Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 48

Totale Differenzierbarkeit

Wir möchten Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen Vektorräumen differenzieren (ohne auf eine Richtung Bezug zu nehmen), und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi\colon G \longrightarrow W,$$

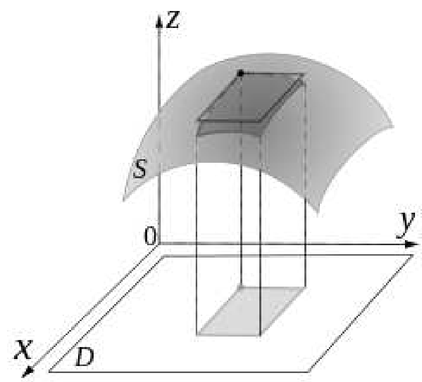
wobei $G \subseteq V$ eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von φ (genauer: Der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt x wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit φ' bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schmiegt sich die Tangente im Punkt $(P, f(P))$ an den Graphen zu f an. Zu einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt $(P, f(P))$ eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen zu f gibt, die man als den Graphen einer affin-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ realisieren kann.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie schon in Lemma 37.1 erwähnt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab.



Definition 48.1. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge und $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung. Dann heißt φ *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt $P \in G$, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon V \to W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)$$

gibt, wobei $r\colon U(0,\delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P,\delta) \subseteq G$ gilt.

Diese lineare Abbildung L heißt, falls sie existiert, das *(totale) Differential* von φ an der Stelle P und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$r(v) = \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

für $v \to 0$ gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P+v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist (siehe Aufgabe 37.7).

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und weniger konkreten Berechnungen zugänglich. Wir werden in Satz 48.11 dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 49.7 in der nächsten Vorlesung).

Lemma 48.2. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei die Abbildung $\varphi \colon G \to W$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq V$ definiert. Sei $P \in G$ ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition 48.1. Ist φ im Punkt P differenzierbar, so ist das totale Differential $(D\varphi)_P$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gelte

$$\varphi(P+v) \,=\, \varphi(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$$

und

$$\varphi(P+v) \,=\, \varphi(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$$

mit zwei linearen Abbildungen L_1 und zwei L_2 und im Punkt 0 stetigen Funktionen $r_1, r_2 \colon U(0,\delta) \to W$ mit $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Wir müssen $L_1 = L_2$ zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum W handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 \,=\, (L_1 - L_2)(v) + \|v\| \cdot (r_1(v) - r_2(v)).$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 \,=\, L(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

gilt, wobei L linear und r eine in 0 stetige Funktion mit $r(0) = 0$ ist. Wenn L nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = w \neq 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$0 \,=\, L(sv) + \|sv\| r(sv) \,=\, sw + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Dies impliziert, dass $r(sv) = -\frac{sw}{|s| \cdot \|v\|}$ für $s \neq 0$ gilt. Die Norm von $r(sv)$ ist daher konstant gleich $\frac{\|w\|}{\|v\|} \neq 0$. Also gilt $\lim_{s \to 0} \|r(sv)\| \neq 0$, ein Widerspruch. □

Beispiel 48.3. Ist $\varphi \colon V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$, so ist φ differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 48.6).

Proposition 48.4. *Es sei $L \colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W. Dann ist L in jedem Punkt $P \in V$ differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

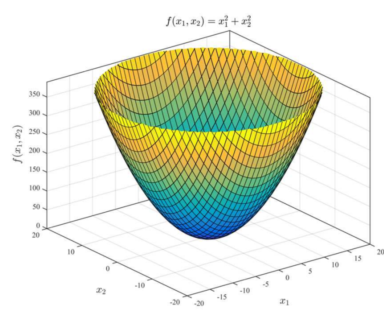
Beweis. Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P+v) \,=\, L(P) + L(v).$$

Also können wir $r = 0$ wählen. □

Diese Aussage gilt auch für affin-lineare Abbildungen, also Abbildungen der Form
$$\varphi\colon V \longrightarrow W,\, v \longmapsto L(v) + w,$$
mit einer linearen Abbildung L und einem festen Vektor $w \in W$. In diesem Fall ist das totale Differential gleich L.

Beispiel 48.5. Wir zeigen direkt, dass die Funktion
$$f(x,y) \,=\, x^2 + y^2$$
im Nullpunkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, und zwar mit der Nullabbildung als totales Differential. Dazu muss man nur zeigen, dass in der Gleichung
$$\begin{aligned} f((0,0)+(x,y)) &= f(x,y) \\ &= x^2+y^2 \\ &= f(0,0) + 0 \cdot (x,y) + \|(x,y)\| r(x,y) \\ &= \|(x,y)\| r(x,y) \end{aligned}$$
die Funktion $r(x,y)$ die verlangten Eigenschaften besitzt. Wegen $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ist aber $r(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ und diese Funktion ist stetig im Nullpunkt mit dem Wert 0.



Lemma 48.6. *Es sei I ein reelles Intervall, W ein euklidischer Vektorraum und*
$$\gamma\colon I \longrightarrow W$$
eine Abbildung. Dann ist γ genau dann in $t \in I$ als Kurve differenzierbar, wenn γ in t total differenzierbar ist. In diesem Fall besteht die Beziehung
$$\gamma'(t) \,=\, (D\gamma)_t\,(1).$$

Beweis. Die Kurvendifferenzierbarkeit im Punkt t bedeutet nach Definition 37.3 die Existenz des Limes
$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\,.$$
Diese Existenz ist (entsprechend Satz 14.5) dazu äquivalent, dass man
$$\gamma(t+h) \,=\, \gamma(t) + hw + h \cdot r(h)$$

mit einem Vektor $w \in W$ und einer in 0 stetigen Abbildung r mir $r(0) = 0$ schreiben kann (wobei $w = \gamma'(t)$ sein muss). Dabei kann man hinten h durch $|h|$ ersetzen (wobei man auch $r(h)$ abwandeln muss). Diese lineare Approximierbarkeit ist aber die Definition der totalen Differenzierbarkeit, und zwar ist die lineare Abbildung durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow W,\ h \longmapsto hw,$$

gegeben. Somit ist

$$\gamma'(t) = w = (D\gamma)_t(1).$$

□

Proposition 48.7. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildungen mit den totalen Differentialen $(D\varphi_1)_P$ und $(D\varphi_2)_P$. Dann ist auch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in P differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P .$$

Ebenso gilt $(D(a\varphi_1))_P = a\,(D\varphi_1)_P$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\varphi_1(P+v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$ und $\varphi_2(P+v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_1+\varphi_2)(P+v) &= \varphi_1(P+v) + \varphi_2(P+v)\\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)\\ &= (\varphi_1+\varphi_2)(P) + (L_1+L_2)(v) + \|v\|(r_1(v) + r_2(v)).\end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch $r_1 + r_2$ in 0 stetig mit $(r_1 + r_2)(0) = 0$ ist. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich. □

Proposition 48.8. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Sei $\varphi \colon G \to W$ eine in $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ auch stetig im Punkt P.*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| \cdot r(v)$ Die rechte Seite ist stetig (nach Definition 46.1 und Satz 36.10) in $v = 0$. Damit ist φ stetig in P. □

Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen. Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

Proposition 48.9. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, es sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi \colon G \to W$ eine im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ in P in jede Richtung v differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P(v).$$

Beweis. Da $(D\varphi)_P$ eine lineare Abbildung von V nach W ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor $v \in V$ einen Vektor in $(D\varphi)_P(v) \in W$. Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an r). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines) $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P+sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{\varphi(P+sv)-\varphi(P)}{s} &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \left((D\varphi)_P(v) + \frac{|s|}{s}\|v\| \cdot r(sv) \right) \\ &= (D\varphi)_P(v), \end{aligned}$$

da $\lim_{s\to 0} r(sv) = 0$ und der Ausdruck $\frac{|s|}{s}\|v\|$ beschränkt ist. $\square$

Bemerkung 48.10. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung. Dann existieren nach Proposition 48.9 und nach Lemma 47.3 die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

im Punkt P. Daher existiert die[1]

[1] Die Benennung der Dimensionen und der Indizes bei höherdimensionalen Abbildungen und insbesondere bei der Jacobimatrix ist ein gewisses Problem, was auch schon in der linearen Algebra auftritt. Für eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{\text{Dimension des ersten Raumes}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{Dimension des zweiten Raumes}}$$

ist es naheliegend, die erste Dimension links mit einem im Alphabet früheren Buchstaben als die zweite Dimension zu bezeichnen, also etwa $\mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ oder $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ oder $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Diese Reihenfolge überträgt sich sinnvollerweise auf Objekte, die mit dem ersten bzw. dem zweiten Raum verbunden sind, man spricht dann von der Standardbasis e_i, $1 \leq i \leq a$, links und der Standardbasis e_j, $1 \leq j \leq b$, rechts, bezeichnet die Variablen links mit x_i, $1 \leq i \leq a$, und rechts mit y_j, $1 \leq j \leq b$, und die Komponentenfunktionen zu φ bezeichnet man mit φ_j, $1 \leq j \leq b$. Diese Bezeichnungsphilosophie beißt sich allerdings mit den Bezeichungen für Matrizen. Bei einer Matrix sagt man die Anzahl der Zeilen zuerst und dann die Anzahl der Spalten, man spricht von einer Zeilenanzahl x Spaltenanzahl-Matrix und gemäß dieser Reihenfolge werden auch die Einträge benannt. Der Eintrag $a_{3,5}$ ist in der dritten Zeile und der fünften Spalte der Matrix. Nun wird aber eine lineare Abbildung durch eine Matrix beschrieben, deren Spaltenanzahl wegen „Zeile mal Spalte“ mit der Dimension des ersten Raumes übereinstimmt. Hier liegen also verschiedene Reihenfolgen vor, und dies ist der Grund, warum eine gewählte Bezeichnung nie völlig überzeugend ist. Bei einer partiell differenzierbaren Abbildung sollten die Bezeichnungen für die Indizes der Komponentenfunktionen zu den Bezeichnungen der Jacobimatrix passen.

Jacobi-Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$
Diese Matrix beschreibt das totale Differential bezüglich der Standardbasen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Es ist ja nach Proposition 48.9 und Lemma 47.3
$$(Df)_P(e_i) = (D_{e_i} f)(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}$$
und dies ist die i-te Spalte der Jacobimatrix. Durch diese Eigenschaft ist aber die beschreibende Matrix zu einer linearen Abbildung bezüglich einer Basis festgelegt.

Satz 48.11. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es seien x_i, $i = 1, \ldots, n$, die Koordinaten von $\mathbb{R}^n$ und $P \in G$ ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von P existieren und in P stetig sind. Dann ist φ in P (total) differenzierbar. Ist die Abbildung φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^m$ durch die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in P durch die Jacobi-Matrix*
$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$
beschrieben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Bemerkung 48.12. Bei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und einer total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
wird die affin-lineare Approximation in einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ in Koordinaten folgendermaßen geschrieben. Es sei L das totale Differential, so dass die lineare Approximation für $\varphi(P + v)$ die Gestalt
$$\varphi(P) + L(v)$$
besitzt. Wenn man dies in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ schreiben möchte, so ist $v_i = x_i - a_i$ und daher ist die lineare Approximation für $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gleich
$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) + L \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \varphi(a_1, \ldots, a_n) - L \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Korollar 48.13. *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 48.11 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, die nach Satz 36.13 stetig sind. $\square$

Abbildungsverzeichnis