教育部審定

簡易師範學校及簡易鄉村師範學校

算學

第五冊

編著者 任誠

正中書局印行

第五册　目次

第三篇　空間數量的研究及其測算

下　編

幾何圖形的測算

第七章　平面圖形的計算

第一節　多角形的面積……………………………………1

66. 矩形的面積……………………………………1

67. 二線段所包的矩形……………………………………3

68. 矩形面積的應用……………………………………6

69. 與多角形等積的作圖……………………………………8

習題二十六

第二節　面積的比例……………………………………11

70. 矩形,三角形面積的比……………………………………11

71. 比例中項……………………………………15

72. 三角形各邊的平方和……………………………………16

73. 弦的兩部分所包矩形……………………………………20

習題二十

第三節　圓周及圓面積……………………………………24

74. 正多角形的周……………………………………24

75. 圓周……27
76. 二弧的比……28
77. 正多角形及圓的面積……30
習題二十八

第八章* 立體圖形的計算

第一節* 多面體的計算……33

78.* 角柱及角錐的面積……33
79.* 角柱的體積……34
80.* 角錐的體積……39
81.* 正多面體的體積……43
習題二十九

第二節* 曲面體的計算……46

82.* 圓柱,圓錐的面積及體積……46
習題三十
83.* 球面及球帶的面積……52
84.* 球及附屬諸形體的體積……56
習題三十一

第九章 三角函數及高遠測量

第一節 銳角的三角函數……63

85. 三角函數的定義……63
86. 餘角及補角的三角函數……65
87. 特別角的三角函數……67
88. 任意銳角的三角函數……69
習題三十二

第二節　解三角形……74

89. 問題的分類及實施解法的步驟……74
90. 正弦及餘弦定律……77
91. 解三角形的實例……78
92.* 用對數解三角形……83

習題三十三

第三節* 高遠測量……85

93.* 測量用的術語及方位……86
94.* 測高……87
95.* 測遠……89

習題三十四

第四節* 三角函數的關係……94

96.* 同角的三角函數……94
97.* 三角恆等式及三角方程式……96

習題三十五

第四篇　小學教學的理論與實際

上編

理論的補充

第一章　級數及堆垛

第一節　三種重要級數……101

1. 等差級數的特性……101
2. 等差級數的和……103

習　題　一

3. 等比級數的特性……107

4. 等比級數的和……109

習　題　二

5. 調和級數的特性……113

習　題　三

第二節* 堆垛的一斑……116

6.* 貨品的陳列……116

7.* 彈丸的堆積……117

習　題　四

第二章　選擇及機會

第一節　順列……124

8. 選擇計算的原則……124

習　題　五

9. 相異事物的順列……126

10.* 各種順列……129

習　題　六

第二節　組合……133

11. 相異事物的組合……133

12.* 重複組合……135

習　題　七

第三節　二項定理……139

13. 二項式乘冪的展開……139

14.* 通項及任意指數……141

習　題　八

第四節　機會……143
15. 一事的成敗及其計算……143
16.* 複合事項的機會……146
習題九

第三章　函數圖解及統計大意

第一節　函數及其圖解法……151
17. 變數,常數及函數……151
18. 點的坐標及定點法……152
19. 函數的圖解法……155
習題十

第二節* 方程式的圖解……161
20.* 一次及二次方程式的圖解……161
21.* 聯立方程式的圖解……169
習題十一

第三節　統計大意……176
22. 統計及其材料的分配……176
23.* 比較的標準及其計算……177
習題十二
24. 圖表的製作……184
習題十三

第四章　應用問題的研究

第一節　構成應用問題的條件……201
25. 條件適足的應用題……201

26. 條件衝突的應用題……204
27. 條件重複的應用題……205
28. 擬應用題時必要的注意……207
習題十四
29. 條件過剩的應用題……210
30. 條件不足的應用題……212
習題十五
第二節 解應用題的基本法則……218
31. 應用加減的解法……218
習題十六
32. 應用乘除的解法……226
習題十七
第三節* 複雜應用題的解法……237
33.* 變換事實……237
34.* 化簡條件……239
35.* 逐步決定範圍……250
36.* 分析問題……252
37.* 其他解法……253
習題十八

第三篇

空間數量的研究及其測算

下編

幾何圖形的測算

第七章

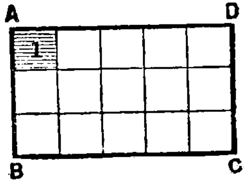
平面圖形的計算

第一節　多角形的面積

66. 矩形的面積　平面圖形內部所占有平面部分的全量,叫該圖形的面積.以單位線段的長為一邊作正方形,而以其面積為測定各平面圖形面積的單位.設某平面圖形的面積為單位面積的 n 倍,則其面積的數值即為 n. 二平面圖形的面積若相等,則稱二形相等,或稱等積,用等號(=)表之.與全等的意義不同.

定理92. 矩形 $(ABCD)$ 面積的數值 (A), 等於其二鄰邊的數值 (a, b) 相乘積.

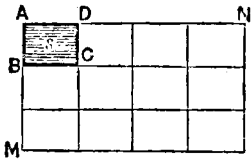
【證明】 (1) 設 a, b 同為整數.



(353)

如圖分 AB 為 a 等分, AD 為 b 等分,自各分點作二鄰邊的平行線,則矩形 $ABCD$ 被分為 ab 個單位面積,故 $A=ab$

(2) 設 a, b 同為分數,而以 $a=\frac{P}{m}, b=\frac{Q}{n}$; 但 m, n, P, Q 皆為整數.



(354)

如圖延長 AB, AD 至 M, N, 使

$$AM=mAB$$

$$AN=nAD$$

則 MN 亦為矩形,其二鄰邊 AM, AN 的數值為 P, Q, 且此矩形為原矩形的 mn 倍.

故 $$mn \cdot A=PQ$$

故 $$A=\frac{PQ}{mn}=\frac{P}{m} \cdot \frac{Q}{n}=ab.$$

若 a, b 中有一為整數而其他為分數,亦可依同理證明.故通常本定理得簡述如次:

矩形的面積等於其二鄰邊的相乘積.

又若以矩形的一邊為底,而以他邊為高,或以二鄰邊為矩形的長及闊,則本定理又可改述如次:

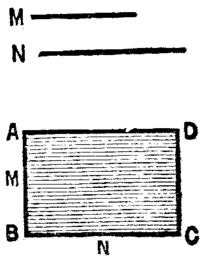
矩形的面積等於其底與高(長與闊)的相乘積.

系　正方形的面積等於其一邊的二乘冪(平方).

正方形的一邊若爲 AB, 其面積以 $\overline{AB}^2$ 表之, 稱 AB 上的正方形. 若一邊爲 A, 則以 A^2 表其面積, 稱 A 的平方.

67. 二線段所包的矩形

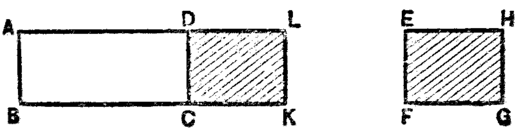
定義　矩形的二鄰邊若各各等於某某二線段, 則該形稱二線段所包的矩形. 如圖矩形 $ABCD$ 的二鄰邊 AB, BC 若各各等於二線段 M, N, 則此矩形稱 M, N 所包的矩形, 其面積可寫作 $\square MN$ 或 $\square AB \cdot BC$.



(355)

定理 93.　一邊相等的兩矩形*的和或差, 與其等邊及兩矩形他邊的和或差所包的矩形相等.

【假設】　在矩形 $ABCD$, $EFGH$ 中設 $AB=EF$, $BC>FG$.



(356)

【終結】　(1)　$\square AB \cdot BC + \square EF \cdot FG = \square AB \cdot (BC+FG)$.

*在不致相混的情形下, 凡簡稱矩形或其他圖形皆指其面積而言.

(2) $\square AB\cdot BC-\square EF\cdot FG=\square AB\cdot(BC-FG)$.

【證明】 (1) 延長 BC, 於 BC 上取 K, 使 $CK=FG$, 作矩形 $ABKL$, 則因矩形 DK 與矩形 EG 全等, 故

$$\square AK=\square AC+\square EG$$

而矩形 $ABKL$ 等於 AB 及 BK (卽 $BC+FG$) 所包的矩形, 故

$$\square AC+\square EG=\square AB\cdot(BC+FG)$$

故 $$\square AB\cdot BC+\square EF\cdot FG=\square AB\cdot(BC+FG)$$

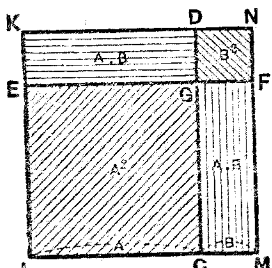
(2) 同理知

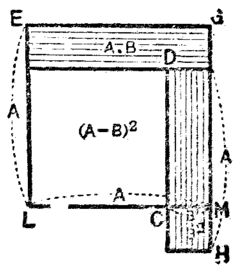
$$\square AB\cdot BC-\square EF\cdot FG=\square AB\cdot(BC-FG)$$

系 $$\square A\cdot B+\square A\cdot C-\square A\cdot D=\square A\cdot(B+C-D)$$

但 A, B, C, D 各爲一線段, 而 $B+C>D$.

定理 94. 二線段 (A, B) 的和(或差)的平方,等於其各線段的平方和加(或減) 2 倍二線段所包的矩形.





本定理得以式分别表明如次:

(1)　$(A+B)^2=A^2+B^2+2\square A\cdot B.$

(2)　$(A-B)^2=A^2+C^2-2\square A\cdot B.$

(如 357 圖,學生可自證之).

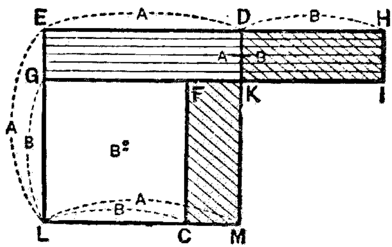
系 1. 某線段的平方,等於其半分的平方的 4 倍.

系 2. 面積相等的兩正方形,其邊亦相等.

定理 95. 二線段 (A, B) 的平方的差,等於二線段的和及其差所包的矩形.即

$$A^2-B^2=\square(A+B)(A-B) \qquad (\text{假設 } A>B)$$

(學生可由 358 圖自證之)



(358)

系 設線段 AB 上有任意分點 C, 並設其中點為 M, 則

$$AC\cdot CB=\overline{AM}^2-\overline{CM}^2$$

(359)

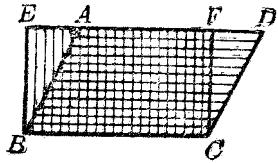
【注意】 上述三定理(93, 94, 95)及其系所列各式中,

若以各線的數值代入，則其結果與代數的乘法公式完全相同．如定理93的系卽爲 $ab \pm ac = a(b \pm c)$，其他可以類推．

68. 矩形面積的應用

(I) 平行四邊形的面積　設以平行四邊形看做立於其一邊上的平面圖形，則其一邊可看做底，底與對邊的距離可看做高．

定理96. 平行四邊形$(ABCD)$等於其等底等高的矩形$(EBCF)$．



(360)

【證明】 自底的兩端 B,C 作 BC 的垂線，與對邊 AD 或其延長交於 E, F，則 $EBCF$ 爲矩形，與 $ABCD$ 同底而又等高．

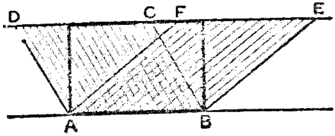
而 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (定理12)

故 $\square ABCD = \square EBCF$

故平行四邊形 $ABCD$ 與凡以 BC 爲底以 BE 爲高的矩形皆相等． (定理21，系4)

系1. 等底等高的平行四邊形等積．

【求證1】 凡有同底或等底而又同在二平行線間的平行四邊形皆相等（如361圖）．



(361)

系 2. 平行四邊形的面積,等於其底與高的相乘積.

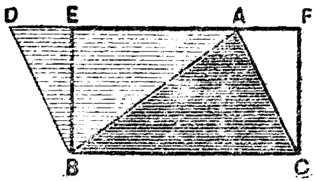
設平行四邊形的面積爲 A, 其底及高爲 a 及 h, 則

$$A=ah.$$

系 3. 等底而又等積的平行四邊形等高;等高而又等積的平行四邊形等底.

(II) 三角形的面積

定理 97. 三角形等於其等底等高的矩形的一半(學者可由次圖自證之).



(362)

系 1. 等底等高的三角形等積;等底(或等高)而又等積的三角形等高(或等底).

系 2. 三角形的面積,等於其底與高相乘積的一半.

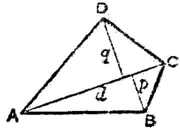
設三角形的面積為A,其底及高為a及h,則

$$A=\frac{1}{2}ah.$$

【求證 2】 三角形的中線二等分三角形.

【求證 3】 聯結同底而又等積的兩三角形頂點的直線,與其底平行或分底為二等分.

【求證 4】 設四邊形$ABCD$的對角線AC的長為d,自B及D所作AC的垂線的長為p及q,則此四邊形的面積為$\frac{1}{2}(p+q)d.$

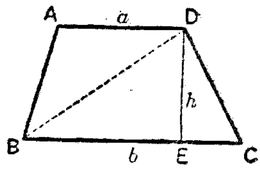


(363)

(III) 梯形的面積 梯形以兩底間的距離為高.

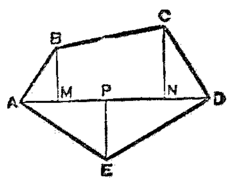
定理98. 梯形的面積(A)等於其兩底(a, b)的和及其高h相乘積的一半,即

$$A=\frac{1}{2}(a+b)h.$$



(364)

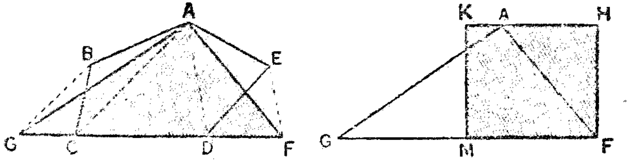
【問】 如365圖多角形$ABCDE$的面積如何?



(365)

69. 與多角形等積的作圖

作圖題28. 與所設多角形($ABCDE$)等積,作三角形,作矩形.



(266)

【解析】假定所設多角形$ABCDE$已變爲較少一邊的多角形$ABCF$,聯結AD, EF.則

$$\triangle ADF=\triangle ADE$$

故此兩三角形若以AD看做底,則其高非相等不可.

故　$$EF \parallel AD.$$

【作圖】(1) 作對角線AD,自E作EF平行於AD,與CD的延長線交於F,聯結AF.

(2) 再作對角線AC,依同法進行,即可得所求三角形AGF.

(3) 再作一矩形,與$\triangle AGF$等高,而以其底的一半爲底,則此矩形卽爲所求的矩形.

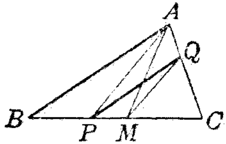
【證明】　$EF \parallel AD$　(作圖)

故　多角形$ABCF$ = 多角形$ABCDE$

以如此作圖法(卽先以所設圖形變爲較少一邊的圖形)賡續進行,終可變任意多角形爲三角形.

【求作一】與所設梯形等積作三角形,作矩形.

【求作二】 過$\triangle ABC$一邊BC上一點P作直線,平分此三角形的面積.



(367)

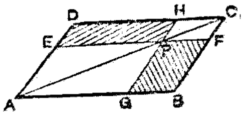
習題二十六

求證次列各題(1)—(4).

(1) 過平行四邊形對角線交點的直線,平分此平行四邊形.

(2) 在平行四邊形$ABCD$的對角線AC或其延長線上取一點P,則三角形PCB, PCD相等.

(3) 過平行四邊形$ABCD$的對角線AC上一點P,如圖作EF, GH與二鄰邊平行,則如此作成的平行四邊形PB及PD等積.



(363)

(4) 前題中P點若不在AC上,則$\square PB$與$\square PD$的差,等於$\triangle PAC$的二倍.

(5) 過所設一點作直線,平分所設平行四邊形

(6) 於二邊與所設二線段相等的三角形中,求作其面積最大的.

(7) 與所設三角形等積,而有一角等於所設角作三角形,作平行四邊形.

第二節　面積的比例

70. 矩形,三角形面積的比　因矩形的面積等於其底及高的相乘積,三角形的面積等於其底及高相乘積的一半,故可直接推知次列的定理爲眞.

定理99. (1) 兩矩形或兩三角形的面積的比,等於其底的比及其高的比的複比.

(2) 等高(等底)的矩形(或三角形)的比,等於其底(高)的比.

(3) 又可敍述如次:

等高(等底)的矩形或三角形的面積,與其底(高)成比例.

系1. 本定理得適用於平行四邊形.

系2. 正方形的比,等於其一邊的二乘比,卽:正方形的面積,與其一邊的平方成比例.

【求證1】 自 $\triangle ABC$ 頂點 A, 任作一直線交於其對

邊 BC 或 BC 的延長線,在此直線或其延長線上,任取一點 O, 則

$$\triangle ABD : \triangle ADC = \triangle AOB : \triangle AOC = BD : DC.$$

定理100. 四線段成比例時,內項所包的矩形與外項所包的矩形相等.

【假設】 設 A, B, C, D 爲四線段, 並設

$$A : B = C : D.$$

【終結】 $$\square B\cdot C = \square A\cdot D.$$

【證明】 設 a, b, c, d 爲 A, B, C, D 的數值, 則由假設知

$$a : b = c : d,$$

故 $$bc = ad.$$

然 $\square B\cdot C$, $\square A\cdot D$ 的數值各等於 bc, ad,

故 $$\square B\cdot C = \square A\cdot D.$$

系1. 三線段成比例時,其比例中項平方與其他二線段所包的矩形相等.

即:設 $A : C = C : B$, 則 $C^2 = \square A\cdot B.$

系2. 本定理及系1的逆亦眞.

即:設 $\square B\cdot C = \square A\cdot D$, 則 $A : B = C : D.$

設 $C^2 = \square A\cdot B$, 則 $A : C = C : D.$

【求證2】 設兩矩形或兩三角形等積, 則其高的比

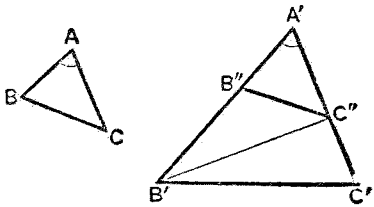
等於其底的比的反比.

【求證3】 設四線段 A, B, C, D 成比例,則 $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$,其逆亦眞.

【求作】 設 $x=\frac{ab}{c}$,求作 x 線段.

定理101. 兩三角形 $(ABC,\ A'B'C')$ 的一組角 (A, A') 若相等,則其面積的比,與夾此等角的二邊 $(AB,\ AC;\ A'B',\ A'C')$ 所包矩形的面積的比相等.

【證明】 以 $\triangle ABC$ 疊置於 $\triangle A'B'C'$ 上如圖,而命爲



(260)

$\triangle A'B''C''$,則因 $\triangle A'B''C''$ 與 $\triangle A'B'C''$ 及 $\triangle A'B'C''$ 與 $\triangle A'B'C'$ 皆等高,故

$$\frac{\triangle A'B''C''}{\triangle A'B'C''}=\frac{A'B''}{A'B'},\quad \frac{\triangle A'B'C''}{\triangle A'B'C'}=\frac{A'C''}{A'C'}$$

然
$$\frac{\triangle A'B''C''}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle A'B''C''}{\triangle A'B'C''}\times\frac{\triangle A'B'C''}{\triangle A'B'C'}$$

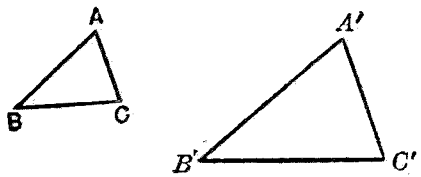
故
$$\frac{\triangle A'B''C''}{\triangle A'B'C'}=\frac{A'B''}{A'B'}\times\frac{A'C''}{A'C'}=\frac{A'B''\cdot A'C''}{A'B'\cdot A'C'}$$

即
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}.$$

【求證4】 當$\angle A$與$\angle A'$互為補角時,本定理亦成立.又若$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$,則$AB:A'B'=A'C':AC$.

定理102. 兩相似三角形($ABC, A'B'C'$)的面積的比,等於其相似比的二乘比($\overline{AB}^2, \overline{A'B'}^2$).

【證明】 於$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$中設$\angle A=\angle A'$,



(370)

則
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}$$

然
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

故
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

系1. 兩相似多角形的比,等於其相似比的二乘比,即等於其對應邊的平方比.

系2. 同邊數兩正多邊形的比,等於其外接圓或內切圓的半徑平方的比.

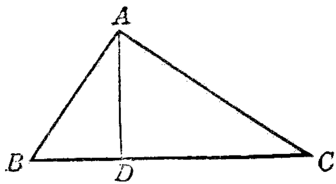
【問】 設 G 為 $\triangle ABC$ 的二中線 AD, BE 的交點，則 $\triangle AGB$ 與 $\triangle DGE$ 的比如何?

71. 比例中項

定理 103. 自直角三角形 (ABC) 的直角頂點 (A), 作斜邊 (BC) 的垂線 (AD), 則

(I) 垂線 (AD) 為其所分斜邊兩線段 (BD, CD) 的比例中項.

(II) 夾直角的一邊 $(AB$ 或 $AC)$ 為近於其邊的斜邊上一段 $(BD$ 或 $CD)$ 及斜邊 (BC) 的比例中項.



(371)

【證明】 (I) 因兩直角三角形 ABD, CBA 公有一銳角 B, 故

$$\triangle ABD \backsim \triangle CBA \tag{1}$$

同理知 $$\triangle CAD \backsim \triangle CBA \tag{2}$$

故 $$\triangle ABD \backsim \triangle CAD \tag{3}$$

由 (3) 得 $$BD : AD = AD : CD$$

故 $$\overline{AD}^2 = BD \cdot CD$$

(II) 由 (1) 得 $$BD : AB = AB : BC$$

故 $$\overline{AB}^2 = BD \cdot BC$$

又由 (2) 得 $$CD : AC = AC : BC$$

故 $$\overline{AC}^2 = CD \cdot BC$$

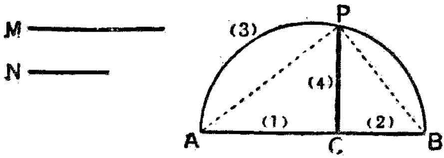
系 1. 直角三角形中夾直角二邊平方的比,等於自直角頂點引出的斜邊上垂線,所分斜邊的二部分的比.即

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CD \qquad (371\text{圖})$$

系 2. 自圓周上任意一點所作直徑的垂線的平方,等於該垂線所分直徑的二部分的積.

作圖題 29. 求所設二線段 (M, N) 的比例中項.

(由定理103系2,可得此題的作法如圖.)



(372)

【注意】 此題又可改述如次:

作正方形與所設矩形等積.

【求作 1】 作以 $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm 所表的線段.

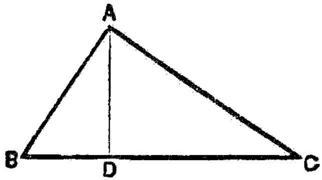
【求作 2】 作等於 $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$ 的線段的比.

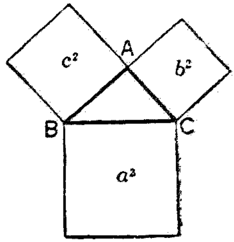
72. **三角形各邊的平方和**

定理104. 直角三角形斜邊的平方,等於他二邊的平方和*.

【假設】 於$\triangle ABC$中設$\angle BAC$爲直角.

【終結】 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.





(373)

【證明】 自A作垂線AD,則

$$\overline{AB}^2=BD\cdot BC$$

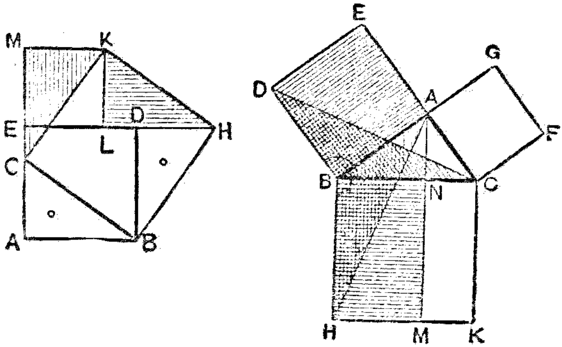
及 $$\overline{AC}^2=CD\cdot BC \qquad \text{(定理 103, II)}$$

故 $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC(BD+CD)$$

卽 $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC^2$$

【求證1】 就374圖證明本定理.

* 此爲彼塔哥拉斯(Pythagoras)氏在公元前(569—500)所發明.其證法頗多,此處所揭證法甚簡.



(374)

系1. 直角三角形直角一邊的平方,等於斜邊的平方與他一邊的平方的差.

設以a, b, c表三邊的數值(c為斜邊),則

$$c^2=a^2+b^2,\quad a^2=c^2-b^2,\quad b^2=c^2-a^2.$$

系2. 一邊等於a的正方形的對角線為$\sqrt{2}a$.

系3. 一邊等於a的正三角形的高為$\frac{\sqrt{3}}{2}a$,其面積為$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

【問】 一邊等於a的正六角形的面積如何?

系4. 三角形一邊的平方若等於他二邊的平方和,則其邊的對角為直角.

作圖題30. 作正方形,與所設二正方形(A^2, B^2)的和或差等積.

【解析】 設 X 爲所求正方形的一邊,則

$$A^2+B^2=X^2 \tag{1}$$

或 $$A^2-B^2=X^2,\ 即\ A^2=B^2+X^2 \tag{2}$$

無論爲(1)或(2), A, B, X 必須爲直角三角形的三邊.不過在(1)的條件下 X 須爲斜邊;在(2)的條件下, A 須爲斜邊.由此可得作法.

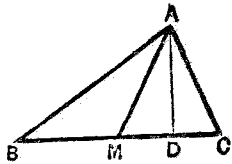
【求作】 作正方形使等於 $A^2+B^2+C^2$ 及 $A^2+B^2-C^2$; 但 A, B, C 爲三線段.

定理 105. 三角形二邊的平方和,等於第三邊一半的平方的2倍加該邊上所作中線的平方的2倍.

【假設】 於 $\triangle ABC$ 中設 M 爲 BC 的中點.

【終結】 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,\overline{BM}^2+2\,\overline{AM}^2$

【證明】 (1) 若 $AM\perp BC$ 則上式易於證明.



(375)

(2) 若 AM 爲 BC 的斜線,則於 $\angle AMB$, $\angle AMC$ 中必有一爲鈍角,而其他爲銳角,今假設 $\angle AMB$ 爲鈍角,自 A 作 BC 的垂線,設其足爲 D,則

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=(BM+MD)^2+\overline{AD}^2$$
$$=\overline{BM}^2+(\overline{MD}^2+\overline{AD}^2)+2\,BM\cdot MD$$
$$=\overline{BM}^2+\overline{AM}^2+2\,BM\cdot MD$$

同理知 $\overline{AC}^2=\overline{CM}^2+\overline{AM}^2-2\,CM\cdot MD$

$$=\overline{BM}^2+\overline{AM}^2-2\,BM\cdot MD$$

故 $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,\overline{BM}^2+2\,\overline{AM}^2.$$

【求證 2】 平行四邊形四邊的平方和,等於其兩對角線的平方和.

系 1. 鈍角三角形鈍角對邊的平方,大於他二邊的平方和.銳角三角形銳角對邊的平方,小於他二邊的平方和.

系 2. 設三角形 ABC 的 C 角為銳角,則 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,BC\cdot CD$. 若 C 角為鈍角,則

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2\,BC\cdot CD.$$

73. 弦的兩部分所包矩形

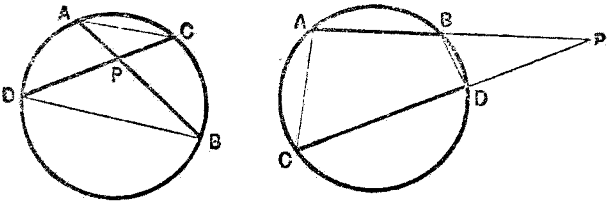
定理 106. 圓的二弦(AB, CD)或其延長若相交,則由其交點(P)分各弦為兩部分,其所包矩形(PA, PB, PC, PD)等積.

【證明】 聯結 AC, BD, 則

$$\triangle APC \backsim \triangle DPB$$

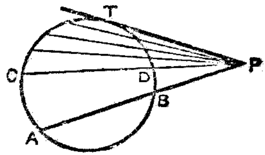
故 $$PA:PD=PC:PB$$

故 $$PA\cdot PB=PC\cdot PD \qquad \text{(定理 100)}$$



(376)

系 1. 以同一點內分或外分弦的二部分所包矩形皆等積.若為外分,則其二部分所包矩形,等於由分點向圓所作切線的平方.



(377)

如圖: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = \cdots = \overline{PT}^2$

系 2. 系 1 的逆亦眞,即

(1) 二線段 AB, CD 若為 P 點內分或外分,而有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, 則此兩線段的端 A, B, C, D 同在一圓周上.

(2) 自一線段 AB 的外分點 P, 作線段 PT, 而使 $PA \cdot PB = \overline{PT}^2$, 則 PT 切於通過 A, B, T 三點的圓, T 為切點.

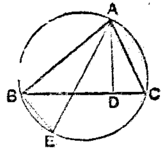
【求證 1】 自三角形 ABC 三頂點向對邊作三垂線 AD, BE, CF, 設其交點為 O, 則

$$AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF.$$

【求證 2】 過二定點 A, B 畫圓,自 AB 的延長上同一點所作此圓的切線皆相等.

習題二十七

求證次列各題 (1)—(9).

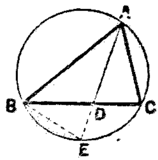


(378)

(1) $\triangle ABC$ 二邊所包矩形 $AB \cdot AC$ 等於第三邊 BC 上的高 AD 及其外接圓直徑 AE 所包的矩形.

(2) 在 $\triangle ABC$ 一邊 BC 或其延長上,任取一點 D, 則 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 的外接圓直徑的比,等於 $AB : AC$.

(3) 設 $\triangle ABC$ 頂角 A 的二等分線與底 BC 交於 D, 與其外接圓周交於 E, 則



(379)

(一) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

(二) $\overline{AD}^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

若 AD 為 A 角的外角二等分線則如何?

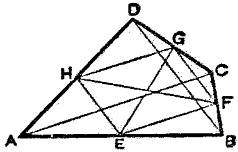
(4) 自 $\triangle ABC$ 的頂點 A, 向 BC 作垂線 AD, 則

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{CD}^2$$

(5) 設四邊形 $ABCD$ 的對角線為直交,則

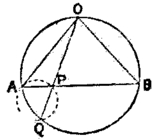
$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$$

(6)　四邊形對角線的平方和，等於聯結對邊中點所成線段的平方和的 2 倍.



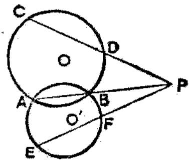
(380)

(7)　自二等邊三角形 OAB 的頂點 O 任意作直線與底 AB 交於 P，與其外接圓交於 Q，則矩形 $OP \cdot OQ$ 的面積為一定.



(381)

(8)　聯結相交二圓的交點 A, B 在 AB 上任取一點 P，自 P 作兩圓的割線 PDC, PFE，與兩圓交於 C, D 及 E, F，則此四點同在一圓周上.



(382)

(9)　設 P 為 $\triangle ABC$ 的邊 AB 上一點，並設 $AP : PB = 5 : 2$，則過 P 而等分此三角形面積的直線，內分 AC 邊於 $7 : 3$.

(10)　設 m, n 為內接於圓的 $\triangle ABC$ 二邊 AB, AC 的長，求自 A 所作對邊上垂線的長，但圓的半徑為 r.

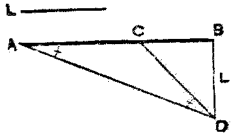
(11)　有二柱相離 3 cm 而直立，其高為 6 m，4 m，求其頂點的距離.

(12)　設三角形與正方形的周圍相等，則其面積孰大?

(13) 求自直角三角形直角頂點向斜邊所作垂線的長,但夾直角二邊的長爲 a, b.

(14) 已知三角形三邊的長爲 a, b, c, 求三中線的長. 若底邊爲 210 cm, 他二邊爲 105 cm, 135 cm, 則底邊上中線的長爲何?

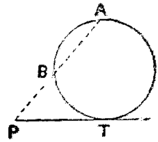
(15) 二分所設線段,使其二部分的平方差,等於所設正方形.



(383)

(16) 求自二定點距離上平方的差等於定量 K^2 的點的軌跡.

(17) 過二定點畫圓周,切於一定直線.(其解答有幾?).



(384)

【指示】 由 $PA \cdot PB = \overline{PT}^2$ 決定切點.

(18) 以所設三角形一角爲頂角,作三角形,使與所設三角形等積.

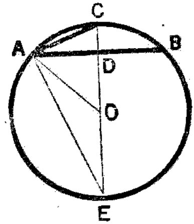
第三節 圓周及圓面積

74. 正多角形的周

定理 107. 設 r 爲圓的半徑, a 爲內接於圓的正多邊形的一邊, a' 爲內接於同圓而有二倍邊數的正多邊形的一邊, 則

$$a' = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)} \qquad (1)$$

【證明】 設 AB 爲內接於圓 O 的正多邊形的一邊，作直徑 $CDOE \perp AB$，則 AC 爲2倍邊數的內接正多邊形的一邊.



(385)

由此得　　$\widehat{BC} = \widehat{AC}$

故　　$\angle CAD = \angle E$

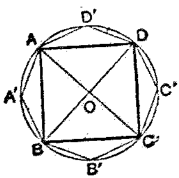
故 AC 切於圓 ADE

故　　$\overline{AC}^2 = CE \cdot CD$

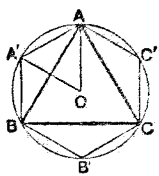
而　　$CE = 2r,\quad CD = r - OD,\quad OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$

故　　$a' = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}$

【求證】 內接正八角形的一邊爲 $\sqrt{2 - \sqrt{2}}r$，若直徑爲1，則內接正八角形的周爲何？



(386)



(387)

【問1】 以外接圓半徑 r 之項表正三角形，正六角形，正十二角形的一邊，其結果爲何？

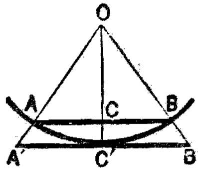
定理108. 設r為圓的半徑,a及a'為內接及外切於圓的同邊數正多角形的一邊,則

$$a'=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}},\qquad a=\frac{a'r}{\sqrt{r^2+\frac{a'^2}{4}}}\tag{2}$$

【證明】 設AB為內接正多角形的一邊,作半徑OCC',垂直於AB,並設切於C'的切線與OA及OB延長上交點為A',B',則$A'B'$為同邊數外切正多角形的一邊.

由此得 $$OA=r,\quad AB=a,\quad A'B'=a'$$

且 $$\triangle A'OB'\backsim\triangle AOB$$



(338)

故 $$\frac{a'}{a}=\frac{r}{OC}$$

然 $$OC=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$$

故 $$a'=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}$$

同理知 $$\frac{a}{a'}=\frac{OA}{OA'}$$

故 $$a=\frac{a'r}{\sqrt{r^2-\frac{a'^2}{4}}}$$

【問2】 設圓的半徑為r,則其外切正六角形的一邊為何?

設圓的直徑爲 1, 則其外切正方形一邊的長亦爲1. 故若以此爲基礎,應用(1), (2)兩式,即可設算內接正方形及內接,外切正八角形一邊的長. 並得依次計算十六角,三十二角……等諸正多角形一邊的長.由此自不難計算諸正多角形的周如次表:

邊　數	內接形的周	外接形的周
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

75. 圓周 觀 386, 387 圖可知圓周大於內接多角形的周,而小於外切多角形的周;但觀上表,可知內接多角形的周因邊數增加而次第增大, 外切多角形的周因邊數增加而次第減少, 故其雙方有逐漸接近的趨勢. 若邊數無限增加,則其周亦非常接近,其結果遂同時充分地接近於圓周. 故所謂圓周可認爲內接及外切多角形的周的極限. 又觀(2)式可知同邊數正多

角形的周與其外接圓或內切圓的直徑成正比，故可得定理109.

定理109. 二圓周的比等於其半徑的比. 今設 l, l' 為二圓周, r, r' 為其半徑, 則

$$\frac{l}{l'}=\frac{r}{r'}$$

故 $$\frac{l}{2r}=\frac{l'}{2r'}$$

即圓周對於直徑的比為一定. 此比之值叫圓周率，通常用 π 表之，即

$$\frac{l}{2r}=\pi$$

故 $$l=2\pi r$$

即半徑等於 r 的圓周為 $2\pi r$.

設直徑等於1的圓周為 P, 則 $P=\pi$. 由上表知

$$3.1415914<\pi<3.1415951$$

故通常以3.14159為 π 的正確至小數五位的近似值.*

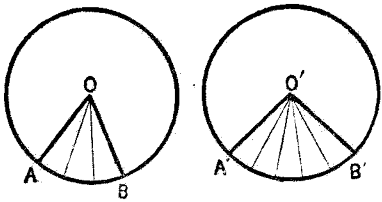
76. 二弧的比

定理110. 在同圓或等圓 (O, O') 中，二弧 $(AB, A'B')$ 的

* π 的近似值又可略為3.1416，亦可以 $\frac{22}{7}$ 或 $\frac{355}{113}$ 表之，但其值既非整數，亦非有限小數或分數，實為一無理數，近人已算至小數七百另七位.

比等於其所對中心角$(AOB, A'O'B')$的比.

【證明】 設r爲圓的半徑,弧AB爲圓O的周的$\frac{n}{m}$,弧$A'B'$爲圓O'的周的$\frac{n'}{m}$,則



(383)

$$\widehat{AB}=2\pi r\times\frac{n}{m},\quad \widehat{A'B'}=2\pi r\times\frac{n'}{m}$$

$$\therefore\quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n'}{m}}=\frac{n}{n'}$$

又若分此兩圓周各爲m等分,過其各分點作半徑,則中心周圍的角,亦被分爲m等分.故$\angle AOB$爲其一部分的n倍,$\angle A'O'B'$爲其一部分的n'倍.故

$$\angle AOB=4\angle \mathrm{R}\times\frac{n}{m},\quad \angle A'O'B'=4\angle \mathrm{R}\times\frac{n'}{m}$$

故
$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\frac{n}{m}}{\frac{n'}{m}}=\frac{n}{n'}$$

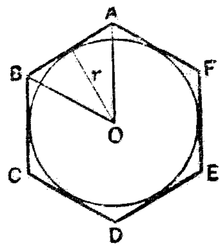
故
$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}.$$

【求作】 自半徑 3 cm 的圓周截取一弧使等於半徑 2 cm 的圓周.

77. 正多角形及圓的面積

定理111. 正多角形的面積,等於其周與其半徑相乘積的一半.(學者可自證之)

依75款所述程序,可以論定圓的面積.即內接多角形或外切多角形的邊數,若無限增加,則此等面積亦逐充分地接近於圓的面積.故圓的面積可認爲內接及外切多角形的面積的極限.



(390)

故設以 A, P 表外切於圓的正多角形的面積及其周,以 A', P', r 表此圓的面積,周及其半徑,則當此正多角形的邊數無限增加時 A, P 即非常地接近於 A', P',

而
$$A=\frac{Pr}{2}$$

故
$$A'=\frac{P'r}{2}$$

由此得定理112.

定理112. 圓的面積等於圓周與其半徑相乘積的一半.

故半徑等於 r 的圓面積 A 為 πr^2, 即

$$A=\pi r^2.$$

系1. 圓的面積比例於半徑的平方.

【問】 圓周等於 10 cm 的圓面積為何?

系2. 扇形的面積等於半徑與其弧相乘積的一半.

【求證】 等半徑的扇形面積與其弧(即中心角)成比例.

習題二十八

(1) 設中心角為 30° 時,其所對弧的長為 10 cm. 求此圓的半徑.

(2) 設半徑等於 r 的圓被其內接正三角形的一邊分為兩部. 求各部的面積.

(3) 設半徑等於 2.5 cm 的兩等圓相交,而其各圓周通過他圓周的中心, 求此兩圓周間公有部分的面積.

(4) 畫圓,使其周等於所設兩圓周的和.

(5) 畫圓,使其面積等於所設兩圓面積的和或差.

(6) 設有圓,其半徑等於 9 cm, 求二等分此圓面積的同心圓的半徑. 更求三等分此圓面積的兩同心圓的半徑.

(7) 自直角三角形直角頂點向斜邊作垂線,分三角形爲兩部,求證此兩三角形内切圓面積的比,等於斜邊二部分的比.

第八章*

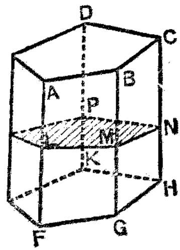
立體圖形的計算

第一節*　多面體的計算

78.* 角柱及角錐的面積

定理113. 角柱的側面積,等於其正截面的周與其側稜的相乘積.

【證明】 設$ABCD\cdots\cdots FGHK$爲角柱,$LMNP\cdots\cdots$爲其正截面,則



$$\square AG = LM \cdot AF$$

$$\square BH = MN \cdot BG$$

$$\square CK = NP \cdot CH$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

且 $$AF = BG = CH = \cdots\cdots \qquad (391)$$

故設L爲角柱的側面積,P爲正截面的周,E爲其側

* 簡鄉師時間不敷,本章可以省略,以下凡章節,款的標題上有*的,簡鄉師皆可從省,相當於略去各款的習題,亦可省卻.

稜, 則

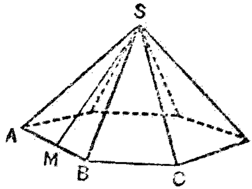
$$L=(LM+MN+NP+\cdots\cdots AF=PE$$

系 直角柱的側面積,等於其底的周與其高的相乘積.

【問 1】 設底面的一邊為 a, 其高為 h, 則正六角柱的側面積及全面積* 各為幾何?

定理 114. 正角錐的側面積,等於其底的周與其斜高** 相乘積的一半, 卽

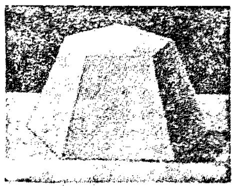
$$L=\frac{1}{2}PS \qquad \begin{bmatrix} P\cdots\cdots\text{底面的周} \\ S\cdots\cdots\cdots\cdots\text{斜高} \end{bmatrix}$$



(392)

(如 392 圖學者可自證之)

【問 2】 設高為 a, 底面的一邊為 b, 則正六角錐的側面積為何?


(393)

系 正角錐臺的側面積等於其兩底周圍的和的一半與其斜高(各側面梯形的高)的相乘積.

79.* 角柱的體積

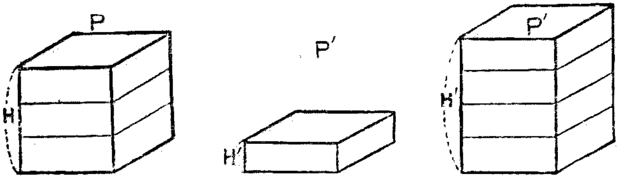
---

* 全面積指側面積與上下兩底面積的和.

** 自角錐頂點向底面的邊所作的垂線叫斜高.

I. 直方體的體積.

定理115. 底面全等的二直方體 (P, P') 的比,等於其高 (H, H') 的比.



394

【證明】 (1) 設 $H=mH'$ (m 爲整數).

此時若分 H 爲 m 等分,過各分點平行於底面作截面,則 P 即被分爲與 P' 全等的部分 m 個,

故 $$P:P'=m:1=H:H'.$$

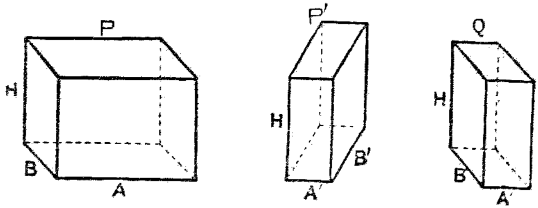
(2) 設 $H=\dfrac{n}{m}H'$ (m, n 爲整數).

此時若等分 H, H',使其每一份的長等於 $\dfrac{1}{m}H'$,則 H' 被分爲 m 份, H 被分爲 n 份.又若通過各分點,平行於底面作截面,則 P, P' 各被等分爲 n, m 份,其每份皆全等.故 $$P:P'=n:m=H:H'.$$

系 二稜各各相等的兩直方體的比,等於其第三稜的比.

定理116. 等高的二直方體的比,等於其底的比.

【證明】 設P,P'為二直方體，A,B及A',B'為其底的二邊，H為其高，並另設一直方體Q，其三稜為A',B,H，則



(395)

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{A'} \text{ 及 } \frac{Q}{P'}=\frac{B}{B'} \qquad \text{(定理 115 系)}$$

故
$$\frac{P}{P'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}=\frac{A\cdot B}{A'\cdot B'}$$

即P與P'的比，等於其底的比.

系 1. 二直方體的比等於其三稜的數值相乘積的比，即
$$\frac{P}{P'}=\frac{A\cdot B\cdot H}{A'\cdot B'\cdot H'}.$$

系 2. 直方體的體積等於其三稜的數值相乘積，由此知直方體的體積，等於其底面與其高的相乘積.

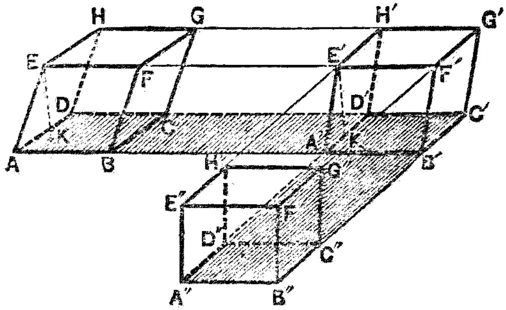
由系1設P'的三稜皆為單位數值，則
$$P=A\cdot B\cdot H.$$

更設P的底面積為S，其體積為V，則
$$V=A\cdot B\cdot H=S\cdot H$$

系 3. 立方體的體積，等於其稜的三乘冪.

II. 平行六面體的體積.

定理117. 平行六面體$(ABCD-EFGH)$與其等底等高的直方體相等.



(296)

【證明】 延長AB稜,於其上取$A'B'$使等於AB,過A'及B'作垂直於AB'的平面,與AB相平行的三稜的延長相交,則得直四角柱$A'D'H'E'-B'C'G'F'$.

再延長此四角柱$A'G'$的稜$D'A'$,於其上取$D''A''$使等於$D'A'$,過A''及D''作垂直於$D'A''$的平面,與$D'A'$相平行的三稜的延長線相交,則得直方體$A''B''C''D''-E''F''G''H''$.

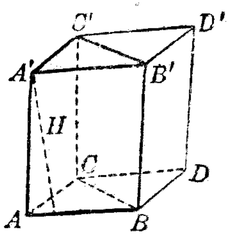
今於直方體$A''G''$及平行六面體AG中,兩底面$A''C''$及AC一爲矩形,一爲平行四邊形,而其底及高又各各相等,故等積,且$A''G''$及AG的高,同爲平行二平面間的

距離,故亦相等.而平行六面體 AG 既等於直四角柱 $A'G'$,直角柱 $A'G'$ 又等於直方體 $A''G''$,故平行六面體 AG 等於其等底等高的直方體 $A''G''$.

系 平行六面體的體積,等於其底面及其高的相乘積.

III. 三角柱及多角柱的體積.

定理 118. 三角柱 $(ABC-A'B'C')$ 的體積等於其底面 (ABC) 及其高 (H) 的相乘積.



(397)

【證明】 作平行四邊形 $ABDC$ 及 $A'B'D'C'$,聯結 DD' 作平行六面體 AD',則三角柱 ABC' 為此平行六面體的一半. (定理 77)

故 $$\text{三角柱}\,ABC' = \frac{\square ABDC \times H}{2} \qquad (\text{定理 117 系})$$
$$= \triangle ABC \times H.$$

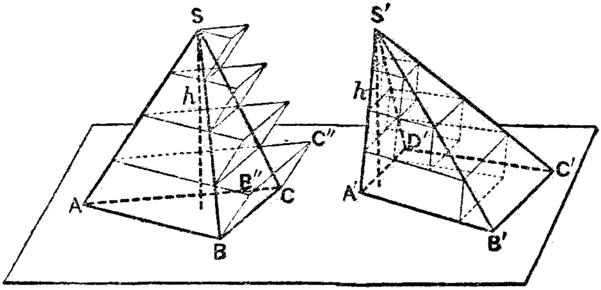
系 1. 多角柱的體積,等於其底面及其高的相乘積.(因任意多角柱均可分為若干個三角柱而與之等高.)

系 2. 等底等高的角柱相等.等高(或等底)的角柱的比等於其底(或高)的比.

【問】 設有正三角柱,其底面的一邊爲 a 米,高爲 h 米,則其體積爲幾立方米?若爲正六角柱又如何?

80.* 角錐的體積

定理119. 等底 $(ABC,\ A'B'C'D')$ 等高 (H) 兩角錐 $(S-ABC, S-A'B'C'D')$ 等積.



(393)

【證明】 設 V, V' 爲兩角錐的體積,并假設 $V<V'$. 分兩角錐的高爲 n 等分,過各點作平行於底面的平面,因自等底等高兩角錐各頂點起,在相等距離處,所作平行於底面的截面必等積(定理78),故此兩角錐中所在對應的截面相等.

次於角錐 $S-ABC$ 中以所作各截面爲下底,以 SA 的各部分爲稜,作 n 個角柱,再於角錐 $S-A'B'C'D'$ 中,以所作各截面爲上底,以 $S'A'$ 的各部分爲稜,作 $(n-1)$ 個角

柱,則此兩組角柱,由上而下,依次各各相等,而於角錐 $S-ABC$ 中,則較多最下一個角柱 ABC''.

故若以 P, P' 表如此作成的兩組角柱的和,則 P 與 P' 的差爲角柱 ABC'',即

$$P-P'=\triangle ABC \times \frac{H}{n}$$

若 n 充分增大,則此差得縮小至任何程度,即可因 n 的逐漸增大,而使兩組角錐的和逐漸接近,以至相等,即 $P'-P$ 可因 n 的逐漸增大而爲零.

但 $P>V, P'<V'$, 故 $P'-P<V'-V$.

而 $V<V'$, 故 $V'-V>0$.

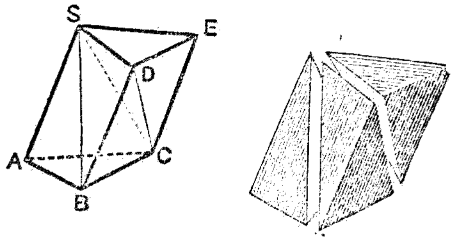
然則 $P'-P$ 既等於零,而又小於正量,此爲不合理的推論.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & V \nless V' \\ \text{同理} & V \ngtr V'\end{array}\right\} \quad \text{故} \quad V=V'$$

【求證1】 設有四角錐,其底爲平行四邊形,作平面含有其頂點及底的對角線.則此平面平分此四角錐.

定理120. 三角柱 $(ABC-SDE)$ 得分爲互相等積的三個三角錐.

【證明】 三角柱 $ABC-SDE$ 得分爲三個三角錐 $S-ABC, S-BCD, S-CDE$ 如圖,而皆以 S 爲其頂點.此



(399)

三個三角錐中,第一與第二可視為各有等底SAB, SBD而公有頂點C的兩三角錐,故等積.同理第二與第三亦等積.

由此知三個三角錐互相等積.

系1. 三角錐等於其等底等高的三角柱的三分之一.

系2. 角錐等於等底等高的角柱的三分之一,故若以V表角錐的體積,B表其底面積,H表其高,則

$$V=\frac{1}{3}BH.$$

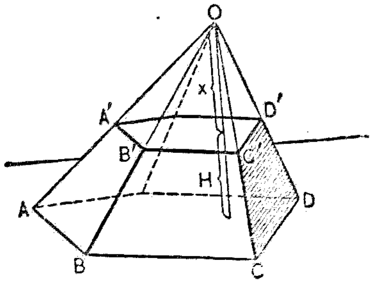
系3. 等高(或等底)二角錐的比,等於其底(或高)的比.

【求證2】 二等分四面體一個二面角的平面,分對稜於兩側面的比.

系4. 如400圖設B, b為角錐臺$ABCDE-A'B'C'D'E'$

的上下兩底面積，H 爲兩底間的距離，V 爲其體積，則

$$V=\frac{1}{3}H(B+\sqrt{Bb}+b).$$



(400)

【證明】 延長各側稜交於 O，自 O 作底面的垂線 OH，與 $A'B'C'D'E'$ 交於 H'，而以 x 表自 O 至上底的距離，則

$$V=(O-ABCDE)-(O-A'B'C'D'E')$$

$$=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}bx$$

$$=\frac{1}{3}(BH+Bx-bx)$$

$$=\frac{1}{3}\{BH+x(B-b)\}$$

但 $\quad ABCDE:A'B'C'D'E'=\overline{AB}^2:\overline{A'B'}^2$ (定理102系1)

而 $\quad AB:A'B'=OA:OA'=OH:OH'$ (定理78,1)

故 $\quad ABCDE:A'B'C'D'E'=\overline{OH}^2:\overline{OH'}^2$

即 $\quad B:b=(H+x)^2:x^2$，或 $\sqrt{B}:\sqrt{b}=H+x:x$

故 $\quad \sqrt{B}-\sqrt{b}:\sqrt{b}=H:x$

由此得
$$x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

故
$$V=\frac{1}{3}\left\{BH+\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}(B-b)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}H(B+\sqrt{Bb}+b).$$

81.* 正多面體的體積　正四面體卽三角錐,正六面體卽立方體,設其一稜爲已知,其體積均不難計算,惟正八面體,正十二面體,正二十面體的體積,計算殊不簡單,尤以後列兩種,較爲繁雜,然此等形體旣爲日常所習見,其體積的算法不可不知,玆特列舉其結果如次,其證明姑從省略.

設 a 爲正多面體的一稜,則

(1)　正四面體的體積 $=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

(2)　正六面體的體積 $=a^3$.

(3)　正八面體的體積 $=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

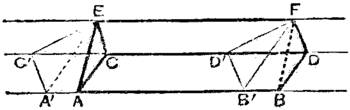
(4)　正十二面體的體積 $=\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$.

(5)　正二十面體的體積 $=\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$.

習題二十九

求證(1),(2)兩題:

(1) 平行六面體十二稜的平方和,等於四對角線的平方和.



(401)

(2) 設有不同在一平面上的三平行線,作平行二平面,使於此三平行線上截取等長的三線段,則凡依如此作圖所構成的三角柱皆等積.

(3) 平行於角錐的底作截面,使其面積等於底的一半.

(4) 有直角六面體,其對角線的長設為14 cm,三稜的比設為2:3:6,則六面體的體積為何?

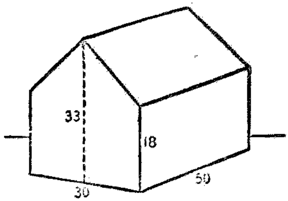
(5) 設直四角柱的底面為 $ABCD$ 四邊形,并設 $AB=9\,\text{cm}$, $BC=12\,\text{cm}$, $CD=14\,\text{cm}$, $DA=13\,\text{cm}$, $AC=15\,\text{cm}$ 而其側稜為10 cm,求體積.

(6) 正六角柱的底面一邊爲 4, 其體積爲 $60\sqrt{3}$, 求其高.

(7) 設直三角柱的側稜爲 9 cm, 其底面的三邊爲 6 cm, 8 cm, 10 cm, 求體積.

(8) 設三角柱的底面三邊爲 6 cm, 4 cm, 4 cm, 其側稜爲 8 cm, 側稜與底面的傾角爲 30°, 求體積.

(9) 如 402 圖所注的呎數, 求其屋內所有空氣爲若干立方呎,並求其全面積.



(402)

(10) 於三角錐 $S-ABC$ 中,設 $SA=8$ cm, $SB=10$ cm, 則由 $\angle ASB$ 二等分線 SE 及稜 SC 所決定的平面,分此三角錐的體積爲二部分,其比如何?

(11) 設 E 爲角錐的側稜, H 爲其高, S 爲其斜高, s 爲其底面的一邊, $\angle e$ 爲其側稜與底面所成傾角, $\angle f$ 爲其側面與底面所成傾角, V 爲其體積,計算次列各題.

(一) 設正四角錐的 $s=6$ cm, $S=5$ cm, 求 V.

正四角錐的 $S=12$ cm, $\angle f=30°$, 求 V.

正四角錐的 $E=11$ cm, $H=7$ cm, 求 V

(二) 設正六角錐的 $E=12$ cm, $\angle e=30°$, 求 V.

正六角錐的 $E=7$ cm, $S=1$ cm, 求 V.

(12) 設 B 爲角錐臺下底面積, b 爲其上底面積, s' 爲其上底的一邊, L 爲其斜面積, T 爲其全面積, r, r' 爲其上下底面一邊與其中心的距離 (邊心距), 餘同前題,計算次列各題.

(一) 設正三角錐臺的 $B=9$ 平方 cm, $b=4$ 平方 cm, 求 H.

(二) 設正四角錐臺的 $S=13$ cm, $r=11$ cm, $r'=7$ cm, 求 V.

(三) 設正五角錐臺的 $s=11$ cm, $s'=5$ cm, $E=5$ cm, 求 L.

(四) 設正六角錐臺的 $s=10$ cm, $s'=8$ cm, $E=4$ cm, 求 T.

(13) 設正八面體的稜爲 2 cm, 求其軸 (連接二頂點的直線) 的長.

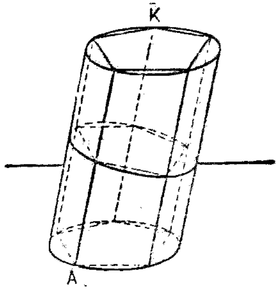
(14) 設正多面體的稜爲 4 cm, 求各正多面體的體積及其全面積.

第二節* 曲面體的計算

82*. 圓柱, 圓錐的面積及體積

定理 121. 圓柱 (AK) 的側面積, 等於其正截面的周

與一母線的相乘積.



(403)

【證明】 設 L 爲圓柱 AK 的側面積, P 爲其正截面的周, E 爲其母線之一,更設 L' 爲內接於 AK 的正多角柱的側面積, P' 爲其正截面的周,則

$$L'=P'\cdot E \qquad (\text{定理 } 113)$$

若逐漸增多內接正多角柱側面的數,至於無窮,則 L' 將漸近於 L,而以 L 爲極限, P' 將漸近於 P 而以 P 爲極限;故 $P'\cdot E$ 亦將漸近於 $P\cdot E$,而以 $P\cdot E$ 爲極限但 $P'\cdot E$ 恆等於 L',故

$$L=P\cdot E.$$

系 1. 直圓柱的側面積,等於其底面的周與其高的相乘積.

系 2. 設 L 爲直圓柱的側面積, T 爲其全面積, H 爲其高, r 爲其半徑,則

$$L=2\pi r\cdot H,\quad T=2\pi r(H+r).$$

定理 122. 圓柱 (AC) 的體積,等於其底面與高的相乘積(前圖.)

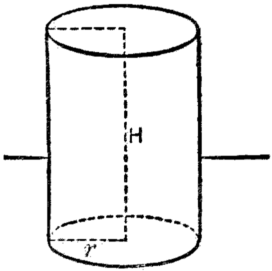
【證明】 設 V 爲圓柱的體積, B 爲其底面積, H 爲其

高；更設V'爲內接於 AC 的正多角柱的體積，B'爲其底面積，則

$$V' = B' \cdot H. \qquad \text{(定理 118 系 1)}$$

若逐漸增多內接正多角柱側面的數至於無窮，則V'將漸近於V，而以V爲極限；B'將漸近於B，而以B爲極限；故$B' \cdot H$亦將漸近於$B \cdot H$，而以$B \cdot H$爲極限．但$B' \cdot H$恆等於V'，故

$$V = BH.$$



(404)

系 設直圓柱的半徑爲r，則

$$V = \pi r^2 \cdot H.$$

定理 123. 直圓錐(V)的側面積，等於其底面的周與其斜高相乘積的一半，即

$$L = \frac{1}{2} P \cdot S = \pi r S \qquad (S \cdots\cdots \text{直圓錐的斜高})$$

(學者可依定理114及定理121自行證明．)

系 設T爲直圓錐的全面積，則

$$T = \pi r(s + r).$$

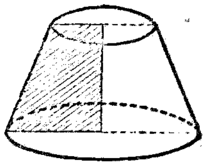
定理 124. 圓錐的體積，等於其底面與其高相乘積的三分之一，即

$$V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H.$$

(學者可依定理120系2及定理121自行證明)

定義 以平行於直圓錐底面的平面截直圓錐,則此平面與底面間所有部分叫直圓錐臺.

如405圖,設有梯形一邊垂直於其底,而以此邊爲軸迴轉該形,則成直圓錐臺.故此軸實爲直圓錐臺的高,而該軸所對的邊即其斜高,亦即母線.



(405)

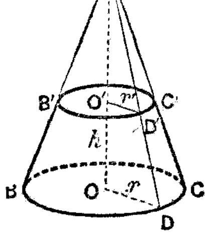
定理125. 設直圓錐臺兩底的半徑爲 r, r', 高爲 H, 斜高爲 S, 側面爲 L, 體積爲 V, 則

(1) $$L=\pi S(r+r')$$

(2) $$V=\frac{1}{3}\pi H(r^2+rr'+r'^2)$$

【證明】 設作一正角錐臺外切或內接於此直圓錐臺,則依定理114的系,定理120的系4,及定理121,定理122,固可證明本定理.但本定理亦得證明如次:

(1) 設 BDC, $B'D'C'$ 爲直圓錐的兩底, O, O' 爲其中心,并設 A 爲延長側面所成直圓錐的頂點,則



(406)

$$L=\pi r(AD)-\pi r'(AD') \qquad (\text{定理 } 123)$$

然
$$\frac{AD}{r}=\frac{AD'}{r'}=\frac{AD-AD'}{r-r'}=\frac{S}{r-r'}.$$

故
$$AD=\frac{Sr}{r-r'}, \quad AD'=\frac{Sr'}{r-r'}.$$

故
$$L=\pi\left(\frac{Sr^2}{r-r'}-\frac{Sr'^2}{r-r'}\right)$$

$$=\pi S\times\frac{r^2-r'^2}{r-r'}=\pi S(r+r').$$

(2) 因 V 為直圓錐 $A\text{-}BDC$ 及 $A\text{-}B'D'C'$ 的差.

故
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2(AO)-\frac{1}{3}\pi r'^2(AO') \qquad (\text{定理 } 124)$$

而
$$\frac{AO}{r}=\frac{AO'}{r'}=\frac{AO-AO'}{r-r'}=\frac{H}{r-r'}$$

故
$$AO=\frac{Hr}{r-r'}, \quad AO'=\frac{Hr'}{r-r'}$$

故
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\times\frac{Hr}{r-r'}-\frac{1}{3}\pi r'^2\times\frac{Hr'}{r-r'}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Hr^3}{r-r'}-\frac{Hr'^3}{r-r'}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\pi H\left(\frac{r^3-r'^3}{r-r'}\right)=\frac{1}{3}\pi H(r^2+rr'+r'^2)$$

系 1. 直圓錐臺的側面積,等於垂直平分其軸的截面的周與其斜高的相乘積.

系 2. 設 T 爲直圓錐臺的全面積，則

$$T=L+\pi(r^2+r'^2).$$

習題三十

(1) 有一直圓柱，其側面積等於其他三直圓柱側面的和，若三直圓柱的半徑爲 3 cm, 4 cm, 5 cm, 求此直圓柱的半徑，但四直圓柱均等高.

(2) 有等高二直圓柱，其半徑爲 3 cm, 4 cm. 更有一直圓柱，其體積與此二直圓柱體積的和相等. 求該直圓柱的體積.

(3) 設圓柱的底面爲 3 平方 cm，其母線的長爲 4 cm，母線與底面所成傾角爲 45°，求其體積.

(4) 設圓錐的軸(連接頂點與底面的中心)長 17 cm，其對於底面上射影長 8 cm，求底面的半徑. 但其體積爲 80π 立方 cm.

(5) 一直圓錐爲平行於底的平面所截. 設直圓錐的高爲 3 呎，其底面積爲 81π 方呎，截面距底面的高爲 2 呎，求所截直圓錐臺的體積，全面積，及斜高.

(6) 問一立方吋的白金能製成直徑等於 $\frac{1}{100}$ 吋的白金線若干碼?

(7) 求厚1吋長5呎空圓柱的重量,但其外徑爲1呎,比重爲7.5(每1立方呎的水重2.5磅.)

(8) 一圓柱形蒸汽鍋,長6尺,直徑2尺,横置機上,設其水量的最大高度爲6尺,求此時水的體積.

(9) 自木製直圓錐的底面穿一圓孔至其頂(孔的軸與錐軸一致),設孔的半徑爲1寸,錐底的半徑爲2寸,垂直截面的頂角爲60°,求錐體因穿孔而失去的部分.

(10) 以半徑等於5寸的半圓形紙摺爲錐面,求其體積及面積.

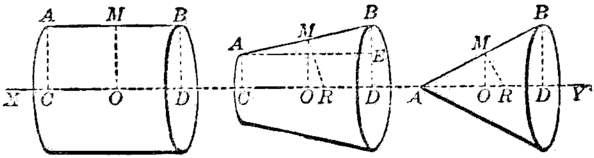
(11) 一錐形營帳的高爲8呎,其側面積爲$188\frac{4}{7}$方呎.求此帳所蔽地面的面積.

(12) 一錐形水槽,盛水深6寸.投一立方體於水中,則水面升高2寸.求立方體一邊的長.但水槽的高與其徑相等.

(13) 設等腰梯形以聯結兩底中點的直線爲軸迴轉一周所生的體積爲105π立方吋,求梯形的高.但上下兩底的長爲6吋及12吋.

83.* 球面及球帶的面積 欲求球面及球帶的面積,當先明次理.

定理126　一直線(AB)以又一直線(XY)為軸而迴轉時所生曲面的側面積,等於該直線(AB)投射於軸上的正射影(CD)與以其中點(M)上的垂線(MR)為半徑所畫圓周的相乘積.即



(407)

$$AB\text{因迴轉而生的面積}=CD\times 2\pi\cdot MR.$$

【證明】(1)　設$AB \parallel XY$,則$CD=AB$,MR與MO(XY上的垂線)一致,此時由AB迴轉所生的面為直圓柱面,故其面積$=CD\times 2\pi MR$.

(2)　設$AB \nparallel XY$,但亦不相交,則由AB迴轉所生的面為直圓錐臺的側面.

故其面積$=AB\times 2\pi MO$　　　　(定理125系1)

但若作$AE\parallel XY$,則$\triangle ABE\backsim\triangle MOR$,

故　　$MO : AE=MR : AB$,

故　　$AB\times MO=AE\times MR$,

即　　$AB\times MO=CD\times MR$,

故由AB迴轉所生的面積$=CD\times 2\pi\cdot MR$.

(3)　設A在軸上，則AE與CD一致，此時由AB迴轉所生的面爲直圓錐面.

故其面積$=\frac{1}{2}AB\times 2\pi BD=\pi AB\cdot BD.$

但　$$MO : AD=MR : AB,$$

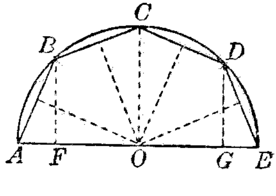
即　$$\frac{1}{2}BD : AD=MR : AB,$$

故　$$\frac{1}{2}BD\cdot AB=AD\cdot MR,$$

即　$$AB\cdot BD=2\,AD\cdot MR,$$

故由AB迴轉所生的面積$=CD\times 2\pi\cdot MR.$

定理127.　球面的面積等於其直徑與其大圓周的相乘積.



(408)

【證明】　設有以R爲半徑的半圓周$ABCDE$在AE的周圍迴轉，則成球面S，作偶數邊的正多角形，取其半內接於半圓$ABCDE$，自半圓的中心O作垂線垂直於諸弦AB, BC等，則此諸垂線平分此諸弦，且各相等.設以a表此垂線的長，自B, C, D作BF, CO, DG垂直於AE，則

由AB迴轉所生的面積$=AF\times 2\pi a$　　　(定理126, 3)

由 BC 迴轉所生的面積 $=FO\times 2\pi a$　　（定理 126, 2）

……………………………………………………………………

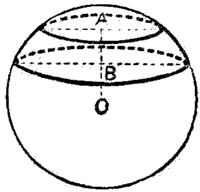
故由 $ABCDE$ 迴轉所生的面積 $=AE\times 2\pi a$.

設以此面積爲 S'，而增加正多角形的邊數至於無窮，則 S' 將漸近於 S 而以 S 爲極限；a 將漸近於 R 而以 R 爲極限；故 $AE\times 2\pi a$ 亦將漸近於 $AE\times 2\pi R$ 而以 $AE\times 2\pi R$ 爲極限，但 $AE\times 2\pi a$ 恆等於 S' 故

$$S=AE\times 2\pi R.$$

系 1. 球面的面積等於其大圓面積的 4 倍.

因 $AE=2R$，故 $S=2R\times 2\pi R=4\pi R^2$.



(409)

定義 以二平行平面截球時，所夾在二平面間的球面叫球帶，其截面叫球帶的底，兩截面間的距離叫球帶的高．若截面爲一平面，則成單底的球帶，而以球帶及截面構成的立體，則叫球臺.

系 2. 球帶的面積，等於其高及大圓周的相乘積.

如 408 圖，由 BCD 迴轉而生的球帶爲 $FG\times 2\pi R$，而 FG 即爲此球帶的高.

系 3. 單底球帶的面積，等於以迴轉弧的弦爲半徑的圓面積.

如408圖,由AB迴轉而生的面,卽爲單底球帶.

此球帶AB的面積$=AF\times 2\pi R=\pi AF\times AE$.

但 $$AF\times AE=\overline{AB}^2 \qquad \text{(定理103系2)}$$

故 $$\text{球帶的面積}=\pi\cdot\overline{AB}^2$$

84.* 球及附屬諸形體的體積

定理128. 球的體積等於其面積與其半徑三分之一的相乘積.

【證明】 設有一球內切於立方體,則立方體的體積必較大於球.自球的中心作八直線,與立方體的八頂點相連,則構成六個四角錐,皆以立方體的側面爲底,而以球的半徑爲高,故此立方體的體積,得以其面積與半徑三分之一的相乘積表之.

設更於角錐的稜與球面相交的點作切面,則得一體積較小的外切多面體(因有一部分爲切面所截去)再自球的中心作諸直線,與此外切多面體的各頂點相聯,則又可構成多數的角錐,其底面的總和等於此外切多面體的面積,而其高則仍爲半徑.故諸角錐體積的總和仍得以外切多面體面積與半徑三分之一的相乘積表之.

設R爲球的半徑,S'爲此外切多面體的面積,V'爲

其體積,則

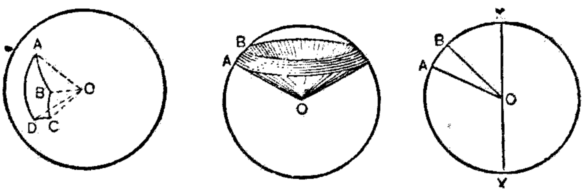
$$V'=S'\times\frac{1}{3}R.$$

若仿照以上方法繼續作諸切面,以構成較小而又較小的外切多面體,可使球體與此外切多面體體積的差逐漸減少,而以0爲其極限.而此時S'則已漸近而又漸近於S,幾乎合而爲一.但$S'\times\frac{1}{3}R$則恆等於V',故

$$V=S\times\frac{1}{3}R.$$

系1. 球的體積等於$\frac{4}{3}\pi R^3$或$\frac{1}{6}\pi D^3$(D爲直徑).

定義 由一個球面多角形及其多面角的面所圍成的部分叫球面錐體,而以球面多角形爲其底,如$O-ABCD$(410圖左).由半圓中的扇形OAB(410圖右)



(410)

在直徑XY周範迴轉時所發生的形體叫扇形體如$O-AB$(410圖中).

系2. 球面錐體的體積等於其底面積與球的半徑

三分之一的相乘積.

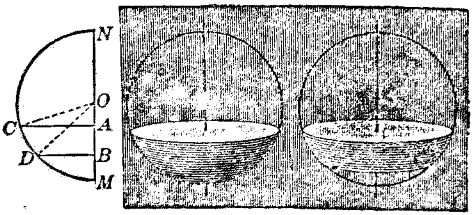
系 3. 扇形體的體積,等於球帶(扇形體的底)面積與球的半徑三分之一的相乘積.

設 R 爲球的半徑, C 爲其大圓周, H 爲球帶的高, Z 爲其面積, V 爲扇形體的體積, 則

$$C=2\pi R,\quad Z=2\pi RH.$$

故
$$V=2\pi RH\times\frac{1}{3}R=\frac{2}{3}\pi R^2H.$$

系 4. 球臺的體積,分單底及雙底兩種:



(411)

I. 單底球臺的體積.

如 411 圖設 $OM=R$, $AM=a$, $BM=b$, $AB=H$, $AC=r$, $BD=r'$, 則

扇形體 CCM(由扇形 OCM 迴轉而成的) $=\frac{2}{3}\pi R^2a$.

圓錐體 OCA(由三角形 OCA 迴轉而成的) $=\frac{1}{3}\pi r^2(R-a)$.

故球臺 ACM(由半圓的一部分 ACM 迴轉而成的)

$$=\frac{2}{3}\pi R^2a-\frac{1}{3}\pi r^2(R-a)$$

$$=\frac{\pi}{3}(2R^2a-Rr^2+ar^2)$$

但　$$r^2=AM\times AN=a(2R-a)\cdots\cdots\cdots(1)$$

故　$$\text{球臺}\ ACM=\pi a^2\left(R-\frac{a}{3}\right)\cdots\cdots\cdots(2)$$

或由(1)求得(R),代入(2),則

$$\text{球臺}\ ACM=\frac{1}{2}\pi r^2a+\frac{1}{6}\pi r^3$$

II. 雙底球臺的體積.

因球臺 $ABCD$ = 球臺 ACM − 球臺 BDM.

故　$$\text{球臺}\ ABCD=\pi a^2\left(R-\frac{a}{3}\right)-\pi b^2\left(R-\frac{b}{3}\right)$$

$$=\pi R(a^2-b^2)-\frac{\pi}{3}(a^3-b^3)$$

$$=\pi Rh(a+b)-\frac{\pi}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

$$=\pi h\left[(Ra+Rb)-\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\right].$$

但 $h=a-b$, 故　$$a^2-2ab+b^2=h^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式兩邊各加 $3ab$ 則 $a^2+ab+b^2=h^2+3ab$,

而　$$(2R-a)a=r^2,\quad (2R-b)b=r'^2,$$

故　$$Ra+Rb=\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2},$$

故球臺 $ABCD=\pi h\left[\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{h^2}{3}-ab\right]$

$$=\pi h\left[\frac{r^2+r'^2}{2}+\frac{h^2}{2}+ab-\frac{h^2}{3}-ab\right]$$

$$=\frac{h}{2}(\pi r^2+\pi r'^2)+\frac{\pi h^3}{6}.$$

習題三十一

(1) 設球的面積等於其大圓周的數值,則球的半徑爲何?

(2) 設球的直徑爲21呎,求高爲5呎的單底球帶的面積.

(3) 設球帶的面積等於其大圓面積的數值,求其高,但球的半徑爲R.

(4) 以一平面分球面爲二球帶.設較大一部分的面積爲球面積及較小一部分面積的比例中項,則此平面與球心的距離爲何,但球的半徑爲R.

(5) 設一球面爲二平行平面所截(平面與球心等距),如此所得球帶的面積,適爲其兩底面積的和.求此平面與球心的距離.

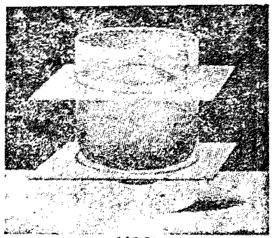
(6) 設一人上升,其高已等於地球的半徑,則其所見地面的部分爲何?

(7) 設有半徑爲 10 cm 的球面被截於距離球心 8 cm 的平面.求此平面內的內接正三角形的面積.

(8) 設有一內徑爲 12 cm 的中空圓柱,而於其上置一直徑爲 36 cm 的球,問此時球面的最低點距離圓柱上底若干 cm?

(9) 設自圓 O 的平面上一點 A, 作此圓的切線 AB (B 爲切點), 則以 OA 爲軸迴轉此圖形至一周時所生立體的全面積爲何? 但圓的半徑爲 6 cm, OA 爲 10 cm.

求證次列三題.



(412)

(10) 一球內接於直圓柱,設以垂直於直圓柱的軸的二平面截之,則此二平面間所有直圓柱的面積與球帶的面積相等.

(11) 球的體積與其外切立方體體積的比,等於 $\pi : 6$.

(12) 設直圓錐的斜高與其底的直徑相等, 則其體積與內切於該圓錐的球的體積的比爲 $9 : 4$.

(13) 設球的體積等於其大圓周的數值, 則球的半徑爲何?

(14) 求外接及內切於正四面體的球的半徑, 但正

四面體的稜長爲a.

(15) 設球帶的面積爲3方呎,球的半徑爲1呎,求以此球帶爲底的扇形體的體積.

(16) 設球臺兩底的半徑爲6呎及8呎,而其高爲3呎,求球臺的體積.

(17) 設單底球臺的體積爲V,其高爲H,求球的半徑.

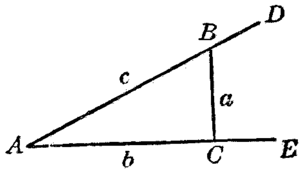
(18) 設一實球浮於液中,有四分之一的表面露出液上.問實球的重量若干?但實球的半徑爲R,液的比重爲S.

第九章

三角函數及高遠測量

第一節　銳角的三角函數

85. 三角函數的定義　設 $\angle EAD$ 爲銳角,自其一邊 AD 上任意一點 B, 作 BC 垂直於他邊,成直角三角形 ABC, 更設其三邊的數值爲 a, b, c (如 413 圖),則於三邊中每取二邊相比,可得六種,其名稱及記號如次:



(413)

$$\left.\begin{array}{lll}
(1) & \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\cdots\cdots\cdots\text{角 } A \text{ 的正弦 (sine), 記如} & \dfrac{a}{c}=\sin A \\
(2) & \dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}\cdots\cdots\text{角 } A \text{ 的餘弦 (cosine), 記如} & \dfrac{b}{c}=\cos A \\
(3) & \dfrac{\text{對邊}}{\text{底邊}}\cdots\cdots\text{角 } A \text{ 的正切 (tangent), 記如} & \dfrac{a}{b}=\tan A \\
(4) & \dfrac{\text{底邊}}{\text{對邊}}\cdots\text{角 } A \text{ 的餘切 (cotangent), 記如} & \dfrac{b}{a}=\cot A \\
(5) & \dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}\cdots\cdots\text{角 } A \text{ 的正割 (secant), 記如} & \dfrac{c}{b}=\sec A \\
(6) & \dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\cdots\text{角 } A \text{ 的餘割 (cosecant), 記如} & \dfrac{c}{a}=\csc A
\end{array}\right\}\text{(I)}$$

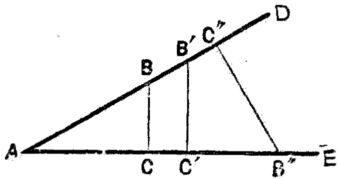
如此諸比總稱三角函數*.

【注意一】 三角函數爲不名數.

【注意二】 $\sin A$, $\cos A$……僅可各認爲記號的一種,所表爲角 A 的正弦,餘弦……並非 sin 與 A 的相乘積,故 $\sin A+\sin B$ 與 $\sin(A+B)$ 絕對不同.

【注意三】 上列諸比的值,由角 A 的大小而定,與各該比前後項所列線段的長短無關.

如 414 圖,自銳角 A 的一邊上任意一點, B, B', B'',……作垂線 $BC, B'C', B''C''$,……垂直於他邊,可得相似三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$……設求其二邊上對應諸線段的比,則有



(414)

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}\cdots\cdots$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}\cdots\cdots$$

…………………………

由是可知角 A 的三角函數,不問 B 點的位置如何,

*函數的意義,詳第四篇第三章.學者於此祇須了解此諸比之值,與角 A 的大小有關,而角 A 又適爲 $\triangle ABC$ 的三角之一,故稱角 A 的三角函數.

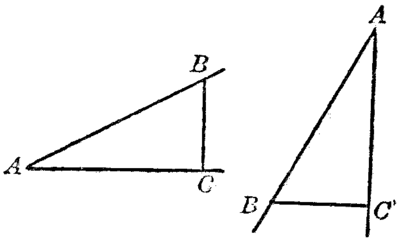
均爲一定,但角 A 的大小如有變化則其值不同.

【問 1】 於 413 圖中設 $a=3$, $b=4$, $c=5$ 則角 A 的三角函數如何?

【問 2】 如 413 圖,角 B 的三角函數爲何?

86. 餘角及補角的三角函數 學者如能答前款問 2, 即可知餘角的三角函數.

因於 $\triangle ABC$ 中,若 C 爲直角,則角 A 與角 B 互爲餘角,即 $B=90°-A$ 故得由前款(I)並對照 415 圖中所列兩三角形,寫出 A, B 兩角的三角函數如次:



(415)

$$\left.\begin{aligned}
\sin A &= \cos(90°-A) = \cos B \\
\cos A &= \sin(90°-A) = \sin B \\
\tan A &= \cot(90°-A) = \cot B \\
\cot A &= \tan(90°-A) = \tan B \\
\sec A &= \csc(90°-A) = \csc B \\
\csc A &= \sec(90°-A) = \sec B
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

由(II)可知一角的正弦,正切,正割及餘弦,餘切,餘割

各各與其餘角的餘弦,餘切,餘割及正弦,正切,正割相等.

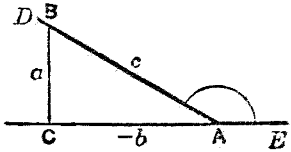
【問 1】 設 $\sin A=\frac{2}{3}$, $\tan B=\frac{5}{4}$,則角 A 及角 B 如何作圖?

【問 2】 適合於次列各式 x 的值如何?

(1) $\sin x=\cos 30^\circ$. (2) $\cos x=\sin 70^\circ$.

(3) $\tan 8x=\cot 7x$.

設 A 爲鈍角,則其補角爲銳角.自角 A 的一邊 AD 上一點 B,作他邊 AE 的垂線,則其垂足 C 在 AE 的延長線上.故直角三角形 ABC 一邊 AC 的長應爲 $(-b)$,與 A 爲銳角時符號相反.故角 A 的六個三角函數爲



(416)

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \tan A=-\frac{a}{b},\qquad \sec A=-\frac{c}{b},$$

$$\cos A=-\frac{b}{c},\qquad \cot A=-\frac{b}{a},\qquad \csc A=\frac{c}{a}.$$

今角 A 的補角爲 $180^\circ-A$,故得由 85 款 (I) 并對照上列諸函數,知某角與其補角的三角函數的關係如次:

$$\left.\begin{array}{ll}\sin A=\sin(180^\circ-A), & \cos A=-\cos(180^\circ-A)\\ \tan A=-\tan(180^\circ-A), & \cot A=-\cot(180^\circ-A)\\ \sec A=-\sec(180^\circ-A), & \csc A=\csc(180^\circ-A)\end{array}\right\}\quad\text{(III)}$$

由(III)可知鈍角的三角函數,得以其補角(銳角)的三角函數表之,但餘弦,正切,餘切及正割均爲負.

87. 特別角的三角函數

(1) $0°, 90°, 180°$ 的三角函數.

由85款(I)[413圖],設 C 爲定值,而使 a, b 分別逐漸減小,則角 A 亦隨之而變.此時 a 若趨向於 0,則垂足 C 將與 B 點一致,而 b 則趨向於 c,角 A 則趨向於 0.故

$$\sin 0° = 0, \qquad \tan 0° = 0, \qquad \sec 0° = 1,$$

$$\cos 0° = 1, \qquad \cot 0° = \infty, \qquad \csc 0° = \infty.$$

又 b 若趨向於 0,則垂足 C 將與 A 點一致,而 a 則趨向於 c,角 A 則趨向於 $90°$,故

$$\sin 90° = 1, \qquad \tan 90° = \infty, \qquad \sec 90° = \infty,$$

$$\cos 90° = 0, \qquad \cot 90° = 0, \qquad \csc 90° = 1.$$

又由86款(III)知

$$\sin 180° = \sin(180° - 0°) = \sin 0° = 0,$$

$$\cos 180° = \cos(180° - 0°) = -\cos 0° = -1,$$

$$\tan 180° = \tan(180° - 0°) = -\tan 0° = 0,$$

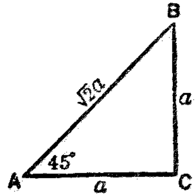
$$\cot 180° = \cot(180° - 0°) = -\cot 0° = -\infty,$$

$$\sec 180° = \sec(180° - 0°) = -\sec 0° = -1,$$

$$\csc 180° = \csc(180° - 0°) = \csc 0° = \infty.$$

(2) 45° 的三角函數　於直角等腰三角形 ABC 中,設 C 為直角,則

$$\angle A=\angle B=45^\circ$$



(417)

更設 BC 為 a, 則 $BC=AC=a$. 依彼氏定理知 $AB=\sqrt{2}a$.

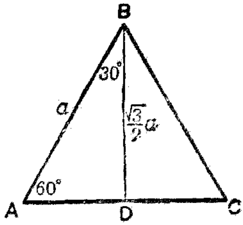
故
$$\sin 45^\circ=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ.$$

$$\tan 45^\circ=\frac{a}{a}=1=\cot 45^\circ.$$

$$\sec 45^\circ=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}=\csc 45^\circ.$$

(3) 30° 及 60° 的三角函數　自正三角形 ABC 的頂點 B, 作底邊 AC 的垂線 BD, 則於直三角形 ABD 中

$$\angle A=60^\circ,\ \angle ABD=30^\circ$$



(418)

再設 AB 為 a, 則 $AD=\frac{1}{2}a$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

故
$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ,\quad \cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ,$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\cot 30^\circ,\quad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ,$$

$$\sec 60^\circ = 2 = \csc 30^\circ, \qquad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30^\circ.$$

以上所得諸值茲更爲立表如次:

角＼函數	sin	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	-0	$-\infty$	-1	∞

【問 1】 $\sin 45^\circ$, $\cos 30^\circ$ 若算至小數第四位,其值如何?

【問 2】 $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ 的三角函數如何?

88. 任意銳角的三角函數　凡在前款所舉諸特別角以外的銳角,其三角函數的計算,由 86 款 (II) 祇須自 0° 算至 45° 卽可.但此非簡單易行的事,其法如何,姑不具論,茲惟以依法算得每隔一度的三角函數列表如次頁叫三角函數的眞數表.

三角函數眞數表

角＼函數	sin	cos	tan	cot	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	——	90°
1°	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87°
4°	0.0698	0.9976	0.06 9	14.301	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	1.430	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84°
7°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81°
10°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79°
12°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63°
28°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60°
31°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59°
32°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58°
33°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54°
37°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52°
39°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47°
44°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45°
	cos	sin	cot	tan	函數＼角

【注意一】 表中所列,祇正弦餘弦及正切餘切的數值,固因正割餘割不常使用,亦因正割餘割不難由正弦餘弦改算.(詳本章第四節)故從略.

【注意二】 三角函數除一二特殊的數值外,均爲不盡小數.表列各數的小數,均截至四位爲止,第五位以下四捨五入.

【注意三】 細察表列諸數可得次列各要點:

(1) 角的度數增,則正弦正切的值亦隨之而增,而餘弦餘切則隨之而減.

(2) 但各函數的值不與其角的度數比例增減,如 $\sin 60°$ 不爲 $\sin 30°$ 的 2 倍, $\tan 90°$ 亦不爲 $\tan 45°$ 的 2 倍.

(3) 正弦餘弦的值,在 0 與 1 之間.

(4) 而正切餘切的值,則可爲任何小或任何大的數.

【注意四】 若角的度數爲表中所無,卽角的度數若爲小數,或爲分秒,則其三角函數的計算可用插入法,卽假定當連續兩角的差非常微小時,其三角函數的差,幾乎與角的微差成比例.觀於下舉四五兩例自明.

例一. 求 $\cot 34°$.

解. 檢表於最上一列記 cot 的行內,查與左端第一

行中所有 34° 同列的一數 1.4826,即爲所求的數值.

例二. 求 $\sin 70^\circ$.

解. 檢表於最下一列記 sin 的行內,查與右端第一行中所有 70° 同列的一數 0.9397. 即爲所求的數值.

例三. 設 $\cos x = 0.3907$, 求 x.

解. 檢表於最下一列記 cos 的行內,得 0.3907, 其數適與右端第一行中所有 67° 相當,故 $x = 67^\circ$.

例四. 求 $\tan 47^\circ 25'$.

解. $47^\circ 25'$ 的正切必夾在 47° 與 48° 的正切中間. 檢表得

$$\tan 48^\circ = 1.1106$$

$$\tan 47^\circ = 1.0724$$

$$\text{其差}\cdots\cdots 0.0382$$

此與兩角的差卽 1° 或 $60'$ 相當. 今所設角度與 47° 的差爲 $25'$, 故以 d 表相當於 $25'$ 的函數的差,則

$$60' : 25' = 0.0382 : d$$

由此得 $$d = 0.0159$$

故 $$\tan 47^\circ 25' = \tan 47^\circ + d$$

$$= 1.0724 + 0.0159 = 1.0883.$$

例五. $\tan x = 0.4320$, 求 x.

解 檢表不能得 0.4320, 但可於 tan 行內查得二數, 一大於此,而一小於此 即

$$\tan 24^\circ = 0.4452$$

$$\tan 23^\circ = 0.4245$$

$$\text{其差} \cdots\cdots 0.0207$$

此與兩角的差即 1° 相當,今所設函數與 0.4245 的差爲 0.0075, 故以 y 表相當於此函數的差的微小角度,則

$$1^\circ : y = 0.0207 : 0.0075$$

由此得 $$y = 0.36^\circ$$

故 $$x = 23^\circ + 0.36^\circ = 23.36^\circ$$

習題三十二

(1) 在直角三角形 ABC 中,設 $a=8$, $b=15$, 求角 A 的正弦及餘弦.

(2) 在直角三角形 ABC 中,設 $b=2$, $c=\sqrt{11}$, 求角 A 的正切及餘切.

(3) 在直角三角形 ABC 中,設 $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $c=m+n$, 求角 B 的正割及餘割.

(4) 設 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $c=200.5$, 求 a.

(5) 設 $A=30^\circ$, $b=25\sqrt{3}$, 求 c.

(6) 設 $B=45°$, $a=20$, 求 b.

(7) 改寫次列各三角函數爲銳角的三角函數:

(一) $\csc 138°$, (二) $\tan 165°20'$. (三) $\sec 102°48'$.

(8) 求次列各函數的值:

(一) $\sin 128°$. (二) $\cos 160°$. (三) $\cot 139°$.

(9) 求證次列各式:

(一) $\sin 106° = \cos 16°$. (二) $\cos 148.3° = -\cos 31.7°$.

(10) 驗算次列各函數的值:

(一) $\sin 51.6° = 0.7836$. (二) $\cos 79.9° = 0.1753$.

(三) $\tan 27.42° = 0.5188$. (四) $\sin 43°18' = 0.6858$.

(五) $\cos 84°42' = 0.0924$. (六) $\cot 11°43.4' = 4.8264$.

(11) 求適合於次列各函數的 x.

(一) $\sin x = 0.5280$. (二) $\cos x = 0.9850$.

(三) $\sin x = 0.9425$. (四) $\tan x = 1.1652$

(五) $\cos x = 0.9999$. (六) $\cot x = 8.6892$.

第二節 解三角形

89. 問題的分類及實施解法的步驟 每一三角形有六要項——三邊及三角,假設其中有三要項爲已知,而求其他三要項,叫做解三角形(有時須連帶計算

其面積),其適用的方法,叫三角形解法.惟所設三項中,至少須有一邊,否則三角形的大小不能確定.茲就所設要項,分可解的直角三角形及斜角三角形為 A, B, C, D, E 五大類.

(1) 直角三角形 三角形如有一角為直角,則於六要項中已知其一,故此外只須再知其二,三角形便可全解.故於直角外可就所設分為兩大類:

A. 已知二邊 $\begin{cases} \text{甲. 斜邊及夾直角的二邊之一} \\ \text{乙. 夾直角的二邊} \end{cases}$

B. 已知一邊一角 $\begin{cases} \text{丙. 斜邊及其鄰角} \\ \text{丁. 夾直角的二邊之一及其對角} \\ \text{戊. 夾直角的二邊之一及其鄰角} \end{cases}$

對於任何一類均可依次列步驟,以實施解法.

(一) 作一三角形,命對於三角 A, B, C 的邊為 a, b, c, 使各邊及各角均合於所設要項.

(二) 如所設要項中有角,則自 $90°$ 減去該角,以求其他一角.

(三) 就 85 款 (I) 的六式中,適宜選擇其一,以計算未知的部分(有時須應用彼氏定理).如(丙)已知 A 及 c,則 $B=90°-A$, $a=c\sin A$, $b=c\cos A$, 又如(乙)已知 a 及

b, 則 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 而角 A 則可由 $\tan A=\frac{a}{b}$ 算出,角 B 可由 $\cot B=\frac{a}{b}$ 算出,其他可以類推.

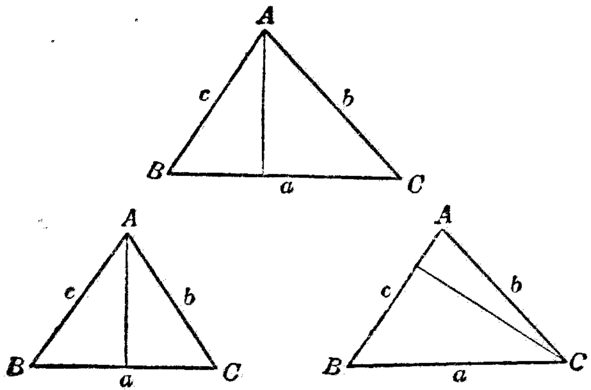
(2) 斜角三角形　解斜角三角形必須先知其三要項故可就所設分為三大類:

C. 已知二角一邊 $\begin{cases} \text{己. 二角及一角的鄰邊.} \\ \text{庚. 二角及其夾邊.} \end{cases}$

D. 已知二邊一角 $\begin{cases} \text{辛. 二邊及一邊的對角.} \\ \text{壬. 二邊及其夾角.} \end{cases}$

E. (癸) 已知三邊.

解斜角三角形的步驟,與解直角三角形同.因斜角三角形均可化為直角三角形解之.如419圖屬於己,庚,辛各類,均可先作垂線,分所設三角形為兩個直角三



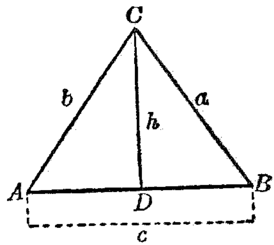
(419)

角形,次用丙的解法,以求此垂線的長,再用丁或甲的解法,以求其他一邊或一角(學者可按圖細玩便知).若欲直接解斜三角形,則於85款(I)的諸式外更須了解次列二定律.

【問】上列壬癸兩類,若欲化爲直角三角形以求其解,則如何?

90　正弦及餘弦定律

(1)　正弦定律　自三角形 ABC 的頂點 C,作 $CD\perp AB$,設其長爲 h,則由85款(I)知



(420)

$$\sin A=\frac{h}{b},\quad \sin B=\frac{h}{a}$$

由是得　$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}\text{ 或 }\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

同理　$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

故　$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\qquad\text{(IV)}$$

(2)　餘弦定律　此定律有兩種形式:

第一.　如420圖設 AB 邊被 AD 所分的二部爲 d_1, d_2,

則　$$\cos A=\frac{d_1}{b},\quad \cos B=\frac{d_2}{a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{相加得} && c=d_1+d_2=b\cos A+a\cos B\\
&\text{同理} && a=c\cos B+b\cos C\\
& && b=a\cos C+c\cos A
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(V)}$$

第二. 由 420 圖知

$$a^2=b^2+c^2-2cAD \quad \text{[第七章定理 105 系 2]}$$

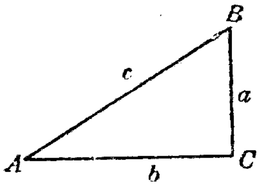
但由 85 款 (I) 知 $\qquad AD=b\cos A$

故 $\qquad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{即} && \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\
&\text{同理} && \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\
& && \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VI)}$$

91. 解三角形的實例

(1) 解直角三角形



(421)

例一 (甲). 設 $c=12$, $a=6$ 求 $\angle A$, $\angle B$, b.

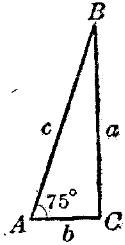
解. 因 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$, 故 $A=30°$.

又因 $\cos B=\dfrac{a}{c}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$, 故 $B=60°$.

又因 $a^2+b^2=c^2$, 故

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{144-36}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

例二 (丁). 設 $a=80$, $\angle A=75^\circ$, 求 $\angle B$, c, b.



(422)

解 因 $\angle A+\angle B=90^\circ$, 故 $\angle B=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

又因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$, 故

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{80}{\sin 75^\circ}=\frac{80}{\cos 15^\circ}.$$

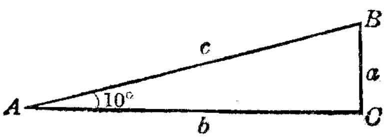
檢表得 $\cos 15^\circ=0.9659$, 故 $c=\dfrac{80}{0.9659}=82.82.$

又因 $\tan A=\dfrac{a}{b}$, 故 $b=\dfrac{a}{\tan A}=\dfrac{80}{\tan 75^\circ}=\dfrac{80}{\cot 15^\circ}.$

檢表得 $\cot 15^\circ=3.7321$, 故 $b=\dfrac{80}{3.7321}=21.44.$

例三 (戊). 設 $b=30$, $\angle A=10^\circ$, 求 c, $\angle B$, a.

解 因 $\cos A=\dfrac{b}{c}$, 故 $c=\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{30}{\cos 10^\circ}.$



(423)

檢表得 $\cos 10° = 0.9848$，故

$$c = \frac{30}{\cos 10°} = \frac{30}{0.9848} = 30.46.$$

又因 $\angle A + \angle B = 90°$，故 $\angle B = 90° - 10° = 80°$.

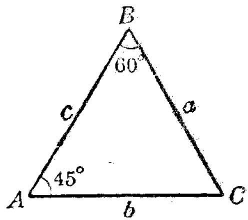
又因 $\tan A = \dfrac{a}{b}$，故 $a = b \tan A = 30 \tan 10°$.

檢表得 $\tan 10° = 0.1763$，故 $a = 30 \times 0.1763 = 5.289$.

(2) 解斜角三角形.

例四(庚). 設 $\angle A = 45°$，$\angle B = 60°$，$c = 9.56$.

求 $\angle C$，a，b.



(424)

解. 因 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

故 $$\angle C = 180° - 105° = 75°.$$

又因 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$，故 $a = \dfrac{c \sin A}{\sin C} = \dfrac{9.56 \sin 45°}{\sin 75°}$.

檢表得 $\sin 75° = 0.9659$，而 $\sin 45° = 0.7071$.

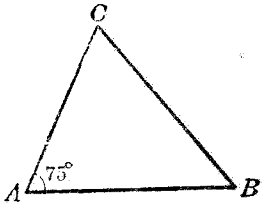
故 $$a = \frac{9.56 \times 0.7071}{0.9659} = 7.$$

又因 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$，故 $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} = \dfrac{7 \sin 60°}{\sin 45°}$.

但 $\sin 60° = 0.8660$，故 $b = \dfrac{7 \times 0.8660}{0.7071} = 8.57$.

例五(辛).　設 $a=40$, $b=30$, $\angle A=75°$.

求 $\angle B$, $\angle C$, c.



(425)

解　因 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

故 $$\sin B=\frac{b\sin A}{a}.$$

檢表得 $\sin 75°=0.9659$, 故 $\sin B=\dfrac{30\times 0.9659}{40}=0.7244$.

檢表並用插入法可求得 $\sin 46.4°=0.7244$, 故 $B=46.4°$.

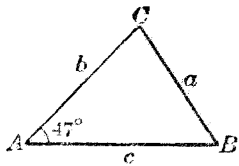
由是知 $\angle C=180°-(75°+46.4°)=180°-121.4°=58.6°$

又因 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$, 故 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$.

檢表得 $\sin C=0.8535$, 故 $c=\dfrac{40\times 0.8535}{0.9659}=35.30$.

例六(壬).　設 $b=8$, $c=10$, $\angle A=47°$.

求 a, $\angle B$, $\angle C$.



(426)

解　因 $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$,

故 $a^2=64+100-2\times 8\times 10\cos 47°$.

檢表得 $\cos 47°=0.6820$, 故

$a^2=64+100-2\times 8\times 10\times 0.6820=54.88$, 故 $a=7.41$.

又因 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$, 故 $\sin B=\dfrac{8\times\sin 47^\circ}{7.41}$.

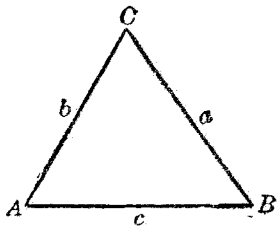
檢表得 $\sin 47^\circ=0.7314$, 故 $\sin B=\dfrac{8\times 0.7314}{7.41}=0.7849$.

檢表幷用插入法可求得 $\sin 52.2^\circ=0.7849$, 故 $B=52.2^\circ$.

又因 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$, 故

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{10\times 0.7314}{7.41}=0.9873.$$

檢表幷用插入法可求得 $\sin 80.8^\circ=0.9873$, 故 $\angle C=80.8^\circ$.



(427)

例七 (癸). 設 $a=21$, $b=24$, $c=27$.

求 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

解. 因 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{24^2+27^2-21^2}{2\cdot 24\cdot 27}$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{27^2+21^2-24^2}{2\cdot 27\cdot 21}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{21^2+24^2-27^2}{2\cdot 21\cdot 24}$$

由是可得 $\angle A=48.2^\circ$, $\angle B=58.4^\circ$, $\angle C=73.4^\circ$.

【注意一】 解三角形時,務利用所設部分,以算出所求部分,勿根據中途求得的數,以計算其他.若不得已

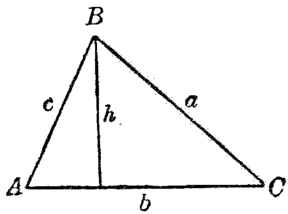
而出此,則必須驗算.驗算時可以應用的公式甚多,在解直角三角形時可用

$$b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a).$$

在解斜角三角形時,可用

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°,$$

或其他相異的公式.如由正弦定律求得的邊,則用餘弦定律以驗之.



(428)

【注意二】 解三角形時如須計算面積,可以旣得的邊及角依次式以求之.

$$S=\tfrac{1}{2}bh=\tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

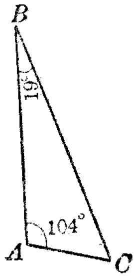
若 C 爲直角,則 $S=\frac{1}{2}ab$.

【注意三】 上舉諸例中,所設及所求各角均爲銳角,但角的值如大於90°,可依86款III改算.

92*. 用對數解三角形 三角函數的計算以不用眞數表而用三角函數對數表(附本册末)爲便,因一切眞數表所有各數,於三角函數對數表中均有其相當的對數.用時凡關於查表方法及對數計算無不與直接查眞數表及數的對數計算法同.若所設或所求的數,爲三角函數對數表中所無,可應用插入法以求之.

例(已). 設 $b=20$, $\angle A=104°$, $\angle B=19°$.

求 $\angle C$, a, c.



(429)

解. $\angle C=180°-(104°+19°)=180°-123°=57°$.

因 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

故 $$a=\frac{b\sin A}{\sin B},\quad c=\frac{b\sin C}{\sin B}.$$

故 $$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B,$$

$$\log c=\log b+\log\sin C-\log\sin B.$$

檢表得

$$\begin{array}{rl} \log b= & 1.3010 \\ \log\sin A= & \underline{9.9869-10} \\ \text{相加}\cdots\cdots & 11.2879-10 \\ \log\sin B= & \underline{9.5126-10} \\ \log a= & 1.7753 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log b= & 1.3010 \\ \log\sin C= & \underline{9.9236-10} \\ \text{相加}\cdots\cdots & 11.2246-10 \\ \log\sin B= & \underline{9.5126-10} \\ \log c= & 1.7120 \end{array}$$

故 $a=59.61$　　　　故 $c=51.52$

習題三十三

(1) 設次列各要項,解直角三角形 [$\angle C=90°$]

(一) $a=17.1$.　　(二) $b=9.696$.　　(三) $a=4$.

$c=50$　　　　$c=20$.　　　　$b=4$.

(四) $c=80$. $\angle A=20^\circ$.　(五) $c=1760$. $\angle B=32^\circ$.　(六) $a=3$. $\angle A=30^\circ$.

(七) $b=10$. $\angle B=50^\circ$.　(八) $b=4$. $\angle A=60^\circ$.　(九) $a=0.8$. $\angle B=86^\circ$.

(2) 設次列各要項,解斜角三角形.

(一) $a=10$. $\angle A=38^\circ$. $\angle B=77^\circ10'$.

(二) $b=5685$. $\angle B=48.66^\circ$. $\angle C=83.26^\circ$.

(三) $c=0.032$. $\angle A=36^\circ8'$. $\angle B=44^\circ27'$.

(四) $b=129.38$. $\angle A=19.42^\circ$. $\angle C=64^\circ$.

(五) $a=62.2$. $b=74.8$. $\angle A=27^\circ18'$.

(六) $b=19$. $c=18$. $\angle C=15.8^\circ$.

(七) $a=27$. $c=15$. $\angle B=46^\circ$.

(八) $a=486$. $b=347$. $\angle C=51^\circ36'$.

(九) $a=2$. $b=3$. $c=4$.

(十) $a=\sqrt{5}$. $b=\sqrt{6}$. $c=\sqrt{7}$.

(3) 設次列各要項,用對數解三角形.

(一) $a=23.817$. $b=50$.

(二) $b=91.06$. $c=77.04$.

$\angle C=90°.$ $\angle B=51.12°.$

(三) $b=0.8037.$ (四) $b=29.01.$

$\angle B=52°20'.$ $\angle A=87°40'.$

$\angle C=101°40'.$ $\angle C=33°15'.$

第三節* 高遠測量

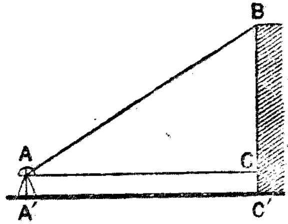
93*. 測量用的術語及方位 通常所欲測量的事項,不外點的位置,線段的長及二直線間的角度.若以一直線爲準,觀測一點或一角,則該直線叫基線.若自一點觀測一直線的兩端,則其間的角叫該直線的張角(即該直線對於觀測者眼中所張的角).若以線繫重錘懸之,則線的方向叫鉛直線,垂直於此線的平面叫水平面,該平面中所有直線叫水平線,垂直於水平面的平面叫直立面(即含有鉛直線的平面).連接觀測者與目的物的直線於直立面內與水平線所成的角,若該直線在水平線上,則叫仰角,或稱所測目的物的高度;若在水平線下則叫俯角.

測量用的方位,不僅通常習用的東南西北而已.而以航海用羅盤面所分三十二方位較爲細密,其名稱及順序一如上編第一章第四節習題三第(2)題57圖.

94*. 測高.

(I) 測可以接近而直立於水平面上的物體的高.

設 BC' 爲物高, AA' 爲觀測者的眼高(或測角器的高),自 A 點測定物體頂點 B 的仰角 BAC, 再測定自 A' 至物體的距離 $A'C'$ 即 AC, 則



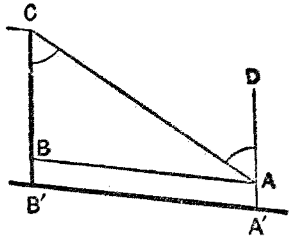
(430)

$$BC = AC.\tan BAC.$$

加入眼高 AA' 即 CC', 則得所求的物高 BC'.

(II) 測可以接近而不直立於水平面的物體的高.

設 $B'C$ 爲物高, AA' 爲眼高,自 A 點測定平行於 $A'B'$ 的直線 AB, 再自 A 點測定 BC 的張角 BAC 及 CA, AD $(AD \parallel CB)$ 間的角 CAD, 則依正弦定律得



$$BC = \frac{AB \sin BAC}{\sin CAD},$$

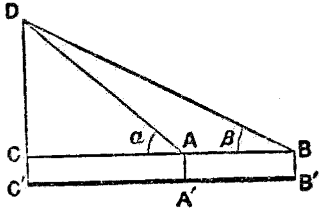
(431)

加入眼高 AA' 即 BB', 則得物高 BC.

(III) 測不可接近而直立於水平面上的塔高.

設 DC' 爲塔高自一點 A 測定塔頂的仰角 DAC, 再自

另一點B(B在AC直線上)測定塔頂的仰角DBC,更測定基線AB即$A'B'$,則



(432)

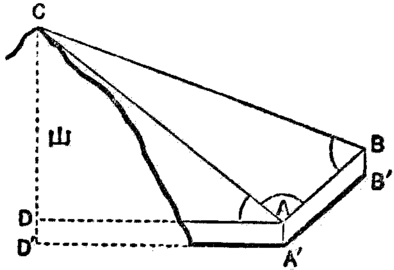
$$DC = BD \sin DBC.$$

但 $$BD = \frac{AB \sin DAB}{\sin(DAC - DBC)}.$$

故 $$DC = \frac{AB \sin DAB \ \sin DBC}{\sin(DAC - DBC)}.$$

加入眼高AA'即CC',則得塔高DC'.

(IV.) 測山高



(433)

設CD'爲山高,DD'爲眼高,先於適當的地方,測定基線AB即$A'B'$.次自A點測定山頂的仰角CAD及CAB,再自B點測定$\angle ABC$,則於$\triangle ABC$中,知

$$AC = \frac{AB \sin ABC}{\sin(CAB + ABC)}.$$

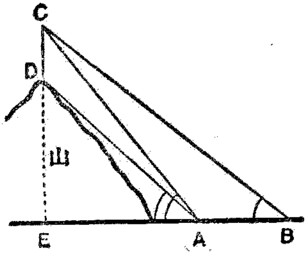
$$[\because \quad \sin ACB = \sin\{180^\circ - (CAB + ABC)\}].$$

然 $$CD = AC \sin CAD.$$

故 $$CD = \frac{AB \sin ABC \cdot \sin CAD}{\sin(CAB + ABC)}.$$

加入眼高DD',則得山高CD'.

(V.) 測山上直立的旗竿的高.



(434)

設CD爲旗竿的高,先自地面上一點A測定C的仰角CAE及D的仰角DAE,次自A退至另一點B,測定基線AB,再測定C的仰角CBE,則於$\triangle CAB$中知

$$AC=\frac{AB\sin CBE}{\sin(CAE-CBE)}.$$

但 $$\sin ADC=\sin ADE=\cos DAE,$$

而 $$\frac{CD}{AC}=\frac{\sin(CAE-DAE)}{\sin ADC},$$

故 $$CD=\frac{AC\sin(CAE-DAE)}{\sin ADC}$$

$$=\frac{AB\sin CBE\cdot\sin(CAE-DAE)}{\sin(CAE-CBE)\cos DAE}.$$

由此圖計算山高亦非難事.

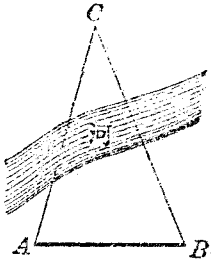
95*. 測遠.

(I.) 測不可接近的物體與觀測者所在地的距離.

設隔河有一物爲C,而欲知AC的距離,先取適宜的基線AB測定其長,再自A測定$\angle BAC$(設爲A),自B測定$\angle ABC$(設爲B),則

$$\angle C=180^\circ-(A+B).$$

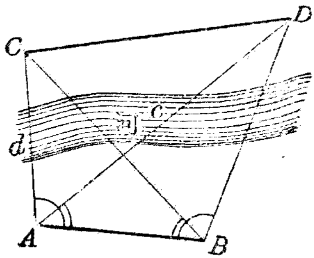
由是得 $$AC=\frac{AB\sin B}{\sin C}.$$



(435)

(II) 測可以望見而不可接近的二點間的距離.

設C,D爲可以望見的二點,而欲知其距離,先取適宜的基線AB,測定其長;次自A點測定$\angle BAC$,$\angle BAD$,及$\angle CAD$;復次自B點測定$\angle ABC$及$\angle ABD$,則



(436)

於$\triangle ABC$中知 $$AC=\frac{AB\sin ABC}{\sin(BAC+ABC)}.$$

於$\triangle ABD$中知 $$AD=\frac{AB\sin ABD}{\sin(BAD+ABD)}.$$

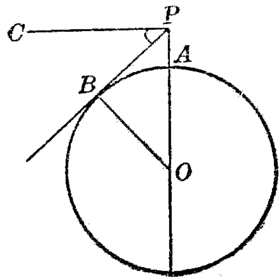
於是$\triangle CAD$的AC,AD及$\angle CAD$均爲已知,故得解此三角形(可化爲兩個直角三角形解之),以求出$\angle ACD$及$\angle ADC$.

由此得 $$CD=\frac{AC\sin CAD}{\sin ADC}.$$

或 $$CD=\frac{AD\sin CAD}{\sin ACD}.$$

若自 B 點測定 $\angle CBD$ 於 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ 中求出 BC, BD, 再於 $\triangle CBD$ 中求出 $\angle BCD$, $\angle BDC$, 用以計算 CD 亦可.

(III) 測視界半徑



(437)

假設地球為幾何的球體,自高處 P 作地面切線,則切點 B 的軌跡為球面上一圓周,地面在此圓周內的部分,均為立於 P 處觀測者所可望見的範圍,叫 P 點的視界,其切線 BP 的長則叫視界半徑,設 O 為地球中心,γ 為地球半徑,於平面 OBP 中,作 $PC\perp OP$,並測定俯角 CPB,設為 α,則

$$\angle BOP=\alpha,\ \gamma=OP\cos\alpha,$$

故 $$AP=OP-\gamma=\frac{\gamma}{\cos\alpha}-\gamma=\frac{\gamma(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha},$$

即 $$\gamma=\frac{AP\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

故 $$BP=\gamma\tan\alpha=\frac{AP\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\tan\alpha.$$

由上列三式,物高,地球半徑及視界半徑可以互求.

但由第八章定理106系1,知$\overline{BP}^2=AP(AP+2\gamma)$,今以$AP$與$2\gamma$比,其數甚微,不妨省略.

故 $$\overline{BP}^2=2\gamma\cdot AP.$$

若以n表BP的哩數,h表AP的呎數,因地球半徑約為3963哩,故

$$h=\frac{(n\times 5280)^2}{2\times 3963\times 5280}=\frac{528n^2}{2\times 396}=\frac{2}{3}n^2.$$

故n若為1,則$h=\frac{2}{3}$呎$=8$吋.

由此可知海面上8吋高的物體,一哩外即不能見.

習題三十四

(1) 倚梯於壁,梯長12市尺,與地面成60°的傾角求梯頂的高,及梯脚與壁的距離.

(2) 旗竿被風吹折,自距離竿脚10市尺處折向地面,與地面成60°的角,求竿的全長.

(3) 從高出海面80呎的桅頂觀測他船,得俯角為30°,求二船的距離.

(4) 沿河岸實測一基線AB為300公尺自A及B觀測對岸的樹頂C,得$\angle CAB=53°20'$,$\angle CBA=64°30'$,求河

關及AC的距離.

(5) 自海岸上高420呎的絕壁頂測得同在一直立面中二船的的俯角為$60°$及$45°$,求二船的距離.

(6) 自高h公尺的塔頂測得與塔立於同平面上一圓柱的頂及其底的俯角為α_1及α_2,求圓柱的高.

(7) 每時以12浬向東航行的船,當正午時有人見其方位為南$15°$東,比及午後一時半,則為南東.求該船當正午時對於此人的距離.

(8) 向南西航行的船,觀測正在停泊的甲乙二艦,知甲在北北西,而乙在西北西.但此船航行10浬後,則甲在北而乙在北西,求二艦的距離及其相對的方位.

(9) 自地平面上一點測得高h市尺的塔及直立其上的尖頂所張的角適相等,求尖頂的高.但觀測點距塔基a市尺.

(10) 立於高1哩的山巔,其視界半徑為若干哩?(假設地球半徑為4000哩).

(11) 自距離塔基a公尺的一點,測得塔頂上直立旗竿所張的角為α_1,更退b公尺測之,其張角為α_2,求證竿長為$(2a+b)\tan\alpha$公尺.

(12) 自高於湖面h的一點測得雲的高度為α_1,又

測得映於水面的雲影,其俯角爲α_2,求證雲高爲

$$\frac{h\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

(13) 一人沿直道步行,測得塔的最大高度爲α_1,又沿他道測之,得其最大高度爲α_2,設自兩觀測點至兩道的交點爲a及b,求證塔高爲

$$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{\cot^2\alpha_1-\cot^2\alpha_2}}.$$

(14) 今欲知對岸的樹高,而假定有一直線通過樹底,並於此直線上取三點A,B及C,自此三點測得樹的仰角爲2α, $90°-\alpha$及α,求證樹高爲

$$\sqrt{\overline{AC}^2-\frac{1}{4}\overline{BC}^2}.$$

(15) 海上有山,設其高爲CD,自二船A, B測得$\angle BAC$爲$67°16'$, $\angle ABC$爲$54°20'$及仰角CAD爲$35°30'$,而A, B相距365呎,眼高10呎,求CD.

第四節* 三角函數的關係

96*. 同角的三角函數 由85款(I),可得同一角函數的種種關係.

(1) 逆數關係

$$\left.\begin{aligned}\cot A=\frac{1}{\tan A},\quad \tan A\cot A=1\\ \sec A=\frac{1}{\cos A},\quad \cos A\sec A=1\\ \csc A=\frac{1}{\sin A},\quad \sin A\csc A=1\end{aligned}\right\}\qquad\text{(VII)}$$

(2) 相除關係

因 $$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\times\frac{c}{b}=\sin A\times\frac{1}{\cos A},\qquad(413\text{ 圖})$$

故 $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.\ \text{同理}\ \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.\qquad\text{(VIII)}$$

(3) 平方關係

因 $$(\sin A)^2=\frac{a^2}{c^2},\quad(\cos A)^2=\frac{b^2}{c^2},\qquad(413\text{ 圖})$$

故 $$(\sin A)^2+(\cos A)^2=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1.$$

若以 $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ 記作 $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ 則

同理 $$\left.\begin{aligned}\sin^2 A+\cos^2 A=1\\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A=\csc^2 A\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IX)}$$

依上列諸關係,得由一角的已知函數,寫出同角的其他諸函數.如由(IX)的第一式可得

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}$$

再由(VIII)可得 $\tan A=\pm\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

及 $\cot A=\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$.

再由(VII)可得 $\sec A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

及 $\csc A=\dfrac{1}{\sin A}$.

97*. 三角恆等式及三角方程式 如前款所列諸關係式不論角 A 的數值如何皆成立,如此叫三角恆等式.依上列諸式的關係得證明種種恆等式:

例一. 求證 $(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$.

證: 左邊 $=1+2\cos A+\cos^2 A+1+2\sin A+\sin^2 A$

$=2+(\cos^2 A+\sin^2 A)+2(\cos A+\sin A)$

$=2+1+2(\cos A+\sin A)$

$=3+2(\sin A+\cos A)$.

例二. 求證 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$.

證: 左邊 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\}$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$.

凡含有未知角的三角函數的等式叫三角方程式，亦得依已知諸關係，對於所設方程式施行種種計算以解出未知角的數值.

例三.　解　$3\sin x=2\cos^2 x$.

解　由前款(IX)第一式，知 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$,

故
$$3\sin x=2(1-\sin^2 x),$$

即
$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0,$$

故
$$\sin x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\times2\times2}}{2\times2}=\frac{-3\pm5}{4}=\frac{1}{2}\text{ 或 }-2.$$

但
$$\sin x\neq-2, \qquad\text{(何故?)}$$

故 $\sin x=\frac{1}{2}$，由是得 $x=30^\circ$ 或 150°.

習題三十五

(1)　已知 $\tan x+\cot x=2$，求 $\tan x$ 的值.

(2)　以 $\cos A$, $\tan A$ 表 A 角的其他諸函數.

(3)　設 $\tan A=\frac{8}{15}$，求 $\sin A$, $\cos A$，設 $\sin A=\frac{12}{13}$，求其他諸函數.

(4)　自直角三角形 ABC 的直角頂點 C，作斜邊 AB 的垂線 CD，則 $CD=AB\sin A\sin B$.

(5)　依三角函數的關係證明第八章定理 101.

(6) 求證次列三角恆等式:

(一) $\sin^4 A \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A.$

(二) $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1.$

(三) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$

(四) $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A.$

(五) $(1 - \sin^2 A)\tan^2 A = \sin^2 A.$

(六) $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A\cos^2 A.$

(七) $\tan A + \sec A = \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}.$

(八) $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

(九) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \tan\alpha.$

(十) $\dfrac{1}{1-\sin A} + \dfrac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A.$

(十一) $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A) = (2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A).$

(十二) $\tan A + \cot A = \sec A\csc A.$

(十三) $(1+\cot^2 A)\sin^2 A = 1.$

(十四) $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A\csc^2 A.$

(十五) $\sin^2 A + \tan^2 A = \sec^2 A - \cos^2 A.$

(十六) $\cos A + \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \csc A.$

(七) $\sec A \csc A(\cos^2 A-\sin^2 A)=\cot A-\tan A$.

(八) $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$.

(九) $\cos A \tan A+\sin A \cot A=\sin A+\cos A$.

(十) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$.

(7) 簡化次式:

$$(x\cos A-y\sin A)^2+(x\sin A+y\cos A)^2.$$

(8) 解次列三角方程式:

(一) $3\tan^2 x-4\sqrt{3}\tan x+3=0$.

(二) $\sin^2 x+\sin x=\dfrac{2}{3}$.

(三) $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(四) $2\sin x=\tan x$.

(五) $4\sin x=\csc x$.

(六) $\begin{cases} x\sin A+y\cos A=1. \\ x\cos A-y\sin A=1. \end{cases}$ (x, y 爲未知數).

第四篇

小學教學的理論與實際

在前三篇中,自基本運算的練習,以至數量及其算法的擴張,平面及空間圖形的推究與測算,凡於初中階段應習的算術代數及幾何各項,似已粗具規模,學者由此進修,似已有相當基礎,然若以之教學,則理論的依據,尙有未備,方法的運用,亦多未明,故有繼續修習本篇的必要.本篇分上下兩部分,一部取材關於幾何代數及算術的增補.雖小學教學實際,毋須採用及此,但師範生爲其自身應用計,則不可不知.如級數及堆垜,如選擇及機會,如統計及圖解等等淺近的理論及其簡明的方法,皆爲小學教師應有常識中不可或缺的事項,而應用問題的研究,教師當不厭求詳,深切注意,更不待言,凡此皆於本篇上編內次第述之.即第三篇下編所述幾何圖形的測算,大部分實爲小學求積的準備,與本篇的性質無殊,祇以屬於幾何,故列入第三篇內.而本篇各章即緊接於此,以示第一圓周的教材排列,既由算術而幾何,則第二圓周,即由幾何而算術.至本篇下編所述,完全關於小學教學方法的討論,尤爲師資訓練的必要教材.

上編

理論的補充

第一章

級數及堆垜

第一節　三種重要級數

1. 等差級數的特性 凡依一定法則而排列的諸數叫級數,各數叫級數的項.如

$$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 99$$

$$a, 2a, 4a, 8a, \cdots\cdots\cdots\cdots 2^{10}a$$

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\cdots\cdots\cdots n^2$$

皆爲級數.最初的一項叫級數的初項.最後的一項叫末項.

級數的各項,若恆等於其前項與一定數的和,則該級數叫等差級數,又叫算術級數,其所加的定數叫公差,因該數恆爲相鄰二項的差的緣故.觀前舉第一列,初項是1,公差是2,可知爲等差級數.故初項及公差若爲已知,則該級數卽可決定;公差若爲正數,則級數各項逐次增大,若爲負數,則逐次減小.

設初項為a,公差為d,則等差級數的諸項為

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots$$

由此可知第n項為$a+(n-1)d$[但n為正整數].今於第n項中,設n為$1, 2, 3, \cdots\cdots$,則可得第一項,第二項,第三項,……,故第n項又稱級數的通項.而級數若祇有n項,則第n項即為末項.故若以l表末項,則

$$l=a+(n-1)d \tag{I}$$

【問1】 初項5,公差3的等差級數若書至第十項則如何?公差若為-3又如何?

【問2】 設等差級數第六項為20,第九項為32,則該級數如何?

設有三數成等差級數,則其中間的一數叫等差中項,又叫算術平均,又叫相加平均,如a, A, b成等差級數時,則

$$A-a=b-A$$

故
$$A=\frac{a+b}{2} \tag{II}$$

若有四個以上的數成等差級數,則兩端的二數叫外項,中間諸數皆叫等差中項.今欲於a, b間插入m個等差中項,非先求公差不可.因此時a可看做初項,b可看做末項,而所有項數共為$m+2$,故由(I)得

$$b=a+(m+1)d.$$

即
$$d=\frac{b-a}{m+1}. \tag{III}$$

由此可得所欲插入的 m 個等差中項.於是該級數可書爲 $a, a+\frac{b-a}{m+1}, a+\frac{2(b-a)}{m+1}, \cdots\cdots a+\frac{m(a-b)}{m+1}, b.$

【問 3】 設於 8 及 24 間插入七個等差中項,則如何?

2. 等差級數的和 設 S 爲等差級數 n 項的和,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l.$$

又
$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a.$$

上二式邊邊相加,則

$$2S=(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l).$$

即
$$2S=n(a+l),$$

故
$$S=\frac{n(a+l)}{2}. \tag{IV}$$

若以 (I) 代入 (IV), 則

$$S=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}. \tag{V}$$

例一. 求自然數* n 個的和.

解. 因 $a=1, d=1$, 故由 (IV)

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

---

* 自然數指正整數連續排列者

【問1】 最初n個奇數的和如何?

例二. 求級數7, 12, 17, ……至第十項的和.

解. 因$a=7, d=5, n=10$, 故由(V)

$$S=\frac{10\times(14+9\times5)}{2}=5\times59=295.$$

【問2】 $5+8+11+\cdots\cdots$至第十項的和爲何?

例三. 求自100至1000中可爲7除盡的諸數的和.

解. 因$100=7\times14+2$, $1000=7\times142+6$, 故此兩數間所有7的倍數爲

$$7\times15, 7\times16, \cdots\cdots 7\times142$$

此諸數適成等差級數,而其項數爲$142-14=128$, 故由

(V) $$S=\frac{128\times(7\times15\times2+127\times7)}{2}=70335.$$

【問3】 在三位整數中可爲9除盡的諸數的和如何?

例四. 已知24, 21, 18, ……n項的和爲105, 求n.

解. 因$a=24, d=-3, S=105$, 故由(V)

$$105=\frac{n\{48+(n-1)(-3)\}}{2}.$$

簡之得 $$n^2-17n+70=0$$

解之得 $$n=7 \text{ 或 } 10.$$

即所求項數爲7或10.

驗算. $24+21+18+15+12+9+6=105,$

$24+21+18+15+12+9+6+3+0-3=105.$

【問 4】 $5+7+9+\cdots\cdots$加至若干項則爲480?

【問 5】 若初項爲3,末項爲27,總和爲495,則項數如何?

習題一

(1) 就次列各級數寫出指定各項:

(一) $1, 6, 11, \cdots\cdots$的第十五項.

(二) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\cdots\cdots$的第二十項.

(三) $-2, -5, -8\cdots\cdots$的第十項.

(四) $-48, -44, -40\cdots\cdots$的第十三項.

(2) 7及-7的等差中項爲何? a^2+ab-b^2及a^2-ab+b^2的等差中項又爲何?

(3) 於17及-4間插入四個等差中項.

(4) 求次列各級數的和:

(一) $2+3.75+5.5+\cdots\cdots$至十二項.

(二) $-4-1+2+\cdots\cdots$至十項.

(三) $1+2\frac{2}{3}+4\frac{1}{3}+\cdots\cdots$至十八項.

(四) $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots\cdots$至 n 項.

(5) 求111及311間所有偶數的和.

(6) 求122及322間所有奇數的和.

(7) 求小於400而爲17的諸倍數的和.

(8) 算出次表所缺的數.

	a	d	n	l	s
(一)	3		13	55	
(二)	−7		7	11	
(三)		$1\frac{1}{2}$	11		99
(四)	−5	−3			63

(9) 設初項與第五項的和爲38,第四項與第九項的和爲24,求初項及公差.

(10) 有三數成等差級數,其和爲15,其平方和爲83,求各數.

(11) 分20爲四部成等差級數,並使其第一第四兩部相乘積與第二第三兩部相乘積的比爲2 : 3.

(12) 設凸多角形的內角成等差級數,其最小角爲120°,公差爲5°,求邊數.

(13) 求證次列各題

(一) 自等差級數的兩端,數至同數的兩項的和

恆相等.

(二) 於等差級數的各兩鄰項間,插入同數的等差中項,則全體仍為等差級數.

(三) $S=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}$.

(四) 自級數 $8, 16, 24, 32$……的初項至任一項的和,等於某奇數的平方減1.

3. 等比級數的特性　級數的各項若恆等於其前項與一定數的相乘積,則該級數叫等比級數,又叫幾何級數,其所乘的定數叫公比,因該數恆為相鄰二項的比的緣故.如 $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 為初項8,公比 $\frac{1}{2}$ 的等比級數.故初項及公比若為已知,則該級數即可決定;公比的絕對值若大於1,則級數各項的絕對值逐次增大,若小於1,則逐次減小.

設初項為 a,公比為 r,則等比級數的諸項為

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$$

由此可知第 n 項即通項為 ar^{n-1},而級數若祇有 n 項,則第 n 項即為末項,故若以 l 表末項,則

$$l=ar^{n-1} \qquad \text{(VI)}$$

【問1】 初項 5, 公比 3 的等比級數,若書至第十項

則如何?公比若爲 -3 或 $\frac{1}{3}$ 又如何?

設有三數成等比級數,則其中間的一數叫等比中項*,又叫幾何平均,又叫相乘平均.如 a, G, b 成等比級數時則

$$a : G = G : b.$$

故
$$G = \pm\sqrt{ab}, \tag{VII}$$

若有四個以上的數成等比級數,則兩端的二數叫外項,中間諸數皆叫等比中項.今欲於 a, b 間插入 m 個等比中項,非先求公比不可.因此時 a 可看做初項,b 可看做末項,而所有項數共爲 $m+2$, 故由 (VI) 得

$$b = ar^{m+1},$$

即
$$r\text{ 的絕對值} = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \tag{VIII}$$

此處 $m+1$ 若爲偶數,則 r 有正負二值, $m+1$ 若爲奇數,則 r 爲正或爲負,祇有一値,但 r 均須爲實數.

由此可得所欲插入的 m 個等比中項.於是該級數可書爲

$$a,\ a\cdot\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\ \cdots\cdots,\ a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m,\ b$$

---

*二數的等比中項與比例中項同.

【問 2】 設於 3 及 48 間插入三個等比中項,則如何?

4. 等比級數的和 設 S 爲等比級數 n 項的和,則

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

兩邊乘以公比 r,則

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots ar^{n-1}+ar^n$$

兩式邊邊相減,則

$$(1-r)S=a-ar^n.$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{故}\quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.\\&\text{或}\quad S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(IX)}$$

若以 (IV) 代入 (IX),則

$$S=\frac{a-lr}{1-r}.\qquad\text{(X)}$$

【問 1】 次列級數的和如何?

(1) $1+4+16+\cdots\cdots$至五項.

(2) $9+3+1+\cdots\cdots$至六項.

上列 (IX) 式可依 r 的數值分別討論如次:

(I) $r=1$,則項數愈多,S 的絕對值愈大.

$r=-1$,則因項數爲奇數或偶數,而 S 等於 a 或等於 0.

(II) r 的絕對值大於1,則 r^n 因 n 的無限增大而與之俱大,此時 S 亦無限增大.

(III) r 的絕對值小於1,則因

$$S=a\times\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

故 n 若無限增大,r^n 的絕對值無限減小,趨近於0,此時 S 遂無限地趨近於$\frac{a}{1-r}$,其差可比任何小數猶小.故得記公比小於1的無限項等比級數的和爲

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}. \tag{XI}$$

例一. 求無限等比級數$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$的和.

解. 因 $a=1$, $r=\frac{1}{2}<1$ 故由(XI)得

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

【問 2】 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$至無限項的和如何?

例二. 化循環小數$0.\dot{4}\dot{5}$爲分數.

解. 因 $0.\dot{4}\dot{5}=0.454545\cdots\cdots$

$$=\frac{45}{100}+\frac{45}{100^2}+\frac{45}{100^3}+\cdots\cdots.$$

故知　$a=\frac{45}{100}$,　$r=\frac{1}{100}$.

由此得　$S_\infty=\frac{45}{100}\div\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$.

即　$0.\dot{4}\dot{5}=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$.

[參考第一篇55款]

【問3】 次列循環小數若化爲分數則如何?

(1)　$0.\dot{2}4\dot{3}$.　(2)　$1.111\cdots\cdots$.　(3)　$0.7\dot{4}\dot{5}$.

例三. 設 $-1<r<1$, 求 $r+2r^2+3r^3+\cdots\cdots$ 至無限項的和.

解. $$S=r+2r^2+3r^3+\cdots\cdots.$$

$$rS=r^2+2r^3+3r^4+\cdots\cdots.$$

故　$$(1-r)S=r+r^2+r^3+\cdots\cdots.$$

但　$$r+r^2+r^3+\cdots\cdots=\frac{r}{1-r}.$$

故　$$S_\infty=\frac{r}{(1-r)^2}.$$

【問4】 級數 $3+33+333+\cdots\cdots$ 若加至 n 項則如何?

習題二

(1)　求 $18a^3b$ 及 $200ab^5$ 的等比中項.

(2) 於32及162間插入三個等比中項,於3及-729間插入四個等比中項.

(3) 求次列各級數的和:

(一) $1+2+4+8+16+\cdots\cdots$至三十項.

(二) $1+\sqrt{2}+2+\cdots\cdots$至十二項.

(三) $1-2+4-8\cdots\cdots$至n項.

(四) $x-y+\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y^3}{x^2}+\cdots\cdots$至$n$項.

(4) 求次列無限等比級數的和:

(一) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}-\cdots\cdots$ (二) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots$

(三) $8\sqrt{2}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}+\cdots\cdots$

(四) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots$

(5) 化次列循環小數爲分數.

(一) $0.729729729\cdots\cdots$ (二) $3.28131313\cdots\cdots$

(6) 求級數$9+99+999+\cdots\cdots$至n項的和.

(7) 設無限等比級數的第二項爲2,其和爲8,求此級數.

(8) 設等比級數的第三項爲32,第六項爲2048,求此級數.

(9) 有三數成等比級數,其和為13,其平方和為91,求此三數.

(10) 設8, a, b 成等差級數, a, b, 36 成等比級數,求 a, b.

(11) 某市人口於四年間由10000增至14641,問平均每年的增加率.

(12) 順次聯結正方形各邊中點成正方形,再順次聯結第二正方形各邊中點又成正方形,如此繼續行之,可得無數正方形,則此等正方形面積的總和為何?

(13) 求證次列各題.

(一) 與等比級數兩外項等距離的二項相乘積,恆等於兩外項的相乘積.

(二) 於等比級數的各兩鄰項間,插入同數的等比中項,則全體仍為等比級數.

(三) 等比級數 n 項的積為 $\pm\sqrt{(al)^n}$.

(四) 設 $x:y=(x+z)^2:(y+z)^2$, 而 $x\neq y$, 則 z 為 x 及 y 的等比中項.

(五) 設 $S=1+r+r^2+\cdots+r^{2n}$, $S'=1-r+r^2-\cdots+r^{2n}$, 則

$$SS'=1+r^2+r^4+\cdots\cdots+r^{4n}.$$

5. 調和級數的特性　級數各項的逆數若成等差級數,則該級數叫調和級數,如

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

及
$$\frac{1}{a},\frac{1}{a+d},\frac{1}{a+2d},\ \cdots\cdots$$

設有三數成調和級數,則其中間的一數叫調和中項.如 a, H, b 成調和級數時,則 $\frac{1}{a},\frac{1}{H},\frac{1}{b}$ 成等差級數,故

$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}.$$

即
$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

故
$$H=\frac{2ab}{a+b}. \tag{XII}$$

若欲於 a, b 二數間插入若干個調和中項,則先於其逆數間插入同數個的等差中項,再取其逆數即得.

由 1 款的 (II), 3 款的 (VII) 及 (XII) 可得等差中項等比中項及調和中項的關係:因

$$A\times H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$$

故知 G 為 A 及 H 的比例中項,又 a 及 b 若皆為正,而 $a \neq b$,

則
$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}>0$$

及
$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\sqrt{ab}\times\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}>0.$$

故知　$A>G$ 及 $G>H$.

即　$A>G>H$

習題三

(1) 設調和級數的初三項為6, 3, 2, 求次三項.

(2) 於6及24間插入兩個調和中項.

(3) 有二數,其等差中項為9,調和中項為8,求各數.

(4) 有二數,其等差中項較等比中項大13,其等比中項較調和中項大12,求各數.

(5) 證明次列各題.

(一) 設 $a-b:b-c=a:a$ 則 a, b, c 成等差級數;

$a-b:b-c=a:b$ 則 a, b, c 成等比級數;

$a-b:b-c=a:c$ 則 a, b, c 成調和級數.

(二) 設 a, b, c 為相異的正數,則

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

(三) 設 a, b, c 成調和級數,則

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0.$$

(四) 設三數成等比級數,則各數與其中間的一數

相加時,其和成調和級數.

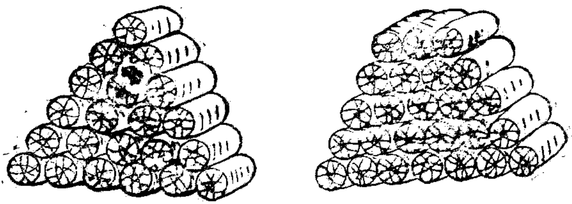
(五) 設 a, b, c 成調和級數,則

$$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$$ 亦成調和級數.

(6) 設 a, b, c 成調和級數,求 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}$ 的値.

第二節* 堆垛的一斑

6*. 貨品的陳列 如(1)圖以若干件類似柱形的



(1)

貨物,如木柴,或米袋,或炭簍,或其他商品等,並列爲排,復積排爲堆,其截面成正三角形或等腰梯形,每排各較其下排少一件,而最上一排則祇有一件或有若干件不等.如此堆垛可直接應用等差級數以計算其排數,每排件數及其總和.

例一. 米袋若干,排成堆垜,設上排 1 袋,下排 16 袋,求總數.

解　按題意知各排的袋數適成一等差級數,其初項爲1,末項爲16,而項數亦爲16.故由第一節(IV)得

$$S=\frac{1}{2}\times16(16+1)=136.$$

答.　共有米136袋.

例二.　有半徑相等的圓木315根,若下排列25根,則推至某排適盡.求上排的根數.

解　設x爲上排所有根數,因下排並列25根,而總數爲315根,則於等差級數的各要素中,已設a爲x,又知l爲25,S爲315,故由第一節(I)得排數

$$n=\frac{l-a}{d}+1=\frac{25-x}{1}+1=26-x.$$

再由第一節(IV)得

$$S=315=\frac{1}{2}(26-x)(x+25).$$

簡之　$$x^2-x+30=0.$$

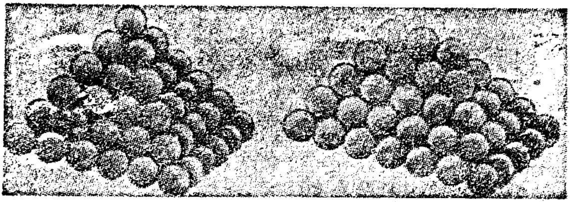
解之　$$x+6=0\text{ 或 }x-5=0.$$

但　$$x\neq-6,\text{ 故 }x=5.$$

答.　上排共有5根.

7*. 彈丸的堆積　如(2)圖以若干個彈丸或其他類似彈丸,而構造相若,大小相等的個體堆積成種種形狀.其底層爲正三角形或正方形或矩形,每層每邊

的個數各較其下層少一，而最上一層，則祇有一個或



(2)

若干個不等.如此堆垛亦可依級數計算.但須根據次列三種級數的和,以導出計算時所可應用的公式.

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. (XIII)

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. (XIV)

(3) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. (XV)

(XIII)的證明已見2款例一,茲證明(XIV),(XV)如次:

(XIV)的證明: 因$3\cdot n^2+3\cdot n+1=(n+1)^3-n^3$,故若以$1,2,3\cdots\cdots$等數代$n$,則

$$3\cdot1^2+3\cdot1+1=2^3-1^3,$$

$$3\cdot2^2+3\cdot2+1=3^3-2^3,$$

$$3\cdot3^2+3\cdot3+1=4^3-3^3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3\cdot n^2+3\cdot n+1=(n+1)^3-n^3.$$

諸式邊邊相加,則

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$+(1+1+1+\cdots\cdots+1)=(n+1)^3-1$$

但　$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),\ 1+1+1+\cdots+1=n,$

故　$3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n=(n+1)^3-1,$

故　$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(XV)的證明:　因 $n(n+1)=n^2+n$, 故若以 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等數代 n, 則

$$1\cdot2=1^2+1,$$

$$2\cdot3=2^2+2,$$

$$3\cdot4=3^2+3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n(n+1)=n^2+n.$$

諸式邊邊相加,則

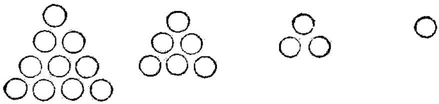
$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

依據上列三種級數的和,可以計算彈丸的總數.

第一.底層爲正三角形的堆垜 設底層每邊的丸數爲 n, 則各層每邊遞減一丸如(3)圖,其每一層的丸數



(3)

L_m 適爲該層每邊所有個數的自然數的和,卽

$$L_m=\frac{1}{2}m(m+1). \qquad \text{(XVI)}$$

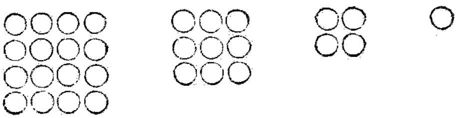
設於(XVI)中逐次令 m 爲 $1, 2, 3\cdots\cdots n$, 則得各層的丸數;而總數 S_n 卽由此諸層相加而得.故由(XV)知

$$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2). \qquad \text{(XVII)}$$

例如於正三角形底層每邊排列5丸,則

$$S_n=\frac{1}{6}\times 5(5+1)(5+2)=35.$$

第二,底層爲正方形的堆垜 設底層每邊的丸數爲



(4)

n,則各層每邊遞減一丸如(4)圖,其每一層的丸數 L_m 適爲該層每邊所有個數的平方,即

$$L_m = m^2. \tag{XVIII}$$

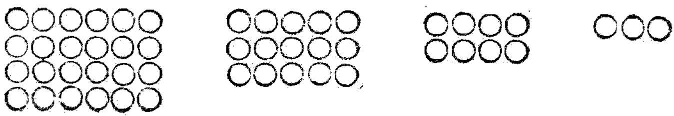
設於(XVIII)中逐次令 m 爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots n$,則得各層的丸數,而總數 S_n 即由此諸層相加而得.故由(XIV)知

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1). \tag{XIX}$$

例如於正方形底層每邊排列5丸,則

$$S_n = \frac{1}{6} \times 5(5+1)(2\times 5+1) = 55.$$

第三,底層爲矩形的堆垛　設矩形的長爲 m,其闊爲 n,如(5)圖,則各層的丸數成次列的級數



(5)

$$m\cdot n, (m-1)(n-1), \cdots\cdots, (m-n+2)\cdot 2, (m-n+1)\cdot 1.$$

故設以 S_{mn} 表彈丸的總數,則

$$S_{mn} = m\cdot n + (m-1)(n-1) + \cdots + (m-n+2)\cdot 2 + (m-n+1)\cdot 1$$
$$= (\overline{m-n}+n)\cdot n + (\overline{m-n}+n-1)(n-1) + \cdots\cdots$$
$$+ (\overline{m-n}+2)\cdot 2 + (\overline{m-n}+1)\cdot 1$$

$$=(m-n)n+n^2+(m-n)(n-1)+(n-1)^2+\cdots\cdots$$
$$+(m-n)\cdot 2+2^2+(m-n)\cdot 1+1^2$$
$$=(m-n)[n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1]+[n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots$$
$$+2^2+1^2]$$
$$=(m-n)\times\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1). \qquad \text{(XX)}$$

例如於矩形一邊排列6丸,而於他邊排列4丸,則

$$S_{mn}=\frac{1}{6}\times 4(4+1)(3\times 6-4+1)=50.$$

習 題 四

(1) 以米若干袋疊成堆垛,若上排5袋,下排25袋,則其總袋數爲何?

(2) 排列自來水筆136枝使成堆垛,若最上排祇有一枝,問下排須排列幾枝?

(3) 以炭150簍疊成堆垛,若上排祇置一簍而所餘又爲最少,則最下一排須排列若干?

(4) 以圓柱形的罐108個排成堆垛,若使其高爲最高,則上下排須各排若干個?

(5) 求次列各級數n項的和.

(一) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots$　(二) $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots\cdots$

(三) $2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+\cdots\cdots$　(四) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots$

(6) 依據恆等式$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$證明

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2.$$

(7) 有底層為正三角形的彈丸堆垛,其底層每邊排列10丸,而頂上祇有1丸,求彈丸的總數.

(8) 有球若干個,堆成正四角錐,其最下層每邊置球100,而最上層則僅置1球,求球的總數.

(9) 有矩形底的堆垛,其底層一邊的彈丸數為50,他邊為28,求彈丸的總數.

(10) 一矩形底的堆垛共有彈丸24395個,若底層一邊列34丸,則他邊彈丸數為何?

(11) 設正三角錐的堆垛中所有彈丸數比正四角錐的堆垛中所有彈丸數的一半還少150個,求正三角錐最下層的彈丸數.但兩堆垛的層數相同.

(12) 求證正四角錐的堆垛中所有彈丸數等於正三角錐的堆垛中所有彈丸數的四分之一.但後者的層數2倍於前者.

第二章

選擇及機會

本章所述題材,在初中程度的算學教本中雖不常見,但師範生則須有此種知識.如欲解決次列問題"由1至20的自然數中,任取兩個不同的數相加,使其和不大於20,則所取的數當有幾種?若所取的數可以相同又如何?若以此製成算牌,供兒童練習加法;而異其排列的次序,如3+5及5+3均備,則應製算牌若干張?"須應用順列及組合的算法,而關於機會的研究,則尤爲日常生活所必需.

第一節　順列

8. 選擇計算的原則　譬如登山,有A, B, C三路,任由一路均可到達山巔,則上山有三種不同的走法,而下山可走的路亦祇有此三途.今若有人既上且下,則其所經的途徑,可有幾種選擇呢?

設此人取A路上山,其下山時由A或由B或由C均可,則上下的走法共有三種.若上山由B或由C,而下山由A或由B或由C,亦各有三種不同的走法.故此人於一上一下時,其所走的路,共有3×3種的選擇.即

(1) $A_{上}A_{下}$. (2) $A_{上}B_{下}$. (3) $A_{上}C_{下}$.

(4) $B_{上}A_{下}$. (5) $B_{上}B_{下}$. (6) $B_{上}C_{下}$.

(7) $C_{上}A_{下}$. (8) $C_{上}B_{下}$. (9) $C_{上}C_{下}$.

若下山時不走上山的路,則其選擇當有3×2種,卽

(1) $A_{上}B_{下}$. (2) $A_{上}C_{下}$. (3) $B_{上}A_{下}$.

(4) $B_{上}C_{下}$, (5) $C_{上}A_{下}$. (6) $C_{上}B_{下}$.

由此例可知關於選擇計算的原則有二:

(一) 設某事有m種不同的作法,當其中一種已經實施時,而他事若有n種不同的作法,則兩方所有不同的作法共有$m\times n$種.

(二) 設第一事不同的作法有m種,第二事有n種,第三事有p種,以此類推,則諸事所有不同的作法共有$m\times n\times p\times\cdots\cdots$種.

茲再舉一例: 有一,二,三等獎品三件,以每件每給三人中任一人,則其分法有幾種?

因一等獎可分給三人中任一人,故其分法有三,但一等獎既經分定,則二等獎祇可分給其他二人中任何一人,故其分法有二.而三等獎則祇有分給最後一人的一法故總計其不同的分法,共有$3\times2\times1$,卽6種.

習題五

(1) 架中有英文書 3 册,德文書 5 册.今欲於英德文書中各取出一册,其取法有幾?

(2) 往來於甲乙兩港間的汽船共 9 隻,若有人往來兩港不同乘一船,則其選擇有幾?

(3) 有手套 8 對,若以不成對的左右兩手套相配,可得幾組?

(4) 由 2, 3, 5 三數字中取兩個不同的數字組成二位數,可得幾種?若數字可同則如何?

(5) 由三數 a, b, c 中任取二數爲分數的兩項,可得不同的分數幾種?

9. 相異事物的順列 以若干事物排成種種不同的次序,叫順列.而由 n 個相異的事物中,每次取 r 個相異的事物所排成順列的總數,用 $_nP_r$ 表之.例如由 a, b, c, d, e 五文字中任選一文字,則可作的順列,祇有 a, b, c, d, e 五種,故

$$_5P_1=5.$$

推廣地說,則有

$$_nP_1=n.$$

又如由 a, b, c, d, e 五文字中任取兩個不同的文字作順列,則於 a 的右側附以其他四文字中的任一文字,可得以 a 爲首的順列 4 種,即 ab, ac, ad, ae, 同理可得以 b, c, d, e 爲首的順列各四種.故

$${}_5P_2 = 4 \times 5.$$

推廣地說,則有

$${}_nP_2 = (n-1)n.$$

又如由 a, b, c, d, e 五文字中任取三個不同的文字作順列,則於已作成的 ${}_5P_2$ 即 20 個順列的末尾,各附以該順列中已有兩文字以外的任一文字,又可各得三個不同的順列,如 $abc, abd, abe, \cdots\cdots$, 故

$${}_5P_3 = 3 \times {}_5P_2 = 60.$$

推廣地說,則有

$${}_nP_3 = (n-2) \cdot {}_nP_2 = (n-2)(n-1)n.$$

同理知　$${}_nP_4 = (n-3)(n-2)(n-1)n.$$

故　$${}_nP_r = (n-\overline{r-1})(n-\overline{r-2})\cdots(n-2)(n-1)n.$$

即　$${}_nP_r = (n-r+1)(n-r+2)\cdots(n-2)(n-1)n.$$

即　$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1). \qquad \text{(I)}$$

此時 r 恆小於 n. 若 $r=n$ 即以 n 個事物悉數取作種種不同的順列時,則

$$ {}_nP_n=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-2)(n-1)n. \qquad \text{(II)}$$

(II)式右邊由1至n各自然數連續相乘的結果叫n的階乘,常以$n!$或$\underline{n|}$表之,即

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-2)(n-1)n.$$

例. 由0,1,2,……9十個數字中,任取兩個相異的數字作成二位數,共有幾種?

解. 因0不可列於二位數的左端,故先以1,2,……9九個數字作順列,得${}_9P_2$即72種.再以0列於個位如10,20,……90,其數爲${}_9P_1$即9種.故所求二位數共有72+9,即81種.

別解. 因以0列於左端的數共有01,02……09九種,故所求二位數共有${}_{10}P_2-9$即$90-9$即81種.

(I)式的${}_nP_r$又可依次列方法以求出:即假設有r個空間而以n個實物填入時,先由n個實物中任取一物填入第一空間,則其填法有n種,即${}_nP_1=n$.次於已填入的一個實物外,由其餘的$n-1$個中任取一個填入第二空間,則其填法有$n-1$種,故依前款所提原則(一)知${}_nP_2=n(n-1)$.復次於已填入的兩個實物外,由其餘的$n-2$個實物中,任取一個填入第三空間,則其填法有$n-2$種,故知${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$.依此類推至第r空間,

則於已經填入的$r-1$個實物外,由其餘的$n-(r-1)$個即 $n-r+1$ 個的實物中,任取一個以填入,其填法有$n-r+1$種.故

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

10*. 各種順列 順列的計算於$_nP_r$外,猶有次列種種:

(1) 重複順列 由n個相異事物中,任取r個作順列,若准許重複,則其順列的總數爲n^r(此時r可以大於n),因若由a, b, c三文字中,任取二文字作順列而准許重複,則得

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc$$

其數爲3^2即9.若於上列諸順列末尾,各附以a,或b或c.則由每一順列又可各得三順列,如由aa可得aaa, aab, aac.故由三取三所作重複順列的總數爲3^3即27.依此類推,可知由n個相異事物中任取r個所作重複順列的總數x爲

$$x=n^r \tag{III}$$

例一. 以9個有效數字所作三位整數有幾?

答. 729.

例二. 以信5函投入3郵筒,其不同的投法有幾?

解　因每一郵筒可以投入一函,兩函乃至五函,而各信可投的郵筒有3,其投法自各有3種,故第一第二兩函投入的方法共有 3×3 即 9 種.以此與第三函結合,則共有 9×3 即 27 種.同理知所投若有 4 函,則投入的方法共有 27×3 即 81 種.故以信 5 函投入 3 郵筒,其不同的方法共有 81×3 即 243 種.　　　　答. 243 種.

(2)　不盡相異事物的順列　例如以 $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$ 十文字悉數取作順列,而欲知順列的總數 x 爲何?先假設此 x 順列業經排成,任取其中一順列,以所有四個 a 字換作 A, B, C, D, 幷一一變更其次序,則由此一順列可得 $4!$ 個不同的順列.故由 x 順列可得 $4!\times x$ 個不同的順列.次以各順列中所有三個 b 換作 E, F, G, 則順列的總數更可增至 $3!\times4!\times x$. 復次以其中所有兩個 C 換作 H, K, 則順列的總數又可增至 $2!\times3!\times4!\times x$. 而此時所得各順列中所有十文字皆相異,其總數爲 ${}_{10}P_{10}$ 即 $10!$ 故

$$x\times4!\times3!\times2!=10!$$

$$\therefore\quad x=\frac{10!}{4!3!2!}.$$

推廣地說,在 n 個事物中設有 p 個相同的一種, q 個相同的又一種, r 個相同的又一種,……而悉數取此 n 個

作順列時,則其順列的總數 x 爲

$$x=\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \tag{IV}$$

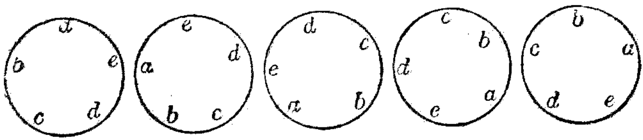
例三. 以 *MISSISSIPPI* 一語中所有各文字悉數取作順列,其數爲何?

解. 設其數爲 x, 則 $x=\dfrac{11!}{4!4!2!1!}=34650.$

(3) 環狀順列　以上所述各順列,皆由左而右,或由上而下,依次排成,叫線狀順列.玆更述環狀順列.

例四. 設有兒童 5 人,使其牽手爲環作遊戲,則順列的總數爲何?

解. 五兒的位置若爲一定,則排列方法與線狀無異.其數爲 ${}_5P_5$. 若任意變更一兒的位置而與他兒相互的關係無所變更時,則由每一順列可得 5 個相同的順列如 (6) 圖.故所求順列的總數爲 $5!\div5$ 或 $(5-1)!$



(6)

例五. 設由 6 人中選出 5 人作環狀順列,則選法有幾?

解. 與例四同理,知所求的數為$\frac{{}_6P_5}{5}$即144.

由此可知由n個相異事物中任取r個相異事物所作環狀順列的總數x為

$$x=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r}. \qquad \text{(V)}$$

習題六

(1) 某級有學生10人,其席次的排列共有幾種?

(2) 由議員8人中選出議長副議長各一人.問選舉的方法有幾?

(3) 求n. (一) 設${}_nP_4={}_{n+1}P_3$ (二) 設${}_nP_4={}_nP_2\times 12$.

(4) 由0, 1, 2, ……9十個數字中任選兩個構成二位數,問共有若干?但同一數字許其並列.

(5) 以5種贈品分給兒童5人,人各一種,問共有幾種分法.

(6) 以3, 5, 8三個數字構成五位數,若數字許其重複,則五位數的個數為何?

(7) 悉取英語beriberi中文字作順列,其數為何?

(8) 以線穿七色的珠7粒成念珠一串,問穿法有幾?

(9) 以 A, B, C, D, E 五文字排成一列，若 A 與 B 必須相鄰，則可得若干列數？

(10) 由母音 a, e, i, o, u 及子音 b, d, f, g, h, k 中各取二字排成英語，而使母音的位置爲偶數，子音爲奇數，如 $(bade)$．問可得單語若干個？若許用同文字則如何？

(11) 悉取 3, 4, 5, 6, 7 五數字作成五位數，問可得幾種？

(12) 取 120135 中所有數字作種種順列，而大於 200000，問可得幾種？

(13) 成人 5 人及兒童 5 人圍坐一圓桌，其坐法有幾？但任何兒童不得並列．

(14) 以 6 人排成二列，可得幾種不同的排法？

(15) 以五色的旗 1 面乃至 5 面排成信號，其數爲何？

第二節　組合

11. 相異事物的組合　由若干事物中選出若干組成一羣，叫組合，組合與選出的順序無關，如 AB 及 BA 雖爲兩種不同的順列，若以此看做組合，則同爲一種，而由 n 個相異事物中選出 r 個相異事物所組成的羣

數，用 ${}_nC_r$ 表之.例如由 a, b, c 中任取二文字作組合，則可得 ab, ac, bc 三種，故 ${}_3C_2=3$. 若以 a, b, c 悉數取作組合時，則祇有一種，故 ${}_3C_3=1$.

今欲知 ${}_nC_r$ 爲何，當先假定此 ${}_nC_r$ 個組合業經作成而任於其中取出一個組合，用種種方法變更其排列的次序.因每一組合中共有 r 個事物，則每一組合因變更排序所得順列的總數爲 $r!\times{}_nC_r$. 此數實等於 ${}_nP_r$ 故

$$r!\times{}_nC_r={}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

故
$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}. \tag{VI}$$

例一. ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{1\cdot2\cdot3}=120.$

此式的分子分母設以 $7!$ 乘之，則得 ${}_{10}C_3=\dfrac{10!}{3!7!}$.

故知
$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{VII}$$

由 (VI) 知 $r=n$ 時 ${}_nC_n=1.$

而由 (VII) 則 ${}_nC_n=\dfrac{n!}{n!0!}.$

故若以 $0!$ 看做 1，則計算 ${}_nC_r$ 的公式對於 r 的任何值均可適合.

例二. 通過 n 點的直線數至多爲 $\frac{1}{2}n(n-1)$，試證明之.

證. 若於所設 n 點中任取三點均不在一直線上,則因過兩點可成一直線,故過 n 點的直線數至多爲 ${}_nC_2$, 即 $\frac{1}{2}n(n-1)$. 若 n 點中有 r 點在一直線上,則凡過此 r 點的諸直線,無不合而爲一,故此時所有直線數爲

$$\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}r(r-1)+1.$$

由 (VI) 及 (VII) 又可知次列三事:

(1) r 個連續自然數的乘積,可爲 $r!$ 所除盡.

(2) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

(3) ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$.

(1), (2), 可不待證而自明. (3) 則假設 ${}_nC_r$ 個的組合中,有不含某種特殊事物 (A) 的組合,其數爲 ${}_{n-1}C_r$ 固甚明顯,而含有該種特殊事物 (A) 的組合數則爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$ [因若於 n 個事物中先除去 A, 而由其所餘的 $n-1$ 個中,任取 $r-1$ 個作成 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個的組合,再於此已成的各組合內加入 A, 則所得爲含有 A 的組合,其數等於 ${}_{n-1}C_{r-1}$].

12*. 重複組合　由 n 個相異事物中,任取 r 個作組合,若准許重複,則組合的總數另有公式以計算之. 如由 a, b, c 三文字中任取二文字作重複的組合,則可得 aa, ab, ac, bb, bc, cc 六種,與 ${}_3C_2$ 不同.

設 ${}_nH_r$ 爲由 n 個文字 $a, b, c, \cdots\cdots$ 中任取 r 個所作成重複組合的總數,則此等組合中共有 ${}_nH_r\times r$ 個文字,而每一文字在其中必各有同數的存在,故某文字,如 a,在此等組合中共有 ${}_nH_r\times r\div n$ 個(如上舉六種組合中 a, b, c 各有四個).

今以由 n 個文字 $a, b, c\cdots\cdots$ 中任取 r 個所作成 ${}_nH_r$ 個重複組合分爲至少含有一個 a 或不含有 a 的兩大類,則屬於前類(至少含有一個 a)的諸組合,可看做由 $a, b, c\cdots\cdots, n$ 個文字中任取 $r-1$ 個所作成 ${}_nH_{r-1}$ 個組合的每一組合內加入一個 a 的結果,而此等 ${}_nH_{r-1}$ 個組合中共有 ${}_nH_{r-1}\times(r-1)\div n$ 個 a. 再於其每一組合內加入一個 a 當需要 ${}_nH_{r-1}$ 個 a, 故此等 ${}_nH_r$ (${}_nH_{r-1}$ 個組合內每加一 a 卽成 ${}_nH_r$) 個組合中所有 a 的總數爲

$${}_nH_{r-1}+\frac{r-1}{n}\cdot {}_nH_{r-1} \text{ 卽 } \frac{n+r-1}{n}{}_nH_{r-1}.$$

如此由 n 個文字 $a, b, c\cdots\cdots$ 中任取 r 個所作成 ${}_nH_r$ 個組合中所有某一文字 a 的總數,從兩方面分別算出,其數值必相等,故

$$\frac{r}{n}{}_nH_r=\frac{n+r-1}{n}{}_nH_{r-1}.$$

卽
$${}_nH_r=\frac{n-1}{r}{}_nH_{r-1}. \qquad \text{(VIII)}$$

於(VIII)式中設逐次以$r-1, r-2, \cdots\cdots 3, 2$代$r$,則得

$${}_nH_{r-1}=\frac{n+r-2}{r-1}\cdot {}_nH_{r-2}.$$

$${}_nH_{r-2}=\frac{n+r-3}{r-2}\,{}_nH_{r-3}.$$

$${}_nH_3=\frac{n+2}{3}\,{}_nH_2.$$

$${}_nH_2=\frac{n+1}{2}\,{}_nH_1.$$

邊邊相乘則得

$${}_nH_r=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r-3)(n+r-2)(n+r-1)}{2\cdot 3\cdots\cdots(r-2)(r-1)r}\cdot {}_nH_1.$$

而 $${}_nH_1=n.$$

故 $${}_nH_r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}. \qquad \text{(IX)}$$

例. 有骰二枚,可擲出不同的配法幾種?

解 因每骰有六面,而擲出時祇有二面向上,其種種配法,適爲由6取2的重複組合,故其種數爲

$${}_6H_2=\frac{6\times(6+2-1)}{2!}=21.$$

習題七

(1) 由A, B, C, D, E五文字中任取二文字的組合

有幾?若任取三文字則如何?

(2) 計算 ${}_{8}C_{3}$ 及 ${}_{25}C_{23}$.

(3) 由學生50人中選出3人爲值日生,其選法有幾?

(4) 由兵士20人中選出5人爲守衞,若其中有一人必須選出,則其選法有幾?

(5) 設 ${}_{20}C_{r}={}_{20}C_{r-19}$ 求 r.

(6) 設 ${}_{n}C_{3}\times 5={}_{n-1}C_{4}\times 8$, 求 n.

(7) 聯結4點中每2點的直線數爲何?若點數有5又爲何?但任何3點不在一直線上.

(8) 設10點中有4點在一直線上,則由此10點所決定的直線數爲何?

(9) 求證 n 邊凸多角形對角線的數爲 $\frac{1}{2}n(n-3)$.

(10) 設同一平面上有 n 直線,其交點有幾?但此等直線皆不平行,且無通過一點的三直線.

(11) 設同一平面上有4點,以此爲頂點的三角形有幾?

(12) 由相異的子音21字與母音5字中任選子音2母音3組成單語,可得幾何?但各語許用重字.

(13) 由5個相異事物中,但取3個作成重複順列及

組合,其數各爲何?

(14)　以 m 個實物任意設置於 $n+1$ 個場所中,其方法有幾?

第三節　二項定理

13. 二項式乘冪的展開　設有若干個二項式如 $x+a,\ x+b\cdots\cdots$ 相乘,則

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+bcd+cda$$
$$+dab)x+abcd,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由以上結果可知

(1)　乘積的項數比二項因式的個數多1.

(2)　乘積第一項的指數等於二項因式的個數,以下則逐次減1.

(3)　乘積第一項 x 乘冪的係數是1;第二項的係數是各二項因式的第二項的和;第三項的係數是由各二項因式的第二項中,每取兩個相乘積的和;第四

項的係數是由各二項因式的第二項中,每取三個相乘積的和;以下類推,而最後一項的係數,則爲各二項因式的第二項的連乘積.

故得 n 個二項式的乘積爲

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots(x+h)(x+k)=x^n$$
$$+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+c_3x^{n-3}+\cdots+c_n.$$

其中 $c_1=a+b+c+\cdots+k,\ c_2=ab+ac+bc+\cdots+hk,$

$$c_3=abc+abd+\cdots+ghk,\ \cdots\cdots,\ c_n=abc\cdots hk.$$

若上式中 $a, b, c, \cdots k$ 皆等於 a,則

$$c_1=a+a+a+\cdots+a=na,$$

$$c_2=a^2+a^2+a^2+\cdots+a^2={}_nC_2\times a^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2,$$

$$c_3=a^3+a^3+a^3+\cdots+a^3={}_nC_3\times a^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$c_n=a\cdot a\ a\cdots a=a^n.$$

故 $$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}+\cdots+a^n. \qquad \text{(X)}$$

若於 (X) 中設 a 爲 1,則

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+x^n. \qquad \text{(XI)}$$

(X), (XI) 所示爲二項定理,其右邊爲左邊二項式的乘冪的展開式.

例. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}a^3b^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}a^2b^3$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ab^4+b^5$$

$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\text{*}.$$

14* 通項及任意指數 於$(1+x)^n$的展開式中,自左端數至第$r+1$項,則該項爲

$$_nC_rx^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}x^r. \qquad (XII)$$

此式所示爲$(1+x)^n$展開式的通項.同理知$(x+a)^n$展開式的通項爲:

$$_nC_ra^rx^{n-r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}a^rx^{n-r}. \qquad (XIII)$$

由(XII),(XIII)可求展開式的任意一項.

例一. 求$\left(a-\frac{1}{a}\right)^{16}$的展開式的第十二項.

解. 於(XIII)中設$n=16$, $r=11$,而以a, $-\frac{1}{a}$代其中的x, a則

第12項爲: $\quad {}_{16}C_{11}a^5\left(-\frac{1}{a}\right)^{11}={}_{16}C_5\,a^5\left(-\frac{1}{a^{11}}\right)$

---

*觀此可知在$(1+x)^n$的展開式中,與初項及末項等距離的兩項係數相等,因此兩項的係數一爲$_nC_r$,一爲$_nC_{n-r}$的緣故[本章11款例二下所述三事中的(2)].

$$=-\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\times\frac{1}{a^6}=-\frac{4368}{a^6}.$$

二項式指數的乘冪 n, 不限於正整數,分數或負數均可,惟指數若爲分數或負數,則其展開式成無限項級數.茲舉例以示其用法.其證明姑從略.

例二. 展開分式 $\frac{a}{x-d}$.

解. $\frac{a}{x-d}=a(x-d)^{-1}$

$$=a\left\{x^{-1}-x^{-2}(-d)+\frac{(-1)(-1-1)}{1\cdot2}x^{-3}d^2+\cdots\right\}$$

$$=a\{x^{-1}+x^{-2}d+x^{-3}d^2+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{a}{x}+\frac{ad}{x^2}+\frac{ad^2}{x^3}+\cdots\cdots.^*$$

習題八

(1) 展開次列各乘冪.

(一) $(a-b)^5$. (二) $(5m-3n)^4$.

(三) $(1+x+x^2)^3$. (四) $(2x^2-1)^6$.

---

* 第一篇第三章第三節第33款的簡便除法卽由此節推得的,因若以 a 代該款的被除數, x 代10的冪, d 代補數,則該款所得的商,自可與此級數的開始數項相等.

（五）$(x+y)^7$.　　　　（六）$(a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})^4$.

（七）$\left(a^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.　　　　（八）$(a^{-1}-b^{-1})^{-4}$.

(2) 求次列各特別項.

（一）$(a^2x+b^2y)^5$ 的第12項.　（二）$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^{10}$ 的中項

（三）$\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)^7$ 的兩中項.

(3) 求 $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^{25}$ 的展開式中含有 x^{15} 的一項的係數.

(4) 證明 n 爲正整數時, $(1+x)^n$ 的展開式中各係數的和爲 2^n.

(5) 依二項定理求次列各數的值(第四數以下須準確至小數五位).

$$11^4,\ 99^5,\ 9997^3,\ \frac{1}{19},\ \sqrt[3]{62},\ \sqrt[5]{30},\ 1.05^{10}.$$

第四節　機　會

15. 一事的成敗及其計算　吾人生平所期待,所計畫或正在進行的事項,有時成功,有時失敗.而日常所遭遇的有時以爲當然,有時又以爲偶然.所謂機會無常,不免令人迷惑,實則其機會如何,或究竟成敗與

否,未嘗不可於事前依法以計算之.

假設某一事項可以發生或成立的次數爲a,其不發生或不成立的次數爲b,而每次的發生,成立與否各有均等或同樣的可能,則該事項於a次中有一次發生或成立的機會爲

$$\frac{a}{a+b}. \tag{XIV}$$

而於b次中無一次發生或成立的機會爲

$$\frac{b}{a+b}. \tag{XV}$$

例如從一盛有3黑球4白球的囊中任取1球,而欲知所取爲黑球的機會如何?則因囊中共有7球,而吾人伸手入囊時,對於任何一球,概無選擇,故囊中所有各球,可有7種的出現,於此7種中有3種當爲黑球故黑球可以取出的機會爲$\frac{3}{3+4}$卽$\frac{3}{7}$.同理可知白球可以取出的機會爲$\frac{4}{3+4}$卽$\frac{4}{7}$.

如(XIV)(XV)所表某某事項發生或不發生的機會計算又叫或然率,一名適遇法.由(XIV)(XV)可知凡事的成功及失敗的機會,其總和恆爲1.而某事項有幾分成功的可能,卽成功方面所佔的優勢,以成功與失

敗總次數的比卽 $\frac{a}{b}$ 表之.否則失敗方面所佔的成分當爲 $\frac{b}{a}$. 實際解決此類問題時,須先依據順列及組合的方法,以盡量求得其可能的次數爲 a 爲 b 或爲 $a+b$,然後計算其比值.

例一. 投擲二骰,一次卽得一個6的機會爲何?

解. 因每骰有六面,兩骰各面點數的配合共有 6^2 [10 款 III] 卽36種,故 $a+b$ 爲 36. 又因兩骰不可同時爲6,若一骰爲6,則他骰的點數可有1,2,3,4,5各種不同的表現而他骰爲6亦然,故兩骰有一爲6時,其點數的配合共有10種,此數卽相當於 a, 由此可知所求的機會爲

$$\frac{a}{a+b}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}.$$

例二. n 人圍坐一圓桌,中有甲乙二人可以聯坐的機會如何?

解. n 人圍坐圓桌時,其席次的變動共有 ${}_{n-1}P_{n-1}$ 卽 $(n-1)!$ 種 [款 10]. 但其中有甲乙兩人若相鄰,則此兩人可作1人計.故 $n-1$ 人的席次的變動有 ${}_{n-2}P_{n-2}$ 卽 $(n-2)!$ 種.而甲在乙左與甲在乙右均可適合相鄰的條件,故 $n-1$ 人的席次的變動有 $2(n-2)!$ 種.故所求甲乙二人可以聯坐的機會爲

$$\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}.$$

例三. 從盛有紅球3綠球2的囊中任取2球,不均為紅色的機會如何?無一紅色的機會又如何?

解. 囊內共有5球,每次任取2球,無所選擇,故有${}_5c_2$即10種的出現,而其中有紅球3,故於任取2球時紅色的出現有${}_3c_2$即3. 故任取2球不均為紅色的機會為$1-\frac{3}{10}$即$\frac{7}{10}$.而任取2球無一紅色的機會即均為綠色的機會為$\frac{{}_2c_2}{{}_5c_2}$即$\frac{1}{10}$.

例四. 設某事項可以發生的機會為$\frac{1}{8}$,則其所佔成功的優勢如何?

解. 由(XIV)得 $$\frac{a}{a+b}=\frac{1}{8}.$$

故 $$8a=a+b,\ 7a=b,$$

故所求為 $$\frac{a}{b}=\frac{1}{7}.$$

16*. 複合事項的機會 前款所述為單純事項.若事實不如是簡單,則計算自較繁複.茲就下列三種情形略述其大概.

(1) 相斥的事項 設某某若干相異事項不能同時發生或同時不發生,如擲一骰得1點,則他點2, 3, 4, 5, 6

均不能出現(若擲二骰,則同時可得兩個1點,不屬此類)叫相斥的事項.此等事項中某一事項或他一事項發生的機會,等於各該事項發生機會的總和.如從前款例三的囊中任取一球為紅的機會是 ${}_3c_1/{}_5c_1$ 即 $\frac{3}{5}$;任取1球為綠的機會是 ${}_2c_1/{}_5c_1$ 即 $\frac{2}{5}$;但無論如何,總可取出一球,其色不為紅則為綠,故任取1球為紅或為綠的機會可等於1(因絕不至於失敗),而此數實為 $\frac{3}{5}$ 與 $\frac{2}{5}$ 的和.

故若設各事項發生的機會為 $\frac{a_1}{P_1},\frac{a_2}{P_2}$……則於相斥的事項中,某一事項或他一事項發生的機會為

$$\frac{a_1}{P_1}+\frac{a_2}{P_2}+\cdots\cdots \qquad \text{(XVI)}$$

(2)　獨立的事項　在複合事項中有不相斥而各自獨立的.如連續兩次探囊取球,若於第一次取出後,以所取還諸囊中再取第二次,或從兩囊分別取球,則其情形均屬於獨立事項的一類,此等獨立事項共同發生的機會,等於各該事項發生機會的相乘積.因若設一事項發生的機會為 $\frac{a_1}{P_1}$ 又一事項發生的機會為 $\frac{a_2}{P_2}$

兩事項各自獨立,則 P_1 中任一情形均有與 P_2 中任一情形相配合的可能.故兩事項共同發生及不發生的一切情形爲 P_1P_2.同理可知兩事項共同發生的情形爲 a_1a_2 故兩事項共同發生的機會爲 $\frac{a_1a_2}{P_1P_2}$ 即 $\frac{a_1}{P_1}\times\frac{a_2}{P_2}$,故所有獨立事項共同發生的機會爲

$$\frac{a_1}{P_1}\times\frac{a_2}{P_2}\cdots\cdots \tag{XVII}$$

如連擲一骰至兩次,均爲一點的機會是 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ 即 $\frac{1}{36}$;又如從盛有 3 黑球 4 白球的囊中取出一球,連取兩次(第一次取出後即以還之囊中)均爲白色的機會是 $\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$ 即 $\frac{16}{49}$.又如從盛有 5 球(其中 2 球爲紅色)的一囊及盛有 4 球(其中 3 球爲紅色)的又一囊中同時各取出一紅球的機會是 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ 即 $\frac{3}{10}$.

(3) 相關的事項　如(2)所述各事項既獨立,則一事項的發生與否,與又一事項不生關係.今若不然,一事項的發生或不發生一一影響於又一事項,則該事項等既非相斥又非獨立而爲相關.相關事項共同發生的機會,亦等於各該事項發生機會的相乘積,其理由與(2)同.如從盛有 3 黑球 4 白球的囊中取出一球連取

兩次(第一次取出後不再入囊)均爲白色的機會是$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$即$\frac{2}{7}$;又若問同時擲下銅幣4枚,至少有一枚出現印國旗的一面,其機會如何?則因銅幣4枚各有兩面,國旗全不出現的機會爲$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$即$\frac{1}{2^4}$.故至少有一枚出現國旗的機會爲$1-\frac{1}{2^4}$即$\frac{15}{16}$.

習題九

(1) 擲一骰得奇數點的機會如何?

(2) 以兩骰擲一次得7點的機會如何?

(3) 以三骰擲一次得三個5的機會如何?

(4) 從盛有5紅球7白球的囊中任取2球均爲白色的機會如何?

(5) 從盛有2黑球2白球2紅球的囊中任取3球而各色俱備的機會如何?

(6) 從盛有7白球6黑球3紅球的囊中任取4球,而兩球爲白兩球不爲白的機會如何?若任取10球,而5球爲白3球爲黑2球爲紅的機會又如何?

(7) 8人圍坐一圓桌,其中有2人聯坐的機會如何?

(8) 12人排列一行,中有2人並列的機會如何?

(9) 同時投擲鎳幣3枚,而有一枚出現印中山像的一面,其機會如何?

(10) 從52張牌中任取2張而皆爲2的機會如何?但全牌中有4個2.

(11) 以一骰連擲六次,其6點的一面至少有一度出現的機會如何?

(12) 一袋裝5紅球7白球,他袋裝3紅球12白球.若任從一袋中取出一紅球,其機會如何?

(13) A袋裝5球,其一爲白,B袋裝6球,無一爲白,若從A任取3球納入B,再自B任取3球納入A,則A中有白球存在的機會如何?

(14) 一問題,A生可解的機會爲$\frac{3}{4}$,B生可解的機會爲$\frac{2}{3}$.若A,B各自努力以求解,則該題可解的機會如何?

(15) 從書明1至11的11張卡片中任取3片,其和爲12的機會如何?其和爲奇數的機會又如何?

(16) 4人比賽雙打網球,各擲其球拍分組,約定同得一面的爲一邊,則第一擲可分定的機會如何?第一擲若不能分定則其不定的趨勢又如何?

第三章

函數圖解及統計大意

第一節　函數及其圖解法

17. 變數,常數及函數　凡一問題的構成總有2個或2個以上的數(或由該數所表的量)依某種關係相生相變以實現一種結果.如是在一問題中,變動不息的數叫變數,而在該問題中,恆保持一定不變的數叫常數.吾人在以前各篇各章內所研究的問題,無不有變數及常數的關係,如假設某人以一定速度向前進行,則其經過的時間及所行的距離均爲變數,而其速度則爲常數.又如某種物品以一定的單價買進若干,則買進的件數及其總值均爲變數,而其單價則爲常數.又如某氣體的體積在一定溫度下與所受壓力成反比,則表示體積及壓力的數均爲變數,而溫度則爲常數.

有互相關係的二數,若一數變,他數亦隨之而變時,

則吾人可自由使一數任取種種的變值,以求得他數相因而生的結果.如是可以自動發生變化的數叫自變數,因自變數的變而變的數叫因變數.因變數的種種數值,悉由自變數所產生.故因變數又稱自變數的函數.如運動經過的時間,物品買進的件數,及氣體所受的壓力,若均認為自變數,則運動距離為時間的函數.物品總值為件數的函數,氣體的體積為所受壓力的函數.

通常以x表自變數,以y表因變數,若y為x的函數,則表以

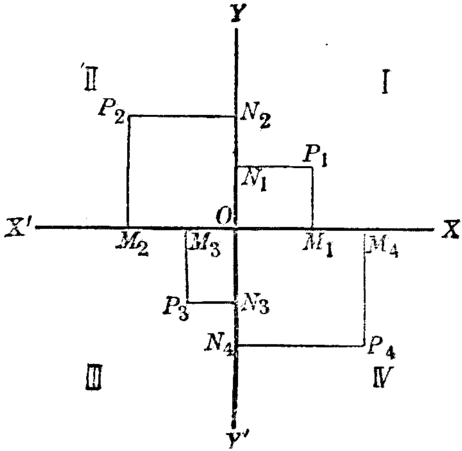
$$y=f(x)$$

此f係用以表明函數的形狀,即y與x的關係.如$y=2x+3$可寫作$y=f(x)=2x+3$用示y為x的函數,其關係所在,即y的數值相當於x的2倍加3,f即表明此種關係的符號.

一函數中自變數可多至二個或二個以上,如三角形的面積等於其底及高相乘積的一半,則三角形面積為其底及高的函數,底及高均為自變數.又如直立方體的體積為其三稜的函數,則其三稜均為自變數.

18. 點的坐標及定點法 欲明函數與其自變數

的關係,除列式外,可以圖表之.今於一平面中任取一點O,過O作互相垂直的二直線XX', YY'分該平面為I, II, III, IV四部分.O叫原點,XX', YY'叫橫縱二軸,所分四部分叫四象限,其順序如(7)圖.自兩軸上任意



(7)

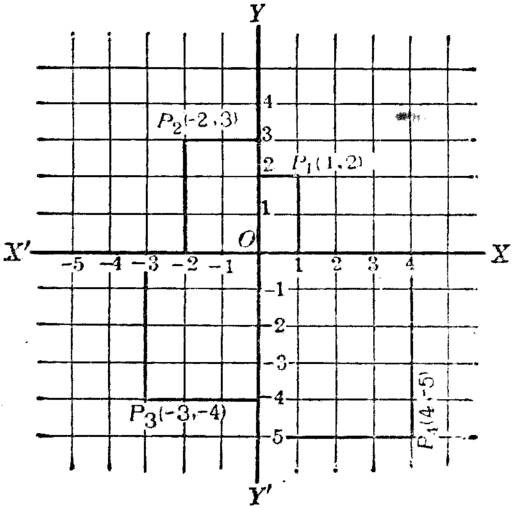
取二點M, N作兩軸的垂線,其交點設為P,則P對於兩軸的距離為MP, NP.如此所作表明P點距離兩軸的線段,叫P點的坐標.因$NP \parallel X$軸,$MP \parallel Y$軸,故NP叫橫坐標,又叫x線;MP叫縱坐標,又叫y線.若以所有實數排列於兩軸上,而適宜定其單位的大小(兩軸上的單位不必相同),則P點所在,不難以NP及MP的長測定之.惟亟應注意的事:卽實數在兩軸上的排列,若使

象限		I	II	III	IV
坐	橫	+	−	−	+
標	縱	+	+	−	−

零與O相合而以正數排列於X軸的上方,及Y軸的右方以負數排列於X軸的下方,及Y軸的左方,則因P點所在的象限不同,其坐標的正負有如上表.故若知P點的位置,則其坐標可於兩軸上量得,通常以$P(x,y)$表之.(x在前,y在後).若x,y爲已知數,亦可依其數值的大小及正負,於相當的象限內求得P點.如是叫定點法(定點須用方格紙,以便決定單位,計算坐標).

例. 決定以$(1,2)$, $(-2,3)$, $(-3,-4)$, $(4,-5)$爲坐標的各點.

解. 如(8)圖,先在X軸上取1單位,自其處作X軸



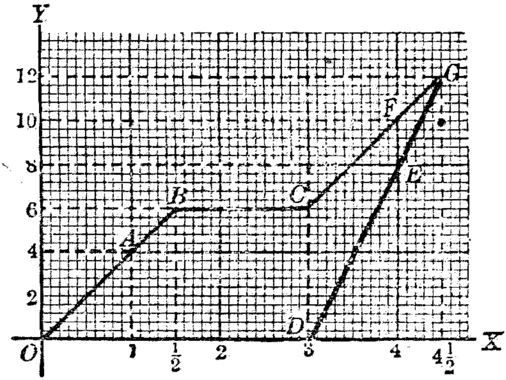
(8)

的垂線,再在Y軸上取2單位,自其處作Y軸的垂線,此兩垂線相交於P_1,其坐標即爲(1,2).如是可定以(1,2)爲坐標的點P_1.同理可定P_2, P_3, P_4

19. 函數的圖解法　凡具有兩變數互變的情形,得以一式表明其關係,并應用適當算法,以求得其解的問題,皆可用自變數所取數值及因此產生的因變數(函數),或即根據問題中所設各數,一一由坐標定點法,求出各點,然後依次連接之,使成相當的圖形,以表示該問題中所有變數按照一定關係變動的過程,有時且藉以推知該函數一般的性質,或由此發見關於此類問題的定律或原則,如此叫函數的圖解法,

例一.　一人力車以每時4公里的速度行$1\frac{1}{2}$時後,因事停止$1\frac{1}{2}$時,再以原速度前進,此時適有一自行車以每時8公里的速度從人力車最初出發點出發追之.問自行車須行若干公里始追及人力車?又自行車自出發至追及時須經過若干時?

解.　設以表時間的數值配置於X軸上.表距離的數值配置於Y軸上,而使Y軸上的單位2倍於X軸上的單位.則當$x=0$時,$y=0$,可知原點即表示人力車最初出發的一點.因人力車的速度爲每時4公里,故A



(9)

點表示人力車出發後經過1時所到的距離,OA線表示人力車出發後經過1時時間與距離的關係;因速度既一定,則人力車再行半時而至B;A, B為一直線,由此停止一時半,因距離不變,故BC線平行於X軸.

人力車自最初發出3時後復向前進行,其速度既不變,則其距離因時間而變的關係與前相同,故CF平行於OB.此時有自行車自原處出發.因在人力車出發後3時,故其出發點不為O而為D;其速度為每時8公里,故自出發後經過1時,到達E點,而人力車於此時則已到達F;自行車沿DE線前進,與人力車所沿CF線上的G點相交時,G即表示自行車追及人力車的一點.

因 G 點所表時間爲 $4\frac{1}{2}$ 時,所表距離爲 12 公里,故自行車於出發後 $1\frac{1}{2}$ 時(卽人力車自最初出發後 $4\frac{1}{2}$ 時)在行經 12 公里的一點追及人力車.

今更以代數的方法解之.

設 x 爲所求追及的距離,則因人力車於第二次出發前已行 6 公里,故 $(x-6)$ 公里爲人力車二次出發後應行的距離,故人力車自第二次出發至被自行車追及時所經過的時間爲 $\frac{x-6}{4}$ 時,而自行車則自其出發至追及人力車時所經過的時間爲 $\frac{x}{8}$ 時,故得方程式如次:

$$\frac{x-6}{4}=\frac{x}{8}$$

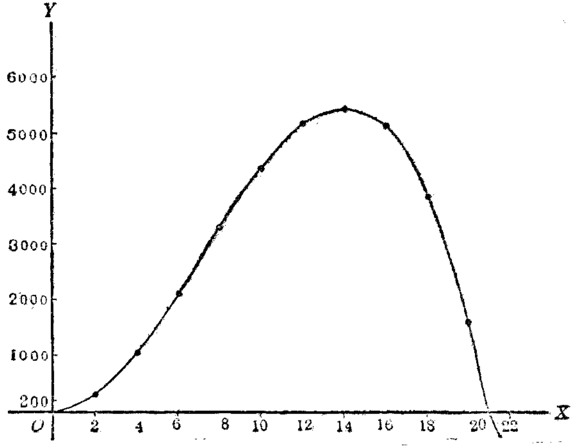
解之得　　$8x-48=4x,\ 4x=48,\ x=12.$

$$\frac{x}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{1}{2}.$$

故所求追及的距離爲 12 公里,追及的時間爲 $1\frac{1}{2}$ 時,與圖解的結果適合.

例二.　設一直方體的底面爲正方形,其底面的周圍與其高的和爲 84. 若底面一邊的長有種種變動,及由此算出直方體體積的數值如下表,試求其圖解.

x	y
0	0
2	304
4	1068
6	2160
8	3328
10	4400
12	5184
14	5448
16	5120
18	3888
20	1600
22	-1936



(10)

解. 設x軸上的數表底面的一邊,Y軸上的數表直方體的體積,因y的數值大,故兩軸上所取單位不能相同.設於Y軸上以每一格代表200,依次取得相當於表列各值的點聯結之,則所求圖解如上.

觀此圖解,(1)可知體積最初變動不大,次乃激增,至$x=12$以後,迨$x>16$則又銳減,在x近於21時通過X軸,再進便爲負數.(2)可知體積最大的一點在$x=14$的近邊.(3)可以檢出上表所未列的x與y相當的數值,如$y=3000$, $x=7.5$或19.

本題所述關係,若以代數式表之,則爲

$$\begin{cases} y=hx^2 & [h\cdots\cdots\text{直方體的高}] \\ h+4x=84. \end{cases}$$

即　$$y=84x^2-4x^3.$$

以 $x=0, 2, 4,\cdots\cdots$ 代入此式,可得上表所列 y 的數值.

習題十

(1) 定次列各點:

$(3, 5)(3, -5)(-3, 5)(-3, -5)(7, 0)(0, -8)(0, 9)$

$(-1.6, -4.1)(\sqrt{2}, -\sqrt{3})(-\sqrt{5}, \sqrt{7})$.

(2) 設正方形的三頂點爲 $A(2, 0)$, $B(8, 0)$, $C(2, 6)$, 定第四點的坐標.

(3) 設平行四邊形的三頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c), 定第四點的坐標.

求次列各題的圖解:

(4) 一人以每時6市里的速度前進4時後,又一人以每時12市里的速度自原處出發追之,則將於何時追及?

(5) 投一石於水,則圓形的波由此石落水處依次推進,若最外一圓的半徑以每秒5呎的速度增長,則最外的圓周在3秒末將擴展至若干尺?

(6) A, B 二城相距44公里,一人在上午八時乘車以等速由 A 向 B 出發,於9時30分因事在距 A 12公里處停頓半時後,以加倍的速度進行,則將於何時抵 B?

(7) 一人以每時3哩的速度步行 $1\frac{1}{2}$ 時後,休息半時,再以原速度前進.又一人在前人出發4時後,自原處乘自行車以每時12哩的速度出發追之,則將於何處追及?

(8) 湖的兩岸有甲乙二碼頭相對設置.一汽船以每時12浬的速度離甲過湖.半時後又一汽船,以每時18浬的速度自乙向甲.則二船將於何處相遇?該處距甲若干浬?

(9) 開水槽的一管,則經過12分水卽流盡,若開他管則祗須4分,今兩管齊開,問須時若干此槽乃罄?

(10) A, B 二汽車自一地同時反方向出發,A 車每時駛16公里,B 車每時駛28公里.開行若干公里後,B 車回轉方向,以原速度進行.於最初出發後 $1\frac{1}{2}$ 時追及 A 車.問 B 車在回轉方向前已行若干公里?

(11) 某年某校級際賽跑的紀錄爲

距離:	100碼,	220碼,	440碼,	880碼,	1哩,	2哩.
時間:	9.8秒,	21.2秒,	48.8秒,	1分56秒,	4分17.8秒,	8分27.6秒.

(12) 某級某科月考獲得各種分數的人數爲:

分數:	95,	90,	85,	80,	75,	70,	65,	60,	55,	50.
人數:	1,	2,	6,	9,	5,	10,	6,	4,	4,	3.

(13) 在 100000 個 10 歲的兒童中活至次列歲數的人數爲:

歲數:	10,	20,	30,	40,	50,
人數:	100000,	92637,	85441,	78106,	59864,
歲數:	60,	70,	80.		
人數:	57917,	38564,	14474.		

從圖解上求活至 52 歲的人數.

(14) 熱水冷卻時,其溫度與時間互變的關係爲:

時間:(分)	0,	1,	2,	3,	5,	7,	10,	15,	20.
溫度:(C)	92.0°,	85.3°,	79.5°,	74.5°,	67°,	60.5°,	53.5°,	45°,	39.5°.

從圖解上估計溫度若降至 50°C 需時若干分? 又若經過 18 分,則溫度爲幾何?

第二節* 方程式的圖解

20.* 一次及二次方程式的圖解　如前款例二若先有方程式 $y=84x^2-4x^3$ 而令 $x=0, 2, 4, \cdots\cdots$ 以求得 y,則爲方程式的圖解.依此可得方程式的根或其近似值.

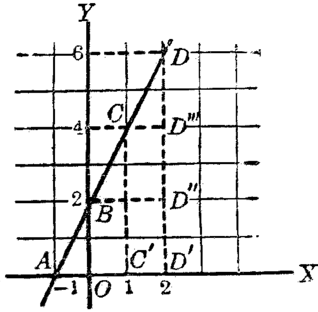
如於上式中令 $y=0$,則由 $84x^2-4x^3=0$ 可得 $x=0$ 或 21.如此所得 x 的數值,即上式所代表的曲線與 x 軸相交兩點的橫坐標,觀前款例二的圖解自知.茲舉例說明一次及二次方程式的圖解法.

例一. 求 $y=2x+2$ 的圖解.

解. 設 $x=-1$,則 $y=0$ (A 點)

$x=0$, 則 $y=2$ (B 點)

故知所求圖解在 x 軸上的交點為 $A(-1,0)$,在 Y 軸上的交點為 $B(0,2)$.



(11)

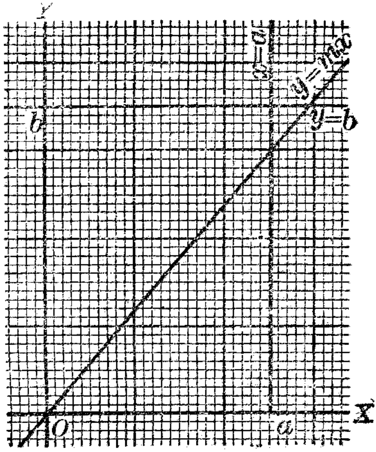
再設 $x=1$,則 $y=4$ (C 點);$x=2$,則 $y=6$ (D 點);……

而 $$\frac{OB}{AO}=\frac{2}{1}=2,\ \frac{C'C}{AC'}=\frac{4}{2}=2,\ \frac{D'D}{AD'}=\frac{6}{3}=2,\ \cdots\cdots$$

即 $\tan D'AB=\tan D''BC=\tan D'''CD=\cdots\cdots=2$ (x 的係數),故知線段 $AB, BC, CD\cdots\cdots$ 的方向皆不變,即 $A, B, C, D,\cdots\cdots$ 諸點在一直線上.

由此可知凡一次方程式如 $y=mx+b$ 其圖解皆為一直線.但一直線上,若已知兩點.則該直線即可決定.故圖解一次方程式時,祇須令 $x=0$ 及 $y=0$ 以求出兩軸上的交點而聯結之即得.

若於方程式 $y=mx+b$ 中,設 $m=0$,則 $y=b$,此爲平行於 X 軸的一直線(因 x 的係數既爲0,則直線與 X 軸所成的角爲 $0°$ 或 $180°$,故直線平行於 X 軸).若 b 亦爲0,則此直線卽爲 X 軸.



(12)

同理可知 $x=a$ 爲平行於 Y 軸的一直線.若 a 爲0,則此直線卽爲 Y 軸.

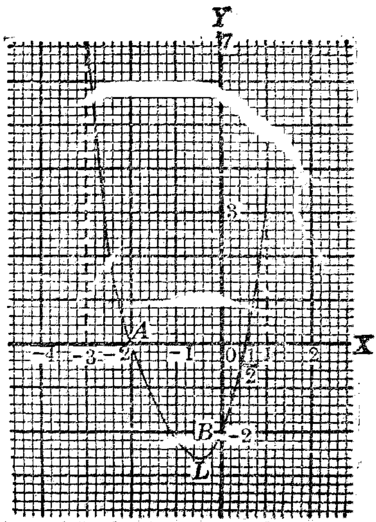
又若於方程式 $y=mx+b$ 中,設 $b=0$,則 $y=mx$,此爲通過原點的一直線,(因 x 與 y 可同時爲0).

例二.　求 $y=2x^2+3x-2$ 的圖解.

解.　設 $x=0$,則 $y=-2$;

$y=0$ 卽 $2x^2+3x-2=0$

則由 $(x+2)(2x-1)=0$,可得



(13)

$x=-2$或$\frac{1}{2}$,故知所求圖解在Y軸上的交點爲$B(0,-2)$,在X軸上的交點爲$A_1(-2,0)$及$A_2\left(\frac{1}{2},0\right)$.但若$x<-2$或$x>\frac{1}{2}$,$y$總是大於0.故知圖解在$x=-2$的左側及$x=\frac{1}{2}$的右側,皆向上擴展,以至無窮.

再設$x=-\frac{3}{4}$;則$y=-\frac{25}{8}$.但若$x<-\frac{3}{4}$或$x>-\frac{3}{4}$,y總是大於$-\frac{25}{8}$.

於是作次表:

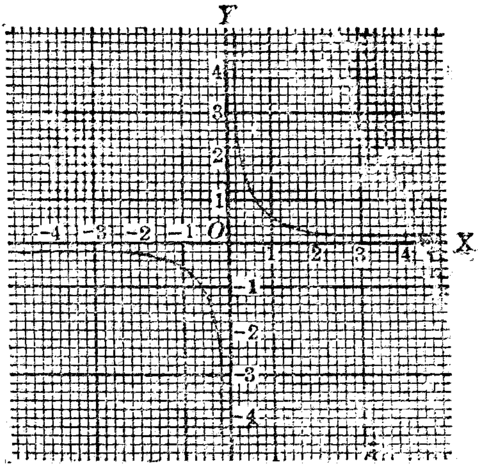
x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$2\cdots\cdots$
y	$+18$	7	0	-3	$-\frac{25}{8}$	-2	0	3	$12\cdots\cdots$

聯結表列各數所定諸點,則得圖解如13圖,叫拋物線.其最底的一點叫頂點.

由此可知凡二次方程式如$y=ax^2+bx+c$,其圖解皆爲拋物線,但因a, b, c的數值不同,圖解與兩軸的交點及其頂點的高低各異.故圖解類此二次方程式時,應先令$x=0$及$y=0$,求兩軸上交點(此交點的橫坐標卽方程式的根).再依次式計算其頂點,更於X軸上兩交點中間及其外側,設若干個x的值,求其相當的y而聯結之卽得:

$$x=-\frac{b}{2a},\quad y=-\frac{b^2-4ac}{4a}.^*$$

例三　求 $y=\frac{1}{x}$ 的圖解.



(14)

解　設 $x=0$, 則 $y=\frac{1}{0}=\infty$. [第二篇第七章第三節75款]

* 設 $y=ax^2+bx+c$, 則 $ax^2+bx+c-y=0$, 故 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$. 所設方程式若有等根,則 $\sqrt{b^2-4a(c-y)}=0$,卽 $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$, 此時 $x=-\frac{b}{2a}$. 因拋物線上在頂點兩側的各點皆兩兩對立,故頂點可看做兩點合一的一點,卽 x 有等值的一點. 故頂點的坐標爲 $x=-\frac{b}{2a}$, $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. 本例的頂點 $\left(-\frac{3}{4},-\frac{28}{8}\right)$ 卽由此求得的.

所設方程式又可寫作 $x=\frac{1}{y}$,於此設 $y=0$,則 $x=\frac{1}{0}=\infty$. 故知所求圖解與 x,y 軸的交點皆在無限遠處,即由所設方程式代表的圖形與縱橫軸各交於無限遠的一點,而未至無限遠處,則不能相交,但因 y 愈大則 x 愈小 x 愈大則 y 愈小,故所求圖形與縱橫軸雖不能相交,而可以逐漸接近.觀於次表可知:

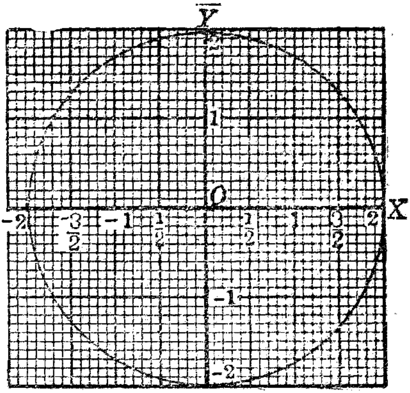
x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	±1	±2	±4	……	$\pm\infty$
y	$\pm\infty$	±4	±2	±1	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{4}$	……	0

連接表列各數所定諸點則得圖解如14圖.因有不連續的兩分枝,故叫雙曲線.因 x,y 軸與該曲線無限接近,故叫雙曲線的漸近線.

由此可知凡方程式如 $xy=k$ 或 $(x-a)(y-b)=k$,其圖解皆爲雙曲線,而以 x,y 軸或直線 $x=a,y=b$ 爲其漸近線,故圖解類此方程式時,應先令 $x=0,y=0$ 或 $x-a=0$, $y-b=0$ 求漸近線.再與 x 以若干個正負值,求其相當的 y 而連接之卽得[由本例可知分式方程式的圖解法].

例四. 求 $x^2+y^2=4$ 的圖解.

解. 解所設方程式得 $y=\pm\sqrt{4-x^2}$ 或 $x=\pm\sqrt{4-y^2}$. 於此設 $x=0$ 則 $y=\pm 2$, $y=0$, 則 $x=\pm 2$ 故知所求圖解在 y 軸上的交點爲 $(0, \pm 2)$ 在 x 軸上的交點爲 $(\pm 2, 0)$. 但若 $x<-2$ 或 $x>2$,



(15

則 y 爲虛數; 若 $y<-2$ 或 $y>2$ 則 x 亦爲虛數; 故 x, y 須合於次列不等式.

$$-2<x<2, \quad -2<y<2$$

於是作次表:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	$\pm\sqrt{\frac{7}{4}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{\frac{15}{4}}$	± 2	$\pm\sqrt{\frac{15}{4}}$	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{\frac{7}{4}}$	0

連接表列各數所定諸點,則得圖解如15圖. 因各點對於兩軸皆對稱,而兩軸上交點的坐標又相等,故本例的圖解爲圓.

由此可知凡圖解二次方程式,須計算 $k\sim x^2$ 或 $k\sim y^2$ 的偶數次方根,而有一變數超過某值,則他變數爲虛

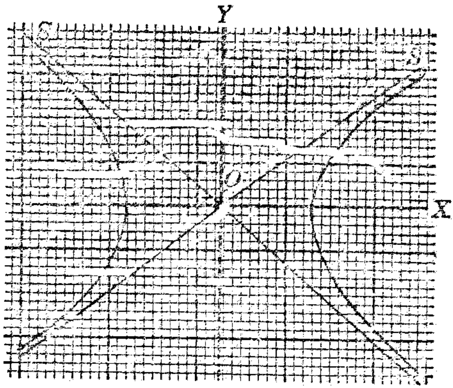
數的限制時,其曲線卽不能無限地擴展而爲密閉的圖形.或於某範圍中無適合所求的點.如本例所設方程式,其x^2及y^2的係數若皆大於0而不相等,則兩軸上交點的坐標亦不等,其圖解卽爲橢圓.但根號下的代數式若爲$k+x^2$或$k+y^2$,則於$k>0$時,其方根決不爲虛數,所求各點除別有限制外,可以擴展至於無窮.觀於例五可知.

例五. 求$x^2-y^2=9$的圖解.

解. 解所設方程式得 $x=\pm\sqrt{9+y^2}$

或 $y=\pm\sqrt{x^2-9}$

於此設$y=0$,則$x=\pm3$.但x若爲0,或其絕對值小於3,則y爲虛數.而x的絕對值大於3時,則y總可算出.故知所求圖解在x軸上的交點爲



(16)

$(\pm3,0)$,在y軸上則無交點.且於$|x|<3$的範圍中無一點適合於所設方程式,而此外則對於每個x,可得

兩個同值而異號的y.

如此求得的圖解除一部分有所限制外,可伸張至無窮遠,故仍為雙曲線,其漸近線則為 $y=\pm x$ 如16圖中的 OS 及 OS' 兩直線*.而兩坐標軸則為其對稱軸.

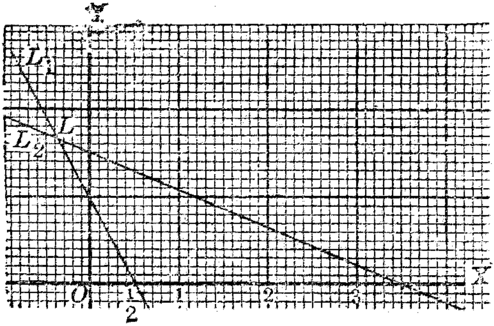
由此可知凡圖解方程式如$x^2-y^2=a^2$或$Ax^2-Cy^2=F$應先求x軸上的兩交點.過兩交點作x軸的兩垂線使各等於交點縱坐標的2倍,連接成矩形,並連接兩對角線而延長之,則所求各點的範圍及其擴展的趨勢可得[由例四及例五,可知無理方程式的圖解法].

21.* 聯立方程式的圖解 設有關於x,y的兩方程式聯立,則同時適合兩方程式的x,y為兩方程式的公有根;因每組的x,y數值皆可為一點的坐標,故以此同時適合於兩方程式的公有根為坐標的點,必同時在各方程式所代表的圖解上,即為兩圖解的交點.

---

*設曲線上有一點漸趨於無窮遠,即其坐標漸趨於(∞,∞)時,則$\frac{y}{x}$的值不定.但$y=\pm\sqrt{x^2-9}$,故$\frac{y}{x}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$.此式右邊若$x$漸趨於$\infty$,則漸趨於$\pm 1$,即在$x,y$同時漸趨於$\infty$時,其比值漸趨於$\pm 1$.而對於未至無窮遠處的點,可令$y=\pm x+d$.以此代入方程式,得$d=-\frac{9+d^2}{2x}$.當$x$漸趨於$\infty$時,$d=0$,故$y=\pm x$,故所設方程式的漸近線為$OS$及$OS'$兩直線.

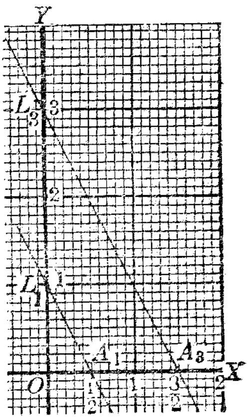
例一. 求聯立方程式$\begin{cases}3x+y-1=0\\x+2y-3=0\end{cases}$的圖解.



(17)

解. 依20款例一,圖解所設兩方程式得 L_1, L_2 兩直線,則其交點 L 即此兩方程式聯立時的圖解,其坐標為$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$.

依代數法解之,亦得 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{5}{3}$,與圖解合.



(18)

若所設方程式為$\begin{cases}2x+y-1=0\\2x+y-3=0\end{cases}$

則其圖解為 L_1A_1, L_3A_3 兩直線.因此直線在兩軸上交點坐標的比有等值,即

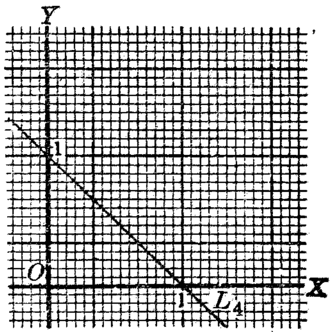
$$\frac{OL_1}{OA_1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \quad \frac{OL_3}{OA_3}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$，

故知兩直線與 x 軸所成的角相等，即兩直線平行．而此兩方程式實相矛盾(第二篇第五章第二節55款)，故知一次兩矛盾方程式的圖解為平行二直線．

若所設方程式為

$$\begin{cases}2x+2y-2=0\\ x+y-1=0\end{cases}$$

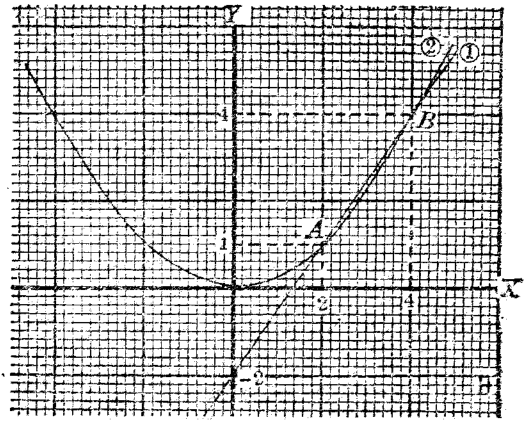
則第一方程式的圖解為 L_4，但第二方程式的圖解仍為 L_4．而此兩方程式實相屬而不能獨立，故可知一次兩相屬方程式的圖解為一直線．



(19)

例二．　求 $\left.\begin{array}{l}3x-2y-4=0\cdots\cdots(1)\\ x^2-4y=0\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ 的圖解．

解．　依20款例一及例二，分別圖解(1),(2)兩方程式如20圖，(1)為直線，(2)為拋物線，其交點為 $A\,(2,1)$ 及 $B\,(4,4)$ 故知一次方程式與二次方程式聯立時，其圖解為二交點．

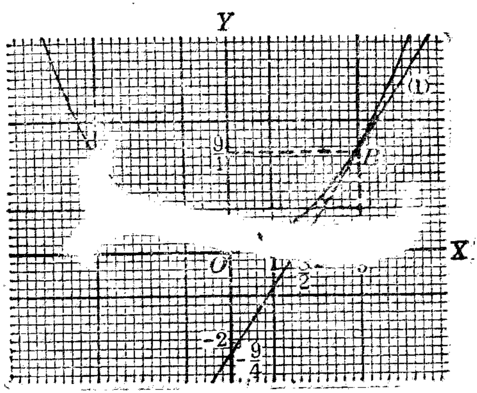


(20)

依代數法解之亦得$x=2,4;y=1,4$,與圖解合.

若所設方程式為 $\left.\begin{aligned}6x-4y-9=0\cdots\cdots(1)\\x^2-4y=0\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$

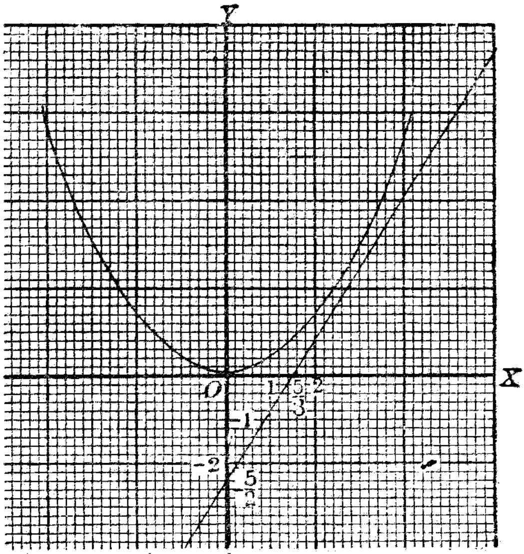
則依法圖解兩方程式後,所得交點祇有B,其圖解為$\left(3,\dfrac{9}{4}\right)$.此時(1)所代表的直線切於(2)所代表的拋物線,而同時適合於此兩方程式的x,



(21)

y祇有一組[解 (1) 得 $y=\frac{6x-9}{4}$, 代入 (2) 得 $x^2-6x+9=0$. 此方程式有等根3,故 $x=3, y=\frac{9}{4}$],故知一次方程式與二次方程式聯立而有等根時,其圖解爲切點(卽兩交點合而爲一).

若所設方程式爲
$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y-5=0\cdots\cdots(1)\\ x^2-4y=0\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$$



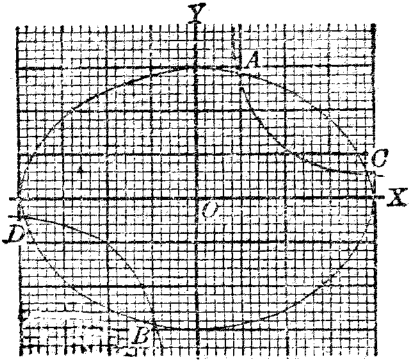
(22)

則依法圖解 (1), (2) 兩方程式後,兩圖解決不相交,而同時適合於此兩方程式的 x, y 爲 $x=3\pm i$, $y=2\pm\frac{3}{2}i$,故

知一次方程式與二次方程式聯立而有虛根時，則其圖解不能求得.

例三. 求 $\left.\begin{aligned} 2x^2+3y^2&=35\cdots\cdots(1)\\ xy&=6\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$ 的圖解.

解. 依20款例四及例三，分別圖解(1)，(2)兩方程式如23圖，(1)為橢圓，(2)為雙曲線，其交點為$A(2,3)$，$B(-2,-3)$，$C\left(\frac{3}{2}\sqrt{6},\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$及$D\left(-\frac{3}{2}\sqrt{6},-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$. 故知



(23)

兩個二次方程式聯立時，其圖解為四交點（有時相合為兩點，或更相合為一點均可）

依代數法解(1)，(2)亦得$x=2,-2,\frac{3}{2}\sqrt{6},-\frac{3}{2}\sqrt{6}$；$y=3,-3,\frac{2}{3}\sqrt{6},-\frac{2}{3}\sqrt{6}$；與圖解合.

習題十一

(1) 圖解次列一次方程式

(一)　$x=2$　　　　(二)　$y=0$

(三) $4x+7=0$　　(四) $5y-8=0$

(五) $3x+5y=0$　　(六) $2x-9y=0$

(七) $x+3y-7=0$　　(八) $5x-3y+10=0$

(九) $4x+6y+12=0$

(2) 圖解次列二次方程式

(一) $y=2x^2$　　(二) $x=4y^2$

(三) $y=-3x^2$　　(四) $x=-5y^2$

(五) $y=-3x^2+5x$　　(六) $y=2x^2+3x-2$

(七) $y=x^2+12x-7$　　(八) $y=4x^2+4x+3$

(九) $xy=8$　　(十) $(x-2)(y-3)=1$

(十一) $x^2+y^2=25$　　(十二) $x^2+y^2-3x+4y-4=0$

(十三) $4x^2+9y^2=36$　　(十四) $5x^2+3y^2=15$

(十五) $3x^2-4y^2=7$　　(十六) $-6x^2+y^2=9$

(3) 圖解次列聯立方程式.

(一) $\begin{cases}2x+y=8\\ x-y=1\end{cases}$　　(二) $\begin{cases}2y-x=6\\ 3x+5y=57\end{cases}$

(三) $\begin{cases}5x+6y=7\\ 5x+6y=8\end{cases}$　　(四) $\begin{cases}3x-y=2\\ 6x-2y=4\end{cases}$

(五) $\begin{cases}x-y+1=0\\ (x+2)^2-4y=0\end{cases}$　　(六) $\begin{cases}y-2x=5\\ x^2+y^2-x+3y=0\end{cases}$

(七) $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 5x^2-4y^2+20=0 \end{cases}$

(八) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x^2+9y^2+16x-18y-11=0 \end{cases}$

(九) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+4=0 \\ 3x^2+2y^2=6 \end{cases}$　　(十) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ 4x^2-3y^2=12 \end{cases}$

(十一) $\begin{cases} y^2=4x \\ 2x^3+3y^2=6 \end{cases}$　　(十二) $\begin{cases} x^2=12y \\ 3x^2-4y^2=12 \end{cases}$

第三節　統計大意

22. 統計及其材料的分配　依據一種事實的調查所得的一羣數值,用相當的方法歸類,適宜排列其次序,或作表或畫圖,以表現該事實在各數間的關係,藉以觀察其增減或進退的傾向,並推測其未來的情態,以決定政治,經濟,教育,或一切自然現象,社會問題的趨勢,及其改進的方針.如此叫做統計.其實施的步驟:第一當根據事實搜集材料.材料既得,則當設法整理,分組排列,以便統計.如此叫做材料的分配.例如某級學生38人,某月算學考試的分數為:

95, 68, 31, 95, 45, 59, 58, 85, 91, 99, 83, 96, 57, 68, 39, 47, 59, 87, 73, 82, 60, 81, 30, 85, 91, 84, 87, 58, 89, 81, 55, 40, 75, 67, 85, 79, 72, 85.

檢查上列諸數最小的是30.最大的是99.今試以每10分爲一組,分爲7組.各組人數的分配,有如次表:

分數	30—39	40—49	50—59	60—69	70—79	80—89	90—99
人數	3 人	3 人	6 人	4 人	4 人	12 人	6 人

如表列30—39, 40—49……等皆叫組距.亦有調査的結果在事實上祇可按其大小,依次排列,而無一定組距的.凡在同組的人,可卽以該組的中間一數爲成績叫中值.如在60—69一組的4人,其分數皆可作65分計.故所分若愈細,卽組距若愈小,則分配的結果,與實際愈接近.

23.* 比較的標準及其計算　前款所述,祇以考査的成績分組配置,並未比較.若欲知某人所得分數在全級中所占位置如何,須先有比較的標準.統計上向所取爲標準的數有三:

(1) 衆數　於一羣數中發見次數比較最多的一數叫衆數.如前例38個分數內有4個是85,此85卽衆數.而以此爲中值的一組共有12人,比較其他各組人數爲最多.故搜集材料後經整理分配的結果,其次數

最多的一組,衆數卽在其中.若以此作比較的標準,可視爲通常的現象,其少於此的,總當以不及標準論.如前例得79分的,其成績雖不算低,但旣有多數學生得分在85左右,則所可表現的成績,自不當以79分爲滿足了.又如:

例一. 調查某鄉師全膳學生每年自費銀圓數分配如下:

自費數(圓)	26—35	36—45	46—55	56—65	66—75
人　數	11人	93人	13人	4人	2人

求衆數.

解. 觀該校全膳學生123人中,有93人每人每年自費在40圓左右,而有11人則較省,19人則較費.故40圓卽衆數.

(2) 中數　於一羣經過整理而按次排列的數內,依其個數計算,適居於全列諸數中間的一數叫中數,設一羣的數有n個,則當以第$\frac{n+1}{2}$的數爲中數.若n爲偶數,$\frac{n+1}{2}$不能爲整數時,則當以第$\frac{n}{2}$個及第$\frac{n}{2}+1$個的數相加平均爲中數.如前款的例,學生人數爲38,$\frac{38+1}{2}=19.5$;而以各生所得分數依其多寡排列時,第十九人得75分,第二十人得79分,故當以$\frac{75\text{分}+79\text{分}}{2}$

即77分爲中數.由此可知該級考試,若以77分爲及格的標準,適得其中.又如:

例二. 某大學教職員109人爲綏遠戰事,捐資慰勞前方,其數如次:

捐款(圓)	1	2	3	4	5	10	15	20	100
人數	31	19	5	13	25	8	4	3	1

求中數.

解. 因$n=109$,故$\dfrac{n+1}{2}=55$,而自捐1圓的數起,至第55人所捐爲3圓,故當以3圓爲中數,其不足3圓的所捐未免太少.

(3) 平均數　以一羣的數相加,而除以所加個數的商,叫平均數,此當爲學者所熟知.設以n代個數,以$m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$代各數,以$M$代平均數,則

$$M=\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots}{n}$$

若諸數中有重複的,則以重複的個數乘其所重的數值,然後與他數相加即得.

例三. 某級學生24人,其年齡調查如次:

17, 20, 17, 19, 20, 18, 18, 20, 17, 19, 20, 21,

22, 18, 19, 20, 17, 23, 16, 16, 19, 21, 18, 17.

求平均年齡.

解. 因上列諸數中有16歲的2人,17歲的5人,18歲的4人,19歲的4人,20歲的5人,21歲的2人,22歲的1人,23歲的1人,故該級學生平均年齡為:

$$M=\frac{16\text{歲}\times2+17\text{歲}\times5+18\text{歲}\times4+19\text{歲}\times4+20\text{歲}\times5+21\times2+22\text{歲}+23\text{歲}}{24}$$

$$=\frac{(32+85+72+76+100+42+22+23)\text{歲}}{24}$$

$$=\frac{452\text{歲}}{24}=18\frac{5}{6}\text{歲}$$

通常對於數量的比較,恆以其平均數為標準.但所與比較的個數若甚衆,各個數值若甚大或其小數的位數若甚多如次例,則別有簡捷算法.

例四. 由某種實驗的報告得次列17個數值.

4.524, 4.515, 4.513, 4.507, 4.501, 4.485, 4.517, 4.493, 4.505, 4.500, 4.508, 4.511, 4.497, 4.502, 4.519, 4.504, 4.492.

求平均數.

解. 本題若依常法計算,殊覺繁重.今述一簡捷算法如次:

觀察上列諸數,因小數點以後第一位數字多為5,故可先假定各數的平均數為4.500,以4.500與各數相減

而求其差的代數和,再以個數17除之,則其商即爲對於4.500的應行訂正的數字.以此與4.500相加,即得所求平均數.觀於次列運算,其法自明[參考第一篇第三章第一節26款(3)]

假定平均數	實驗數	正差	負差	實驗數	正差	負差	差的代數和:
	4.524	24		4.505	5		+77
	4.515	15		4.500	0		+49
	4.513	13		4.508	8		−22
4.500	4.507	7		4.511	11		−11
	4.501	1		4.497		3	+93
	4.485		15	4.502	2		訂正數:
	4.517	17		4.519	19		93÷17=5.471
	4.493		7	4.504	4		故所求平均數:
				4.492		8	4.500+.005471
		+77	−22		+49	−11	=4.505471 弱.

(4) 物價的指數　所謂物價,係指同性質多種物品的平均價值而言.若屬於某一時期,即稱時價,設以一定時期的物價,作比較的標準,則該時期的物價叫基價,該時期叫基期,而某一時期某種物品的時價對於一定時期該物品的基價的百分比,則爲物價的指數.

例五.　某市米價第一年平均每石11.40圓,第二年12.54圓,第三年10.50圓,若第一年爲基期,求該市第二第三兩年米價的指數.

解

第一年米的時價每石 11.40 圓,故對於基價的百分比爲 $\frac{11.40}{11.40}$ 即 100%

第二年米的時價每石 12.54 圓,故對於基價的百分比爲 $\frac{12.54}{11.40}$ 即 110%.

第三年米的時價每石 10.50 圓,故對於基價的百分比爲 $\frac{10.50}{11.40}$ 即 92.1%.

故第二年米價的指數爲 110, 即較第一年貴 10%;第三年米價的指數爲 92.1, 即較第一年賤 7.9%.

習題十二

(1) 某大學一年生 40 人,某次微分考試分數記載如下:

80, 62, 65, 91, 77, 57, 55, 52, 34, 72, 53, 75, 67, 90, 64, 87, 60, 73, 95, 81, 44, 79, 60, 74, 78, 60, 84, 88, 60, 47, 54, 50, 86, 33, 35, 69, 51, 48, 50, 27.

試以每 10 分爲一組,分配各組的人數,並求其衆數及中數

(2) 某職業學校初級土木科一年級學生 73 人的年齡調查如下:

11 12 13 14 15 16 17 18 19 12 13 14 15 16 17 18 12
13 14 15 16 13 14 15 16 13 14 14 16 16 15 14 13 15
14 13 16 14 15 15 13 13 13 14 13 14 15 13 14 15 14
15 14 14 14 14 15 14 15 14 14 15 15 15 14 14 14 15
15 15 15 15 15

試按年分配其人數,并求其衆數中數及平均數.

(3) 上海職業指導所統計二十四年七月至二十五年六月請求介紹職業者 2836 人所希望的報酬分類如次:

每月最低薪額(圓)	10圓以下	11—20	21—30	31—40	41—50	51—60	61—70	71—80	81—90	91—100	101—150	151—200	201—250	251—300
人數	202	1026	864	303	171	116	38	39	11	27	19	9	7	4

試求其希望報酬的中數.

(4) 該所又統計請求職業者的年齡如次:

年齡		16—20	21—25	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50
人數	男	480	870	496	186	199	76	42
	女	189	248	73	29	9	1	1

試分別求男女希望得業者年齡的中數.

(5) 某校統計其五屆學生212人,平均每年在校自費數爲:

屆　　別	第一	第二	第三	第四	第五
人　　數	58	54	44	50	56
自費平均數(圓)	43.16	42.74	41.49	43.43	40.44

試求各生自費數的中數及總平均數.

(6) 以同一實驗方法觀測某物體的密度10次,記錄如下:

9.662, 9.664, 9.677, 9.663, 9.645,

9.673, 9.659, 9.662, 9.680, 9.654.

試求其平均數.

(7) 某測量員以皮帶尺測定一基線10次,其計錄如下:(單位爲呎.)

741.17, 741.09, 741.22, 741.12, 741.10,

741.20, 741.40, 741.00, 741.30, 741.10.

試求其平均數.

(8) 設煤價第一年平均每噸28圓3角,第二年30圓5角,第三年27圓9角.若以第一年爲基年,求第二第三兩年煤價的指數.

(9) 設某年2月份金價第一星期平均每兩值銀87圓4角,第二星期90圓,第三星期86圓9角,第四星期93圓2角.求該月的金價平均值,又若以第二星期爲基期,求各星期的金價指數.

24. 圖表的製作 由調查或實驗而得的種種不同記載或報告中,所有各數經整理歸類按次分配後,

更依其性質及順序列為一表,既便綜合,又醒眉目;或設法製成各種圖形,以示已得各數相互間的關係,藉可推測其未來的情形,所謂事實因比較而明,統計的作用乃得顯著.圖表製作的方法甚多,茲述其概要如下:

I. 列表　因表列各項關係有繁簡不同,立表的方法亦異,但事實上所須排列的事項,往往多於兩種,因過簡則已無列表統計的必要.

例一. 中華職業學校於廿四年度終統計初高中各科各年級學生算學不及格人數列表如次:

科別	人數	原有人數及不及格人數						不及格人數對於原有人數的百分比					
		初中			高中			初中			高中		
	年級	一	二	三	一	二	三	一	二	三	一	二	三
機械	原有	134	108	84		36	24	40%	46%	19%		50%	0%
	不及格	53	49	16		18							
土木	原有	139	108	48	67	40	25	17%	32%	56%	43%	33%	0%
	不及格	24	35	27	29	13							
商	原有	134	112	95		107	89	16%	41%	27%		46%	24%
	不及格	21	46	26		49	21						
合計	原有	407	328	227	67	183	139	24%	10%	30%	43%	44%	15%
	不及格	98	130	69	29	80	21						

表列原有人數及不及格人數,是一種調查的記錄,而其百分比,則根據前項記錄所算出,無此不足以顯

明該表的意義.然亦有事項過繁,作一表僅爲羅列事實,而於他種圖表中再事比較的.

例二. 教育部公佈民國十九年度江蘇省中等學校學生數統計表:

校別 數量 性別 立別		中學				師範學校				職業學校					總數
		初級中學	中學 初中	中學 高中	合計	高中師範	鄉村師範	短期師範	合計	農業學校	工業學校	商業校學	職業學校	合計	
省立	男		4451	3857	8308		687		687	394			11[illegible]	51[illegible]	9505
	女		1281	1086	2367		82		82	31			281	312	2761
	計		5732	4942	10675		769		769	425			397	82[illegible]	1226[illegible]
縣立	男	6495	475	289	7257		834	2122	2956						1021[illegible]
	女	2366	20	12	239[illegible]	528	292	233	1053				205	20	3656
	計	8861	495	301	9655	528	112[illegible]	2355	4009				[illegible]05	205	13869
私立已備案	男	2647	1139	648	4434							345		345	4779
	女	309	161	46	516								158	158	674
	計	2956	1300	694	4950							345	158	503	5453
私立未備案	男	2178	1136	641	4255	483			483		111	279	4[illegible]	4[illegible]	5171
	女	70[illegible]	904	356	1967	121			121			133	510	643	2781
	計	318[illegible]	2040	997	6222	604			[illegible]0[illegible]		111	412	553	167[illegible]	790[illegible]
總數	男	11620	7199	5435	2425[illegible]	483	1521	212[illegible]	412[illegible]	394	111	624	159	128[illegible]	29668
	女	3382	236[illegible]	1500	7248	649	374	2[illegible]3	125[illegible]	31		133	1154	1318	9822
	計	15002	9565	6935	31502	1132	1895	2355	5382	425	111	757	1313	2606	39[illegible]90

附註: 省立高中師範學生數并入中學計.

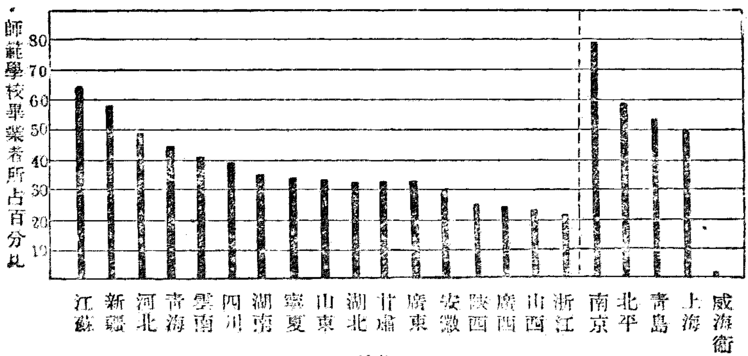
【注意】作表時須將所有事項,依其性質及範圍,分別行列,排比整齊,務使綱舉目張,縱橫對應,而一無模糊錯亂重複顛倒諸弊端.

II. 作圖　表的作用祇能納諸數於相當欄內,使其朗若列眉,而欲使讀者的觀念由此更明確地了解其關係,則更須利用種種圖形,以資比較.

(1) 以線表示數量　線的圖有直線及曲線兩種:一則利用線段的長,以比較各數的大小或高低;一則利用曲線的變跡,以追求事實上增減或其進退的趨勢.此實不外函數圖解法的應用.

a. 線段圖.

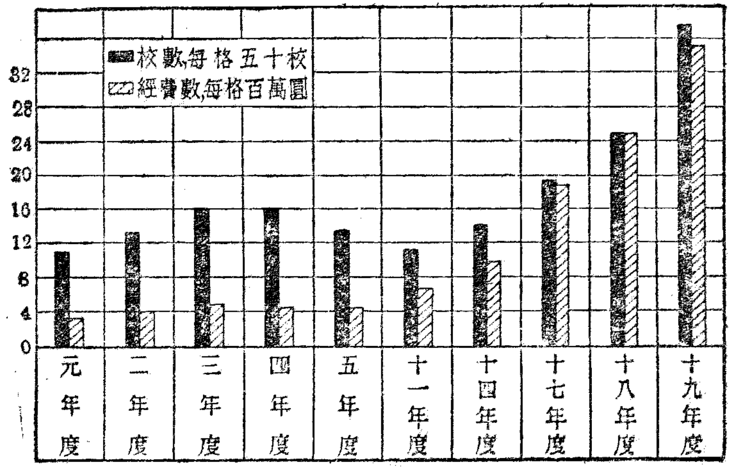
例三. 教育部公布民國二十年度二十二省市小學教師資格比較圖之一.



(24)

例四. 教育部公布民元至民十九全國各類中等

學校校數經費比較圖



□校數,每格五十校.　□經費數,每格百萬圓.

(2')

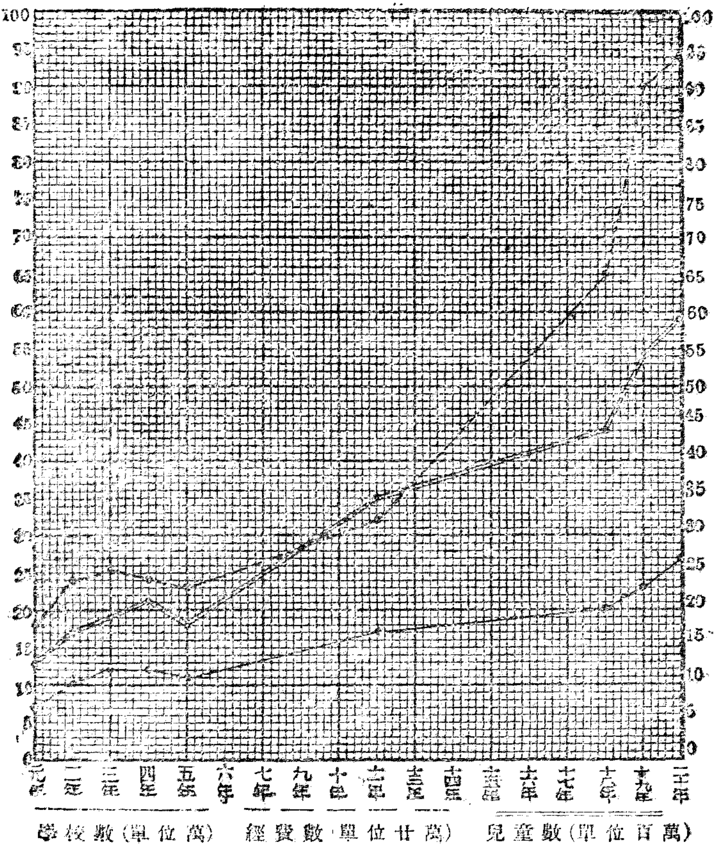
【注意(一)】 線段圖有用以比較一種事實的,如例三,亦有將兩種以上事實合併比較的如例四,祇須線段的畫法不同,卽可分別表示.

【注意(二)】 製作此類圖形時有先依各數的大小排定次序再作線段的如例三,亦有依事實發生的先後順次作圖的如例四.又有時按照所與比較各數的性質而橫作線段亦可.總以比較明晰而篇幅又長廣合度爲宜.

【注意(三)】 用圖比較各數時,倘能附一簡表,明載各數,尤爲需要.

b. 曲線圖　如例四，若將各線段的端點連之，則成一曲線．沿曲線觀察可知民元以來中等學校校數增加及其經費擴充的趨勢．再觀次例．

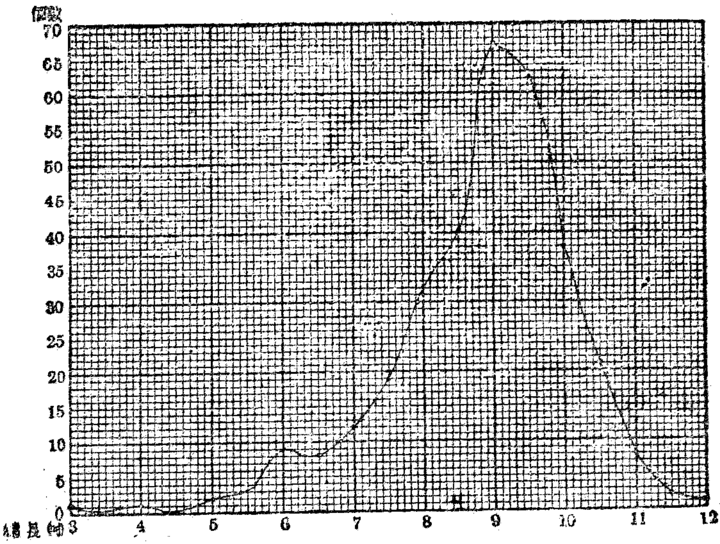
例五． 教育部公布民元至民二十全國初等教育發展趨勢圖．



(26)

例六. 某農家實測麥穗327個的長以吋爲單位,分配如次表,並作圖以明示其分配的實況.

穗長(吋)	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
個數	1	0	1	0	2	3	9	8	12	19
穗長(吋)	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	
個數	32	40	67	63	38	21	8	2	1	



(27)

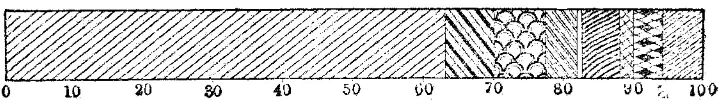
觀例六可知穗長9吋,爲麥的普通生長情形.且可知穗長1呎爲稀有的現象,而短至3吋以下的穗,亦爲事實所無.

(2) 以面積表示數量　以面積表示各項統計的結果,有直線形及圓形兩種,而直線形又有矩形及三角形的區別(如例四的線段亦可看做細而長的矩形),用以代表某種具有內函的數量,不僅僅抽象的數字而已.

a. 長方形圖.

例七. 某校調查全校學生1585人的家庭職業,共分9類,列表並作圖,以示其百分數如次:

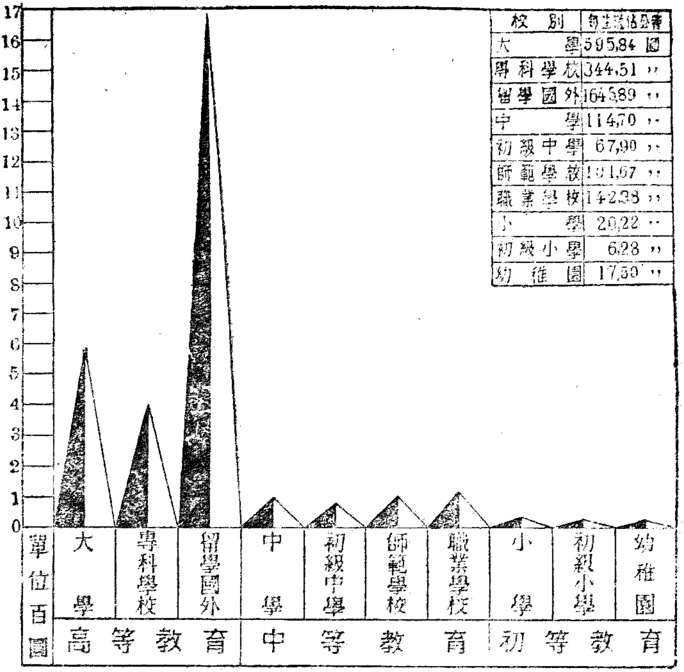
項目	商	學	工	農	軍警	法政	醫	交通	其他
人數	1001	111	113	73	6	85	34	67	93
百分數	63.1	7.0	7.3	4.6	0.4	5.4	2.2	4.2	5.8



(28)

b. 三角形圖.

例八. 教育部公布民國十九年度全國各級學校學生歲占公費比較圖.



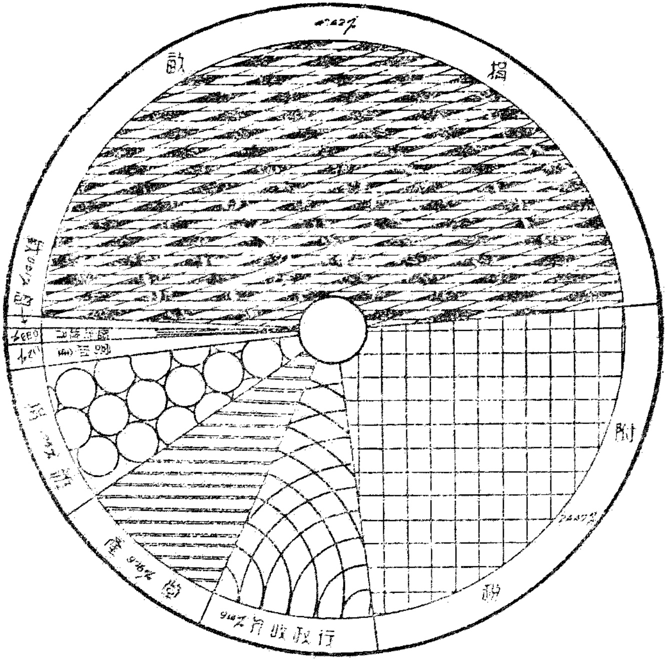
(29)

c. 圓形圖.

例九. 江蘇省教育廳公布民國二十二年度各縣教育經費各項歲入比較圖(圖 30).

d. 地圖 有時須統計或比較因地方區域不同而異其數量的事實,則先作一地圖(全國或一省或一縣),然後以各區域所有數字填入,或於各區域分着不同的色采,或以種種特殊符號記入各區域,以示分布的

實況,最可一目瞭然.

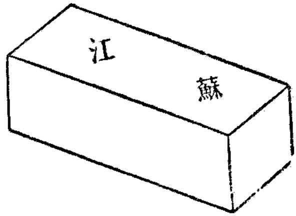


類別	總計	附稅	畝捐	官產	款息	雜捐	行政收入	寄附金	臨時收入
數目	$11,273,069	2,750,366	5,344,2[illegible]	987,5[illegible]2	56,010	8[illegible]3,683	1,030,636	125,604	94,107
百分比	100	24.40	4[illegible].42	8.76	0.51	7.75	9.14	1.12	0.83

(30)

(3) 以實體表示數量　此類圖形又可分立體圖及實物圖兩種;一則利用立體,表示統計各數,較用面積尤為具體,一則假藉實物,象徵統計各數,使讀者益可獲得較為明確的觀念.

a. 立體圖 今欲比較各省中等學校每一教員平均教授學生幾人,則以一個平行六面體代表學生一人所讀書籍,視平均所教人數若干,積若干平行六面體成一柱形堆垛,於其面上書明省名,以各垛的高低比較所教學生數的多寡.又如欲比較某水泥公司歷年銷售水泥的數量,則作圓柱體代表裝運水泥的桶,而異其底面的半徑及其高,以表示各年所售數量不同,藉資比較.



(31)

b. 實物圖 如欲知我國每萬人中得受中等教育的人數與世界比較如何?則以制帽代表學生(每一帽代表十人或十人以上均可),按其人數積成柱形,以其高低表示人數的多寡,又如比較各校學生歲估公費,則作半徑不同的圓,以之代表銀圓,而於其上書明校名及每生估費數.又如比較各國軍備的強弱,則以武裝兵士代表陸軍,以軍艦代表海軍,以飛機代表空軍,其大小當比例於實際所有的數字.

習題十三

取次列各項統計材料,製作相當圖表,以資比較.

(1) 上海市公安局發表二十五年市民年齡及婚嫁調查的結果.

(一) 年齡

年齡		未滿1歲	1—5	6—12	13—20	21—40	41—60	61—80	81—100
人數	男	23941	103029	136225	199193	447425	243869	30734	1455
	女	19618	91436	105628	151355	324818	171314	32203	1833

(二) 婚嫁

項別	未婚(男)	已婚(男)	未嫁(女)	已嫁(女)	鰥男	寡婦
人數	91436	549618	41742	539618	9820	24818

附註: 男子六十歲以上女子四十歲以上喪偶者列入鰥寡欄, 男女未滿二十歲者不計.

(2) 江海關發表二十五年一月至七月對外貿易的統計.

項別	輸入				輸出			
國數	由美	由德	由日	由英	向美	向德	向日	向英
圓數	98628	93056	79545	63469	114571	25949	49851	33410

附註: 以千圓為單位.

(3) 教育部統計全國各大學近數年度錄取新生的科別及人數.

年度＼科別	理科	農科	工科	醫科	文科	法科	教育科	商科
二十	1899	412	1372	539	5286	4142	1436	647
二十一	1266	426	1309	588	1474	1280	963	501
二十二	1474	441	1427	449	2424	1701	655	452
二十三	2194	633	1999	604	2449	2154	893	953
二十四	2702	694	2302	687	2280	1804	1120	914

(4)　教育部統計二十三年度全國專科以上學校設備狀況.

(一)教具

項別	儀器	標本	模型	機器	實驗用品	樂器	運動器械	其他
價值(圓)	666556	713298	260202	3142059	1073695	749069	146881	235488

(二)校具

項別	本器	竹器	鐵器	銅器	陶器	玻璃器	其他
價值(圓)	2124972	34061	334578	46980	55377	[illegible]8156	378505

(三)圖書

類別	哲學	宗教	社會科學	語言	自然科學	應用科學	美術	文學	史地
册數	272795	910[illegible]2	551126	101310	287695	225578	107116	617742	545121

(5)　教育部統計二十三年度全國專科以上學校教職員狀況.

(一)教職員資格性別及任別

項別	資格			性別		任別	
	國外留學	國內專科以上學校	中等學校	男性	女性	專任	兼任
職員	1148	1913	1113	4897	435	4089	247
教員	3856	2667	56	6690	515	4021	3184

(二)教員科別

科別	理	工	醫藥	農	文	法	教育	商	體育軍訓	其他
人數	1258	811	626	444	1816	958	464	283	406	139

(6) 教育部統計二十二年度全國初等教育概況

(一)學校數及學級數

類別	學校數				學級數			
	幼稚園	初級小學	高初級小學	其他	幼稚園	初級小學	高初級小學	其他
公立	769	196047	16405	283	979	329647	28153	507
私立	328	3900	5914	340	470	84386	9282	413

(二)兒童數及職教員數

類別	兒童數				職教員數			
	幼稚園	初級小學	高初級小學	其他	幼稚園	初級小學	高初級小學	其他
公立	3288	910339	824811	9868	1468	385045	51336	783
私立	14624	141545	242144	920	751	99676	16819	573

(三)歲出經費數(圓)

類別		幼稚園	初級小學	高初級小學	其他
立別	公	556988	63656666	18348347	146485
	私	271802	18683120	5032930	109523

(7) 陝西近五年來義務教育發展的概況.

年度	二十	二十一	二十二	二十三	二十四
學齡兒童	750000	770000	790000	800000	800000
已入學者	185351	214522	255801	183004	350000

(8) 江西二十三年度中等教育概況據調查如次:

項別			學校數	學級數	學生數	職教員數	歲出經費數(圓)
校別	中學校	男	35	255	7736	833	741158
		女	4	31	1378	64	117849
	師範學校	男	11	38	1[illegible]30	260	164833
		女	2	8	241	18	46373
	職業學校	男	10	59	1142	2[illegible]0	235070
		女	3	8	439	35	75823

(9) 江西近三年度省教育經費的分配(單位圓).

類別		農學院	專科學校	中學	師範	職業	留學	社教	省小	其他
年度	二十二	70000	212733	468971	278588	35431	142727	94300	358822	231443
	二十三	150000	148830	435907	273868	2[illegible]0108	142727	1038[illegible]	364250	277450
	二十四	150000	165830	403234	309645	218292	118290	123562	37250[illegible]	23[illegible]641

(10) 安徽二十四年度省教育經費的分配(單位圓).

(一)高等中等教育

類別	高等教育			中等教育		
	安徽大學	國外留學	國內大學生獎金	中學校	師範學校	職業學校
圓數	315149	208240	15800	609607	408150	410849

(二)初等義務教育

類別	初等教育			義務教育				
	附屬小學	省會小學	補助費	短期小學	改進私塾	訓練師資	行政輔導	其他
圓數	145776	160176	24756	207500	27500	25000	20000	50000

(11) 江蘇近三年度省教育經費的分配(單位圓).

(一)歲出總數

項別		總數	占全省歲出百分比
年度	二十二	41 8054	20.198
	二十三	4465684	16.76
	二十四	4578028	15.86

(二)各項教育經費的百分比

類別		高等教育	中等教育	初等教育	社會教育	教育行政	其他
年度	二十二	4.28	52.41	9.47	15.11	6.91	11.82
	二十三	5.64	54.42	9.61	15.68	6.87	7.78
	二十四	7.65	55.11	9.02	16.21	6.96	5.05

(三)中等教育經費的百分比

類		別	普通中學	師範學校	職業學校
分配實況	年度	二十二	49.80	30.93	19.27
		二十三	46.58	28.11	25.31
		二十四	46.63	26.08	27.29
部定標準			40.00	25.00	35.00

(12) 上海市民十六至民二十四教育經費的分配(單位圓).

類	別	行政費	學校教育費	教育研究費	社會教育費	臨時費
年度	十六	41910.13	214515.92			5[illegible]849.66
	十七	99879.15	694129.06		44266.92	60328.07
	十八	127175.41	816806.15	7234.19	4190[illegible].16	87268.79
	十九	139051.88	867392.02	79[illegible]2.68	41128.83	52205.34
	二十	142387.07	633510.02	7471.15	43263.24	164336.10
	二十一	142950.70	913736.65	4967.95	60554.97	200000.13
	二十二	194191.23	1078406.52	9446.46	81932.84	221206.54
	二十三	220338.02	1212642.7[illegible]	9071.19	100238.27	209755.01
	二十四	206726.00	1196604.00	12000.00	108000.00	299868.00

(13) 中華職業學校統計各級學生的籍貫如次:

省市	江蘇	浙江	上海	安徽	福建	廣東	河北	江西	遼寧	湖北	四川	山東	湖南	貴州	南京
人數	775	373	315	34	14	18	6	5	2	7	9	6	11	2	8

第四章

應用問題的研究

第一節　構成應用問題的條件

凡一種與數量有關係的事實，由其已知條件，推算所求數量，即成立一個算術應用題，其解法於第二篇第一章，業經分類敍述．惟問題如何構成，其條件應如何斟酌取捨，尚有研究的必要．

25. 條件適足的應用題　大多數的算術應用題都可以用代數方程式去解，而解代數方程式時，方程式的個數，須等於未知數的個數；設方程式的個數不足，即屬於不定方程式，其解答即不止一種．所以在算術上，若成立一個完全的應用題，其中已知條件的個數，必須與未知數的個數相等．

例一．　某數的二倍加 9，等於某數的五倍減 6，求某數．

題中祇有一個未知數——某數，所以祇要一個已知

條件.

【代數解法】 設所求的數是x,則

$$2x+9=5x-6,\ 解之得\ x=5.$$

【算術解法】 某數的二倍比五倍少:$9+6=15$,所以某數是:　　$15\div(5-2)=5.$

例二. 甲乙二數的和是38,甲數比乙數的二倍多2,求二數.

題中有兩個未知數——甲數和乙數,所以要有兩個已知條件:(一)二數的和是38,(二)甲數比乙數二倍多2.

【代數解法】 設甲數是x,乙數是y,則

$$x+y=38 \qquad x=2y+2$$

解之得　　$x=26 \qquad y=12.$

【算術解法】 從甲數減2,使其差適爲乙數的二倍,則二數的和就變做$38-2=36$.

所以乙數是:　　$36\div(2+1)=12.$

又甲數是:　　$38-12=26.$

例三. 甲種鉛筆每枝480文,乙種鉛筆每枝240文,丙種鉛筆每枝120文,某人用6960文買得三種鉛筆共20枝,其中甲種的枝數是丙種的二倍,問三種鉛筆各

幾枝?

題中有三個未知數——甲種枝數,乙種枝數,丙種枝數,所以要有三個已知條件:(一)三種共20枝,(二)甲種每枝480文,乙種每枝240文,丙種每枝120文,共值6960文,(三)甲種枝數是丙種枝數的二倍.

【代數解法】 設甲種枝數是x,乙種枝數是y,丙種枝數是z,則

$$x+y+z=20 \qquad x=2z$$

$$480x+240y+120z=6960$$

解之得: $$x=12,\quad y=2,\quad z=6.$$

【算術解法】 將甲丙兩種混和,看做一種,則其平均價是: (480文×2+120文)÷(2+1)=360文.

假設20枝全是乙種鉛筆,則總價應爲:

240文×20=4800文.

比題中的總價少:

6960文−4800文=2160文.

用一枝乙種鉛筆換一枝甲丙混合筆應該添錢:

360文−240文=120文.

所以甲丙混合鉛筆的枝數是:

2160文÷120文=18.

乙種鉛筆是:　20枝-18枝$=2$枝.

丙種鉛筆是:　18枝$\div(2+1)=6$枝.

甲種鉛筆是:　18枝-6枝$=12$枝.

25. 條件衝突的應用題　題中各已知條件遇着不能同時並列的時候,雖然條件適足,也不能求出其解答,這種問題列成代數方程式,就是矛盾方程式,或是具有負根以及不合理的的分數根的方程式.

例一.　有甲乙二數,甲數的二倍加3等於乙數的三倍減5,甲數的六倍加12,等於乙數的九倍減10,問甲乙二數各多少?

【代數解法】　設甲數是x,乙數是y,則

$$2x+3=3y-5,\qquad 6x+12=9y-10.$$

解之得:　$$0=2$$　(不合理)

本題是矛盾方程式,所以不能求根.

【算術解法】　化簡第二條件就是甲數的六倍比乙數的九倍少:　$12+10=22.$

化簡第一條件,就是甲數的二倍比乙數的三倍少:$3+5=8$,也就是甲數的六倍比乙數的九倍少:

$$3\times8=24.$$

甲數的六倍既然比乙數的九倍少22,就不能比乙

數的九倍少24,所以題中的兩個條件不能並立,它的解答,也就無從求出了.

例二. 米一石值7圓8角,麥一石值4圓2角,某人用24圓,買得米麥共6石.問其中米麥各幾石?

【代數解法】 設米是x石,麥是y石,則

$$x+y=6,\qquad 78x+42y=240.$$

解之得:　　$x=-\frac{1}{3},\qquad y=6\frac{1}{3}.$

石數不能得負數,所以本題沒有合理的根.

【算術解法】 假設題中6石全是價廉的麥,則總價應爲:　　4.2圓$\times 6=$25.2圓.

比題中的總價多

25.2圓$-$24圓$=$1.2圓.

用麥去換米,總價祇有變少,不會變多,所以不能求得解答.

附註: 若結果不能爲分數的答案(如人數,書的本數等),而竟爲分數,該問題也是條件衝突的一類.

27. 條件重複的應用題 在已知各條件中,假如某條件可以由其他條件間接推得,則某條件等於虛設.所以此種應用題雖然條件適足,實際還是不全,所

以不能求出解答.假如此種應用題,列成代數方程式,其中就有一個方程式,可以由其他方程式推算得來,所以方程式不全,根自不能求得.

例 有甲、乙、丙、丁四數,甲乙的和是17,乙丙的和是19,丙丁的和是18,甲丁的和是16,求四數.

【代數解法】 設甲數是x,乙數是y,丙數是z,丁數是w,則

$$x+y=17\cdots\cdots(1)$$

$$y+z=19\cdots\cdots(2)$$

$$z+w=18\cdots\cdots(3)$$

$$w+x=16\cdots\cdots(4)$$

從(1),(3)的和減(2)得:

$$w+x=16\cdots\cdots(5)$$

從前面三式推算得來的(5)式,和題中的(4)式重複,所以(4)式等於虛設.由三個方程式求四個未知數,它的解答是不定的,所以本題沒有適當的根.

【算術解法】 從第一、第三兩條件推得甲乙、丙丁的和是: $17+18=35.$

再和第二條件相抵消,得甲丁的和是:

$$35-19=16.$$

上式的結果和已知的第四條件重複,所以題中的第四條件,有等於無,由三個已知條件求四個未知數,在本題是不可能的.

28. 擬應用問題時必要的注意　由前三款可知擬題的時候,要注意下列三點:(一)先訂出合理的結果,再由結果湊成題中的條件,就可以免除條件的錯誤;(二)檢查已知條件的個數是否與未知數的個數相等,就可以免除條件過剩或不足的錯誤;(三)檢查已知各條件中,是否有重複的條件.(二、三兩點能列成方程式來檢查尤佳).

例.　在下列六個條件中,任意選出一部分編成合理的應用題(計三題).

(1)帽一頂值二圓四角,(2)鞋一雙值一圓六角,(3)帽一頂鞋一雙共值四圓,(4)一頂帽比兩雙鞋賤八角,(5)兩頂帽可以換三雙鞋,(6)四雙鞋比兩頂帽貴一圓六角.

上舉(4),(6)兩個條件,是重複的條件,所以不能同時並用在一個應用題裏.現將擬成的三個應用題,分列如下:

(1)　帽一頂值二圓四角,兩頂帽可換三雙鞋,問一

雙鞋的價值是多少?

(2) 帽一頂鞋一雙共值四圓,兩頂帽可以換三雙鞋,問一頂帽一雙鞋的價值各多少?

(3) 帽一頂鞋一雙共值四圓,四雙鞋比兩頂帽貴一圓六角,問一頂帽一雙鞋的價各多少?

習題十四

指出下列各題的錯誤,並設法去改正它.

(1) 有甲、乙、丙三數,甲、乙、的和是 230,乙、丙的和是 168,甲比丙多 62,問三數各若干?

(2) 兒童若干人,等分餅乾若干塊.若每人分 5 塊,則餘 16 塊,若每人分 8 塊,則不足 12 塊,求兒童的人數和餅乾的塊數.

(3) 某工廠向銀行支付 1 00 圓,發給工資.其中分 5 圓,1 圓兩種法幣,共計 150 張,問兩種法幣各幾張?

(4) 父年 38 歲,子年 11 歲.問幾年後父年是子年的四倍?

(5) 有二位數,它的數字和是 13,若從 148 減去這二位數,則得位置顛倒的二位數,求原二位數.

(6) 有上中下三種茶葉.上茶每兩 2 角 5 分,中茶

每兩1角4分,下茶每兩4分.某人用2圓3角4分,買得三種茶葉共一斤,其中上中茶比下茶多一兩,問三種茶葉各幾兩?

(7) 有甲、乙、丙三數,甲數比乙數的$\frac{1}{2}$少2,乙數比丙數的$\frac{1}{3}$少4,丙數比甲數的六倍多24,問三數各若干?

(8) 甲、乙、丙三人,共有金24圓,甲佔總額的$\frac{1}{4}$,乙佔總額的$\frac{2}{3}$,丙佔總額的$\frac{1}{2}$,問三人各有幾圓?

(9) 有缸一隻,上面裝甲乙兩管.開甲管注水,40分鐘可以注滿一缸;開乙管注水,50分鐘可以注滿一缸.缸的下面又裝一丙管.開丙管放水,20分鐘可以放完一缸水.現在把三管齊開.問幾分鐘後可以將空缸裝滿?

(10) 池中插一竹竿,在泥中的部分佔竿長的$\frac{1}{8}$,在水中的部分佔竿長的$\frac{7}{10}$,假如水漲3寸,在水面上的部分,卽佔竿長的$\frac{1}{5}$,問竿長幾何?

就下列四題試將括弧中不實用的數劃去,並說明不適用的理由:

(11) 鉛筆每枝120文,鋼筆每枝250文,某人用1960文買得兩種筆共(9, 12, 20)枝,問兩種筆各幾枝?

(12) 張生有錢若干文.預定買桃子若干個,若買每

個15文的桃子,則餘84文,若買每個20文的桃子,則餘(44,70,94)文.問張生有錢幾文,預定買桃子幾個?

(13) 有二位數,它的數字和是11,若從原數減(19,36,45),則得位置顛倒的二位數,問原二位數爲何?

(14) 某初級小學,一年級學生數的三倍等於二年級學生數的四倍,二年級學生數的八倍等於三年級學生數的九倍,三年級學生數的五倍等於四年級學生數的四倍,四年級比一年級(多10人,少10人)問四級各幾人?

(15) 在下列各條件中選出一部分編成應用題:(計三題).

(一)張君每時抄書400字,(二)王君每時抄書600字,(三)張王二君每時共抄1000字.(四)張君抄書三時抵王君抄書二時,(五)張君抄書五時比王君抄書三時多抄200字,(六)張王二君合抄四時共抄成4000字.

29. 條件過剩的應用題 題中的已知條件,若多於未知數的個數,則爲條件過剩的應用問題.採取此種過剩的條件,有兩種作用:(一)假如兒童對於條件適足的應用題的計算方法還沒有學過,即須參入過剩的條件,以適應兒童的程度.(二)普通和數量有關

係的事實上各個數量未必都是計算時必須的條件,所以要參入條件過剩的應用題,來訓練兒童選擇條件的能力.假如應用題中過剩的條件,不合於上列兩種作用,則該應用題的構成,即爲擬題者的錯誤.

例一. 運動圈的周圍,計長48丈.甲乙二人同時同地同方向沿着運動圈競走.甲每三分鐘跑一圈,乙每四分鐘跑一圈,問幾分鐘後,二人又可以相會?

本題所求的時間和運動圈的周長,並無關係.現在設周長爲a,時間爲x,列成方程式證明如下:

$$\frac{a}{3}-\frac{a}{4}=\frac{a}{x},$$ 各項以a除之,則方程式變

爲 $$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$$ 解之得$x=12$.

本題若用算術的解法,則當兒童已學過分數時,即可通用次列的解法(I),無須用周長48丈這個條件;若分數尚未學到,則非應用解法(II)不可,此時周長48丈便成爲不可少的條件.

【解法I】 甲每分鐘跑$\frac{1}{3}$圈,乙每分鐘跑$\frac{1}{4}$圈,所以每分鐘甲比乙多跑:$\frac{1}{3}$圈$-\frac{1}{4}$圈$=\frac{1}{12}$圈.

甲乙再相會的時候,甲已經比乙多跑一圈,所以要經過的分數是: 1圈$\div\frac{1}{12}$圈$=12$.

【解法II】 甲每分鐘跑: 48丈÷3=16丈

乙每分鐘跑: 48丈÷4=12丈

每分鐘甲比乙多跑: 16丈−12丈=4丈

甲乙二人再相會的時候,甲已經比乙多跑48丈,所以要經過的分數是: 48丈÷4丈=12.

例二. 馬君歇業7月,共欠債420圓;嗣復就業,每月進款120圓,其用費祇須85圓;問須經過幾個月,方可以還清債務?

題中歇業的月數,在計算的時候,毫無用處,所以參入這個過剩條件的原因,就是用來訓練兒童選擇條件的能力的.

【代數解法】 設還清債務要經過的月數是x,則

$$120x-85x=420,\ \text{解之得}\ x=12.$$

【算術解法】 每月可還的債是:

120圓−85圓=35圓.

還清債務420圓要經過的月數是:

420圓÷35圓=12,即一年.

30. 條件不足的應用題 應用題中的條件,若少於未知數的個數,則爲條件不足的應用題,倘列成代數的聯立方程式,即爲不定方程式,不定方程式的性

質可分做下列三種:

(一)沒有一定的結果,所以不能求出解答.

(二)解答雖然多至無窮,但是能逐步求出它們的範圍.

(三)結果受種種的限制,所以解答祇有幾組,或者竟和普通應用題一樣,祇有一種解答.

在算術上祇有整數的性質與混合比例兩部分,常會遇着此種條件不全的應用題.

例一. 某數用3除餘2,用5除餘3,問某數為何?

【代數解法】 設某數是x,用3除的商是a,用5除的商是b,則

$$x=3a+2=5b+3.$$

解之得: $a=1,4,7,10,13\cdots\cdots$; $b=2,7,12,17,22\cdots\cdots$;

$$x=8,23,38,53,68,\cdots\cdots$$

【算術解法】 用5除不餘用3除餘1的數,最小是10.

用3除不餘用5除餘1的數,最小是6.

所以用3除餘2用5除餘3的各數中有一個是:

$$10\times2+6\times3=38.$$

而3和5的最小公倍數是15.

在38上加15的倍數,或減15的倍數,其所得各數,都

是合於題意的數.

所以合於題意的數是:

$$8,\ 23,\ 38,\ 53,\ 68,\cdots\cdots.$$

【附註】 假如上題所問是某數最小為何,則它的解答,即衹有一種——8.

例二. 有拾圓伍圓壹圓的法幣共計38張,共值228圓,問三種法幣各幾張?

【代數解法】 設拾圓法幣的張數是x,伍圓法幣的張數是y,壹圓法幣的張數是z,則

$$x+y+z=38, \qquad 10x+5y+z=228.$$

解之得: $x=10,\quad y=25,\quad z=3,$

或: $x=14,\quad y=16,\quad z=8,$

或: $x=18,\quad y=7,\quad z=13.$

【算術解法】 每張的平均價值是:

$$228\text{ 圓}\div 38=6\text{ 圓}.$$

平均價值	每張的價值	損	益	混合的比		
	10圓	4圓		5	2	7
6圓	5圓		1圓		8	8
	1圓		5圓	4		4

原來的份數$5+1+4+4=14$,不是38的約數.但是法

幣的張數,不能得分數,所以設法將10圓法幣與5圓法幣的比1:4,加大二倍,變成2:8,使它的份數和適爲38的約數,然後配分總額.則

總共的份數是:　$7+8+4=19$

拾圓法幣是:　38張$\times\frac{7}{19}=14$張

伍圓法幣是:　38張$\times\frac{8}{19}=16$張

壹圓法幣是:　38張$\times\frac{4}{19}=8$　張

還有兩種合於題意的結果,也可以設法推得.

習題十五

(1)　在下列各問題中:(I)過剩的條件爲何?(II)各題過剩的條件,誰是絕對無用的,誰是可有可無的?(III)可有可無的條件,在什麼部分是有用的,在什麼部分是無用的?

(一)麵粉每包28斤,三包麵粉的價值是7圓8角,問八包麵粉的價值若干?

(二)有書一部,共計1800頁,由甲獨抄,18日可以抄完;由乙獨抄,30日可以抄完;由丙獨抄,45日可以抄完;現在由三人合抄,問幾日後可以抄完?

(三)求$12+17+22+\cdots\cdots+47$八項的和.

(四)有直角三角形,兩直角邊的長,一是二寸,一是一寸五分;斜邊與較長的直角邊的差,等於兩直角邊的差;問斜邊的長幾何?

(五)男女童共計17人,分桃子80個.若男童每人4個,女童每人5個,則餘5個;若男童每人6個,女童每人4個,則不足8個;問男女童各幾人?

(六)甲乙兩輪船同時由東西兩港相對駛行.甲輪每時行22里,乙輪每時行15里,兩輪在途中相會以後,甲輪再行1時12分抵西港,乙輪再行2時8分抵東港;求兩輪從出發到相會所經過的時間.

(2) 在下列各問題中(I)那幾題是能求解答的?那幾題是不能求解答的? (II)能求解答的題,是屬於那一部分的應用題? (III)如為不能求解答的題,卽添入相當的條件,使它成為條件適足的問題.

(一)甲乙丙三數,甲乙二數的和是16,乙丙二數的和是18,問三數各若干?

(二)上酒每斤1920文,中酒每斤960文,下酒每斤640文,現在要混成每斤1000文的酒,問應如何混法?

(三)棋子30枚,排成長方形,問有幾種不同的排

法?

(四) 趙生和錢生沿運動圈的周圍競走,趙生每分鐘走48丈,錢生每分鐘走36丈.問幾分鐘後兩人又可相會?

(五) 某生的年齡,用3除餘1,用5除餘3,用7除餘6,求某生的年齡.

(六) 甲乙丙三人分金1200圓,甲乙所得的和等於丙的二倍,丙得總金額的$\frac{1}{3}$,問三人各得幾圓?

(七) 英文書每册值一圓零八分,國文書每册值九角六分,算術書每册值六角四分.商社用八十圓買得三種書共計80册,問三種書各幾册?

(八) 有三位數,若加396,則它的百位數字與個位數字交換;若加9,則它的十位數字與個位數字交換;問此三位數爲何?

(3) 下列兩題,各有幾種解答?添入若何條件,即成爲祇有一種解答的應用題?

(一) 甲乙二人,同地同方向進行.甲每時行8里,乙每時行5里.甲已行一時半以後,乙纔起行,問幾時後二人相隔6里?

(二) 甲種鉛筆每枝160文,乙種鉛筆每枝140文.兩

種鉛筆共30枝,兩種總價的差是600文,問兩種各幾枝?

(4) 次題有若何錯誤?加入若何條件,即成爲合理的應用題.

有一張長一寸二分,闊一寸六分的長方紙,現在要將它裁成若干正方形,問有幾種裁法?

(5) 次題有幾種解答?所有解答是否都合理?

有二位數,它的數字和是8;若從原數減7,則它的兩位數字相同,問此二位數爲何?

第二節　解應用題的基本法則

在第二篇第一章內,應用問題雖經分類敍述.但彼處係就問題的性質分類,玆更就問題的解法方面,分別研究如次:

31. 應用加減的解法

(I) 加法的應用　普通的加法都是用以求和的,其用法不外(一)求一個數量增加後的結果,(二)求兩個或兩個以上數量的總和.

(II) 減法的應用　普通的減法都是用以求差的.其用法不外(一)求一個數量減少後的結果;(二)比較

兩個數量的多寡.

(III) 加減法的特例 在代數上加負數等於減正數;減負數等於加正數.所以在算術上兩個數量的性質,假如相反,即當用減法去求和,用加法去求差.

例一. 某日上午三時的氣溫是攝氏零下五度,上午七時升高三度,上午十一時又升高三度,下午二時又升高三度.問上午七時,十一時與下午二時的氣溫各幾度?

【代數解法】 上午七時的溫度是:

$$-5^\circ+3^\circ=-2^\circ$$

上午十一時的溫度是:

$$-2^\circ+3^\circ=1^\circ$$

下午二時的溫度是:

$$1^\circ+3^\circ=4^\circ.$$

【算術解法】 上午七時的溫度是零下:

$$5^\circ-3^\circ=2^\circ$$

上午十一時的溫度是零上:

$$3^\circ-2^\circ=1^\circ$$

下午二時的溫度是零上:

$$1^\circ+3^\circ=4^\circ.$$

(IV) 間接求兩個數量的和或差　有甲乙丙三個數量,由甲乙的和或差與乙丙的和或差,求甲丙的和或差,其算法可分做次列四種:

(1) 已知甲乙的差與乙丙的差,若甲乙丙三數的大小是順次的(甲>乙>丙或甲<乙<丙),則兩個差數的和,即為甲丙的差,如

$$(a-b)+(b-c)=a-c,\qquad (b-a)+(c-b)=c-a.$$

(2) 已知甲乙的差與乙丙的差,若甲乙丙三數的大小不是順次的,(甲>乙<丙或甲<乙>丙),則兩個差數的差,即為甲丙的差.如

$$(a-b)-(c-b)=a-c,\qquad (b-a)-(b-c)=c-a.$$

(3) 已知甲乙的和與乙丙的和則兩個和數的差即為甲丙的差,如

$$(a+b)-(b+c)=a-c,\qquad (b+c)-(a+b)=c-a.$$

(4) 已知甲乙的和與乙丙的差,若乙大於丙,則已知的和數與差數的差,即為甲丙的和;若乙小於丙,則已知的和數與差數的和,即為甲丙的和,如:

$$(a+b)-(b-c)=a+c,\qquad (a+b)+(c-b)=a+c.$$

(V) 已知的兩數,各加或減同數以後的變化所生的變化,要根據原來的關係而決定.現在分別說明

如下:

(1) 被減數與減數,同加某數或同減某數,它們的差不變(如年齡問題,卽須應用此種差不變的原則).如

$$(a+x)-(b+x)=a-b,\quad (a-x)-(b-x)=a-b.$$

(2) 被加數加某數,同時加數又減某數,它們的和不變(如分金問題,卽有時須應用此種和不變的原則).如

$$(a+x)+(b-x)=a+b.$$

(3) 若假分數的分子分母同加某數,分數的值卽變小;同減某數,分數的值卽變大.如

$$\frac{a}{b}>1,\ 則\ \frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b},\ 又\ \frac{a-x}{b-x}>\frac{a}{b}.$$

(4) 若眞分數的分子分母,同加某數,則分數的值卽變大;同減某數,則分數的值卽變小.如

$$\frac{a}{b}<1,\ 則\ \frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b},\ 又\ \frac{a-x}{b-x}<\frac{a}{b}.$$

【附註】 除法的被除數與除數,比的前項與後項,也適用上舉的第(3),第(4)兩原則.

(VI) 1的應用 計算應用題的時候,有時要加1或減1,茲舉數例分條說明如下:

(1) 甲乙的和當乙的倍數,等於甲當乙的倍數加1.

(2) 甲乙的差當乙的倍數,等於甲當乙的倍數減1.

(3) 普通分數應用題,求結果與原數的關係的時候,常用1來代表原數.

(4) 關於植木問題,植木成行時間隔的數等於株數減1.若兩端已有他物卽變爲:間隔數等於株數加1.

(5) 用舊法記載的年齡,等於現在的紀元減生時的紀元加1.

(6) 紀元前某年與紀元後某年相隔的年數,等於紀元前年數加紀元後年數減1.

(7) 普通所記的年,月,日是指的第幾年,第幾月,第幾日,實地過去的年,月,日各比所記的年,月,日少1,例如此時是民國25年9月16日上午8時30分,實地民國纔過去24年8個月15日又8時30分.

(8) 關於等差級數的問題:

$$項數=\frac{末項-首項}{公差}+1.$$

(9) 關於方陣問題:

$$每邊人數=\frac{周圍人數}{邊數}+1.$$

(VII) 雜例　加減法上的特點,除上面所述各點以外,還有很多要注意的地方,現在舉例說明如下:

(1) 關於和差問題:　已知若干數的和而要求各數時,先須應用加減法,將各數或各份變同,然後再用除法去計算.

(2) 關於列車問題: (a) 列車走過某地,除走該地的長度以外,還要走一個本身的長. (b) 兩列車相向進行,從相會到相離,要合走兩個車長的和. (c) 兩列車同方向進行從追及到超過,快車要比慢車多走兩個車長的和.

(3) 關於時差問題:　兩個時間,一個在午前,一個在午後,若求其中經過的時間,應於後面的時間上,加12時,再減前面的時間.

(4) 關於二位數問題: (a) 在二位數上加 m, 則他的兩位數字相同,求原來兩位數數字的差. 此種問題的解答有二:一種是十位數字比個位數字多 m;一種是十位數字比個位數字少 $10-m+1$. (b) 從二位數減 m, 則它的二位數字相同,求原來兩位數字的差. 此種

問題的解答也有二:一種是十位數字比個位少m;一種是十位數字比個位數字多$10-m+1$.

習題十六

(1) 答下列各問題:

(一) 有$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$三分數,分子c是a與e的平均數,分母d是b與f的平均數,問$\frac{c}{d}$是不是$\frac{a}{b}$與$\frac{e}{f}$的平均數?並列式說明理由.

(二) 某人生於民國紀元前a年,今已民國紀元後b年,則某人的年齡等於$a+b$,試說明它的理由.

(三) 有甲、乙、丙三數.已知甲乙的和,乙丙的和,與甲丙的和,求甲乙丙三數.此種問題的解法不止一種,試分別舉出,並加說明.

(四) 若云在長方形地的周圍栽樹,則於題內總須說明"四角都要有樹",這語的作用何在?

(五) 試用圖說明30款(VII)的(2)中所舉三種列車問題的理由.

(2) 解下列各應用題.

(一) 柳樹一行計36株,每株相隔一丈二尺,茲在各柳的中間,每隔4尺,栽桃樹一株.問共須栽幾株桃?

(二) 有二位數,它的數字和是8,若加9於原數,則兩位數字相同.問原二位數爲何?

(三) 甲乙二人各有金若干圓.若甲給乙四圓,則二人的所有金相等;若乙給甲四圓,則甲金是乙金的三倍.問乙給甲四圓以後,甲比乙多幾圓?又問所多的圓數,是乙所餘圓數的幾倍?

(四) 竿高九尺,蝸牛緣竿上升,日升五尺,夜降三尺.問何時可以達到竿頭?

(五) 從民國紀元前三年三月十六日下午四時到民國紀元二年五月十日上午十時,其中經過幾年幾月幾日幾時?

(3) 擬下列各種應用題:

(一) 用財產和負債的事實,編成一個應用題.要使題中一部分用減法求差,一部分用加法求差.

(二) 用同方向與異方向走路的事實,編成一個應用題.使題中一部分用加法求和,一部分用減法求和.

(三) 擬一應用題,應用和不變的原則.

(四) 擬一應用題,應用差不變的原則.

(五) 按照30款(VI)中所舉各種應該加1或減1的

例,各編成一個應用題.

32. 應用乘除的解法

(I) 乘除法的應用　甲數當乙數的幾倍或幾分之幾,由乙數求甲數,用乘法;由甲數求乙數,用等分的除法,由甲乙二數求兩者的關係,用包含的除法.

(II) 乘除的關係　除法是乘法的還原.在乘法上應用結合定律,有各種不同的變化,所以除法上也因此有各種不同的變化.玆分條列舉如下:

(a) 設原數是 m,所乘的倍數是 a,乘得的結果是 x,則

$$m \times a = x \cdots\cdots (1)$$

又

$$x \div a = m \cdots\cdots (2)$$

$$x \div m = a \cdots\cdots (3)$$

在 (1), (2), (3) 三個公式中的 a 是不名數, m 與 x 是同樣的名數.而 (2) 式是等分的除法; (3) 式是包含的除法.

(b) 設有二原數 m 及 n, m 的 a 倍與 n 的 a 倍的和是 x, 則

$$m \times a + n \times a = x \quad 即 \quad (m+n) \times a = x \cdots\cdots (4)$$

又

$$x \div a = m + n \cdots\cdots (5)$$

$$x \div (m+n) = a \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

解異方向進行的行程問題，與合力作工的工程問題等，卽根據此處所舉(4), (5), (6)三個公式的原理.

(c) 設有二原數 m 及 n，m 的 a 倍與 n 的 a 倍的差是 x，則

$$m \times a - n \times a = x \quad \text{卽} \quad (m-n) \times a = x \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

又

$$x \div a = m - n \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$x \div (m-n) = a \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

解雞兎問題，盈不足問題，時針問題及同方向進行的行程問題等，卽根據此處所舉(7), (8), (9)三個公式的原理.

(d) 設原數是 m；m 的 a 倍與 b 倍的和是 x，則

$$m \times a + m \times b = x \quad \text{卽} \quad m(a+b) = x \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

又

$$x \div (a+b) = m \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$x \div m = a + b \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(e) 設原數是 m；m 的 a 倍與 b 倍的差是 x，則

$$m \times a - m \times b = x \quad \text{卽} \quad m(a-b) = x \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

又

$$x \div (a-b) = m \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$x \div m = a - b \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

解分金問題，年齡問題，倍數的和差問題，二位數數

字交換問題,以及分數上由結果逆推原數的問題等,都是根據此處所舉(10)至(15)六個公式的原理.還有百分法和利息的公式,也有一部分是由上列六個公式推來的.

例一. 有一工程,甲獨做30日可以成功;乙獨做40日可以成功.現在先由甲獨做9日以後,乙再加入合做,問還要幾日,纔可以完工?

解. 甲做9日以後所餘的工程是:

$$1-\frac{1}{30}\times 9=\frac{7}{10}.$$

此時可以應用上列(b)類求倍數a的公式去求.所餘的工程$\frac{7}{10}$,相當於公式中的x;甲每日所做的工程$\frac{1}{30}$相當於公式中的m;乙每日所做的工程$\frac{1}{40}$,相當於公式中的n.

所以還要的日數是:

$$\frac{7}{10}\div\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{40}\right)=12.$$

例二. 兒童若干人等分鉛筆若干枝.若每人分3枝,則餘15枝.每人分5枝,則不足3枝;求兒童數與鉛筆數.

解. 第二次比第一次共計多分出:

$$15枝+3枝=18枝.$$

第一次總共分出的枝數當3枝的倍數,等於人數第二次總共要分出的枝數當5枝的倍數,也等於人數;所以可以應用上列(c)類求倍數 a 的公式去求.總枝數的差18枝,相當於公式中的 x,第二次每人所分的5枝,相當於公式中的 m,第一次每人所分的3枝相當於公式中的 n.

所以兒童的人數是:

$$18枝\div(5枝-3枝)=9.$$

又鉛筆的枝數是:

$$3\times9+15=42.$$

例三. 父年44歲,子年8歲,問何時父年是子年的四倍?

解. 父年比子年大:

$$44歲-8歲=36歲.$$

兩人年齡的差36歲是永久不變的,父年是子年四倍的時候,他們的差還是36歲,所以可以應用上列(e)類的公式去求結果的子年.年齡的差36歲相當於公式中的 x;子年當子年的倍數1,相當於公式中的 b;

父年當子年的倍數 4，相當於公式中的 a；結果的子年，相當於公式中的 m.

所以父年是子年四倍的時候，子年是：

$$36\text{歲} \div (4-1) = 12\text{歲}.$$

子年比現在大：

$$12\text{歲} - 8\text{歲} = 4\text{歲}.$$

所以 4 年後父年是子年的四倍.

(III) 逆數的應用　以一句說明兩者關係的話，逆過來說，即須應用原來彼此關係的逆數. 例如：1 公尺等於 3 尺，則 1 尺等於 $\frac{1}{3}$ 公尺；甲數當乙數的 $2\frac{1}{3}$ 倍，則乙數當甲數的 $\frac{1}{2\frac{1}{3}}$ 即 $\frac{3}{7}$；一石米值 8 圓 5 角，則一圓可以買 $\frac{1}{8.5}$ 石米.

逆數的應用，在工程問題上，用的機會最多，所以兒童對於逆數，除工程問題以外，就不知道怎樣應用，——尤其是分數與小數的逆數——這是要由教師設法補救的.

例. 王君遊山. 上山的時候，每時走 $3\frac{1}{2}$ 里；下山的時候，每時走 $4\frac{2}{3}$ 里，往返共費 $1\frac{1}{4}$ 時，求山路的長.

解. 王君上山每里要走 $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$ 時，即 $\frac{2}{7}$ 時.

$$王君下山每里要走\frac{1}{4\frac{2}{3}}時,即\frac{3}{14}時.$$

若山路長1里,則往返共計要費:

$$\frac{2}{7}時+\frac{3}{14}時=\frac{1}{2}時.$$

所以山路長的里數是:

$$1\frac{1}{4}時\div\frac{1}{2}時=2\frac{1}{2}.$$

(IV) 兩數大小的比較　比較甲乙兩數的大小,普通有兩種說法:(一)甲乙兩數的比是什麼;(二)甲數的若干倍等於乙數的若干倍.此兩種說法,恰巧相反,舉例證明如下:

例一. 甲數的 a 倍等於乙數的 b 倍,問甲乙兩數的比如何?

解. 設甲數爲 m,乙數爲 n.

即 $am=bn$,兩邊各以 an 除之得 $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$ 即

$$m:n=b:a.$$

例二. 鋼筆二枝的價值等於鉛筆五枝的價值.鋼筆一枝比鉛筆一枝貴360文.求鋼筆與鉛筆的單價.

解. 由題意推得一枝鋼筆與一枝鉛筆的價值的比是5:2.

所以鋼筆一枝的價值是:

$$360\text{文}\times\frac{5}{5-2}=600\text{文}.$$

又鉛筆一枝的價值是:

$$360\text{文}\times\frac{2}{5-2}=240\text{文}.$$

(V) 除式上的三個原則　除式上的被除數除數與商數,有一數不變,其他二數的關係,分別說明如下:(分數的分子相當於被除數,分母相當於除數,分數之值相當於商數;比的前項相當於被除數,後項相當於除數,比值相當於商數;所以分數與比的部分,也適用下列三個原則.)

(*a*) 除數不變,被除數與商數成正比例.

例如 $a\div b=c$, 則 $an\div b=cn$, $\frac{a}{n}\div b=\frac{c}{n}$.

(*b*) 被除數不變,除數與商數成反比例.

例如 $a\div b=c$, 則 $a\div bn=\frac{c}{n}$, $a\div\frac{b}{n}=cn$.

在除式上:除數若等於1,則商數等於被除數;所以除數若大於1,則商數小於被除數;除數若小於1,則商數大於被除數.小學兒童在初做小數除法的時候,因為不明瞭這個原則,所以對於商數大於被除數的

應用題,往往間接去求解答,這是要由教者去設法糾正的.

例. 八斗五升米的價值是7圓1角4分,問一石米的價值是多少?

當兒童計算這條應用題的時候,因爲預知結果大於7圓1角4分,往往間接求之如下式:

一石米的價值是:　7.14圓$\div 8.5\times 10=8.4$圓.

(c) 被除數和除數用同數乘之或除之,它的商數不變.

例如 $a\div b=c$, 則 $an\div bn=c$, $\frac{a}{n}\div\frac{b}{n}=c$.

小學兒童因爲不明瞭這個原則,往往會發生不合理的疑問.例如一個應用題中有兩句——某人賣去橘子120個,獲利15%——兒童常會發出疑問說:"每個獲利15%呢?還是總共獲利15%呢?"這題中總共成本是每個成本的120倍,總共利息也是每個利息的120倍.所以說它每個獲利15%也可.說它總共獲利15%也可.假如沒有完全賣出,那就是例外了,舉例如下:

例. 水果商販賣橘子120個,預計可以獲利20%,後來因腐爛若干個,結果祇獲利15%,求腐爛的個數.

解. 假設每個的成本是1,則總共的成本是120.每

個的賣價是1.2.

因腐爛所受的損失是:

$$120\times(1.2-1.15)=6.$$

所以腐爛的個數是:

$$6\div1.2=5.$$

(VI) 除法上餘數的處置　除不盡的整數除法,對於餘數的處置,要看應用題的內容,分做下面四種不同的辦法:(一)餘數要明白標出,(二)結果寫成帶分數的形式;(三)餘數收入商數算一個;(四)餘數可以棄去.茲分別舉例如下:

例一. 鉛筆每枝值銅圓 8 枚,問銅圓 37 枚可以買幾枝鉛筆?

解. 37 枚 ÷ 8 枚 = 4……餘 5 枚.

答: 可以買鉛筆四枝餘銅圓 5 枚.

例二. 青菜每斤値銅圓 8 枚,問銅圓 37 枚可以買青菜幾斤?

解. 37 枚 ÷ 8 枚 $=4\frac{5}{8}$.

答: 可以買青菜 $4\frac{5}{8}$ 斤卽 4 斤 10 兩.

例三. 椅子 37 張,用人力車運往某處,每次可以運 8 張,問幾次可以運完?

解. 37張÷8張＝4……餘5張.

答: 共計要搬運5次.

例四. 某人抄書每抄6分鐘,就要休息2分鐘,現在抄錄某書,共計經過37分鐘,問中間會休息幾次?

解. 37分÷(6分＋2分)＝4……餘5分.

答: 中間共休息四次.

習題十七

(1) 以下各題是適應32款(II)所舉各種不同的情形而編成的,試逐題指出所用的公式;並答出相當於公式中 x 的是什麼?相當於 a, b 的是什麼?相當於 m, n 的是什麼?

(一) 東西兩村,相隔3里.甲由東村往西村,每分鐘走25丈;同時乙也由西村往東村.每分鐘走20丈問幾分鐘以後可以相會?

(二) 某數的三倍加51,等於某數的八倍減4,求某數.

(三) 雞兔共計100頭,280足,問雞兔各幾頭?

(四) 某人用7圓買得帽一頂鞋一雙,帽價比鞋價的三倍少二角,問帽與鞋的價值各幾何?

(五) 某分數的分子若加 3，則等於$\frac{5}{9}$；分子若加5，則等於$\frac{2}{3}$；求某分數.

(六) 甲乙二人，共有金180圓.甲金的三倍，等於乙金的五倍.問二人各有金幾圓？

(七) 甲乙二人同時由東村往西村.甲每分鐘走25丈，乙每分鐘走20丈，甲抵西村以後，又折回迎乙，折回後經過 4 分鐘遇着乙，問東西村的距離幾何？

(2) 寫出下列各題的公式：

(一) 關於行程問題的速度，時間，與總路程三者的關係如何？

(二) 甲乙二人同時從兩地相向進行，從出發到相會，題中甲的速度，乙的速度，時間，與總路程的關係如何？

(三) 甲乙二人同時從兩地同方向進行，從出發到追及，題中甲的速度，乙的速度，時間與兩地距離的關係如何？

(四) 寒暑表上華氏度數與攝氏度數的關係如何？

(五) 二位數交換問題的公式爲何？並說明它的理由.

(六) 有餘數的除法,其式如下:問還原求除數與商數的公式如何?

被除數 ÷ 除數 = 商數……餘數.

( ) 答出下列各問題:

(一) 甲乙二數的比是 3:4,乙數的五倍等於丙數的六倍;問甲乙丙三數的連比是什麼?

(二) 甲數的 2 倍,等於乙數的 3 倍,又等於丙數的 $5\frac{1}{3}$ 倍,問甲乙丙三數的連比是什麼?

(三) 要使分數之值大 a 倍,有幾種什麼方法?

(四) 要使分數之值小 a 倍,有幾種什麼方法?

(五) 仿 30 款 (VI) 的四個例題,編成四個應用題.

第三節* 複雜應用題的解法

33.* 變換事實 題中有關係的事實,假如彼此混淆不清,就要阻礙思索的途徑.對於這種應用題,可以變換它的事實,改成易於思索的類似題,再由類似題的解法,推出原題的解法,舉例說明如下:

例一. 某分數的分子加一,則等於 $\frac{3}{4}$;分母加二,則等於 $\frac{1}{2}$;求某分數.

上題分數的分子分母與分數之值,都是不名數,思

索時容易彼此混淆，若將它變成分金問題的事實(如下例)，其解法卽比較容易推出.

類似題：若干人分金若干圓，若總數添 1 圓，則每人可得 $\frac{3}{4}$ 圓；若添 2 人來分金，則每人可得 $\frac{1}{2}$ 圓；求人數與圓數.

解. 若不增加二人而仍使每人得 $\frac{1}{2}$ 圓，則總金額上卽應減去：$\frac{1}{2}$ 圓 $\times 2=1$ 圓.

前後每人所得金額的差是：

$$\frac{3}{4}\text{圓}-\frac{1}{2}\text{圓}=\frac{1}{4}\text{圓}.$$

前後分出的總金額的差是：

$$1\text{圓}+1\text{圓}=2\text{圓}.$$

所以人數是：　$2\text{圓}\div\frac{1}{4}\text{圓}=8.$

總金額是：　$\frac{3}{4}\text{圓}\times 8-1\text{圓}=5\text{圓}.$

原題的分子相當於類似題的總金額；分母相當於類似題的人數；所以原題的解法，不難由此類推出來.

例二. 鐘上的長短針，在七時和八時間，何時成直角?

上題長針比短針所多走的，是時間的單位——分；長針要達到適合於題意的目的，共計要走的，也是時

間的單位——分;所以思索的時候,感覺彼此混淆不清.若將它改成進行問題的事實(如下例),則頭緒自較分清.

類似題: 汽車每秒走1丈,人步行每秒走$\frac{1}{12}$丈,汽車在人後35丈,問幾秒鐘以後,汽車與人相隔15丈?

原題的長針相當於類似題的汽車;短針相當於類似題的人;所以原題的解法可以由類似題的解法推想出來.

34.* 化簡條件 應用題中已知條件與未知數的個數應相等,在前已經說明.若要解未知數有兩個以上的應用題,該題中各個未知數,是不能同時求出的,所以先要設法減少題中未知數;要減少未知數,當然先要化簡題中的已知條件,玆將化簡條件的方法,分別舉出如下:

(1) 消去法 由甲乙兩數的倍數的和差,求甲乙兩數,可以先將題內兩個已知條件中的甲數(或乙數)的倍數變同,然後再用加法或減法消去一個未知數.玆設兩個未知數爲x, y;所加的倍數是a, b, c, d;兩個倍數的和差是P, Q,分別立成代數式指示算術解法的步驟如下:

(a) 已知 $ax+by=P, \quad cx+dy=Q.$

則 $acx+bcy=cP, \quad acx+ady=aQ.$

用減法消去 x 得:

$$(bc\sim ad)y=cP\sim aQ.$$

(b) 已知 $ax+by=P, \quad cx-dy=Q.$

則 $acx+bcy=cP, \quad acx-ady=aQ.$

用減法消去 x 得:

$$(bc+ad)y=cP-aQ.$$

(c) 已知 $ax+by=P, \quad dy-cx=Q.$

則 $acx+bcy=cP, \quad ady-acx=aQ.$

用加法消去 x 得:

$$(bc+ad)y=cP+aQ.$$

(d) 已知 $ax-by=P, \quad cx-dy=Q.$

則 $acx-bcy=cP, \quad acx-ady=aQ.$

用減法消去 x 得:

$$(ad-bc)y=cP-aQ.$$

(e) 已知 $ax-by=P, \quad dy-cx=Q.$

則 $acx-bcy=cP, \quad ady-acx=aQ.$

用加法消去 x 得:

$$(ad-bc)y=cP+aQ.$$

若題中未知數有三個以上,也可仿着代數上解聯立方程式的方法,逐步消去它們的未知數.

例一. 五個鴨蛋比四個雞蛋貴110文;七個鴨蛋比五個雞蛋貴190文;問一個鴨蛋一個雞蛋的價值各幾文?

解. 因為五個鴨蛋比四個雞蛋貴110文.

所以五個鴨蛋的七倍(卽35個)比四個雞蛋的七倍(卽28個)貴:$110\times7=770$文.

又因為七個鴨蛋比五個雞蛋貴190文.

所以七個鴨蛋的五倍(卽35個)比五個雞蛋的五倍(卽25個)貴:190文$\times5=950$文.

從35個鴨蛋的價值中,少減了$(28-25)$個雞蛋的價值,結果就多了:950文$-770=180$文.

所以一個雞蛋的價值是:$180\div(28-25)=60$文.

一個鴨蛋的價值是:$(60\times4+110)\div5=70$文.

例二. 三石米同五石豆的價值的和是66圓;四石豆和七石麥的價值的和是72圓;二石米比三石麥貴1圓;問米豆麥每石的價值各多少?

解. 因為三石米與五石豆值66圓.

所以三石米的四倍(卽12石)與五石豆的四倍(卽20

石)的價值的和是: $66圓\times4=264圓$.

又因爲四石豆與七石麥共值72圓.

所以四石豆的五倍(卽20石)與七石麥的五倍(卽35石)的價值的和是: $72圓\times5=360圓$.

前後豆的石數相同,所以35石麥比12石米貴:

$$360圓-264圓=96圓.$$

又因爲二石米比三石麥貴1圓.

所以二石米的六倍(卽12石)比三石麥的六倍(卽18石)貴: $1圓\times6=6圓$.

35石麥比12石米貴96圓,12石米又比18石麥貴6圓,所以35石麥比18石麥貴: $96圓+6圓=102圓$.

所以一石麥的價值是: $102圓\div(35-18)=6圓$.

一石豆的價值是: $(72圓-6圓\times7)\div4=7.5圓$.

一石米的價值是: $(66圓-7.5圓\times5)\div3=9.5圓$.

(II) 代入法 普通說明甲乙兩數的關係,大概分次列七種: (一)兩數的和; (二)兩數的差; (三)兩數的倍數和; (四)兩數的倍數差; (五)兩數的積; (六)甲數當乙數的幾倍或幾分之幾; (七)甲數比乙數的幾倍或幾分之幾多若干或少若干.於此七種條件中,若已知兩個條件,卽可根據第一條件中甲乙二數的關係,

代入第二條件,使第二條件中的甲數變成乙數或乙數變成甲數.

上列七種關係中的(四)可以變成(七)的說法,所以此兩種也可當做一種看.除上列七種外,其他的關係,大概總可變成上列的說法.例如甲乙兩數的比或甲數的幾倍等於乙數的幾倍,即可變成(六)的說法;又如甲數的幾倍比乙數的幾倍多若干,或少若干,即可變成(七)的說法.

茲將應用代入法的各種問題,分別說明如下:

(a) 已知二數(x, y)的和(a)與差(b),求二數.

即
$$x+y=a \cdots\cdots(1)$$
$$x-y=b \cdots\cdots(2)$$

由(2)得　$x=y+b$, 或 $y=x-b$.

代入(1)得

$$y+b+y=a \quad \therefore \quad y=\frac{1}{2}(a-b),$$

或
$$x+x-b=a \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}(a+b).$$

所以和差問題的公式是:

$$\text{大數}=\frac{1}{2}(\text{和}+\text{差}),\ \text{小數}=\frac{1}{2}(\text{和}-\text{差})$$

(b) 已知甲數(x)當乙數(y)的倍數(m),與二數的和

(a)，求二數

即 $$x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x=my \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(2)代入(1)得 $$my+y=a$$

$$\therefore \quad y=\frac{a}{m+1}.$$

所以和商問題的公式是： 小數＝和÷(商＋1).

若倍數 $m<1$，則所求的 y 是大數，以下仿此.

(c) 已知甲數(x)當乙數(y)的倍數(m)，與二數的差(b)，求二數.

即 $$x-y=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x=my \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(2)代入(1)得 $$my-y=b$$

$$\therefore \quad y=\frac{b}{m-1}.$$

所以差商問題的公式是： 小數＝差÷(商－1).

(d) 已知甲數(x)當乙數(y)的倍數(m)，與二數的積(n)，求二數.

即 $$xy=n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x=my \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(2)代入(1)得 $$my^2=n$$

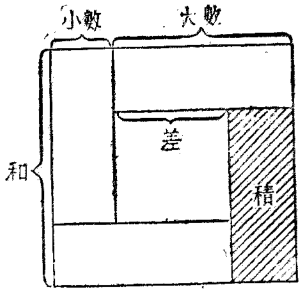
$$\therefore\quad y=\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

所以積商問題的公式是：　小數$=\sqrt{積\div商}$.

(e)　二數(x, y)的積(n),和(a),與差(b)三者的關係,繪圖說明如下:

由右圖可以看出和的平方比差的平方多積的四倍,所以推得兩個公式如下:

$a=\sqrt{b^2+4n}$,　$b=\sqrt{a^2-4n}$.



(32)

對於和積問題,可以先由和與積求得二數的差,再用和差問題的公式去求二數;對於差積問題,也可以先由差與積求得二數的和,再用和差問題的公式去求二數.

(f)　由甲乙兩數的倍數的和差,求甲乙二數.

此類問題本可用消去法去解,其解法已經在前分別說過,但也可用比較法去解,茲將前舉的(a)類改用比較法解之如下式:

已知　$ax+by=P$ ....(1)

$cx+dy=Q$ ....(2)

由(1)得　$x=\dfrac{P-by}{a}$,　由(2)得　$x=\dfrac{Q-dy}{c}$

比較得 $$\frac{P-by}{a}=\frac{Q-dy}{c}.$$

去分母,移項,得 $(bc\sim ad)y=cP\sim aQ.$

其餘四類也可仿着上例分別改換算法.

(g) 遇着甲數比乙數的幾倍或幾分之幾多若干或少若干的條件,可以設法先將所多的減去或將所少的加上,使甲數適爲乙數的幾倍或幾分之幾,即可應用前舉的公式去解.

(h) 若問題中未知數有三個以上,也可應用代入法,依次一一代入,使其未知數逐漸減少,即可求得其解答.

例一. 甲乙丙三人分銀1000圓,甲比丙的二倍多2圓,乙比丙的三倍少10圓,問三人各得幾圓?

解. 要使甲所得適爲丙的兩倍,乙所得適爲丙的三倍,則總金額卽應變做:

$$1000\text{圓}-2\text{圓}+10\text{圓}=1008\text{圓}.$$

此1008圓卽丙的一倍二倍與三倍的和.

所以丙所得是: $1008\text{圓}\div(1+2+3)=168\text{圓}.$

又乙所得是: $168\text{圓}\times 3-10\text{圓}=494\text{圓}.$

又甲所得是: $168\text{圓}\times 2+2\text{圓}=338\text{圓}.$

例二　甲乙丙三人分銀1000圓,甲比乙的二倍多2圓,乙比丙的三倍少10圓,問三人各得幾圓?

解　因為乙比丙的三倍少10圓,所以乙的二倍比丙的(3×2)倍少:　10圓$\times 2=20$圓.

甲比乙的二倍多2圓,即比丙的(3×2)倍少:

$$20\text{圓}-2\text{圓}=18\text{圓}.$$

要使乙適成丙的3倍,甲適成丙的(3×2)倍,則總金額即應變成:　1000圓$+10$圓$+18$圓$=1028$圓.

所以丙所得是:　1028圓$\div(3\times 2+3+1)=102.8$圓.

又乙所得是:　102.8圓$\times 3-10$圓$=298.4$圓.

又甲所得是:　298.4圓$\times 2+2$圓$=598.8$圓.

例三　長方形的面積是252方寸,長比闊的$\frac{4}{3}$少$\frac{2}{3}$寸.求各邊.

長與闊的$\frac{4}{3}$的積是:　252方寸$\times\frac{4}{3}=336$方寸.

所以長與闊的$\frac{4}{3}$的和是:$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+336\times 4}$寸$=36\frac{2}{3}$寸.

所以長是:$\left(36\frac{2}{3}\text{寸}-\frac{2}{3}\text{寸}\right)\times\frac{1}{2}=18$寸(即1尺8寸).

又闊是:$(18\text{寸}\times 3+2\text{寸})\div 4=14$寸(即1尺4寸).

(III)　更換法　兩種不同的事實,混和在一起,要將

它劃分開來,可以先假設完全是甲,然後再一一換入乙,使它適合原題的條件,則乙的個數,即可求出,舉例如下:

例一. 由甲地往乙地,步行 8 時可到,乘車則 3 時可到,某人乘車往乙地,中途因爲車壞,改用步行,共計經過 4 時 40 分纔到乙地,求步行的時間.

解. 假設 4 時 40 分完全乘車,即可走總路程的:
$\frac{1}{3}\times 4\frac{2}{3}=1\frac{5}{9}$.

多走了總路程的: $1\frac{5}{9}-1=\frac{5}{9}$.

假如步行 1 時,即少走 $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$.

所以步行的時數是: $\frac{5}{9}\div\frac{5}{24}=2\frac{2}{3}$ 即 2 時 40 分.

例二. 二角輔幣和五角輔幣共計 24 張,五角輔幣的總價比二角輔幣的總價多一圓五角,問兩種輔幣各幾張?

解. 假設 24 張完全是五角輔幣,則五角輔幣的總價即比二角輔幣的總價多: 5 角 ×24=120 角.

比題中的差多了: 120 角 −15 角 =105 角.

假如用一張五角輔幣換成一張二角輔幣,則二角

輔幣的總價,卽多了二角,五角輔幣的總價反少了五角,所以總價的差便減少: 5角+2角=7角.

所以二角輔幣的張數是: 105角÷7角=15.

又五角輔幣的張數是: 24-15=9.

(IV) 混合法 應用題中未知數在三個以上,有時要將其中有關係的兩種混合起來,當做一種,然後再應用其他方法去求解答,舉例如下:

例. 有甲乙丙丁四種茶葉.甲種每兩360文,乙種每兩240文,丙種每兩150文,丁種每兩60文.某人用4500文,買得四種茶葉共計二斤,其中乙茶是甲茶的四倍,丁茶比丙茶的二倍多四兩,問四種茶葉各幾兩?

解. 假如少買四兩丁茶,使丁茶適爲丙茶的二倍,則總共的重量卽變做32兩-4兩=28兩.

又總價也因此變做: 4500文-60文×4=4260文.

將丙丁兩種茶葉混和起來,它們的平均價是:

$$\frac{60\text{文}\times 2+150\text{文}}{2+1}=90\text{文}.$$

將甲乙兩種茶葉混和起來,它們的平均價是:

$$\frac{240\text{文}\times 4+360\text{文}}{4+1}=264\text{文}.$$

此時已將原題變成次列的別一問題:

甲乙混合茶每兩264文,丙丁混合茶每兩90文某人用4260文買得兩種茶葉共28兩,問兩種各幾兩?

用更換法得甲乙混合茶的兩數是:

$$(4260\text{文}-90\text{文}\times 28)\div(264\text{文}-90\text{文})=10.$$

又得丙丁混合茶的兩數是: $28-10=18.$

所以甲茶的重量是: $10\text{兩}\div(4+1)=2\text{兩}.$

又得乙茶的重量是: $2\text{兩}\times 4=8\text{兩}.$

又得丙茶的重量是: $18\text{兩}\div(2+1)=6\text{兩}.$

又得丁茶的重量是: $6\text{兩}\times 2+4\text{兩}=1\text{斤}.$

35*. 逐步決定範圍 解整數性質部分的應用題,思索的途徑完全與其他各題不同,要由已知各條件,逐步去決定解答的範圍,條件越多,範圍越窄,並且條件上略有不同,解法就完全變換,分別舉例如下:

例一. 有長方形地一塊,長3丈6尺,闊3丈,在它的周圍栽樹,各樹間的距離要相等,並且四角都要有樹,問至少要栽幾棵樹?

解. 因為四角都有樹,各樹的距離相等,所以長與闊各有兩個約數,(一)相鄰兩棵的距離,(二)間隔的個數.

又因為四邊上各樹的距離都相等,所以相鄰兩棵

的距離是長與闊的公約數.

又因爲樹的棵數要越少越好,所以相鄰兩棵的距離要越大越好.有如此三步的推論,可知相鄰的距離,是長與闊的最大公約數.

36尺與30尺的最大公約數是6尺,

所以樹的棵數是: $(36尺+30尺)\times2\div6尺=22$.

例二. 某數用7除餘3,用11除餘2,問某數最小是什麼?

解. 22是用7除餘1用11除不餘的數.

所以 $22\times3=66$ 是用7除餘3用11除不餘的數.

56是用11除餘1用7除不餘的數.

所以 $56\times2=112$ 是用11除餘2用7除不餘的數.

在66上加7的倍數,用7除還餘3,在112上加11的倍數用11除還餘2.

所以用7除餘3用11除餘2的各數中有一數是: $66+112=178$.

在178上減去7與11的公倍數,兩種餘數都不變.

7與11的最小公倍數是77.

$178\div77=2$……餘24.

所以24是合於題意各數中最小的數.

例三. 運動圈周圍長240丈.甲,乙,丙三人同時同地同方向沿着圈周競走,甲每分鐘走25丈,乙每分鐘走22丈,丙每分鐘走16丈,問幾分鐘以後三人又可以相會?又問幾分鐘後三人又可以相會於原出發點?

本題的兩個問題很容易混淆,但是解法卻完全不同.

第一個問題的解答是甲比乙多走一圈的時間與乙比丙多走一圈的時間的最小公倍數.

第二個問題的解答,是三人各走一圈的時間的最小公倍數.

36*. 分析問題 一個複雜的應用題,是幾個連貫的事實混合編成的.則解的時候,可將它分析成幾個簡單的應用題逐步去求解答.

例一. 某物賣20圓,可獲利25%;現在賣18圓,問損益的成分是多少?

由賣價求損益的成分,非先知道成本不可;要求成本,須用到上舉的兩個條件.所以本題可以分析成下列兩個簡單的應用題:

(一)某物賣20圓,獲利25%,問成本是幾圓?

(二)某物的成本是(一的解答),現在賣18圓,問損

銻的成分是多少?

例二. 東西兩村相隔600丈,甲乙二人同時由東村往西村,同時丙也由西村往東村,每分鐘的速度,甲是18丈,乙是14丈,丙是12丈.甲丙相遇以後,甲就折回迎乙,問從折回起經過幾分鐘,可以遇着乙?

要求甲乙相向進行所需的時間,先要知道他們的距離;要知道距離,先要知道他們同方向進行時所經過的時間;這個時間,應該由甲丙的速度同距離求出來.所以本題可以分做下列的三個簡單問題:

(一) 東西兩村相隔600丈,甲丙二人同時由兩村相向出發,甲每分鐘走18丈,丙每分鐘走12丈,問幾分鐘後二人可以相會?

(二) 甲乙二人同時同地同方向進行.甲每分鐘走18丈,乙每分鐘走14丈,問(一的解答)分鐘以後,兩人相隔幾丈.

(三) 甲乙二人從相隔(二的解答)丈的兩地,相向進行,甲每分鐘走18丈,乙每分鐘走14丈,問幾分鐘以後,兩人可以相遇?

37*. **其他解法** 解應用題的方法和步驟,除上舉四類(33至36款)外,仍有下列兩種.