Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 7

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 7.1. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.2. Entscheide, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

(1) $(-1, 1, -1)$, $(0, 6, 4)$, $(1, 2, 3)$, im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
(2) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(3) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(4) 1, $\sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7.3. Zeige, dass die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7.4. Bestimme eine Basis des Untervektorraums $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7.5. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0 .$$

Aufgabe 7.6. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0 .$$

Aufgabe 7.7. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.8. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2+7i \\ 3-i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15+26i \\ 13-7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.9. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 7.10.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 7.11. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.

(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 7.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 7.13.*

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Tipp: Verwende, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen besitzt.

Aufgabe 7.14.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \,|\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.15. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2-7i \\ -3+2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5+6i \\ 3-17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.17. (2 Punkte)

Zeige, dass im Raum der $m \times n$-Matrizen $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Matrizen E_{ij}, die genau an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 und sonst überall den Eintrag 0 haben, eine Basis bilden.

AUFGABE 7.18. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

AUFGABE 7.19. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.