Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 50

Übungsaufgaben

Aufgabe 50.1. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = 0,$$
falls $s_j > r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = \frac{r_1! \cdots r_n!}{(r_1 - s_1)! \cdots (r_n - s_n)!} X_1^{r_1 - s_1} \cdots X_n^{r_n - s_n},$$
falls $s_j \leq r_j$ für alle j ist.

Aufgabe 50.2. Es sei $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ ein Monom und es sei $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$ eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(1) Zeige
$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})\,(0, \ldots, 0) = 0,$$
falls $s_j \neq r_j$ für ein j ist.

(2) Zeige
$$(D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})\,(0, \ldots, 0) = r_1! \cdots r_n!.$$

Aufgabe 50.3. Bestätige Satz 50.1 für $f(x, y) = x^a y^b$ in $(0, 0)$ und $v = (2, 3)$ bis zur dritten Ableitung.

Aufgabe 50.4. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x,$$
im Nullpunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 50.5.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{x - y^2},$$
im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 50.6.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = e^x yz^2 - xy,$$

im Punkt $(1,0,-1)$.

Aufgabe 50.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = e^{\sin x - \cos y},$$

im Punkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 50.8. Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade $k = 1,2,3$.

Aufgabe 50.9.*

Bestimme das Taylor-Polynom vierter Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = x\sin y - e^{xy},$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 50.10. Es sei

$$f(x,y) \;=\; x^2y - 3xy + 5y^2 + 4x.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (1,-2)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x-1, v = y+2$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 50.11. Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylor-Polynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 50.12. Es sei $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ ein Monom vom Grad $\mid r \mid \;=\; \sum_{j=1}^n r_j \;>\; k$. Zeige

$$\lim_{x \to 0} \frac{x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}}{\|x\|^k} \;=\; 0.$$

Aufgabe 50.13. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien $f,g\colon G \to \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Aufgabe 50.14. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in G$ und $R\colon G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, falls für eine Konstante $c > 0$ und alle v in einer offenen Umgebung von 0 die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ gilt, dass dann $\lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ folgt.

Zeige umgekehrt durch ein Gegenbeispiel, dass aus $\lim_{v \to 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$ im Allgemeinen nicht die Abschätzung $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$ folgt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.15. (5 Punkte)

Bestätige Satz 50.1 anhand des folgenden Beispiels.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y^3 - \cos\left(x - y^2\right),$$

$P = (1,-3)$, $v = (5,-2)$, $k = 2$.

Aufgabe 50.16. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 50.17. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x,y) = -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt $P = (-3,4)$ algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen $u = x+3, v = y-4$ aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

Aufgabe 50.18. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien $f,g\colon G \to \mathbb{R}$ zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

Aufgabe 50.19. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und $f\colon G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x) - p(x)\|}{\|x\|^k} = 0$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis