

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 17

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 17.1. Ersetze im Ausdruck

QZVWXYTXUXYSRWZ

simultan die Buchstaben Q durch F , R durch A , S durch J , T durch N , V durch O , W durch H , X durch E , Y durch S und Z durch R . Handelt es sich um einen Term?

Übungsaufgaben

AUFGABE 17.2. Diskutiere, ob es sich bei

$$n!, \binom{n}{k}, \pi, e^u, x^y, 5^x, \sqrt{x}, \heartsuit$$

um Terme handelt.

AUFGABE 17.3. Expandiere den Term $3a^2$.

Bei Einsetzungsaufgaben sind grundsätzlich die entstehenden Terme zu vereinfachen.

AUFGABE 17.4. Ersetze im Term $3x^2 + 2x + 4$ die Variable x durch den Term 5 und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

AUFGABE 17.5. Ersetze im Term $4x^2 + 3x + 7$ die Variable x durch den Term $y^3 + 2y + 5$ und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

AUFGABE 17.6.*

Ersetze im Term $3x^2 + 5x + 6$ die Variable x durch den Term $4y^2 + 2y + 3$ und vereinfache den entstehenden Ausdruck.

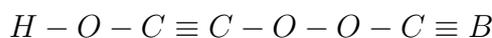
AUFGABE 17.7. Ersetze im Term

$$a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

simultan die Variablen

- (1) a_0 durch 4, a_1 durch 7, a_2 durch 4, a_3 durch 0, a_4 durch 5,
- (2) a_0 durch 7, a_1 durch 11, a_2 durch 10, a_3 durch 0, a_4 durch 13,
- (3) a_0 durch b_1 , a_1 durch b_3 , a_2 durch b_7 , a_3 durch b_1 , a_4 durch b_3 ,
- (4) a_0 durch 10, a_1 durch 10^3 , a_2 durch 10^4 , a_3 durch 100, a_4 durch 10^4 .

AUFGABE 17.8. Ersetze im Molekül

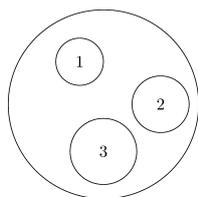


jedes Sauerstoffatom (O) durch $O-O$ und jedes Kohlenstoffatom (C) durch ein Siliciumatom Si .

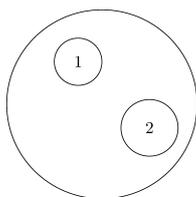
AUFGABE 17.9. Es sei $T(x)$ ein Term in der einen Variablen x , der ansonsten aus natürlichen Zahlen und darauf definierten Funktionssymbolen gebildet sei. Man mache sich klar, dass die Einsetzung $a \mapsto T(a)$ eine Abbildung von \mathbb{N} nach \mathbb{N} definiert.

Die Kleine-Scheiben-Operade besteht aus Kreisen mit einem fixierten Radius, die kleinere überschneidungsfreie durchnummerierte Kreise beinhalten. Es seien K und L zwei solche Scheiben. Die Verknüpfung $K *_i L$ (genannt die i -te *Einsetzung*), wobei i zwischen 1 und der Anzahl der inneren Kreise von K ist, erhält man, indem man den i -ten inneren Kreis von K durch den auf diese Größe geschrumpften Kreis L (ohne Drehung) ersetzt, dabei die Umrandung weglässt und die inneren Kreise neu nummeriert, und zwar so, dass die inneren Kreise von K bis zur Nummer $i-1$ ihre Nummer behalten, die in den i -ten Kreis von K platzierten Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in L bekommen und die verbleibenden inneren Kreise die anschließenden Nummern gemäß ihrer Reihenfolge in K bekommen.

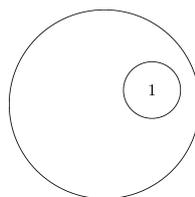
Alle folgenden Einsetzungsaufgaben für die kleinen Scheiben beziehen sich auf die skizzierten Objekte.



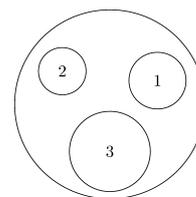
Die kleine Scheibe
A



Die kleine Scheibe
B



Die kleine Scheibe
C



Die kleine Scheibe
D

AUFGABE 17.10. Bestimme die Einsetzungen

- (1) $A *_1 B$,
- (2) $A *_2 B$,
- (3) $A *_3 B$.

AUFGABE 17.11. Bestimme die Einsetzungen

- (1) $A *_1 A$,
- (2) $A *_2 A$,
- (3) $A *_3 A$.

AUFGABE 17.12. Bestimme die Einsetzungen

- (1) $B *_1 A$,
- (2) $A *_2 D$,
- (3) $D *_3 B$,
- (4) $D *_1 B$,
- (5) $D *_2 B$,
- (6) $D *_1 D$,
- (7) $C *_1 A$,
- (8) $A *_1 C$.

AUFGABE 17.13. Bestimme die Einsetzungen

- (1) $C *_1 C$,
- (2) $(C *_1 C) *_1 C$,
- (3) $((C *_1 C) *_1 C) *_1 C$,
- (4) $C *_1 (C *_1 C)$,
- (5) $(C *_1 C) *_1 (C *_1 C)$.

AUFGABE 17.14. Besitzen die Einsetzungen $*_i$ für die kleinen Scheiben ein neutrales Element?

AUFGABE 17.15. Setze in den folgenden Definitionsgleichungen den Doppelpunkt an die richtige Stelle.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, P = 4x^2 + 7x - 5$$

AUFGABE 17.16. Bestimme, von welcher Art (im Sinne der Vorlesung) die folgenden Gleichungen sind.

- (1) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$,

(2) $\prod_{i=1}^n i = n!$,

(3) $4 + 9 = 13$,

(4)

$$\binom{4}{2} = 6,$$

(5) $x^2 = 7$.

AUFGABE 17.17. Zeige, dass für beliebige natürliche Zahlen $x \geq 1$ und n die Gleichheit

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

gilt.

AUFGABE 17.18. Finde eine Lösung und eine Nichtlösung für die Gleichung

$$5x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 11x^2 + 7x + 7.$$

AUFGABE 17.19. Welche Umformungsregeln für Gleichungen kennen Sie? Handelt es sich um Äquivalenzumformungen?

AUFGABE 17.20. Bestimme sämtliche Lösungen aus \mathbb{N} für die folgenden Gleichungen.

(1) $2x + 3 = 5x$,

(2) $2x = x^2$,

(3) $9x = x^3$.

AUFGABE 17.21. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung

$$n^3 - n^2 \leq 20$$

innerhalb der natürlichen Zahlen.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 17.22. (4 Punkte)

Es sei

$$P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4$$

und

$$Q(y) = y^2 + 3y + 7.$$

(1) Ersetze im Term $Q(y)$ die Variable y durch 6. Das Ergebnis sei a .

- (2) Ersetze im Term $P(x)$ die Variable x durch a .
- (3) Ersetze im Term $P(x)$ die Variable x durch den Term $Q(y)$. Das Ergebnis sei $R(y)$.
- (4) Ersetze im Term $R(y)$ die Variable y durch 6.

AUFGABE 17.23. (4 Punkte)

Bestimme die Einsetzungen

- (1) $B *_2 A$,
- (2) $D *_3 D$,
- (3) $(A *_3 B) *_4 C$,
- (4) $(D *_2 B) *_2 B$.

AUFGABE 17.24. (2 Punkte)

Es seien $v \geq u \geq 0$ natürliche Zahlen. Zeige, dass

$$x = v^2 - u^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

erfüllen.

AUFGABE 17.25. (3 Punkte)

Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Littlediscoperade1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	2
Quelle = Littlediscoperade2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	2
Quelle = Littlediscoperade3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	2
Quelle = Littlediscoperade4.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	2