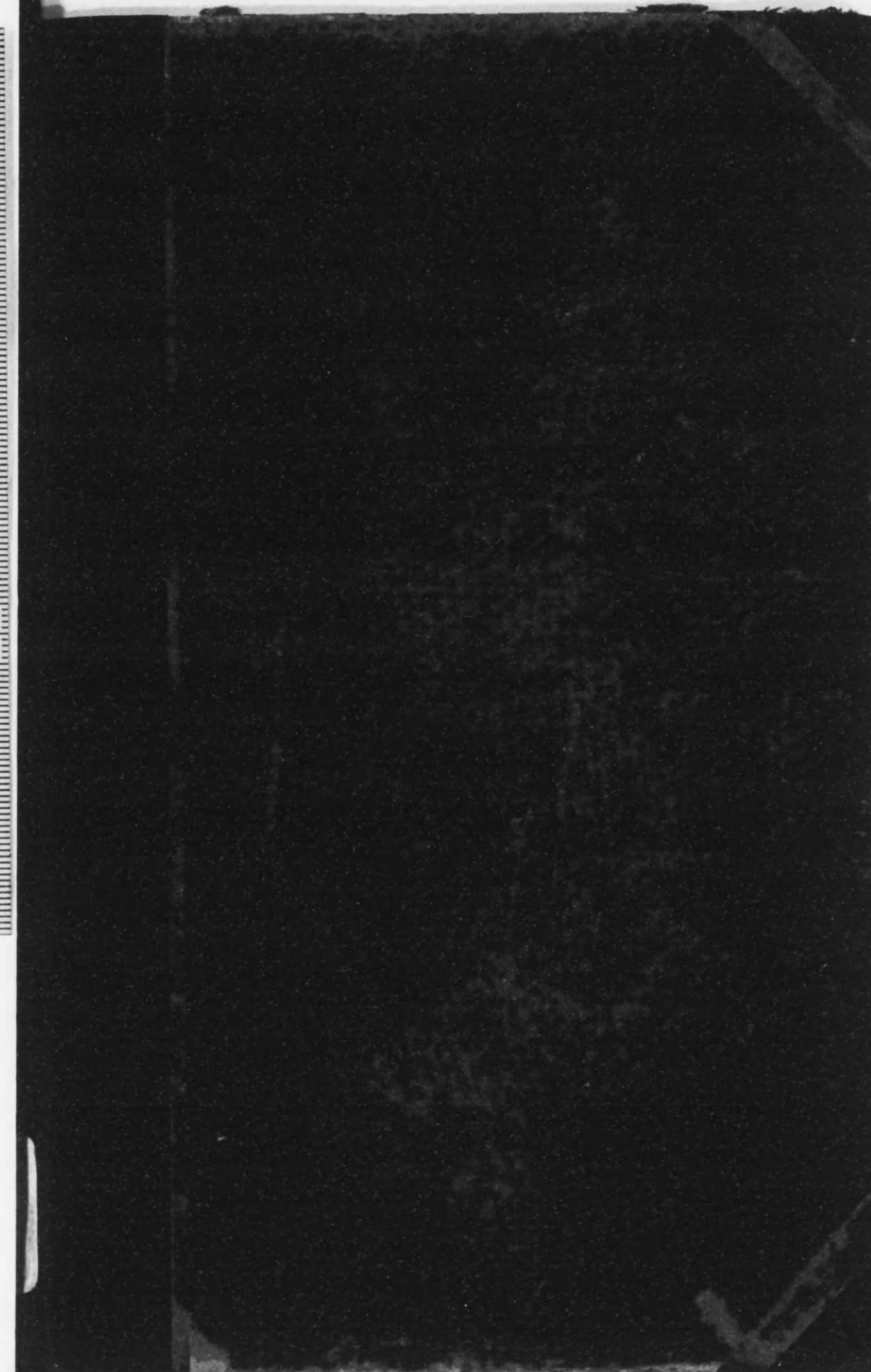
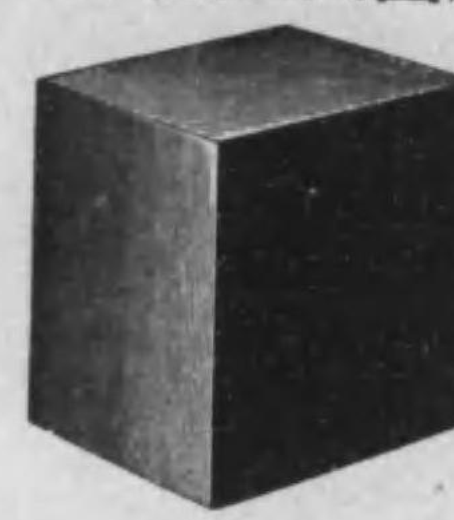
始



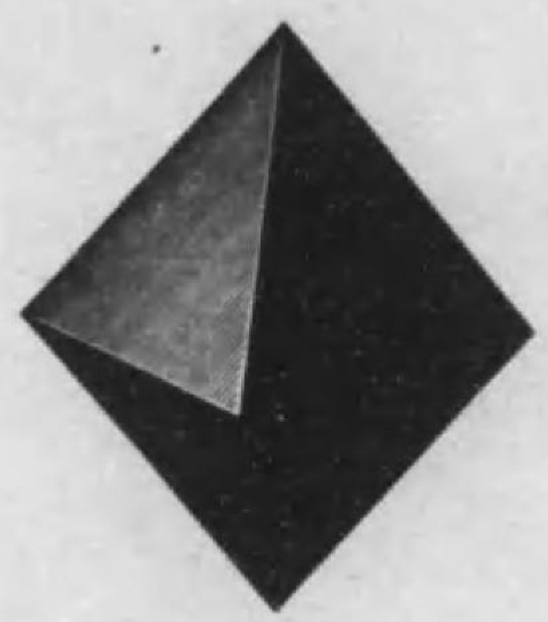
77
416

正四面體

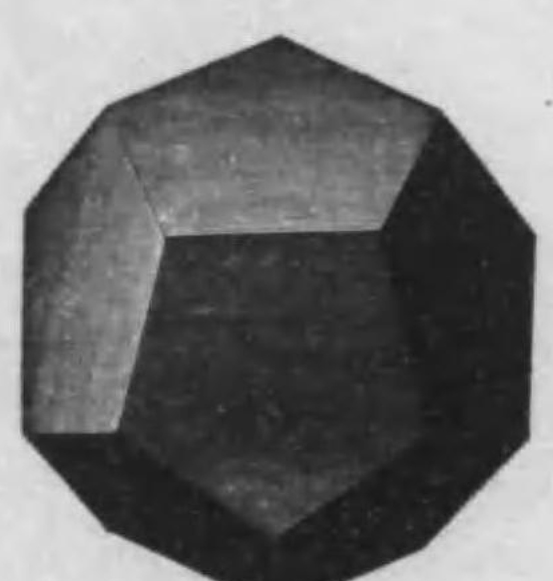
立方體[正六面體]



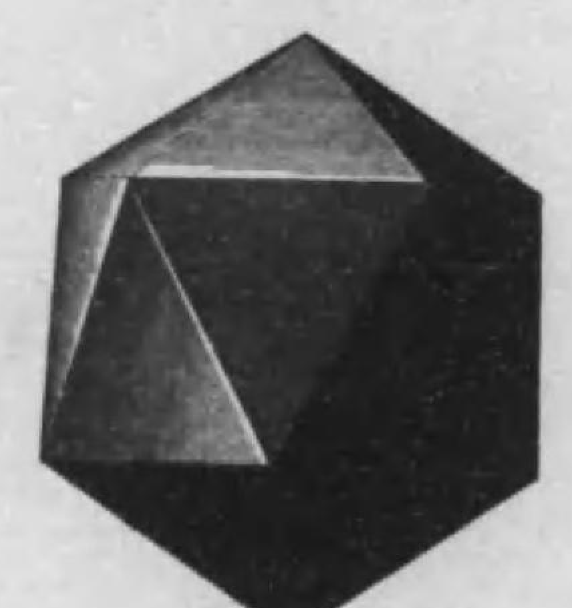
正八面體



正十二面體



正二十面體



K. NAGASAWA'S

NEW GEOMETRY.

SOLID.

新幾何學教科書

立體

長澤龜之助

編纂

發行所

日本書籍株式會社

東京

明治
38 3 1
内交

序

本書ハ中學校師範學校其ノ他中等敎育程度ノ敎科用ニ充テムガ爲ニ曩キニ編纂シタル平面幾何學ノ續キナリ. 而シテ編纂ノ大要ハ平面幾何學ノ序文ニ於テ既ニ之ヲ詳述シタルヲ以テ今又ココニ繰返スノ必要ナシト信ズ. 唯平面幾何學ノ序文ニ述ベザリシ一二ノ事項ヲ次ニ陳述ス可シ.

第一編ニ載スル所ノ空間ニ於ケル直線及ビ平面ハ立體幾何學所論ノ基本トナルガ故ニ稍詳述スルヲ要ス之ニ反シテ多面體以下ハ現今ノ中等敎育程度ニ於テハ成ルベク簡單ナルヲヨシトス. 本書コノ意見ヲ以テ立案シタリ.

正多面體ノ現存ニ關スル定理ニ二ツアリ.

[第一]正多面體ハ五種ヨリ多クアル能ハズ. 及ビ

[第二]正多面體ニハ五種アリ. コレナリ,而シテ此ノ第一ハ容易ニ證明シ得ルコトナレドモ第二ノ證明ハ中等敎育程度ノ書ニハ不適當ナリト信ジ之ヲ省ケリ[此ノ證明ハ敎員參考錄ニ述ブ可シ].

多面體ノ論中,角臺圓臺角錐圓錐角壔圓壔ハ角臺ヲ以テ最モ概濶ナルモノトシ,圓臺以下ハ其ノ特別ノ場合トシテ觀察スルコトヲ示セリ. 此ハ學生ヲ

シテ概濶ノ觀念ヲ得シムルノ基礎トナルベケレバナリ.*

平面幾何學ニ定理ノ一覽表ヲ附セシガ本書ニハ立體ノ一覽表ノ外ニ平面ノ一覽表ヲモ附添シ平面幾何學ヲ參考スルノ便ニ供セシム.

昔ヨリ行ハレ來リシ Rectangular parallelepiped 卽チ直角平行六面體ト云ヘル語ハ原語モ譯語モ長タラシキ學語ナリ,はいわーど氏ノ卓見ニ依リ氏ガ之ニ Cuboid ナル新名ヲ下セショリ英米トモ近時ノ立體幾何學ハ多ク此ノ名ヲ用フルニ至レリ余ハ曾テ氏ノ立體幾何學ヲ譯セシトキ之ヲ直角體ト譯シ爾來之ヲ用ヒテ極メテ便益ヲ感ゼリ. 本邦ニテモ速カニ直角體ナル命名ノ一般ニ採用セラレムコトヲ希望ス.

終ニ本書ヲ採用セラルル諸君ニ於テ改良ス可キ事項ヲ發見セラレタルトキハ編者ニ忠告セラレムコトヲ切望ス.

編者識ス

明治三十七年十月

---

* ど・もるがん氏曰ク "Every study of a generalization or extension gives additional power over the particular form by which the generalization is suggested." De Morgan, Formal Logic.

目次

書中ノ用語及ビ記號

1. **定義**トハ用語ノ意義ヲ確定スルコトナリ.
2. **命題**トハ一ノ事項ノ陳述ナリ.
3. **定理**トハ推理ニ依リテ其ノ眞ナルコトヲ證明セムトスル命題ナリ.
4. **系**トハ定理ヨリ直チニ推定シ得可キ命題ナリ.
5. **記號**

＋ 加.	－ 減.	＝ 等.
≡ 全等.	＞ ヨリ大.	＜ ヨリ小.
∧ 角.	R̂ 直角.	⊥ 垂線.
∥ 平行.	△ 三角形.	∴ 故ニ.

[本文ノ中ニ例ヘバ平.45款トアルハ平面幾何學45款ノ義ナリ].

立體幾何學

第一編　直線及び平面

第一節

空間に於ける直線及び平面

1. 定義 **平面**とは其の中にある任意の二點を結び付くる直線が全く其の面上にあるものを云ふ.

平面ハ四方トモ廣ガリニ制限ナシ.

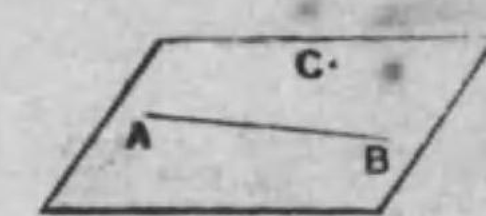
然レドモ平面ノ一部ヲ表ハスニハ通例平行四邊形ヲ以テス.

若干ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トヲ含ム平面ガ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ルトキハ是等ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トハ平面ヲ**定む**ト云フ.

注意 平面ニアラザル總テノ面ヲ**曲面**ト云フ.

2. 定理 一の直線と其の直線上にあらざる一點とは一の平面を定む.

ABヲ一直線トシ其ノ上ニアラザル一點ヲCトスレバ,
直線AB及ビ點Cハ一ノ平面ヲ定ムルコトヲ證セムトス.



證 一ノ平面ガABヲ軸トシテ廻轉スルモノト考フレバ,
其ノ平面ガC點ヲ含ム一ツノ位置アル可シ,
而シテ C點ヲ含ム位置ハ唯一ツナリ,
如何トナレバ 平面ガ廻轉スルニ當リC點ヲ含ム前後,如何ホド廻轉スルトモ他ニC點ヲ含ム位置アラザレバナリ.
故ニ 一直線ABト一點Cトハ一ノ平面ヲ定ム.

3. 系 同一直線上ニアラザル三點,
又ハ 相交ル二直線, 或ハ 平行スル二直線ハ何レモ一ノ平面ヲ定ム.

例題 1. 二ツヅツ三點ニテ交ル三直線ハ同一ノ平面上ニアリ.

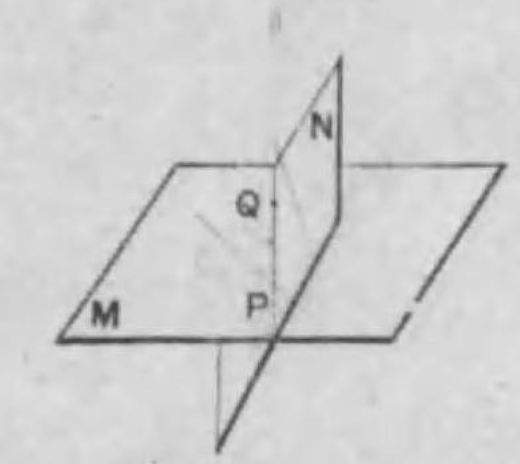
2. 四邊形ノ各邊ガ同一ノ平面上ニアラザルモノヲ作リ得ルカ.

四邊形ノ各邊ガ同一ノ平面上ニアラザルモノヲ**ごーしゅ四邊形**ト云フ.

---

4. 定理 二つの平面の交りは一直線なり.

M,Nヲ二ツノ平面トスレバ,
其ノ交リハ一直線ナルコトヲ證セムトス.



證 二ツノ平面ノ交リノ中ニ二點P,Qヲ取レバ,二點P,Qヲ過ル直線ハ全ク二ツノ平面M,N上ニアリ. [1款]
而シテ 此ノ直線外ノ點ハ二ツノ平面M,N上ニアルコトナシ. [2款]
故ニ 二點P,Qヲ過ル直線ハ二ツノ平面M,Nノ交リナリ.

5. 定義 一の直線が一の平面に出會ひ其の交點を過りて其の平面上に引ける各直線に垂線なるときは此の直線は此の平面の**垂線**なりといふ.

又此ノ直線ト平面トハ**互に垂直なり**ト云フ.

一ノ平面ニ出會ヒテ垂線ナラザル直線ヲ**斜線**ト稱ス.

垂線又ハ斜線ガ平面ニ交ル點ヲ其ノ**趾**(アシ)ト云フ.

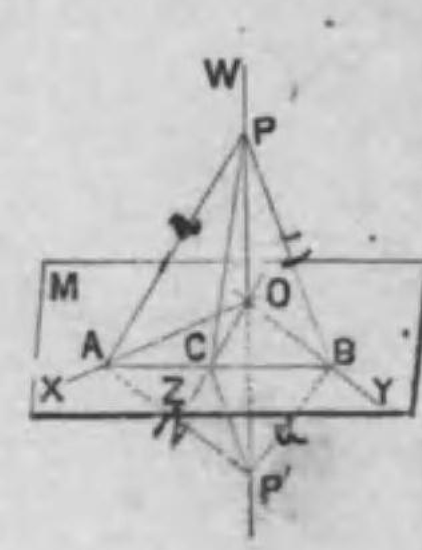
一點ヨリ一平面ニ至ル**距離**トハ其ノ點ヨリ其ノ平面ヘ引ケル垂線ノ長サヲ云フ.

例題 3. 既知二點ヲ結ブ直線ヲ垂直ニ二等分スル平面上ノ各點ハ既知二點ヨリ等距離ニアリ.

4. 三ツノ點ヲ共通ニモツ二ツノ平面ハ必ズ相合スルヤ否ヤ.

---

6. 定理 相交る二直線の各に其の交點に於ける垂線は前の二直線の定むる平面に垂線なり.



X, Y ハ O ニ於テ交ル二直線トシ, Z ハ X, Y ノ定ムル平面上ニテ O ヲ過ル任意ノ直線トス.

直線 $W \perp X$, 及ビ $W \perp Y$ ナルトキハ,

$W \perp Z$ ナルコトヲ證セムトス.

證 直線 W ニ於テ $OP = OP'$ ヲ取リ, 任意ノ横截線ヲシテ X, Y, Z ヲソレゾレ A, B, C ニ於テ截ラシ

メ, P 及ビ P' ヲ A, B, C ト結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$AP = AP'$, $BP = BP'$,　[平.100款]

而シテ　AB ハ $\triangle ABP$, $\triangle ABP'$ ニ共通ナルヲ以テ

$\triangle ABP \equiv \triangle ABP'$,　[平.54款]

故ニ　AB ヲ軸トシテ $\triangle ABP$ ヲ折返ストキハ,

CP ハ CP' ト重ナリ, 從ヒテ　$CP = CP'$.

依リテ　$PP'[W]$ ハ $CO[Z]$ ニ垂線ナリ.　[平.100款]

7. 系 一平面外ノ一點ヨリ此ノ平面ヘ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

8. 系 一平面上ノ一點ニ於テ此ノ平面ニ一ツノ垂線ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

例題 5. 一平面外ノ一點ヨリ此ノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ,

(1)　垂線ノ趾ヨリ等距離ニ趾ヲモツ斜線ハ相等シ.

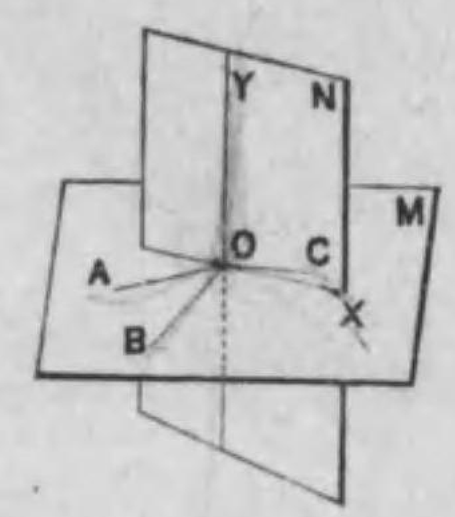
(2)　垂線ノ趾ヨリ遠キ距離ニ趾ヲモツ斜線ハ近キ距離ニ趾ヲモツ斜線ヨリ長シ.

而シテ　本題ノ逆モ亦眞ナリ.

6. 一平面上ニ於テ其ノ平面外ノ一點ヨリ引ケル或等長ノ斜線ノ趾ノ軌跡ハ如何.

7. 一平面外ノ一點ヨリ此ノ平面ヘ引ケル直線ノ中ニテ垂線ハ最短ナリ.

9. 定理 一直線上の同一點に於て之に引ける總ての垂線は此の直線に垂直なる平面上にあり。



OY⊥OA, OY⊥OB 及ビ OY⊥OC トスルトキハ, OA,OB,OC ハ OY ニ垂直ナル一平面上ニアルコトヲ證セムトス.

證 OA 及ビ OB ノ定ムル平面 M ハ OY ニ垂直ナリ. [6款]

故ニ 平面 M ガ OC ヲ含ムコトヲ證スレバヨシ.

若シ 平面 M ガ OC ヲ含マザルモノトセバ, OY 及ビ OC ノ定ムル平面 N ト平面 M トノ交リヲ OX トセヨ.

然ルトキハ OY⊥OX [6款]

ニシテ又 OY⊥OC, [假設]

即チ 一平面上ニ於テ一直線上ノ一點ヨリ之ニ二ツノ垂線ヲ引キ得ルニ至ル,

而シテ 此ハ背理ナリ. [平.I.18題]

故ニ 平面 M ハ OC ヲ含ム.

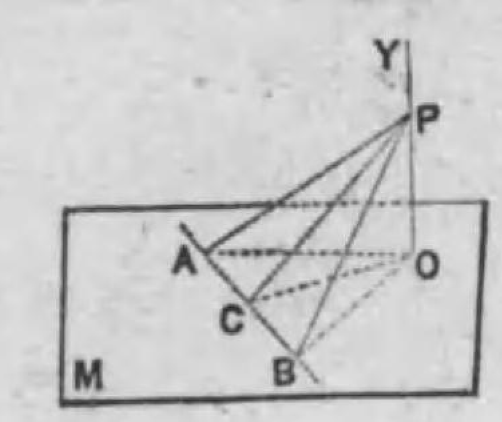
10. 系 一直線上ノ一點ヲ過リテ之ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル

例題 8. 直角ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキハ他ノ一邊ハ軸ニ垂直ナル平面ヲ畫クコトヲ證セヨ.

9. 一直線外ノ一點ヲ過リテ之ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

10. 床ノ面ヨリ高サ1丈ノ天井ノ一點ノ直下ニ當ル一點ヲバ1丈4尺5寸ノ長サノ棒ヲ天井ヨリ吊シテ指示セヨ.

11. YO ハ平面 M ニ垂線ニシテ OC ハ M ノ上ノ任意ノ直線 AB ニ垂線ナルトキ C ヲ YO ノ上ノ任意ノ點 P ト結ビ付クレバ CP⊥AB ナルコトヲ證セヨ.



[AC=BC ニ取リ PA, PB ヲ結ビ付ケテ證明シ得可シ].*

12. 前題ノ圖ニ於テ AB ハ平面 PCO ニ垂線ナリ.

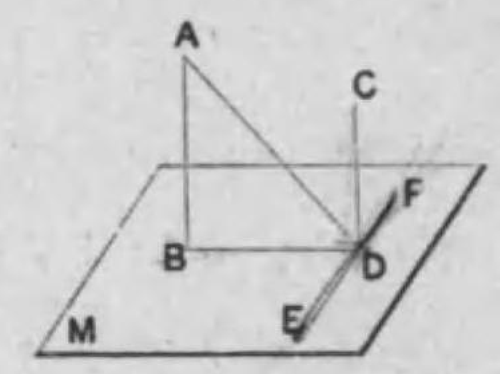
* 又ぴたごらすノ定理[平. 133 款]ヲ用ヒテ之ヲ證明シ得可シ.

11. 定理 同一の平面に垂直なる二直線は平行す.

AB,CD ハ平面 M ニ垂直ナル二直線トスルトキハ,

$AB \parallel CD$

ナルコトヲ證セムトス.



證 BD,AD ヲ結ビ付ケ, D ヲ過リ平面 M ノ上ニ BD ニ垂直ニ直線 EF ヲ引ケ.

然ルトキハ　$CD \perp EF$,　[5款]

$AD \perp EF$,　[11題]

$BD \perp EF$,　[作圖]

ナルヲ以テ　CD, AD, BD ハ同一ノ平面上ニアリ.

故ニ　AB, CD ハ同一ノ平面上ニアリ.

然ルニ　AB, CD ハ何レモ BD ニ垂線ナルヲ以テ,　[5款]

$AB \parallel CD$.　[平.27款]

12. 系 二平行直線ノ一ガ一平面ニ垂直ナルトキハ他モ亦同ジ平面ニ垂直ナリ.

例題 13. 同一ノ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行スルコトヲ證セヨ.

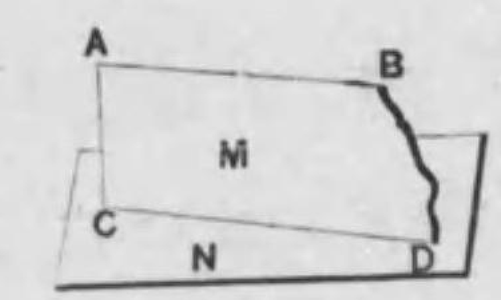
---

13. 定義 一直線を如何程引き延ばすとも一平面に出會はざるときは此の直線は此の平面に**平行す**といふ.

14. 定理 二平行直線の一は他を含む各平面に平行す.

$AB \parallel CD$ トスルトキハ,

AB ハ CD ヲ含ム平面 N ニ平行スルコトヲ證セムトス.



證 AB 及ビ CD ハ一ノ平面 M ヲ定ム　[3款]

故ニ　AB ガ平面 N ニ出會フナラバ,又必ズ M ト N トノ交リ CD ニ出會ハザル可カラズ.　[何故カ]

然ルニ　$AB \parallel CD$.　[假設]

此ハ背理ナリ.

故ニ　直線 AB ハ平面 N ニ平行ス.　[13款]

15. 系 二平面ノ交リニ平行スル直線ハ其ノ各平面ニ平行ス.

16. 系 任意ノ一直線ヲ過リテ之ニ交ラザル他ノ任意ノ直線ニ平行スル一ノ平面ヲ作リ得可シ

例題 14. 一點ヲ過リテ任意ノ二直線ニ平行スル平面ヲ作リ得可シ.

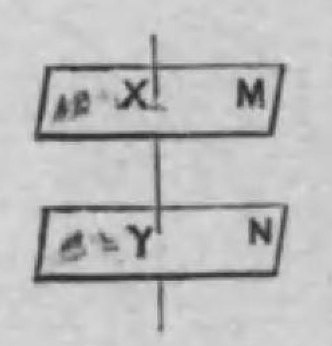
15. 一直線ガ一ノ平面ニ平行スルトキハ此ノ直線ヲ含ム任意ノ平面ト前ノ平面トノ交リハ前ノ直線ニ平行ス．

16. 一直線ガ一ノ平面ニ平行スルトキハ此ノ平面上ノ一點ヲ過リテ此ノ直線ニ平行スル直線ハ全ク此ノ平面上ニアリ．

---

17. 定義 二つの平面が平行なりといへるは之を何れの方向に何程延長するも出會はざるときを云ふ．

18. 定理 同一の直線に垂直なる二平面は平行す．



二ツノ平面M,Nハ直線XYニソレゾレX,Y點ニ於テ垂直ナルトキハ $M \parallel N$ナルコトヲ證セムトス．

證 若シM及ビNガ出會フ[例ヘバPニ於テ]ナラバ，Pヲ過リテXYニ垂直ナル二平面アルニ至ラム，コレ背理ナリ． [9題]

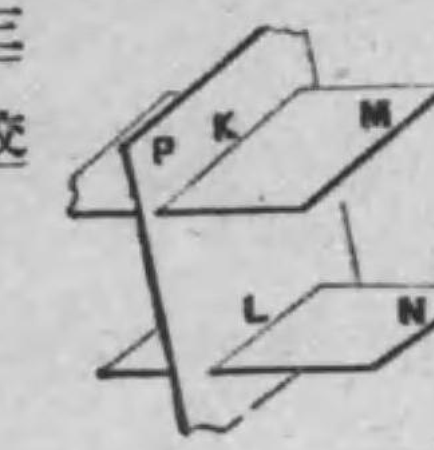
故ニ $M \parallel N$.

例題 17. 相交ル二直線ガ何レモ一ノ平面ニ平行スルトキハ是等ノ二直線ノ定ムル平面ハ前ノ

平面ニ平行スルコトヲ證セヨ．

---

19. 定理 平行する二平面と第三の平面との交りは平行直線なり．



平行スル二平面M,Nヲ第三ノ平面Pニテ截ルトキ其ノ交リヲK,Lトスレバ，

$K \parallel L$

ナルコトヲ證セムトス．

證 K,Lハ同一ノ平面Pノ上ニアリ．

而シテ K,Lハ如何程引キ延バスモ出會フコトナシ．如何トナレバ K,Lヲ含ム平面M,Nハ平行ナレバナリ． [假設]

故ニ $K \parallel L$ [平.24款]

20. 系 平行スル二平面ノ間ニ夾マレタル平行直線ハ長サ相等シ．

21. 定義 平行する二平面の**距離**とは其の間に夾まれたる共通の垂線の長さを云ふ．

從ヒテ 平行スル二平面ハ各所等距離ナリ．

例題 18. 平行スル二平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ノ一ニモ亦垂直ナリ.

19. 一點ヲ過リテ一平面ニ平行スル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

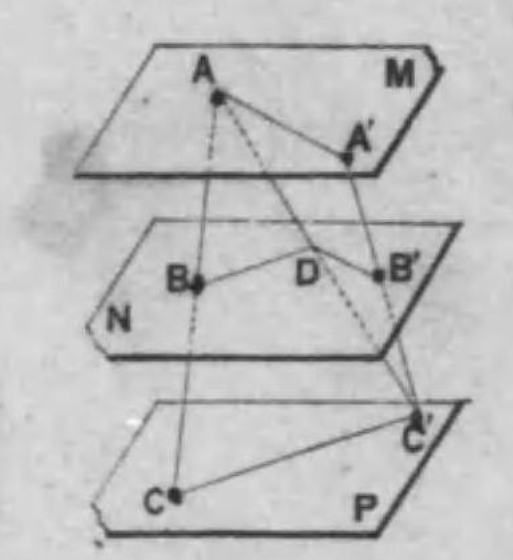
20. 平行スル二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ如何.

21. 平行スル二平面ヨリ等距離ニシテ又二點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ如何.

22. 同一ノ平面上ニアラザル二角ノ各邊ガソレゾレ平行ナルトキハ此ノ二角ハ相等シキカ或ハ補角ナリ.

---

22. 定理 平行せる三つの平面にて截らるる二直線の對應せる分線は比例をなす.



ABC, A'B'C'ハ平行セル三ツノ平面M,N,PニテソレゾレA,B,C, A',B',C'點ニ於テ截ラルル二直線トスルトキハ,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

ナルコトヲ證セムトス.

證 AC'ヲ結ビ付ケ,其ノ平面Nニ交ル點ヲDトスレバ

$BD \parallel CC'$, [19款]

$DB' \parallel AA'$,

故ニ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC'}$, [平. IV. 7題]

$\frac{AD}{DC'}=\frac{A'B'}{B'C'}$,

故ニ $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.

23. 系 平行セル數多ノ平面ニテ截ラルル二直線ノ對應セル分線ハ比例ヲナス.

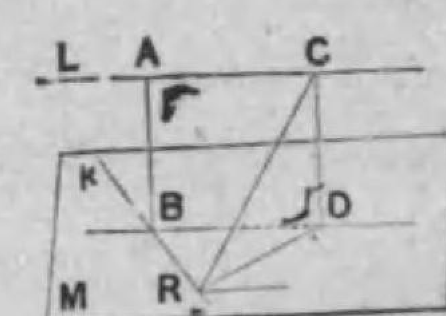
例題 23. 22款ノ定理ニ於テA'ヨリABCニ平行スル直線ヲ引キテ之ヲ證セヨ.

24. 22款ノ定理ノ圖ニ於テAB=6寸,BC=8寸ニシテA'B'C'=12寸ナルトキA'B'及ビB'C'ノ長サヲ求メヨ.

25. 同一ノ點ヨリ發スル數多ノ直線ガ平行セル二ツノ平面ニテ截ラルルトキ其ノ對應セル分線ハ比例ヲナス.

---

24. 定理 同一の平面上にあらざる二直線の各に垂直なる直線は一つあり而して唯一つに限る.



K, L ヲ同一ノ平面上ニアラザル二直線トスレバ,

K, L ノ各ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證セムトス,

證 K ヲ過リテ L ニ平行スル平面ヲ作リ, [16 款]
L ノ上ノ任意ノ點 C ヨリ平面 M ヘ垂線 CD ヲ引キ L 及ビ CD ノ定ムル平面ガ K ニ交ル點ヲ B トシ, B ヨリ DC ニ平行スル直線 BA ヲ引キ A ニ於テ L ニ交ラシムレバ,

AB ハ平面 M ニ垂線ナリ, [12 款]

故ニ　AB ⊥ K, [5 款]

而シテ　BD // AC [15 題]

ニシテ　BA // DC [作圖]

ナルユヱ　$\hat{A}=\hat{D}$ [平.60 款]

$=\hat{R}$ [作圖]

故ニ　AB ハ K 及ビ L ニ垂直ナル一ツノ直線ナリ.

次ニ　AB ノ外ニ K 及ビ L ニ垂直ナル直線ナキコトヲ證セムトス.

若シ AB ノ外ニ K 及ビ L ニ垂直ナル直線 CR アリトセヨ.

然ルトキハ CR ハ R ヲ過リ L ニ平行スル直線ニ垂線ナルヲ以テ平面 M ニ垂線ナリ. [6 款]

然ルニ C ヨリ平面 M ヘ引ケル垂線ハ L 及ビ AB ノ定ムル平面ノ中ニアルヲ以テ其ノ趾ハ BD ノ上ニアリ. [11 款]

故ニ　CR 及ビ CD ガ同時ニ C 點ヨリ平面 M ヘ垂線ナルニ至ル,而シテ此ハ背理ナリ. [8 款]

故ニ　K 及ビ L ニ垂直ナル直線ハ AB ノ外ニナシ.

例題 26. 24 款ノ定理ニ於テ AB ハ K 及ビ L ノ間ニ引キ得ル最短線ナルコトヲ證セヨ.

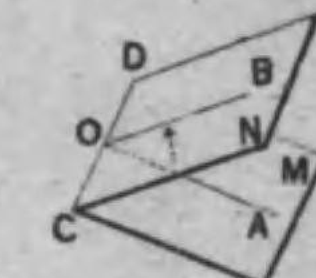
第二節

二面角 及び 多面角

25. 定義 一直線を過る二平面は**二面角**をなすといふ.

二平面ノ過ル一直線ヲ二面角ノ**稜**, 其ノ二平面ヲ二面角ノ**面**ト云フ.

例ヘバ直線CDヲ過ル二平面M,Nハ二面角ヲナシ,而シテ二面角ノ大小ハ其ノ稜ニ垂直ニ各面ノ上ニ引ケル二直線AO,BOノ間ノ平面角ノ大小ニ從フ. 此ノ角AOBヲ二面角 $\widehat{M,N}$ ノ**平面角**ト稱ス.



次ノ數條ハ容易ニ了解シ得可シ.

I. 二面角ノ平面角ノ平面ハ其ノ二面角ノ稜ニ垂直ナリ.

II. 逆ニ 二面角ノ稜ニ垂直ニ作レル平面ト其ノ二面角ノ面トノ交リハ二面角ノ平面角ヲ作ス.

III. 二ツノ二面角ハ全ク相合セシメ得ルトキ,或ハ其ノ平面角ガ相等シキトキ,相等シ.

26. 定義 二面角の平面角が直角なるときは之を**直二面角**といひ其の二つの平面は**互に垂直**なりといふ.

銳角,鈍角,餘角,補角,對頂角ナル語ハ二面角ニモ亦適用セラル. 而シテ二面角ノ多クノ性質ノ證明ハ平面角ノ對應セル性質ノ證明ト同樣ナリ.

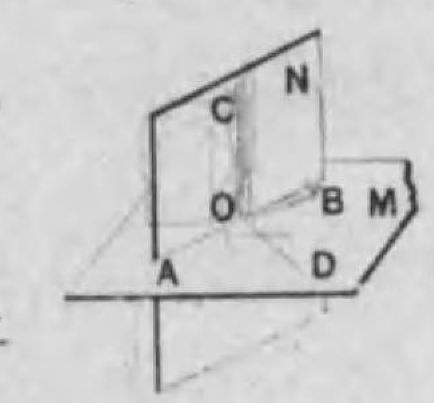
例ヘバ其ノ一二ヲ擧グレバ次ノ如シ.

對頂二面角ハ相等シ.

二ツノ二面角ノ面ガソレゾレ平行,又ハ垂直ナルトキハ是等ノ二面角ハ相等シキカ又ハ補角ナリ.

27. 定理 一の平面に垂直なる直線を過る總ての平面は前の平面に垂直なり.

直線OCハ平面Mニ垂直ナルトキハ



OCヲ過ル任意ノ平面NハMニ垂直ナルコトヲ證セムトス.

證 平面M及ビNノ交リヲABトシ, COノ趾Oヲ過リ平面Mニ於テABニ垂線ODヲ引クトキハ, COハ平面Mニ垂直ナルユヱ, [假設]

CO⊥AB 及ビ CO⊥OD, [5款]

故ニ $\widehat{COD}$ ハ二面角 $\widehat{M,N}$ ノ平面角ナリ. [25款]

然ルニ $\widehat{COD}$ ハ直角ナリ,

故ニ 二面角 $\widehat{M,N}$ ハ直角ナリ. [26款]

依リテ 平面NハMニ垂直ナリ.

28. 系 二面角ノ稜ニ垂直ナル平面ハ其ノ二面ニ垂直ナリ.

29. 系 若シ三ツノ直線 OA,OC,OD ガ同一ノ點 O ニ於テ互ニ垂直ナルトキハ各直線ハ他ノ二直線ノ定ムル平面ニ垂直ニシテ,三ツノ直線ヲ二ツヅツ取リテ定メラレタル三ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ.

例題 27. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ其ノ一平面上ニアリテ二平面ノ交リニ垂直ナル直線ハ他ノ一平面ニ垂直ナリ.

28. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ其ノ交リノ任意ノ點ニ於テ其ノ一平面ニ垂直ナル直線ハ他ノ一平面上ニアリ.

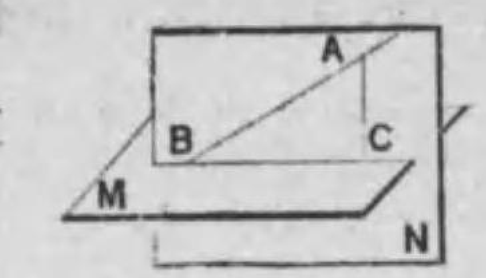
29. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ其ノ一ノ上ノ任意ノ點ヨリ他ノ一ニ引ケル垂線ハ前ノ平面上ニアリ.

---

30. 定理 一つの平面の斜線を過りて其の平面に垂直なる一つの平面を作ることを得,而して唯一つに限る.

AB ハ平面 M ノ斜線トスルトキハ,

AB ヲ過リテ M ニ垂直ナル平面一ツヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證セムトス.



證 斜線 AB 上ノ任意ノ點 A ヨリ平面 M ヘ垂線 AC ヲ引キ,AB 及ビ AC ノ定ムル平面ヲ N トス.

平面 N ハ平面 M ニ垂直ナリ. [27 款]

又 AB ヲ過リテ M ニ垂直ナル平面ハ垂線 AC ヲ含ム可シ. [28 題]

而シテ 相交ル二直線ハ一ノ平面ヲ定ムルガユヱニ, [3 款]

N ハ AB ヲ過リテ M ニ垂直ナル唯一ツノ平面ナリ.

31. 定義 一點より一平面へ引ける垂線の趾を此の平面上に該點の**射影**といふ.

一平面上ニ一直線ノ **射影** ハ該直線中ノ總テノ點ノ射影ノ軌跡ナリ.

32. 系 一ノ平面上ニ一ノ直線ノ射影ハ一ノ直線ナリ.

33. 定義 一直線が一平面となす角は其の直線が其の平面上に其の射影となす角を云ふ.

例題 30. 相交ル二平面ガ何レモ第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ前ノ二平面ノ交リハ亦第三ノ平面ニ垂直ナリ.

31. 相交ル二平面ノ各〻ニ垂直ナル平面ハ亦前ノ二平面ノ交リニ垂直ナリ.

32. 一平面 P ガ互ニ垂直ナル二平面 M, N ノ各〻ニ垂直ナルトキハ是等ノ平面ノ任意ノ二ツノ交リハ第三ノ平面ニ垂直ナリ, 而シテ三ツノ交リノ各〻ハ他ノ二ツノ交リニ垂直ナリ. [29款ト比較セヨ]

33. 一ノ平面ガ平行スル二平面ヲ截ルトキハ相等シキ二面角ハ何レト何レナルカ.

34. 二面角ヲ二等分スル平面上ノ各點ハ二面角ノ二ツノ面ヨリ等距離ニアリ.

35. 一直線ト一平面トガ同一ノ平面ニ垂直ナルトキハ此ノ直線ト平面トハ平行ス.

---

34. 定義 三つ以上の平面が同一の點に出會ふときは**多面角**或は**立體角**をなすといふ.

多面角ハ其ノ面ノ數ニ從ヒ **三面角, 四面角, 五面角,** 等ト命名セラル.

多面角ヲナス各平面ノ出會フ所ノ一點ヲ多面角

ノ **頂點,** 各平面ノ二ツヅツノ交リヲ多面角ノ **稜,** 稜ト稜トノ間ニアル平面ノ部分ヲ多面角ノ **面,** 稜ト稜トノ間ノ平面角ヲ多面角ノ **面角** ト云フ.

多面角ガ全ク其ノ各面ノ一方ニアルトキハ之ヲ**凸多面角**ト云フ.

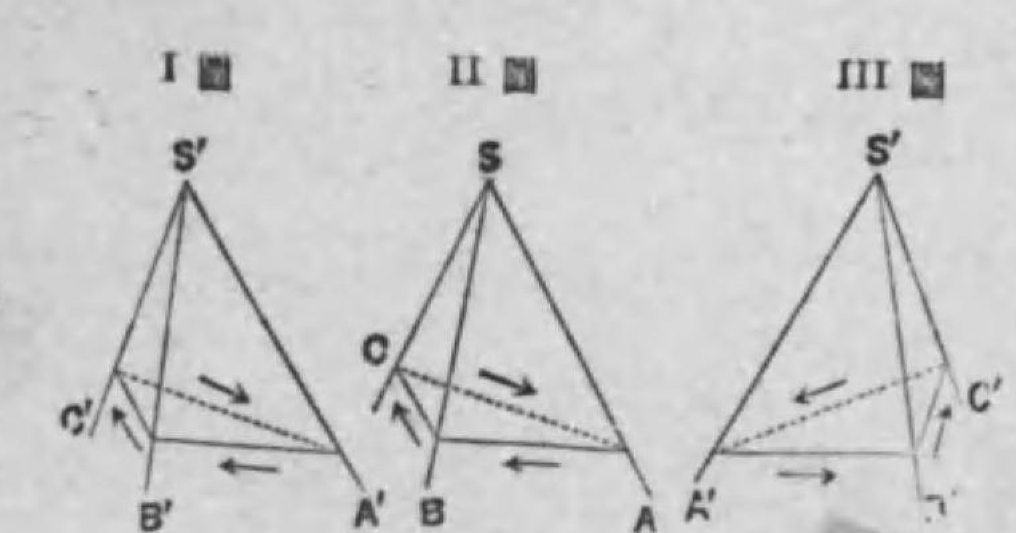
35. 二ツノ多面角ニ於テ其ノ各〻ノ面角, 及ビ二面角ガソレゾレ同シ順ニ相等シキトキハ二ツノ多面角ハ全ク相合セシメ得ルコト明カナリ. 故ニ

此の二つの多面角は**相等し.**

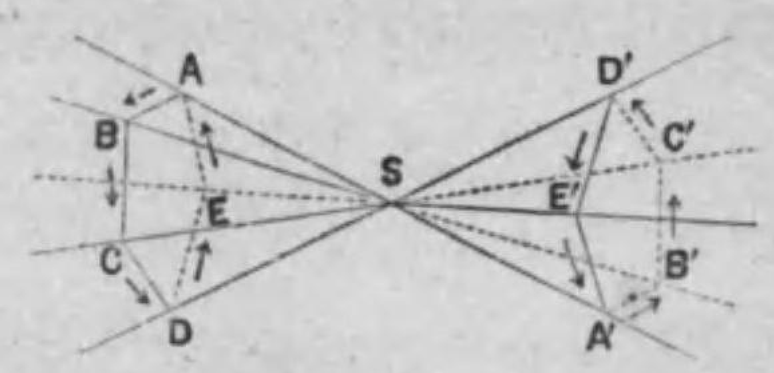
36. 二ツノ多面角ニ於テ其ノ各〻ノ面角, 及ビ二面角ガソレゾレ逆ノ順ニ相等シキトキハ二ツノ多面角ハ相合セシムルコト能ハズ.

定義 斯の如き二つの多面角は互に**對稱**なりといふ.

I圖トII圖トハ相等シキ三面角, II圖トIII圖トハ對稱三面角ナリ.



例ヘバ一ノ多面角 S-ABCDE ノ各〻ノ稜ハヲバ頂點

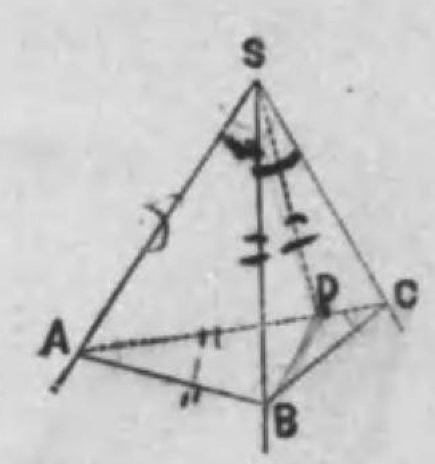


ヲ越ヘテ引キ延バシ又一ノ多面角S-A'B'C'D'E' ヲ作ルトキ斯ノ如キ二ツノ多面角ヲ**對頂多面角**ト云ヒ對頂多面角ハ概シテ對稱ナルコト明カナリ.

例題 36. 對頂多面角ニ於テ相等シキモノアルカ.

---

37. 定理 三面角に於て其の面角の任意の二つの和は他の一つの面角より大なり.



S-ABC ヲ三面角トスレバ, 其ノ面角 $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSA}$ ノ中, 何レノ二ツノ和モ他ノ一ツヨリ大ナルコトヲ證セムトス.

證 $\widehat{ASC}$ ハ他ノ二ツノ面角ノ何レヨリモ大ナルモノトセバ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASC}$ ナルコトヲ證スレバ可ナリ.*

* 此ノ他ノ場合ハ自ラ明カナルユエ證明ヲ要セズ.

平面ASCニ於テ一ノ直線SDヲ引キ,

$$\widehat{ASD}=\widehat{ASB}$$

ナラシメ, $SB=SD$

ヲ取リ, D點ヲ過リテ任意ノ直線ADCヲ引キ,

AB, BCヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ △ASB, △ASD ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} SB=SD \\ SA\text{ハ共通} \\ \widehat{ASB}=\widehat{ASD} \end{array}\right\}$$

[作圖] (SB=SD)
[作圖] ($\widehat{ASB}=\widehat{ASD}$)

故ニ $AB=AD$. [平.45款]

然ルニ $AB+BC>AD+DC$,

故ニ $BC>DC$.

依リテ △CSB, △CSD ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} SB=SD \\ SC\text{ハ共通} \\ BC>DC \end{array}\right\}$$

故ニ $\widehat{BSC}>\widehat{CSD}$, [平.57款]

故ニ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASD}+\widehat{CSD}$

即チ $>\widehat{ASC}$.

例題 37. 三面角ニ於テ其ノ面角ノ任意ノ二ツノ差ハ他ノ一ツヨリ大ナリ.

小

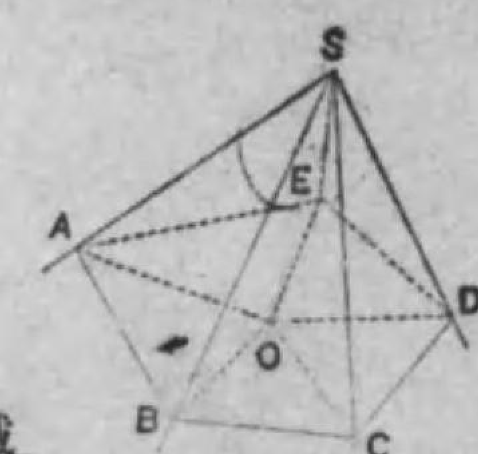
38. 三ツノ平面ガ相交リテ三面角ヲナサザルコトアルカ.

38. 定理 凸多面角に於て各の面角の和は四直角より小なり.

S-ABCDE ヲ凸多面角トスレバ,

*$\Sigma A\widehat{S}B < 4\mathrm{R}$

ナルコトヲ證セムトス.



證 多面角ヲ一ノ平面ニテ截リ其ノ截口ヲ ABCDE トシ,其ノ面內ニ任意ノ一點 O ヲ取リ,之ヲ A,B,C, … ニ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ

$\triangle SAB$ ノ各角ノ和 $=$ $\triangle OAB$ ノ各角ノ和, [何故ゾ]

故ニ $\Sigma(\triangle SAB$ ノ各角ノ和$) = \Sigma(\triangle OAB$ ノ各角ノ和$)$,

即チ $\Sigma A\widehat{S}B + \Sigma(S\widehat{B}A + S\widehat{B}C)$

$= \Sigma A\widehat{O}B + \Sigma A\widehat{B}C$.

然ルニ $S\widehat{B}A + S\widehat{B}C > A\widehat{B}C$, [37 款]

故ニ $\Sigma(S\widehat{B}A + S\widehat{B}C) > \Sigma A\widehat{B}C$.

依リテ $\Sigma A\widehat{S}B < \Sigma A\widehat{O}B$,

* $\Sigma A\widehat{S}B$ ハ $A\widehat{S}B + B\widehat{S}C + \cdots + E\widehat{S}A$ ノ略記ナリ.

餘ハ之ニ倣ヘ.

然ルニ $\Sigma A\widehat{O}B = 4\hat{\mathrm{R}}$ [何故カ]

故ニ $\Sigma A\widehat{S}B < 4\hat{\mathrm{R}}$.

例題 39. 三面角ノ三ツノ稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ如何.

40. 三面角ノ三ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ同一ノ直線ニ於テ交ル.

41. 二ツノ三面角ニ於テ其ノ三ツノ面角ガソレゾレ同シ順ニ相等シキトキハ是等ノ三面角ハ相等シ.

若シ逆ノ順ニ相等シキトキハ如何.

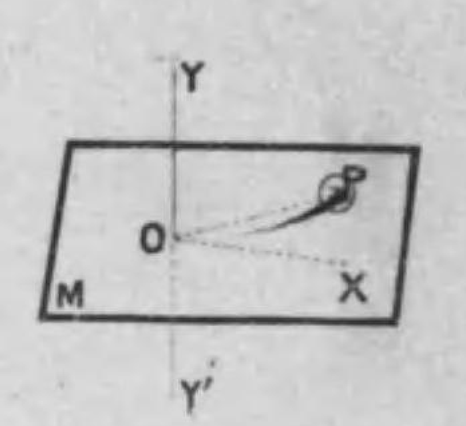
第三節

作圖題

[平面幾何學ニ於テハ一ノ直線ヲ引キ且コレヲ引キ延バスコトヲ作圖ノ公法トシテ許容スル如ク,立體幾何學ニ於テハ一ノ平面ヲ畫キ且コレヲ,一直線ヲ軸トシテ廻轉スルコトヲ作圖ノ公法トシテ許容スルモノトス].*

39. 作圖題 既知一直線外の既知一點を過りて之に垂直なる平面を作ること.

YY′ヲ既知直線,Pヲ其ノ外ノ既知一點トス.



作圖法 PヨリYY′ニ垂線POヲ引キ, [平.105款]

OヨリYY′ニ垂直ナル他ノ直線OXヲ引ケ, [平.105款注意]

然ルトキハ　OP, OXノ定ムル平面Mハ所要ノ平面ナリ.

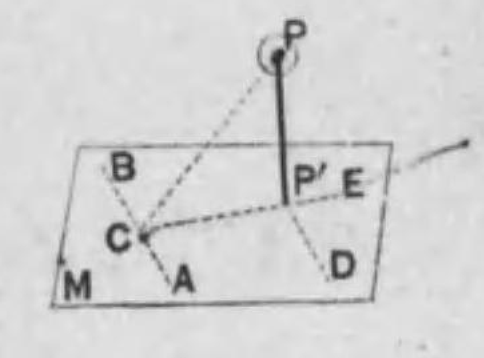
---

* 又平面幾何學ニ於テ圓ヲ畫クコトヲ作圖ノ公

證 6款ヨリ分明ナル可シ.

40. 作圖題 既知平面外の既知一點より之に垂線を作ること.

Mヲ既知平面,Pヲ其ノ外ノ既知一點トス.



作圖法 平面Mノ上ノ任意ノ直線ABニ垂線PCヲ引キ, [平.105款]

平面ニ於テABニ垂線CEヲ引キ, [平.105款注意]

CEニ垂線PP′ヲ引ケ. [平.105款]

然ルトキハPP′ハ所要ノ垂線ナリ.

證 CAハ平面CPP′ニ垂線ナリ, [6款]

故ニ　CAニ平行スルP′Dヲ引クトキハ,

P′Dハ平面CPP′ニ垂直ナリ, [12款]

故ニ　$D\widehat{P'}P$ハ直角ナリ, [何故カ]

然ルニ　P′Dハ平面Mノ上ニアリ, [平.24款]

而シテ　$C\widehat{P'}P$ハ直角ナリ, [作圖]

故ニ　PP′ハ平面Mニ垂線ナリ. [6款]

法トシテ許容スル如ク,立體幾何學ニ於テハ後ニ說ク所ノ球,圓壔,圓錐ヲ畫クコトヲ作圖ノ公法トシテ許容スルモノトス.

例題 42. 既知一直線ノ上ノ既知一點ヲ過リテ之ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

43. 既知平面上ノ既知一點ヨリ之ニ垂線ヲ作レ.

44. 既知一點ヲ過リ既知一平面ニ平行スル平面ヲ作レ.

45. 相交ラザル二直線ノ外ノ一點ヲ過リテ此ノ二直線ニ平行スル平面ヲ作レ.

第二編　多面體

第一節

多面體

41. **定義**　若干の平面にて界せられたる立體を**多面體**といふ.

多面體ハ其ノ面ノ數ニ從ヒ**四面體**,**五面體**,**六面體**,等ト命名セラル.

多面體ヲ界スル平面ノ交リヲ多面體ノ**稜**,稜ノ交點ヲ多面體ノ**頂點**ト云ヒ,稜ニテ界セラレタル平面ノ部分ヲ多面體ノ**面**ト云フ.

42. **定義**　多面體に於て總ての面が相等しき正多角形にして總ての多面角が相等しければ之を**正多面體**と云ふ.

43. **定理**　正多面體は五種より多くある能はず.

證　一ノ多面角ヲ作スニハ少ナクモ三ツノ面ガ一點ニ出會ハザル可カラズ.

而シテ　多面角ノ各ノ面角ノ和ハ $4\hat{R}$ ヨリ小ナリ.

サテ　正多角形ノ邊數ヲ n トスレバ,

其ノ一角ノ度數 a ハ $\dfrac{(2n-4)\times 90^\circ}{n}$.　[平. 42 款]

(1)　$n=3$ ナルトキハ $a=60^\circ$,

$\therefore\ 3a=180^\circ,\ 4a=240^\circ,\ 5a=300^\circ,\ 6a=360^\circ.$

故ニ　3, 4, 5 個ノ正三角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作リ得可シ. 然レドモ 6 個以上ノ正三角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(2)　$n=4$ ナルトキハ　$a=90^\circ$,

$\therefore\ 3a=270^\circ,\ 4a=360^\circ.$

故ニ　3 個ノ正方形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作リ得可シ. 然レドモ 4 個以上ノ正方形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(3)　$n=5$ ナルトキハ　$a=108^\circ$,

$\therefore\ 3a=324^\circ,\ 4a>360^\circ.$

故ニ　3 個ノ正五角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作リ得可シ. 然レドモ 4 個以上ノ正五角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(4)　$n=6$ ナルトキハ　$a=120^\circ,\ \therefore\ 3a=360^\circ.$

故ニ　正六角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

サテ $\dfrac{(2n-4)\times 90^\circ}{n}=\left(2-\dfrac{4}{n}\right)\times 90^\circ$ ナルヲ以テ此ハ

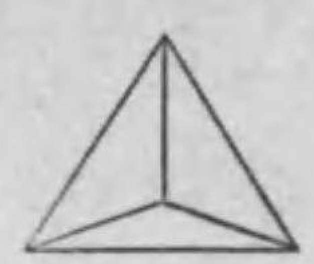
ルガ増スニ從ヒテ増大スルコト明カナリ.

故ニ　七邊以上ノ正多角形ヲ以テ一ノ多面角ヲ作ル能ハザルコトモ亦明カナリ.

故ニ　正多面體ハ五種[其ノ立體角ガ3,4,5個ノ正三角形ヨリ成ルモノ,3個ノ正方形ヨリ成ルモノ,3個ノ正五角形ヨリ成ルモノ]ヨリ多クアルコトナシ.*

注意　五種ノ正多面體ヲ列擧スレバ次ノ如シ.

正四面體

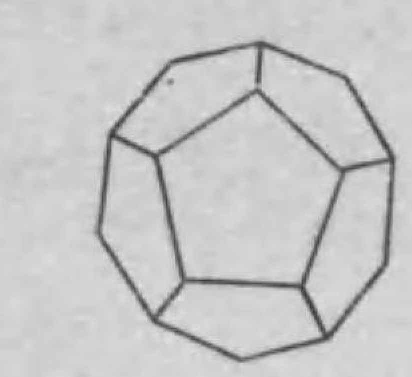


正六面體[立方體]

正八面體

*　果シテ五種ノ正多面體ガ成リ立ツコトノ證明ハ較〻繁雜ナルト,サホド必要ナラザルトノ二ツノ理由ニ依リ茲ニ之ヲ省ク.　五種ノ正多面體ハぷらとんノ立體ト稱セラル,ソハ是等ノ立體ハぴたごらす[*Pythagoras*,西暦紀元前約580年生,約501年死]一派ノ人ニ知ラレシカドモ專ラぷらとん[*Platon*,西暦紀元前約429年生,約348年死]ノ學校ニテ教授セラレタルヲ以テナリ.　五種ノ多面體ノ中,簡單ナル三ツ[正四面體,正六面體(立方體),正八面體]ハ多少ノ變形ヲ以テ屢〻結晶學中ニ用ヒラル.

正十二面體



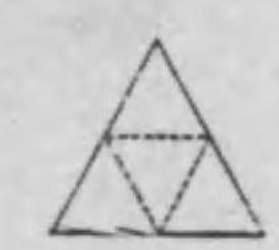
正二十面體

例題 1.　正四面體ノ高サノ上ノ正方形ノ三倍ハ其ノ稜ノ上ノ正方形ノ二倍ニ等シ.

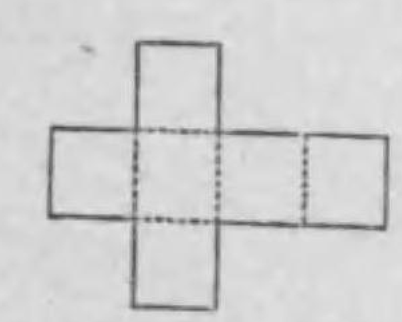
多面體ノ**高さ**トハ**底**トシテ取リタル面ヘ多面

五ツノ正多面體ヲ厚紙ニテ作ラムニハ,先ヅ下圖ノ如ク截開シ斷續線ノ所ヲ篦ニテ筋付ケ之ニ沿ヒテ各形ヲ折リ曲ゲ繼目ヲ薄紙ニテ貼レバヨシ.

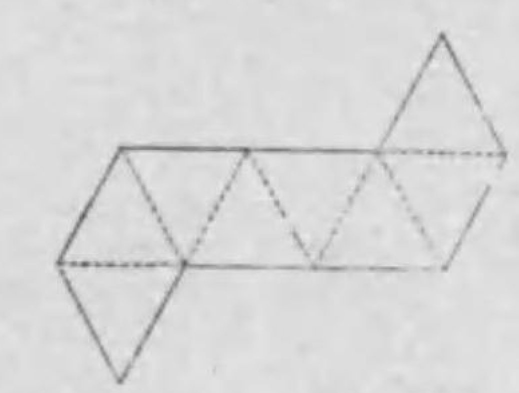
正四面體



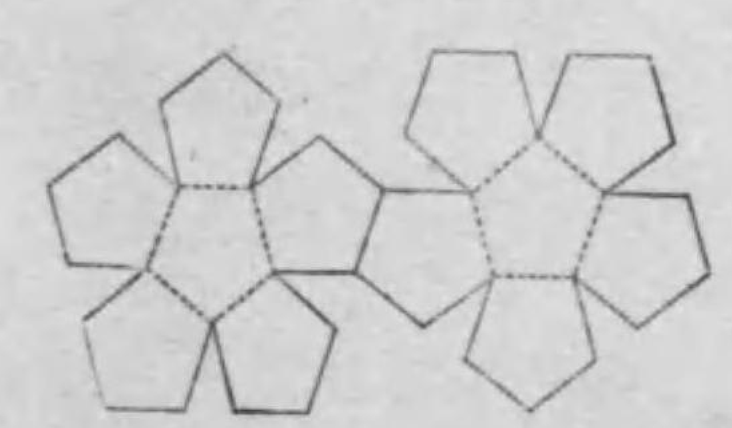
正六面體[立方體]



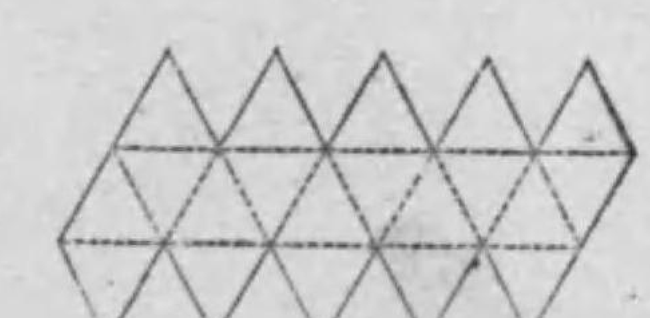
正八面體



正十二面體



正二十面體



體ノ相對スル最高點ヨリ下セル垂線ヲ云フ.

2. 正四面體ノ各面ノ中心ニ作レル垂線ハ同一ノ點ニ交ル.

3. 正六面體[立方體]ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ニ交ルコトヲ證セヨ.

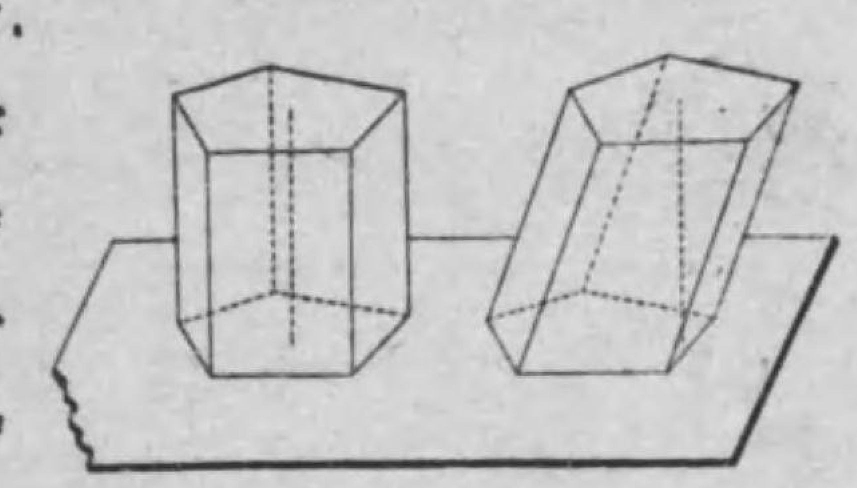
多面體ノ**對角線**トハ其ノ同ジ面ニ屬セザル二ツノ頂點ヲ結ビ付クル分線ヲ云フ.

第二節

面積及び體積

44. 定義 **角壔面**とは三つ以上の平行直線を順次に二つづつ過る所の平面より組立てらるる面をいひ,角壔面,及び二つの平行平面にて界せられたる立體を**角壔**といふ.

角壔ニ於テ平行二平面ノナス多角形ヲ**底**,兩底ノ間ニアル角壔面ノ各ヽヲ**側面**,側面ト側面トノ交リヲ**側稜**ト云フ.



角壔ノ兩底ハ全ク相等シク,側稜モ亦相等シク,側面ハ平行四邊形ナルコト明カナリ.

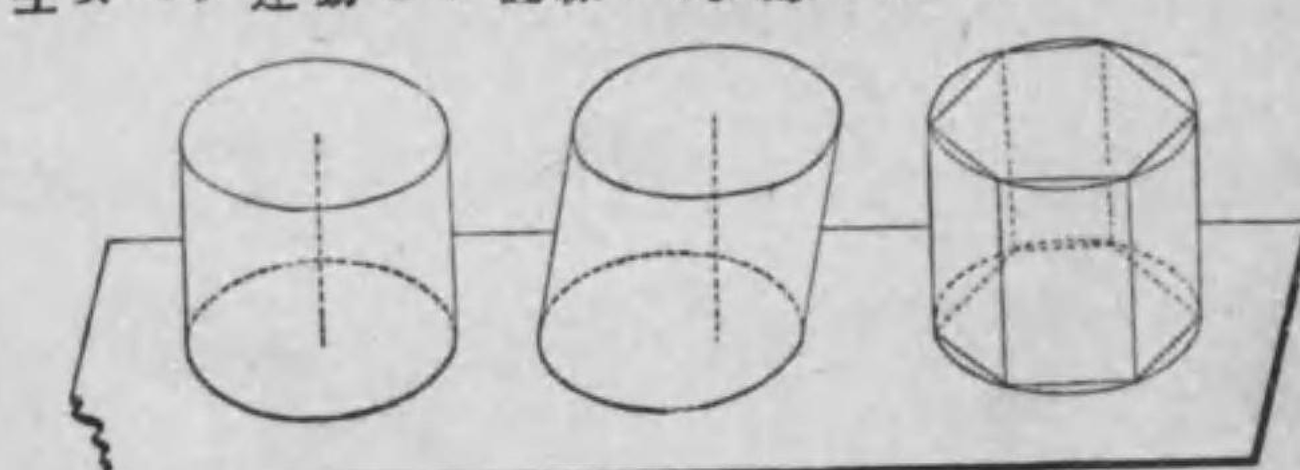
角壔ノ兩底ノ間ノ距離ヲ**高さ**ト云ヒ,高サガ側稜ニ平行ナルモノヲ**直角壔**,然ラザルモノヲ**斜角壔**ト云フ.

角壔ハ其ノ側面ノ數ニ從ヒ**三角壔**,**四角壔**,**五**

角壔,等ト命名セラル.

45. **定義** **圓壔面**とは一直線がそれ自身に平行し且一の定圓周に沿ひて運動して生ずる面をいひ,定圓周の平面と之に平行する平面,及び圓壔面にて界せられたる立體を**圓壔**といふ.

圓壔ニ於テ定圓周ノ平面,及ビ之ニ平行スル平面ヲ**底**,兩底ノ間ニアル圓壔面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ヲ生ズベク運動セシ直線ヲ**母線**ト云フ.



圓壔ノ兩底ハ全ク相等シク側面ヲ一母線ニ從ヒ截リ離シテ展開スレバ平行四邊形トナルコト明カナリ. 圓壔ノ兩底ノ間ノ距離ヲ**高さ**,高サガ母線ニ平行ナルモノヲ**直圓壔**,然ラザルモノヲ**斜圓壔**ト云フ.

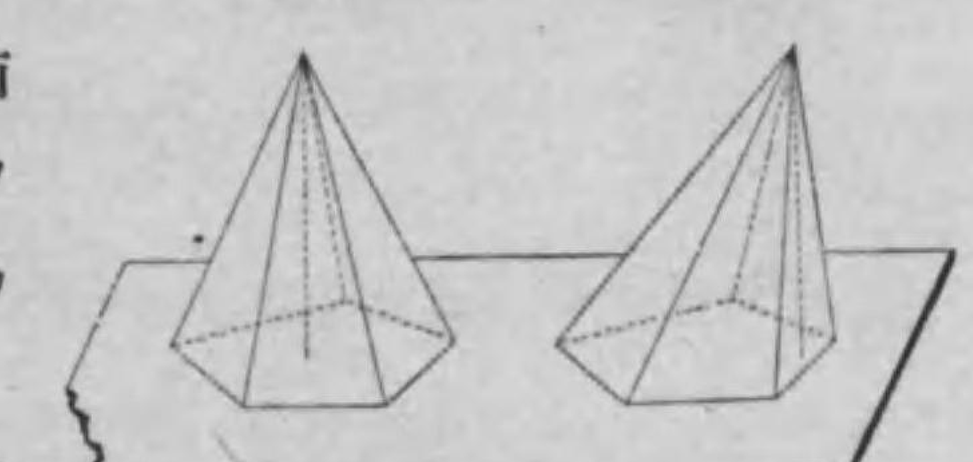
圓壔ハ之ニ內接[內接ノ意義ヲ擴張シタルナリ]シタル角壔ノ底ノ邊數ガ限リナク增シタル極限ノ

場合ト考フルヲ得ベク,直圓壔ハ又矩形ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル所ノ立體ナリト考フルヲ得可シ.

46. **定義** **角錐面**とは一の定點と一の定多角形の邊とを過る平面より組立てらるる面をいひ,その多角形の面,及び角錐面にて界せらるる立體を**角錐**といふ.

角錐ニ於テ定多角形ノ面ヲ**底**,定點ヲ**頂點**ト云ヒ頂點ト底トノ間ニアル角錐面ノ各々ヲ**側面**ト云フ.

角錐ノ側面ハ皆三角形ヲナスコト明カナリ.



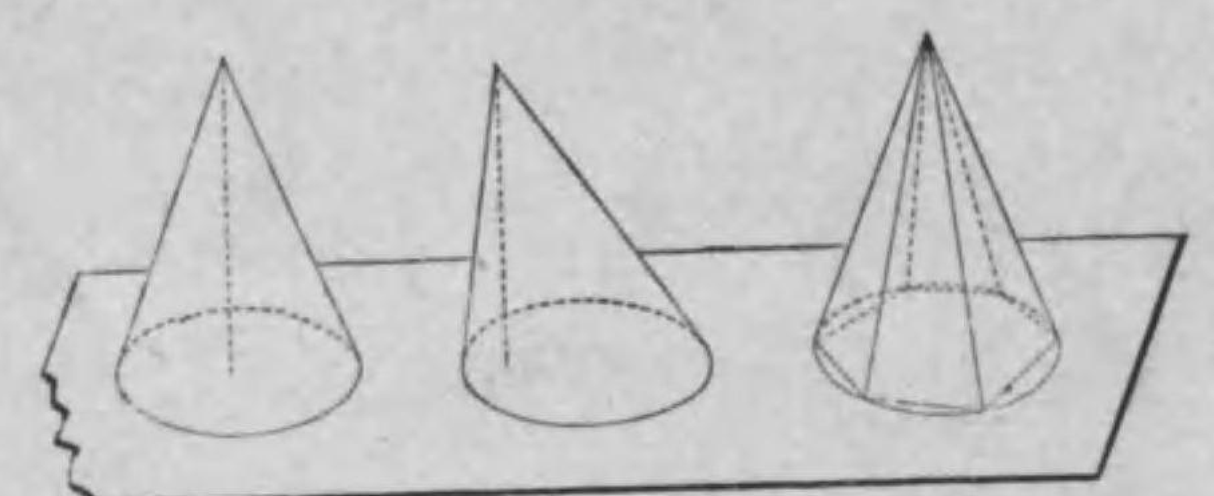
角錐ノ頂點ヨリ底ヘ引ケル垂線ヲ**高さ**,頂點ヨリ底ノ一邊ヘ引ケル垂線ヲ**斜高**ト云ヒ,底ガ正多角形ニシテ高サノ趾ガ底ノ中心ト合スルモノヲ**正角錐**ト云フ

角錐ハ其ノ側面ノ數ニ從ヒ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**,等ト命名セラル.

47. **定義** **圓錐面**とは一直線が一

の定點を過り一の定圓周に沿ひつつ運動して生ずる面をいひ,其の定圓周の面及び圓錐面にて界せらるる立體を**圓錐**といふ.

圓錐ニ於テ定圓周ノ面ヲ**底**,定點ヲ**頂點**,頂點ト底トノ間ニアル圓錐面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ヲ生ズ可ク運動セシ直線ヲ**母線**ト云フ.

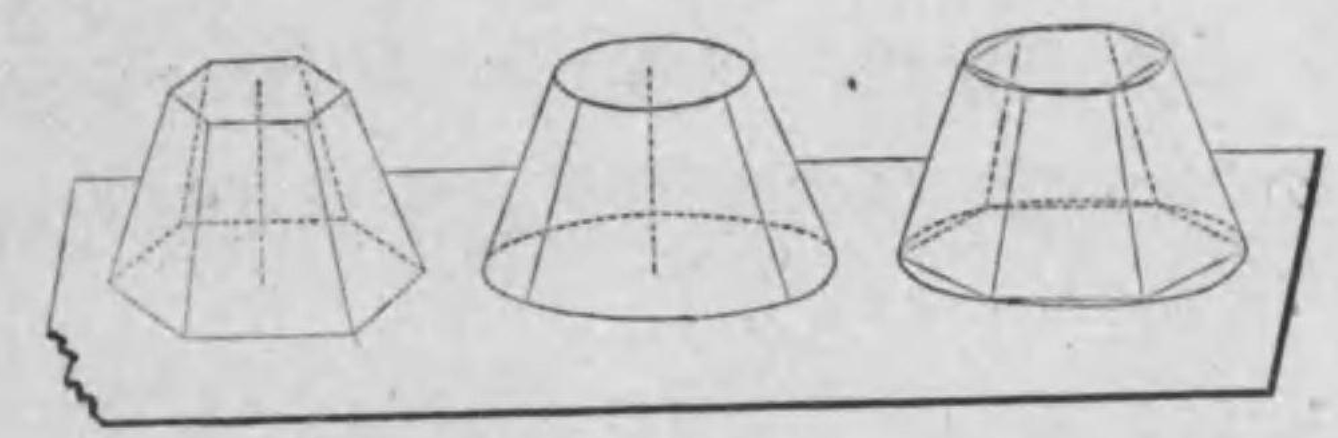


圓錐ノ頂點ヨリ底ヘ引ケル垂線ヲ**高さ**,頂點ヨリ底圓周ヘ引ケル直線ヲ**斜高**ト云ヒ,高サノ趾ガ底ノ中心ト合スルモノヲ**正圓錐**ト云フ.

正圓錐ノ側面ヲ一母線ニ從ヒ截リ離シテ展開スレバ圓ノ扇形トナルコト明カナリ.

圓錐ハ之ニ內接シタル角錐ノ底ノ邊數ガ限リナク增シタル極限ノ場合ト考フルヲ得可ク,正圓錐ハ又直角三角形ガ其ノ直角傍ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル所ノ立體ナリト考フルヲ得可シ.

48. 定義 **角臺〔圓臺〕**とは平行せる二平面と角錐面〔圓錐面〕とにて界せられたる立體を云ふ.



角臺及ビ圓臺ニ於テ平行セル二面ヲ**底**,兩底ノ間ノ面ヲ**側面**,兩底ノ間ノ距離ヲ**高さ**,兩底ノ周ノ間ノ距離ヲ**斜高**ト云ヒ,正角錐,正圓錐ヲ底ニ平行シテ截リテ生ジタル角臺,圓臺ヲソレゾレ**正角臺**,**正圓臺**ト云フ. 而シテ角臺ニ於テ側面ハ皆梯形ナルコト明カナリ.

圓臺ハ之ニ內接シタル角臺ノ底ノ邊數ガ限リナク增シタル極限ノ場合ト考ヘ得可シ.

49. 以上述ベタル立體ノ中ニテ角臺ヲ最モ概濶ナルモノト考ヘ,圓臺ハ前ニ述ベタル如ク角臺ノ極限ノ場合ニシテ,

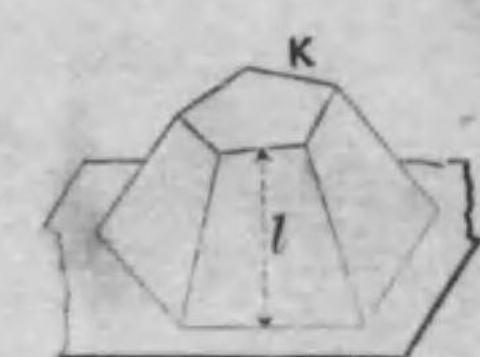
(1) 角壔及ビ圓壔ハソレゾレ角臺及ビ圓臺ノ兩底ノ一ノ大サガ漸漸,他ノ一ニ近寄リ終ニ全ク相等シクナリタル極限ノ場合,

(2) 角錐及ビ圓錐ハソレゾレ角臺及ビ圓臺ノ兩底ノ一ガ漸漸小サクナリテ終ニ一點トナリタル極限ノ場合,

ト考フルヲ得可シ.

50. 定理 正角臺の側面積*は兩底の周の和と斜高との積の半分に等し.**

Kヲ正角臺, Sヲ其ノ側面積, lヲ斜高, 兩底ノ周ヲ p 及ビ p_1 トスレバ,



$$S=\frac{1}{2}l(p+p_1)$$

ナルコトヲ證セムトス.

證 側面ハ皆梯形ヲナスヲ以テ, [48款]

一側面ノ面積 $=\frac{1}{2}l$(兩底ノ對應邊ノ和), [平.129款(3)]

故ニ 全キ側面積 $=\frac{1}{2}l(p+p_1)$.

51. 系 正圓臺ノ側面積ハ兩底圓周ノ和ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

52. 系 正角錐及ビ正圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

* 側面積トハ全キ側面ノ面積ヲ云フ.

** 此ハ正角臺ノ側面積ハ兩底ノ周ノ測度ノ和ト斜高ノ測度トノ積ノ半分ヲ測度トストト云ヘル略言ナリ, 以下總テ略言ノ文體ヲ用フ.

53. 系 角壔及ビ圓壔ノ側面積ハ底ノ周ト高サトノ積ニ等シ.

例題 4. 正角臺及ビ正圓臺ノ側面積ハ兩底ノ面ヨリ等距離ナル平面ニテ截リタル截口ノ周ト斜高トノ積ニ等シ.

5. 底面ノ半徑ハ1尺及ビ5寸ナル正圓臺アリ其ノ斜高ガ8寸ナルトキハ全面積如何.

---

54. 定義 **平行六面體**とは底面が平行四邊形なる角壔を云ふ.

平行六面體ノ各面ガ矩形ナルモノヲ**直角體**ト云ヒ, 直角體ノ各面ガ正方形ナルモノヲ**立方體**ト云フ.

55. 定義 立體の**體積**とは其の體內に含まれたる空間の部分の大さを云ふ.

例題 6. 直角體ノ高サハ側稜ニ平行スルコトヲ證セヨ.

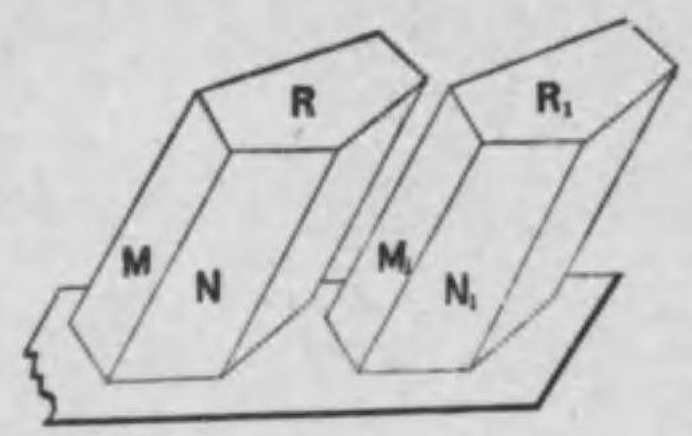
7. 平行六面體ノ相對スル面ハ相等シキコトヲ證セヨ.

8. 平行六面體ノ相對スル面ノ對應セル對角線ヲ過ル平面ニテ此ノ立體ヲ分テル二ツノ三角壔ハ體積相等シ即チ等積ナリ。

9. 平行六面體ノ四ツノ對角線上ノ正方形ノ和ハ其ノ十二ノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

---

56. 定理 二つの角壔に於て其の一の三面角の三面がそれぞれ相等しく且相似の位置に列べられたるときは此の二つの角壔は相等し。



二ツノ角壔ニ於テ三ツノ面 M, N, R ガソレゾレ M_1, N_1, R_1 ニ等シキトキハ、

此ノ二ツノ角壔ハ相等シキコトヲ證セムトス。

證 三ツノ面 M, N, R ハソレゾレ三ツノ面 M_1, N_1, R_1 ニ等シキユエ是等ノ面ヲ相似ノ位置ニ取リテ作ル三面角ハ相等シクシテ相重ネ得可シ。 [I. 41題]

然ルトキハ R ノ各頂點ハソレゾレ R_1 ノ各頂點ト合シ、他ノ二面ニ於テモ亦同様ナリ。

サテ R 及ビ R_1 ノ頂點ハソレゾレ相合スルヲ以テ是

等ノ頂點ヨリ引ケル側稜ハ相合ス可シ。

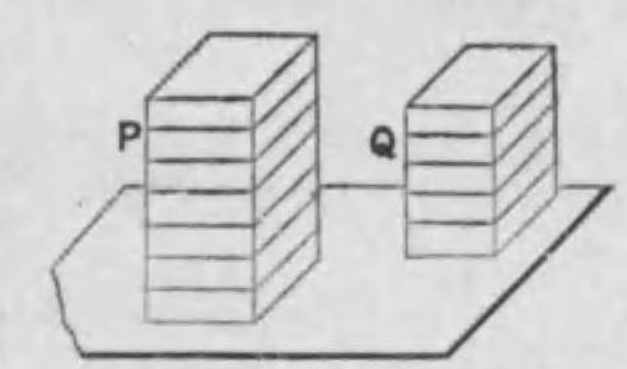
如何トナレバ是等ノ側稜ハ皆 M, N ノ交リノ稜ニ平行シ且 M, N ノ下ノ三ツノ頂點ノ定ムル平面ニテ限ラルルヲ以テナリ。

故ニ二ツノ角壔ハ全ク相合スルヲ以テ相等シ。

例題 10. 相等シキ底ト相等シキ高サトヲモツ二ツノ直角壔ハ相等シ。

---

57. 定理 相等しき底をもつ二つの直角體は其の高さに比例す。



P, Q ハ相等シキ底ヲモツ二ツノ直角體トシ其ノ高サハソレゾレ m, n 單位ヲ含ムモノトスルトキハ、

$\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}$ ナルコトヲ證セムトス。

證 m 及ビ n ハ通約ス可キ數ナリトシ、底ニ平行スル平面ニテ P ヲ m 個、Q ヲ n 個ノ直角體ニ分ツトキハ、是等ノ小サキ直角體ハ皆相等シ。 [10題]

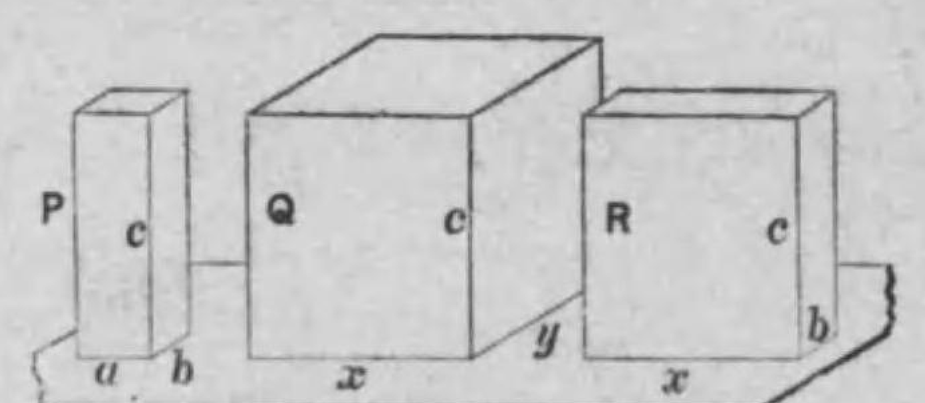
而シテ P ハ是等ノ小サキ直角體ヲ m ダケ、Q ハ n ダケ含ムヲ以テ $\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}$.

注意 本定理ハP, Qノ高サガ通約スベカラザル量ナルトキモ亦眞ナリ.* 而シテ直角體ノ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ稜ヲ**元**ト命名スレバ本定理ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

二元ガ相等シキ二ツノ直角體ハ第三ノ元ニ比例ス.

58. 定理 相等しき高さをもつ二つの直角體は其の底に比例す.

P, Qヲ等シキ高サcヲモツ二ツノ直角體トシ底ノ二邊ヲソレゾレa, b及ビx, yトスルトキハ,



$$\frac{P}{Q}=\frac{ab}{xy}$$ ナルコトヲ證セムトス.

證 高サc, 底ノ二邊ハx, bナル直角體Rヲ作ルトキハ

$$\frac{P}{R}=\frac{a}{x},\ 及ビ\ \frac{R}{Q}=\frac{b}{y},\qquad [57款注意]$$

故ニ

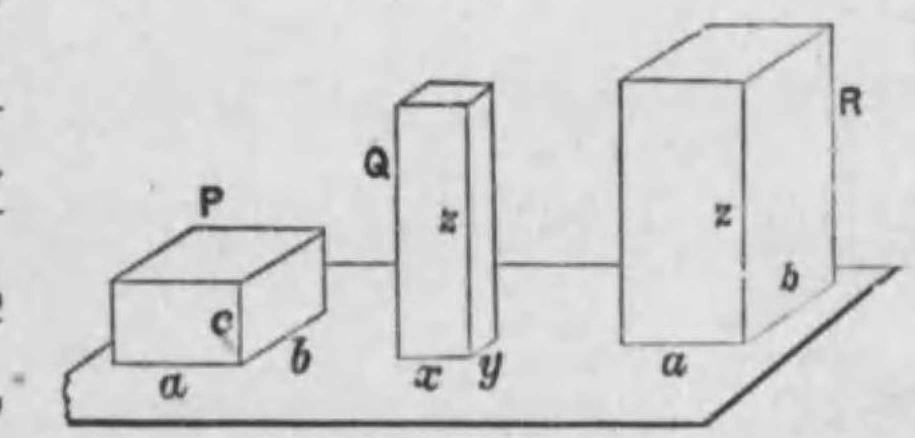
$$\frac{P}{Q}=\frac{ab}{xy}.\qquad [平. 145款\ X]$$

注意 一元ガ相等シキ二ツノ直角體ハ他ノ二元ノ積ト比例ス.

* 此ノ證明ハ初等ノ書ニ不適當ナルユエニ之ヲ省ク

59. 定理 二つの直角體は其の三元の積と比例す.

P, Qヲ二ツノ直角體トシ其ノ三元ヲソレゾレa, b, c及ビx, y, zトスルトキハ,



$$\frac{P}{Q}=\frac{abc}{xyz}$$ ナルコトヲ證セムトス.

證 三ツノ元ヲa, b, zトスル第三ノ直角體Rヲ作ルトキハ

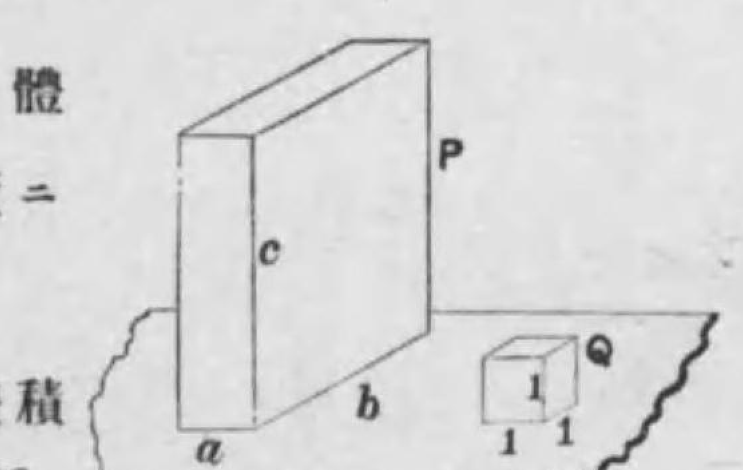
$$\frac{P}{R}=\frac{c}{z},\qquad [57款]$$

$$\frac{R}{Q}=\frac{ab}{xy},\qquad [58款]$$

故ニ

$$\frac{P}{Q}=\frac{abc}{xyz}.\qquad [平. 145款\ X]$$

60. 系 直角體ノ體積ハ其ノ三ツノ元ノ積ニ等シ.



如何トナレバQヲ體積單位トスレバ $\frac{P}{Q}=\frac{abc}{1}=abc$ ナレバナリ.

例題 11. 直角體ノ體積ハ其ノ底ノ面積ト高サトノ積ニ等シ.

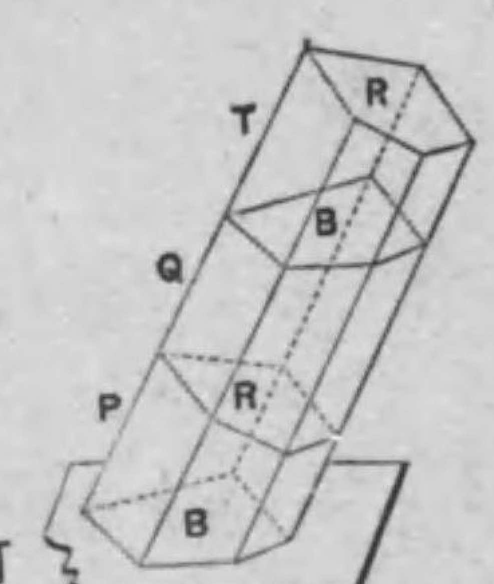
12. 立方體ノ體積ハ其ノ一稜ノ立方ニ等シ.

13. 角壔ヲ底ニ平行セル平面ニテ截リタル截口ハ底ト全ク相等シ.

14. 角錐ヲ底ニ平行セル平面ニテ截リタル截口ハ底ト相似ナリ.

---

61. **定理** 斜角壔は其の側稜に垂直なる平面にて截りたる截口を底とし側稜を高さとする直角壔と等積なり.



RハBヲ底トセル斜角壔P＋Qヲ其ノ側稜ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截口ニシテ直角壔Q＋Tノ底ナルトキハ,

$P+Q=Q+T$ 卽チ $P=T$ ナルコトヲ證セムトス.

證 P及ビTハ相等シキ底Bヲ有ス,

而シテ　P＋Qノ側稜トQ＋Tノ側稜トハ相等シ.

故ニ　相等シキ是等ヨリQノ側稜ヲ取リ去ルトキハ殘リハ相等シク,

卽チ　Pノ側稜ハTノ側稜ニ等シ.

而シテ　二ツノ底Bハ平行セル多角形ニシテ其ノ對應邊ガ相等シキユヱ,

Pノ各面ハソレゾレTノ各面ニ等シク,

PトTトハ相重ネテ合同セシメ得可シ,

故ニ　$P=T.$

例題 15. 四角壔ノ四ツノ對角線ガ同一ノ點ヲ通過スルトキハ此ノ四角壔ハ平行六面體ナルコトヲ證セヨ.

16. 角壔ノ平行セザル二ツノ對角面ガ底ニ垂直ナルトキハ此ノ角壔ハ直角壔ナリ.

多面體ノ同一ノ面ニ屬セザル二ツノ稜ヲ過ル平面ヲ**對角面**ト云フ.

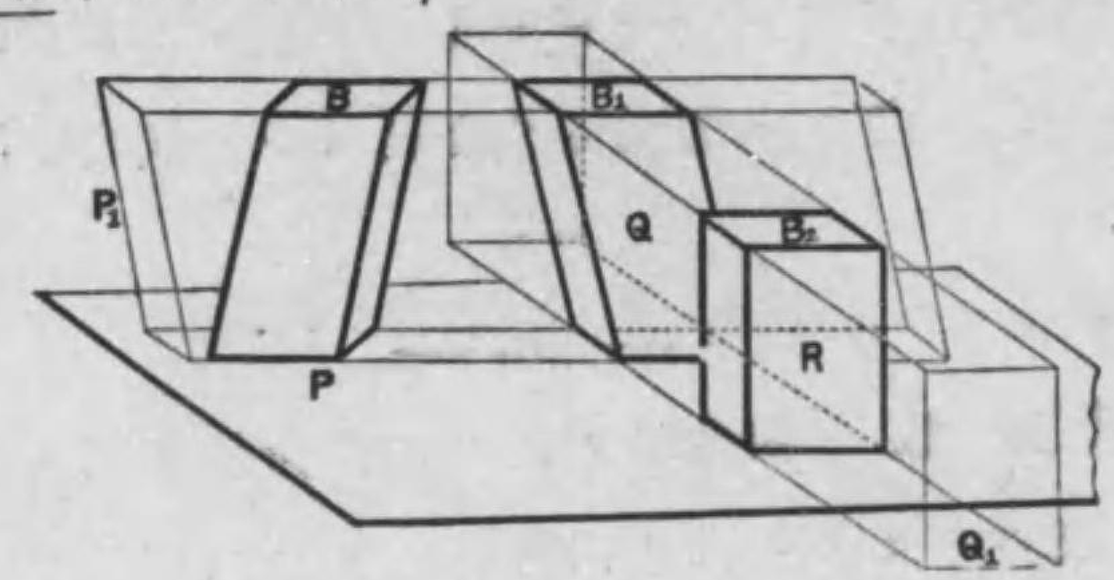
17. 等シキ底ト等シキ高サトヲモツ二ツノ角錐ヲ底ヨリ等距離ノ所ニテ底ニ平行セル平面ニテ截リタル截口ハ等積ナリ.

18. 高サ12寸ナル角錐ノ底面積ガ8平方寸ナルトキ底ニ平行スル平面ニテ截リタル截口ガ5平方寸ナルモノハ頂點ヨリ何寸ノ距離ニアルカ.

---

62. 定理 任意の平行六面體の體積は其の底の面積と高さとの積に等し.

Pヲ任意ノ平行六面體トシ其ノ底ノ面積ヲB,高サヲhトスルトキハ,



證 Pノ四ツノ平行セル稜ヲ左右ヘ延長シ長サニ

P = Bh ナルコトヲ證セムトス,

キマリナキ角壔P_1ヲ作リ,之ヨリ直角壔Qヲ截ル但ツノ高サハPノ側稜ニ等シク側面ノ一ツハB_1トス,

次ニQノ四ツノ平行セル稜ヲ前後ニ延長シ長サニキマリナキ角壔Q_1ヲ作リ,之ヨリ直角體Rヲ截ル但ツノ高サハQノ側稜[此ノ場合ニハP_1ノ前後二面ノ間ニ夾マレタル稜ヲ云フ]ニ等シク,側面ノ一ツハB_2トス,

然ルトキハ　　$P = Q$,　　[61款]

同様ニ　　$Q = R$,

$\therefore\ P = R$.

然ルニ　　$R = B_2h$,　　[11題]

而シテ　　$B_2 = B_1 = B$,　　[平.120款]

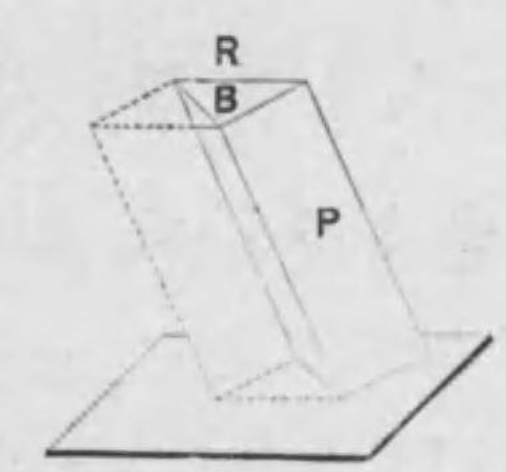
$\therefore\ P = Bh$.

63. 定理 三角壔の體積は其の底の面積と高さとの積に等し.

PハBヲ底トシhヲ高サトスル三角壔トスルトキハ,

P = Bh

ナルコトヲ證セムトス,



證 三角壔ノ底ナル三角形Bヨリ平行四邊形ヲ完成シBノ2倍ヲ底トスル平行六面體Rヲ作ルトキハ

$P = \frac{1}{2}R$,　　[8題]

然ルニ　　$R = (2B)h = 2Bh$,　　[62款]

$\therefore\ P = Bh$.

64. 系 任意ノ角壔及ビ圓壔ノ體積ハ其ノ底ノ面積ト高サトノ積ニ等シ.

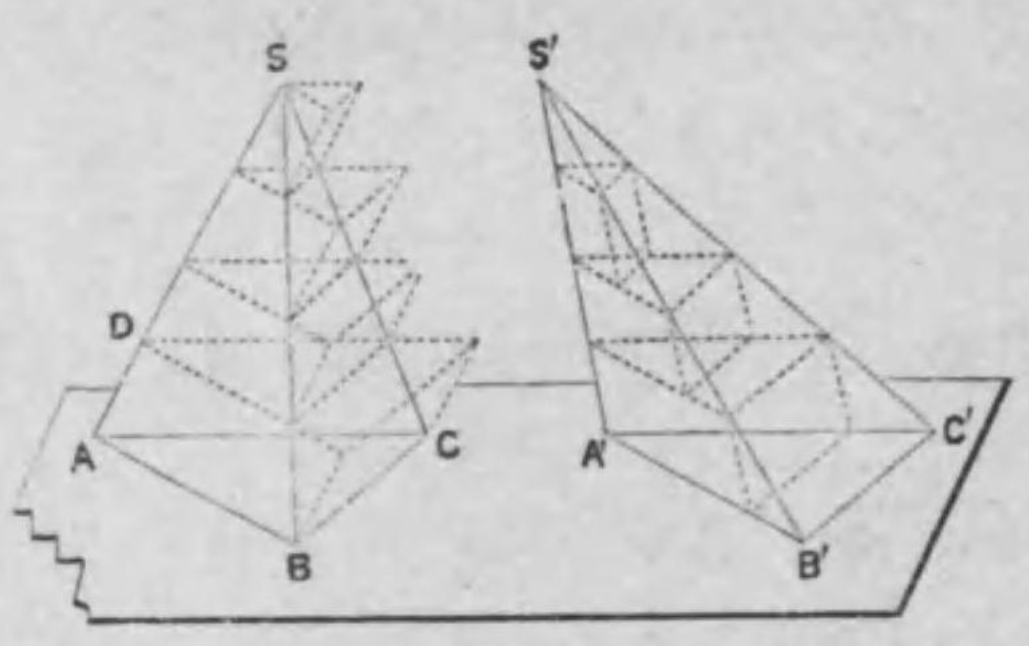
圓壔ノ底ノ半徑ヲrトスレバ$B = \pi r^2$トナルヲ以テ其ノ體積ハ$\pi r^2 h$トナル.

例題 19. 等積ノ底ヲモツ二ツノ角壔[圓壔]ノ體積ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シク,等シキ高サヲモツ二ツノ角壔[圓壔]ノ體積ノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

20. 等シキ高サト等積ノ底トヲモツ二ツノ角壔[圓壔]ハ等積ナリ.

65. 定理　等しき高さと等積の底とをもつ二つの三角錐は等積なり.

S-ABC, S′-A′B′C′ ハ等シキ高サト等積ノ底トヲモツ二ツノ三角錐トスルトキハ,



S-ABC = S′-A′B′C′

ナルコトヲ證セムトス.

證　若シ二ツノ三角錐ガ等積ナラザルトキハ,其ノ一ハ他ノ一ヨリ大ナル可シ.

然ラバ　S-ABC ヲ S′-A′B′C′ ヨリ大ナリトセヨ.

サテ　等シキ高サヲ各々n等分シ,分點ヲ過リテ底ノ平面ニ平行スル平面ヲ作ルトキハ,

二ツノ三角錐ノ對應セル截口ハ等積ナリ.　[17題]

S-ABC ノ底及ビ各々ノ截口ヲ下ノ底トシテ角壔ヲ作リ其ノ側稜ハ何レモ AD ニ等シク且平行ナラシム.

但 AD ハ側稜 AS ノ n 等分ノ一ナリ.　同様ニ

S′-A′B′C′ ノ各々ノ截口ヲ上ノ底トシテ角壔ヲ作レ.

然ルトキハ　角壔ノ第一群ノ和ハ S-ABC ヨリ大ニシテ,角壔ノ第二群ノ和ハ S′-A′B′C′ ヨリ小ナリ.

故ニ　S-ABC 及ビ S′-A′B′C′ ノ差ハ,角壔ノ第一群ノ和ト第二群ノ和トノ差ヨリ小ナリ.

然ルニ　S′-A′B′C′ ニ於ケル各角壔ハソレゾレ S-ABC ニ於テ最下ノ角壔ヲ除キテ他ノ各角壔ニ等シ.

故ニ　角壔ノ第一群ノ和ト第二群ノ和トノ差ハ,第一群ノ最下ノ角壔 DABC ナリ.

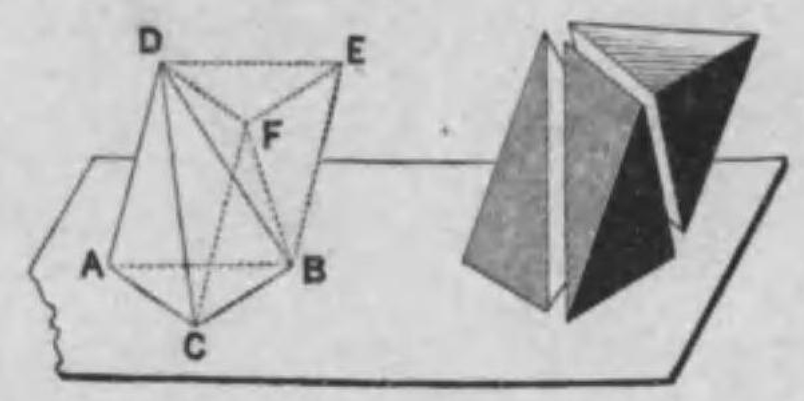
然ルニ　此ノ角壔ハ n ヲ限リナク増ストキハ,如何ナル小サキ體積ヨリモ小ナラシメ得可シ.

故ニ　二ツノ三角錐ノ體積ハ如何ニ小サクトモ若干ノ體積ヲ以テ差フコト能ハズ.

故ニ　　二ツノ角錐ハ等積ナリ.

例題 21. 三角錐ノ側面積ハ恒ニ底面積ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

66. 定理 三角錐の體積は同じ底と同じ高さとをもつ三角壔の體積の三分の一なり.



D-ABC ハ ABC[$=B$] ヲ底トシ h ヲ高サトスル三角錐ナルトキハ, D-ABC$=\frac{1}{3}Bh$ ナルコトヲ證セムトス.

證 B ヲ底トシ h ヲ高サトスル三角壔ABCFDE ヲ完成セヨ.

然ルトキハ 三角壔ABCFDEハ三ツノ三角錐 D-ABC, D-BCF, B-DEF ヨリ成ル.

而シテ D-ABC 及ビ D-BCFハソレゾレ△ADC, △CDF ヲ底トシ B ヲ共通ノ頂點トスル三角錐ト見ルコトヲ得, 且△ADC＝△CDFナルヲ以テ等積ナリ. [65款]

同様ニ D-BCF 及ビ B-DEFハソレゾレ△BCF, △BEF ヲ底トシ D ヲ共通ノ頂點トスル三角錐ト見ルコトヲ得, 且△BCF＝△BEFナルヲ以テ等積ナリ.

故ニ 此ノ三ツノ三角錐ハ等積ニシテ何レモ三角壔ABCFDEノ三分ノ一ナリ.

$\therefore$ D-ABC$=\frac{1}{3}Bh$.

67. 系 三角錐ノ體積ハ其ノ底ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ナリ.

68. 系 任意ノ角錐[圓錐]ノ體積ハ其ノ底ノ面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ナリ.

圓錐ノ底ノ半徑ヲ r トスレバ $B=\pi r^2$ ナルヲ以テ其ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ トナル.

例題 22. 等積ノ底ヲモツ二ツノ角錐[圓錐]ノ體積ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シク, 又等シキ高サヲモツ二ツノ角錐[圓錐]ノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

23. 等シキ高サト等積ノ底トヲモツ二ツノ角錐[圓錐]ハ等積ナリ.

24. 角錐[圓錐]ヲ底ニ平行セル二ツノ平面ニテ截ルトキ其ノ截口ノ面積ノ比ハ頂點ヨリソレ等ノ平面マデノ距離ノ平方ノ比ニ等シ.

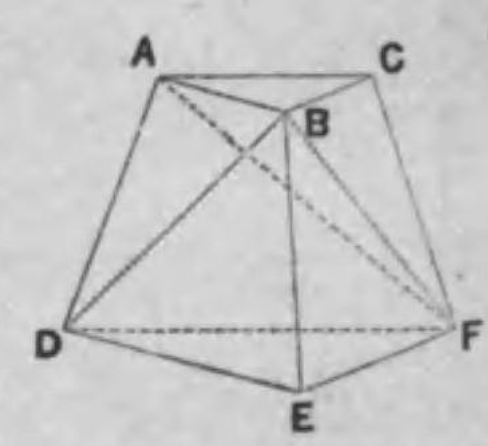
25. 對角線ガ $\sqrt{3}$ ナル立方體ノ體積如何.

26. 角錐ノ高サヲ底ニ平行セル平面ニテ五ツニ等分スルトキ生ズル所ノ角臺及ビ全キ角錐ノ體積ノ連比如何.

---

69. 定理 三角臺の體積は其の上の底,下の底,及び上下の底の比例中項を底とし,もとの三角臺の高さを共通の高さとする三つの角錐の體積の和に等し.

ABCFDE ヲ三角臺トシ其ノ上下兩底ノ面積ヲソレゾレ B, B', 高サヲ h トスルトキハ,



體積 $= \frac{1}{3}h\{B+\sqrt{BB'}+B'\}$

ナルコトヲ證セムトス.

證 三角臺ヲ二ツノ平面 BDF, ABF ニテ截ルトキハ三ツノ三角錐 B-DEF, F-ABC, B-ADF ヲ得.

而シテ　三角錐 B-DEF $= \frac{1}{3}hB'$,　[66款]

及ビ　三角錐 F-ABC $= \frac{1}{3}hB$.

然ラバ　三角臺ノ體積ヲ得ムニハ三角錐 B-ADF ノ體積ヲ求ムレバヨシ.

サテ　$\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 B-ACF}} = \frac{\text{底 ADF}}{\text{底 ACF}}$　[22題]

卽チ　$\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 F-ABC}} = \frac{DF}{AC}$　[平.IV.36題]

$= \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}$.　[平.161款]

故ニ　三角錐 B-ADF $= \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}} \times$ 三角錐 F-ABC

$= \frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}} \times \frac{1}{3}hB$

$= \frac{1}{3}h\sqrt{BB'}$.

故ニ　三角臺ノ體積 $= \frac{1}{3}h\{B+\sqrt{BB'}+B'\}$.

70. 系 任意ノ角臺[圓臺]ノ體積ハ其ノ上ノ底,下ノ底,及ビ上下ノ底ノ比例中項ヲ底トシ,モトノ角臺ノ高サヲ共通ノ高サトスル三ツノ角錐ノ體積ノ和ニ等シ.

圓臺ニ於テ上ノ底ノ半徑ヲ r, 下ノ底ノ半徑ヲ r' トスレバ $B=\pi r^2$, $B'=\pi r'^2$ トナルヲ以テ體積ハ次ノ如シ.　$\frac{1}{3}\pi h\{r^2+rr'+r'^2\}$

例題 27. きいをぷす[*Cheops*, えじぷと國第四朝ノ王ニシテ大約西暦紀元前2800年乃至2700年代ノ人]ノ建築セシぎぜー[*Gizeh*]ノぴらみっど[四角錐]ハ高サ $480\frac{2}{3}$呎,底ハ正方形ニシテ其ノ一邊ハ 764 呎ナリト云フ然ラバ其ノ體積如何.

28. 直角體ノ三ツノ稜ガ1寸,4寸,及ビ8寸ナルトキ其ノ對角線ノ長サ如何.

29. 角壔ヲ其ノ側稜ニ平行セル平面ニテ截ルトキハ其ノ截口ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.

30. 直角體ノ不等ナル三ツノ面ノ對角線ヲ知リテ各々ノ稜ヲ計算スル法如何.

31. 底ハ正n角形ニシテ側面ハ皆正三角形ナル角錐アリ其ノnノ値如何.

32. 四面體ヲ相對スル二ツノ稜ニ平行スル平面ニテ截ルトキ其ノ截口ハ如何ナル形ヲナスカ.

33. 既知ノ角錐ヲ其ノ底ニ平行セル平面ニテ截リ其ノ截口ヲ底ノ半分ニ等シカラシメヨ.

34. 二ツノ相似多面體ハ互ニ相似ニシテ且相似ノ位置ニアル同數ノ四面體ニ分タル可シ.

二ツノ多面體ニ於テ,

(1) 相似ノ位置ニアル面ガ相似形ニシテ,

(2) 相似ノ位置ニアル二面角ガソレゾレ相等シキトキハ,

此ノ二ツノ多面體ハ**相似なり**ト云フ.

35. 一ノ三面角ガ相等シキ二ツノ四面體ノ體積ノ比ハ此ノ三面角ノ頂點ニテ出會フ三ツノ稜ノ連乘積ノ比ニ等シ. 從ヒテ又

二ツノ相似四面體[相似多面體]ノ體積ノ比ハ其ノ相當セル稜ノ立方ノ比ニ等シ.

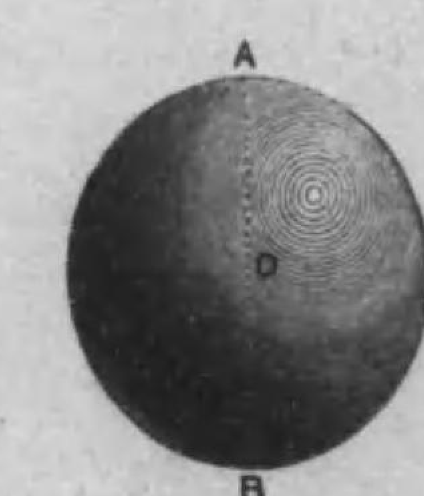
第三編　球

第一節

球及び球面三角形

71. **定義** 球とは球面と稱する曲面にて圍繞せらるる立體にして形内の一定點より球面まで引ける直線は皆相等しきものを云ふ.

此ノ定點ヲ球ノ**中心**, 中心ヨリ球面マデ引ケル直線ヲ**半徑**ト云ヒ, 中心ヲ過リ球面ニ夾マルル直線ヲ**徑**ト云フ.



球ハ又半圓ガ其ノ徑ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル立體ナリト云フコトヲ得可シ.

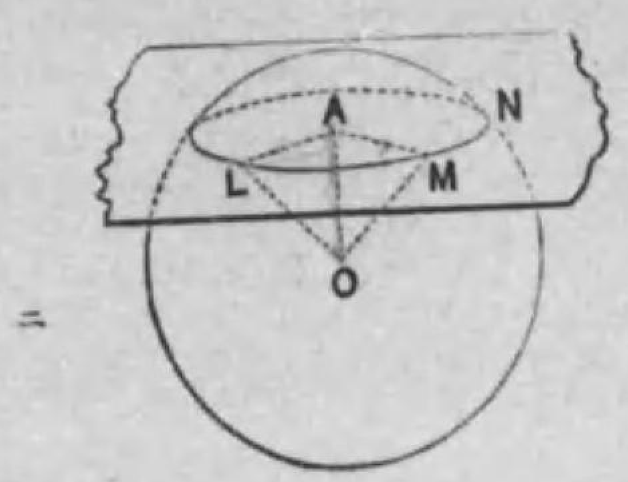
72. **定理** 球を平面にて截るとき其の截口は圓なり.

LMNハOヲ中心トスル球ノ,平面ニテノ截口

トスルトキハ,

LMNハ圓

ナルコトヲ證セムトス.



證 Oヨリ截口ノ平面ニ垂線OAヲ引キ,

截口ノ周ノ任意ノ二點ニOL,OMヲ引ケ.

然ルトキハ　OL＝OM.　[71款]

故ニ　AL＝AM.　[I.5題]

然ルニ L及ビMハ截口ノ周ノ任意ノ二點ナルヲ以テ　LMNハAヲ中心トスル圓ナリ.

73. **定義** 球の平面にての截口を**球の圓**と稱す.

若シ平面ガ球ノ中心ヲ過ルトキハ**大圓**, 然ラザルトキハ**小圓**ト云フ.

球ノ圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ徑ヲ其ノ圓ノ**軸**ト稱シ其ノ兩端ヲ圓ノ**極**ト稱ス.

74. **系** 球ノ圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ徑ハ其ノ中心ヲ過ル. 故ニ

球ノ圓ノ軸ハ其ノ中心ヲ過リ,而シテ總テノ平行セル圓ハ同ジ軸ト同ジ極トヲ有ス.

75. **系** 球ノ總テノ大圓ハ相等シク且何レモ球,及ビ球面ヲ二等分ス.

76. 系　球面上ノ任意ノ二點ヲ過リテ大圓ノ弧ヲ畫キ得ベシ.

例題 1. 球ノ中心ヨリ等距離ニ於ケル總テノ小圓ハ相等シ,而シテ中心ヨリ不等ノ距離ニアル二ツノ小圓ニ就キテ中心ニ近キモノハ遠キモノヨリ大ナリ.

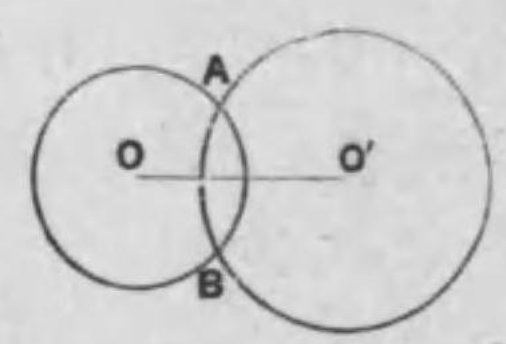
2. 球ノ任意ノ二ツノ大圓ハ互ニ二等分トナルコトヲ證セヨ.

3. 球面上ノ任意ノ三點ヲ過リテ小圓ノ弧ヲ畫キ得可シ.

---

77. 定義　球面上の二點間の**距離**とは之を結び付くる大圓の二つの弧の中,短きものを云ふ.

78. 定理　球面と球面との交りは圓なり.



0,0′ハ A 及ビ B ニ於テ交ル二圓ノ中心トシ,此ノ二圓ガ 00′ ヲ軸トシテ廻轉スルトキ, A 點ニテ生ズル線ハ圓ナルコトヲ證セムトス.

證　00′ハ二圓ノ共通弦ABノ垂直二等分線ナルヲ以テ,二圓ガ 00′ ヲ軸トシテ廻轉スル間モ A 點ハ恒ニ 00′ ニ垂直ナル平面ニ於テ之ヨリ一定ノ距離ニアリ.

故ニ　A 點ハ圓ヲ生ズ,而シテコレ二圓 0,0′ ニテ生ズル二ツノ球ノ交リノ線ナリ.

79. 定義　一の線,或は面が球面と唯一つの點を共通に有するときは此の線,或は面は球に**切す**といふ.

此ノ共通ノ點ヲ**切點**ト稱ス.

80. 系　球ノ外ノ一點ヨリ之ニ切スル總テノ直線ハ相等シク且是等ノ直線ハ圓ニ於テ球ニ切ス.

例題 4.　同ジ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過リテ一ツノ球ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル其ノ證如何.

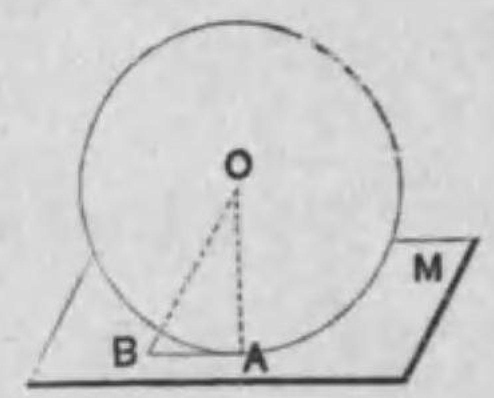
5. 任意ノ四面體ニ內切*スル球ヲ作ルコトヲ得可シ.

6. 任意ノ四面體ニ外接*スル球ヲ作ルコトヲ得可シ.

---

* 內切,外接ノ意義ヲ擴張シテ用ヒタルナリ.

81. 定理 球の半徑の端に於て之に垂直なる平面は球に切す.



O ハ球ノ中心, M ハ半徑 OA ノ端 A ニ於テ之ニ切スル平面トスルトキハ,

M ハ球ニ切スルコトヲ證セムトス.

證 O ヨリ平面 M ヘ任意ノ直線 OB ヲ引ケ.

然ルトキハ　　OB > OA,　　[I. 7 題]

故ニ　　B ハ球ノ外ニアリ.

而シテ　　B ハ A ノ外ノ任意ノ點ナリ.

故ニ　　M ハ球ニ切ス.

82. 系 球ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル各直線ハ球ニ切ス.

83. 系 球ノ圓ニ切スル直線ハ切點ヲ過リテ球ニ切スル平面上ニアリ.

84. 系 球ニ切スル平面上ニ,切點ヲ過リテ引ケル任意ノ直線ハ球ニ切ス.

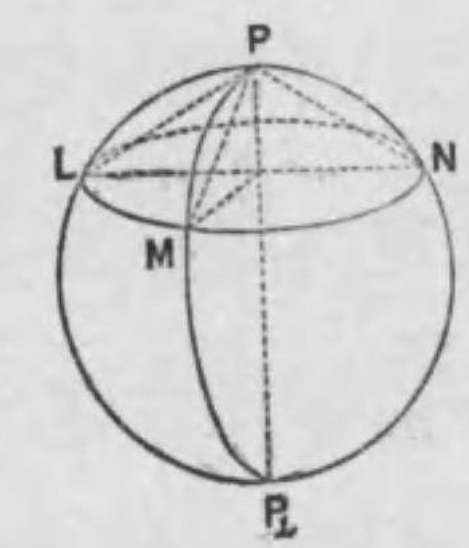
例題 7. 球ニ切スル各ノ直線或ハ平面ハ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直ナリ.

8. 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル任意ノ二直線ハ

其ノ點ニ於テ球ニ切スル平面ヲ定ム.

---

85. 定理 球の圓の周上に於ける總ての點は其の極〔何れにても〕より等距離にあり.



P 及ビ P_1 ヲ球ノ圓 LMN ノ極トスルトキハ,

弧 PL = PM = PN

及ビ　弧 $P_1L = P_1M = P_1N$

ナルコトヲ證セムトス.

證 PP_1 ハ圓 LMN ノ平面ニ垂直ナルヲ以テ,　[73 款]

PP_1 ハ圓 LMN ノ中心ヲ過ル,　[74 款]

故ニ　　弦 PL = PM = PN.　　[I. 5 題(1)]

故ニ　　弧 PL = PM = PN.

同樣ニ　　弧 $P_1L = P_1M = P_1N$.

86. 定義 球の圓の**極距離**とは近き極より此の圓周までの距離を云ふ.

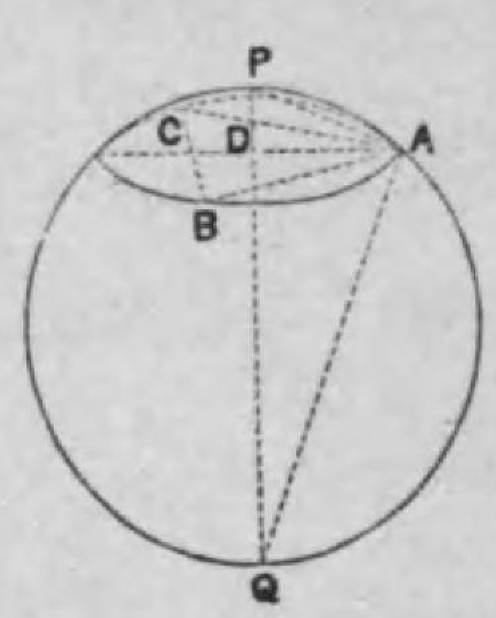
87. 系 球ノ大圓ノ極距離ハ象限弧ナリ. 從ヒテ一ノ徑ノ兩端ニアラザル二點ヨリ象限弧ノ距離ニアル點ハ其ノ

二點ヲ過ル大圓ノ極ナリ. 例ヘバ二點M,Nヨリ象限弧ノ距離ニアル點ハ大圓MNLノ極ナルガ如シ.

注意 極ノ性質ハ球面上ニ圓ヲ畫クコトヲ恰モ平面上ニ圓ヲ畫クト同一ナラシムルモノトス. こむぱすノ一脚尖ヲ極ニ當ツレバ他ノ一脚尖ハ所要ノ圓ヲ畫ク可シ,但球面ノ凸出ナルヲ越ヘテ圓ヲ畫クニハ器械學家ノ用フルかりぱー規ヲ用フルヲ可ナリトス.

例題 9. 四面體ノ六ツノ稜ヲ垂直ニ二等分スル六ツノ平面ハ同一ノ點ニ於テ交ル.

88. **作圖題** 既知の球の徑の長さを求むること.



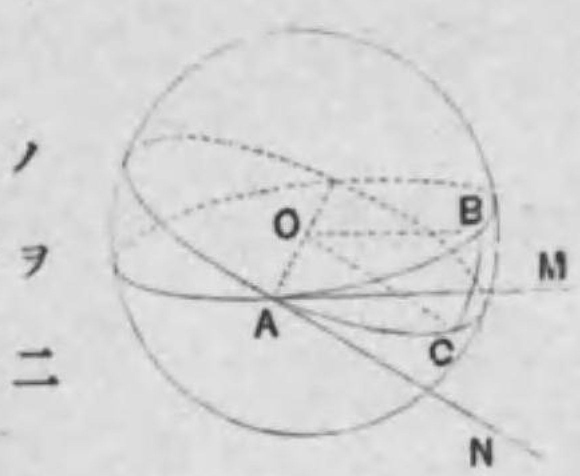
Pヲ既知ノ球面上ノ任意ノ點トシ,Pヲ過ル未知ノ徑ノ他ノ端ヲQトス.

解析法 Pヲ極トシかりぱー規ヲ以テ小圓ABCヲ畫キ,三ツノ弦AB, BC, CAヲ三邊トシテ△ABCヲ作リ之ニ外接スル圓ヲ畫ク. 然ルトキハ此ノ圓ハ小圓ABCニ等シカル可シ. 依リテ其ノ半徑ADヲ

知ル. 而シテ相似直角三角形ADP, PAQニ於テAD及ビAPヲ知ルヲ以テ是等ノ三角形ヲ作リ得可ク是ヨリ球ノ徑PQヲ得可シ.

例題 10. 球面上ノ既知二點ヲ過リテ大圓ノ弧ヲ畫ケ.

89. **定義** **球面角**とは二つの大圓の共通の徑の一端に於ける切線の間の角を云ふ.



是等ノ切線AM,ANハ二ツノ大圓ノ共通ノ徑ニ垂直ナルヲ以テ二ツノ大圓ノ面ノ間ノ二面角ノ平面角ナル可シ.

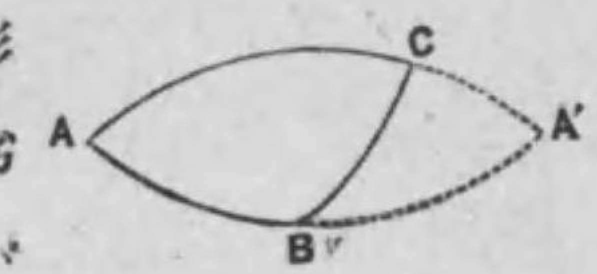
90. **定義** **球面多角形**とは三つ以上の大圓の弧にて圍まれたる球面の一部を云ふ.

球面多角形ヲ界スル弧ハ球面多角形ノ**邊**,邊ト邊トノ間ノ球面角ハ球面多角形ノ**角**,隣接セル二邊ノ交點ハ球面多角形ノ**頂點**ナリ.

三邊ヨリ成ル多角形ハ即チ**球面三角形**ナリ.

通例球面多角形ト云ヘバ其ノ邊ハ劣弧ナリ.

故ニ　球面三角形ノ角ハ皆劣角ナリ.



如何トナレバ　球面三角形 ABC ニ於テ邊 AB, AC ハ劣弧ナルヲ以テ之ヲ引キ延バシ A ニ對スル極 A' ニ於テ出會ハシメヨ.

然ルトキハ　$A\hat{B}C + A'\hat{B}C = 2\hat{R}$,

故ニ　$A\hat{B}C$ ハ劣角ナリ.

同樣ニ　他ノ二角モ亦劣角ナリ.

91. 二ツノ球面三角形ニ於テ其ノ各ノ邊ガソレゾレ同シ順ニ相等シキトキハ二ツノ三角形ハ相重ネテ合同セシメ得ルユヱ,　[35款ヲ參考セヨ]

此の二つの球面三角形は相等し.

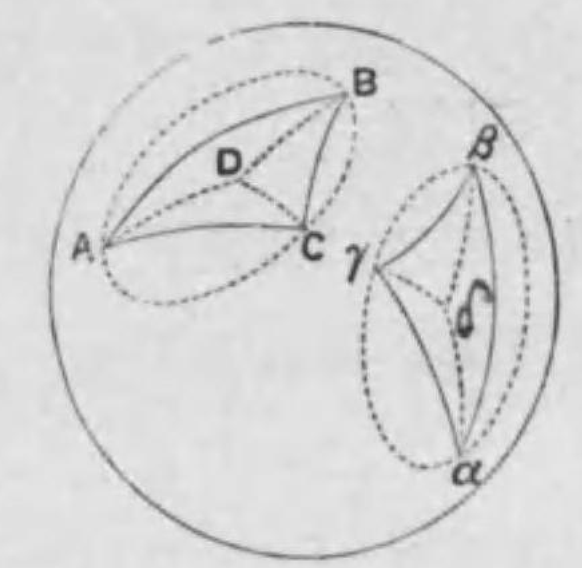
92. 二ツノ球面三角形ニ於テ其ノ各ノ邊ガソレゾレ逆ノ順ニ相等シキトキハ二ツノ三角形ハ相重ネテ合同セシムル能ハズ.

斯の如き二つの球面三角形は對稱なりといふ.

對稱球面三角形ガ二等邊トナルトキハ相重ネテ合同セシメ得ベク,而シテ此ノ兩形ハ相等シ.

球ノ中心ニ於ケル對頂多面角ニ對應スル球面三角形ハ對稱ナルコト明カナリ.　[36款ヲ參考セヨ]

93. 定理　二つの對稱球面三角形は等積なり.



ABC 及ビ αβγ ヲ二ツノ對稱球面三角形トシ, D 及ビ δ ヲソレゾレ小圓 ABC, αβγ ノ極トスルトキハ,　球面 △ABC
　= 球面 △αβγ
ナルコトヲ證セムトス.

證 D 及ビ δ ヲ大圓ノ弧ニテ三角形ノ各頂點ニ結ビ付ケヨ.

然ラバ　二ツノ球面三角形ノ弧[邊]ハソレゾレ相等シキユヱ,是等ノ弧ノ弦モ亦ソレゾレ相等シク,

即チ　平面三角形 ABC, αβγ ハ三邊ガソレゾレ相等シキユヱ全ク相等シク,

從ヒテ　其ノ外接圓モ亦相等シ.

故ニ　弦 AD, BD, CD ハソレゾレ弦 αδ, βδ, γδ ニ等シク,從ヒテ　弧 AD, BD, CD ハソレゾレ弧 αδ, βδ, γδ ニ等シ.

故ニ　球面三角形 ADB, BDC, CDA ハソレゾレ球面三角形 αδβ, βδγ, γδα ニ等シ.

故ニ　球面△ABC = 球面△αβγ.

注意 若シ小圓ノ極ガ三角形ノ外ニアル場合ニハ三ツノ二等邊球面三角形ノ中,二ツノ和ヨリ一ツヲ引ケバ可ナリ.

例題 11. 球面多角形ノ各角ハ其ノ各邊ノ平面ノ間ノ二面角ニテ測度セラル.

注意 球面多角形ノ邊及ビ角ハソレゾレ球ノ中心ニ於テ之ニ對應セル多面角ノ面角及ビ二面角ニテ測度セラルルヲ以テ,

多面角ノ性質ヨリ球面多角形ノ類似ノ性質ヲ知リ得可シ.

12. 球面三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.

13. 球面多角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ各邊ノ和ヨリ小ナリ.

14. 球面多角形ノ各邊ノ和ハ 360° ヨリ小ナリ.

---

94. 定義 一の球面三角形の各邊の二つの極の中にて其の邊に對する頂點と同じ傍にあるものを頂點とする三角形を前の三角形の**極三角形**といふ.

例題 15. 若シ一ノ球面三角形ガ他ノ球面三角形ノ極三角形ナルトキハ後ノ三角形ハ又前ノ三角形ノ極三角形ナリ.

16. 二ツノ球面三角形ガ互ニ他ノ極三角形ナルトキ其ノ一ノ各角ハ他ノ一ノ之ニ對スル邊ト互ニ補角ヲナス.

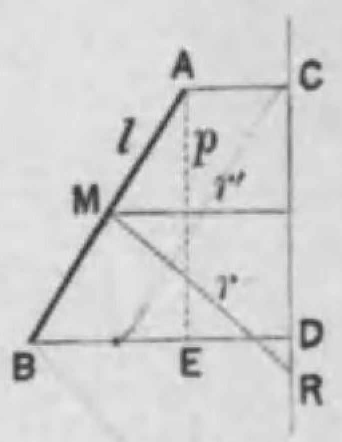
17. 球面三角形ノ各角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ.

第二節

面積及び體積

95. 定理 一直線が其の平面上の軸を廻轉して生ずる曲面の面積は此の直線の中點に作れる垂線が此の直線,及び軸の間に夾まるる部分を半徑とする圓周と此の直線の軸に於ける射影との積に等し.

曲面ヲ生ズル直線 AB ノ長サヲ l, 軸上ニ其ノ射影ヲ CD $=p$, AB ノ中點 M ノ畫ク圓周ノ半徑ヲ r', AB ノ中點 M ニ於ケル垂線 MR ノ長サヲ r トスルトキハ,



AB ニテ生ズル面積 $=p.2\pi r$

ナルコトヲ證セムトス.

證 CD ニ平行ニ AE ヲ引ケ.

サテ AB ニテ生ズル面積 $=l.2\pi r'$, [II. 4 題]

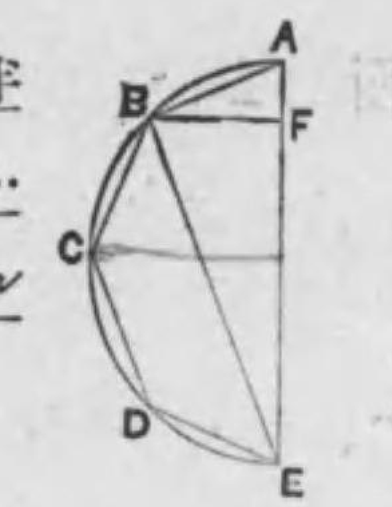
相似三角形ニ依リ $\dfrac{r'}{p}=\dfrac{r}{l}$,

$\therefore\ pr=r'l.$

依リテ AB ニテ生ズル面積 $=p.2\pi r.$

96. 定理 球の面積は其の大圓の面積の四倍に等し.

ABCDE ハ廻轉シテ球ヲ生ズル半圓,其ノ半徑ヲ r トシ, AB, BC, CD, … ハ半圓周ヲ若干等分シタル弦トスルトキハ, 球ノ面積 $S=4\pi r^2$



ナルコトヲ證セムトス.

證 ABCDE ナル半分ノ正多角形ハ廻轉シテ正圓臺[極根ノ場合トシテ圓錐ヲ含ム]ヲ生ズ可ク,其ノ各〻ノ側面積ハ

斜高ノ射影 $\times 2\pi \times$ 多角形ノ邊心距ナリ, [95 款]

故ニ 總テノ側面積ノ和

$=$ 邊心距 $\times 2\pi \times$ 斜高ノ射影ノ和

$=$ 邊心距 $\times 2\pi.$AE.

而シテ若シ多角形ノ邊數ガ限リナク增シタルトキ邊心距ハ圓ノ半徑トナリ,側面積ノ和ハ球面積 S トナリ,前式ハ 球ノ面積 $S=r.2\pi.2r=4\pi r^2$ トナル.

97. 定義 **月形**とは二つの大圓の半周を以て圍みたる球面の一部をいふ.

月形ノ兩端ニ於ケル角ハ相等シ.

98. 系 月形ト全球面トノ比ハ其ノ月形ノ角ト四直角トノ比ニ等シ.

99. 定義 **球帶**とは二つの平行平面の間に夾まるる球面の一部をいふ.

此ノ二ツノ平面ノ距離ヲ球帶ノ**高さ**ト云フ.

100. 系 球帶ノ高サヲhトスレバ其ノ面積ハ$2\pi r.h$ナリ.

例題 18. 等シキ球ニ於ケル二ツノ球帶ノ面積ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ.

19. 球ノ面積ガ 9856 平方寸ナルトキ其ノ徑ノ長サハ如何.

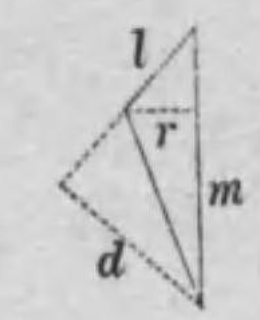
20. 球ノ面積ガ 6 平方寸ナルトキ $37°\frac{1}{2}$ ノ角ヲモツ月形ノ面積如何.

---

101. 定理 三角形が其の一邊を廻轉して生ずる體積は其の底の廻轉に依りて生ずる面積に高さを乘じたるものの三分の一に等し.

mハ三角形ガ廻轉スルトキ軸トナル邊,lハ其ノ

底,dハ其ノ高サ,rハ邊mニ對スル頂點ニテ生ズル圓ノ半徑,Vハ三角形ノ廻轉シテ生ズル體積ナルトキハ,



$$V=\frac{1}{3}d.\pi rl$$

ナルコトヲ證セムトス.

證 68款ニ依リ $V=\frac{1}{3}\pi r^2.m,$

然ルニ $rm=dl,$ ［平.129款(2)］

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi r.dl=\frac{1}{3}d.\pi rl.$$

102. 定理 球の體積は其の面積に其の半徑の三分の一を乘じたるに等し.

球ノ半徑ヲr,其ノ面積ヲS,其ノ體積ヲVトスルトキハ,

$$V=S.\frac{1}{3}r$$

ナルコトヲ證セムトス.

證 球ニ外切スル多面體アリト想像シ,其ノ各面ヲ底トシ球ノ中心ヲ共通ノ頂點トスル角錐ヲ作ルトキハ是等ノ角錐ノ高サハ何レモ球ノ半徑ニ等シカル可シ.

故ニ　各々ノ角錐ノ和＝各々ノ底面ノ和×$\frac{1}{3}r$.

然ルニ　極限ニ於テ　各々ノ角錐ノ和＝球ノ體積,

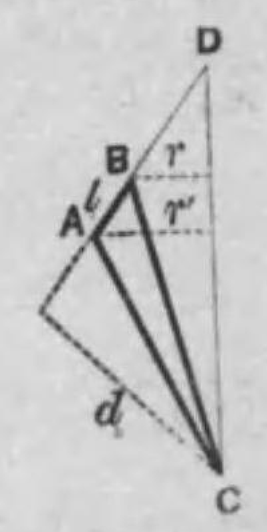
各々ノ底面ノ和＝球ノ面積S,

$$\therefore\ V=S.\frac{1}{3}r.$$

103. 系 球ノ徑ヲdトスレバ

$$V=S.\tfrac{1}{3}r=\tfrac{4}{3}\pi r^3=\tfrac{1}{6}\pi d^3.$$

例題 21. 球ノ體積ハ之ニ外切スル圓壔ノ體積ノ三分ノ二ナルコトヲ證セヨ.



22. 任意ノ三角形ABCガ其ノ一角ノ頂點Cヲ過ル直線ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル體積ハ邊ABニテ生ズル面積ニCヨリ引ケル高サノ三分ノ一ヲ乘ジタルニ等シ.

23. 球帶ノ底ノ一ツガ零トナリタル極限ノ場合ニ於ケル面積,卽チ96款ノ圖ニ於テ弧ABガAFヲ軸トシ廻轉シテ生ズル面積ハABヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

24. 二ツノ平行平面ノ間ニ夾マレタル球ノ一部ヲ**球盤**ト云フ. 今球盤ノ二ツノ底[卽チ截口]ノ半徑ヲr',r''トシテ高サ[平行二平面間ノ距離]ヲhトセハ其ノ體積Vハ次ノ如シ.

$$V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

例題 25. 球面三角形ノ各角ノ和ヨリ二直角ヲ減ジタル殘リヲ**球面過剩**ト云フ. 而シテ球面三角形ノ面積ト半球ノ面積トノ比ハ球面過剩ト四直角トノ比ニ等シ.

26. 四面體ノ各面ノ外接圓ノ中心ニ於テ其ノ面ニ作レル垂線ハ同一ノ點ニ交ル.

27. 四面體ノ六ツノ二面角ヲ二等分スル六ツノ平面ハ同一ノ點ニ交ル.

28. 一定點ヨリ他ノ一定點ヲ過ル直線ヘ引ケル垂線ノ趾ノ軌跡如何.

29. 相交ル三ツノ球ノ截口ノ平面ハ同一ノ直線ニ於テ交ル.

30. 地球ヲ眞ノ球ナリト假定シ海面上,徑ダケノ高サニ昇ルトキハ地球ノ面ノ幾分ヲ見得可キカ.

補習問題

補習問題

1. AB, AC, AD ハ同一ノ點ヨリ發シ同一ノ平面上ニアラザル等長ノ三ツノ直線ナルトキ A ヨリ平面 BCD ヘ引ケル垂線ノ趾ハ三角形 BCD ノ內切圓ノ中心ナリ.

2. 22 款ノ定理ノ圖ニ於テ $AC, A'C'$ ガ同一ノ平面上ニアラザルトキ $A'C$ ヲ結ビ付ケ其ノ平面 N ニ交ル點ヲ D' スレバ $BDB'D'$ ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.

3. 前題ニ於テ AA' ノ中點ト CC' ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ平行四邊形 $BDB'D'$ ノ兩對角線ノ交點ヲ過ルコトヲ證セヨ.

4. こ1しゅ四邊形ノ各邊ノ中點ハ平行四邊形ノ頂點ナリ.

5. 相交ル二ツノ平面 M, N ノ各〻ニ一點ヅツ二點 A, B ヲ與ヘテ M, N ノ交リニ一點 P ヲ求メ $AP+PB$ ヲ最モ小ナラシメヨ.

6. 二面角ノ稜ノ上ノ一點ヨリ之ニ二ツノ斜線ヲ引キ一ツヅツ各面ニアラシムルトキハ其ノ間ノ角ハ二面角ノ平面角ヨリ大ナルカ又小ナルカ.

又此ノ角ノ大サハ如何ナル界限ノ間ニアルカ.

7. 立方體ノ各〻ノ稜ヲ對角線ニ垂直ナル平面ニ射影スルトキハ如何ナル多角形ヲ生ズルカ.

8. こ1しゅ四邊形ノ各角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

9. 四面角ヲ一ノ平面ニテ截リ其ノ截口ヲ平行四邊形ナラシメヨ.

10. 角錐ノ頂點ト底面トノ中央ニ於テ底ニ平行セル平面ニテ之ヲ截ルトキ各部ノ體積ノ比如何.

11. 四面體ノ各ノ頂點ヲ相對スル面ノ重心ニ結ビ付クル直線ハ同一ノ點ニ交ル.

12. 圓錐ノ側面積ハ其ノ底ノ面積ノ二倍ニシテ其ノ高サガ4寸ナルトキ底ノ半徑ハ如何.

13. M及ビNハ一點Pヨリ二ツノ平面ヘ引ケル垂線ノ趾ナルトキ此ノ二ツノ平面ノ交リノ線ハ平面MNPニ垂直ナリ.

14. 四面體ノ一ノ稜ヲ含ミ且相對スル稜ノ中點ヲ過ル平面ハ同一ノ點ニ交ル.

15. 四面體ノ各稜ノ中點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ同一ノ點ニ交ル.

16. 三面角ノ二ツノ二面角ガ相等シキトキハ其ノ面角ノ二ツハ相等シ.

又球面三角形ノ二ツノ角ガ相等シキトキハ之ニ對スル二ツノ邊ハ相等シ.

---

17. 多面體ヲ平面ニテ如何樣ニ截ルモ其ノ截口ガ恒ニ凸多角形ナルトキハ之ヲ**凸多面體**ト云フ. 凸多面體ニ於テ稜ノ數ヲE,面ノ數ヲF,頂點ノ數ヲVトスルトキハ E+2=F+V ナルコトヲ證セヨ. 之ヲおいれるノ定理ト云フ.*

18. 任意ノ多面體ノ面角ノ和ハ頂點ノ數ヨリ2ヲ減ジタルダケ四直角ヲ倍セルモノニ等シ.

19. 正十二面體ト正二十面體トハ各幾何ノ稜ヲモツカ.

20. 六ツヨリ少ナキ稜ニテハ多面體ヲ作ルコト能ハズ.

---

* 此ノ定理ハでかると[*Descartes*, 有名ナル佛國ノ數學者,西暦1596年生, 1650年死]ガ之ヲ知リ且コレヲ用ヒシニ拘ハラズおいれる[*Euler*, すういすノ數學大家,西暦1707年生,1783年死]ノ定理ト云フ. 此ノ定理ハ結晶學ニ於テ極メテ必要ナリ.

21. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ニ交ル．此ノ點ヲ過リテ平行六面體ノ相對スル面ノ間ニ引ケル直線ハ此ノ點ニテ二等分トナル．

點對稱［平面幾何學 43 頁］ト云ヘル語ヲ擴張シテ此ノ場合ニモ用ヒラル．卽チ平行六面體ハ**點對稱**ヲモチ其ノ對角線ノ交點ハ**對稱の中心**ナリ．

22. 正圓錐ヲバ其ノ軸ヲ含ム任意ノ平面ニテ截ルトキ其ノ截口ハ軸ニ關シテ線對稱［平面幾何學44頁］ヲモツ．

一ノ圖形［立體］ヲバ一定ノ直線ヲ含ム任意ノ平面ニテ截ルトキ其ノ截口ガ此ノ一定ノ直線ニ關シテ對稱ナレバ此ノ圖形ハ此ノ定直線ニ關シテ**線對稱**ヲモチ此ノ定直線ヲ**對稱の軸**ト云フ．

---

23. 一ノ平面ノ兩側ニ於テ之ニ垂直ナル直線中ニアリテ且等距離ナル二點ハ此ノ平面ニ關シテ**對稱なり**ト云ヒ，若シ一ノ圖形［立體］ヲ一ノ平面ニテ截ルトキ其ノ一方ニアル部分ノ各點ニ對シテ他ノ一方ノ部分ニ對稱點アルトキハ此ノ圖形ハ此ノ平面ニ關シテ**對稱なり**ト云フ．卽チ此ノ圖形ハ**平面對稱**ヲモツト云ヒ此ノ平面ヲ**對稱の面**ト云フ．

24. 半徑 3 寸及ビ 6 寸ナル二ツノ球ノ積體ノ和ニ等シキ體積ヲモツ球ノ半徑ヲ求メヨ．

25. 球面三角形ノ二ツノ邊ガ相等シキトキハ之ニ對スル角モ亦相等シ．

26. 球面三角形ノ各邊ガソレゾレ $80^\circ, 105^\circ, 110^\circ$ ナルトキ其ノ極三角形ノ各角ハ如何．

27. 正圓錐ノ側面上ノ一點ニ於テ之ニ切スル平面ヲ作ル法如何．

28.　等邊球面三角形ノ三ツノ角ハ相等シキコトヲ證セヨ.

29.　二等邊球面三角形ノ頂點ヨリ底ノ中點ヘ引ケル大圓ノ弧ハ,

(1)　頂角ヲ二等分シ,

(2)　底ニ垂直ニシテ,

(3)　本形ヲ二ツノ對稱球面三角形ニ分ツ.

30.　球面五角形ノ各角ノ和ハ六直角ヨリ大ニシテ十直角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

直線及び平面

垂直ナル二直線ハ平行ス.
[11

一ガ一平面ニ垂直ナルト
平面ニ垂直ナリ.　[12

平行スル二直線ハ互ニ平
[I. 13

一ハ他チ含ム各平面ニ平
[14

ニ平行スル直線ハ其ノ各
[15

垂直ナル二平面ハ平行ス.
[18

線ガ何レモ一ノ平面ニ平
等ノ二直線ノ定ムル平面
行ス.　[I. 17

平面ト第三ノ平面トノ交
リ.　[19

面ノ間ニ夾マレタル平行
シ.　[21

平面ノ一ニ垂直ナル直線
垂直ナリ.　[I. 18

テ一ノ平面ニ平行スル一
コトヲ得,而シテ唯一ツニ
[I. 19

ツノ平面ニテ截ラルル二
分線ハ比例チナス.　[22

上ニアラザル二直線ノ各
ハ一ツアリ而シテ唯一ツ
[24

線ハ二直線ノ間ニ引キ得
[I. 26

線ハ其ノ點ニ於テ球ニ切スル平面チ定ム
[III. 8 題]

XLV.　球ノ圓ノ周上ニ於ケル總テノ點ハ其ノ極[何レニテモ]ヨリ等距離ニアリ.　[85 款]

XLVI.　二ツノ對稱球面三角形ハ等積ナリ.
[93 款]

XLVII.　球面三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.　[III. 12 題]

XLVIII.　球面多角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ各邊ノ和ヨリ小ナリ.　[III. 13 題]

XLIX.　球面多角形ノ各邊ノ和ハ 360° ヨリ小ナリ.　[III. 14 題]

一ノ球面三角形ガ他ノ球面三角形ノ極三角形ナルトキハ後ノ三角形ハ又前ノ三角形ノ極三角形ナリ.　[III. 15 題]

I.　二ツノ球面三角形ガ互ニ他ノ極三角形ナルトキ其ノ一ノ各角ハ他ノ一ノ之ニ對スル邊ト互ニ補角チナス.　[III. 16 題]

II.　球面三角形ノ各角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ.　[III. 17 題]

III.　球面五角形ノ各角ノ和ハ六直角ヨリ大ニシテ十直角ヨリ小ナリ.　[補習 30 題]

IV.　球ノ半徑チ r トスレバ

(1)　球ノ面積 $S=4\pi r^2$.　[96 款]

(2)　月形ノ面積 $=\frac{\alpha}{360}S=\frac{\alpha}{90}\pi r^2$.　[98 款]

但 α ハ月形ノ角ナリ.

(3)　球帶ノ面積 $=2\pi rh$.　[100 款]

但 h ハ球帶ノ高サナリ.

V.　球ノ體積 $V=S.\frac{1}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$.

但 d ハ球ノ徑ナリ.　[102, 103 款]

VI.　球盤ノ體積 $=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3$.

但 r', r'' ハ兩底ノ半徑ナリ.　[III. 24 題]

相等シキコ

底ノ中點ヘ

ニ分ツ;

角ヨリ大ニ

立體幾何學所載大要

平面を定むるには

I. 一直線ト其ノ直線上ニアラザル一點. [2款]

II. 同一直線上ニアラザル三點
III. 相交ル二直線
IV. 平行スル二直線
[3款]

二平面の交り

V. 二平面ノ交リハ一直線ナリ. [4款]

平面への垂線及び斜線

VI. 相交ル二直線ノ各〻ニ其ノ交點ニ於ケル垂線ハ前ノ二直線ノ定ムル平面ニ垂線ナリ. [6款]

VII. 一平面上[外]ノ一點ニ於テ[ヨリ]此ノ平面ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [7,8款]

VIII. 一平面外ノ一點ヨリ此ノ平面ニ垂線及ビ斜線ヲ引クトキハ [I, 5題]
(1) 垂線ノ趾ヨリ等距離ニ趾ヲモツ斜線ハ相等シ.
(2) 垂線ノ趾ヨリ遠キ距離ニ趾ヲモツ斜線ハ近キ距離ニ趾ヲモツ斜線ヨリ長シ.
而シテ 本題ノ逆モ亦眞ナリ.

IX. 一平面外ノ一點ヨリ此ノ平面へ引ケル直線ノ中ニテ垂線ハ最短ナリ. [I, 7題]

X. 一直線上ノ同一點ニ於テ之ニ引ケル總テノ垂線ハ此ノ直線ニ垂直ナル平面上ニアリ. [9款]

XI. 一直線上[外]ノ一點ヲ過リテ之ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [10款, I, 9題]

平行する直線及び平面

XII. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ平行ス. [11款]

XIII. 二平行直線ノ一ガ一平面ニ垂直ナルトキハ他モ亦同ジ平面ニ垂直ナリ. [12款]

XIV. 同一ノ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行ス. [I, 13題]

XV. 二平行直線ノ一ハ他ヲ含ム各平面ニ平行ス. [14款]

XVI. 二平面ノ交リニ平行スル直線ハ其ノ各平面ニ平行ス. [15款]

XVII. 同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ハ平行ス. [18款]

XVIII. 相交ル二直線ガ何レモ一ノ平面ニ平行スルトキハ是等ノ二直線ノ定ムル平面ハ前ノ平面ニ平行ス. [I, 17題]

XIX. 平行スル二平面ト第三ノ平面トノ交リハ平行直線ナリ. [19款]

XX. 平行スル二平面ノ間ニ夾マレタル平行直線ハ長サ相等シ. [21款]

XXI. 平行スル二平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ノ一ニモ亦垂直ナリ. [I, 18題]

XXII. 一點ヲ過リテ一ノ平面ニ平行スル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [I, 19題]

XXIII. 平行セル三ツノ平面ニテ截ラルル二直線ノ對應セル分線ハ比例ヲナス. [22款]

XXIV. 同一ノ平面上ニアラザル二直線ノ各〻ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル. [24款]
而シテ此ノ直線ハ二直線ノ間ニ引キ得ル最短線ナリ. [I, 26題]

垂直なる平

XXV. 一ノ平面ニ垂
平面ハ前ノ平面

XXVI. 二面角ノ稜ニ
ニ垂直ナリ.

XXVII. 一ツノ平面ノ
垂直ナル一ノ平
唯一ツニ限ル.

多 面

XXVIII. 三面角ニ於テ
和ハ他ノ一ツノ

XXIX. 凸多面角ニ於
ヨリ小ナリ.

XXX. 二ツノ三面角
ソレゾレ同シ順
三面角ハ相等シ.
トキハ如何[對稱

多 面

XXXI. 正多面體ハ五種
ズ.

XXXII. [おいれるノ定
E, 面ノ數ヲ F, 頂
$E+2=F+V$.

XXXIII. 側面積 S ヲ求ム
(1) 正角臺 $S=\frac{1}{2}l($
p 及ビ p' ハ底ノ
(2) 正圓臺 $S=\pi l(r$
但 r 及ビ r' ハ兩
(3) 正角錐 $S=\frac{1}{2}lp$.
(4) 正圓錐 $S=\pi rl$.

定むるには

直線上ニアラザル一點.

[2款]

アラザル三點

[3款]

線

面の交り

ハ一直線ナリ. [4款]

の垂線及び斜線

ノ各々ニ其ノ交點ニ於ケル垂

線ノ定ムル平面ニ垂線ナリ.

[6款]

ノ一點ニ於テ[ヨリ]此ノ平

線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯

[7,8款]

點ヨリ此ノ平面ニ垂線及ビ

キハ [I.5題]

趾ヨリ等距離ニ趾ヲモツ斜

趾ヨリ遠キ距離ニ趾ヲモツ

離ニ趾ヲモツ斜線ヨリ長シ.

ノ逆モ亦眞ナリ.

點ヨリ此ノ平面ヘ引ケル直

線ハ最短ナリ. [I.7題]

一點ニ於テ之ニ引ケル總テ

直線ニ垂直ナル平面上ニア

[9款]

ノ一點ヲ過リテ之ニ垂直ナ

ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一

[10款, I.9題]

平行する直線及び平面

XII. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ平行ス. [11款]

XIII. 二平行直線ノ一ガ一平面ニ垂直ナルトキハ他モ亦同ジ平面ニ垂直ナリ. [12款]

XIV. 同一ノ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行ス. [I.13題]

XV. 二平行直線ノ一ハ他ヲ含ム各平面ニ平行ス. [14款]

XVI. 二平面ノ交リニ平行スル直線ハ其ノ各平面ニ平行ス. [15款]

XVII. 同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ハ平行ス. [18款]

XVIII. 相交ル二直線ガ何レモ一ノ平面ニ平行スルトキハ是等ノ二直線ノ定ムル平面ハ前ノ平面ニ平行ス. [I.17題]

XIX. 平行スル二平面ト第三ノ平面トノ交リハ平行直線ナリ. [19款]

XX. 平行スル二平面ノ間ニ夾マレタル平行直線ハ長サ相等シ. [21款]

XXI. 平行スル二平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ノ一ニモ亦垂直ナリ. [I.18題]

XXII. 一點ヲ過リテ一ノ平面ニ平行スル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [I.19題]

XXIII. 平行セル三ツノ平面ニテ截ラルル二直線ノ對應セル分線ハ比例ヲナス. [22款]

XXIV. 同一ノ平面上ニアラザル二直線ノ各々ニ垂直ナル直線ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル. [24款]

而シテ此ノ直線ハ二直線ノ間ニ引キ得ル最短線ナリ. [I.26題]

垂直なる平面及び二面角

XXV. 一ノ平面ニ垂直ナル直線ヲ過ル總テノ平面ハ前ノ平面ニ垂直ナリ. [27款]

XXVI. 二面角ノ稜ニ垂直ナル平面ハ其ノ二面ニ垂直ナリ. [28款]

XXVII. 一ツノ平面ノ斜線ヲ過リテ其ノ平面ニ垂直ナル一ノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [30款]

多面角

XXVIII. 三面角ニ於テ其ノ面角ノ任意ノ二ツノ和ハ他ノ一ツノ面角ヨリ大ナリ. [37款]

XXIX. 凸多面角ニ於テ各々ノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ. [38款]

XXX. 二ツノ三面角ニ於テ其ノ三ツノ面角ガソレゾレ同ジ順ニ相等シキトキハ是等ノ三面角ハ相等シ. 若シ逆ノ順ニ相等シキトキハ如何[對稱ナリ]. [I.41題]

多面體

XXXI. 正多面體ハ五種ヨリ多クアルコト能ハズ. [43款]

XXXII. [おいれるノ定理] 凸多面體ノ稜ノ數ヲE, 面ノ數ヲF, 頂點ノ數ヲVトスレバ $E+2=F+V$. [補習17題]

XXXIII. 側面積Sヲ求ムルコト.

(1) 正角臺 $S=\frac{1}{2}l(p+p')$. 但lハ斜高, p及ビp'ハ底ノ周. [50款]

(2) 正圓臺 $S=\pi l(r+r')$. 但r及ビr'ハ兩底ノ半徑. [51款]

(3) 正角錐 $S=\frac{1}{2}lp$.

(4) 正圓錐 $S=\pi rl$. } [52款]

(5) 角壔 $S=hp$. 但hハ高サ. [53款]

(6) 圓壔 $S=2\pi rh$. [53款]

XXXIV. 體積Vヲ求ムルコト.

(1) 正角臺 $V=\frac{1}{3}h(B+\sqrt{BB'}+B')$. 但B及ビB'ハ兩底ノ面積. [70款]

(2) 正圓臺 $V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$ [70款]

(3) 角錐 $V=\frac{1}{3}hr$. [68款]

(4) 圓錐 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. [68款]

(5) 角壔 $V=Bh$. [64款]

(6) 圓壔 $V=\pi r^2h$. [64款]

球

XXXV. 球ヲ平面ニテ截ルトキ其ノ截口ハ圓ナリ. [72款]

XXXVI. 球ノ圓ノ軸ハ其ノ中心ヲ過リ,而シテ總テノ平行セル圓ハ同ジ軸ト同ジ極トヲ有ス. [74款]

XXXVII. 球ノ總テノ大圓ハ相等シク且何レモ球及ビ球面ヲ二等分ス. [75款]

XXXVIII. 球面ト球面トノ交リハ圓ナリ. [78款]

XXXIX. 球ノ外ノ一點ヨリ之ニ切スル總テノ直線ハ相等シク且切點ノ軌跡ハ圓ナリ. [80款]

XL. 球ノ半徑ノ一端ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ球ニ切ス [81款]

XLI. 球ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル各直線ハ球ニ切ス. [82款]

XLII. 球ノ圓ニ切スル直線ハ切點ヲ過リテ球ニ切スル平面上ニアリ. [83款]

XLIII. 球ニ切スル平面上ニ切點ヲ過リテ引ケル任意ノ直線ハ其ノ點ニ於テ球ニ切ス. [84款]

XLIV. 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル任意ノ二直線ハ其ノ點ニ於テ球ニ切スル平面ヲ定ム. [III.8題]

XLV. 球ノ圓ノ周上ニ於ケル總テノ點ハ其ノ極[何レニテモ]ヨリ等距離ニアリ. [85款]

XLVI. 二ツノ對稱球面三角形ハ等積ナリ. [93款]

XLVII. 球面三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ. [III.12題]

XLVIII. 球面多角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ各邊ノ和ヨリ小ナリ. [III.13題]

XLIX. 球面多角形ノ各邊ノ和ハ 360° ヨリ小ナリ. [III.14題]

L. 一ノ球面三角形ガ他ノ球面三角形ノ極三角形ナルトキハ後ノ三角形ハ又前ノ三角形ノ極三角形ナリ. [III.15題]

LI. 二ツノ球面三角形ガ互ニ他ノ極三角形ナルトキ其ノ一ノ各角ハ他ノ一ノ之ニ對スル邊ト互ニ補角ヲナス. [III.16題]

LII. 球面三角形ノ各角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ. [III.17題]

LIII. 球面五角形ノ各角ノ和ハ六直角ヨリ大ニシテ十直角ヨリ小ナリ. [補習30題]

LIV. 球ノ半徑ヲrトスレバ

(1) 球ノ面積 $S=4\pi r^2$. [96款]

(2) 月形ノ面積 $=\frac{\alpha}{360}S=\frac{\alpha}{90}\pi r^2$. [98款] 但$\alpha$ハ月形ノ角ナリ.

(3) 球帶ノ面積 $=2\pi rh$. [100款] 但hハ球帶ノ高サナリ.

LV. 球ノ體積 $V=S.\frac{1}{3}r=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi d^3$. 但$d$ハ球ノ徑ナリ. [102, 103款]

LVI. 球盤ノ體積 $=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3$. 但$r', r''$ハ兩底ノ半徑ナリ. [III.24題]

平面幾何學所載大要一

普通公理　[8款]

I.　全量ハ其ノ各部分ノ和ニ等シ.
故ニ　全量ハ其ノ部分ヨリ大ナリ.

II.　同ジ量或ハ相等シキ量ニ等シキ量ハ相等シ.

III.　等シキ量ニ等シキ量ヲ加フレバ其ノ和ハ相等シ.

IV.　等シキ量ヨリ等シキ量ヲ減ズレバ其ノ殘リハ相等シ.

V.　等シキ量ト不等ノ量トノ和ハ等シカラズ. 大ナル量ニ加ヘタル和ガ他ヨリ大ナリ.

VI.　等シキ量ヲ不等ノ量ヨリ減ズレバ其ノ殘リハ等シカラズ. 大ナル量ヨリ減ジタル殘リガ他ヨリ大ナリ.

VII.　等シキ量ヨリ不等ノ量ヲ減ズレバ其ノ殘リハ等シカラズ. 大ナル量ヲ減ジタル殘リガ他ヨリ小ナリ.

VIII.　等シキ量ノ同ジ倍數ノ量ハ相等シ. 又等シキ量ノ同ジ分數ノ量モ相等シ

幾何學公理　[14款]

I.　圖形ハ其ノ形狀及ビ大サヲ變ズルコトナクシテ其ノ位置ヲ變ジ得可シ

II.　全ク相合セシメ得ル大サハ相等シ.

III.　一點ヲ通リテ一ツノ方向ニ一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

換言スレバ　一點ト一ノ方向トハ一直線ヲ決定ス.

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1)　二點ハ一直線ヲ決定ス.

換言スレバ　二點ヲ通有スル二直線ハ全ク相合シテ一直線トナル.

(2)　相異ナル二直線ハ唯一點ニ於テ相交リ得ルノミ.

IV.　二點間ノ最短徑ハ其ノ間ノ直線ナリ.

V.　一點ヲ過リ一直線ニ平行スル一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル　[28款]

直線

I.　有限直線ABノ中點ヲM,MB上ノ任意ノ點ヲM′トスレバ $AM'+BM'=2AM$,
$AM'-BM'=2MM'$.　[I.6題]

II.　一直線上ノ一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.　[I.18題]

III.　一直線外ノ一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル　[I.34題]

IV.　一直線XY外ノ一點Pヨリ之ニ引ケル總テノ分線ニ就キテ

(1)　垂線PAハ最短ナリ.

(2)　AD＝ABナルトキハPD＝PB.

(3)　AC＞ABナルトキハPC＞PB.　[I.52題]

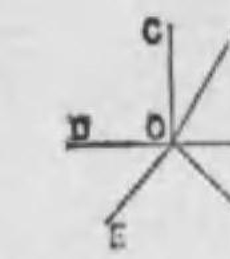
V.　IVノ逆.　[I.52題]

VI.　一直線外ノ一點ヨリ相等シキ二ツノ分線ヲ引クコトヲ得,唯二ツニ限ル. 而シテ是等ハ⊥ノ異傍ニアリ.　[I.53題]

角

I.　$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\ldots+\widehat{FOA}=4\hat{R}$ [16款]

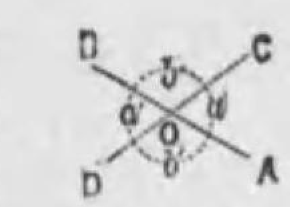
II.　AOD ガ一直線ナルトキハ



$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}=\widehat{AOB}+\widehat{BOD}=2\hat{R}$.　[17款]

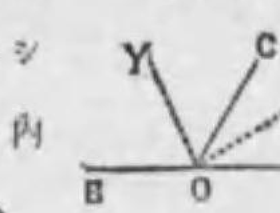
III.　IIノ逆.　[23款]

IV.　二直線 AB,CD ガ相交ルトキハ $\hat{a}=\hat{a}'$, $\hat{b}=\hat{b}'$.　[21款]

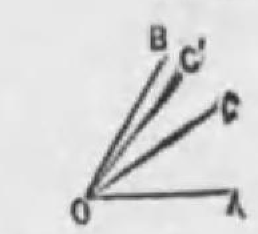


V.　AOB ハ一直線ニシテ $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ ナルトキハ COD ハ一直線ナリ.　[I.17題]

VI.　$\widehat{AOC}+\widehat{COB}=2\hat{R}$ ニシテ OX,OY ハ $\widehat{AOC}$ ノ內外二等分線ナルトキハ $\widehat{XOY}=\hat{R}$.　[I.12題]

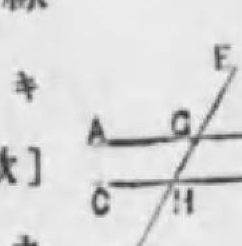


VII.　$\widehat{AOB}$ ノ二等分線ヲ CO,$\widehat{BOC}$ 內ニ引キタル任意ノ直線ヲ C′O トスレバ　$\widehat{AOC'}+\widehat{BOC'}=2\widehat{AOC}$,
$\widehat{AOC'}-\widehat{BOC'}=2\widehat{COC'}$.　[I.7題]



平行直線

I.　$\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$ ナルトキハ AB∥CD.　[26款]



II.　$\widehat{AGH}+\widehat{GHC}=2\hat{R}$ ナルトキハ AB∥CD.　[I.22題]

III.　$\widehat{EGA}=\widehat{GHC}$ ナルトキハ AB∥CD.　[I.23題]

IV.　Iノ逆.　[29款]

V.　IIノ逆.　[I.26題(1)]

VI.　IIIノ逆.

VII.　同ジ直線

VIII.　平行直線

IX.　同ジ直線
行ス.

X.　AD∥BE
ヲAB＝BC
ハDE＝EF.

XI.　AD∥BE

XII.　XIノ逆.

多

I.　n邊ノ多角

II.　n邊ノ多角

III.　正多角形ハ
シ.

IV.　等角多角形

V.　等邊多角形

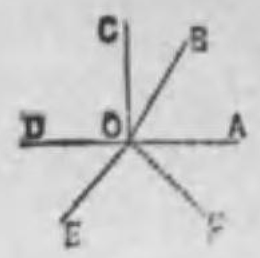
VI.　正多角形ノ

VII.　同邊數ノ正
對應邊ヲ a, b
ノ半徑ヲ r, r'
$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=$

VIII.　相似多角形
比ニ等シ.

角

I. $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\ldots+\widehat{FOA}=4\hat{R}$ [16款]

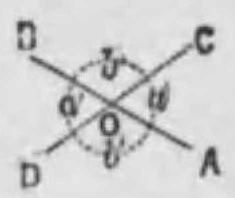


II. AOD ガ一直線ナルトキハ

$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}=\widehat{AOB}+\widehat{BOD}=2\hat{R}$. [17款]

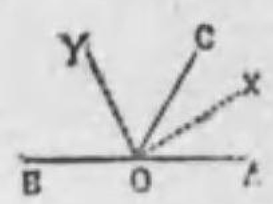
III. II ノ逆. [23款]

IV. 二直線 AB,CD ガ相交ルトキハ $\hat{a}=\hat{a}'$, $\hat{b}=\hat{b}'$, [21款]

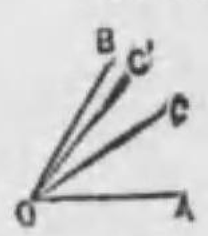


V. AOB ハ一直線ニシテ $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ ナルトキハ COD ハ一直線ナリ. [I. 17 題]

VI. $\widehat{AOC}+\widehat{COB}=2\hat{R}$ ニシテ OX,OY ハ $\widehat{AOC}$ ノ內外二等分線ナルトキハ $\widehat{XOY}=\hat{R}$. [I. 12 題]

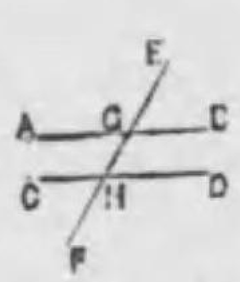


VII. $\widehat{AOB}$ ノ二等分線ヲ CO, $\widehat{BOC}$ 內ニ引キタル任意ノ直線ヲ C′O トスレバ $\widehat{AOC'}+\widehat{BOC'}=2\widehat{AOC}$, $\widehat{AOC'}-\widehat{BOC'}=2\widehat{COC'}$. [I. 7 題]



平行直線

I. $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$ ナルトキハ AB∥CD. [26款]



II. $\widehat{AGH}+\widehat{GHC}=2\hat{R}$ ナルトキハ AB∥CD. [I. 22 題]

III. $\widehat{EGA}=\widehat{GHC}$ ナルトキハ AB∥CD. [I. 23 題]

IV. I ノ逆. [29款]

V. II ノ逆. [I. 26 題(1)]

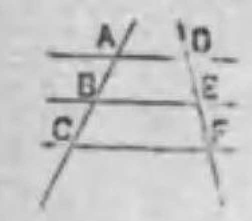
VI. III ノ逆. [I. 26 題(2)]

VII. 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ平行ス [27款]

VIII. 平行直線ハ共通ノ垂線ヲ有ス. [30款]

IX. 同ジ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行ス. [I. 30 題]

X. AD∥BE∥CF ニシテ AB=BC ナルトキハ DE=EF. [I. 69 題]



XI. AD∥BE∥CF ナルトキハ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$ [IV. 9 題]

XII. XI ノ逆. [IV. 19 題]

多角形

I. n 邊ノ多角形ノ各角ノ和 $=(2n-4)\hat{R}$. [42款]

II. n 邊ノ多角形ノ外角ノ和 $=4\hat{R}$. [43款]

III. 正多角形ハ圓ニ內接又ハ外切シ得可シ. [II. 53. 58 題]

IV. 等角多角形ハ圓ニ內接シ得ルカ. [II. 54 題]

V. 等邊多角形ハ圓ニ外切シ得ルカ. [II. 59 題]

VI. 正多角形ノ面積 $=\frac{1}{2}\overline{邊心距}$.周. [123款]

VII. 同邊數ノ正多角形ハ相似形ナリ. [153款]

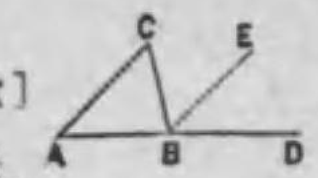
對應邊ヲ $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$, 外接圓ノ半徑ヲ r, r' トスレバ [154款]

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots=\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{a'+b'+c'+\ldots\ldots}$$

VIII. 相似多角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ. [161款]

三角形

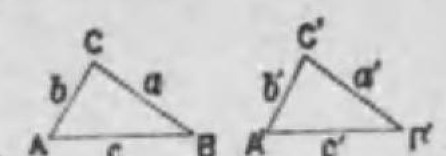
I. △ABC ニ於テ $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$, [37款]



II. $\widehat{CBD}=\hat{A}+\hat{C}$, [38款]

III. 二ツノ△ノ全等ノ場合.

(1) $c=c'$, $a=a'$, $\hat{B}=\hat{B}'$ ナルトキ. [45款]



(2) $c=c'$, $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, ナルトキ [46款]

[一邊ト任意ノ二角ガ相等シキトキハ此ノ場合ニ歸ス]

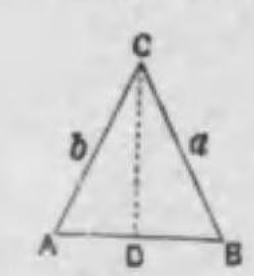
(3) $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ ナルトキ [54款]

(4) $\hat{A}=\hat{A}'$, $b=b'$, $a=a'$, $a>b$ ナルトキ. [55款(1)]

IV. 二ツノ△ノ兩意ノ場合.

$\hat{A}=\hat{A}'$, $b=b'$, $a=a'$, $a<b$ ナルトキハ $\hat{B}=\hat{B}'$, 或ハ $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$. [55款(2)]

V. $a=b$ ナルトキハ $\hat{A}=\hat{B}$. [48款]



VI. V ノ逆. [51款]

VII. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ヲ直角ニ二等分ス. 并ニ其ノ逆. [49款]

VIII. 二等邊三角形ノ底ヘ引ケル中線ハ底ノ垂直二等分線ニシテ又頂角ノ內二等分線ナリ. [I. 48 題]

IX. 二等邊三角形 ABC ノ底BC上ノ任意ノ點ヲPトスルトキハ

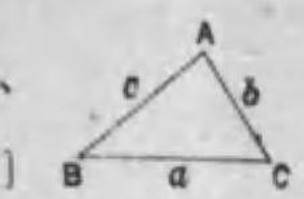
$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$.

若シ P ガ BC ノ延線上ニアレバ

$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP$. [III. 45 題]

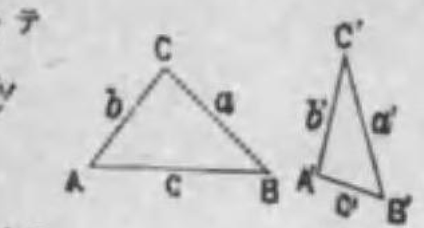
X. △ABC ニ於テ

(1) $c>b$ ナルトキハ $\hat{C}>\hat{B}$. [I. 44 題]



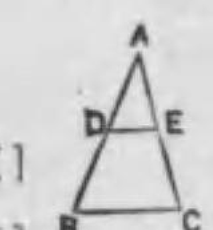
(2) $\hat{C}>\hat{B}$ ナルトキハ $c>b$. [I. 47 題]

XI. 二ツノ△ニ於テ $a=a'$, $b=b'$, $\hat{C}>\hat{C}'$ ナルトキハ $c>c'$. [56款]



XII. XI ノ逆. [57款]

XIII. △ABC ニ於テ AD=DB, DE∥BC ナルトキハ AE=EC. [I. 68 題]



XIV. XIII ノ逆. [I. 71 題]

XV. △ノ三ツノ中線ハ同一點[重心]ニ交ル. [I. 83 題]

XVI. △ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一點[外心]ニ交ル. [II. 44 題]

XVII. △ノ各角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル⊥ハ同一點[垂心]ニ交ル. [II. 45 題]

XVIII. △ノ各角ノ內二等分線ハ同一點[內心]ニ交ル. [II. 48 題]

XIX. △ノ一角ノ內二等分線ト他ノ二角ノ外二等分線トハ同一點[傍心]ニ交ル. [II. 49 題]

XX. $\triangle=\frac{1}{2}$ 底.$\overline{高サ}$. [121款]

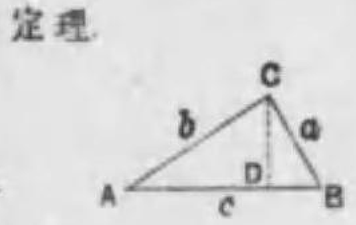
$\triangle=\frac{1}{2}$(等底等高ノ▱). [122款]

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. [III. 48 題]

XXI. ぴたごらすノ定理

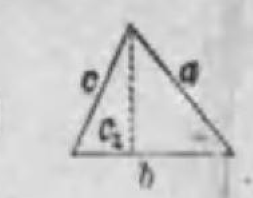
C ヲ $\hat{R}$ トセル△ニ於テ $c^2=a^2+b^2$. [133款]



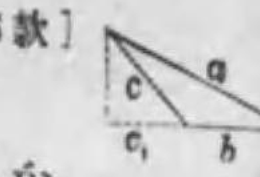
XXII. $\overline{AC}^2=AB.AD$. [134款]

XXIII. $\overline{CD}^2=AD.BD$. [III. 35 題]

XXIV. $a^2=b^2+c^2-2bc_1$ [135款]



XXV. $a^2=b^2+c^2+2bc_1$. [136款]

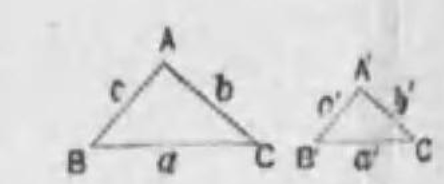


XXVI. △ABC ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} a^2<b^2+c^2 \text{ ナレバ } \hat{A}<\hat{R} \\ a^2=b^2+c^2 \text{ ナレバ } \hat{A}=\hat{R} \\ a^2>b^2+c^2 \text{ ナレバ } \hat{A}>\hat{R} \end{array}\right\}$$ [137款]

XXVII. 二ツノ△ノ相似ノ場合.

(1) $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$ ナルトキ. [148款]



(2) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ナルトキ. [150款]

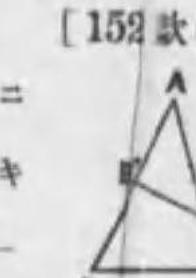
(3) $\hat{A}=\hat{A}'$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ ナルトキ. [151款]

(4) $\hat{B}=\hat{B}'$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, $b>c$ ナルトキ. [152款(1)]

XXVIII. 二ツノ△ニ於テ

$\hat{B}=\hat{B}'$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, $b<c$ ナルトキハ $\hat{C}=\hat{C}'$, 或ハ $\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$. [152款(2)]

XXIX. △ABC, △AB′C′ ニ於テ兩形ノ $\hat{A}$ ガ相等シキトキハ $\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AB.AC}{AB'.AC'}$ [159款]

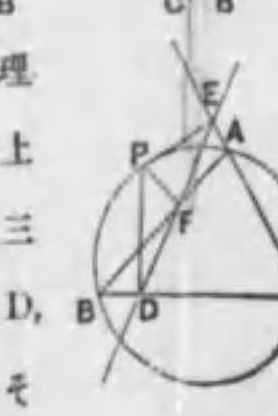


XXX. △ABC∽△A′B′C′ ナルトキハ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$ [160款]

XXXI. しむそんノ定理

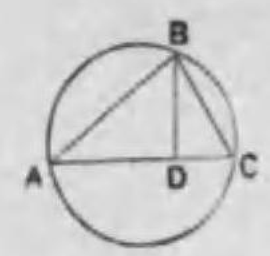
△ABC ノ外接圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ三邊ヘ引ケル垂線ノ趾D, E, F ハ同一直線[しむそん線又垂趾直線]上ニアリ. [II. 66 題]



XXXII. ぽんすれーノ定理. △ABC ノ垂心ヲOトスレバAO, BO, CO ノ中點,三垂線ノ趾,三邊ノ中點ハ同一圓周［九點圓］上ニアリ. ［II.68題］

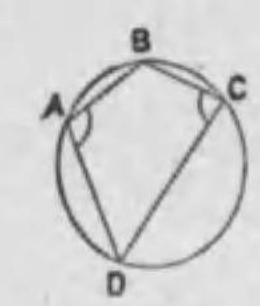
XXXIII. △ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R, BD ヲ AC ニ垂線ナリトスレバ AB.BC = 2R.BD,

$$R = \frac{abc}{4\triangle}.$$ ［IV.52.53題］



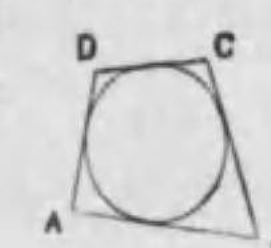
四 邊 形

I. 圓ニ内接スル四邊形ニ於テ $\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$, $\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$. ［95款］



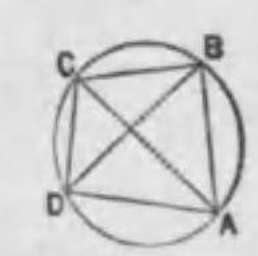
II. I ノ逆. ［96款］

III. 圓ニ外切スル四邊形ニ於テ AB + CD = AD + BC. ［97款］



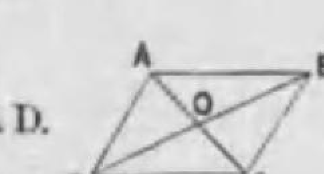
IV. III ノ逆. ［98款］

V. 圓ニ内接スル四邊形ニ於テ AB.CD + AD.BC = AC.BD. ［IV.55題］



VI. ▱ABCD ニ於テ

(1) AB = CD, BC = AD. ［59款］

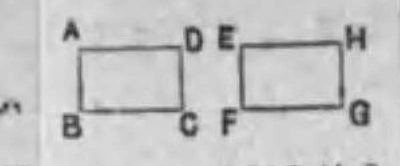


(2) $\hat{A}=\hat{C}$, $\hat{B}=\hat{D}$. ［60款］

(3) AO = OC, BO = OD. ［I.65題］

(4) ▱ABCD ノ面積ハ底ト高サトノ包ム矩形ニ等シ. ［119款］

VII. AB = EF, BC = FG ナルトキハ ▭ABCD = ▭EFGH. ［123款］



VIII ▭ABCD = 底 × 高サ. ［128款］

IX. 等高ノ矩形ハ底ニ比例シ, ［157款］

等底ノ矩形ハ高サニ比例ス. ［158款］

X. X, Y, … ハ分線, XY, XZ, … ハ矩形, $X^2, Y^2, \ldots$ ハ正方形トスレバ

(1) $X(Y+Z) = XY + XZ$, ［130款1］

(2) $(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$. ［130款2］

(3) $X^2 = 4\left(\frac{X}{2}\right)^2$. ［130款3］

(4) $(X-Y)^2 = X^2 + Y^2 - 2XY$. ［130款4］

(5) $X^2 - Y^2 = (X+Y)(X-Y)$. ［130款5］

圓

I. 圓ハ中心ニ關シテ對稱ナリ. ［II.5題］

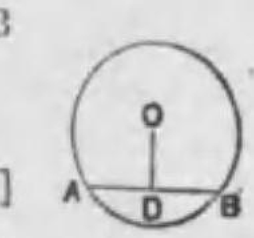
II. 圓ハ其ノ任意ノ徑ニ關シテ對稱ナリ. ［II.6題］

III. 中心ヨリ一點マデノ距離ヲ d, 圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{點ガ圓内ニアレバ} & d<r \\ \text{點ガ圓周上ニアレバ} & d=r \\ \text{點ガ圓外ニアレバ} & d>r\end{array}\right\}$$ ［II.3題］

IV. III ノ逆. ［II.4題］

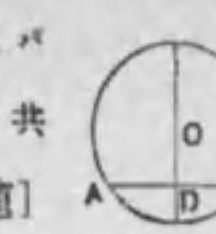
V. 中心ヲOトシ OD ⊥ AB ナルトキハ AD = BD. ［66款］



VI. V ノ逆. ［67款］

VII. 弦 AB ノ垂直二等分線ハ中心ヲ通過ス. ［II.10題］

VIII. OD ヲ兩方ヘ引キ延バストキハ弦ABヲ二分ツ共軛弧ヲ二等分ス. ［II.11題］



IX. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ. ［68款］

X. IX ノ逆. ［69款］

XI. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ不等ノ二弦ニ就キテ其ノ大ナル方ハ中心ニ近ク小ナル方ハ遠シ. ［II.15題］

XII. XI ノ逆. ［II.16題］

XIII. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ. ［II.17題］

XIV. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ中心角ガ不等ナレバ大ナル中心角ハ大ナル弧ノ上ニ立ツ. ［II.18題］

XV. XIII, XIV ノ逆. ［II.19題］

XVI. 圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ. ［73款］

XVII. 圓ノ同ジ弓形ニアル角ハ相等シ. ［75款］

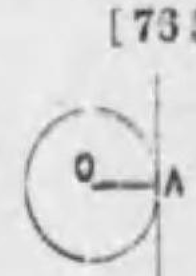
XVIII. XVII ノ逆. ［II.27題］

XIX. 圓内［或ハ外］ニテ相交ル二弦ノ間ノ角ハ其ノ夾ム弧ノ和［或ハ差］ノ半分ニテ測度セラル. ［II.30題］

XX. 弓形ニ於ケル角ハ其ノ弓形ガ半圓ヨリモ大,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ小ナルニ從ヒ鋭角,或ハ直角,又ハ鈍角ナリ. ［73款］

XXI. XX ノ逆. ［77款］

XXII. 圓ノ切線ハ其ノ切點ニ引ケル半徑ニ垂線ナリ. 并ニ其ノ逆. ［II.34題］



XXIII. 切…
心ヲ過…

XXIV. AB…
線トシ…
スレバ…

XXV. AB…
トキハ…

XXVI. O, O…
トスレ…

XXVII. 二圓…
ニ於テ相…
レバ O, O…

XXVIII. (1) …
AP.PB = …
［1…

(2) PT…

XXIX. XXVI…

XXX. 圓ノ…
c = …

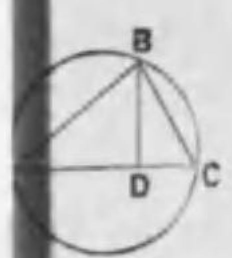
XXXI. 圓ノ…

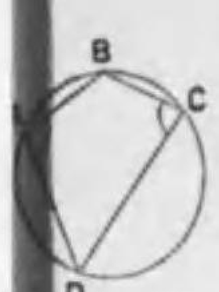
I. 軌跡ヲ…
ヲ證明ス…
(1) 線X…
ス.
(2) 要件…
アリ…
或ハ (1) ノ…
明スルモ…

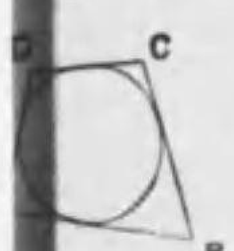
圓[九點圓]
[II.68題]

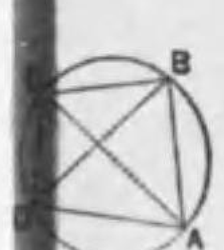
V.52.53題]

[60款]
[I.65題]
高サトノ包
[119款]



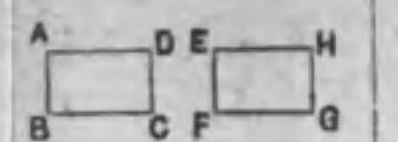






VII. AB=EF,

BC=FG ナルトキハ



□ABCD=□EFGH. [123款]

VIII □ABCD=底×高サ. [128款]

IX. 等高ノ矩形ハ底ニ比例シ, [157款]

等底ノ矩形ハ高サニ比例ス. [158款]

X. X, Y, ... ハ分線, XY, XZ, ... ハ矩形, X^2, Y^2, ... ハ正方形トスレバ

(1) $X(Y+Z)=XY+XZ$, [130款1]

(2) $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$. [130款2]

(3) $X^2=4\left(\frac{X}{2}\right)^2$. [130款3]

(4) $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY$. [130款4]

(5) $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$. [130款5]

圓

I. 圓ハ中心ニ關シテ對稱ナリ. [II.5題]

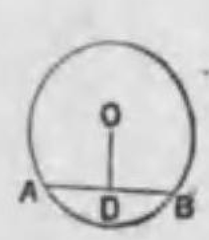
II. 圓ハ其ノ任意ノ徑ニ關シテ對稱ナリ. [II.6題]

III. 中心ヨリ一點マデノ距離ヲ d, 圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{點ガ圓內ニアレバ} & d<r \\ \text{點ガ圓周上ニアレバ} & d=r \\ \text{點ガ圓外ニアレバ} & d>r\end{array}\right\}\ \text{[II.3題]}$$

IV. III ノ逆. [II.4題]

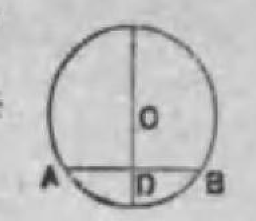
V. 中心ヲOトシOD⊥AB ナルトキハ AD=BD. [66款]



VI. V ノ逆. [67款]

VII. 弦ABノ垂直二等分線ハ中心ヲ通過ス. [II.10題]

VIII. OD ヲ兩方ヘ引キ延バストキハ弦ABニテ分ツ共軛弧ヲ二等分ス. [II.11題]



IX. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ. [68款]

X. IX ノ逆. [69款]

XI. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ不等ノ二弦ニ就キテ其ノ大ナル方ハ中心ニ近ク小ナル方ハ遠シ. [II.15題]

XII. XI ノ逆. [II.16題]

XIII. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ. [II.17題]

XIV. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ中心角ガ不等ナレバ大ナル中心角ハ大ナル弧ノ上ニ立ツ. [II.18題]

XV. XIII, XIV ノ逆. [II.19題]

XVI. 圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ. [73款]

XVII. 圓ノ同ジ弓形ニアル角ハ相等シ. [75款]

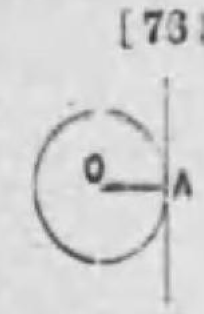
XVIII. XVII ノ逆. [II.27題]

XIX. 圓內[或ハ外]ニテ相交ル二弦ノ間ノ角ハ其ノ夾ム弧ノ和[或ハ差]ノ半分ニテ測度セラル. [II.30題]

XX. 弓形ニ於ケル角ハ其ノ弓形ガ半圓ヨリモ大, 或ハ之ニ等シク, 又ハ之ヨリ小ナルニ從ヒ鋭角, 或ハ直角, 又ハ鈍角ナリ. [73款]

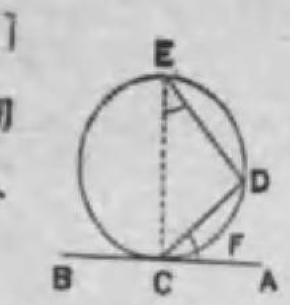
XXI. XX ノ逆. [77款]

XXII. 圓ノ切線ハ其ノ切點ヘ引ケル半徑ニ垂線ナリ. 并ニ其ノ逆. [II.34題]

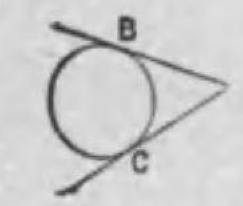


XXIII. 切點ヲ過リ切線ヘ引ケル垂線ハ中心ヲ過ル. [II.37題]

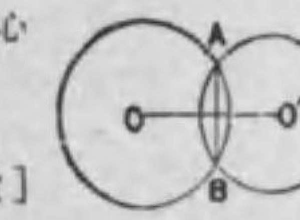
XXIV. AB ハ C ニ於ケル切線トシ CD ハ任意ノ弦トスレバ $\widehat{ACD}=\widehat{CED}$ [81款]



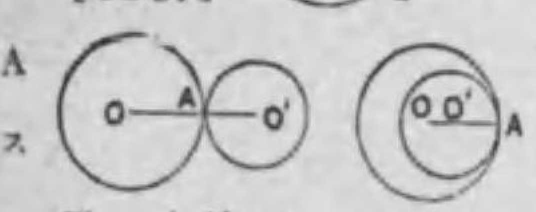
XXV. AB, AC ハ切線ナルトキハ AB=AC. [82款]



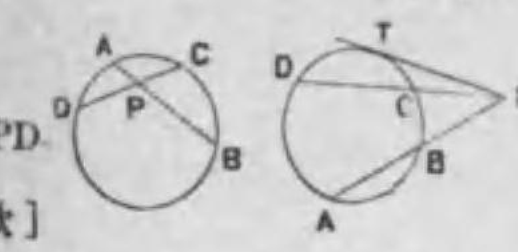
XXVI. O, O′ ヲ二圓ノ中心トスレバ OO′⊥AP. [84款]



XXVII. 二圓ガAニ於テ相切スレバ O, O′, A ハ同一直線上ニア. [85款]



XXVIII. (1) AP.PB=CP.PD. [138款]



(2) $\overline{PT}^2$=AP.BP. [139款]

XXIX. XXVIII ノ逆. [III.51題]

XXX. 圓ノ半徑ヲ r, 周ヲ c トスレバ $c=2\pi r$. [155款]

XXXI. 圓ノ面積 $=\pi r^2$. [156款]

軌　跡

I. 軌跡ヲ確定スルニハ次ノ二ツノ命題ヲ證明スルヲ要ス. [99款]

(1) 線Xノ上ニアル點ハ要件Aニ適ス.

(2) 要件Aニ適スル點ハ線Xノ上ニアリ.

或ハ(1)ノ代ニ(3)ヲ, (2)ノ代ニ(4)ヲ證明スルモ可ナリ.

(3) 要件Aニ適セザル點ハ線Xノ上ニアラズ.

(4) 線Xノ上ニアラザル點ハ要件Aニ適セズ.

II. 二定點A, Bヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハABヲ直角ニ二等分スル直線ナリ. [100款]

III. 一定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ圓ナリ. [101款]

IV. 一定直線ヨリ一定ノ距離ヲモツ點ノ軌跡ヲ求メヨ[之ニ平行スル二ツノ直線ナリ]. [II.73題]

V. 三角形ノ底ガ一定ニシテ之ニ對スル角ガ一定ナルトキ其ノ頂點ノ軌跡如何[圓ノ弧ナリ]. [II.76題]

VI. 相交ル二直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何[其ノ角ノ內外二等分線ナリ]. [II.77題]

比　例 [145款]

I. $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, $\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

II. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. [反轉ノ理]

III. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. [更迭ノ理]

IV. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $ad=bc$.

V. $ad=bc$ ナルトキハ次ノ一ツノ比例ガ成リ立ツ.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

VI. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. [合比ノ理]

VII. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a\backsim b}{b}=\frac{c\backsim d}{d}$. [分比ノ理]

VIII. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots$ ナルトキハ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots=\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$ [加比ノ理]

IX. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ナルトキハ $b^2=ac$, $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

X. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$ ナルトキハ $\frac{ax}{by}=\frac{cz}{dw}$.

XI. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a+b}{a\backsim b}=\frac{c+d}{c\backsim d}$. [IV.4題]

XII. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ ナレバ $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$. [IV.5題]

定理ノ關係

I. 定理ノ變態四種.

定理	AガBナレバCハDナリ.
ソノ裏	AガBナラザレバCハDナラズ.
ソノ逆	CガDナレバAハBナリ.
ソノ對偶	CガDナラザレバAハBナラズ.

[或定理ガ眞ナレバ其ノ對偶ハ必ズ眞ナリ. 或定理ガ眞ナルモ其ノ逆ト裏トハ必ズシモ眞ナラズ.]

II. 同一法

若シ唯一ツノXト唯一ツノYトアリテXガYナレバ, YハXナリ.

III. 轉換法. 一群ノ定理

$$\left.\begin{array}{l}A>B\ \text{ナルトキハ}\ C>D \\ A=B\ \text{ナルトキハ}\ C=D \\ A<B\ \text{ナルトキハ}\ C<D\end{array}\right\}$$

ヨリ其ノ逆

$$\left.\begin{array}{l}C>D\ \text{ナルトキハ}\ A>B \\ C=D\ \text{ナルトキハ}\ A=B \\ C<D\ \text{ナルトキハ}\ A<B\end{array}\right\}$$

ヲ推定スルコト.

明治三十七年十二月廿一日印刷
明治三十七年十二月廿五日發行
明治三十八年二月廿七日訂正再版印刷
明治三十八年三月三日訂正再版發行

著作權所有
複製不許

立體幾何學

定價金四拾錢

著者　長澤龜之助
東京市小石川區小日向臺町三丁目五十三番地

發行者　日本書籍株式會社
東京市日本橋區新右衛門町十六番地
代表者　大橋新太郎

印刷者　本間季男
東京市京橋區新榮町五丁目三番地

印刷所　東京活版株式會社
東京市京橋區新榮町五丁目三番地

發行所　日本書籍株式會社
東京市日本橋區新右衛門町

同代理店
大阪市東區淡路町四丁目

77-416ロ
1200501292226

終