a -параллельный перенос подпространства L аффинного пространства $A_N=P_N\setminus\Pi^\circ$ на лежащий в L вектор A с координатами $-V^{\alpha ij}a_{ij}$. Вектор A является значением отображения K^{-1} на сдвоенной гиперплоскости π°. Композицию $\bar{K}=K\circ a$: $b_{ij}=\Lambda_{ij\alpha}X^{\alpha}$ будем называть псевдокасательным в P° отображением. Отображение $\bar{K}$ определено на подпространстве L. Пусть $B=L\setminus\bar{K}^{-1}(F)$. Заметим, что B -граница $\bar{K}^{-1}(F)$ в L. Пусть $R(q,\tau)$ -многообразие всех инцидентных пар (q,τ), где τ -точка, а $q\in F$. Отображение $\bar{K}$ порождает отображение $\varkappa: R(q,\tau)\to B$, определяемое следующим образом. Пусть $Q(q,\tau)$ -гиперквадрика, распавшаяся на пару плоскостей, одна из которых касается гиперквадрики q в точке τ, а другая- во второй точке пересечения прямой $[p^\circ,\tau]$ с гиперквадрикой q. Положим $\varkappa(q,\tau)=\bar{K}^{-1}(Q(q,\tau))$. Рассмотрим семейство гиперквадрик $q^\circ(t)$: $ta_{ij}x^ix^j+(x^\circ)^2=0$, гомологичных гиперквадрике q° при гомологиях с центром p° и гиперплоскостью π°. Подпространство L находится в естественном взаимно-однозначном соответствии с множеством касательных в точке P° к многообразию F векторов. Поэтому указанное векторное пространство также будем обозначать L. Пусть $v\in L$, $q=\bar{K}(v)$, а $T(v)$ -множество точек, в которых гиперквадрики семейства $q^\circ(t)$ касаются гиперквадрики $\bar{K}(v)$.

О п р е д е л е н и е 2. θ -оболочкой $\theta(v)$ вектора $v\in L$ будем называть линейную оболочку множества

$$\bigcup_{\tau\in T(v)}\{\varkappa(\bar{K}(v),\tau)\}. \qquad (10)$$

Легко показать: 1/ $v\in\theta(v)$, 2/ $u\in\theta(v)\Rightarrow v\in\theta(u), \forall u,v\in L$.
Из определения 2 получаем уравнения θ -оболочки вектора $v=\{Y^{\alpha}\}$:

$$a^{pq}\Lambda_{pi[\alpha}\Lambda_{|qj|\beta]}Y^{\alpha}Y^{\beta}=0. \qquad (11)$$

Пусть кривая $\ell: R\to P_N$, $\ell(0)=P^\circ$ инфлексионна в P°, т.е. разложение ее в ряд Тейлора имеет вид $X^J=\Lambda^J t+\frac{1}{2}k\Lambda^J t^2+\langle 3\rangle$, $t\in R$. Пусть $\Lambda=\{\Lambda^J\}\notin H$. Проекцию вектора Λ с началом в P° вдоль H на L обозначим $\pi(\Lambda)$.

П р е д л о ж е н и е 3. Направление Λ, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой ℓ, будет характеристическим в том и только в том случае, если для кривой $K^{-1}\circ f_Q\circ\ell$: $Y^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}t+\frac{1}{2}M^{\alpha}t^2+\langle 3\rangle$ вектор $\{M^{\alpha}\}\in L$ коллинеарен вектору $\pi(\Lambda)$.

П р е д л о ж е н и е 4. Направление Λ, определяемое в точке P° инфлексионной в ней кривой ℓ, будет гипохарактеристическим в том и только в том случае, если для кривой $K^{-1}\circ f_Q\circ\ell$ вектор $\{M^{\alpha}\}$ принадлежит θ -оболочке вектора $\pi(\Lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.3)[5] и (9) получаем: $M^{\alpha}=\Gamma^{\alpha}_{JK}\Lambda^J\Lambda^K+k\Lambda^{\alpha}$. Доказываемые предложения теперь вытекают из (8),(11).

Предложения 3 и 4 показывают, что понятие гипохарактеристических направлений является обобщением понятия характеристических направлений.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.-Тр. геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР,1969,с.179-206.

2.Малаховский В.С.,Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974,с.113-134.

3.Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, Геометрия ,1963 ,1965,с.65-107.

4.Андреев Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.2,Калининград,1971,с.28-37.

5.Андреев Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q).-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград,1975,с.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14
1983

УДК 514.75

И.И.Баглаев

ПРОСТРАНСТВО ГИПЕРКВАДРИК АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Гиперквадрики проективного пространства P_n можно рассматривать как точки проективного пространства S_N $(N=\frac{1}{2}n(n+3))$. В S_N действует группа $PL(n,R)$ проективных преобразований пространства P_n. Обозначим через Δ_p $(p=0,1,\ldots,n-1)$ многообразия вырожденных гиперквадрик ранга $\leq n-p$. Фильтрация $S_N \supset \Delta_0 \supset \ldots \supset \Delta_{n-1}$ инвариантна относительно $PL(n,R)$ [1], [4]. Пространство S_N будем называть пространством гиперквадрик пространства P_n, а линейные подпространства размерности m пространства P_n - линейными системами гиперквадрик (л.с.гк.) размерности m.

1. Пусть $\bar{A}_n$ расширенное аффинное пространство, полученное из A_n, т.е. $\bar{A}_n = A_n \cup L_0$, где L_0 - несобственная гиперплоскость пространства $\bar{A}_n$. Пару гиперплоскостей, одна из которых является несобственной, будем называть несобственной гиперквадрикой пространства $\bar{A}_n$, а все остальные - собственными. Обозначим пространство гиперквадрик пространства $\bar{A}_n$ через $S_N^{\bar{A}}$, а пространство гиперквадрик пространства A_n через S_N^{A}. Множество всех несобственных гиперквадрик образует n-плоскость S_n с фиксированной в ней точкой A^{∞} - образом двойной несобственной гиперплоскости. Так как между множеством собственных гиперквадрик пространства $\bar{A}_n$ и множеством всех гиперквадрик пространства A_n существует биекция, то можно рассматривать S_N^{A} как $S_N^{\bar{A}} \setminus S_n$.

Группа преобразований $\bar{A}(n,R)$ пространства $\bar{A}_n$ оставляет инвариантной фильтрацию $S_N^{\bar{A}} \supset \Delta_0 \supset \ldots \supset \Delta_{n-1}$, плоскость S_n и точку A^{∞}. В $S_N^{\bar{A}}$ можно ввести расслоение $\pi: S_N^{\bar{A}} \to S_{N'}$, где $S_{N'}$ - пространство гиперквадрик проективного пространства P_{n-1}, $N' = \frac{1}{2}(n-1)(n+2)$. Проекция π ставит в соответствие гиперквадрике $Q \in S_N^{\bar{A}}$ квадрику $Q_{n-2} \in S_{N'}$, являющуюся пересечением Q с несобственной гиперплоскостью L_0. В $S_{N'}$ определена фильтрация $S_{N'} \supset \Delta'_0 \supset \ldots \supset \Delta'_{n-2}$. Рассмотрим многообразие $\delta_s = \pi^{-1}(\Delta'_s)$ $(s=0,1,\ldots,n-2)$. Оно состоит из параболоидов ранга $\leq n-s-1$. Следовательно, многообразие δ_s можно рассматривать как конус с вершиной S_n над поверхностью $\Delta'_s \subset S_{N'}$, если рассматривать $S_{N'}$ как одну из плоскостных образующих гиперповерхности Δ_0. Пересечение $\Delta_s \cap \delta_s$ есть множество цилиндров, имеющих $(s+1)$-мерные плоские образующие. Многообразие δ_p содержится в Δ_{p-1}.

2. Линейной системой гиперквадрик B^m размерности m в пространстве $\bar{A}_n$ называем m-плоскость в $S_N^{\bar{A}}$, а линейной системой гиперквадрик размерности m в пространстве A_n - множество всех собственных гиперквадрик л.с.гк. B^m. Все факты, касающиеся л.с.гк. пространства $\bar{A}_n$, легко переносятся на л.с.гк. пространства A_n. Поэтому в п.2 ограничиваемся рассмотрением л.с.гк. пространства $\bar{A}_n$.

Две л.с.гк. B^m и $\tilde{B}^m$ называются эквивалентными, если найдется преобразование, принадлежащее $\bar{A}(n,R) \times PL(m,R)$, которое переводит одну из них в другую. Многообразия $\Gamma_p^m = B^m \cap \Delta_p$ и $\gamma_s^m = B^m \cap \delta_s$ являются соответственно многообразиями вырожденных гиперквадрик и параболоидов, принадлежащих л.с.гк. B^m. Если две л.с.гк. B^m и $\tilde{B}^m$ эквивалентны, то алгебраические поверхности Γ_p^m и $\tilde{\Gamma}_p^m$, γ_s^m и $\tilde{\gamma}_s^m$ проективно эквивалентны на плоскости B^m.

Одномерные л.с.гк. называются пучками гиперквадрик.

Следовательно, пучок гиперквадрик B^1 - это прямая в $S^{\bar{A}}_N$. Прямая B^1 пересекает в общем случае гиперповерхности Δ_0 и δ_0 соответственно в $n+1$ и n точках, являющихся конусами и параболоидами пучка. Два пучка B^1 и $\tilde{B}^1$ эквивалентны тогда и только тогда, когда совокупности точек их пересечения с многообразиями Δ_0 и δ_0 проективно эквивалентны. С помощью теории элементарных делителей λ-матриц получен способ приведения уравнений пучков гиперквадрик к каноническим видам. Произведена подробная классификация пучков квадрик трехмерного аффинного проотранства.

Двумерные л.с.гк. B^2 называются связками гиперквадрик. Плоскость B^2 пересекает гиперповерхности Δ_0 и δ_0 по кривым Γ и γ порядка $n+1$ и n соответственно. В общем случае кривые Γ и γ пересекаются в $n(n+1)$ точках, которые являются цилиндрами связки. Классификацию связок гиперквадрик можно производить на основе проективной классификации плоских кривых Γ и γ и их взаимного расположения на плоскости B^2. Для связок квадрик пространства A_3 произведена подробная классификация, основанная на классификации плоских кривых третьего порядка.

3. Рассмотрим m-параметрическое семейство $Q(m)$ центральных невырожденных гиперквадрик Q в A_n. Отнесем его к подвижному реперу $\{A, e_i\}$ $(i=1,2,\dots,n)$. Уравнения гиперквадрики Q записываются в виде $Q(x) \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\det\|a_{\alpha\beta}\| = const$, $\alpha, \beta, \gamma = 0,1,\dots,n$. Семейство $Q(m)$ можно задать системой дифференциальных уравнений $\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\varkappa}\tau^\varkappa$ $(\varkappa = 1,2,\dots,m)$, где $\theta_{\alpha\beta}$ - структурные формы гиперквадрики Q, $\tau^\varkappa$ - инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований пространства параметров S^m. Обычным способом получим систему величин $\{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\dots\varkappa_p}\}$, являющуюся фундаментальным объектом порядка p многообразия $Q(m) \times S^m$. Система уравнений $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$,

$\Lambda_{\alpha\beta\varkappa} x^\alpha x^\beta = 0, \dots, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\dots\varkappa_p} x^\alpha x^\beta = 0$ определяет фокальное многообразие ${}^{(p)}f(m)$ гиперквадрики Q ранга p [3].

В S^A_N фундаментальный объект порядка p определяет соприкасающуюся порядка p плоскость ${}^{(p)}B(m)$ поверхности $Q(m) \subset S^A_N$. Размерность этой плоскости равна $N_p = m + \frac{1}{2}m(m+1) + \dots + \frac{1}{p!}m(m+1)\dots(m+p-1)$. Плоскость ${}^{(p)}B(m)$, являющуюся линейной системой гиперквадрик, назовем соприкасающейся порядка p линейной системой гиперквадрик семейства $Q(m)$. В работе [2] дается аналогичное определение для 1-семейств квадрик. Уравнение л.с.гк. ${}^{(p)}B(m)$ имеет вид $(a_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\varkappa} + \dots + \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\dots\varkappa_p})x^\alpha x^\beta = 0$. Если $N_p \le n$, то фокальное многообразие ${}^{(p)}f(m)$ является базисным многообразием л.с.гк. ${}^{(p)}B(m)$.

Список литературы

1. А к и в и с М.А., С а ф а р я н Л.П. К дифференциальной геометрии многообразий конусов второго порядка.- В кн.: Сб. статей по дифференциальной геометрии. Калинин, 1974, с.3-10.

2. Б а г л а е в И.И. Однопараметрические семейства центральных невырожденных квадрик в A_3. Иркутск, 1980. 18с. (Рукопись представлена Иркутским пед. интом. Деп. в ВИНИТИ 10 июля 1980, № 2945-80 ДЕП).

3. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-133.

4. Т ю р и н А.Н. О пересечении квадрик.- Успехи матем. наук, 1975, т.30, вып.6, с.51-99.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Г.П.Бочилло

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ m-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

1.В работе изучаются распределения касательных элементов [1], порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоскостных элементов, на $(2n-1)$-мерном дифференцируемом многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства (m-распределения Δ_m на многообразии M_{2n-1} ($m<n$).Гиперплоским элементом $\{A,\alpha\}$ названа пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n [2].С помощью компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения Δ_m строится инвариантное оснащение распределения Δ_m ,которое индуцирует на Δ_m аффинную связность с кручением.В работе доказано,что оснащение распределения Δ_m может быть построено с использованием компонент фундаментального подобъекта второго порядка одного из $(m-1)$-распределений, порождаемых Δ_m на M_{2n-1}. Оснащение распределения Δ_m полем гиперплоских элементов означает задание на M_{2n-1} единственного поля невырожденных гиперквадрик.

В работе индексы принимают следующие значения:
$\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=0;\overline{1,n}$; $i,j,k=\overline{1,n}$; $p,q,r=\overline{1,n-1}$;
$u,v,w,w_1=\overline{1,m-1}$; $\bar u,\bar v,\bar w=\overline{m,n-1}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m-1},n$.

2.Присоединим к каждому элементу $\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечный $R_0=\{A_\mathcal{I}\}$ и тангенциальный $\tau^0=\{\alpha^\mathcal{I}\}$ подвижные реперы, полагая $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, причем $dA_\mathcal{I}=\omega_\mathcal{I}^\mathcal{J}A_\mathcal{J}$, $d\alpha^\mathcal{I}=-\omega_\mathcal{J}^\mathcal{I}\alpha^\mathcal{J}$, где 1-формы $\omega_\mathcal{I}^\mathcal{J}$ удовлетворяют условиям:

$$d\omega_\mathcal{I}^\mathcal{J}=\omega_\mathcal{I}^\mathcal{K}\wedge\omega_\mathcal{K}^\mathcal{J},\quad \omega_0^0+\omega_1^1+\ldots+\omega_n^n=0.$$

Рассмотрим расслоение линейных реперов [3] $L(M_{2n-1})$ с базой M_{2n-1} ,типовым слоем- подгруппой стационарности гиперплоскостного элемента $\{A,\alpha\}$ и следующими структурными уравнениями:

$$d\omega_0^p=\omega_0^q\wedge(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0)+\omega_0^n\wedge\omega_n^p,\ d\omega_0^n=\omega_0^q\wedge\omega_q^n+\omega_0^n\wedge(\omega_n^n-\omega_0^0),$$

$$d\omega_p^n=\omega_0^n\wedge(-\omega_p^0)+\omega_q^n\wedge\{\delta_q^p(\omega_n^n-\omega_0^0)-(\omega_p^q-\delta_p^q\omega_0^0)\},$$

$$d(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0)=(\omega_q^r-\delta_q^r\omega_0^0)\wedge(\omega_r^p-\delta_r^p\omega_0^0)+\omega_q^n\wedge\omega_n^p+\delta_q^p\omega_n^0\wedge\omega_0^n,\quad(1)$$

$$d(\omega_n^n-\omega_0^0)=-\omega_p^0\wedge\omega_0^p+\omega_n^p\wedge\omega_p^n+2\omega_n^0\wedge\omega_0^n,$$

$$d\omega_n^p=\omega_n^0\wedge\omega_0^p+\omega_n^q\wedge(\omega_q^p-\delta_q^p\omega_0^0),\ d\omega_p^0=(\omega_p^q-\delta_p^q\omega_0^0)\wedge\omega_q^0+\omega_p^n\wedge\omega_n^0.$$

$$d\omega_n^0=\omega_n^0\wedge(\omega_0^0-\omega_n^n)+\omega_n^p\wedge\omega_p^0.$$

Из вида этих уравнений заключаем,что структурные формы $L(M_{2n-1})$ не удовлетворяют теореме Картана-Лаптева [3]и, следовательно,на $L(M_{2n-1})$ не определяют фундаментально-групповой связности.

Обозначим $\{N,\nu\}$ гиперплоский элемент из точки N ,не инцидентной α, и гиперплоскости ν ,не содержащей A . Имеет место

Т е о р е м а 1.Оснащение M_{2n-1} полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ означает задание аффинной связности на $L(M_{2n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Пусть к каждому $\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} присоединен гиперплоский элемент $\{N,\nu\}$ такой,что

$$N=A_n+a_n^pA_p+a_n^0A_0,\ \nu=\alpha^0+b_p^0\alpha^p+b_n^0\alpha^n,\qquad(2)$$
$$b_n^0=-(a_n^pb_p^0+a_n^0),$$

причем выполнены условия:

$$\nabla a_n^p+\omega_n^p=a_{ni}^p\omega_0^i+a_n^{pq}\omega_q^n,\ \nabla a_n^0+\omega_n^0=a_{ni}^0\omega_0^i+a_n^{0q}\omega_q^n,\qquad(3)$$
$$\nabla b_p^0-\omega_p^0=b_{pi}^0\omega_0^i+b_p^{0q}\omega_q^n,\ \nabla b_n^0-\omega_n^0=b_{ni}^0\omega_0^i+b_n^{0q}\omega_q^n,$$

где ∇ -известный символ [3] ковариантного дифференцирования.Перейдем к новому точечному реперу $\{B_\mathcal{I}\}$,где $B_0=A_0$ $B_p=A_p-b_p^0A_0$, $B_n=N$ и $dB_\mathcal{I}=\Omega_\mathcal{I}^\mathcal{J}B_\mathcal{J}$,

$$d\Omega_J^J=\Omega_J^K\wedge\Omega_K^J,\quad \Omega_0^0+\Omega_1^1+\ldots+\Omega_n^n=0.$$

Формы $\Omega_p^0, \Omega_n^p, \Omega_n^0$ в силу (3) выражаются лишь через базовые формы расслоения $L(M_{2n-1})$, а остальные 1-формы Ω_J^J имеют следующий вид:

$$\Omega_0^p=\omega_0^p-a_n^p\omega_0^n,\ \Omega_0^n=\omega_0^n,\ \Omega_p^n=\omega_p^n-b_p^0\omega_0^n,\ \Omega_p^q=\omega_p^q-a_n^q\Omega_p^n-$$
$$-b_p^0\omega_0^q,\ \Omega_n^n=\omega_n^n-a_n^p\omega_p^n+a_n^0\omega_0^n,\ \Omega_0^0=\omega_0^0+b_p^0\Omega_0^p+b_n^0\omega_0^n. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) внешним образом, получаем, что система форм

$$\Omega_0^p;\ \Omega_0^n,\ \Omega_p^n,\ \Omega_p^q-\delta_p^q\Omega_0^0,\ \Omega_n^n-\Omega_0^0 \tag{5}$$

удовлетворяет условиям теоремы Картана-Лаптева. Следовательно, система форм (5) определяет на $L(M_{2n-1})$ аффинную связность. Из уравнений структуры для форм (5) заключаем, что это связность с кручением.

3. Покажем, как в случае распределения Δ_m на M_{2n-1} $(m<n)$ определяется внутренним образом оснащающее его поле гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$.

Система уравнений, ассоциированная [1] с распределением Δ_m, в репере первого порядка R_1 может быть записана в виде:

$$\omega_0^{\bar u}=0,\ \omega_{\bar u}^n=0,\ \omega_u^n=\Lambda_{uv}^n\omega^v,\ (\det\|\Lambda_{uv}^n\|\neq 0) \tag{6}$$

Используя (6), получаем систему дифференциальных уравнений распределения Δ_m:

$$\omega_\alpha^{\bar u}=\Lambda_{0\alpha i}^{\bar u}\omega^i+\Lambda_0^{\bar u p}\omega_p^n,\quad \Lambda_{uv}^n\omega_{\bar u}^u=\Lambda_{\bar u v i}^n\omega^i+\Lambda_{\bar u v}^{np}\omega_p^n,$$

$$\omega_{\bar u}^0=\Lambda_{\bar u n i}^n\omega^i+\Lambda_{\bar u n}^{np}\omega_p^n,\ \nabla\Lambda_{uv}^n+\Lambda_{uv}^n\omega_0^0=\Lambda_{uvi}^n\omega^i+\Lambda_{uv}^{np}\omega_p^n, \tag{7}$$

$$\Lambda_{uv}^n\omega_n^v+\omega_n^0=\Lambda_{uni}^n\omega^i+\Lambda_{un}^{np}\omega_p^n,\quad (\omega_0^i\equiv\omega^i).$$

Нетрудно показать, что задание распределения Δ_m на M_{2n-1} эквивалентно заданию на M_{2n-1} поля m-пар $\{L_m, \ell_{n-m-1}\}$, а также отображения между прямыми в L_m, инцидентными A_0, и $(n-2)$-плоскостями в α^n, инцидентными ℓ_{n-m-1}. Справедлива

Т е о р е м а 2. Оснащение распределения Δ_m полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения Δ_m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (7) и их дифференциальные продолжения, получаем, что система величин $\gamma_1=\{\Lambda_{uv}^n, \Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar u}, \Gamma_{\bar u\alpha\beta}^n, \Gamma_{u\alpha\beta}^n\}$, где $\Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar u}=\Lambda_{0\alpha\beta}^{\bar u}+\Lambda_{0\alpha}^{\bar u v}$, $\Gamma_{\bar u\alpha\beta}^n=\Lambda_{\bar u\alpha\beta}^n+\Lambda_{\bar u\alpha}^{nv}\Lambda_{v\beta}^n$, $\Gamma_{u\alpha\beta}^n=\Lambda_{u\alpha\beta}^n+\Lambda_{un}^{nv}\Lambda_{v\beta}^n$ образует самостоятельный объект, который является подобъектом фундаментального объекта первого порядка $\Gamma_1=\{\Lambda_{uv}^n;\Lambda_{0\alpha i}^{\bar u};\Lambda_{0\alpha}^{\bar u p};\Lambda_{\bar u\alpha i}^n;\Lambda_{\bar u\alpha}^{np};\Lambda_{u\alpha i}^n;\Lambda_{u\alpha}^{np}\}$ распределения Δ_m. Согласно [4] γ_1-фундаментальный подобъект распределения Δ_m. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка распределения Δ_m $\gamma_2=\{\gamma_1, \Gamma_{0\alpha\beta\gamma}^{\bar u}, \Gamma_{\bar u\alpha\beta\gamma}^n, \Gamma_{u\alpha\beta\gamma}^n\}$. Используя компоненты γ_2, выберем точку N и гиперплоскость ν так, что

$$a_n^u=-A_{nw}A^{wu},\quad a_n^{\bar u}=0,\quad a_n^0=-\frac{1}{m-1}(a_{nu}^u+a_n^u a_n^v\Lambda_{uv}^n+a_n^{uv}\Lambda_{vu}^n),$$
$$b_u^0=\Lambda_{uv}^n a_n^v,\quad b_{\bar u}^0=0,\quad b_n^0=-(a_n^u b_u^0+a_n^0),$$

где $A_{\alpha\beta}=\Lambda_n^{uv}\Gamma_{0u(\alpha}^{\bar u}\Gamma_{|\bar u|\beta)v}^n$, $A^{uw}A_{wv}=\delta_v^u$, $\Lambda_n^{wv}\Lambda_{uw}^n=\Lambda_n^{wv}\Lambda_{wu}^n=\delta_u^v$,

$$\det\|A_{\alpha\beta}\|\neq 0,\quad A_{nn}-A_{vn}A_{nu}A_{uv}\neq 0,$$

причем $\nabla A_{\alpha\beta}+A_{\alpha\beta}(\omega_0^0+\omega_n^n)=A_{\alpha\beta i}\omega^i+A_{\alpha\beta}^p\omega_p^n$.

4. Распределение Δ_m порождает на M_{2n-1} несколько новых распределений, например, подраспределение Δ_{m-1}^*, ассоциированная с которым система

$$\omega_0^{\bar u}=0,\quad \omega_{\bar u}^n=0,\quad \omega_u^n-\Lambda_{uv}^n\omega^v=0,\quad \omega_0^n=0$$

относительно инвариантна в силу (7). Совокупность величин $\gamma_1^*=\{\Lambda_{uv}^n, \Gamma_{0uv}^{\bar u}, \Gamma_{\bar u uv}^n, \Gamma_{uvw}^n\}$ образует подобъект γ_1, который будем называть, следуя [4], фундаментальным подобъектом первого порядка подраспределения Δ_{m-1}^*. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка подраспределения Δ_{m-1}^*: $\gamma_2^*=\{\gamma_1^*, \Gamma_{0uvw}^{\bar u}, \Gamma_{\bar u uvw}^n, \Gamma_{uvww_1}^n\}$. Имеет место

Т е о р е м а 3. Оснащение распределения Δ_m полем гиперплоских элементов $\{N,\nu\}$ может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка подраспределения Δ^*_{m-1}.

Доказательство. Используя компоненты γ^*_1, построим m-распределение Δ^*_m на M_{2n-1}, ассоциированная с которым система имеет вид:

$$\omega^{\bar u}_o = \frac{1}{m-1}\Gamma^{\bar u u}_{ou}\,\omega^n_o\,,\quad \omega^n_{\bar u} = \frac{1}{m-1}\Gamma^{nu}_{\bar u u}\,\omega^n_o\,,\quad \omega^n_u = \Lambda^n_{uv}\,\omega^v_o, \tag{8}$$

где $\Gamma^{\bar u v}_{ou} = \Gamma^{\bar u}_{ouw}\Lambda^{wv}_n\,,\ \Gamma^{nv}_{\bar u u} = \Gamma^n_{\bar u uw}\Lambda^{wv}_n$.

Система (8) относительно инвариантна в силу той части системы (7), которая задает подраспределение Δ^*_{m-1} и γ^*_2. Далее, для построения оснащения Δ_m надо использовать результат теоремы 2, применив его к Δ^*_m.

5. Рассмотрим на M_{2n-1} поле невырожденных гиперквадрик, каждая из которых в локальном репере R_1 определена уравнениями $g_{\jmath\jmath}x^{\jmath}x^{\jmath}=0$, причем

$$\nabla g_{\jmath\jmath} + g_{\jmath\jmath}(\omega^o_o + \omega^n_n) = g_{\jmath\jmath K}\,\omega^K_o + g^p_{\jmath\jmath}\,\omega^n_p. \tag{9}$$

Назовем взаимным к Δ^*_{m-1} относительно распределения Δ_m на M_{2n-1} такое распределение Δ^*_{n-m}, порождаемое Δ_m, ассоциированная система которого имеет вид

$$\omega^u_o = 0,\quad \omega^n_u = 0,\quad \omega^n_o = 0,\quad \omega^n_{\bar u} = a_{\bar u\bar v}\,\omega^{\bar v}_o, \tag{10}$$

где $a_{\bar u\bar v} = -\Lambda^n_{\bar v n\bar u} - \Lambda^{uv}_n\Lambda^{\bar w}_{ou\bar u}\Lambda^n_{\bar w v\bar v}$.

Система (10) относительно инвариантна в силу уравнений (7) и их 1-го продолжения.

Теорема 4. Существует и притом единственное поле невырожденных гиперквадрик, имеющих соприкосновение второго порядка с подраспределением Δ^*_{m-1}, а также с взаимным ему относительно Δ_m распределением Δ^*_{n-m}. Элементы A_o и α^n, L_m и ℓ_{n-m-1}, L^*_{m-1} и ℓ^*_{n-m} всех трех распределений, а также N и ν оснащающего гиперплоского элемента полярно сопряжены относительно гиперквадрики поля ($L^*_{m-1} = L_m \cap \alpha^n$, $\ell^*_{n-m} = [A_o\ell_{n-m-1}]$).

Доказательство. Требуя выполнения сформулированных в теореме условий, получаем

$$g_{oo}=0,\ g_{ou}=0,\ g_{o\bar u}=0,\ g_{on}=-1,\ g_{uv}=\Lambda^n_{(uv)},$$

$$g_{un} = -a^v_n\Lambda^n_{[uv]},\ g_{\bar u\bar v} = a_{(\bar u\bar v)},\ g_{nn} = 2a^o_n - \Lambda^n_{(uv)}a^u_n,\ g_{v\bar u}=0.$$

Указанная система величин удовлетворяет уравнениям типа (9).

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.- Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.29-48

2. Онищук Н.М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного центроаффинного пространства $(m<n)$. Геометр.сб. Томск, 1979 Вып.18, с.59-71.

3. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Учебное пособие. Калинин, 1977.

4. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I. -Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.49-94.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I4 1983

УДК 514.75

Л.А.Ж а р и к о в а

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МНОГООБРАЗИИ π_{n-2}.

В n-мерном эквиаффинном пространстве A_n исследуются поля геометрических объектов на $(n-1)$-мерном многообразии (конгруэнции) π_{n-2} $(n-2)$-мерных параболоидов π.

Отнесем конгруэнцию π_{n-2} к реперу $R=\{A,e_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n)$, где A -точка пересечения с параболоидом π оси ℓ параболоида, проходящей через характеристическую точку плоскости параболоида, вектор $\vec{e}_1$ направлен по оси ℓ параболоида, векторы $\vec{e}_{\hat{i}}$ $(\hat{i},\hat{j},\hat{k}=2,\dots n-1)$ расположены в касательной плоскости P_{n-2} к параболоиду π в точке A, $\vec{e}_n$ -вне гиперплоскости параболоида π.

Тогда уравнение параболоида и система дифференциальных уравнений Пфаффа конгруэнции запишется соответственно в виде (1) и (2):

$$\begin{cases} a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}}-2x^1=0, \\ x^n_r=0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \omega^\alpha_i=\lambda^{\alpha k}\omega_k, & \omega^1_{\hat{j}}=\xi^{1k}_{\hat{j}}\omega_k, \\ \omega^i_1=\mu^{ik}\omega_k, & \omega^n_k=\varphi^{nk}\omega_k \end{cases} \tag{2}$$

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\dots+\omega^n_n=0, \tag{3}$$

где ω^α, ω^β_α -компоненты деривационных формул репера, удовлетворяющие уравнениям структуры эквиаффинного пространства $\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta$, $\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию эквиаффинности (3), причем

$$\omega^n_k=\omega_k \quad (i,j,k=1,\dots,n-1) \tag{4}$$

Анализируя систему уравнений (2), убеждаемся, что конгруэнция π_{n-2} существует и определяется с произволом (n^3-3n^2+3n-4) функций двух аргументов. Фундаментальный объект $\Gamma=\{a_{\hat{i}\hat{j}},a^k_{\hat{i}\hat{j}},\lambda^{\alpha k},\mu^{ik},\varphi^{nk},\xi^{1k}_{\hat{j}}\}$ является основным объектом многообразия π_{n-2}.

Исследуя геометрический смысл компонент объекта Γ, убеждаемся, что 1/симметрический тензор $\{a_{\hat{i}\hat{j}}\}$ определяет параболоид π; 2/линейные однородные объекты $\{\lambda^{\alpha k}\}$, $\{\mu^{ik}\}$ определяют касательную плоскость к поверхности (A) и индикатрису вектора $\vec{e}_1$ соответственно; 3/вдоль направления $\omega_1=0$ индикатриса вектора $\vec{e}_1$ лежит в плоскости P_{n-1} параболоида π; 4/следующие утверждения эквивалентны: а/ касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с гиперплоскостью параболоида, б/тензор λ^{ni} является нулевым, в/точка A - единственная сильно фокальная точка конгруэнции, причем системы уравнений (5) и (6) определяют фокальное и сильно фокальное многообразие конгруэнции π_{n-2} соответственно:

$$\begin{cases} a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}}-2x^1=0, \quad x^n=0, \\ [a^k_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}}-2a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{j}}(x^1\mu^{\hat{i}k}+\lambda^{\hat{i}k})]\omega_k=0, \\ (x^k-\lambda^{nk})\omega_k=0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}}-2x^1=0, \quad x^n=0, \\ a^k_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{i}}x^{\hat{j}}-2a_{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{j}}(x^1\mu^{\hat{i}k}+\lambda^{\hat{i}k})=0, \\ x^k-\lambda^{nk}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Список литературы

1.Малаховский В.С. Многообразия алгебраических элементов в п-мерном проективном пространстве.-Тр.Томского ун-та,1963,т.168,вып.3,с.28-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

С.В.Киреева

О ПАРЕ СЕТЕЙ

В данной работе рассматривается отображение f области Ω проективного пространства P_n в область $\overline{\Omega}\subset P_n$, переводящее точку A в точку B. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством плоскостей: $A\to\Pi_{n-1}(A)$, $B\to\Pi_{n-1}(A)$. Изучаются объекты отображения f и его характеристические направления.

п.1. Пусть в проективном пространстве P_n заданы две диффеоморфные области $\Omega,\overline{\Omega}$ ($\Omega\cap\overline{\Omega}=\varnothing$). Диффеоморфизм $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\overline{\Omega}$ ($B\neq A$). Область Ω нормализована в смысле А.П.Нордена некоторым семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A)$: $A\to\Pi_{n-1}(A)$. Область $\overline{\Omega}$ нормализована тем же семейством гиперплоскостей: $B\to\Pi_{n-1}(B)=\Pi_{n-1}(A)$.

Пусть в области Ω задана сеть Σ_n. Отображение f переводит сеть Σ_n в сеть $\overline{\Sigma}_n\subset\overline{\Omega}$. К областям $\Omega,\overline{\Omega}$ присоединим подвижные реперы $\mathcal{R}^A=\{A,A_i\}$; $\mathcal{R}^B=\{B,B_i\}$, где A_i, B_i -нормальные точки [6] касательных к линиям $\omega^i,\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n,\overline{\Sigma}_n$. Точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i,\quad \vec{B}_i=\gamma^j_i\vec{A}_j \tag{1}$$

Во всей работе индексы i,j,k,ℓ,m пробегают значения $1,2\ldots,n$, а индексы $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ значения $0,1,2,\ldots,n$. Запишем деривационные формулы реперов $\mathcal{R}^A$: $d\vec{A}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\vec{A}_\beta$ и $\mathcal{R}^B$: $d\vec{B}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\vec{B}_\beta$,

где формы ω^β_α, $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства P_n.

Известно [3], что отображение f может быть задано следующими дифференциальными уравнениями:

$$\overline{\omega}^i=\omega^i. \tag{2}$$

Уравнения

$$d\gamma^i-\gamma^i\omega^0_0-\gamma^i\gamma^j\omega^0_j+\omega^i+\gamma^j\omega^i_j=\gamma^i_j\,\omega^j \tag{3}$$

получены путем дифференцирования тождеств (1). Они определяют дифференциалы $d\gamma^i$ в репере $\mathcal{R}^A$.

При продолжении уравнений (3) получим:

$$d\gamma^i_j-\gamma^i_k\omega^k_j+\gamma^k_j\omega^i_k-(\gamma^k\gamma^i_j+\gamma^i\gamma^k_j)\omega^0_k=\gamma^i_{jm}\omega^m,\quad \gamma^i_{jm}=\gamma^i_{mj}. \tag{4}$$

Если продолжим теперь систему уравнений (4), то будем иметь:

$$d\gamma^i_{jm}+\gamma^i_{jm}\omega^0_0-\gamma^i_{j\ell}\omega^\ell_m+\gamma^k_{jm}\omega^i_k-\gamma^i_{km}\omega^k_j+\gamma^i_m\omega^0_j+$$
$$+\gamma^i_j\omega^0_m-(\gamma^i_m\gamma^k_j+\gamma^k_m\gamma^i_j+\gamma^k_{jm}\gamma^i+\gamma^i_{jm}\gamma^k)\omega^0_k=\gamma^i_{jmp}\omega^p, \tag{5}$$

где γ^i_{jmp} -симметричны по всем нижним индексам.

Область $\Omega\subset P_n$ нормализована семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A)$, и в ней задана сеть Σ_n, поэтому формы ω^j_i ($i\neq j$), ω^0_i -главные [1],[2]:

$$\omega^j_i=a^j_{ik}\omega^k,\ (i\neq j);\quad \omega^0_i=a^0_{ik}\omega^k. \tag{6}$$

Обозначим через π^β_α значение форм ω^β_α при закрепленных первичных параметрах: $\omega^i=0$. В нашем случае: $\pi^j_i=0$ ($i\neq j$), $\pi^0_i=0$. Из уравнений (3),(4),(5) следует, что

$$\delta\gamma^i=\gamma^i(\pi^0_0-\pi^i_i);\quad \delta\gamma^i_j=\gamma^i_j(\pi^j_j-\pi^i_i),\ (i\neq j);$$
$$\delta\gamma^i_{jm}=\gamma^i_{jm}(\pi^j_j+\pi^m_m-\pi^i_i-\pi^0_0),\ (i\neq j),\quad \delta\gamma^i_i=0.$$

Легко показать, что при фиксированных i,j,m каждое из полученных уравнений вполне интегрируемо.

Функция γ^i (i -фиксировано) является относительным инвариантом. Обращение его в нуль означает, что точка B лежит в гиперплоскости $(AA_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n)$. Если все относительные инварианты γ^i ($i=1,2,\ldots n$) равны нулю, то точки A и B совпадают. Этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Геометрический объект $\gamma^i_j\ (i \neq j)$ тоже является относительным инвариантом. Если $\gamma^{i_0}_{j_0} = 0$, то точка B_{j_0} принадлежит $(n-2)$-плоскости $(A_1 \dots A_{i_0-1} A_{i_0+1} \dots A_n)$. Линия $\ell \subset \Omega$, как и линия $\bar{\ell} = f(\ell) \subset \bar{\Omega}$ проективного пространства P_n, называется двойной линией [4] отображения f, если в каждой точке $A \in \ell$ касательная к линии ℓ в этой точке пересекает касательную к линии $\bar{\ell}$ в точке $B = f(A)$.

Пусть все относительные инварианты $\gamma^i_j\ (i \neq j)$ равны нулю, тогда $\vec{B}_j = \gamma^j_j \vec{A}_j$. В этом случае все линии ω^i сети Σ_n-двойные в отображении f, но не общего вида, а специального, так как касательные $(AA_i), (BB_i)$ к линиям ω^i и $\bar{\omega}^i$ пересекались в точках $A_i = B_i$, лежащих в заданной нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.

Такие линии удобно называть двойными Π-линиями отображения f. Покажем, что для отображения $f: \Omega \to \bar{\Omega} \mid A \to B$ и заданных нормализаций $A \to \Pi_{n-1}(A);\ B \to \Pi_{n-1}(B)$ существует единственная сеть двойных Π-линий.

Пусть точка A смещается по некоторой кривой ℓ: $\omega^i = \ell^i \theta$, где $D\theta = \theta \wedge \theta_1$, $d\vec{A} = \omega^0_0 \vec{A} + \theta \vec{L}$, $\vec{L} = \ell^i \vec{A}_i$, (AL) - касательная к кривой ℓ. Точка B смещается при этом по кривой $\bar{\ell}$: $\bar{\omega}^i = \ell^i \theta$, $d\vec{B} = \omega^0_0 \vec{B} + \theta \vec{\bar{L}}$, $\vec{\bar{L}} = \ell^j \gamma^i_j \vec{A}_i$, $(B\bar{L})$ -касательная к кривой $\bar{\ell}$.

Линия ℓ будет Π-двойной, если точки L и $\bar{L}$, лежащие в нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$, совпадают. Тогда $\lambda \ell^i = \ell^j \gamma^i_j$ (*)

Но ℓ^j не равны нулю одновременно, поэтому

$$\det \| \gamma^i_j - \delta^i_j \lambda \| = 0.$$

В общем случае это характеристическое уравнение определяет n различных собственных значений аффинора (γ^i_j). А уравнения (*) определяют n главных направлений аффинора (γ^i_j). Поэтому в общем случае в области Ω существует единственная сеть Σ двойных Π-линий отображения f.

Геометрический объект γ^i_i (i -фиксировано) -абсолютный инвариант. Пусть сеть Σ_n -сеть двойных Π-линий

отображения f, тогда $\gamma^i_j = 0\ (i \neq j)$, а $\gamma^i_i \neq 0$, и мы предполагаем, что все γ^i_i различные.

На прямой (AB) возникает n точек N^i_i: $\vec{N}^i_i = -\gamma^i_i \vec{A} + \vec{B}$.

Пусть точка C -точка пересечения прямой (AB) и плоскости $\Pi_{n-1}(A)$:

$$C = \Pi_{n-1}(A) \cap (AB). \tag{7}$$

Можно показать, что дифференциал dN^i_i точки N^i_i разлагается по точкам A и B, если точка A смещается по линии ω^i сети Σ_n. Этим и раскрывается геометрический смысл абсолютного инварианта γ^i_i.

В нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$ можно рассмотреть n корреляций $\mathcal{K}^i$, определенных квадриками $Q^i: \gamma^i_{jk} x^j x^k = 0$. Коэффициенты γ^i_{jk} в уравнениях квадрик Q^i являются относительными инвариантами. Если $\gamma^i_{jk} = 0$ (i, j, k -фиксированы), то точки A_j, A_k сопряжены в корреляции $\mathcal{K}^i$.

Геометрический смысл обращения всех γ^i_{jk} в нуль будет показан ниже.

п.2. Связь между формами реперов $\mathcal{R}^A$ и $\mathcal{R}^B$ выражается равенствами (2) и следующими:

$$\bar{\omega}^0_0 = \omega^0_0 + \gamma^i \omega^0_i, \tag{8}$$

$$\bar{\omega}^0_j = \gamma^i_j \omega^0_i, \tag{9}$$

$$\bar{\omega}^i_j = \omega^i_j + \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jm} \omega^m + \delta^i_j \gamma^k \omega^0_k, \tag{10}$$

где $\tilde{\gamma}^i_\ell$ - обращенный объект к объекту γ^j_i.

Реперы $\mathcal{R}^A$ и $\mathcal{R}^B$ построены на касательных к линиям сетей $\Sigma_n, \bar{\Sigma}_n$, поэтому формы $\omega^j_i\ (i \neq j)$, как и формы $\bar{\omega}^j_i\ (i \neq j)$, главные:

$$\omega^j_i = a^j_{ik} \omega^k, \quad \bar{\omega}^j_i = \bar{a}^j_{ik} \omega^k \quad (i \neq j). \tag{11}$$

Продолжив систему (2), имеем [3]:

$$\tau^i_j - \delta^i_j \tau^0_0 = b^i_{jk} \omega^k, \quad b^i_{jk} = b^i_{kj}, \tag{12}$$

где $\tau^\beta_\alpha = \bar{\omega}^\alpha_\beta - \omega^\alpha_\beta$.

Из (11) и (12) получим:

$$\bar{a}^i_{jk} - a^i_{jk} = b^i_{jk} \quad (i \neq j). \tag{13}$$

Система, определяющая характеристические направления, имеет вид [3],[7]:

$$b^i_{jk}\omega^j\omega^k = h\omega^i. \tag{14}$$

Из (10),(12),(13) находим:

$$b^i_{jk} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk}, \tag{15}$$

$$\bar{a}^i_{jk} - a^i_{jk} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk} \quad (i \neq j). \tag{16}$$

Можно показать, что справедлива

Т е о р е м а. Если все относительные инварианты $\gamma^i_{jk} = 0$, то любое направление в точке A для отображения f -характеристическое. В этом случае f -проективное отображение, сохраняющее неподвижную нормализующую плоскость

п.3. Вернемся к общему случаю: пусть относительные инварианты γ^i_{jk} не равны нулю одновременно. Уравнения (14), определяющие характеристические направления отображения f, примут вид:

$$\tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jk}\omega^j\omega^k = h\omega^i \tag{14'}$$

Здесь мы воспользовались равенствами (15). Линии ω^i сети Σ_n будут иметь характеристические направления тогда и только тогда, когда

$$b^i_{jj} = \tilde{\gamma}^i_\ell \gamma^\ell_{jj} = 0, \quad (i \neq j). \tag{17}$$

Пусть сеть Σ_n -геодезическая, а следовательно [2], она состоит из прямых (AA_i) и характеристическая. Последнее означает, что все линии ω^i сети Σ_n имеют характеристические направления отображения f. В этом случае будут справедливы соотношения (17). Тогда из (16) и (17) следует, что сеть $\bar{\Sigma}_n$ -тоже геодезическая, образованная семействами прямых (BB_i). Можно показать, что справедливо утверждение. Если в плоскости $(AA_{j_0}A_{k_0})$ направления $(AA_{j_0}),(AA_{k_0})$ -характеристические и их ровно три, то третье направление совпадает с одним из данных. Любое направление плоскости $(AA_{j_0}A_{k_0})$ является характеристическим в отображении f тогда и только тогда, когда линии $\omega^{j_0}, \omega^{k_0}$ сети Σ_n являются характеристическими, а

$b^m_{j_0k_0} = 0 \quad (m \neq j_0, k_0)$.

п.4. Точка C, определенная формулой (7), имеет в реперах $\mathcal{R}^A$ и $\mathcal{R}^B$ следующие координаты:

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = \gamma^i \vec{A}_i = \gamma^j \gamma^i_j \vec{B}_i.$$

Возьмем на прямой (AB) точку $\mathcal{D}$ такую, что $(\vec{AB},\vec{CD}) = \lambda$, где $\lambda = const$. Пусть точка A описывает линию ω^i, тогда все три точки $B, C, \mathcal{D}$ опишут свои линии: $\bar{\omega}^i, \omega^i_0, \omega^i_{\mathcal{D}}$, причем

$$d_i\vec{C} = \psi\vec{C} + \omega^i\vec{C}_i, \quad \vec{C}_i = a^0_{ki}\gamma^k\vec{A} + (\vec{B}_i - \vec{A}_i),$$

$$d_i\vec{\mathcal{D}} = \Phi\vec{\mathcal{D}} + \omega^i\vec{\mathcal{D}}_i, \quad \vec{\mathcal{D}}_i = \lambda a^0_{ki}\gamma^k\vec{A} + (\vec{B}_i - \lambda\vec{A}_i).$$

Прямая $\ell = (C_i\mathcal{D}_i)$, соединяющая точки C_i и $\mathcal{D}_i$, пересекает нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ в точке B_i:

$$\lambda\vec{C}_i - \vec{\mathcal{D}}_i$$

Обозначим через $C^\Pi_i, \mathcal{D}^\Pi_i$ проекции точек $C_i, \mathcal{D}_i$ из точки A на нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$, тогда $\vec{C}^\Pi_i = \vec{B}_i - \vec{A}_i$, $\vec{\mathcal{D}}^\Pi_i = \vec{B}_i - \lambda\vec{A}_i$. Сложное отношение четырех точек $A_i, B_i, C^\Pi_i, \mathcal{D}^\Pi_i$ тоже равно λ.

Т е о р е м а. Если точка $\mathcal{D}$, лежащая на прямой (AB), выбрана так, что $(AB, C\mathcal{D}) = \lambda$, где $\lambda = const$, то $(A_iB_i; C^\Pi_i\mathcal{D}^\Pi_i) = (AB; C\mathcal{D})$ и прямая, соединяющая точки $C_i, \mathcal{D}_i$, пересекает нормализующую плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ в точке B_i.

Список литературы

1. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.- Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина, 1965, №243, с.29-37.

2. Базылев В.Т. О нормализациях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью.-Лит.матем.сб., 1966, вып.6, №3, с.313-322.

3. Базылев В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств.-Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина, 1970, №374, т.I, с.28-40.

4. Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6 Калининград, 1975, с.19-25.

5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем. об-ва, 1953, т.2, с.275-383.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности.-М.; Наука, 1976.

7. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-В кн.: Проблемы геометрии. М., 1963, с.65-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.Ф.Косаренко

СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ SH_τ В НЕЕВКЛИДОВОМ N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{\ell}S_N$ РАНГА ℓ

Настоящая работа посвящена изучению связностей в расслоениях, ассоциированных с регулярной гиперполосой SH_τ в неевклидовом пространстве ${}^{\ell}S_N$ [6].

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г.Ф.Лаптева [1].

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$i,j,k=\overline{1,\tau};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{\tau+1,N-1};\ \mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=\overline{0,N}.$$

1.Отнесем пространство ${}^{\ell}S_N$ с абсолютом

$$g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}x^{\mathcal{I}}x^{\mathcal{J}}=0,\quad g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}=g'_{\mathcal{J}\mathcal{I}},\quad \det\|g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}\|\neq 0$$

к подвижному автополярному нормированному реперу $R=\{A_0,A_1,\dots,A_N\}$ [6]. Наряду с точечным подвижным репером $R=\{A_{\mathcal{I}}\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^{\mathcal{K}}\}$, элементы которого $\tau^{\mathcal{K}}$ являются гранями репера R: $(A_{\mathcal{I}},\tau^{\mathcal{K}})=\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}$.

Специализируем репер, поместив точки $\{A_i\}$ в касательную плоскость T_τ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ, точки $\{A_\alpha\}$ -в характеристическую плоскость $X_{N-\tau-1}$ гиперполосы SH_τ, а точка A_N пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0,A_i,A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{I}}\}$ пространства ${}^{\ell}S_N$. Такой репер назовем репером первого порядка гиперполосы SH_τ. В этом репере дифференциальные уравнения

гиперполосы SH_τ записываются в виде:

$$\omega^N_0=0,\quad \omega^N_\alpha=0,\quad \omega^\alpha_0=0, \tag{1}$$

$$\omega^0_N=0,\quad \omega^\alpha_N=0,\quad \omega^0_\alpha=0, \tag{2}$$

$$\omega^N_i=a_{ij}\omega^j,\quad \nabla a_{ij}=-a_{ij}\omega^N_N-a_{ijk}\omega^k, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega^i_\alpha=b^i_{\alpha j}\omega^j=\lambda^{ij}_\alpha\omega^N_j,\quad \nabla b^i_{\alpha j}=b^i_{\alpha jk}\omega^k,\\ \nabla\lambda^{ij}_\alpha=\lambda^{ij}_\alpha\omega^N_N+\lambda^{ijk}_\alpha\omega^N_k,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\omega^\alpha_i=\lambda^\alpha_{ij}\omega^j,\quad \nabla\lambda^\alpha_{ij}=\lambda^\alpha_{ijk}\omega^k, \tag{5}$$

$$\omega^0_i=-\varepsilon_{0i}\omega^i,\quad \omega^i_N=-\varepsilon_{iN}a_{ij}\omega^j, \tag{6}$$

где $b^i_{\alpha j}a_{i\ell}=b^i_{\alpha\ell}a_{ij}$, $a_{ij}=a_{ji}$, $\lambda^{ij}_\alpha=\lambda^{ji}_\alpha$, $\lambda^\alpha_{ij}=\lambda^\alpha_{ji}$, $\lambda^\alpha_{ij}=-\varepsilon_{\alpha i}b^i_{\alpha j}$, а функции a_{ijk}, $b^i_{\alpha jk}$, λ^{ijk}_α, λ^α_{ijk} симметричны по индексам i,j,k.

2.Система форм $\{\omega^i,\omega^\beta_\alpha,\omega^N_N\}$, удовлетворяющая структурным уравнениям Картана-Лаптева [1],[3]:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j, \tag{7}$$

$$d\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma+\tfrac{1}{2}R^\beta_{\alpha k\ell}\,\omega^k\wedge\omega^\ell, \tag{8}$$

$$d\omega^N_N=\tfrac{1}{2}R^N_{Nk\ell}\,\omega^k\wedge\omega^\ell, \tag{9}$$

где

$$R^\beta_{\alpha k\ell}=2\Big(-\sum_i b^i_{\alpha[k}b^i_{|\beta|\ell]}\varepsilon_{\beta i}\Big), \tag{10}$$

$$R^N_{Nk\ell}=2\Big(-\sum_i a_{i[k}a_{\ell]i}\varepsilon_{iN}\Big), \tag{11}$$

определяет центропроективную связность гиперполосы SH_τ. Эта связность возникает на расслоении, слоями которого являются нормали 1-го рода $N_{N-\tau}$ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ. Такую связность будем называть нормальной связностью гиперполосы SH_τ.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что нормальная связность является плоской [4],[5], если формы кручения-кривизны этой связности тождественно обращаются в нуль, т.е. когда $R^\beta_{\alpha k\ell}=0$, $R^N_{Nk\ell}=0$.

Рассмотрим в пространстве ${}^{\ell}S_N$ такие гиперполосы SH_τ, поле нормалей 1-го рода которых допускает $(N-\tau)$-

параметрическое семейство $(\mathcal{L})$ r-мерных поверхностей $\mathcal{L}_r$, касательные плоскости которых в точках пересечения с нормалью 1-го рода $N_{N-r}(A_0)$ проходят через соответствующую нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}(A_0)$ базисной поверхности V_r гиперполосы SH_r. Такие гиперполосы пространства ${}^{\ell}S_N$ назовем вполне нормальными гиперполосами.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы гиперполоса $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$ была вполне нормальной гиперполосой, необходимо и достаточно, чтобы ее нормальная связность была плоской.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть произвольная точка $M = A_0 + \xi^{\alpha}A_{\alpha} + \xi^{N}A_{N}$, принадлежащая нормали 1-го рода $N_{N-r}(A_0)$ базисной поверхности V_r гиперполосы SH_r, описывает поверхность $\mathcal{L} \in (\mathcal{L})$. Тогда в разложении

$$dM = (\omega^i + \xi^{\alpha}\omega^i_{\alpha} + \xi^{N}\omega^i_{N})A_i + (d\xi^{\alpha} + \xi^{\gamma}\omega^{\alpha}_{\gamma})A_{\alpha} + (d\xi^{N}\omega^{N}_{N})A_{N}$$

коэффициенты при A_{α} и A_N должны быть равны нулю. Следовательно,

$$d\xi^{\alpha} + \xi^{\gamma}\omega^{\alpha}_{\gamma} = 0, \quad d\xi^{N} + \xi^{N}\omega^{N}_{N} = 0. \qquad (12)$$

Так как система уравнений (12) должна быть вполне интегрируема, то, дифференцируя (12) внешним образом, получим:

$$d\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\gamma}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{\gamma}, \quad d\omega^{N}_{N} = 0. \qquad (13)$$

Оказывается, соотношения (13) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы гиперполоса SH_r была вполне нормальной гиперполосой.

В силу (8), (9) условия (13) равносильны тому, что нормальная связность гиперполосы SH_r является плоской.

Следуя работе [2], теорему 1 можно сформулировать в виде:

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы нормальная центропроективная связность гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение λ_r было инволютивным [2].

3. Структурные уравнения для системы форм $\{\omega^i, \omega^{\beta}_{\alpha}\}$ имеют вид (7), (8). Поэтому, в силу теоремы Картана-Лаптева [1], в расслоении, слоями которого являются характеристики $X_{N-r-1}(A_0)$ гиперполосы SH_r, возникает центропроективная связность. Назовем эту связность характеристической связностью гиперполосы SH_r.

Имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 3. Характеристическая связность является плоской тогда и только тогда, когда поле характеристик гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$ допускает $N-r-1$-параметрическое семейство r-мерных поверхностей, касательные плоскости которых проходят через нормали 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисной поверхности V_r гиперполосы SH_r.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы характеристическая связность гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение было инволютивным [2].

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. - Труды Моск. матем. об-ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. Лумисте Ю.Г. Теория связностей в расслоенных пространствах. - В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР. М., 1971, с.123-168.

3. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. - Тр. геометр. семинара Всес. ин-т научн. и техн. информ., 1973, 4, с.7-70.

4. Чакмазян А.В. Нормализованное по Нордену подмногообразие V_m в P_n с параллельным нормальным подрасслоением. - Матем. заметки, 1977, 22, №5, с.649-662.

5. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n. - В сб.: Проблемы геометрии, т.10. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1978, с.55-74.

6. Косаренко М.Ф. Построение внутренних инвариантных точечного и тангенциального реперов регулярной гиперполосы $SH_r \subset {}^{\ell}S_N$. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.13. Калининград, 1982, с.38-44.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.В.Кретов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЯХ КОМПЛЕКСОВ ГИПЕРКВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n продолжается [1] изучение геометрии порожденного комплексом (n-параметрическим семейством) $\mathcal{K}_n$ [2] дифференцируемого отображения $f: C \in A_n \mapsto q \in \mathcal{R}(q)$, где $\mathcal{R}(q)$ – пространство центральных невырожденных гиперквадрик q, C – центр гиперквадрики q. С помощью отображения f вводится понятие асимптотических направлений многообразия $\mathcal{K}_n$ гиперквадрик q. Рассматривается аналог соприкасающейся плоскости [3] кривой $\ell: R^1 \to P_n$. Доказывается теорема, являющаяся аналогом результата, полученного Рыжковым В.В. для отображения $P_m \to P_n$ при $m<n$, [3].

Образом отображения f является комплекс $\mathcal{K}_n$ центральных невырожденных гиперквадрик q, т.е. $f(U) = \mathcal{K}_n$, где $U \subset A_n$ – окрестность точки C. Изучение ведется в частично-канонизированном репере $R_0 = \{A, \bar{e}_\alpha\}$, $\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n}$, который геометрически характеризуется тем, что его вершина A совмещена с центром гиперквадрики q. В репере R_0 уравнения гиперквадрики q и комплекса $\mathcal{K}_n$ соответственно запишутся в виде:

$$q \equiv a_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma, \tag{2}$$

где символом ∇ обозначен оператор, определенный по правилу, указанному в работе [2]. Полученная при двукратном продолжении системы (2) система величин $\Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ образует фундаментальный объект второго порядка комплекса $\mathcal{K}_n$ (отображения f).

Обозначим символом $\hat{q}$ произвольную гиперквадрику пространства $\mathcal{R}(q)$. Ее уравнение в репере R_0 в общем случае запишется в виде

$$\hat{q} \equiv \hat{a}_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta + 2\hat{a}_\alpha X^\alpha - 1 = 0. \tag{3}$$

Пусть $T_f(P_\alpha) = K_f(P_\alpha)(A_n)$ – образ пространства A_n при отображении $K_f(P_\alpha)$, [1]. $T_f(P_\alpha)$ является n-мерной связкой гиперквадрик [4], причем первые дифференциальные окрестности многообразий $T_f(P_\alpha)$ и $\mathcal{K}_n$ совпадают. Так как многообразие $T_f(P_\alpha)$ полностью определяется своей первой дифференциальной окрестностью, то $T_f(P_\alpha)$ не зависит от P_α. В дальнейшем $T_f(P_\alpha)$ будем обозначать просто символом T_f.

Введем систему величин: $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2a^{\rho\sigma}\Lambda_{\alpha\rho\sigma}\Lambda_{\beta\gamma\delta}$. В каждой точке C тензор $\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяет конус

$$\bar{\Lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta} X^\gamma X^\delta = 0, \tag{4}$$

состоящий из прямых связки $\{C\}$. Заметим, что система (4) имеет нетривиальные решения только в специальных случаях.

Определение 1. Конус (4) называется асимптотическим конусом, а определяемые им направления называются асимптотическими направлениями в пространстве A_n.

Покажем, что определенные таким образом асимптотические направления являются обобщением асимптотических направлений точечных многообразий для комплекса гиперквадрик $\mathcal{K}_n$. При этом пространство A_n будем рассматривать как пространство параметров для многообразия $\mathcal{K}_n$.

Направления в $\mathcal{R}(q)$, соответствующие при отображении f асимптотическим направлениям в A_n, будем называть асимптотическими направлениями многообразия $\mathcal{R}(q)$.

Рассмотрим кривую $\mathcal{L}: R^1 \to \mathcal{R}(q)$

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta} t + \tfrac{1}{2} M_{\alpha\beta} t^2 + \langle 3 \rangle, \quad \hat{a}_\alpha = \Lambda_\alpha t + \tfrac{1}{2} M_\alpha t^2 + \langle 3 \rangle, \tag{5}$$

где символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов порядка малости $p \geq 3$ относительно приращений координат точки области определения.

О п р е д е л е н и е 2. Связку гиперквадрик $E_2(\mathcal{L},q)$, заданную уравнениями:

$$\hat{a}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\lambda\Lambda_{\alpha\beta}+\mu M_{\alpha\beta}, \quad \hat{a}_{\alpha}=\lambda\Lambda_{\alpha}+\mu M_{\alpha}, \tag{6}$$

будем называть соприкасающейся связкой гиперквадрик для кривой (5) в элементе $q=\mathcal{L}(0)$.

Связка (6) в общем случае имеет размерность 2, а в случае кривой, инфлексионной [5] в элементе q, она вырождается в пучок гиперквадрик. Соприкасающаяся связка $E_2(\mathcal{L},q)$ является аналогом соприкасающейся плоскости кривой $\ell: R^1\to P_n$ [3].

Т е о р е м а 1. Асимптотическое направление комплекса $\mathcal{K}_n$ в элементе q характеризуется тем, что существует кривая $\mathcal{L}: R^1\to R(q)$, $\mathcal{I}m\mathcal{L}\subset\mathcal{K}_n$ определяющая в элементе это направление, такая, что $E_2(\mathcal{L},q)\subset T_\ell$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X^α -координаты центра $\hat{C}$ гиперквадрики $\hat{q}$. Так как отображения $\mathcal{L}$ и f имеют максимальный ранг в рассматриваемых точках, то существует кривая $L: R^1\to A_n$

$$X^\alpha=\Lambda^\alpha t+\tfrac{1}{2}M^\alpha t^2+\langle 3\rangle, \tag{7}$$

такая, что $\mathcal{L}=f\circ L$. Используя работу [1], находим систему уравнений для соприкасающейся связки $E_2(\mathcal{L},q)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\alpha\beta}&=a_{\alpha\beta}+\lambda\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma+\mu(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma+\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta),\\ \hat{a}_{\alpha}&=-\lambda a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta-\mu(a_{\alpha\beta}M^\beta+2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma).\end{aligned} \tag{8}$$

Параметрические уравнения связки T_ℓ

$$\hat{a}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma, \quad \hat{a}_\alpha=-a_{\alpha\beta}X^\beta \tag{9}$$

соответствуют отображению $K_\ell(0)$ [1]. Из (8) и (9) вытекает, что, для того, чтобы система величин Λ^α определяла асимптотическое направление в A_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие λ,μ и M^α, при которых выполняется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\lambda\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma+\mu(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}M^\gamma+\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta)&=\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma,\\ \lambda a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta+\mu(a_{\alpha\beta}M^\beta+2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma)&=a_{\alpha\beta}X^\beta.\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $\eta^\alpha=\frac{\lambda}{\mu}\Lambda^\alpha+M^\alpha-\frac{1}{\mu}X^\alpha$, тогда уравнения (10) принимают вид

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma=0, \tag{11}$$

$$2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma+a_{\alpha\beta}\eta^\beta=0. \tag{12}$$

Из (12) получаем

$$\eta^\alpha=-2a^{\beta\alpha}\Lambda_{\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta \tag{13}$$

Таким образом, для любых Λ^α существуют единственные η^α, при которых удовлетворяется подсистема уравнений (12). Используя формулы (13) и (11), получаем следующую систему уравнений для асимптотических направлений в A_n

$$(\Lambda_{\alpha\beta\gamma}-2a^{\varepsilon\zeta}\Lambda_{\alpha\beta\zeta}\Lambda_{\varepsilon\gamma\delta})\Lambda^\gamma\Lambda^\delta=0, \tag{14}$$

откуда вытекает справедливость утверждения теоремы.

Т е о р е м а 2. Каждое f -характеристическое в точке C направление является асимптотическим направлением в A_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координатные представления отображений L и f соответственно имеют вид:

$$X^\alpha=\Lambda^\alpha t+\tfrac{1}{2}M^\alpha t^2+\langle 3\rangle, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\alpha\beta}&=a_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\gamma+\tfrac{1}{2}\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}X^\gamma X^\delta+\langle 3\rangle,\\ \hat{a}_\alpha&=-a_{\alpha\beta}X^\beta-\Lambda_{\alpha\beta\gamma}X^\beta X^\gamma+\langle 3\rangle.\end{aligned} \tag{16}$$

Для кривых L (15), определяющих f -характеристическое направление, [1], из уравнений индикатрисы $\mathcal{J}_f$ [1], получаем:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta=2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\gamma\mu, \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\gamma=a_{\alpha\beta}\Lambda^\beta\mu. \tag{17}$$

Для того, чтобы система величин Λ^α определяла асимптотическое направление в A_n, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие η^α, при которых выполняется система уравнений:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\Lambda^\gamma\Lambda^\delta+\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma=0,\quad 2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\Lambda^\beta\Lambda^\delta+a_{\alpha\beta}\eta^\beta=0, \tag{18}$$

значит каждое f-характеристическое в точке C направление является асимптотическим направлением в A_n.

Утверждение, сформулированное в последней теореме, является аналогом результата, полученного для точечного отображения $P_m \to P_n$ при $m < n$ В.В.Рыжковым, [3].

Список литературы

1. Кретов М.В. Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т. Калининград, 1981 (рукопись депонирована в ВИНИТИ 22 июня 1981г., №3003-81 Деп.).

2. Кретов М.В. О связностях, ассоциированных с комплексом центральных квадрик в аффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12, Калининград, 1981, с.35-39.

3. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n -Тр.геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, с.235-242.

4. Схоутен И.А. и Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., 1948.

5. Андреев Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q) -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, с.5-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Т.Н.Крысова

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПАРАБОЛОИДОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве A_3 рассматривается конгруэнция (C) эллипсов C. Под конгруэнцией (C) понимается такая конгруэнция эллипсов, у которой центры образующих элементов описывают поверхность (A), не вырождающуюся в линию или плоскость и не являющуюся торсом, а также касательная плоскость к поверхности (A) в текущей точке совпадает с плоскостью соответствующего эллипса. Введены ассоциированные с (C) параболоиды H, квадрики Q_1 и Q_2. Рассмотрены свойства конгруэнций (C), а также свойства некоторых подклассов этих конгруэнций со специальными свойствами ассоциированных параболоидов.

1. Отнесем конгруэнцию (C) к каноническому реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, где A -центр эллипса, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направлены по асимптотическим касательным поверхности (A), вектор $\vec{e}_3$ направлен по аффинной нормали к этой поверхности. Концы векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ -точки A_1 и A_2 соответственно принадлежат эллипсу.

С каждым эллипсом ассоциируется единственный параболоид H, определяемый следующим образом: 1/эллипс принадлежит параболоиду H, и его плоскость сопряжена с диаметром параболоида; 2/прямая, проходящая через центр эллипса, с направляющим вектором $\vec{e}_3$ является диаметром параболоида; 3/точка A_3 -конец вектора $\vec{e}_3$ -принадлежит параболоиду. В репере R уравнения эллипса C и параболоида H запишутся соответственно

$\mathcal{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2\lambda x^1 x^2 - 1 = 0,\ x^3 = 0$ (1); $\Phi \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + x^3 - 1 = 0, |\lambda| < 1$. (2)

Система уравнений Пфаффа конгруэнции (C) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0,\ \omega_i^3 = b\omega^j,\ \omega_i^j = a_j\omega^i,\ \Omega^J = c_i^J \omega^i, \\ &db = 2b(\lambda a_j - c_i^1 - c_i^2)\omega^i,\ c_1^4 = c_2^5 + \lambda(c_1^5 - c_2^4), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0,\ b \neq 0,\ i,j = 1,2;\ i \neq j;\ J = 1,2,3,4,5;\ \Omega^i = \lambda\omega_i^j - \omega_j^j;$
$\Omega^3 = \omega_2^1 + \omega_1^2 - d\lambda - \lambda\omega_i^i;\ \Omega^4 = \omega_3^1 + \lambda\omega_3^2;\ \Omega^5 = \omega_3^2 + \lambda\omega_3^1$

(по j -не суммировать).

Из системы (3) следует, что конгруэнция (C) определяется с произволом четырех функций двух аргументов. Фокальные точки эллипса C и ассоциированного параболоида H описываются соответственно системами уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} = 0,\ x^3 = 0,\ \tilde{\mathcal{F}} \equiv c_1^1(x^1)^3 + (\lambda^2 a_2 - \lambda c_1^1 - \lambda c_1^2 + c_1^3 - c_2^1)(x^1)^2 x^2 + (x^1)^2 + \\ &+ (-\lambda^2 a_1 + \lambda c_2^2 + \lambda c_2^1 - c_2^3 + c_1^2)x^1(x^2)^2 + (\lambda a_2 - c_1^1 - c_1^2)x^1 - c_2^2(x^2)^3 - \\ &- (x^2)^2 - (\lambda a_1 - c_2^2 - c_2^1)x^2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\Phi = 0,\ \Phi_i \equiv -2c_i^1(x^1)^2 - 2c_i^2(x^2)^2 - 2c_i^3 x^1x^2 - 2c_i^4 x^1x^3 - 2c_i^5 x^2x^3 - \\ &- \hat{c}_i x^1 - \hat{c}_j x^2 + 3(\lambda a_j - c_i^1 - c_i^2)x^3 - 2(\lambda a_j - c_i^1 - c_i^2), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\hat{c}_1 = 2,\ \hat{c}_2 = 2\lambda + b$.

О п р е д е л е н и е 1. Квадрики Q_i, определяемые соответственно уравнениями $\Phi_i = 0$, называются ассоциированными квадриками конгруэнции (C).

Условия $c_i^3 = 0,\ c_i^4 = 0,\ c_i^5 = 0$ означают соответственно, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ сопряжены относительно квадрики Q_i. Условия $c_i^1 = 0$ и $c_i^2 = 0$ означают, что направления векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно являются асимптотическими направлениями квадрики Q_i. Очевидно также, что вектор $\vec{e}_3$ является вектором асимптотического направления квадрик Q_1 и Q_2.

Анализируя системы уравнений (4) и (5), убеждаемся, что конгруэнции (C) обладают следующими свойствами: 1/если точка A_i является фокальной точкой параболоида

H, то она является фокальной точкой эллипса C; таким же свойством обладают точки $A_1^*(-1,0,0)$ и $A_2^*(0,-1,0)$; 2/точки A_i и A_i^* не могут быть одновременно фокальными точками эллипса C, а следовательно, параболоида H; 3/если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C, то свойство 1/ выполняется для любой точки эллипса.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнция (C) называется односторонне расслояемой, если существует одностороннее расслоение от конгруэнции (C) к прямолинейной конгруэнции (AA_3).

Т е о р е м а 1. Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ конгруэнции (C) сопряжены относительно эллипса C, то конгруэнция (C) не может быть односторонне расслояемой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что конгруэнция (C) с сопряженными относительно эллипса векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ является односторонне расслояемой. Тогда выполняются соотношения: $\lambda = c_1^2 = c_2^1 = c_2^5 = 0;\ c_1^5 = c_2^4 = -\frac{1}{b};\ c_1^1 = a_1, c_2^2 = a_2$, которые приводят к противоречивости системы (3).

2. О п р е д е л е н и е 3. 1/Конгруэнции (C), у которых точки A_1 и A_2 являются фокальными точками параболоида H и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не сопряжены относительно эллипса C, называются конгруэнциями (C_{12}). 2/Конгруэнции (C), у которых точки A_1 и A_2 являются фокальными точками параболоида H и векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно эллипса C, называются конгруэнциями (C_{12}^1).

Конгруэнции (C_{12}) определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0,\ \omega_i^3 = b\omega^j,\ \omega_i^j = a_j\omega^i,\ \Omega^i = \tfrac{1}{2}(2\lambda + b + 2\lambda a_j)\omega^i + (1 + \lambda a_i)\omega^j, \\ &\Omega^\xi = c_i^\xi \omega^i,\ c_1^4 = c_2^5 + \lambda(c_1^5 - c_2^4), \\ &db = b(2 - 2\lambda - b - 2\lambda a_2)\omega^1 + b(2 - 2\lambda - b - 2\lambda a_1)\omega^2, \\ &c_2^5 = \tfrac{1}{b}[a_1(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda b - 2\lambda^2 a_2 + c_1^3) + 2\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda b + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}b^2 - c_2^3], \\ &c_1^5 = \tfrac{1}{b\lambda}[(a_2 - a_1)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \lambda b) + c_2^3(a_2 + 1) + \lambda b c_2^4], \end{aligned} \tag{6}$$

где $\lambda \neq 0$, $\xi = 3,4,5$, с произволом пяти функций одного аргумента. Конгруэнции (C_{12}^1) определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\omega^3=0,\ \ \omega_i^3=b\,\omega^j,\ \ \omega_i^j=a_j\,\omega^i,\ \ \Omega^1=\frac{1}{2}b\omega^1+\omega^2,$$
$$\Omega^2=\omega^1+\frac{1}{2}b\omega^2,\ \ \Omega^4=c_2^5\,\omega^1+c_2^4\,\omega^2,\ \ \Omega^5=c_i^5\,\omega^i, \qquad (7)$$
$$db=-b(b+2)(\omega^1+\omega^2),\ \ c_2^5=-\frac{b}{4}-\frac{3}{2}+\frac{a_1a_2}{b}$$

с произволом четырех функций одного аргумента.

Анализируя (7), убеждаемся в том, что конгруэнции (C_{12}^1) с невырождающимися квадриками Q_1 и Q_2 обладают следующими свойствами: 1/векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не являются векторами асимптотического направления квадрик Q_1 и Q_2; 2/вектор $\vec{e}_3$ сопряжен с вектором $\vec{e}_1$ относительно квадрики Q_1 тогда и только тогда, когда он сопряжен с вектором $\vec{e}_2$ относительно квадрики Q_2.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C_{12}^1) обладают следующими свойствами: 1/фокальные поверхности (A_i) не могут вырождаться в плоскости; 2/фокальная поверхность (A_i) тогда и только тогда вырождается в линию, когда векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Q_i (квадрика Q_i считается невырожденной).

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнций (C_{12}) и (C_{12}^1) тогда и только тогда вырождаются в линии, когда прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) вырождается в связку прямых с общим центром или во множество прямых, принадлежащих одной и той же плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) имеет следующий вид:

$$a_2(\omega^1)^2-a_1(\omega^2)^2=0. \qquad (8)$$

Если фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии, то $a_1=a_2=0$. Уравнение торсов (8) тождественно удовлетворяется. Верно и обратное. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978; ч. I; 1980, ч. 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 14 1983

УДК 514.75

М.К. К у з ь м и н

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЕТЕЙ Σ_n^S В A_n

В аффинном пространстве A_n, используя геометрические свойства распределений, порожденных плоской сетью, выделяется класс сетей Σ_n^S $(1\leq S\leq n-1)$ Этот класс включает в себя и сети $\Sigma_n^S\ (S\geq\frac{n}{2})$, изученные автором в работе [2]. В статье указывается верхняя граница произвола существования сетей Σ_n^S $(1\leq S\leq n-1)$ в A_n. Рассматривается пример сети Σ_n^S $(S<\frac{n}{2})$, определяющейся с самым широким произволом.

I. Возьмем в аффинном пространстве A_n плоскую сеть I. С каждой точкой $x\in A_n$ свяжем аффинный репер $(x,\vec{e}_i)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n)$, построенный на касательных к линиям данной сети в точке x, при этом пфаффовы формы ω_i^j $(i\neq j)$ становятся главными:

$$\omega_i^j=a_{ik}^j\,\omega^k \quad (i\neq j).$$

Разобьем семейства линий сети Σ_n на S классов, где $1\leq S\leq n-1$ $(n=qS+\tau,\ q=[\frac{n}{S}],\ \tau<S)$. Два семейства ω^i,ω^j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $i\equiv j\ (\mathrm{mod}\,S)$. Нумеруем классы $t,t'=1,2,\dots,S$. Для удобства рассуждений введем в каждом классе свою нумерацию семейств линий, причем такую, чтобы при возрастании старых номеров возрастали и новые номера $u_t,v_t=1_t,2_t,\dots,q'_t(t)$ $(q'(t)$ -число семейств в классе с номером t, $q'(t)$ может принимать только значения, равные $q+1,q)$, и если $\omega^{u_t}=\omega^i,\ \omega^{u_{t'}}=\omega^j,\ i<j$, то $t<t'$. Отсюда $q'(t)=q+1$ для $t=1,2,\dots,\tau$ и $q'(t)=q$ для $t=\tau+1,\dots,S$.

Распределение Δ_m назовем Δ_p -параллельным $(\pi_m(x)\subset\pi_p(x))$, если плоскости $\pi_m(x+dx)$, $\pi_p(x)$

параллельны. Пусть $\Delta_m = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ и $\Delta_p = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_p)$. Тогда Δ_m будет Δ_p -параллельным, если

$$\omega_a^{\alpha'} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, m; \ \alpha' = p+1, \dots, n). \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы порождаемые сетью Σ_n распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{e}_{u_t})$ были $\Delta(\vec{e}_{(u-1)_t}, \vec{e}_{u_t}, \vec{e}_{(u+1)_t})$ -параллельными (если $u_t = 1_t$, то $\Delta(\vec{e}_{1_t}, \vec{e}_{2_t})$-параллельными, если $u_t = q'_t(t)$ то $\Delta(\vec{e}_{(q'(t)-1)_t}, \vec{e}_{q'_t(t)})$ -параллельными). Сеть, удовлетворяющую указанным требованиям, будем обозначать: Σ_n^s $(1 \le s \le n-1)$.

Заметим, что каждое из распределений $\Delta_{q'(t)} = \Delta(\vec{e}_{1_t}, \dots, \vec{e}_{q'_t(t)})$ является параллельным [2] (плоскости $\Pi_{q'(t)}(x)$ принадлежат одной связке $q'(t)$ -плоскостей). Отсюда при $s \ge \frac{n}{2}$ имеем параллельные распределения $\Delta_2(\vec{e}_{1_t}, \vec{e}_{2_t}), \Delta_1(\vec{e}_{1_{t'}})$, где $t = 1, 2, \dots, n-s$; $t' = n-s+1, \dots, s$. Таким образом, выделенный здесь класс сетей Σ_n^s $(1 \le s \le n-1)$ включает в себя и сети Σ_n^s $(s \ge \frac{n}{2})$, рассмотренные в работе [2].

2. Перейдем к доказательству теоремы существования сетей Σ_n^s $(1 \le s \le n-1)$ в аффинном пространстве A_n. Для этого следует исследовать систему уравнений (1) с учетом равенств вида (2).

Так как распределения $\Delta_{q'(t)}$ являются параллельными, то имеем

$$\omega_{u_t}^{v_{t'}} = 0 \quad (t \ne t'). \qquad (3)$$

Внешние дифференциалы форм (3) тождественно равны нулю. Отсюда видно, что система уравнений (1) разбивается на s подсистем, и, следовательно, характеры S_i исследуемой системы можно выразить через характеры $(S_i)_t$ подсистемы по формуле

$$S_i = \sum_{t=1}^{s} (S_i)_t. \qquad (4)$$

Аналогичным образом можно выразить число Картана Q и число произвольных параметров N через соответствующие числа Q_t и N_t, для подсистем:

$$Q = \sum_{t=1}^{s} Q_t, \quad N = \sum_{t=1}^{s} N_t \qquad (4')$$

Рассмотрим теперь формы $\omega_{u_t}^{v_t}$ $(u_t \ne v_t)$. В силу условий (2) имеем равенства:

$$\omega_{u_t}^{\hat{u}_t} = 0 \ (\hat{u} \ne u \pm 1, \hat{u} = 1, 2, \dots, q'(t) \ge 3), \qquad (5)$$

а оставшиеся формы разобъем на две части:

$$\omega_{1_t}^{2_t}, \omega_{2_t}^{3_t}, \dots, \omega_{(q'(t)-1)_t}^{q'_t(t)}; \qquad (6_1)$$

$$\omega_{2_t}^{1_t}, \omega_{3_t}^{2_t}, \dots, \omega_{q'_t(t)}^{(q'(t)-1)_t}, \qquad (6_2)$$

в каждой из которых число форм равно $q'(t)-1$.

Выделяются следующие случаи:

1/ $q'(t) = 1$, 2/ $q'(t) = 2$, 3/ $q'(t) \ge 3$

В первом случае форм вида (6) не будет, следовательно, характеры исследуемых подсистем $(S_i)_t$ будут равны нулю. Во втором случае будут формы $\omega_{1_t}^{2_t}$, $\omega_{2_t}^{1_t}$, следовательно, надо исследовать систему уравнений

$$\omega_{1_t}^{2_t} = a_{1_t k}^{2_t} \omega^k, \quad \omega_{2_t}^{1_t} = a_{2_t k}^{1_t} \omega^k,$$

система ковариантов которой имеет вид

$$\Delta a_{1_t k}^{2_t} \wedge \omega^k = 0, \quad \Delta a_{2_t k}^{1_t} \wedge \omega^k = 0,$$

откуда получим $(S_i)_t = 2$.

В третьем случае, т.е. когда $q'(t) \ge 3$, следует обратить внимание на внешние дифференциалы форм вида (см. (5)):

$$\omega_u^{u \pm 2} = 0 \qquad (7)$$

(индексы, указывающие номер класса, опущены).

Заметим, что из форм (7) достаточно рассматривать формы, у которых значения верхнего индекса больше (меньше) значений нижнего индекса. Возьмем форму $\omega_u^{u+2} = 0$, тогда $D\omega_u^{u+2} = \omega_u^{u+1} \wedge \omega_{u+1}^{u+2}$. Следуя теореме Фробениуса, мы должны положить $\omega_u^{u+1} \wedge \omega_{u+1}^{u+2} = 0$, следовательно, существует $\alpha_u, \beta_u \in R$ такие, что $\alpha_u^2 + \beta_u^2 \ne 0$ и $\alpha_u \omega_u^{u+1} + \beta_u \omega_{u+1}^{u+2} = 0$. Число таких соотношений равно числу форм вида ω_u^{u+2}, то есть равно $q'(t)-2$. Следовательно, система линейно независимых форм из (6_1) состоит не более чем из одной формы; аналогичный вывод справедлив и для форм (6_2). Таким образом, старший характер $(S_n)_t \le 2$. Учитывая все рассмотренные случаи, имеем предложение.

П р е д л о ж е н и е 1. Произвол существования сетей Σ_n^s $(1 \le s \le n-1)$ в аффинном пространстве A_n не превышает $2s$ функций n аргументов.

П р е д л о ж е н и е 2. При $s \geqslant \frac{n}{2}$ произвол существования сетей Σ_n^s в A_n равен $2(n-s)$ функций n аргументов.

В самом деле, при $s > \frac{n}{2}$ $q'(t) = q+1$ для $t = 1,2,\dots,n-s$, следовательно, $(S_n)_t = 2$ и $q'(t') = q = 1$ для $t' = n-s+1, \dots, s$, отсюда $(S_n)_{t'} = 0$. По формулам (4) имеем

$$S_n = \sum_{t=1}^{n-s} (S_n)_t + \sum_{t'=n-s+1}^{s} (S_n)_{t'} = 2(n-s).$$

При $s = \frac{n}{2}$ $(s = n-s)$ $q'(t) = q = 2$ для $t = 1,2,\dots, s$, откуда $(S_n)_t = 2$ и $S_n = 2 \cdot s = 2(n-s)$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что во всех рассмотренных выше случаях критерий Картана [3] выполнен, т.е. число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ равно числу произвольных параметров N (см. формулы (4)).

Из предложений 1 и 2 имеем теорему.

Т е о р е м а. Произвол существования сетей Σ_n^s $(1 \leq s \leq n-1)$ в аффинном пространстве A_n не превышает $2 \cdot (\min\{n-s, s\})$ функций n аргументов.

3. В заключение укажем пример сети Σ_n^s $(s < \frac{n}{2})$ в A_n, определяющейся с максимальным произволом, т.е. $S_n = 2s$. Геометрически такую сеть можно выделить, потребовав, чтобы среди $q'(t)$ $(t = 1,2,\dots,s)$ 1-распределений $\Delta(\vec{e}_{u_t})$ $q'(t) - 2$ были параллельными, а оставшиеся распределения были либо оба Δ_2-параллельными, либо одно из них – только Δ_3-параллельным, а другое распределение – параллельным.

Список литературы

1. Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях. – Проблемы геометрии. Т.12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М., 1981, с.97–125.

2. Кузьмин М.К. Сети Σ_n^s $(s \geqslant \frac{n}{2})$. – Прикладные вопросы дифференциальной геометрии. Вып.1. М., с.52–56. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР 7 апр. 1982г., №1648-82 Деп.).

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.–Л., 1948.

УДК 514.75

Н.Н. Л о к о т к о в

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ $T: T_x \to N_x$

На p-мерной поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n выделяются распределения Δ_τ $(1 \leq \tau < p)$, вдоль которых параллельно в нормальной связности единичное нормальное векторное поле, и $\Delta_{p-\tau}$-распределение, ортогональное к распределению Δ_τ. В работе рассмотрено отображение $T: T_x \to N_x$ касательного пространства T_x в нормальное пространство N_x такое, что $T(\vec{e}) = \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_\tau(x)$, и $T(\vec{e}) \neq \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_{p-\tau}$.

1. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R = \{x, \vec{e}_I, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы $\vec{e}_I$ $(I,J,K,\dots = \overline{1,p})$ лежат в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma,\dots = \overline{p+1,n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dx = \omega^I \vec{e}_I; \quad d\vec{e}_I = \omega_I^J \vec{e}_J + \omega_I^\alpha e_\alpha; \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^I \vec{e}_I + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \tag{1}$$

Все дифференциальные формы ω удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства. Поверхность V_p в репере R определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Продолжая систему, получим

$$\omega_I^\alpha = b_{IJ}^\alpha \omega^J, \quad b_{IJ}^\alpha = b_{JI}^\alpha. \tag{2}$$

Величины b_{IJ}^α образуют второй фундаментальный тензор поверхности V_p. Легко проверить, что

$$db_{IJ}^\alpha = b_{IK}^\alpha \omega_J^K + b_{JK}^\alpha \omega_I^K - b_{IJ}^\beta \omega_\beta^\alpha + b_{IJK}^\alpha \omega^K \tag{3}$$

Формы ω^β_α определяют связность в нормальном расслоении, которая называется нормальной связностью [2]. Тензор кривизны этой связности определяется равенствами

$$R^\alpha_{\beta\mathcal{I}\mathcal{J}} = \gamma^{\mathcal{K}\mathcal{L}}(b^\beta_{\mathcal{K}\mathcal{I}} b^\alpha_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - b^\beta_{\mathcal{K}\mathcal{J}} b^\alpha_{\mathcal{L}\mathcal{I}}), \qquad (4)$$

$\gamma^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$. Пусть задано нормальное векторное поле $\vec{e}_{p+1}$, $|\vec{e}_{p+1}|=1$. Формы ω^α_{p+1} станут главными: $\omega^\alpha_{p+1} = \lambda^\alpha_{\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}$. Продолжая последнюю систему, найдем, что

$$d\lambda^\alpha_{\mathcal{K}} = \lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} + b^\alpha_{\mathcal{K}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{p+1} - \lambda^\beta_{\mathcal{K}}\omega^\alpha_\beta + \lambda^\alpha_{\mathcal{K}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}, \quad \lambda^\alpha_{\mathcal{K}\mathcal{J}} = \lambda^\alpha_{\mathcal{J}\mathcal{K}}. \qquad (5)$$

Можно показать, что величины $\lambda^\alpha_{\mathcal{K}}$ образуют тензор.

Формы, определяющие направление, вдоль которого параллельно в нормальной связности векторное поле $\vec{e}_{p+1}$, являются решением системы $\lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}} = 0$ [1]. Если $rang\|\lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\| = p-r$, то на поверхности V_p возникает (локально) распределение Δ_r, вдоль которого параллельно векторное поле $\vec{e}_{p+1}$. Направим векторы $\vec{e}_i \in \Delta_r$ $(i,j,k\ldots=\overline{1,r};\ \varepsilon,\delta,\ldots=\overline{r+1,p})$, а векторы $\vec{e}_\varepsilon \in \Delta_{p-r}$ (распределение, ортогональное к Δ_r). Получим

$$\lambda^\alpha_i = 0. \qquad (6)$$

Распределения Δ_r и Δ_{p-r} интегрируемы тогда и только тогда, когда $\nu^\varepsilon_{ij} = a^\varepsilon_{ij} - a^\varepsilon_{ji} = 0$ и $\nu^i_{\varepsilon\delta} = a^i_{\varepsilon\delta} - a^i_{\delta\varepsilon} = 0$ соответственно, где $a^\varepsilon_{i\mathcal{J}}$ -коэффициенты разложения форм ω^ε_i по главным формам $\omega^\varepsilon_i = a^\varepsilon_{i\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}$.

Рассмотрим отображение $T: T_x \to N_x$ по закону: вектор $f^{\mathcal{K}}\vec{e}_{\mathcal{K}}$ переходит в вектор $\lambda^\alpha_{\mathcal{K}} f^{\mathcal{K}}\vec{e}_j$ В силу равенств (6) имеем $T(f^{\mathcal{K}}\vec{e}_{\mathcal{K}}) = \lambda^\alpha_\varepsilon f^\varepsilon \vec{e}_\alpha$. Значит, можно считать, что отображение T переводит векторное пространство $\Delta_{p-r}(x)$ в векторное пространство Π^0, порожденное векторами $\lambda^\alpha_\varepsilon\vec{e}_\alpha$. Отображение T -линейное, и так как $\dim\Delta_{p-r}(x) = \dim\Pi^0 = rang\|\lambda^\alpha_\varepsilon\| = p-r$, то существует $p-r$ взаимно ортогональных направлений $f^\delta_\varepsilon\vec{e}_\delta$, переходящих при отображении T в ортогональные направления. Направим векторы $\vec{e}_\varepsilon$ коллинеарно векторам $f^\delta_\varepsilon\vec{e}_\delta$, а векторы $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$ коллинеарно соответствующим векторам $\lambda^\alpha_\delta f^\delta_\varepsilon\vec{e}_\alpha$. Нам понадобятся

индексы:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots = \overline{p+1,\ p+(n-p-(p-r))}$; $n-p+\varepsilon, \ldots = \overline{n-p+r,\ n}$

В построенном ортонормированном репере к равенствам (6) добавятся равенства

$$\lambda^{n-p+\delta}_\varepsilon = 0, \ (\varepsilon \neq \delta); \quad \lambda^{\alpha_1}_\varepsilon = 0. \qquad (7)$$

Векторы $\vec{e}_i$ мы можем направить по некоторым фиксированным направлениям в распределении Δ_r. Тогда все формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{J} \neq \mathcal{I})$ станут главными: $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} = a^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}$.

Из тождеств (6) на основании равенств (5),(7) получим

$$\lambda^{n-p+\varepsilon}_\delta a^\delta_{i\mathcal{J}} - \sum_{\mathcal{I}} b^{n-p+\varepsilon}_{i\mathcal{I}} + \lambda^{n-p+\varepsilon}_{i\mathcal{J}} = 0, \qquad (8)$$

$$-\sum_{\mathcal{I}} b^{\alpha_1}_{i\mathcal{I}} b^{p+1}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} + \lambda^{\alpha_1}_{i\mathcal{J}} = 0. \qquad (9)$$

Дифференцируя тождества (7), находим

$$\lambda^{n-p+\delta}_\rho a^\rho_{\varepsilon\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{I}} b^{n-p+\delta}_{\varepsilon\mathcal{I}} b^{p+1}_{\mathcal{I}\mathcal{K}} - \lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon \lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,\mathcal{K}} + \lambda^{n-p+\delta}_{\varepsilon\mathcal{K}} = 0, \qquad (10)$$

$$-\sum_{\mathcal{I}} b^{\alpha_1}_{\varepsilon\mathcal{I}} b^{p+1}_{\mathcal{J}\mathcal{K}} - \lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon \lambda^{\alpha_1}_{n-p+\rho,\mathcal{K}} + \lambda^{\alpha_1}_{\varepsilon\mathcal{K}} = 0 \qquad (11)$$

Так как мы зафиксировали векторные поля $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$, то формы $\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon}$ главные

$$\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon} = \lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \quad \lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,\mathcal{K}} = -\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\alpha,\mathcal{K}}$$

Векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в нормальной связности, если $\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon} = 0$. Следовательно, векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в направлении ω^i тогда и только тогда, когда

$$\lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,i} = 0. \qquad (12)$$

В равенствах (8) возьмем индекс $\mathcal{J} = \varepsilon$, в равенствах (10) индекс $\mathcal{K} = i$. Получим

$$a^\rho_{i\varepsilon}\lambda^{n-p+\delta}_\rho - \sum_{\mathcal{I}} b^{n-p+\delta}_{i\mathcal{I}} b^{p+1}_{\mathcal{I}\varepsilon} = -\sum_{\mathcal{I}} b^{n-p+\delta}_{\varepsilon\mathcal{I}} b^{p+1}_{\mathcal{I}i} + \lambda^{n-p+\delta}_\rho a^\rho_{\varepsilon i} - \lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon \lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,i},$$

или, согласно равенствам (4),

$$\lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon \lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,i} = R^{n-p+\delta}_{p+1,\varepsilon i} + \lambda^{n-p+\delta}_\rho \nu^\rho_{\varepsilon i}. \qquad (13)$$

Аналогично, положив в равенствах (9) индекс $\mathcal{J} = \varepsilon$, а в равенствах (II) индекс $\mathcal{K}=i$, имеем

$$\lambda^{n-p+\varrho}_{\varepsilon}\lambda^{\alpha_1}_{n-p+\varrho,i}=R^{\alpha_1}_{p+1\,\varepsilon i}. \qquad (14)$$

Коэффициенты $\lambda^{n-p+\varrho}_{\varepsilon}$ отличны от нуля. Поэтому из равенств (12),(13),(14) следует, что векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varrho}$ параллельно в нормальной связности в направлении ω^i тогда и только тогда, когда

$$R^{\alpha_1}_{p+1\,\varepsilon i}=0\,,\quad R^{n-p+\delta}_{p+1\,\varepsilon i}+\lambda^{n-p+\delta}_{\varrho}\nu^{\varrho}_{\varepsilon i}=0 \qquad (15)$$

2. Пусть поверхность V_p -омбилическая относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$, т.е. в ортонормированном репере имеем

$$b^{p+1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}=b^{p+1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}. \qquad (16)$$

Из равенств (4),(16) получим $R^{\alpha}_{p+1\,\mathcal{J}\mathcal{J}}=0$. Поэтому условие (15) примет вид $\nu^{\delta}_{\varepsilon i}=0$. Так как репер R ортонормированный, то $\nu^{\delta}_{\varepsilon i}=-\nu^{\delta}_{i\varepsilon}=\nu^{i}_{\delta\varepsilon}$. На основании изложенного сформулируем

Т е о р е м у 1. Если поверхность V_p -омбилическая относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$, то распределение $\Delta_{p-\tau}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда всякое векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в нормальной связности вдоль распределения Δ_{τ}.

При омбиличности поверхности V_p относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$ распределение Δ_{τ} интегрируемо, и поверхность V_{τ} лежит на гиперсфере $S(c)$ с центром

$$\vec{c}=\vec{x}+\vec{e}_{p+1}/b^{p+1}_{11} \qquad (17)$$

и радиусом $|1/b^{p+1}_{11}|$ [1]. Рассмотрим случай, когда гиперсфера $S(c)$ не вырождается в гиперплоскость. Если точка x перемещается по поверхности V_p, то точка c описывает поверхность центров $\widetilde{V}$. Продифференцировав тождества (17), на основании равенств (1),(3) получим

$$d\vec{c}=\Big((1-\frac{b^{p+1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}}{b^{p+1}_{11}})\vec{e}_{\mathcal{J}}-\frac{1}{(b^{p+1}_{11})^2}\Big(\sum_{\alpha}b^{\alpha}_{11}\lambda^{\alpha}_{\mathcal{J}}+b^{p+1}_{11\mathcal{J}}\Big)\vec{e}_{p+1}+\frac{1}{b^{p+1}_{11}}\lambda^{\alpha}_{\mathcal{J}}\vec{e}_{\alpha}\Big)\omega^{\mathcal{J}}.$$

Можно показать, что последнее равенство эквивалентно равенству

$$d\vec{c}=\Big(-\big(\sum_{\alpha}b^{\alpha}_{11}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon}\vec{e}_{p+1}\big)/(b^{p+1}_{11})^2+\lambda^{\alpha}_{\varepsilon}\vec{e}_{\alpha}/b^{p+1}_{11}\Big)\omega^{\varepsilon}$$

Следовательно, касательная плоскость $T(c)$ к поверхности $\widetilde{V}$ в точке c порождена векторами

$$\vec{c}_{\varepsilon}=-b^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\vec{e}_{p+1}/b^{p+1}_{11}+\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\vec{e}_{n-p+\varepsilon}.$$

Метрический тензор $\tilde{\gamma}_{\varepsilon\delta}$ поверхности $\widetilde{V}$ определяется равенствами

$$\gamma_{\varepsilon\delta}=b^{n-p+\varepsilon}_{11}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}b^{n-p+\delta}_{11}\lambda^{n-p+\delta}_{\delta}/(b^{p+1}_{11})^2$$

Ортогональным направлениям $\vec{e}_{\varepsilon}$ на распределении $\Delta_{p-\tau}$ будут соответствовать ортогональные направления на поверхности $\widetilde{V}$ тогда и только тогда, когда

$$b^{n-p+\varepsilon}_{11}b^{n-p+\delta}_{11}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\lambda^{n-p+\delta}_{\delta}=0\,,\quad (\varepsilon\neq\delta).$$

По построению $\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\neq 0$, следовательно,

$$b^{n-p+\varepsilon}_{11}b^{n-p+\delta}_{11}=0,\quad (\varepsilon\neq\delta). \qquad (18)$$

Равенства (18) возможны, если только $b^{n-p+\varepsilon}_{11}=0$ для всех ε, за исключением, быть может, одного. То есть, линия ω^1 является асимптотической относительно некоторых $p-\tau-1$ квадратичных форм $\Phi^{n-p+\varepsilon}=b^{n-p+\varepsilon}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}$. Так как выполняются равенства (16), то при рассмотрении поверхности $\widetilde{V}$ мы могли вместо b^{p+1}_{11} взять любое b_{ii}, поэтому справедлива

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы ортогональным направлениям $\vec{e}_{\varepsilon}$ на распределении $\Delta_{p-\tau}$ соответствовали ортогональные направления на поверхности $\widetilde{V}$, необходимо и достаточно, чтобы на распределении Δ_{τ} имелось направление, асимптотическое относительно некоторых $p-\tau-1$ из форм $\Phi^{n-p+\varepsilon}$

Список литературы

I. Локотков Н.Н. О специальном расслоении p-поверхности в евклидовом пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.I3, Калининград, I982, с.54-60.

2. Лумисте Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространствах постоянной кривизны. Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), I98I, т.I2, с.3-30.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 514.75

В.С.М а л а х о в с к и й

О ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК ЛИ

Исследуется фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли Q поверхности S в P_3. Доказано, что если поверхность S -линейчатая, то множество фокальных точек квадрики Ли состоит только из точек прямолинейной образующей поверхности S, лежащей на квадрике Q.

Отнесем конгруэнцию (Q) квадрик Ли поверхности S к каноническому реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ Финикова поверхности S [1], где A_0 -текущая точка поверхности A_0A_i ($i,j,k = 1,2$)-асимптотические касательные, A_1A_2 и A_0A_3 - директрисы Вильчинского, причем $A_3 \in Q$.

Система Пфаффовых уравнений конгруэнции (Q) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
&\omega_0^3 = 0, \qquad \omega_i^j = \beta_i \omega^i, \qquad \omega_i^3 = \omega^j, \\
&\omega_i^0 = \omega_3^j, \qquad \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \qquad \omega_3^0 = b_2^1 \omega^1 + b_1^2 \omega^2, \qquad (1)\\
&\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = \alpha_1 \omega^1 - \alpha_2 \omega^2, \quad \omega_3^3 = \omega_0^0 = 3(\alpha_1 \omega^1 + \alpha_2 \omega^2),
\end{aligned}$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Уравнение квадрики Q имеет вид:

$$F \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0. \qquad (2)$$

Так как

$$dF = 2\theta F + (b_2^1 (x^3)^2 - \beta_1 (x^1)^2)\omega^1 + (b_1^2 (x^3)^2 - \beta_2 (x^2)^2)\omega^2, \qquad (3)$$

где θ -форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, то фокальные точки квадрики Q [2] определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \\
&b_2^1 (x^3)^2 - \beta_1 (x^1)^2 = 0, \qquad (4)\\
&b_1^2 (x^3)^2 - \beta_2 (x^2)^2 = 0
\end{aligned}$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что точка A_0 - четырехкратная фокальная точка квадрики Q.

Т е о р е м а 1. Если поверхность S -нелинейная, то кратность фокальной точки A_0 квадрики Q не может быть выше четырех.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta_1\beta_2 \neq 0$. Тогда четыре фокальные точки квадрики Q, образующие вместе с A_0 полную совокупность всех фокальных точек, определяются формулами:

$$M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{\frac{b_1^2 b_2^1}{\beta_1 \beta_2}} A_0 + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{b_2^1}{\beta_1}} A_1 + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{b_1^2}{\beta_2}} A_2 + A_3, \qquad (5)$$

где $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_2^2 = 1$. Из этих формул следует, что A_0 не может совпадать ни с одной из этих точек. Точки $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ являются вершинами четырехсторонника Демулена.

Т е о р е м а 2. Если поверхность S -линейчатая, то множество фокальных точек квадрики Q состоит только из точек прямолинейной образующей поверхности S, лежащей на квадрике Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, $\beta_1 = 0$, т.е. A_0A_1 -прямолинейная образующая поверхности. Тогда из замыкания уравнения $\omega_1^2 = 0$ следует $b_1^2 = 0$. Система уравнений (4) приводится к виду:

$$x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad b_2^1 (x^3)^2 = 0, \quad \beta_2 (x^2)^2 = 0. \qquad (6)$$

Этой системе удовлетворяют только точки прямой A_0A_1.

Т е о р е м а 3. Фокальная точка квадрики Ли нелинейчатой поверхности S, отличная от точки A_0, тогда и только тогда является двукратной фокальной точкой, когда одна пара прямых Демулена [1] совпадает.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (5) следует, что характеристическим признаком двукратности одной из фокальных точек (5) является равенство $b_1^2 b_2^1 = 0$, что приводит к совпадению одной из пар прямых Демулена.

В частности, для пары поверхностей Годо, т.е. при $b_1^2 = b_2^1 = 0$, все четыре фокальные поверхности $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ сливаются в одну - поверхность (A_3).

Список литературы

1. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия ОНТИ. М.-Л., 1937.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 14 1983

УДК 514.75

С.В. М а ц и е в с к и й

КОМПЛЕКС ЛИНЕЙЧАТЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен комплекс K линейчатых невырожденных квадрик Q. Найден характеристический признак класса с непустым фокальным многообразием квадрики Q и показано, что в общем случае существует сдвоенная фокальная точка. Показано, что рассматривать фокальные точки порядка выше второго не имеет смысла. Исследован класс с фокальным автополярным тетраэдром.

1. Комплекс с непустым фокальным многообразием.

Отнесем пространство P_3 к реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Уравнение квадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса можно привести к виду: $F \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0$,

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^0 - \omega_3^2 = b_{1i}\omega^i, \quad \omega_2^0 - \omega_3^1 = b_{2i}\omega^i, \quad \omega_0^3 = a_{0i}\omega^i, \\ &-\omega_1^2 = a_{1i}\omega^i; \ -\omega_2^1 = a_{2i}\omega^i, \quad \omega_3^0 = a_{3i}\omega^i, \quad (i=0,1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где $\omega^0 \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3$, $\omega^1 \equiv \omega_2^3 - \omega_0^1$, $\omega^2 \equiv \omega_1^3 - \omega_0^2$.

Фокальное многообразие квадрики Q (см. [2])

$$\left.\begin{aligned} &F_0 \equiv \frac{1}{2}x^1x^2 + \frac{1}{2}x^0x^3 + a_{\alpha 0}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 0}x^\tau x^3 = 0, \\ &F_1 \equiv x^0x^2 + a_{\alpha 1}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 1}x^\tau x^3 = 0, \\ &F_2 \equiv x^0x^1 + a_{\alpha 2}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 2}x^\tau x^3 = 0, \\ &F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0 \quad (\alpha = 0,1,2,3;\ \tau = 1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

в общем случае является пустым множеством.

О п р е д е л е н и е 1.1. Комплексом K_1 называется комплекс K, текущая квадрика Q которого обладает одной фокальной точкой.

Т е о р е м а 1.1. Комплекс K_1 существует и имеет характеристическое свойство: на квадрике Q существует инвариантная точка, описывающая поверхность, касающуюся квадрики Q в той же точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину A_0 в фокальную точку квадрики Q. Существование комплекса обеспечивает его система пфаффовых уравнений:
$\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=a_{3i}\omega^i;\ -\omega_p^q=a_{pi}\omega^i,\ \omega_0^p=c_p\omega^1+c_q\omega^2;\ \omega_p^0-\omega_3^q=b_{pi}\omega^i.$
($p,q=1,2,\ p\neq q$; по p,q не суммировать).

С л е д с т в и е. Комплекс огибает поверхность, описанную фокальной точкой квадрики Q, касаясь этой поверхности в этой точке.

О п р е д е л е н и е 1.2. Комплексом K_{12} называется комплекс K_1, текущая квадрика которого обладает фокальной точкой второго ранга (см.[2]).

Т е о р е м а 1.2. Комплекс K_{12} существует с характеристическим свойством: фокальная точка второго ранга неподвижна.

С л е д с т в и е. Поскольку неподвижная фокальная точка – любого ранга, то рассматривать фокальную точку ранга выше второго не имеет смысла.

Л е м м а 1.3. Фокальная точка тогда и только тогда сдвоенная (см.[2]), когда $a_{11}=a_{22}=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_0 – фокальная точка. Переходя к неоднородным координатам в системе (1.2) $\xi^p=\frac{x^p}{x^0},\ \xi^3=\frac{x^3}{x^0}$, подставляя первое уравнение полученной системы $\xi^3=\xi^1\xi^2$ в остальные и исключая с помощью результанта двух многочленов от нескольких неизвестных (см.[3]) из последних трех уравнений неизвестные ξ^p, получаем систему из шести однородных уравнений, кратность нулевого решения которой совпадает с кратностью фокальной точки:

$$\left.\begin{aligned} &a_{q0}^2(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\quad a_{p0}a_{q0}(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\\ &a_{qq}\xi^p+(b_{qq}+a_{qp}^2-a_{pp}a_{qq}a_{qp})(\xi^p)^2+\varphi(\xi^p)=0,\end{aligned}\right\}\quad(1.3)$$

где φ – многочлены со степенями одночленов не ниже трех.

Л е м м а 1.4. Если $a_{p0}=0$, то прямая (A_0A_p) образует прямолинейную конгруэнцию. Обратное верно, если поверхность (A_0) не вырождается в плоскость или точку.

Т е о р е м а 1.5. Среди фокальных точек квадрики Q комплекса K таких, что проходящие через них прямолинейные образующие квадрики Q образуют прямолинейные комплексы, хотя бы одна сдвоенная, но не строенная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем: $\delta a_{pp}=a_{pp}\pi_3^3-2a_{q0}\pi_3^q$. По лемме Н.М.Остиану , $a_{pp}=0$ есть канонизация репера, если $a_{q0}\neq 0$, что является необходимым условием невырожденности прямолинейного комплекса, образованного прямой (A_0A_q), в конгруэнцию. При $a_{q0}\neq 0$ из системы (1.3) следует, что фокальная точка A_0 не может быть трехкратной.

С л е д с т в и е. Если фокальное многообразие квадрики Q состоит из одной точки, то эта фокальная точка сдвоенная и только сдвоенная, если прямолинейные образующие квадрики Q, пересекающиеся в этой точке, образуют прямолинейные комплексы. Обратное утверждение имеет место, если сдвоенная фокальная поверхность не вырождается в плоскость или точку.

2. Рассмотрим комплекс с автополярным фокальным тетраэдром.

О п р е д е л е н и е 2.1. Комплексом K_4 называется комплекс K_1 такой, что : 1/ на квадрике Q имеются две фокальные несопряженные точки; 2/ прямолинейные образующие, проходящие через эти две фокальные точки, пересекаются в фокальных точках.

Поместим вершины репера в фокальные точки квадрики.

Т е о р е м а 2.1. Комплекс K_4 существует, определяется с произволом двух функций трех аргументов и обладает свойствами: 1/ фокальные точки A_α пробегают одну линейчатую квадрику Q_4: $F_4\equiv(c+1)x^1x^2-c\,x^0x^3=0$; 2/ фокальные точки A_α простые.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Комплекс K_4 определяется пфаффовой системой $\omega_0^3=0,\ \omega_1^2=0,\ \omega_2^1=0,\ \omega_3^0=0,\ \omega_0^p=c\omega^p,$ $dc=c(c+1)\omega^0,\ \omega_3^p=c(\omega^0+b_{p\tau}\omega^\tau),\ \omega_p^0=(c+1)(\omega^0+b_{p\tau}\omega^\tau).$ Кратность фокальной точки A_0 определяется системой

$$(\xi^p)^4(1+b_{qq}+\xi^p\cdot\varphi(\xi^p))=0,\ (\xi^p)^2(b_{qq}+(\xi^p)^2\cdot\varphi(\xi^p))=0,$$

где φ -многочлены.

О п р е д е л е н и е 2.2. Комплекс K_4 называется комплексом K_{40} (K_{41}), если квадрика Q_4 распадается на пару плоскостей с осью (A_0A_3) $((A_1A_2))$.

Т е о р е м а 2.2. Комплекс K_{40} (K_{41}) существует и обладает характеристическими свойствами: 1/ (A_0) -точка (плоскость); 2/ (A_1) -плоскость (точка); 3/ (A_2) -плоскость (точка); 4/ (A_3) -точка (плоскость).

Рассмотрим инвариантные квадрики Q_p: $F_p=0$.

О п р е д е л е н и е 2.3. Если точка A_0 двукратная, то комплекс K_4 называется комплексом K_4^4.

Т е о р е м а 2.3. Комплекс K_4^4 существует, определяется с произволом двух функций двух аргументов и имеет характеристическое свойство: квадрики Q_p вырождаются, но не распадаются на пары плоскостей.

О п р е д е л е н и е 2.4. Если фокальная точка A_3 многократная, то комплекс K_4 назовем комплексом K_4^2.

Т е о р е м а 2.4. Комплекс K_4^2 существует, определяется с произволом одной функции трех аргументов и имеет характеристическое свойство: поверхность (A_3) вырождается в линию.

О п р е д е л е н и е 2.5. Комплекс K_4^2 с трехкратной фокальной точкой A_3 называется комплексом K_4^3.

Т е о р е м а 2.5. Комплекс K_4^3 существует, определяется с произволом двух функций одного аргумента и обладает характеристическим свойством: квадрики Q_p распадаются на пары плоскостей с осями (A_pA_3).

Из теорем существования получаем: при увеличении количества фокальных точек на t единиц высший произвол существования соответствующего класса, как правило, уменьшается не на t единиц.

Т е о р е м а 2.6. Квадрика Q комплекса K_4^3 имеет, с учетом кратности, 6 и только 6 фокальных точек.

Доказательство следует из анализа системы (I.2) в случае комплекса K_4^3.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, I978, ч.I; I980, ч.2.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-В кн.: Труды геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, I974, т.6, с.II3-I34.

3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., I975.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 514.75

Е.А.Митрофанова

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $A^p_m(n)$.

В статье показывается, что пространство параболоидов степени p и размерности m образуют относительно группы Ли $A^p_m(n)$ однородное пространство представления с естественными координатами.

Рассмотрим группу преобразований $A^p_m(n)$ пространства R^n, считая, что она действует левосторонним образом:

$$\tilde{x} = f(a,x) = a\cdot x = \begin{cases} \tilde{x}^i = a^i_k x^k + a^i, \\ \tilde{x}^u = a^u_v x^v + a^u + a^u_i x^i + \ldots + \frac{1}{p!} a^u_{i_1\ldots i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\det\|a^i_k\| \neq 0$, $\det\|a^u_v\| \neq 0$; $i,j,k = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{m+1,n}$; $p = 1,2,\ldots$

Геометрический характер действия группы $A^p_m(n)$ в пространстве R^n состоит в том, что преобразование (1) определяет послойные аффинные отображения расслоения $R^n \xrightarrow{pr} R^m$, индуцирующие аффинные преобразования в R^n. При этом свободный член в записи (1) аффинного отображения слоев расслоения $R^n \to R^m$ является полиномом p-го порядка относительно координат соответствующей точки базы.

Левоинвариантные формы θ^J группы $A^p_m(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k, \quad d\theta^i_k = \theta^j \wedge \theta^i_j,$$

$$d\theta^u = \theta^i \wedge \theta^u_i + \theta^v \wedge \theta^u_v, \quad d\theta^u_v - \theta^w_v \wedge \theta^u_w,$$

$$d\theta^u_i = \theta^v_j \wedge (\theta^u_v \delta^j_i - \theta^j_i \delta^u_v) + \theta^j \wedge \theta^u_{ij},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

$$d\theta^u_{i_1\ldots i_q} = \theta^v_{j_1\ldots j_q} \wedge (\theta^u_v \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_q}_{i_q} - \theta^{j_1}_{i_1} \delta^{j_2}_{i_2} \ldots \delta^{j_q}_{i_q} \delta^u_v - \ldots - \theta^{j_q}_{i_q} \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}} \delta^u_v) + \theta^j \wedge \theta^u_{i_1\ldots i_q j}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\theta^u_{i_1\ldots i_p} = \theta^v_{j_1\ldots j_p} \wedge (\theta^u_v \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_p}_{i_p} - \theta^{j_1}_{i_1} \delta^{j_2}_{i_2} \ldots \delta^{j_p}_{i_p} \delta^u_v - \ldots - \theta^{j_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_{p-1}}_{i_{p-1}} \delta^u_v), \tag{2}$$

где $q = 1,2,\ldots,p-1$,

которые позволяют выделить важную последовательность представлений этой группы. Согласно уравнениям (2) системы форм

$$(\theta^u_{i_1\ldots i_p}, \ldots, \theta^u_{i_1\ldots i_q}), \ (\theta^u_{i_1\ldots i_p}, \ldots, \theta^u_i, \theta^u) \tag{3}$$

вполне интегрируемы для всех q. Пусть

$$a^u = \bar{t}^u + \bar{t}^u_i a^i + \frac{1}{2} \bar{t}^u_{i_1 i_2} a^{i_1} a^{i_2} + \ldots + \frac{1}{p!} \bar{t}^u_{i_1\ldots i_p} a^{i_1} \ldots a^{i_p} \tag{4}$$

уравнение параболоида степени p и размерности m. Множество всех таких параболоидов образует относительно группы $A^p_m(n)$ однородное пространство представления $P^p_m(n)$ с естественными координатами $(\bar{t}^u, \bar{t}^u_i, \ldots, \bar{t}^u_{i_1\ldots i_p})$. Это представление имеет естественные проекции

$$P^p_m(n) \to P^q_m(n) = \{(\bar{t}^u_{i_1\ldots i_q}, \ldots, \bar{t}^u_{i_1\ldots i_p})\},$$

каждое из которых также является однородным пространством представления группы $A^p_m(n)$. Геометрический смысл вполне интегрируемых систем (3) выражается следующей теоремой

Теорема. Первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\{\theta^u_{i_1\ldots i_p}, \ldots, \theta^u_{i_1\ldots i_q}\}$ являются естественные координаты однородного пространства $P^q_m(n)$, а первыми интегралами всей системы (3) являются естественные координаты пространства параболоидов $P^p_m(n)$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I4 1983

УДК 514.75

Н. Т. Мочерню к

ВЫРОЖДЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КОНИК

Однопараметрические многообразия коник в P_3 естественно разбиваются на три типа: характеристика плоскости коники ℓ_4 имеет с коникой две общие точки, не имеет общих точек, касается коники.

В работе рассматривается третий тип, в котором различаются два класса: 1/точка касания не является точкой возврата характеристики ℓ_4; 2/точка касания совпадает с точкой возврата характеристики ℓ_4.

Система уравнений Пфаффа инвариантности коники

$$x^4=0, \quad a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta=0, \quad \alpha,\beta=1,2,3 \qquad (1)$$

согласно [1] при $n=3$, $h=1$, $k=2$ имеет вид

$$\Delta a_{\alpha\beta}=0, \quad \pi^4_\alpha=0, \quad \pi^\alpha_\alpha+\pi^4_4=0, \qquad (2)$$

где формы Пфаффа $\Delta a_{\alpha\beta}$ выглядят следующим образом:

$$\Delta a_{\alpha\beta}\equiv \delta a_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-a_{\alpha\beta}\vartheta, \quad \gamma=1,2,3. \qquad (3)$$

Здесь ϑ -некоторая форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, а символ δ означает дифференциал при фиксированном главном параметре. Рассматриваются невырожденные коники, поэтому, по крайней мере, две величины из $a_{\alpha\beta}$, например a_{12} и a_{33}, отличны от нуля. Тогда

$$\vartheta=\frac{1}{a}(\delta a-a_{\gamma 2}\pi^\gamma_1-a_{1\gamma}\pi^\gamma_2), \quad a\overset{df}{=}a_{12}, \qquad (4)$$

и система уравнений инвариантности (2) приводится к виду:

$$\begin{cases}\delta a_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha-a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta-\frac{a_{\alpha\beta}}{a}(\delta a-a_{\gamma 2}\pi^\gamma_1-a_{1\gamma}\pi^\gamma_2)=0,\\ \pi^4_1=0, \quad \pi^4_2=0, \quad \pi^4_3=0, \quad \pi^\alpha_\alpha+\pi^4_4=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Потребуем, чтобы $a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$, $a_{33}=-a$, тогда коника определяется уравнениями

$$x^4=0, \quad (x^3)^2-2x^1x^2=0,$$

а первая строка системы (5) заменяется уравнениями

$$\pi^2_1=0, \pi^1_2=0, \pi^3_1-\pi^2_3=0, \pi^3_2-\pi^1_3=0, \pi^1_1+\pi^2_2-2\pi^3_3=0. \qquad (6)$$

Примем ω^4_1 за базисную форму; неравенство $\omega^4_1\neq 0$ исключает возможность расположения вершины A_1 репера на характеристике ℓ_4:

$$x^4=0, \quad x^1\omega^4_1+x^2\omega^4_2+x^3\omega^4_3=0. \qquad (7)$$

Тогда из уравнений Пфаффа $\omega^4_2=\alpha\omega^4_1$, $\omega^4_3=\beta\omega^4_1$ обычным путем получаем равенства

$$\delta\alpha+\alpha(\pi^1_1-\pi^2_2+\beta\pi^3_1)-\beta\pi^3_2=0, \quad \delta\beta+\beta(\pi^1_1-\pi^3_3+\beta\pi^3_1)-\alpha\pi^2_3-\pi^1_3=0.$$

Положив здесь $\beta=0$, получаем $\omega^4_3=0$, $\alpha\pi^2_3+\pi^1_3=0$ и равенство

$$\delta\alpha+\alpha(\pi^1_1-\pi^2_2)=0.$$

Для того, чтобы характеристика ℓ_4 и коника касались, необходимо обращение в нуль относительного инварианта α (тогда $\pi^3_2=0$, $\pi^1_3=0$, =0).

1. Пусть $\alpha=0$, тогда характеристика ℓ_4 имеет уравнения $x^4=0$, $x^1=0$ и касается коники в точке A_2 репера. Построен аналитическим путем канонический репер, деривационные формулы которого таковы:

$$dA_1=(\eta A_1+A_2+A_4)\,ds, \quad dA_3=(\gamma A_3+\rho A_2)\,ds,$$

$$dA_2=(\xi A_2+\varepsilon A_1+\varepsilon A_3)\,ds, \quad dA_4=(\varphi A_1-\Phi A_4)\,ds,$$

где $\Phi=\gamma+\eta+\xi$ и $ds=\omega^4_1$. Приводим геометрическую характеристику построенного репера и инвариантов.

Вершина A_2 -точка касания характеристики ℓ_4 с коникой, A_3 -точка возврата ℓ_4, A_1 -точка пересечения поляры точки A_3 относительно коники с этой коникой. Касательная плоскость регулюса (A_1A_2) в точке A_1 проходит через точку A_4, являющуюся точкой возврата образующей торса, порожденного характеристиками этих касательных плоскостей. Пересечение касательной к линии (A_2) с ребром A_1A_2 дает единичную точку $E_{13}=A_1+A_3$, а с коникой – точку $R=2A_1+A_2+2A_3$, которая вместе с E_{13} позволяет определить единичные точки E_{12} и E_{23}. Касательная к линии (A_1) пересекает ребро A_2A_4 в точке E_{24}, которая вместе с точками E_{12}, E_{13}, E_{23} дает возможность определить единичные точки E_{14} и E_{24}. Для инвариантов многообразия имеем

$$\rho=\mathcal{D}V(A_1A_3;E_{13}^{-}B);\quad \varepsilon=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}C);\quad \varphi=\varepsilon\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}P)$$

$$\gamma+\xi=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}Q_1)+\varphi-1;\quad \xi-\eta=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}Q_2)+\varepsilon-1,$$

$$\gamma-\eta=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}Q_3),\quad ds=\frac{\mathcal{D}V(A_1A_3;QE_{13})}{1-\eta\mathcal{D}V(A_1A_3;QE_{13})},$$

где $E_{\alpha\beta}^{-}=A_\alpha-A_\beta;E_{\alpha\beta}=A_\alpha+A_\beta$ и $\alpha,\beta=1,2,3,4$; B – точка пересечения характеристики плоскости $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_1A_3; C – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; P – точка пересечения характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4; Q_1 – точка пересечения касательной к линии (E_{14}) с ребром A_2A_4; Q_2 – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_1A_2A_4)$ с ребром A_2A_4; Q_3 – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{13}) на плоскость $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; Q – точка пересечения плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 и точку A_1+dA_1, близкую к точке A_1, с ребром A_1A_3 репера.

2. Поскольку $\pi_2^1=0$, $\pi_2^3=0$, $\pi_3^1=0$, то можно написать $\omega_2^1=m\omega_1^4$, $\omega_2^3=p\omega_1^4$, $\omega_3^1=n\omega_1^4$. Обычным путем из первого уравнения получаем

$$\delta m+m(\pi_3^3+3\pi_1^1)=0.$$

Вторая ситуация, указанная во вводной части, возможна только при обращении относительного инварианта m в нуль ($m=0$, $\omega_2^1=0$). Канонический репер этого многообразия имеет деривационные формулы

$$dA_1=(FA_1+A_3+A_4)ds,\quad dA_2=(BA_2+PA_3)ds,$$

$$dA_3=(CA_3+A_1+A_2)ds,\quad dA_4=(RA_1-TA_4)ds,$$

где $ds\equiv\omega_1^4$ и $T=B+C+F$.

В этом репере вершина A_2 – точка касания характеристики ℓ_4 с коникой и является точкой возврата ℓ_4; A_4 – такая единственная точка вне плоскости коники, что она описывает линию, касательная к которой в A_4 проходит через точку коники, отличную от A_2 (точку A_1), причем ребро A_1A_4 есть характеристика плоскости $(A_1A_3A_4)$ и A_4 – точка возврата этой характеристики; вершина является полюсом ребра A_1A_2 относительно данной коники. Единичная точка E_{12} есть точка пересечения касательной к линии (A_3) с ребром A_1A_2. Эта касательная пересекает конику в точках $G=A_1+A_2+\sqrt{2}A_3$ и $H=A_1+A_2-\sqrt{2}A_3$, которые вместе с E_{12} позволяют определить точки E_{13} и E_{23}. Касательная к линии (A_1) персекает ребро A_3A_4 в точке E_{34}. Точки E_{12}, E_{13}, E_{23} и E_{34} дают возможность определить единичные точки E_{14} и E_{24}.

Инварианты многообразия характеризуются равенствами

$$F+B+C=-\mathcal{D}V(A_3A_4;F_{34}E_{34})-1,\quad B-F=\mathcal{D}V(A_2A_4;E_{24}F_{24}),$$

$$C-F=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}K_{34}),\quad P=\mathcal{D}V(A_1A_2;E_{12}^{-}S_{12}),$$

$$R=\mathcal{D}V(A_3A_4;E_{34}^{-}S_{34}),\quad ds=\frac{\mathcal{D}V(A_1A_3;ME_{13})}{1-F\mathcal{D}V(A_1A_3;ME_{13})},$$

где F_{34} – точка пересечения касательной к линии (E_{14}) с ребром A_3A_4; F_{24} – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{12}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4; K_{34} – точка пересечения проекции касательной к линии (E_{13}) на плоскость $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; S_{12} и S_{34} – точки пересечения характеристик плоскостей, соответственно, $(A_1A_2A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ с ребрами A_1A_2 и A_3A_4; M – точка пересечения плоскости, проходящей через ребро A_2A_4 и точку A_1+dA_1, близкую к точке A_1, с ребром A_1A_3.

3. Приведем некоторые свойства рассмотренных многообразий, следующие из предыдущих рассуждений.

Т е о р е м а 1. Пары точек A_1, A_4 и A_2, A_3 (A_3, A_4 и A_1, A_2) являются квазифлекнодальными точками [2] для образующих пары регулюсов соответственно (A_1A_4) и (A_2A_3) ((A_3A_4) и (A_1A_2)).

Т е о р е м а 2. а/Необходимым и достаточным условием того, чтобы плоскость коники огибала конус с вершиной A_3, является совпадение характеристики плоскости $(A_1A_3A_4)$ с ребром A_3A_4; б/Необходимым и достаточным условием того, чтобы торс (A_1A_4) вырождался в конус с вершиной A_4, является совпадение характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_3A_4.

Теоремы 1 и 2 верны для первого класса многообразий.

Т е о р е м а 3. Пара регулюсов (A_2A_3) и (A_4A_1) является парой торсов, ребра возврата которых описываются точками A_3 и A_4 (для первого класса), или A_2 и A_4 (для второго класса).

Для второго класса многообразий доказаны следующие предложения.

Т е о р е м а 4. а/Необходимым и достаточным условием того, чтобы плоскость коники огибала конус с вершиной A_2, является совпадение характеристики плоскости $(A_1A_2A_4)$ с ребром A_2A_4. б/Необходимым и достаточным условием того, чтобы торс (A_1A_4) вырождался в конус с вершиной A_4, является совпадение характеристики плоскости $(A_2A_3A_4)$ с ребром A_2A_4.

Т е о р е м а 5. Пары вершин репера A_2, A_4 и A_1, A_3 (A_1, A_2 и A_4, A_3)-квазифлекнодальные точки образующих пары регулюсов соответственно (A_2A_4) и (A_1A_3) ((A_1A_2) и (A_4A_3)).

Из теоремы 4 получаем:

С л е д с т в и е 1. Если выполняются условия теоремы 4а, то торс, порожденный характеристиками плоскостей $(A_1A_2A_4)$, вырождается в конус с вершиной A_2.

С л е д с т в и е 2. Если выполнены условия теоремы 4б, то торс, порожденный характеристиками плоскостей $(A_2A_3A_4)$, вырождается в конус с вершиной A_4.

Список литературы

1. Мочернюк Н.Т. К дифференциальной геометрии многообразий алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб. Вып. 8, Томск, 1980, 202, с. 19.

2. Ивлев Е.Т. Пара линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве. - Доклады научн. конф. по теоретич. и прикладн. вопросам математики. Томск, 1960, с. 50-51.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Ю.И.Попов

ВВЕДЕНИЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА РЕГУЛЯРНОМ ТРЕХСОСТАВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$

Тройку распределений $\mathcal{H}_{\tau}$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_{n-1}$ соответственно τ-мерных плоскостей Π_{τ}, m-мерных плоскостей Π_m и гиперплоскостей Π_{n-1} проективного пространства P_n с отношением инцидентности $(X\in\Pi_{\tau}\subset\Pi_m\subset\Pi_{n-1})$ их соответствующих элементов в общем центре X назовем трехсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}\subset P_n$, в котором распределение 1-го рода $\mathcal{H}_{\tau}$ назовем базисным, а распределения 1-го рода $\mathcal{H}_m$ и $\mathcal{H}_{n-1}$ – оснащающими распределениями [6].

В настоящей работе инвариантным методом Г.Ф.Лаптева [1] строится аффинная связность распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}$, ассоциированная с базисным распределением $\mathcal{H}_{\tau}\subset\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Показано, что всякая инвариантная двойственная нормализация базисного распределения $\mathcal{H}_{\tau}\subset\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ индуцирует четыре аффинные связности с кривизной и кручением, две из которых имеют одинаковое кручение.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения: $a,b,c,d=\overline{1,m}$; $p,q,\tau,s,t=\overline{1,\tau}$; $i,j,\kappa,\ell=\overline{\tau+1,m}$; $\alpha,\beta,\gamma,\delta=\overline{m+1,n-1}$; $u,v,w=\overline{\tau+1,n}$; $\eta,\vartheta,\chi,\lambda=\overline{m+1,n}$; $\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L}=\overline{1,n}$.

1. Относительно репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$ нулевого порядка R° $(X=A_{\circ},\{A_p\}\subset\Pi_{\tau};\ \{A_a\}\subset\Pi_m)$ дифференциальные уравнения распределения записываются следующим образом:

$$\omega^n_p=\Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ},\quad \omega^n_i=\Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ},\quad \omega^{\alpha}_p=M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ},$$
$$\omega^{\alpha}_i=M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ},\quad \omega^n_{\alpha}=\Lambda^n_{\alpha\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ},\quad \omega^i_p=L^i_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{\circ};\tag{1}$$

$$(\nabla_d\Lambda^n_{p\mathcal{K}}+\Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^n_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_p-L^i_{p[\mathcal{J}}\Lambda^n_{|i|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_{\circ}-M^{\alpha}_{p[\mathcal{J}}A^n_{|\alpha|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_{\circ})\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0,$$

$$(\nabla_d\Lambda^n_{i\mathcal{K}}+\Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^n_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_i-\Lambda^n_{q\mathcal{K}}\omega^q_i-M^{\alpha}_{i[\mathcal{J}}A^n_{|\alpha|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_{\circ})\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0,$$

$$(\nabla_d M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}+M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_p+\Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^{\alpha}_n-L^i_{p[\mathcal{J}}M^{\alpha}_{|i|\mathcal{K}]}\omega^{\mathcal{J}}_{\circ})\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0,$$

$$(\nabla_d M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}+M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_i-M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^p_i+\Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^{\alpha}_n)\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0,\tag{2}$$

$$(\nabla_d A^n_{\alpha\mathcal{K}}+A^n_{\alpha\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^{\alpha}_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\alpha}-\Lambda^n_{q\mathcal{K}}\omega^q_{\alpha}-\Lambda^n_{i\mathcal{K}}\omega^i_{\alpha})\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0,$$

$$\nabla_d L^i_{p\mathcal{K}}+L^i_{p\mathcal{K}}\omega^{\circ}_{\circ}-\delta^i_{\mathcal{K}}\omega^{\circ}_p+M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^i_{\alpha}+\Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^i_n)\wedge\omega^{\mathcal{K}}_{\circ}=0.$$

Оператор ∇_d действует по закону ковариантного дифференцирования, например, $\nabla_d\Lambda^n_{p\mathcal{K}}=d\Lambda^n_{p\mathcal{K}}-\Lambda^n_{s\mathcal{K}}\omega^s_p-\Lambda^n_{p\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}+\Lambda^n_{p\mathcal{K}}\omega^n_n$.

Имеет место теорема существования: "Трехсоставное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ существует с произволом в $(n-m+\tau)(m-\tau)+(\tau+1)(n-m)-1$ функций n аргументов".

Мы рассматриваем регулярные распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$: характеристика $X_{n-\tau-1}(A_{\circ})$ гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_{\circ})$ и плоскость $\Pi_{\tau}(A_{\circ})$ при смещении центра $A_{\circ}$ вдоль кривых, принадлежащих базисному распределению $\mathcal{H}_{\tau}$, находятся в общем положении. Аналитически регулярность распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ равносильна невырожденности тензора Λ^n_{pq} (2): $\Lambda=\det\|\Lambda^n_{pq}\|\neq0$.

Согласно работе [4] при условии $\Lambda\neq0$ возможна частичная канонизация репера R°, при которой $\Lambda^n_{ip}=0$, $A^n_{\alpha p}=0$, а совокупность величин Λ^n_{ij} (2) образует тензор 1-го порядка. В данной работе исследуем регулярное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, для которого тензор Λ^n_{ij} также невырожденный $\hat{\Lambda}=\det\|\Lambda^n_{ij}\|\neq0$. При $\hat{\Lambda}\neq0$ возможна дальнейшая канонизация [4] репера R°, при которой $A^n_{\alpha j}=0$. Полученный таким образом канонизированный репер, относительно которого $\Lambda^n_{ip}=A^n_{\alpha p}=A^n_{\alpha j}=0$, назовем репером 1-го порядка R^1 .Относительно репера R^1 дифференциальные уравнения трехсоставного регулярного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\omega^n_p = \Lambda^n_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \quad \omega^n_i = \Lambda^n_{iu}\omega^u_0, \quad \omega^{\alpha}_p = M^{\alpha}_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \\
\omega^{\alpha}_i = M^{\alpha}_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \quad \omega^p_{\alpha} = N^p_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \quad \omega^i_{\alpha} = N^i_{\alpha\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \\
\omega^n_{\alpha} = A^n_{\alpha\lambda}\omega^{\lambda}_0, \quad \omega^i_p = L^i_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \quad \omega^p_i = L^p_{i\varkappa}\omega^{\varkappa}_0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где,например,

$$\nabla_d N^p_{\alpha q} + N^p_{\alpha q}\omega^0_0 - \omega^0_{\alpha}\delta^p_q = N^p_{\alpha q\varkappa}\omega^{\varkappa}_0, \tag{4}$$

$$\nabla_d L^p_{iq} + L^p_{iq}\omega^0_0 - \omega^0_i\delta^p_q = L^p_{iq\varkappa}\omega^{\varkappa}_0 . \tag{5}$$

2.Предположим,что базисное распределение $\mathcal{H}_{\tau} \subset \mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ оснащено в смысле А.П.Нордена [3] двойственным образом полями квазитензоров ν^p_n, ν^0_p :

$$\nabla_d \nu^p_n + \omega^p_n = \nu^p_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_0 , \qquad \nabla_d \nu^0_p + \omega^0_p = \nu^0_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0 . \tag{6}$$

Из уравнений (6) видно,что при данном выборе полей квазитензоров ν^p_n, ν^0_p возможна частичная канонизация [4] репера 1-го порядка,при которой $\nu^p_n = 0$, $\nu^0_p = 0$. Формы ω^p_n, ω^0_p при этом становятся главными:

$$\omega^p_n = c^p_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_0 , \quad \omega^0_p = a^0_{p\varkappa}\omega^{\varkappa}_0 , \tag{7}$$

$$\nabla_d c^p_{n\varkappa} + c^p_{n\varkappa}\omega^0_0 - \delta^p_{\varkappa}\omega^0_n - N^p_{\alpha\varkappa}\omega^{\alpha}_n - L^p_{i\varkappa}\omega^i_n = c^p_{n\varkappa J}\omega^J_0 , \tag{8}$$

$$\nabla_d a^0_{p\varkappa} + a^0_{p\varkappa}\omega^0_0 + M^{\alpha}_{p\varkappa}\omega^0_{\alpha} + L^i_{p\varkappa}\omega^0_i + \Lambda^n_{p\varkappa}\omega^0_n = a^0_{p\varkappa J}\omega^J_0 , \tag{9}$$

$$c^p_{n[\varkappa J]} = a^0_{p[\varkappa J]} = 0 .$$

Геометрический смысл такой канонизации состоит в том,что точки $\{A_p\}$ репера R^1 помещены в инвариантную нормаль 2-го рода $\Pi_{\tau-1}(\nu^0_p)$,а точка A_n принадлежит инвариантной нормали $N_{n-\tau}(\nu^p_n)$ 1-го рода распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$.В силу (3)-(9) формы $\omega^{\varkappa}_0$,

$$\overset{1}{\theta}{}^p_q = \omega^p_q - \delta^p_q\omega^0_0 - N^p_{\alpha q}\omega^{\alpha}_0 - L^p_{iq}\omega^i_0 - c^p_{nq}\omega^n_0$$

удовлетворяют структурным уравнениям Картана-Лаптева [5]:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathcal{D}\omega^{\varkappa}_0 &= \omega^J_0 \wedge (\omega^{\varkappa}_J - \delta^{\varkappa}_J\omega^0_0), \\
\mathcal{D}\omega^p_0 &= \omega^q_0 \wedge \overset{1}{\theta}{}^p_q + \tfrac{1}{2}\overset{1}{R}{}^p_{\varkappa J}\omega^{\varkappa}_0 \wedge \omega^J_0 , \\
\mathcal{D}\overset{1}{\theta}{}^p_q &= \overset{1}{\theta}{}^s_q \wedge \overset{1}{\theta}{}^p_s + \tfrac{1}{2}\overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa J}\omega^{\varkappa}_0 \wedge \omega^J_0 ,
\end{aligned}
\right\}
\tag{10}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overset{1}{R}{}^p_{in} = L^p_{in} - c^p_{ni} , \ \overset{1}{R}{}^p_{\alpha i} = N^p_{\alpha i} - L^p_{i\alpha}, \ \overset{1}{R}{}^p_{ij} = L^p_{ij} - L^p_{ji}, \\
&\overset{1}{R}{}^p_{\alpha\beta} = N^p_{\alpha\beta} - N^p_{\beta\alpha}, \ \overset{1}{R}{}^p_{\alpha n} = N^p_{\alpha n} - c^p_{n\alpha}, \ \overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa} = 0,
\end{aligned}
\right\}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{1}{R}{}^p_{q\varkappa J} = 2[& N^p_{[\varkappa|s|}N^s_{J]q} + L^p_{[\varkappa|s|}L^s_{J]q} + L^p_{[\varkappa|s|}N^s_{J]q} + N^p_{[\varkappa|s|}L^s_{J]q} - \\
& - \delta^n_{[\varkappa}N^p_{J]s}c^s_{nq} - \delta^n_{[\varkappa}L^p_{J]s}c^s_{nq} - c^p_{ns}L^s_{[\varkappa|q|}\delta^n_{J]} - \\
& - c^p_{ns}N^s_{[\varkappa|q|}\delta^n_{J]} + a^0_{q[\varkappa}\delta^p_{J]} + M^{\alpha}_{q[\varkappa}N^p_{|\alpha|J]} + L^i_{q[\varkappa}L^p_{|i|J]} + \\
& + \Lambda^n_{q[\varkappa}c^p_{|n|J]} - \delta^p_q a^0_{[\varkappa J]} - N^p_{\alpha q}M^{\alpha}_{[\varkappa J]} - L^p_{iq}N^i_{[\varkappa J]} + \\
& + N^p_{[\varkappa|q|J]} - L^p_{iq}L^i_{[\varkappa J]} + L^p_{[\varkappa|q|J]} - c^p_{nq}\Lambda^n_{[\varkappa J]} \\
& - c^p_{nq}A^n_{[\varkappa J]} - c^p_{nn}\Lambda^n_{q[\varkappa}\delta^n_{J]} - c^p_{nq[\varkappa}\delta^n_{J]} - \\
& - c^p_{ni}L^i_{q[\varkappa}\delta^n_{J]} - c^p_{n\alpha}M^{\alpha}_{q[\varkappa}\delta^n_{J]}],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& a^0_{u\varkappa} = M^{\alpha}_{\beta\varkappa} = M^{\alpha}_{n\varkappa} = N^i_{a\varkappa} = N^i_{n\varkappa} = L^i_{u\varkappa} = L^p_{aq\varkappa} = \\
& = L^p_{nq\varkappa} = \Lambda^n_{u\varkappa} = A^n_{a\varkappa} = A^n_{n\varkappa} = N^p_{a\varkappa} = N^p_{n\varkappa} = L^p_{a\varkappa} = \\
& = L^p_{n\varkappa} = N^p_{aq} = N^p_{nq} = N^p_{aq\varkappa} = N^p_{nq\varkappa} = L^p_{\alpha q} = \\
& = L^p_{sq} = L^p_{nq} = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, система форм $\{\omega^p_o;\ \overset{1}{\theta}{}^p_q\}$ в главном расслоенном многообразии $\{\omega^J_o;\ \overset{1}{\theta}{}^p_q\}$ определяет пространство с фундаментально-групповой аффинной связностью. Эту связность назовем первой аффинной связностью $\overset{1}{\nabla}$, индуцированной данной двойственной нормализацией базисного распределения $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$. Совокупность величин $\overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}J}$, $\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}J}$ образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны в $(n+\tau^2)$-мерном главном расслоенном многообразии $\{\omega^J_o,\ \overset{1}{\theta}{}^p_q\}$:

$$\nabla_d \overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}J} + \overset{1}{R}{}^p_{\mathcal{K}J}\,\omega^o_o = (\ldots)_{\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o;\ \nabla_d \overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}J} + 2\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}J}\,\omega^o_o = (\ldots)_{\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o. \tag{13}$$

Тензор кривизны $\overset{1}{R}{}^p_{q\mathcal{K}J}$ охватывает тензоры $\overset{1}{R}{}^p_{qst}$, $\overset{1}{R}{}^p_{q\alpha\beta}$, $\overset{1}{R}{}^p_{qij}$. В частности, компоненты тензора $\overset{1}{R}{}^p_{qst}$ имеют вид:

$$\overset{1}{R}{}^p_{qts} = 2\big[a^o_{q[t}\delta^p_{s]} + M^\alpha_{q[t}N^p_{|\alpha|s]} + L^i_{q[t}L^p_{|i|s]} - \delta^p_q a^o_{[ts]} +$$

$$+\Lambda^n_{q[t}C^p_{|n|s]} - N^p_{\alpha q}M^\alpha_{[ts]} - L^p_{iq}L^i_{[ts]} - C^p_{nq}\Lambda^n_{[ts]}\big]. \tag{14}$$

Свертывая тензор $\overset{1}{R}{}^p_{qts}$ по индексам p и s, получим тензор

$$\overset{1}{R}_{qt} = \overset{1}{R}{}^p_{qtp} = \tau a^o_{qt} - a^o_{tq} + \tau M^\alpha_{qt}N_\alpha + \tau L^i_{qt}L_i - M^\alpha_{qp}N^p_{\alpha t} +$$

$$+\Lambda^n_{qt}C^p_{np} - L^i_{qp}L^p_{it} - \Lambda^n_{qp}C^p_{nt} - 2N^p_{\alpha q}\tau^\alpha_{tp} - 2C^p_{nq}\tau^n_{tp} -$$

$$-2L^p_{iq}\tau^i_{tp}, \tag{15}$$

где $L_i = \frac{1}{\tau}L^p_{ip}$, $\tau^\alpha_{pq} = \frac{1}{2}(M^\alpha_{pq} - M^\alpha_{qp})$, $\tau^n_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq} - \Lambda^n_{qp})$, $\tau^i_{tp} = \frac{1}{2}(L^i_{tp} - L^i_{pt})$,
который назовем тензором Риччи аффинной связности $\overset{1}{\nabla}$.

3. Двойственная нормализация (ν^o_p, ν^p_n) регулярного распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ индуцирует не единственную аффинную связность. Согласно [2] другую аффинную связность можно определить при помощи новой системы форм $\{\omega^p_o,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + \Gamma^p_{q\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o\}$. Требование того, чтобы формы $\{\omega^p_o,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q\}$ удовлетворяли структурным уравнениям

Картана-Лаптева [5], равносильно выполнению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\nabla_d\Gamma^p_{qt} + \Gamma^p_{qt}\,\omega^o_o = \bar{\Gamma}^p_{qt\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o, \tag{16}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{q\alpha} + \Gamma^p_{q\alpha}\,\omega^o_o = \bar{\Gamma}^p_{q\alpha\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o, \tag{17}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{qi} + \Gamma^p_{qi}\,\omega^o_o = \bar{\Gamma}^p_{qi\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o, \tag{18}$$

$$\nabla_d\Gamma^p_{qn} + \Gamma^p_{qn}\,\omega^o_o - \Gamma^p_{q\alpha}\,\omega^\alpha_n - \Gamma^p_{qi}\,\omega^i_n = \bar{\Gamma}^p_{qn\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o. \tag{19}$$

Можно показать, что следующие охваты удовлетворяют соответственно уравнениям вида (16)-(19):

$$F^p_{qt} = \Lambda^{ps}_n(\Lambda^n_{sqt} - \Lambda^n_{s\alpha}M^\alpha_{qt} - \Lambda^n_{si}L^i_{qt} - \Lambda^n_{sn}\Lambda^n_{qt}),$$

$$F^p_{qi} = \Lambda^{pt}_n(\Lambda^n_{tqi} - \Lambda^n_{tn}\Lambda^n_{qi} - \Lambda^n_{tj}L^j_{qi} - \Lambda^n_{t\alpha}M^\alpha_{qi} + L^k_{tq}\Lambda^n_{ki}) + \delta^p_q L_i,$$

$$F^p_{q\alpha} = \Lambda^{pt}_n(\Lambda^n_{tq\alpha} - \Lambda^n_{tn}\Lambda^n_{q\alpha} - \Lambda^n_{ti}L^i_{q\alpha} - \Lambda^n_{t\beta}M^\beta_{q\alpha} +$$

$$+M^\beta_{tq}\Lambda^n_{\beta\alpha} + L^j_{tq}\Lambda^n_{j\alpha}) + \frac{1}{\tau}\delta^p_q N^t_{\alpha t}, \tag{20}$$

$$F^p_{qn} = \Lambda^{ps}_n(\Lambda^n_{sqn} - \Lambda^n_{sn}\Lambda^n_{qn} - \Lambda^n_{s\alpha}M^\alpha_{qn} - \Lambda^n_{si}L^i_{qn} +$$

$$+M^\alpha_{sq}\Lambda^n_{\alpha n} + L^i_{sq}\Lambda^n_{in} - \frac{1}{\tau}M^\alpha_{sq}N^t_{\alpha t} - L^i_{sq}L_i).$$

Итак, построив охват $\{F^p_{q\mathcal{K}}\}$ объекта аффинной связности $\{\Gamma^p_{q\mathcal{K}}\}$, мы внутренним инвариантным образом в окрестности 2-го порядка элемента распределения $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$ определим вторую аффинную связность $\overset{2}{\nabla}$, которая задается системой форм $\{\omega^p_o,\ \overset{2}{\theta}{}^p_q = \overset{1}{\theta}{}^p_q + F^p_{q\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_o\}$. Наконец, учитывая, что каждая из систем величин $\{\Gamma^p_{qt}\}$ и $\{\Gamma^p_{qi},\ \Gamma^p_{q\alpha},\ \Gamma^p_{qn}\}$ меняется по тензорному закону

(16)-(19), определим еще две аффинные связности $\overset{3}{\nabla}$ и $\overset{4}{\nabla}$ соответственно следующими формами (см.[7]):

$$\overset{3}{\nabla}: \quad \omega_o^p, \quad \overset{3}{\theta}{}_q^p = \overset{1}{\theta}{}_q^p + F_{qt}^p \omega_o^t, \quad (\Gamma_{qu}^p = F_{qu}^p = 0);$$

$$\overset{4}{\nabla}: \quad \omega_o^p, \quad \overset{4}{\theta}{}_q^p = \overset{1}{\theta}{}_q^p + F_{qu}^p \omega_o^u, \quad (\Gamma_{qt}^p = F_{qt}^p = 0).$$

Аналогично [7] доказывается, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{3}{\nabla}$ имеют одинаковые кручения, но, вообще говоря, различные тензоры кривизны.

Таким же образом, как это показано выше для базисного распределения $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$, строятся еще восемь аффинных связностей, ассоциированных с трехсоставным распределением $\mathcal{H}^\tau_{m,n-1}$.

Эти связности индуцируются двойственными нормализациями $\{\nu^o_\alpha, \nu^\alpha_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик X_{n-m-1} гиперплоскостей Π_{n-1} и двойственными нормализациями $\{\nu^o_i, \nu^i_n\}$ распределения $\mathcal{H}_{m-\tau}$ плоскостей $\Pi_{m-\tau}$ $(\Pi_{m-\tau} \subset \Pi_m;\ \Pi_{m-\tau} \cup \Pi_\tau = \Pi_m)$.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.о-ва, 1953, 2, с.275-382.

2 Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-Тр.4-го Всес.матем.съезда (1961), 2, 1964, с.226-233.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М.-Л., 1950.

4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1962, 7, №2, с.231-240.

5 Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин Г.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр.Геометр.семинара.М., ВИНИТИ, 1973, 4, с.7-70.

6 Попов Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $H^\tau_{m,n-1}$.-Тезисы докладов 7-й Всес.конф.по совр.проблемам геом. Минск, 1979, с.160.

7 Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Тр.Геометр.семинара, М., ВИНИТИ, 1975, 7, с.117-151.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
ВЫП.14 1983

УДК 514.75

О.С.Редозубова

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРЫ T КОНГРУЭНЦИЙ С ЗАДАННЫМ СООТНОШЕНИЕМ АБСЦИСС ФОКУСОВ

Рассмотрим ортогональные пары T конгруэнций в евклидовом пространстве E_3, у которых обратно пропорциональны абсциссы соответствующих фокусов.

Фокусы соответствующих прямых пары T конгруэнций обозначим буквами F_a, F'_a $(a=1,2)$. Прямые конгруэнции общих перпендикуляров $\{\tau\}$ пересекают соответствующие пары в точках K_a. К паре T присоединяется подвижный ортонормированный репер $R=(\mathcal{O},\vec{e}_i)$, где $\mathcal{O}\in\tau$, $\vec{e}_3 \parallel \tau$, $i=1,2,3$. Прямые $(F_aF'_a)$ образуют с $\vec{e}_1$ углы α_a, угол между соответствующими прямыми равен $\alpha_1-\alpha_2$. Относительно репера $(\mathcal{O},\vec{e}_3)$ на прямой τ точки K_a имеют координаты h_a; расстояние между соответствующими прямыми равно $|h_1-h_2|$. Направляющими ортами прямых $(F_aF'_a)$ являются векторы $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1\cos\alpha_a + \vec{e}_2\sin\alpha_a$. По отношению к реперам $(K_a,\vec{\eta}_a)$ на прямых (F_a,F'_a) фокусы F_a и F'_a имеют соответственно координаты ρ_a и ρ'_a. Компоненты инфинитезимальных перемещений репера R удовлетворяют условиям: $d\vec{\mathcal{O}} = \omega^i\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j$. Пары T конгруэнций могут быть общими и специальными в соответствии с работой I, с.3.

Рассмотрим ортогональные пары T конгруэнций, у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2$. Будем обозначать такие пары через $\hat{T}$. В этом случае абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны: $\rho_1 : \rho_2 = \rho'_2 : \rho'_1$.

I. Допустим сначала, что пары T конгруэнций общего вида (когда $\rho = \rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0$). Такие пары определяются системой (3) в работе [1]. Присоединим к системе (3) условие ортогональности пары T конгруэнций $\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{2}$ и условие $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$. Используем обозначения, принятые в работе [1].

$$\Omega_{a3}=\omega_1^3\cos\alpha_a+\omega_2^3\sin\alpha_a\,,\quad \Omega^*_{a3}=-\omega_1^3\sin\alpha_a+\omega_2^3\cos\alpha_a\,,$$

$$\Omega^*_a=\omega^1\sin\alpha_a-\omega^2\cos\alpha_a\,,\quad A_a=\omega_1^2+d\alpha_a\,, \tag{1}$$

$$H_a=\frac{\omega^3+dh_a}{h_1-h_2}\,,\quad Q_a=\Omega^*_a+h_a\Omega_{a3}\,,\quad (a=1,2).$$

Кроме того, обозначим $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=m$, $\frac{1}{\rho}(\rho_a-\rho_a')=\tau_a$. (2)

Т е о р е м а 1. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций в общем случае существуют с произволом четырех функций одного аргумента, если $\tau_1\neq\tau_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений, определяющая ортогональные пары $\hat{T}$ в общем случае, имеет вид:

$$A_1=-\Omega_{13}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}+Q_1\tau_2\,,\quad A_2=\Omega_{23}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}-Q_2\tau_1\,,$$

$$H_1=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+Q_1\tau_1\,,\quad H_2=\Omega_{23}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}-Q_2\tau_1\,, \tag{3}$$

$$A_1=A_2\equiv A\,,\quad \rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'=m\,.$$

Отсюда получим систему уравнений:

$$A=-\Omega_{13}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}+Q_1\tau_2\,,\quad H_1=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+Q_1\tau_1\,,$$

$$Q_2=-Q_1\frac{\tau_2}{\tau_1}+\Omega_{13}\frac{m}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_2}{\tau_1(h_1-h_2)}\,, \tag{4}$$

$$H_2=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m(\tau_1^2-\tau_2^2)}{\tau_1(h_1-h_2)}+Q_1\frac{\tau_2^2}{\tau_1}\,,\quad A_1=A_2\equiv A.$$

При продолжении системы уравнений (4) получим четыре независимых квадратичных уравнения с линейно независимыми формами Ω_{a3} ($a=1,2$) и неизвестными формами Q_1, $dm, d\tau_1, d\tau_2$. Отсюда и следует заключение теоремы.

Т е о р е м а 2. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида с соответственно равными фокальными расстояниями соответствующих прямых существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Присоединяя условие $\tau_1=\tau_2$ к системе уравнений (4), получим, в частности, что $H_1=H_2=H$. Исследование такой системы приводит к выводу о том, что независимых три квадратичных уравнения, неизвестных форм – тоже три: Q_1, dm, $d\tau_1$. Следовательно, произвол существования таких пар – три функции одного аргумента.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида имели соответственно равные фокальные расстояния, необходимо и достаточно, чтобы пары были равнонаклонными парами II-го типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций общего вида равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то из условий $\tau_1=\tau_2$ и $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$ следует, что $\rho_1'=-\rho_2$, $\rho_2'=-\rho_1$, что определяет пары II-го типа. Если ортогональные пары $\hat{T}$ есть пары II-го типа, то у них равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых [1, с. 15]. Теорема доказана.

У таких пар равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых дополнительных конгруэнций, углы между фокальными плоскостями, проходящими через эти прямые, а также углы между фокальными плоскостями соответствующих прямых пары [1, с. 15].

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций общего вида были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, необходимо, но не достаточно, чтобы расстояния между соответствующими прямыми были постоянными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то $\tau_1=\tau_2$ и из системы (4) имеем $H_1=H_2$, откуда в силу обозначений (1) следует, что $h_1-h_2=\mathrm{Const}$. Значит, постоянство расстояния между соответствующими прямыми является необходимым. Предположим, что у ортогональных пар $\hat{T}$ конгруэнций постоянно расстояние между парами соответствующих прямых, т.е. $H_1=H_2\equiv H$. Присоединяя его к системе (4) и сравнивая выражения Q_1 из второго и четвертого уравнений, получим:

$$(\tau_2^2-\tau_1^2)\{H(h_1-h_2)+\Omega_{13}m\tau_2-\Omega_{23}m\tau_1\}=0. \quad (5)$$

Здесь две возможности: а/ $\tau_1=\tau_2$, (6)

$$б/ \ H=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}. \quad (7)$$

В случае а/ равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, а в случае б/пары не обладают таким свойством.

Т е о р е м а 5. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций общего вида с постоянным расстоянием между соответствующими прямыми либо являются парами II-го типа, либо соответствующие прямые лежат перекрестно в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, либо являются нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (6) и теоремы 3 следует, что пары II-го типа. Условие (7), присоединенное к системе (4), приводит к парам $\tilde{T}$ с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми. В силу теоремы 20 в [1] имеет место вторая часть теоремы 5. Для такой пары конгруэнция общих перпендикуляров является псевдосферической, а пары симметричны и расслояемы.

Т е о р е м а 6. Для того, чтобы у ортогональной пары $\hat{T}$ конгруэнции, входящие в пару, были нормальными, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между соответствующими прямыми и произведение абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары были постоянными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие нормальности конгруэнций ортогональной пары T имеет вид:

$$\rho_a\rho_a'+(h_1-h_2)^2=0. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$ и пара T есть пара $\hat{T}$. Система уравнений (4), (8) определяет такие пары.

По теореме 28 в [1] у такой пары постоянно расстояние между соответствующими прямыми. Из условия (8) постоянно и произведение $\rho_1\rho_1'$. Обратно, если пара $\hat{T}$ конгруэнций ортогональная $\rho_1\rho_1'=m=const$ и $h_1-h_2=const$, то такие пары определяются системой уравнений (4) и $H_1=H_2\equiv H$. Систему можно привести к виду:

$$A=-\Omega_{13}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}, \quad H=-\Omega_{13}\frac{m\tau_2}{h_1-h_2}+\Omega_{23}\frac{m\tau_1}{h_1-h_2},$$
$$Q_1=\Omega_{23}\frac{m}{h_1-h_2}, \quad Q_2=\Omega_{13}\frac{m}{h_1-h_2}, \quad m=const. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнения внешним образом и подставляя выражения A, H и Q_1, Q_2 из (9), получим четыре квадратичных уравнения, два последние из которых имеют вид:

$$(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{m}{h_1-h_2}+h_1-h_2\right\}=0, \ (\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{m}{h_1-h_2}+h_1-h_2\right\}=0. \quad (10)$$

Отсюда $\quad m+(h_1-h_2)^2=0.$

Следовательно, конгруэнции пары $\hat{T}$ нормальные. Произвол существования таких пар- две функции одного аргумента.

II. Допустим, что ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций специального вида. К системе уравнений (2) в [1] надо присоединить уравнения:

$$A_1=A_2\equiv A, \quad \rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2', \quad \rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'. \quad (11)$$

Т е о р е м а 7. Ортогональные пары $\hat{T}$ конгруэнций специального вида являются равнонаклонными парами I-го типа и существуют с произволом девяти произвольных постоянных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из последних двух уравнений (11) следует, что $\rho_1=\rho_2$, $\rho_1'=\rho_2'$, что определяет пары I-го типа [1, с.12]. Произвол существования таких пар - девять постоянных. Ортогональные пары I-го типа являются симметричными, для них характерно, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в центрах.

Список литературы

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар T конгруэнций. -Деп. ВИНИТИ 14.07.1980г., М., №2993-"Деп.рук." 1980, №II, б/о 189.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14
1983

УДК 514.75

В.Р.Рютин

НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ n-го ПОРЯДКА

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве класс конгруэнций парабол порядка $n \geqslant 3$, допускающих однопараметрическое семейство поверхностей, ортогональных к параболам конгруэнции. Такие конгруэнции в дальнейшем будем называть нормальными конгруэнциями парабол n-го порядка.

В репере $\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где вершина расположена в фокусе параболы, вектор $\vec{e}_1$ направлен вдоль оси, а вектор $\vec{e}_3$ перпендикулярен плоскости параболы, уравнения параболы n-го порядка имеют вид:

$$(x^2)^n - p\,(2x^1 + p) = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1}$$

В нормальной конгруэнции каждая точка $\vec{M} = \vec{A} + x^2\vec{e}_2 + \frac{1}{2p}\left((x^2)^n - p^2\right)\vec{e}_1$ параболы описывает ортогональную к параболе в этой точке поверхность, поэтому

$$\theta = d\vec{M}\cdot\vec{\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

где вектор $\vec{\varepsilon} = n(x^2)^{n-1}\vec{e}_1 + 2p\vec{e}_2$ касается параболы (1) в точке M. При $n \geqslant 3$ условие полной интегрируемости $\theta \wedge d\theta = 0$ уравнения (2) приведется к следующей системе квадратичных уравнений:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 \wedge dp = 0, \quad \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0,\\ \omega^2 \wedge (dp - 2\omega^1) + p\,\omega_1^2 \wedge \omega^1 = 0, \quad (n-1)p\,\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^1 \wedge dp = 0,\\ 2\omega^2 \wedge dp + 2(2n-1)p\,\omega_1^2 \wedge \omega^1 - 2np\,\omega^3 \wedge \omega_3^2 = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

откуда следует, что формы ω_1^2, ω^1 и ω^2 являются полными дифференциалами, т.е. $\omega_1^2 = d\varphi$, $\omega^1 = du$, $\omega^2 = dw$.

Применяя лемму Картана к уравнениям системы (3), получаем

$$dp = \alpha\,du, \quad dw = \beta\,du, \quad d\varphi = \gamma\,du, \quad \omega_1^3 = \lambda\omega^3, \quad \omega_2^3 = \mu\omega^3, \tag{4}$$

формы ω^1, ω^3 – главные. Из (4) следует, что нормальные конгруэнции парабол n-го порядка ($n \geqslant 3$) существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента и обладают следующими геометрическими свойствами: 1/вектор $\vec{e}_3$ касается линий семейства $u = \mathrm{const}$, принадлежащих поверхности (A), вдоль каждой из этих линий параметр p параболы остается неизменным; 2/плоскости парабол конгруэнции образуют развертывающуюся поверхность с характеристикой, определяемой уравнениями $1 + \lambda x^1 + \mu x^2 = 0$, $x^3 = 0$; 3/двумя семействами линий кривизны на поверхности (A) являются линии $u = \mathrm{const}$ и $\omega^3 = 0$, причем последние принадлежат плоскостям парабол конгруэнции.

Система квадратичных уравнений, определяющих нормальные конгруэнции обычных парабол ($n = 2$), имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 \wedge dp - 2p\,\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0,\\ 2p(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad \omega^1 \wedge dp - p\,\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0,\\ \omega^2 \wedge dp - p\,\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered}dp = \alpha\,du + p(\beta_1\gamma - \beta\gamma_1)\,\omega^3; \quad \omega^2 = \beta\,du + \beta_1\omega^3, \quad \omega_1^2 = \gamma\,du + \gamma_1\omega^3,\\ \omega_1^3 = (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)\,du + \lambda\omega^3, \quad \omega_2^3 = -\left(\frac{1}{2p}\beta_1 + \gamma_1\right)du + \mu\,\omega^3,\end{gathered} \tag{6}$$

где коэффициенты разложений удовлетворяют соотношениям $p(\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)(2\mu - \gamma) + (2p\gamma_1 - \beta_1)\gamma_1 = 0$, $p\beta(\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) - (\alpha - 1)\beta_1 - p\gamma_1 = 0$. Из (6) следует, что произвол существования конгруэнций парабол второго порядка тот же, что и в случае порядка $n \geqslant 3$. Для того, чтобы систему уравнений (6) привести к системе (4), достаточно положить $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, следовательно, класс нормальных конгруэнций парабол второго порядка шире, чем класс нормальных конгруэнций парабол порядка выше второго.

Список литературы

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

С.В.Сангаджиева

КОНГРУЭНЦИИ K_p^q

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции K_p^q, $p+q=2$ -конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик с p, вырождающимися в точки и с q, вырождающимися в линии фокальными поверхностями.Рассмотрены подклассы таких конгруэнций.

Отнесем конгруэнцию K квадрик Q к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3$, где A_i $(i,j,k=1,2)$ -фокальные точки квадрики Q ,не принадлежащие одной прямолинейной образующей квадрики Q ,а A_0A_i, A_3A_i - ее прямолинейные образующие.Для конгруэнции K_2^0 фокальные поверхности (A_i) вырождаются в точки.Пфаффова система уравнений конгруэнции K_2^0 запишется в виде:

$$\omega_i^0=0,\ \omega_i^j=0,\ \omega_i^3=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k;\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \begin{matrix}\omega_3^i=c_k^i\omega^k,\\ \Omega=h_k\omega^k,\end{matrix} \qquad (1)$$

где ω_α^β -компоненты деривационных формул репера R ,

$$\omega_0^i \overset{def}{=\!=} \omega^i,\ \ \Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3, \qquad (2)$$

$i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.Квадрика $Q\in K_2^0$ и ассоциированные квадрики Q_i [1] определяются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3=0, \qquad (3)$$

$$\mathcal{F}_i\equiv a_i(x^0)^2+b_i(x^3)^2-x^0x^j+h_ix^1x^2-c_i^ix^jx^3-c_i^jx^ix^3=0. \qquad (4)$$

Конгруэнции K_2^0 существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.Из анализа системы уравнений (1),(3),(4) следует,что конгруэнции K_2^0 обладают следующими свойствами: 1/фокальные точки A_i являются дву/кратными фокальными точками квадрики $Q\in K_2^0$.

2/ прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) и (A_1A_2) образуют двусторонне расслояемую пару.

Для конгруэнции K_0^2 фокальные поверхности (A_i) вырождаются в линии.Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции K_0^2 имеет вид:

$$\left.\begin{matrix}\omega_i^j=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k,\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k,\ \Omega=h_k\omega^k,\\ \omega_i^0-\omega_3^j=m_{ik}\omega^k,\ \omega_i^0=\alpha_i\omega_i^3,\ c_{ii}(\alpha_i-m_{ij})+(c_{ij}+1)m_{ii}=0.\end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

Квадрика $Q\in K_0^2$ и ассоциированные квадрики Q_i определяются соответственно уравнением (3) и уравнениями:

$$\mathcal{F}_i\equiv a_i(x^0)^2+b_i(x^3)^2+c_{ki}x^kx^0+h_ix^1x^2+m_{ki}x^kx^3=0. \qquad (6)$$

Пусть $\alpha_i=1$.Тогда касательные к линиям (A_i) пересекаются в одной точке $E_{03}=A_0+A_3$. Для конгруэнции K_0^2 точка A_i является одним из фокусов луча (A_0A_i) (A_3A_i) прямолинейной конгруэнции (A_0A_i) $((A_3A_i))$.

Конгруэнция K_1^1 -конгруэнция K квадрик Q ,для которой фокальная поверхность (A_1) вырождается в точку, (A_2) -в линию,определяется следующей системой пфаффовых и конечных уравнений: $\omega_2^0=\alpha\omega_2^3$,

$$\begin{matrix}\omega_i^j=0,\ \omega_1^0=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_0^3=a_k\omega^k,\ \omega_3^0=b_k\omega^k,\ \omega_2^3-\omega^1=c_{2k}\omega^k,\\ \Omega=h_k\omega^k,\ \omega_3^2=m_{1k}\omega^k,\ \omega_2^0-\omega_3^1=m_{2k}\omega^k,\ c_{22}(\alpha-m_{21})+(c_{21}+1)m_{22}=0.\end{matrix} \qquad (7)$$

Уравнения ассоциированных квадрик $Q_i\in K_1^1$ имеют вид:

$$\begin{matrix}\mathcal{F}_1\equiv a_1(x^0)^2+b_1(x^3)^2+c_{21}x^0x^2+h_1x^1x^2-m_{11}x^1x^3+m_{21}x^2x^3=0,\\ \mathcal{F}_2\equiv a_2(x^0)^2+b_2(x^3)^2-x^0x^1+c_{22}x^0x^2+h_2x^1x^2-m_{12}x^1x^3+m_{22}x^2x^3=0.\end{matrix} \qquad (8)$$

Точка A_2 является одним из фокусов луча A_0A_2 (A_3A_2) прямолинейной конгруэнции (A_0A_2) $((A_3A_2))$,ассоциированной с конгруэнцией K_1^1 .

Теорема 1. Если A_0 является фокальной точкой квадрики $Q\in K_p^q$ $(p+q=2)$,то конгруэнции K_p^q обладают следующими геометрическими свойствами: I/точка A_0 является дву/кратной фокальной точкой квадрики $Q\in K_p^q$.

2/Для конгруэнции K_2^0 ; а/ фокальные точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; б/прямолинейные конгруэнции (A_0A_i) и (A_jA_3) двусторонне расслояемы.

3/Для конгруэнции K_0^2 ,являющейся конгруэнцией квадрик Ли своей фокальной поверхности (A_0): а/квадрика Q_i распадается на пару плоскостей с осью A_0A_j ,являющейся асимптотической касательной поверхности (A_0) ;б/точка A_i является двухкратной фокальной точкой квадрики $Q_i \in K_0^2$; в/фокальные линии (A_i) являются прямыми , проходящими через точку A_0+A_3 ;г/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

4/Для конгруэнции K_1^1 :1/точка A_1 является двухкратной фокальной точкой квадрики $Q \in K_1^1$; 2/фокальная поверхность (A_0) -торс;3/если A_3 -фокальная точка квадрики $Q \in K_1^1$,то (A_2) -сдвоенная фокальная линия.

Т е о р е м а 2.Если ассоциированная квадрика Q_i является конусом с вершиной в точке A_i ,то конгруэнции K_p^q характеризуются следующими свойствами: 1/торсы прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) соответотвуют координатной сети $\omega^1\omega^2=0$;2/для конгруэнции K_2^0 точки A_i являются трехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_2^0$; 3/для конгруэнции K_0^2: а/точки A_i являются четырехкратными фокальными точками квадрики $Q \in K_0^2$;б/конгруэнции (A_0A_i) и (A_3A_i) -параболические со сдвоенным фокусом A_i; в/фокальные линии (A_1) и (A_2) -плоские; 4/для конгруэнции K_1^1 : а/фокальная линия (A_2) -сдвоенная, плоская; б/конгруэнции (A_0A_2) и (A_3A_2)-параболические со сдвоенным фокусом A_2.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.8.Калининград,1977,с.32-38.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Г.Л.С в е ш н и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции G кривых второго порядка C [1],причем каждая из двух невырождающихся фокальных поверхностей является сдвоенной.

Отнесем конгруэнцию G к реперу $R=\{A_\alpha\}$, $\alpha,\beta,\ldots=\overline{1,4}$. Вершины A_1 и A_2 репера R совмещаются с фокальными точками коники C, описывающими сдвоенные невырождающиеся поверхности,вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно коники.Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i), $i,j,k=1,2$ в точках A_i , B_i -точка пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j^4=0$ на поверхности (A_i).Вершину A_4 выбираем на линии ℓ так, чтобы она гармонически делила вместе с точкой A_3 точки B_i .

Уравнения коники C относительно данного репера при соответствующей нормировке вершин репера записываются в виде:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0 .$$

Конгруэнция G определяется системой уравнений Пфаффа: $\omega_i^j=0$, $\omega_1^3=\Gamma_1^{3k}\omega_k$, $\omega_2^3=\Gamma_2^{31}\omega_1-\Gamma_1^{31}\omega_2$,

$$\omega_3^1=\Gamma_2^{31}\omega_1+\Gamma_3^{12}\omega_2, \quad \omega_3^2=\Gamma_3^{21}\omega_1+\Gamma_1^{32}\omega_2,$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k, \ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k, \ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=a^k\omega_k, \qquad (1)$$

$$\omega_4^1=\Gamma_2^{31}(\Gamma_3^{12}+\Gamma_1^{31})\omega_1+\Gamma_4^{12}\omega_2, \ \omega_4^2=\Gamma_4^{21}\omega_1+\Gamma_1^{32}(\Gamma_3^{21}-\Gamma_1^{31})\omega_2$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (I). Здесь формы $\omega_i^4 = \omega_i$ приняты в качестве базисных, причем $i \neq j$, и суммирование по индексам i, j не производится.

Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнция G существует с произволом четырех функций двух аргументов.

Назовем конгруэнцией G_o такую невырожденную конгруэнцию кривых второго порядка со сдвоенными фокальными поверхностями, у которой асимптотические линии фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) гармонически делят координатную сеть, т.е. имеют вид $(\omega_1)^2 - (\omega_2^2)^2 = 0$.

Конгруэнции G_o выделяются из конгруэнций G конечными соотношениями:

$$\Gamma_4^{ii} + \Gamma_j^{3i}\left(\Gamma_3^{ij} + (-1)^i \Gamma_1^{31}\right) = 0,$$
$$\Gamma_4^{ij} + (-1)^i \Gamma_1^{31}\Gamma_3^{ij} + (\Gamma_j^{3i})^2 = 0. \tag{2}$$

Учитывая равенства (2) в системе (1) и осуществляя нормировки вершин репера, полагая

$$\Gamma_1^{31} = 1, \quad \Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{31} = 0, \tag{3}$$

получаем систему уравнений Пфаффа для конгруэнции G_o в виде:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (-1)^j \omega_i + \omega_3^j; \quad \omega_3^i = (-1)^i \Gamma_1^{32}\omega_1,$$
$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_4^i = -\Gamma_1^{32}\omega_i - (\Gamma_1^{32})^2\omega_j,$$
$$\omega_4^3 = \left(1 - (\Gamma_1^{32})^2\right)\omega_3^4 + b^2\omega_3^1 - b^1\omega_3^2,$$
$$\omega_1^1 = \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = b^\kappa\omega_\kappa, \tag{4}$$
$$\omega_3^3 - \omega_4^4 = c^\kappa\omega_\kappa,$$
$$d\Gamma_1^{32} + \Gamma_1^{32}(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + 2\Gamma_1^{32}(-\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{42} + \Gamma_3^{41} - b^1)\omega_1 +$$
$$+ 2\Gamma_1^{32}(\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{42})\omega_2 = 0,$$

где

$$c^i = -a^j\Gamma_1^{32} + (-1)^j 2\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{4j} + (-1)^i\Gamma_3^{4i}\left(1 + (\Gamma_1^{32})^2\right) + (-1)^j\Gamma_4^{3i}. \tag{5}$$

Доказано, что конгруэнции G_o существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Т е о р е м а. Конгруэнции G_o обладают следующими геометрическими свойствами: 1/фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 2/торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) соответствуют; 3/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) соответствуют фокальной сети; 4/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_4) соответствуют; 5/асимптотические касательные к линии $\omega_1 - \omega_2 = 0$ $(\omega_1 + \omega_2 = 0)$ на фокальных поверхностях (A_1) и (A_2) гармонически делят точки A_3 и A_4; 6/асимптотические касательные фокальной поверхности (A_1) (соответственно (A_2)) гармонически делят точки E_{34} и A_3 (соответственно E_{34}^* и A_3), где E_{34} и E_{34}^* -точки пересечения касательных к линиям $\omega_j = 0$ на поверхности (A_i); 7/существует одностороннее расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Фокальные точки $\lambda A_3 + \mu A_4$ луча A_3A_4 определяются уравнением

$$\lambda^2 - \left(1 - (\Gamma_1^{32})^2\right)\mu^2 = 0,$$

откуда следует, что фокусы луча A_3A_4 гармонически разделяют вершины A_3 и A_4.

2/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) определяются одним и тем же уравнением

$$\Gamma_1^{32}(\omega_1)^2 + 2\omega_1\omega_2 + \Gamma_1^{32}(\omega_2)^2 = 0,$$

значит, они соответствуют.

3/Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) имеют вид $\omega_1\omega_2 = 0$,

т.е. соответствуют фокальной сети.

4/Торсы конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4) определяются уравнением

$$(\omega_1+\Gamma_1^{32}\omega_2)(\Gamma_1^{32}\omega_1+\omega_2)=0,$$

значит, они соответствуют.

5/

$$dA_i\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_i^i A_i+(-1)^j\omega_1\big((1+\Gamma_1^{32})A_3+(-1)^j A_4\big),$$

$$dA_i\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_i^i A_i+\omega_1\big((1-\Gamma_1^{32})A_3+(-1)^j A_4\big),$$

что и доказывает утверждение 5.

6/

$$dA_1\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_1^1 A_1+\omega_1\left(E_{34}+\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_1\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_1^1 A_1+\omega_1\left(E_{34}-\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_2\Big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_2^2 A_2-\omega_1\left(E_{34}^*+\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

$$dA_2\Big|_{\omega_1+\omega_2=0}=\omega_2^2 A_2+\omega_1\left(E_{34}^*-\Gamma_1^{32}A_3\right),$$

где $\quad E_{34}=A_3+A_4;\quad E_{34}^*=A_3-A_4.$

Из этих равенств следует справедливость утверждения 6.

7/Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)

$$\omega_i^3\wedge\omega_3^j+\omega_i\wedge\omega_4^j=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2\wedge\omega_4^2=0$$

тождественно удовлетворяются в силу системы уравнений (4). Теорема доказана.

Если положить $\Gamma_1^{32}=1$, точка $E_{12}=A_1+A_2$ будет сдвоенным фокусом луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). Назовем конгруэнцией G_1 такую конгруэнцию G_0, для которой касательная плоскость поверхности (E_{12}^*) инцидентна прямой A_3A_4, причем $(A_1A_2;E_{12}E_{12}^*)=-1$.

Учитывая в системе (4) условия определения конгруэнции G_1, получаем для конгруэнции G_1 систему уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=(-1)^j(\omega_1+\omega_2);\quad \omega_3^i=(-1)^i\omega_i,$$

$$\omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,\quad \omega_4^1=\omega_4^2=-\omega_1-\omega_2,\quad \omega_1^1-\omega_2^2=\omega_4^3,$$

$$\omega_4^3=2(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})(\omega_1-\omega_2);\quad \omega_1^1+\omega_2^2=0,\ 2\omega_3^3=-a^1(\omega_1+\omega_2)$$

и конечное соотношение

$$a^1(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})=0.$$

Существуют три класса конгруэнций G_1: конгруэнции G_1^1, для которых $a^1=0$, $\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}=0$, определяемые с произволом одной функции одного аргумента; конгруэнции G_1^2, для которых $a^1=0$, $\Gamma_3^{41}+\Gamma_3^{42}=0$, определяемые тоже с произволом одной функции одного аргумента; конгруэнции G_1^3, для которых $\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42}=0$, их произвол существования – две функции одного аргумента.

Для конгруэнции G_1^1 получены соприкасающиеся квадрики Ли Q_i сдвоенных фокальных поверхностей (A_i). Их уравнения имеют вид:

$$2x^1x^2-2(x^j)^2-(x^3)^2+(-1)^j 2x^3x^4=0.$$

Коника C_i, являющаяся линией пересечения квадрики Ли Q_i плоскостью $x^4=0$, имеет точку A_i двукратным, а точку E_{12} четырехкратным фокусом.

Для поверхности (E_{12}^*) квадрика Ли Q_3 имеет уравнение

$$(x^1)^2-(x^2)^2+2x^3x^4=0.$$

При пересечении квадрики Ли Q_3 с плоскостью $x^i=0$ получается коника, для которой точка A_4 является шестикратным фокусом.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.– Тр. Томского ун-та, I68, Геометр. сб., вып.3, I963, с.43-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Е.В.Силаев

О СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе изучаются свойства средней кривизны поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n, а также свойства некоторого тетраэдра, построенного в каждой точке такой поверхности с помощью вектора средней кривизны. В применяемых построениях учитывается объемлющее пространство E_n.

п.1. Пусть поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r евклидова пространства E_n. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j=1,\dots,p;\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве $T_x(V_p)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x. Пусть $\vec{x}=\overrightarrow{Ox}$.

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим: $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Пусть $\vec{M}$ -вектор средней кривизны поверхности V_p по отношению к пространству E_n, $\vec{M}_S$ -вектор средней кривизны поверхности V_p по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$.

В работе [5] доказано, что

$$\vec{M}=\vec{M}_S-\frac{1}{r^2}\vec{x}. \tag{1}$$

Приведем другое доказательство этой формулы. Для этого воспользуемся теоремой [2]:

Пусть в $V_{n_1}\subset V_n$ задано V_{n_2}. Вектор средней кривизны V_{n_2} по отношению к V_n равен сумме векторов средней кривизны V_{n_2} по отношению к V_{n_1} и вектора средней кривизны по отношению к V_n некоторого $V_{n_2}^*$, которое в рассматриваемой точке касается и в этой точке является геодезическим по отношению к V_{n_1}.

В рассматриваемом случае $V_{n_2}=V_p$, $V_{n_1}=S_{n-1}(O,r)$, $V_n=E_n$. В качестве $V_{n_2}^*$ в точке x рассмотрим многообразие, образованное в окрестности точки x точками всех геодезических линий гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$ (т.е. больших окружностей), проходящих через эту точку [2].

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера R ортогональны. Через точку x в направлении вектора $\vec{e}_i$ проведем такую большую окружность. Вектор вынужденной кривизны этой линии $\vec{K}_{N(i)}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}$. Тогда [2] векторное среднее векторов вынужденной кривизны по отношению к p взаимно ортогональным направлениям не зависит от специального выбора этих направлений и совпадает с вектором средней кривизны $V_{n_2}^*$: $\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\vec{K}_{N(i)}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}$.

Итак, $\vec{M}=\vec{M}_S-\frac{1}{r^2}\vec{x}$. Можно доказать, что для поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, справедливо равенство:

$$\vec{M}\cdot\vec{x}=-1 \tag{2}$$

Учитывая формулу (1), получим: $\vec{M}_S\cdot\vec{x}=0$.

Пусть $|\vec{M}|$, $|\vec{M}_S|$ -средние кривизны поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, по отношению к E_n и $S_{n-1}(O,r)$ соответственно.

Теорема. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, то: 1/ $|\vec{M}_S|<|\vec{M}|$, $|\vec{M}_S|=const\Leftrightarrow|\vec{M}|=const$; 2/ $|\vec{M}|=const$ тогда и только тогда, когда величина угла между векторами $\vec{M}$ и $\vec{x}$ постоянна; 3/ $|\vec{M}|=const$ тогда и только тогда, когда величина угла между векторами $\vec{M}$ и $\vec{M}_S$ постоянна.

Справедливость этой теоремы следует из равенств (1) и (2).

Пусть $\vec{M}_s \neq 0$, т.е. поверхность V_p не минимальна относительно гиперсферы $S_{n-1}(O,\tau)$, тогда $|\vec{M}| \neq \frac{1}{\tau}$. Рассмотрим центр средней кривизны Z поверхности V_p по отношению к евклидовому пространству E_n: $\overrightarrow{OZ} = \vec{x} + \vec{M}/\vec{M}^2$ и центр средней кривизны Z_s поверхности V_p по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau)$: $\overrightarrow{OZ_s} = \vec{x} + \vec{M}_s/\vec{M}_s^2$.
Можно доказать, что $\overrightarrow{OZ_s} = \frac{\tau^2\vec{M}^2}{\tau^2\vec{M}^2-1}\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{OZ_s}\cdot\overrightarrow{OZ} = \tau^2$, т.е. справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$, то центры средних кривизн поверхности V_p по отношению к E_n и $S_{n-1}(O,\tau)$ инверсны относительно гиперсферы $S_{n-1}(O,\tau)$.

С л е д с т в и е. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$ то в силу того, что $\overrightarrow{OZ_s}^2 = \frac{\tau^4\vec{M}^2}{\tau^2\vec{M}^2-1} > \tau^2$, центры средних кривизн Z_s и Z лежат вне и внутри гиперсферы $S_{n-1}(O,\tau)$ соответственно.

Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, то $\vec{M}_s = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Так как точки Z и Z_s инвариантно связаны с поверхностью V_p, то расстояние между ними является инвариантом, геометрический смысл которого раскрывает следующая

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$, то расстояние между точками Z и Z_s равно $1/|\vec{M}|$.

п.2. Пусть векторы $\vec{e}_a$ $(a = p+1, \dots, p+q)$ образуют базис плоскости главной нормали $N_q(x)$ в точке x [1] поверхности, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, O' – ортогональная проекция центра O гиперсферы на плоскость $N_q(x)$. Следовательно, в точке x имеются три вектора: $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O'x}, \vec{M}$, которые в общем случае линейно независимы.

Таким образом, с каждой точкой x рассматриваемой поверхности связан тетраэдр (который назовем тетраэдром T), построенный на указанных векторах, отложенных

от точки x. Заметим, что одной из граней этого тетраэдра является треугольник OxM, площадь которого вычисляется с учетом формулы (2) следующим образом:
$$S^2_{\Delta OxM} = \frac{1}{4}\vec{M}^2\tau^2\sin^2(\widehat{\vec{M},\vec{x}}) = \frac{1}{4}\vec{M}^2\tau^2\left(1-\cos^2(\vec{M}^2,\tau^2)\right) = \frac{1}{4}(\vec{M}^2\tau^2-1).$$

Итак, рассматриваемая поверхность V_p имеет постоянную среднюю кривизну относительно E_n тогда и только тогда, когда $S_{\Delta OxM} = \mathrm{Const}$. Учитывая, что для поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,\tau) \subset E_n$, имеет место формула $\vec{M}\cdot\overrightarrow{O'x} = -1$, можно найти
$$S^2_{\Delta O'xM} = \frac{1}{4}(\vec{M}^2|\overrightarrow{O'x}|^2-1).$$
Так как $|\overrightarrow{O'x}| = \tau\cos\alpha$, $\vec{M}^2|\overrightarrow{O'x}|^2 = \frac{1}{\cos^2\beta}\cdot(\vec{M}\cdot\overrightarrow{O'x})^2 = \frac{1}{\cos^2\beta}$, где α и β –величины углов OxO' и $O'xM$ соответственно, то объем тетраэдра T вычисляется следующим образом:
$$V_T^2 = \left(\tfrac{1}{3}S_{\Delta O'xM}\cdot|\overrightarrow{OO'}|\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}(\vec{M}^2|\overrightarrow{O'x}|^2-1)(\tau^2-|\overrightarrow{O'x}|^2) = \frac{\tau^2}{36}\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha.$$

Итак, рассматриваемая поверхность V_p обладает тем свойством, что $V_T = \mathrm{Const}$, тогда и только тогда, когда $\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha = \mathrm{Const}$.

З а м е ч а н и е. Тетраэдр T ортоцентрический, т.е. имеет три пары взаимно перпендикулярных противоположных ребер, тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{O'x} \perp \overrightarrow{OM}$, т.е. тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{O'x}| = 1$.

Запишем параметрические уравнения индикатрисы кривизны [3] поверхности V_p в точке x: $Z^a = b^a_{ij}a^i a^j$, $\gamma_{ij}a^i a^j = 1$, где Z^a –координаты текущей точки индикатрисы кривизны относительно репера $\{x, \vec{e}_a\}$, $\vec{a} = a^i\vec{e}_i \in T_x$, $|\vec{a}| = 1$, $\gamma_{ij} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$. Используя формулы $\sum_a x^a b^a_{ij} + \gamma_{ij} = 0$, полученные в работе [4], имеем: $\sum_a x^a b^a_{ij}a^i a^j + \gamma_{ij}a^i a^j = 0$, т.е. $\sum_a x^a z^a + 1 = 0$ $(\vec{x} = x^\alpha\vec{e}_\alpha)$
Следовательно, индикатриса кривизны поверхности V_p в точке лежит в плоскости $\Pi_{q-1}(x)$: $\sum_a x^a z^a + 1 = 0$.
Рассмотрим точку $\vec{S} = \vec{x} + \vec{M} = \vec{x} + \frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\vec{e}_a$, $\gamma_{ij}\gamma^{jk} = \delta^k_i$.
Эта точка принадлежит плоскости Π_{q-1}, так как
$$\sum_a x^a\left(\frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\right) + 1 = \vec{x}\cdot\vec{M} + 1 = 0.$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, то индикатриса кривизны такой поверхности лежит в плоскости $\Pi_{q-1}(x)$, проходящей через точку $\vec{S} = \vec{x} + \vec{M}$, нормальным вектором которой является вектор $\overrightarrow{O'x} = x^a \vec{e}_a$.

Заметим, что точка O' принадлежит плоскости $\Pi_{q-1}(x)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_a x^a(-x^a) + 1 = 0$, т.е. тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{O'x}| = 1$. Приведенное выше замечание позволяет сделать вывод, что справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, то тетраэдр T является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда для любой точки x такой поверхности плоскость $\Pi_{q-1}(x)$, в которой лежит индикатриса кривизны, проходит через точку O'

Список литературы

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., 1966, №4, с.475-492.

2. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т.П. М., 1948, с.99.

3. Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р-поверхности евклидова пространства. - Сибирский матем. журнал, 1966, №3, с.499-511.

4. Силаев Е.В. О р-сопряженных системах на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с.84-87.

5. Jano Kentaro. Submanifolds with parallel mean curvature vector of a euclidean space or a sphere. Kōdai mathematical seminar reports., 1971, vol. 23, N 1, p. 144-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 14 1983

УДК 514.75

Е.П. С о п и н а

О КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРКВАДРИК В A_n С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ $(n-2)$-МЕРНЫХ КВАДРИК

В n-мерном пространстве A_n продолжается [1] исследование $(n-1)$-мерных многообразий центральных гиперквадрик. В статье исследуются конгруэнции V°_{n-1} центральных гиперквадрик Q, содержащих в качестве фокального многообразия $(n-2)$-мерную квадрику $\mathcal{K}$. Показано существование двух классов таких конгруэнций со специальными свойствами центров.

Отнесем конгруэнцию V°_{n-1} к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,n})$, где A -центр гиперквадрики Q, векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,\kappa = \overline{1,n-1})$ лежат в гиперплоскости $(n-2)$-мерной фокальной квадрики $\mathcal{K}$, вектор $\bar{e}_n$ направлен по направлению, сопряженному векторам $\bar{e}_i$ относительно гиперквадрики Q.

Уравнения гиперквадрики Q и фокальной квадрики $\mathcal{K}$ относительно данного репера запишутся соответственно в виде:

$$Q \equiv a_{ij} x^i x^j + a_{nn} (x^n)^2 - 1 = 0, \qquad (1)$$

$$\mathcal{K} \equiv a_{ij} x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0. \qquad (2)$$

Из того, что каждая точка квадрики $\mathcal{K}$ является фокальной точкой гиперквадрики Q, получаем:

$$dQ\big|_{x^n=0} = \mu \mathcal{K}. \qquad (3)$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции V°_{n-1} приводится к виду:

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \qquad (4)$$

$$\omega^n = c^i \omega_i, \quad \omega^i_n = p^{i\kappa} \omega_\kappa, \quad d a_{nn} - 2 a_{nn} \omega^n_n = b^i \omega_i,$$

где формы $\omega_i \overset{def}{=} \omega^n_i$ приняты в качестве базисных.

Замыкая уравнения (4_1), получаем

$$\omega_k \wedge \omega^k_n = 0, \qquad (5_1)$$

$$\omega^n \wedge \omega^k_n = 0, \qquad (5_2)$$

Из (5) следует, что

$$p^{ik} = p^{ki} \qquad (6)$$

Если $\omega^n = 0$, то уравнения (5_2) тождественно исчезают. При $\omega^n \neq 0$ уравнения (5_2) принимают вид:

$$\omega^k_n = h^k \omega^n \qquad (7)$$

Таким образом существуют два класса конгруэнций V^o_{n-1} :

1/конгруэнции V^{o1}_{n-1}, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \quad \omega^n = 0, \qquad (8)$$
$$\omega^i_n = p^{ik}\omega_k, \quad da_{nn} - 2a_{nn}\omega^n_n = b^i \omega_i ;$$

2/конгруэнции V^{o2}_{n-1}, определяемые системой пфаффовых уравнений

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \quad \omega^n = e^i \omega_i, \qquad (9)$$
$$\omega^i_n = h^i \omega^n, \quad da_{nn} - 2a_{nn} = b^i \omega_i .$$

Из систем (8) и (9) следует, что центры всех гиперквадрик $Q \in V^{o1}_{n-1}$ неподвижны, а центры гиперквадрик $Q \in V^{o2}_{n-1}$ перемещаются по линии, касательная к которой сопряжена гиперплоскости фокальной квадрики $\mathcal{K}$.

Список литературы

1. Сопина Е.П. Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1976, с.105-111.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.Н.Худенко

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ КВАДРИК

В n-мерном проективном пространстве изучается связность в расслоении, ассоциированном с многообразием p-мерных квадрик, геометрически охарактеризованы объект связности, а также два его подобъекта.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное h-параметрическое многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p $(1 \leq p \leq n-2)$ [1]. Плоскость размерности (p+1) квадрики Q_p в дальнейшем будем обозначать L_{p+1}. Отнесем пространство P_n к реперу $R = \{A_J\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega^K_J A_K , \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω^K_J удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L . \qquad (2)$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$J, \mathcal{J}, K, \ldots = 1,2,\ldots, n+1; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1,2,\ldots, p+2;$$
$$a, b, c, \ldots = p+3, p+4, \ldots, n+1; \quad i, j, k, \ldots = 1,2,\ldots, h.$$

Поместим вершины репера A_α в плоскости L_{p+1}, а вершины A_a вне этой плоскости, тогда квадрика Q_p определяется системой уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \qquad (3)$$

причем $\det(a_{\alpha\beta}) = 1$. Зададим многообразие $(h,h,n)^2_p$ параметрически с помощью системы уравнений

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i}\tau^i, \qquad (4)$$
$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i, \qquad (5)$$

где
$$\theta_{\alpha\beta}=da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega_{\beta}^{\gamma}-a_{\beta\gamma}\omega_{\alpha}^{\gamma}+\frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\omega_{\gamma}^{\gamma},$$

τ^i -инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований h -мерного пространства параметров [2]. Уравнения (4) определяют h -параметрическое многообразие B_h плоскостей L_{p+1}.

Замыкание системы (4) и (5) можно записать в виде

$$\left(\nabla\Lambda_{\alpha\beta j}+\frac{2}{p+2}\Lambda_{\alpha\beta j}\omega_{\gamma}^{\gamma}-2a_{\gamma(\alpha}\Lambda_{\beta)j}^{a}\omega_{a}^{\gamma}+\frac{2}{p+2}a_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma j}^{a}\omega_{a}^{\gamma}\right)\wedge\tau^{i}=0, \qquad \nabla\Lambda_{\alpha j}^{a}\wedge\tau^{i}=0, \tag{6}$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом: $\nabla\Lambda_{\alpha j}^{a}=d\Lambda_{\alpha j}^{a}-\Lambda_{\beta j}^{a}\omega_{\alpha}^{\beta}+\Lambda_{\alpha j}^{b}\omega_{b}^{a}-\Lambda_{\alpha i}^{a}\tau_{j}^{i}$.

С многообразием $(h,h,n)_p^2$ ассоциируется главное расслоение $G(B_h)$ с соответствующими структурными уравнениями [2] и

$$\mathcal{D}\omega_{a}^{c}=\omega_{a}^{b}\wedge\omega_{b}^{c}+\tau^{i}\wedge\omega_{ia}^{c},$$
$$\mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}+\tau^{i}\wedge\omega_{\alpha i}^{\beta}, \tag{7}$$
$$\mathcal{D}\omega_{a}^{\alpha}=\omega_{a}^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha}+\omega_{a}^{b}\wedge\omega_{b}^{\alpha},$$

где $\omega_{ia}^{c}=-\Lambda_{\alpha i}^{c}\omega_{a}^{\alpha}$, $\omega_{\alpha i}^{\beta}=\Lambda_{\alpha i}^{a}\omega_{a}^{\beta}$.

Базой расслоения $G(B_h)$ является многообразие B_h (или пространство параметров), а типовым слоем- подгруппа стационарности плоскости L_{p+1}.

В главном расслоении $G(B_h)$ зададим связность по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{ai}^{\alpha},\Gamma_{ai}^{b},\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\}$ на базе B_h:

$$\nabla\Gamma_{\alpha i}^{\beta}+\omega_{\alpha i}^{\beta}=\Gamma_{\alpha ij}^{\beta}\tau^{j}, \quad \nabla\Gamma_{ai}^{c}+\omega_{ai}^{c}=\Gamma_{aij}^{c}\tau^{j}, \qquad \nabla\Gamma_{ai}^{\alpha}+\Gamma_{ai}^{b}\omega_{b}^{\alpha}-\Gamma_{\beta i}^{\alpha}\omega_{a}^{\beta}=\Gamma_{aij}^{\alpha}\tau^{j}. \tag{8}$$

Зададим оснащение Бортолотти [3] многообразия B_h с помощью системы точек $B_a=A_a+\lambda_a^{\alpha}A_{\alpha}$, причем $\nabla\lambda_a^{\alpha}+\omega_a^{\alpha}=\lambda_{ai}^{\alpha}\tau^{i}$. Фундаментальный объект Λ и оснащающий квазитензор $\lambda=(\lambda_a^{\alpha})$ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\Gamma_{\alpha i}^{\beta}=\Lambda_{\alpha i}^{a}\lambda_{a}^{\beta}, \quad \Gamma_{ai}^{c}=-\Lambda_{\alpha i}^{c}\lambda_{a}^{\alpha}, \quad \Gamma_{ai}^{\alpha}=-\Lambda_{\beta i}^{b}\lambda_{b}^{\alpha}\lambda_{a}^{\beta}. \tag{9}$$

Из (9) следует

Т е о р е м а 1. Оснащение Бортолотти позволяет ввести связность в главном расслоении [3].

Используя (2),(4) и (9), получим

$$dA_{\alpha}=\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}A_{\beta}+\omega_{\alpha}^{a}B_{a}, \quad dB_{a}=\tilde{\omega}_{a}^{b}B_{b}+(\ldots)_{a}^{\alpha}A_{\alpha}, \tag{10}$$

где $\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\beta}-\Gamma_{\alpha i}^{\beta}\tau^{i}$, $\tilde{\omega}_{a}^{b}=\omega_{a}^{b}-\Gamma_{ai}^{b}\tau^{i}$.

Из (10) следуют два утверждения.

Т е о р е м а 2. Подобъект $\Gamma_1=\{\Gamma_{\beta i}^{\alpha}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на плоскость L_{p+1} смежной с ней плоскости $L_{p+1}+dL_{p+1}$ из оснащающей плоскости P_{n-p-2}.

Т е о р е м а 3. Подобъект $\Gamma_2=\{\Gamma_{ai}^{b}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на плоскость P_{n-p-2} смежной с ней плоскости $P_{n-p-2}+dP_{n-p-2}$ из центра L_{p+1}.

Запишем dB_a в виде

$$dB_{a}=(\ldots)_{a}^{b}B_{b}+\Delta\lambda_{a}^{\alpha}A_{\alpha}, \tag{11}$$

где $\Delta\lambda_a^{\alpha}$ -ковариантный дифференциал квазитензора λ_a^{α} [4]

Из (11) следует

Т е о р е м а 4. Оснащающая плоскость остается на месте тогда и только тогда, когда ковариантный дифференциал $\Delta\lambda_a^{\alpha}=0$.

Следовательно, связность Γ не допускает параллельного перенесения оснащающей плоскости.

Список литературы

1.Худенко В.Н. К геометрии многообразий многомерных квадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.11,Калининград,1980,с.98-101.

2.Остиану Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей.- Тр.геометр.семинара, т.2,с.247-262.

3.Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.9.Калининград, 1978,с.124-134.

4.Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12,Калининград,1981,с.126-130.

5. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.П.Цапенко

СЕМЕЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ,АССОЦИИРОВАННЫХ С ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n-мерном проективном пространстве рассмотрим $(n-1)$-параметрическое невырожденное многообразие пар фигур (P,Q) -гиперконгруэнцию V_{n-1} .Здесь Q -гиперквадрика,а P -неинцидентная ей точка.

Отнесем многообразие V_{n-1} к реперу $R=\{A,A_i,A_n\}$ $(A=A_0;\ i,j,k...=\overline{1,n-1})$,где вершина A помещена в точку P ,а вершины A_i - в касательную гиперплоскость T_{n-1} к гиперповерхности S_{n-1}, описанной точкой P .Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа многообразия V_{n-1} запишутся в виде

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2a_{0\alpha}x^0x^\alpha+(x^0)^2=0,$$
$$\omega_0^n=0,\quad \omega_i^n=\Lambda_{ij}\,\omega_0^j\quad (\Lambda_{ij}=\Lambda_{ji}),$$
$$\nabla a_{\alpha\beta}-a_{0\alpha}\omega_\beta^0-a_{0\beta}\omega_\alpha^0=a_{\alpha\beta i}\,\omega_0^i,$$
$$\nabla a_{0\alpha}-\omega_\alpha^0=a_{0\alpha i}\,\omega_0^i\quad (\alpha,\beta,...=1,2,...,n),$$

где оператор ∇ определяется по правилу $\nabla E_{a_1...a_\tau}=$ $=dE_{a_1...a_\tau}-E_{\beta a_2...a_\tau}\omega_{a_1}^\beta-...-E_{a_1...a_{\tau-1}\beta}\omega_{a_\tau}^\beta+\tau E_{a_1...a_\tau}\omega_0^0$.

Рассматривая структурные уравнения,которым удовлетворяют базисные формы ω_0^i и вторичные формы $\omega_0^0,\omega_j^i,\omega_i^0,$ $\omega_n^n,\omega_n^i,\omega_n^0$, получаем,что с гиперконгруэнцией V_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$,базой которого является гиперповерхность S_{n-1} ,а типовым слоем - подгруппа стационарности G_τ $(\tau=n^2+1)$ центрированной гиперплоскости T_{n-1} .В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$фундаментально-групповую связность зададим по Г.Ф.Лаптеву [1],вводя формы связности:

$\tilde{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \Gamma_k \omega^k_0$, $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k_0$, $\tilde{\omega}^0_i = \omega^0_i - \Gamma_{ik}\omega^k_0$, $\tilde{\omega}^n_n = \omega^n_n - \Pi_k \omega^k_0$, $\tilde{\omega}^i_n = \omega^i_n - \Gamma^i_k \omega^k_0$, $\tilde{\omega}^0_n = \omega^0_n - L_k \omega^k_0$, где $\Gamma = \{\Gamma_k, \Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ik}, \Pi_k, \Gamma^i_k, L_k\}$-объект связности.

Л е м м а 1. Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно к каждой касательной гиперплоскости T_{n-1} присоединить: 1/точку B, не принадлежащую гиперплоскости T_{n-1}; 2/($n-2$)-мерную плоскость P_{n-2}, принадлежащую касательной гиперплоскости T_{n-1} и не проходящую через ее центр A (нормаль второго рода в смысле А.П.Нордена [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точку B зададим следующим образом $B = \lambda A + \lambda^i A_i + A_n$, причем

$$d\lambda + \lambda^i \omega^0_i + \lambda(\omega^0_0 - \omega^n_n) + \omega^0_n = \lambda_j \omega^j_0,$$
$$d\lambda^i + \lambda^j \omega^i_j - \lambda^i \omega^n_n + \omega^i_n = \lambda^i_j \omega^j_0.$$

Нормаль второго рода P_{n-2} определим системой точек $B_i = A_i + \mu_i A$, где

$$\nabla \mu_i + \omega^0_i = \mu_{ij}\omega^j_0. \qquad (1)$$

Указанное в лемме оснащение задается полем квазитензора $\lambda = (\lambda, \lambda^i, \mu_i)$ на базе S_{n-1}, который вместе с фундаментальным тензором Λ_{ij} позволяет охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma_i = \mu_i,\ \Gamma^i_{jk} = \lambda^i \Lambda_{jk} - \delta^i_k \mu_j,\ \Gamma_{ij} = \lambda\Lambda_{ij} - \mu_i\mu_j,$$
$$\Pi_i = -\Lambda_{ij}\lambda^j,\ \Gamma^i_j = \delta^i_j \mu_k \lambda^k - \lambda^i\lambda^k\Lambda_{jk} - \delta^i_j\lambda,$$

$L_i = \mu_i\mu_k\lambda^k - \lambda\mu_i - \Lambda_{ij}\lambda^j\lambda$. Присоединение нормали первого рода P_1 в смысле А.П.Нордена [2] к каждой касательной гиперплоскости T_{n-1} позволяет определить оснащение Картана [3] гиперповерхности S_{n-1} [1].

Т е о р е м а 1. Нормализация А.П.Нордена гиперповерхности S_{n-1} позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

Т е о р е м а 2. Для определения связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно нормали первого рода P_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную совокупность величин $\Lambda_k = (n+1)^{-1}\Lambda_{ijk}V^{ij}$, где V^{ij} - тензор, обратный к тензору Λ_{ij}. Функции Λ_k удовлетворяют системе уравнений $\nabla\Lambda_k - \Lambda_{tk}\omega^t_n + \omega^0_k = \tilde{\Lambda}_{kj}\omega^j_0$. Построим теперь систему величин $\tilde{\mu}_i = \Lambda_i + \Lambda_{ij}\lambda^j$, где

$$\nabla\tilde{\mu}_i + \omega^0_i = \tilde{\mu}_{ij}\omega^j_0. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнения (1) с уравнениями (2), видим, что объект $\tilde{\mu}_i$ задает нормаль второго рода P_{n-2}, которая в свою очередь определена заданием нормали первого рода. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 3. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ может быть определена лишь с помощью нормали второго рода.

Т е о р е м а 4. Связность в расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает внутренним образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 для определения связности в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ достаточно задания нормали второго рода P_{n-2}. Точки $B_i = -a_{0i}A + A_i$ задают ($n-2$)-мерное пересечение касательной гиперплоскости T_{n-1} с гиперплоскостью, полярно-сопряженной точке A относительно гиперквадрики Q, которое и является нормалью второго рода гиперповерхности S_{n-1}.

Подобъекты объекта связности Γ могут быть охарактеризованы следующим образом: 1/подобъект Γ^i_{jk} объекта связности Γ характеризуется проекцией на нормаль II-го рода P_{n-2} смежной с ней нормали $P_{n-2} + dP_{n-2}$ из центра P_1; 2/проекция на точку B смежной с ней точки $B+dB$ из центра T_{n-1} характеризует подобъект Π_i объекта связности Γ; 3/если касательная прямая переносится параллельно по А.П.Нордену в линейной связности, определяемой объектом Γ^i_{jk}, то точка ее пересечения с нормалью 2-го рода P_{n-2} смещается в плоскости, натянутой на эту прямую и точку Картана B; 4/если касательная прямая переносится параллельно в связности $\Gamma_1=\{\Gamma_i,\Gamma_{ij},\Gamma^i_{jk}\}$, то точка пересечения ее с нормалью второго рода P_{n-2} смещается вдоль прямой, определяемой этой точкой и точкой Картана B; 5/ нормаль первого рода P_1 переносится параллельно в связности $\Gamma_2=(\Gamma^i_{jk},\Pi_k,\Gamma^i_k)$ тогда и только тогда, когда точка B смещается в нормали первого рода.

Список литературы

1. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева.-Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., 1976.

3. Cartan E. Les espaces a connexion projective. -Тр.семинара по вект.и тенз.анализу, 1937, вып.4, с.147-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Ю.И.Ш е в ч е н к о

ОБ ОСНАЩЕНИИ КАРТАНА

Найдены условия, при которых подобъект объекта, характеризующего отображение друг на друга близких касательных плоскостей оснащенной по Картану поверхности проективного пространства, является объектом связности с точки зрения расслоенных пространств.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K=0,1,\dots,n)$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_J=\omega^K_J A_K$ $(\omega^J_J=0)$. Инвариантные формы проективной группы ω^K_J удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega^K_J=\omega^{\mathcal{J}}_J\wedge\omega^K_{\mathcal{J}}. \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m общего вида и произведем специализацию подвижного репера $\{A_J\}$, помещая вершину A_0 в текущую точку поверхности X_m, а вершины A_i $(i,j,k,\ell=\overline{1,m})$ -в соответствующую касательную плоскость T_m. Поверхность X_m в таком репере определяется уравнениями

$$\omega^\alpha_0=0 \quad (\alpha,\beta=\overline{m+1,n}), \tag{2}$$

$$\omega^\alpha_i=b^\alpha_{ij}\omega^j \quad (\omega^j=\omega^j_0). \tag{3}$$

Замыкая систему (2), получим $b^\alpha_{ij}=b^\alpha_{ji}$. Продолжая систему (3), найдем

$$\nabla b^\alpha_{ij}+b^\alpha_{ij}\omega^0_0=b^\alpha_{ijk}\omega^k, \tag{4}$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla b^\alpha_{ij}=db^\alpha_{ij}-b^\alpha_{ik}\omega^k_j-b^\alpha_{kj}\omega^k_i+b^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta.$$

В дальнейшем системы уравнений типа (4) будем записывать короче: $\nabla b^{\alpha}_{ij} + b^{\alpha}_{ij}\,\omega^0_0 \equiv 0$,

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. Из структурных уравнений (1) с учетом системы (2),(3) следует, что формы $\omega^{i'}_{j'}$ $(i',j',k',\ell' = 0,1,\dots,m)$ и, в частности, формы ω^i удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge (\omega^i_j - \delta^i_j\,\omega^0_0), \tag{5}$$

$$\mathcal{D}\omega^{i'}_{j'} = \omega^{k'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{k'} + \omega^k \wedge \omega^{i'}_{j'k}, \tag{6}$$

где $\omega^{i'}_{j'k} = b^{\alpha}_{j'k}\,\omega^{i'}_{\alpha}$ $\quad (b^{\alpha}_{0k} = 0)$.

Уравнения (5),(6) по внешнему виду аналогичны структурным уравнениям главного расслоения [1, с. 51], но таковыми не являются, т.к. базисные формы ω^i входят в состав $\omega^{i'}_{j'}$. Тем не менее, применяя к этим уравнениям способ Лаптева [1, с. 83] задания связности в главном расслоении, найдем уравнения некоторого объекта:

$$\nabla \Pi^{i'}_{j'k} + \Pi^{i'}_{j'k}\,\omega^0_0 + \omega^{i'}_{j'k} \equiv 0,$$

где

$$\nabla \Pi^{i'}_{j'k} = d\Pi^{i'}_{j'k} - \Pi^{i'}_{j'\ell}\,\omega^{\ell}_k - \Pi^{i'}_{\ell'k}\,\omega^{\ell'}_{j'} + \Pi^{\ell'}_{j'k}\,\omega^{i'}_{\ell'}.$$

Запишем эти уравнения более подробно:

$$\nabla \Pi^i_{0k} \equiv 0, \quad \nabla \Pi^0_{0k} + \Pi^0_{0k}\,\omega^0_0 + \Pi^{\ell}_{0k}\,\omega^0_{\ell} \equiv 0,$$

$$\nabla \Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\,\omega^0_0 - \Pi^i_{0k}\,\omega^0_j + \omega^i_{jk} \equiv 0,$$

$$\nabla \Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\,\omega^0_0 - \Pi^0_{0k}\,\omega^0_j + \Pi^{\ell}_{jk}\,\omega^0_{\ell} + \omega^0_{jk} \equiv 0.$$

Подобъект $\Pi^{i'}_{0k}$ объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$ образует тензор, поэтому его обращение в нуль имеет инвариантный смысл. Предположим

$$\Pi^i_{0k} = 0, \quad \Pi^0_{0k} = 0, \tag{7}$$

тогда уравнения остальных компонент $\Pi^{i'}_{jk}$ объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$ упростятся:

$$\begin{cases} \nabla \Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\,\omega^0_0 + \omega^i_{jk} \equiv 0, \\ \nabla \Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\,\omega^0_0 + \Pi^{\ell}_{jk}\,\omega^0_{\ell} + \omega^0_{jk} \equiv 0. \end{cases} \tag{8}$$

Произведем оснащение Картана [3] поверхности X_m, т.е. к каждой ее точке A_0 присоединим плоскость K_{n-m-1}, не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_m. Эту

плоскость зададим точками $B_{\alpha} = A_{\alpha} + \lambda^{i'}_{\alpha} A_{i'}$, где функции $\lambda^{i'}_{\alpha}$ удовлетворяют уравнениям $\nabla\lambda^{i'}_{\alpha} + \omega^{i'}_{\alpha} \equiv 0$. Объект $\Pi^{i'}_{jk}$ охватывается фундаментальным тензором b^{α}_{ij} и оснащающим квазитензором $\lambda^{i'}_{\alpha}$ по формулам

$$\Pi^{i'}_{jk} = b^{\alpha}_{jk}\,\lambda^{i'}_{\alpha}. \tag{9}$$

Из деривационных формул получаем:

$$dA_{i'} = \tilde{\omega}^{j'}_{i'} A_{j'} + \omega^{\alpha}_{i'} B_{\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\tilde{\omega}^{j'}_{i'} = \omega^{j'}_{i'} - \Pi^{j'}_{i'k}\,\omega^k, \tag{11}$$

причем функции $\Pi^{j'}_{i'k}$ выражаются по формулам (7),(9).

Из формул (10),(11) видно, что проекция на касательную плоскость T_m смежной с ней плоскости $T_m + dT_m$ из центра K_{n-m-1} определяется функциями $\Pi^{j'}_{ik}$.

Расписывая уравнения (6) более подробно, получим уравнения (5) и следующие уравнения:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\,\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \bar{\omega}^i_{jk}, \\ \mathcal{D}\,\omega^0_j = \omega^0_j \wedge \omega^0_0 + \omega^i_j \wedge \omega^0_i + \omega^k \wedge \omega^0_{jk}, \\ \mathcal{D}\,\omega^0_0 = \omega^k \wedge \omega^0_k, \end{cases} \tag{12}$$

где $\quad \bar{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \delta^i_k\,\omega^0_j$.

Уравнения (5),(12) являются структурными уравнениями некоторого главного расслоения, связность в котором задается с помощью объекта связности $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk}, \Gamma_k)$:

$$\begin{cases} \nabla\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jk}\,\omega^0_0 + \bar{\omega}^i_{jk} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma_{jk} + 2\Gamma_{jk}\,\omega^0_0 - \Gamma_k\,\omega^0_j + \Gamma^i_{jk}\,\omega^0_i + \omega^0_{jk} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma_k + \Gamma_k\,\omega^0_0 + \omega^0_k \equiv 0. \end{cases} \tag{13}$$

Сравнивая объекты (Π^i_{jk}, Π^0_{jk}) и $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk}, \Gamma_k)$, видим, что их совпадение возможно лишь в случае

$$\Gamma_k = 0. \tag{14}$$

Подставляя эти значения в последнюю группу уравнений (I3), получим

$$\omega_k^0 \equiv 0 . \tag{15}$$

Отметим, что при выполнении условий (I4),(I5) системы уравнений (8) и (I3) совпадают.

Произведем нормализацию 2-го рода поверхности X_m, т.е. к каждой ее точке A_0 присоединим нормаль 2-го рода А.П.Нордена [2] - плоскость N_{m-1}, принадлежащую касательной плоскости T_m и не проходящую через точку касания A_0. Плоскость N_{m-1} зададим совокупностью точек $B_i = A_i + \Gamma_i A_0$. Осуществим дополнительную канонизацию репера $\{A_J\}$, помещая вершины A_i на нормаль 2-го рода N_{m-1}, тогда условия (I4),(I5) будут выполнены и объект Π^{i}_{jk} можно отождествить с объектом $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{jk})$. Заметим, что в силу сравнений (I5) расслоение (5),(I2) сокращается, поэтому объектом связности становится лишь подобъект Π^i_{jk} объекта Π^{i}_{jk}.

Список литературы

I.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,I979,т.9.

2.Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.,I976.

3. Cartan E. Les espaces a connexion projective. Тр.Семинара по векторному и тензорному анализу, I937,вып.4,с.I47-I59.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 5I4.75

Н.М.Ш е й д о р о в а

К ГЕОМЕТРИИ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$.

Двухсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_m$ $(\tau < m < n-1)$ назовем пару распределений, состоящую из базисного распределения I-го рода $\mathcal{H}_\tau$ τ-мерных плоскостей Π_τ и оснащающего распределения I-го рода $\mathcal{H}_m$ m-мерных плоскостей Π_m, причем $\Pi_\tau(A) \subset \Pi_m(A)$ в каждом центре A распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}} = \overline{0,n}\,; \quad \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{1,n}\,; \quad i, j = \overline{\tau+1, m}\,;$$

$$\bar{q}, \bar{p} = \overline{0,\tau}\,; \quad p, q, s, t, f = \overline{1,\tau}\,; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}\,;$$

$$\bar{a} = \overline{0,m}\,; \quad a = \overline{1,m}\,; \quad u = \overline{\tau+1, n}\,.$$

Оператор определим формулой:

$$\nabla A^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_\eta} = dA^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_\eta} + A^{\mathcal{J} \mathcal{I}_2 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_\eta} \omega^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}} + \dots + A^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_{\tau-1} \mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_\eta} \omega^{\mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{J}} -$$

$$- A^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{J} \mathcal{K}_2 \dots \mathcal{K}_\eta} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1} - \dots - A^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_{\eta-1} \mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_\eta} - (\tau - \eta) A^{\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_\tau}_{\mathcal{K}_1 \dots \mathcal{K}_\eta} \omega^0_0 .$$

I. Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{\bar{\mathcal{I}}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого:

$$dA_{\bar{\mathcal{I}}} = \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{I}}} A_{\bar{\mathcal{K}}}\,, \quad \text{где } \mathcal{D}\omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{I}}} = \omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{I}}} \wedge \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}}\,, \sum_{\bar{\mathcal{I}}=0}^{n} \omega^{\bar{\mathcal{I}}}_{\bar{\mathcal{I}}} = 0 .$$

Пусть плоскость Π_τ задана точками $M_{\bar{p}} = A_{\bar{p}} + M^u_{\bar{p}} A_u$, плоскость Π_m -точками $N_{\bar{a}} = A_{\bar{a}} + A^{\alpha}_{\bar{a}} A_\alpha$ и $\Pi_\tau \subset \Pi_m$.

Канонизируем репер $\{A_{\bar{\mathcal{I}}}\}$ следующим образом: совместим грань $[A_{\bar{a}}]$ с плоскостью Π_m распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$ так, что $\{A_p\} \subset \Pi_\tau$, A_0 совпадает с центром распределения $\mathcal{H}^{\tau}_m$. Такой репер назовем репером нулевого порядка R^0.

В репере R^0 дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}_m^{\tau}$ имеют вид::

$$\omega_p^{\alpha}=\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}\ ,\quad \omega_p^{i}=M_{p\varkappa}^{i}\,\omega_0^{\varkappa},\quad \omega_i^{\alpha}=A_{i\varkappa}^{\alpha}\omega_0^{\varkappa}; \tag{1}$$

где $\Delta\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}\wedge\omega_0^{\varkappa}=0\ ,\ \Delta M_{p\varkappa}^{i}\wedge\omega_0^{\varkappa}=0,\ \Delta A_{i\varkappa}^{\alpha}\wedge\omega_0^{\varkappa}=0,$

$$\Delta\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}=\nabla\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}+M_{p\varkappa}^{i}\omega_i^{\alpha}-\delta_{\varkappa}^{\alpha}\,\omega_p^{0},$$
$$\Delta M_{p\varkappa}^{i}=\nabla M_{p\varkappa}^{i}+\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}\,\omega_{\alpha}^{i}-\delta_{\varkappa}^{i}\,\omega_p^{0},$$
$$\Delta A_{i\varkappa}^{\alpha}=\nabla A_{i\varkappa}^{\alpha}-\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}\,\omega_i^{p}-\delta_{\varkappa}^{\alpha}\,\omega_i^{0}.$$

Рассмотрим тот случай распределения $\mathcal{H}_m^{\tau}$, когда оснащающее распределение $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m скомпоновано в смысле А.П.Нордена, т.е. $\Pi_{\tau}\cap\Pi_{m-\tau}=A_0,\ \Pi_{m-\tau}\subset\Pi_m,$ $\Pi_{\tau}\subset\Pi_m$. Поместим точки A_i в плоскость $\Pi_{m-\tau}$. Такой репер назовём репером, адаптированным распределению плоскостей $\Pi_{m-\tau}$, и обозначим R^1. Положим $A_{ip}^{\alpha}=0$. Дифференциальные уравнения распределения в репере R^1 примут вид:

$$\omega_p^{\alpha}=\Lambda_{p\varkappa}^{\alpha}\omega_0^{\varkappa},\quad \omega_p^{i}=M_{p\varkappa}^{i}\,\omega_0^{\varkappa},$$
$$\omega_i^{\alpha}=A_{iu}^{\alpha}\,\omega_0^{u},\quad \omega_i^{p}=N_{i\varkappa}^{p}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{2}$$

$$\nabla\Lambda_{pq}^{\alpha}=\Lambda_{pq\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{3}$$

$$\nabla\Lambda_{pi}^{\alpha}=\Lambda_{pi\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{4}$$

$$\nabla\Lambda_{p\beta}^{\alpha}-\Lambda_{pq}^{\alpha}\,\omega_{\beta}^{q}-\Lambda_{pi}^{\alpha}\,\omega_{\beta}^{i}-\delta_{\beta}^{\alpha}\,\omega_p^{0}=\Lambda_{p\beta\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{5}$$

$$\nabla M_{pq}^{i}+\Lambda_{pq}^{\alpha}\,\omega_{\alpha}^{i}=M_{pq\varkappa}^{i}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{6}$$

$$\nabla M_{pj}^{i}+\Lambda_{pj}^{\alpha}\,\omega_{\alpha}^{i}-\delta_j^{i}\,\omega_p^{0}=M_{pj\varkappa}^{i}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{7}$$

$$\nabla M_{p\alpha}^{i}-M_{pq}^{i}\,\omega_{\alpha}^{q}-M_{pj}^{i}\,\omega_{\alpha}^{j}+\Lambda_{p\alpha}^{\beta}\,\omega_{\beta}^{i}=M_{p\alpha\varkappa}^{i}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{8}$$

$$\nabla A_{ij}^{\alpha}=A_{ij\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{9}$$

$$\nabla A_{i\beta}^{\alpha}-A_{ij}^{\alpha}\,\omega_{\beta}^{j}-\delta_{\beta}^{\alpha}\,\omega_i^{0}=A_{i\beta\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{10}$$

$$\nabla N_{iq}^{p}-\delta_q^{p}\,\omega_i^{0}=N_{iq\varkappa}^{p}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{11}$$

$$\nabla N_{ij}^{p}+A_{ij}^{\alpha}\,\omega_{\alpha}^{p}=N_{ij\varkappa}^{p}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{12}$$

$$\nabla N_{i\alpha}^{p}-N_{iq}^{p}\,\omega_{\alpha}^{q}-N_{ij}^{p}\,\omega_{\alpha}^{j}+A_{i\alpha}^{\beta}\,\omega_{\beta}^{p}=N_{i\alpha\varkappa}^{p}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{13}$$

$$A_{ij}^{\alpha}M_{[p\varkappa]}^{j}+A_{i\beta}^{\alpha}\Lambda_{[p\varkappa]}^{\beta}+\Lambda_{q[p}^{\alpha}N_{|i|\varkappa]}^{q}=0. \tag{14}$$

2. Под нормализацией двухсоставного распределения $\mathcal{H}_m^{\tau}$ будем понимать нормализацию его базисного распределения $\mathcal{H}_{\tau}$ в смысле А.П.Нордена [3].

Построим сначала инвариантное поле нормалей 1-го рода $N_{n-\tau}(A_0)$: $N_{n-\tau}(A_0)\cap\Pi_{\tau}(A_0)\equiv A_0;\ N_{n-\tau}(A_0)\cup\Pi_{\tau}(A_0)=P_n$.

Допустим, что существует нетривиальный относительный инвариант $J=J(\Lambda_{pq}^{\alpha})$, которым можно охватить обращенный фундаментальный тензор 1-го порядка V_{α}^{pq}, симметричный по индексам p,q и удовлетворяющий следующим уравнениям:

$$V_{\alpha}^{pq}\Lambda_{pq}^{\beta}=\tau\,\delta_{\alpha}^{\beta},$$
$$V_{\alpha}^{pq}\Lambda_{qs}^{\alpha}=(n-m)\,\delta_s^{p}\ ,\quad V_{\alpha}^{pq}\Lambda_{sq}^{\alpha}=(n-m)\,\delta_s^{p},$$
$$\nabla V_{\alpha}^{pq}=V_{\alpha\varkappa}^{pq}\,\omega_0^{\varkappa}. \tag{15}$$

Продолжая уравнения (3), (15), получим:

$$\nabla\Lambda_{pqs}^{\alpha}-(\Lambda_{tq}^{\alpha}\Lambda_{ps}^{\beta}+\Lambda_{pt}^{\alpha}\Lambda_{qs}^{\beta}+\Lambda_{ts}^{\alpha}\Lambda_{pq}^{\beta})\,\omega_{\beta}^{t}+$$
$$+\Lambda_{pq}^{\alpha}\,\omega_s^{0}+\Lambda_{sq}^{\alpha}\,\omega_p^{0}+\Lambda_{ps}^{\alpha}\,\omega_q^{0}=\Lambda_{pqs\varkappa}^{\alpha}\,\omega_0^{\varkappa}; \tag{16}$$

$$\nabla V_{\alpha q}^{pq}-(\tau+2)V_{\alpha}^{pq}\,\omega_q^{0}+V_{\alpha}^{ps}\Lambda_{sq}^{\beta}\,\omega_{\beta}^{q}-V_{\beta}^{pq}\Lambda_{qs}^{\beta}\,\omega_{\alpha}^{s}+$$
$$+(2n-2m+\tau)\,\omega_{\alpha}^{p}=V_{\alpha q\varkappa}^{pq}\,\omega_0^{\varkappa}. \tag{17}$$

Построим систему величин:

$$\widetilde{N}_{\alpha}^{p}=\Lambda_{(sq)t}^{\beta}V_{\alpha}^{sq}V_{\beta}^{pt}+\frac{(2n-2m+\tau)^2}{(\tau+2)(n-m+\tau)}\,\Big(V_{\alpha q}^{pq}+$$
$$+\frac{1}{2n-2m+\tau}\Lambda_{(sq)t}^{\beta}V_{\beta}^{qt}V_{\alpha}^{sp}\Big);\ \nabla\widetilde{N}_{\alpha}^{p}+K_{\alpha t}^{p\gamma}\,\omega_{\gamma}^{t}=\widetilde{N}_{\alpha\varkappa}^{p}\,\omega_0^{\varkappa}, \tag{18}$$

где

$$K_{\alpha t}^{p\gamma}=\Big(\frac{(2n-2m+\tau)^2}{\tau+2}-\tau(n-m)\Big)\delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_t^{p}-$$
$$-2\Lambda_{qf}^{\gamma}\Lambda_{(st)}^{\beta}V_{\alpha}^{qs}V_{\beta}^{pf}+\frac{2n-2m+\tau}{(n-m+\tau)(\tau+2)}\Lambda_{[st]}^{\beta}\Big(\Lambda_{(fq)}^{\gamma}V_{\beta}^{qs}V_{\alpha}^{pf}+$$
$$+(n-m+\tau)V_{\alpha}^{ps}\delta_{\beta}^{\gamma}-\frac{(2n-2m+\tau)^2-\tau(n-m+\tau)(\tau+2)}{2n-2m+\tau}V_{\beta}^{ps}\delta_{\alpha}^{\gamma}\Big)$$

образуют тензор 1-го порядка:

$$\nabla K_{\alpha t}^{p\gamma}=K_{\alpha t\varkappa}^{p\gamma}\,\omega_0^{\varkappa}.$$

Так как $\det \| K^{p\gamma}_{\alpha t} \| \neq 0$ [4], то можно ввести обращенный тензор $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t}$ [4]: $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t} K^{t\beta}_{\gamma q} = \delta^{\beta}_{\alpha} \delta^{p}_{q}$, $\overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t} K^{q\alpha}_{\beta p} = \delta^{\gamma}_{\beta} \delta^{q}_{t}$.

Тогда тензор 2-го порядка

$$\bar{N}^{p}_{\alpha} = \overset{*}{K}{}^{p\gamma}_{\alpha t} \tilde{N}^{t}_{\gamma}\ , \quad \nabla \bar{N}^{p}_{\alpha} + \omega^{p}_{\alpha} = \bar{N}^{p}_{\alpha\varkappa} \omega^{\varkappa}_{o} \tag{19}$$

определяет инвариантную нормаль 1-го рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$. Квазитензор 2-го порядка

$$b_p = \frac{1}{(n-m)(\tau+2)} \Big[\Lambda^{\alpha}_{(pq)s} V^{qs}_{\alpha} + \bar{N}^{q}_{\beta} \Big((2n-2m+\tau) \Lambda^{\beta}_{(pq)} - (n-m) \Lambda^{\beta}_{qp} +$$

$$+ \Lambda^{\alpha}_{qs} V^{ts}_{\alpha} \Lambda^{\beta}_{(pt)} \Big) \Big]\ , \quad \nabla b_p + \omega^{o}_{p} = b_{p\varkappa} \omega^{\varkappa}_{o} \tag{20}$$

определяет $(\tau-1)$-мерную плоскость $\mathcal{N}_{\tau-1}$ в плоскости Π_{τ}, не проходящую через центр A_o распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ т.е. нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{\tau-1}(A_o)$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$.

Итак, в окрестности 2-го порядка образующего элемента распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ внутренним инвариантным образом определена нормализация распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ в смысле А.П.Нордена [3].

4. Произведем канонизацию репера R^1, расположив вершины A_{α} репера в плоскости нормали первого рода $\mathcal{N}_{n-\tau}$, определенной квазитензором $\{\bar{N}^{p}_{\alpha}\}$ (19). При этом получим, что

$$\omega^{p}_{\alpha} = H^{p}_{\alpha\varkappa} \omega^{\varkappa}_{o}. \tag{21}$$

Такой репер называется репером $R^1(\mathcal{N})$, адаптированным полю нормалей первого рода.

Построим квазитензор $\{\ell_p\}$:

$$\ell_p = -\frac{1}{n-m+\tau} (M^{i}_{pi} + \Lambda^{\alpha}_{p\alpha}), \nabla \ell_p + \omega^{o}_{p} = \ell_{p\varkappa} \omega^{\varkappa}_{o}. \tag{22}$$

Квазитензор $\{\ell_p\}$ определяет на двухсоставном распределении $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ поле $(\tau-1)$-мерных плоскостей $\ell_{\tau-1}$. Каждая плоскость $\ell_{\tau-1}$ принадлежит плоскости Π_{τ} и не проходит через центр A_o распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$. В общем случае квазитензоры $\{\ell_p\}$ и $\{\bar{b}_p\}$ (20) не совпадают, т.к. компоненты квазитензора $\{b_p\}$ построены при помощи компонент подобъекта $\{\Lambda^{\alpha}_{pq}, \Lambda^{\alpha}_{pqs}\}$ фундаментального объекта второго порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$, а квазитензор $\{\ell_p\}$ охвачен фундаментальным объектом первого порядка распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$.

Функции

$$\mu_p \overset{def}{=} \bar{b}_p - \ell_p\ , \quad \nabla \mu_p = \mu_{p\varkappa} \omega^{\varkappa}_{o} \tag{22}$$

определяют на распределении $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ поле ковариантного тензора (в общем случае не тривиального). В каждой плоскости $\Pi_{\tau}(A_o)$ тензор $\{\mu_p\}$ позволяет задать однопараметрический пучок $(\tau-1)$-мерных нормалей 2-го рода, внутренним инвариантным образом присоединенный к распределению $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$:

$$\mu_p(\sigma) = \bar{b}_p + \sigma \mu_p\ , \tag{23}$$

где σ - абсолютный инвариант.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.- Тр.геометрического семинара ВИНИТИ, 1971, 3, 29-48.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.-Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ, 1971, 3, 49-94.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности II. - Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, 3, с.95-114.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I4 1983

УДК 514.75

В.В. Махоркин

ФОКАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются m-параметрические семейства невырожденных гиперквадрик в P_n $(m<n)$. Устанавливается связь между фокальными точками первого порядка и особыми точками некоторого отображения.

Пусть M множество всех невырожденных гиперквадрик n-мерного проективного пространства P_n, которое является открытым подмножеством проективного пространства P_N (где $2N=n(n+3)$) и естественным образом наделяется комплексно-аналитической структурой. Каждому $a\in M$ соответствует гиперквадрика в P_n, которую обозначим: $Z_a\subset P_n$.

Рассмотрим прямое произведение $P_n\times M$, которое наделим комплексно-аналитической структурой произведения. Отображения

$$pr_1: P_n\times M\to P_n,\qquad pr_2: P_n\times M\to M \tag{1.1}$$

являются комплексно-аналитическими.

Пусть множество $Z\subset P_n\times M$ определяется следующим образом: $(x,a)\in Z \Longleftrightarrow a\in M$ и $x\in Z_a$

Z является комплексно-аналитическим подмногообразием в $P_n\times M$ (см. I).

Обозначим

$$\pi_1 = pr_1\big|_Z,\quad \pi_2 = pr_2\big|_Z .$$

Таким образом имеем следующие отображения

$$\pi_1: Z\to P_n,\quad \pi_2: Z\to M \tag{1.2}$$

также являющиеся комплексно-аналитическими отображениями. Следуя [I], назовем:

$$\pi_2: Z\to M \tag{1.3}$$

комплексно-аналитическим семейством всех гиперквадрик n-мерного проективного пространства.
Отображение (I.3) является расслоением с базой M и слоем $\pi_2^{-1}(a)=Z_a\times\{a\}\approx Z_a$, причем все слои изоморфны невырожденной гиперквадрике в P_n.

Пусть

$$\varphi: U\to M \tag{1.4}$$

комплексно-аналитическое вложение, где $U\subset \mathbb{C}^m$ $(m<n)$ открытое подмножество.

Отображение (I.4) и расслоение (I.3) стандартным образом определяют индуцированное расслоение гиперквадрик (семейство гиперквадрик) в P_n с базой U:

$$\pi: \tilde Z\to U \tag{1.5}$$

Здесь $\pi^{-1}(t)=Z_{\varphi(t)}$. Будем рассматривать $\tilde Z$ как комплексно-аналитическое подмногообразие в $P_n\times U$ коразмерности один.

Используя системы координат на U и P^n, $\tilde Z$ можно задать следующим уравнением:

$$U(x,t)\equiv a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)=0 \tag{1.6}$$

Здесь и дальше $x=(x^0,x^1,\dots,x^n)$ координаты в P_n, $t=(t^1,t^2,\dots,t^m)$ координаты на U, а функции $a_{\alpha\beta}(t^1,t^2,\dots,t^m)$ определяются отображением (I.4).

Обозначим $p=pr_1\big|_{\tilde Z}$, где $pr_1: P_n\times U\to P_n$.
Рассмотрим

$$p: \tilde Z\to P_n . \tag{1.7}$$

Определение I. Точка $x\in Z_{\varphi(t)}$ называется фокальной точкой первого порядка гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$ в семействе (I.5), если точка $x=(x^0,x^1,\dots,x^n)$ удовлетворяет системе уравнений (см. 2):

$$a_{\alpha\beta}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0$$

Здесь первое уравнение, уравнение гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть X и Y комплексно-аналитические многообразия, $f: X \to Y$ комплексно-аналитическое отображение, точка $x \in X$ называется особой точкой отображения f, если $\operatorname{rang}_x f < \min(\dim X, \dim Y)$ (см. 3).

Т е о р е м а. Пусть дано семейство (I.5). Точка $x \in Z_{\varphi(t)}$ является фокальной точкой первого порядка гиперквадрики $Z_{\varphi(t)}$ в семействе (I.5). тогда и только тогда, когда точка $(x,t) \in \tilde{Z}$ является критической точкой отображения I.7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x,t) \in \tilde{Z}$ является особой точкой отображения (I.7), это значит, что касательное отображение:

$$T_{(x,t)}P : T_{(x,t)}\tilde{Z} \to T_x P_n \qquad (1.9)$$

не является сюрьективным, или что эквивалентно кокасательное отображение

$$T^*_{(x,t)}P : T^*_x P_n \to T^*_{(x,t)}\tilde{Z} \qquad (1.10)$$

не является инъюктивным.

Таким образом, существует $v \in T_x P_n$ такой, что

$$T^*_{(x,t)}(v) = 0, \qquad (1.11)$$

но $P = P z_1|_{\tilde{Z}}$, поэтому

$$(T^*_{(x,t)}P)(v) = (T_{(x,t)}P z_1)(v)|_{\tilde{Z}} \qquad (1.12)$$

В правой части (I.I2) стоит ограничение $(T^*_{(x,t)}P z_1)(v)$ на подмногообразие $\tilde{Z}$ (см. [3]). Получаем:

$$(T^*_{(x,t)}P z_1)(v)|_{\tilde{Z}} = 0 \qquad (1.13)$$

Так как подмногообразие $\tilde{Z}$ в $P_n \times U$ определяется уравнением (I.6), то для того, чтобы некоторый ковектор имел нулевое ограничение на $\tilde{Z}$ необходимо и достаточно чтобы он имел вид (см. [3]): $\lambda\, du$.

Для того, чтобы ковектор имел вид $(T^*_{(x,t)}P z_1)(v)$ необходимо и достаточно, чтобы его ограничение на $T^*_t U$ было нулевым.

Таким образом, точка $(x,t) \in \tilde{Z}$ будет критической точкой отображения (I.7) тогда и только тогда, когда (см. [3])

$$du(x,t)|_{x = const} = 0. \qquad (1.14)$$

Из (I.I4) получаем

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1, t^2, \ldots, t^m)x^\alpha x^\beta\right)dt^1 + \ldots + \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1, t^2, \ldots, t^m)x^\alpha x^\beta\right)dt^m = 0 \qquad (1.15)$$

В силу независимости dt^i получаем

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^1}(t^1, t^2, \ldots, t^m)x^\alpha x^\beta = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1, t^2, \ldots, t^m)x^\alpha x^\beta = 0. \qquad (1.16)$$

Так как $x \in Z_{\varphi(t)}$, то окончательно получаем для нахождения критических точек (x,t) систему уравнений:

$$a_{\alpha\beta}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0,$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0, \qquad (1.17)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t^m}(t^1, t^2, \ldots, t^m)\, x^\alpha x^\beta = 0.$$

Список литературы

I. Kodaira K., Spencer D.C. On deformations of complex analitic structures. I, II. Amals of Mathematics 67, 1958.

2. Махоркин В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.50-60.

3. Фам.Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М., Мир, 1972.

Семинар

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 20 мая 1981 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 21 октября 1981 года по 31 мая 1982 года.

21.10.1981г. Б.А.Андреев. Характеристические и гипохарактеристические направления отображения f

28.10.1981г. Ю.И.Попов. Введение аффинной связности на регулярном трехсоставном распределении $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$

4.11.1981г. Н.М.Шейдорова. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^{r}_{m} \subset P_n$.

11.11.1981г. Е.П.Сопина. Отображения, ассоциированные с конгруэнцией V_{n-1}.

18.11.1981г. В.С.Малаховский. О конгруэнции квадрик Ли поверхности.

25.11.1981г. Е.В.Скрыдлова. О вырожденных конгруэнциях, порожденных квадрикой и плоскостью.

2.12.1981г. Л.Г.Корсакова. О конгруэнции квадрик, ассоциированной с парой конгруэнций коник.

9.12.1981г. Ю.И.Шевченко. Обобщение нормализации А.П.Нордена.

16.12.1981г. С.В.Мациевский. Комплекс линейчатых невырожденных квадрик в трехмерном проективном пространстве.

10.02.1982г. М.В.Кретов. Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве.

17.02.1982г. В.Н.Худенко. Об одном классе многообразий многомерных квадрик.

24.02.1982г. С.В.Киштанова. Конгруэнции квадрик с вырождающимися в точки фокальными поверхностями.

3.03.1982г. М.В.Косаренко. О связностях регулярной гиперполосы неевклидового пространства.

10.03.1982г. Л.А.Вербицкая. О полях геометрических объектов на конгруэнциях (n-2)-мерных параболоидов в A_n.

17.03.1982г. В.П.Цапенко. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур.

24.03.1982г. Т.Н.Крысова. Конгруэнции центральных коник в A_3.

2.04.1982г. Е.Т.Ивлев (г.Томск). Сечение пространства проективной связности

7.04.1982г. В.А.Труппов (г.Иркутск). Пространство m-мерных касательных элементов второго порядка.

13.04.1982г. Г.И.Иванов (г.Горно-Алтайск). Конгруэнции парабол с неопределенными фокальными поверхностями.

14.04.1982г. Г.И.Иванов (г.Горно-Алтайск). Некоторые виды двумерных распределений на многообразии парабол.

14.04.1982г. В.Б.Ким (г.Кемерово). Проективно-дифференциальная геометрия многообразий кривых третьего порядка.

5.05.1982г. Н.В.Гвоздович (г.Минск). Инфинитезимальные автоморфизмы многомерных три-тканей.

12.05.1982г. Т.Г.Петрович. О внутренней геометрии регулярной гиперполосы аффинного пространства.

31.05.1982г. В.В.Махоркин. Фокальные многообразия как особенности дифференцируемых отображений.

УДК 514.75

Классификация $(f \equiv \eta f)$ -структур, индуцированных на распределении линейных элементов коразмерности два в многообразии почти комплексной структуры M_n. А к м а т о в Б. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.5-8.

Рассматриваются распределения m -мерных линейных элементов $(m>2)$ коразмерности два Λ^2 в многообразии почти комплексной структуры M_n, оснащенной полем двумерных нормалей ν, и проводится классификация структур, индуцированных на распределении Λ^2 исходными структурами.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Характеристические и гипохарактеристические направления отображения f. А н д р е е в Б.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.9-13.

Введены и геометрически охарактеризованы понятия характеристических и гипохарактеристических направлений дифференцируемого отображения проективного пространства P_N в пространство пар: точка-гиперквадрика.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Пространство гиперквадрик аффинного пространства. Б а г л а е в И.И. Дифференциальная геометрия многообразии фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.14-17.

Исследуются свойства линейных систем гиперквадрик в п-мерном аффинном пространстве.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов п-мерного проективного пространства I. Б о ч и л л о Г.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.18-23.

С использованием компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства $(m<n)$ построено оснащение двойственного характера распределения Δ_m, которое позволяет задать аффинную связность на этом распределении.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

О полях геометрических объектов на многообразии π_{n-2}. Ж а р и к о в а Л.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.24-25.

В п-мерном эквиаффинном пространстве исследуются поля геометрических объектов на (п-1)-мерном многообразии π_{n-2} (п-2)-мерных параболоидов π.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

О паре сетей. К и р е е в а С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.26-31.

Изучаются объекты отображения f области Ω проективного пространства P_n в область $\bar{\Omega} \subset \bar{P}_n$, переводящего точку A в точку B, и его характеристические направления.

Библиография; 7 названий.

УДК 514.75

Связности на оснащенной регулярной гиперполосе SH_r в неевклидовом N -мерном пространстве ${}^{\ell}S_N$ ранга ℓ. К о с а р е н к о М.Ф. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.32-35.

Исследуются связности в расслоениях, ассоциированных с регулярной гиперполосой SH_r в неевклидовом пространстве ${}^{\ell}S_N$.

Библиография: 6 названий.

УДК 514.75

Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве. К р е т о в М.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.36-40.

С помощью дифференцируемого отображения вводится понятие асимптотических направлений п-параметрического многообразия гиперквадрик в аффинном пространстве. Рассматривается аналог соприкасающейся плоскости кривой $\ell: R^1 \to P_n$. Доказывается теорема, являющаяся аналогом результата полученного В.В. Рыжковым для отображения $P_m \longrightarrow P_n$ при $m<n$

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнции эллипсов со специальными свойствами ассоциированных параболоидов. К р ы с о в а Т.Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с.41-44.

Найдены геометрические свойства конгруэнции эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве, у которой

центры образующих элементов описывают поверхность, не вырождающуюся в линию или плоскость и не являющуюся торсом.
Библиография: 2 названия.

УДК.514.75

К вопросу существования сетей Σ_n^s в A_n. К у з ь м и н М.К. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.45–48.
Изучается один класс многомерных сетей Σ_n^s $(1 \leq S \leq n-1)$ в аффинном пространстве A_n, который выделяется наложением определенных условий на распределения, порожденные сетью. Найдена верхняя граница произвола существования таких сетей для всех допустимых значений S.
Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Об одном специальном отображении $T: T_x \to N_x$. Л о к о т к о в Н.Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.49–53.
На гладком подмногообразии V_p евклидова пространства E_n выделяется распределение $\Delta_\tau (1 \leq \tau < p)$, вдоль которого параллельно в нормальной связности единичное нормальное векторное поле. Изучаются свойства отображения касательного пространства T_x в нормальное пространство N_x, порождаемое распределением Δ_τ.
Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

О фокальных многообразиях конгруэнции квадрик Ли. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.54–56.
Исследуется фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли поверхности S в трехмерном проективном пространстве.
Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Комплекс линейчатых невырожденных квадрик в трехмерном проективном пространстве. М а ц и е в с к и й С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.57–61.
Изучается трехпараметрическое семейство линейчатых невырожденных квадрик в трехмерном проективном пространстве с непустым фокальным многообразием.
Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Однородное пространство представления группы $A_m^p(n)$. М и т р о ф а н о в а Е.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.62–63.
Изучается группа преобразований Ли $A_m^p(n)$ многообразия параболоидов степени p и размерности m пространства R_n

УДК 514.75

Вырожденные одномерные многообразия коник. М о ч е р н ю к Н.Т. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.64–69.
Изучаются однопараметрические многообразия коник в P_3, когда характеристика плоскости коники ℓ_4 касается коники.
Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Введение аффинной связности на регулярном трехсоставном распределении $\mathcal{H}_{m,n-1}^{\tau}$. П о п о в Ю.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.70–76.
Инвариантным методом Г.Ф. Лаптева строится аффинная связность распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^{\tau}$, ассоциированная с базисным распределением $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}_{m,n-1}^{\tau}$.
Библиография: 7 названий.

УДК 514.75

Ортогональные пары T конгруэнций с заданным соотношением абсцисс фокусов. Р е д о з у б о в а О.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.77–81.
Рассмотрены ортогональные пары T конгруэнций в евклидовом пространстве E_3, у которых абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны.
Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Нормальные конгруэнции парабол n-го порядка. Р ю т и н В.Р. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14 Калининград, 1983, с.82–83.
Изучены геометрические свойства специального класса конгруэнций парабол порядка n, где $n \geq 3$.
Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Конгруэнции K_p^q. С а н г а д ж и е в а С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14, Калининград, 1983, с.84–86.
В трехмерном проективном пространстве исследуются

конгруэнции K_p^q, $p+q=2$ -конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик с p вырождающимися в точки и с q вырождающимися в линии фокальными поверхностями.
Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Конгруэнции кривых второго порядка с двукратными невырождающимися фокальными поверхностями. С в е ш н и к о в а Г.Л. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.87-91.
В трехмерном проективном пространстве исследуются невырожденные конгруэнции кривых второго порядка, для которых каждая из двух невырождающихся фокальных поверхностей является сдвоенной.
Библиография: I название.

УДК 514.75

О средней кривизне поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве. С и л а е в Е.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.92-96.
В работе установлена связь между средними кривизнами поверхности V_p, лежащей на гиперсфере S_{n-1} в евклидовом пространстве E_n, по отношению к пространству и по отношению к гиперсфере. Изучаются соответствующие геометрические конструкции.
Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

О конгруэнции гиперквадрик в A_n с фокальной конгруэнцией (n-2)-мерных квадрик. С о п и н а Е.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.97-98.
В n-мерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции V^0_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q, содержащих в качестве фокального многообразия (n-2)-мерную квадрику K.
Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием квадрик. Х у д е н к о В.Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.99-102.
В n-мерном проективном пространстве изучается связность в расслоении, ассоциированном с многообразием p-мерных квадрик.
Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Семейство плоскостей, ассоциированных с гиперконгруэнцией V_{n-1}. Ц а п е н к о В.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.103-106.
В n-мерном проективном пространстве продолжается изучение многообразий пар фигур, порожденных гиперквадрикой и неинцидентной ей точкой.
Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Об оснащении Картана. Ш е в ч е н к о Ю.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.107-110.
Найдены условия, при которых подобъекты объекта, характеризующего отображение друг на друга близких касательных плоскостей оснащенной по Картану поверхности проективного пространства, является объектом связности с точки зрения расслоенных пространств.
Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}_m^r \subset P_n$. Ш е й д о р о в а Н.М. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.111-115.
В окрестности второго порядка образующего элемента распределения $\mathcal{H}_m^r$ внутренним инвариантным образом определена его нормализация в смысле А.П. Нордена.
Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Фокальные точки первого порядка. М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I4, Калининград, 1983, с.116-119.
Рассматриваются m-параметрические семейства невырожденных гиперквадрик в P^n $(m<n)$. Устанавливается связь между фокальными точками первого порядка и особыми точками некоторого отображения.
Библиография: 3 названия.

Св. план, 1983, поз. 477

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 14

Сборник научных трудов

Редактор В. И. Васильева.
Техн. редактор Н. Д. Шишкова. Корректор С. В. Горбушина.
Подписано в печать 15.02.83. КУ 01044. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 500 экз. Заказ 14041.
Цена 80 коп.

Калининградский государственный университет,
236040, г. Калининград обл., ул. Университетская, 2.

Типография издательства «Калининградская правда»,
236000, г. Калининград обл., ул. Карла Маркса, 18.

80 коп.